

Movimiento de descarga de gases en conductos largos: Modelización y estudio de una ecuación parabólica doblemente no lineal

J. I. DÍAZ⁽¹⁾ y A. LIÑAN⁽²⁾

A Alberto Dou con afecto y admiración por su labor en pro de la Matemática Aplicada de nuestro país

INTRODUCCION

En esta comunicación se considera el fenómeno de descarga de un gas en un conducto largo en régimen turbulento. Nuestro primer objetivo radica en la modelización matemática de dicho problema. Tal descripción es llevada a cabo por medio de la llamada «aproximación hidráulica». Se mostrará cómo en los flujos transitorios que se producen en conductos de una gran longitud L en comparación con su diámetro D , la apertura de una válvula en el extremo final del conducto provoca dos etapas de naturaleza distinta. En una primera etapa aparecen fenómenos de tipo ondulatorio como corresponde a ecuaciones de tipo hiperbólico. Por el contrario en una segunda etapa la presión se rige por una ecuación parabólica no lineal para la que aparecen fenómenos peculiares. El estudio matemático del comportamiento asintótico en esta segunda etapa constituye el segundo objetivo de este trabajo. Se mostrará cómo tal comportamiento asintótico depende de manera fundamental del valor de la presión ambiental p_a que se presupone en el extremo final del conducto. Si $p_a > 0$ la descarga ($p = p_a$ en todo el conducto) se limita a un tiempo finito y de hecho se produce en todo el conducto simultáneamente. Por el contrario, si se supone $p_a = 0$ la descarga se produce en un tiempo infinito y el decaimiento es de tipo exponencial negativo con el tiempo.

- (1) Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid. (Proyecto PB 86-0485 de la CICYT).
- (2) Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid. (Proyecto PB 86-0497 de la CICYT).

1. MODELIZACION

Como se ha indicado en la introducción, para la descripción del proceso transitorio de descarga (así como de carga) de gases en conductos largos resulta de gran utilidad la «aproximación hidráulica» (véase p.e. [14]). Dado que este tipo de flujos es generalmente turbulento tal aproximación admite que la velocidad u , la temperatura T , la densidad ρ y la presión p son uniformes a través de la sección como consecuencia de la agitación turbulenta. En consecuencia, las anteriores magnitudes se suponen funciones únicamente de la coordenada x (que mide las distancias a lo largo del conducto) y del tiempo t .

Cuando la longitud L del conducto es muy grande en comparación con su diámetro D (L es del orden de miles de veces D), se producen dos etapas claramente diferenciadas como consecuencia de la apertura de una válvula. Para ilustrar este cambio en la estructura del flujo analizaremos, en esta sección, el caso particular de la descarga de un conducto inicialmente lleno de gas, en reposo, a la presión p_0 y temperatura T_0 , cuando el extremo $x = L$ se abre a la atmósfera, de presión $p_a < p_0$. (Si $p_a > p_0$ el proceso es de carga). El movimiento de los gases está influenciado por el intercambio de calor con la pared del conducto, cuya temperatura supondremos se mantiene constantemente igual al del valor inicial T_0 .

En el supuesto de que la sección del conducto se mantenga constante y se desprecien los efectos, poco importantes aquí, de la fuerza gravitatoria del gas (que supondremos perfecto), las ecuaciones del movimiento se escriben en forma clásica adimensional (véase p.e. [9] [14]).

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad [1]$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{f}{2} \rho |u| u \quad [2]$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \frac{\gamma}{(\gamma-1)} T + \frac{1}{2} u^2 \right\} - \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{f}{2} |u| \rho \left\{ \frac{\gamma}{(\gamma-1)} (T-1) - \frac{1}{2} u^2 \right\} \quad [3]$$

$$p / \rho = T \quad [4]$$

En estas ecuaciones hemos medido la presión y temperatura con p_0 y T_0 , la densidad con su valor inicial $\rho_0 = p_0 / R_g T_0$. R_g es la constante del gas y γ la relación de calores específicos $\gamma = C_p / C_v$. Como unidad de longitud utilizaremos la del conducto L y como unidad de velocidad $\sqrt{R_g T_0}$.

que multiplicada por $\sqrt{\gamma}$ nos da la velocidad inicial del sonido en el gas. Como unidad de tiempo utilizaremos $L / \sqrt{R_g T_0}$.

Las fuerzas de fricción de la pared están modeladas por el término de la derecha en la igualdad (2), donde aparece el parámetro de fricción $f = \lambda L / D$, proporcional al coeficiente λ de Darcy-Weissbach que a su vez es función del número de Reynolds local y de la rugosidad relativa del conducto. En el movimiento turbulento en tubos lisos puede escribirse $\lambda = \lambda_1 (u / u_1)^{-1/4}$, en tanto que para tubos rugosos y números de Reynolds moderadamente altos λ es constante, del orden de 10^{-2} (véase, por ejemplo, [9]), lo que supondremos en lo que sigue. Nótese que a pesar del pequeño valor de λ el parámetro f puede ser muy grande ($f \gg 1$) caso en que centraremos nuestra atención. Señalamos también que para modelar el calor recibido por el fluido desde la pared hemos hecho uso de la analogía de Reynolds (véase p.e. [9] y [14]) lo que conduce al término de la derecha en la igualdad (3).

En esta analogía se admite que los trasvases de cantidad de movimiento y energía, o entalpía de remanso, hacia la pared son debidas al mismo mecanismo de transporte convectivo por los remolinos de la turbulencia. Por ello el coeficiente de proporcionalidad, $f|u|/2$, que aparece multiplicando en (2) a la diferencia de velocidad, u , entre el fluido del centro del conducto y la pared es el mismo que multiplica en (3) a la diferencia entre las entalpías de remanso del fluido en el conducto y la pared:

$$(1/2)u^2 + \gamma/(\gamma - 1)(T - 1).$$

En el caso que no analizaremos con detalle aquí, de que la pared del conducto estuviese aislada térmicamente (en vez de suponer su temperatura constantemente igual a 1) el segundo miembro de (3) debe sustituirse por 0.

Por otra parte conviene señalar que la ecuación (3) que da la evolución de la entalpía de remanso puede ser sustituida por la ecuación:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \ln(p/\rho^\gamma) \right\} = - \frac{f}{2} |u| \frac{\gamma}{T} \left\{ T - 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u^2 \right\} \quad (3')$$

que describe la evolución de la entropía $\ln(p/\rho^\gamma)$. La ecuación (3') se obtiene restando a (3) la ecuación (2) multiplicada por u . En el caso de que la pared esté aislada térmicamente, el segundo miembro de (3') debe sustituirse por $f|u|u^3(\gamma - 1) / 2T$ como corresponde a la producción de entropía por efecto de la fricción.

Las ecuaciones (1)-(4) tienen lugar en el intervalo $0 < x < 1$ y para $t \geq 0$. Para determinar el proceso se hace pues necesario añadir unas condiciones iniciales que en nuestro caso corresponden a las siguientes:

$$u(0,x) = 0, T(0,x) = 1, p(0,x) = 1, 0 < x < 1. \quad (5)$$

Así mismo es necesario indicar las condiciones de contorno

$$u(t,0) = 0 \text{ con } t > 0 \quad (6)$$

como corresponde al extremo cerrado del conducto y la condición de «tipo alternativo».

$$p(t,1) = p_a \quad \text{si } u(t,1)/\sqrt{\gamma T(t,1)} < 1 \quad (7a)$$

$$u(t,1)/\sqrt{\gamma T(t,1)} = 1 \quad \text{si } p(t,1) > p_a \quad (7b)$$

como corresponde al extremo abierto a la atmósfera, de presión p_a ($p_a < 1$) referida a p_0 . Este último tipo de condiciones de contorno es consecuente con el carácter hipérbólico del sistema de ecuaciones (1)-(4).

Las ecuaciones del sistema (1)-(4) con las ecuaciones de Euler de los movimientos unidimensionales, no estacionarios, de gases, ampliadas con los segundos términos de (2) y (3) (o (3')) al incluir las fuerzas de fricción y el intercambio de calor con la pared del conducto. Los términos adicionales son de tipo algébrico, por lo que las ecuaciones ampliadas tienen el mismo sistema de características que las ecuaciones de Euler. Estas vienen dadas (véase, por ejemplo, [5] ó [16]) por

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx}{dt} = u \pm a$$

donde $a = \sqrt{\gamma T}$ es la velocidad del sonido. Las características de ecuación $dx/dt = u$ corresponden a las trayectorias de las partículas materiales o fluidas, mientras que las otras características corresponden a las ondas acústicas de Mach que se mueven a la derecha o a la izquierda respecto del fluido con la velocidad del sonido. Sólo cuando en $x = 1$, u es menor que a el fluido puede conocer que es p_a la presión exterior. Si p_a es suficientemente baja hay bloqueo sónico ($u = a$) en la sección de salida donde la presión es mayor que la presión exterior. Fuera del conducto el gas sigue expandiéndose adquiriendo, sólo allí, velocidades supersónicas.

Nótese que en el sistema (1)-(7) aparecen únicamente los parámetros γ y p_a de valor del orden de la unidad así como el parámetro de fricción f que supondremos $f \gg 1$.

Solución asintótica para conductos largos

La escala elegida para las velocidades, del orden de la del sonido, es la apropiada para medir la velocidad cuando la presión ambiente es una fracción del orden de la unidad de gas ($p_a < 1$), pero sólo en los primeros momentos del proceso de descarga si $f \gg 1$. En este caso v es sólo de orden unidad en una *primera etapa* corta, de duración $1/f$, en la que el mo-

movimiento aparece limitado a una zona pequeña a la salida de longitud $(1 - x) \sim 1/f$, como se describirá a continuación con más detalle. Estas escalas son las apropiadas para que todos los términos de (2) sean del mismo orden f , lo que también sucede con todos los términos de (1) y (3). Por ello durante esta etapa no hay simplificación posible del sistema (1)-(4) pero sí de las condiciones iniciales y de contorno.

Para describir el movimiento en esta primera etapa conviene utilizar como nuevas variables

$$\tau = ft \quad \text{y} \quad \chi = f(x - 1) \tag{9}$$

de orden unidad. Así obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u}{\partial \chi} = 0 \tag{1*}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial p}{\partial \chi} = -\frac{1}{2} \rho |u| u \tag{2*}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + u \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \left\{ \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \right\} = -\frac{|u|}{2} \frac{\gamma}{T} \left\{ T - 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u^2 \right\} \tag{3*}$$

$$p/\rho = T, \tag{4*}$$

a resolver para $\tau > 0$ y $\chi < 0$, con la condición inicial (5) al igual que la condición de contorno (7) en $\chi = 0, \tau = 0$. El motivo de estudiar el sistema (1*)-(4*) en $\chi < 0$ en vez de sobre el dominio acotado $-f \leq \chi \leq 0$ radica en el hecho de que la condición de contorno (6), ahora sobre $\chi = -f$ y $\tau > 0$, no juega ningún papel importante para tiempos $\tau \sim 1$, pues el movimiento resultante está confinado a la región $-\sqrt{\gamma} \tau < \chi < 0$, limitada a la izquierda por la línea característica correspondiente a la onda de Mach que se mueve a la velocidad del sonido.

Para tiempos $\tau \ll 1$ los efectos de la fricción y del intercambio de calor con las paredes son despreciables y es posible hacer una descripción analítica del proceso de descarga. El movimiento corresponde a una onda simple de expansión (véase, por ejemplo, [16] página 161 y [10] página 432) que avanza hacia el conducto en forma autosemejante; esto es, las variables fluidas son funciones de la variable de semejanza $\xi = \chi/\sqrt{\gamma} \tau$. La ecuación de la energía (3*) muestra que las partículas fluidas mantienen su entropía, que por ser uniforme en el estado inicial mantiene su valor uniforme posteriormente. Así pues $p/\rho^\gamma = 1$ y en virtud de las ecuaciones de estado se deduce que si $\tau \ll 1$ entonces:

$$p = \rho^\gamma = T^{\gamma/(\gamma-1)} = (a^2/\gamma)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (10)$$

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento pueden escribirse, teniendo en cuenta (10), en forma característica:

$$\frac{1}{\rho a} \frac{dp}{d\tau} + \frac{du}{d\tau} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{d\tau} = u + a$$

$$\frac{1}{\rho a} \frac{dp}{d\tau} - \frac{du}{d\tau} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{d\tau} = u - a$$

o bien:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{2}{\gamma-1} a + u \right) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{d\tau} = u + a \quad (11)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{2}{\gamma-1} a - u \right) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{d\tau} = u - a \quad (12)$$

Esto es, los invariantes en Riemman:

$$2a/(\gamma-1) + u \quad \text{y} \quad 2a/(\gamma-1) - u$$

se conservan respectivamente a lo largo de las características C^+ , que viajan a la derecha respecto al fluido, y C^- que viajan a la izquierda (véase Figura 1).

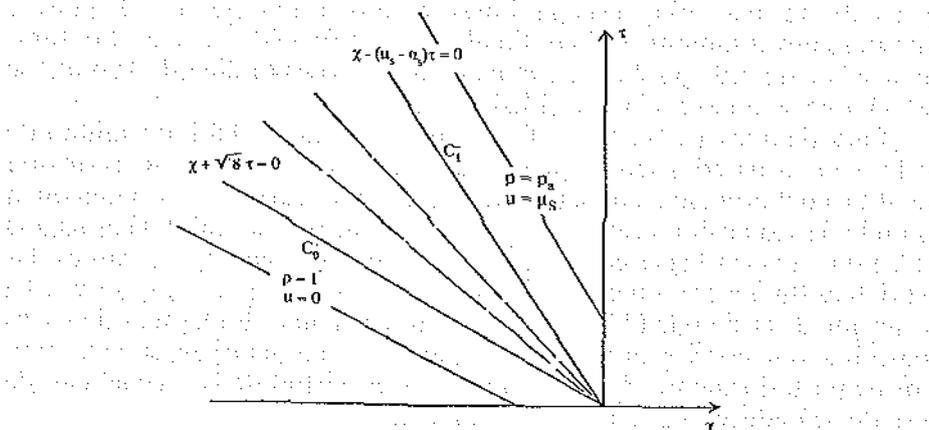


Figura 1

Dado que el invariante $2a/(\gamma - 1) + u$ es uniforme en $\tau = 0$ para todo $\chi \leq 0$, podemos asegurar que para todo $0 < \tau \ll 1$ se verifica la relación entre a y u dada por

$$2a/(\gamma - 1) + u = \sqrt{\gamma} / (\gamma - 1) \quad (13)$$

Por otra parte, puesto que a lo largo de las características $C_{2a/(\gamma - 1) - u}$ se mantiene constante, en virtud de (13), u y a se mantendrán constantes por lo que estas características son rectas en el plano χ, t .

Si la presión ambiente p_a es mayor que un valor p_c , que determinaremos a continuación el movimiento en la sección de salida es subsónico ($u_s - a_s < 0$). En este caso, del análisis de la estructura del flujo a grandes números de Reynolds fuera del conducto se puede asegurar que p_s es igual a la presión p_a que existe en el exterior, pues el fluido sigue en forma de chorro con la misma sección que en la salida. En segundo lugar, se observa que las ondas acústicas que arrancando de $\chi = 0$ en $\tau > 0$ se propagan según las características C^- (véase la Figura 1) avanzan aguas arriba en el conducto con velocidades $(a_s - u_s)$ constante imponiendo al fluido $u = u_s$, $a = a_s$ y $p = p_s = p_a$. Estos valores vienen dados, en virtud de (10) por la relación:

$$a_s = \sqrt{\gamma} p_a^{(1-\gamma)/2\gamma} = \sqrt{\gamma} - (\gamma - 1)u_s/2$$

Así pues, para asegurar que el flujo es subsónico en la sección de salida, p_a debe ser superior al valor de p_c que hace $u_s = a_s = u_c$ dado por:

$$u_c = 2\sqrt{\gamma} / (\gamma + 1), \quad p_c = \{2/(\gamma + 1)\}^{2\gamma/(\gamma - 1)} \quad (15)$$

Entre la primera característica C_0^- que saliendo de la sección de salida con la velocidad $-\sqrt{\gamma}$ inicia la expansión, y la primera C_1^- que saliendo también en $\tau = 0$ impone al fluido la velocidad u_s y presión p_a (esto es entre las características $\chi + \sqrt{\gamma}\tau = 0$ y $\chi - (u_s - a_s)\tau = 0$ hay un abanico de características que arranca del origen e imponen en el fluido presiones $p_a < p < 1$. La característica que alcanza el punto χ en el instante τ se mueve con velocidad χ/t dada por:

$$\chi/\tau = u - a = 2\sqrt{\gamma}/(\gamma - 1) - a \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \quad (16)$$

lo que determina a en función de χ/τ y por lo tanto el resto de las magnitudes fluidas.

Al disminuir la presión exterior, las magnitudes fluidas no se modifican en el abanico $C_0^- - C_1^-$ sólo el límite C_1^- del abanico. Cuando p_a alcanza el valor p_c la característica C_1^- , donde hay una discontinuidad débil, se hace vertical, pues $u_s = a_s$.

Para valores de $p_a < p_c$ el fluido en el conducto no puede conocer el valor de la presión exterior. El chorro generado por la expansión en la sección de salida es sónico con la presión $p_s = p_c$, pero se abre en el exterior dando lugar a velocidades supersónicas y $p = p_a$ sólo en el contorno exterior del chorro.

Los efectos de la fricción para τ de orden unidad hacen disminuir las velocidades generadas por la diferencia de presiones $1 - p_a$, pues en parte esta diferencia se emplea para equilibrar las fuerzas de fricción. También la presión en la sección de salida disminuye cuando inicialmente $p_a < p_c$, asegurando que en la sección de salida $M_s = u_s/a_s = 1$ hasta que en un instante τ_c , p_s alcanza el valor unidad, siendo posteriormente $p_s = p_a$.

La descripción del movimiento en la segunda etapa, $\tau \gg 1$, para valores de t tales que el movimiento afecta a todo el conducto y la presión cae en todas partes desde el valor inicial, es más simple. Sean t_d el tiempo característico y u_d el valor característico de la velocidad u en esta etapa (los valores de p y ρ y sus variaciones especiales y temporales en esta etapa son por hipótesis de orden unidad).

Los órdenes de magnitud de los dos términos de la ecuación de continuidad (1) $1/t_d$ y u_d son iguales si $u_d = 1/t_d$. Si por otra parte anticipamos que las fuerzas de presión $-\partial p/\partial x$ son del mismo orden (unidad) que las fuerzas de fricción $fu_d^2 = 1$, entonces los primeros términos de aceleración local y conectiva de (2) son del orden u_d/t_d y u_d^2 (es decir del orden $1/f$) y por lo tanto son despreciables frente a los de presión y fricción.

Además, al suponer que la velocidad u en la segunda etapa es del orden $u_d \sim 1/\sqrt{f}$, la ecuación de la energía (3) muestra que las variaciones de temperatura $T - 1$ son del orden $u_d^2 \sim 1/f$, por lo que la descarga puede considerarse ahora isoterma.

Así pues en la segunda etapa, para valores de t tales que $\sigma = t\sqrt{f}$ es de orden unidad de velocidad $v = \sqrt{fu}$, ρ y p , como funciones de σ y χ es de nen regidas por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \chi} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \chi} = -\bar{\rho} \frac{|v|v}{2} \quad (18)$$

$$p/\rho = T = 1, \quad (19)$$

que es una forma simplificada del sistema (1)-(4). Tal sistema tiene lugar para $\sigma > 0$ y $x \in (0,1)$ y para su estudio ha de acompañarse de las condiciones iniciales que en nuestro caso:

$$\rho(0,x) = 1, \quad 0 < x < 1 \quad (20)$$

y las condiciones de contorno que ahora son las siguientes:

$$v(\sigma,0) = 0, \quad \sigma > 0 \quad (24)$$

$$p(\sigma,1) = p_a, \quad \sigma > 0 \quad (22)$$

La condición inicial (20) obedece al hecho de que en la etapa anterior, para $\sigma \sim 1/f^{3/2}$, $p - 1$ (y v) difieren de cero sólo en la región $(1 - \chi) \sim 1/f$ muy pequeña respecto a 1. Esto junto con la condición de gas perfecto dada por (19) justifica (20). Señalemos también que los términos despreciados al escribir (18) y (19) son del orden de $1/f$ respecto a los retenidos.

Dado que $\rho \geq 0$, de la relación (18) se deduce que $\text{sign } v = -\text{sign } (\partial p / \partial x)$ y por tanto utilizando (19), el sistema (17) (18) puede escribirse en términos de la presión en la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial p^2}{\partial x} \right|^{1/2} \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} \right) \right) = 0, \quad \sigma > 0, \quad 0 < x < 1 \quad (23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(\sigma,0) = 0 \quad \sigma > 0, \quad (24)$$

$$p(\sigma,1) = p_a \quad \sigma > 0, \quad (25)$$

$$p(0,x) = 1 \quad 0 < x < 1 \quad (26)$$

Obsérvese que en nuestro caso $v \geq 0$ y por tanto (23) puede escribirse también como:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(- \frac{\partial p^2}{\partial x} \right)^{1/2} \right) = 0 \quad (27)$$

El problema (23)-(26) tiene, para $\sigma \ll 1$, una solución de semejanza en la que p y $g = \sigma^{1/3} p u$ son funciones de la variable de semejanza $\eta = (1 - x) / \sigma^{2/3}$ y vienen dadas por el sistema:

$$- \frac{2}{3} \eta p_\eta - g_\eta = 0 \quad (28)$$

$$(p^2)_\eta = g^2, \quad (29)$$

a integrar con las condiciones:

$$p = 1 \text{ en } \eta \rightarrow +\infty, \quad p = p_a \text{ en } \eta = 0.$$

La solución determina en particular el gasto de salida $(pu)_s = \sigma^{-1/3} g_s(p_a)$, siendo $g_s(p_a)$ el valor de g en $\xi = 0$. En particular, $g_s(0) = 0.728$. La solución de (23)-(26) pierde su carácter autosemejante para σ de orden unidad y la solución ha de ser obtenida numéricamente. El movimiento, y por tanto la descarga, están limitados (si $p_a > 0$) a un tiempo finito $\sigma \leq \sigma_0$, como se verá en lo que sigue.

2. TRATAMIENTO MATEMÁTICO DE LA ECUACION DE LA PRESION EN LA SEGUNDA ETAPA

En esta sección abordaremos el tratamiento matemático del problema parabólico dado por (23)-(26). Nuestro análisis será válido también para el caso en el que la variable x se mueve, más en general, en un abierto regular Ω de \mathbb{R}^n con lo que el caso unidimensional resultará por obvia restricción a $\Omega = (0,1)$ pero a la vez mostraremos cómo el valor de la dimensión n juega un papel importante en el desarrollo asintótico del problema.

A lo largo de esta sección centraremos nuestra atención en el siguiente problema: hallar $w: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solución de:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta_q w^m = 0 \quad \text{en } (0, \infty) \times \Omega \quad (30)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } (0, \infty) \times \Gamma_1 \quad (31)$$

$$w^m = h \quad \text{en } (0, \infty) \times \Gamma_2 \quad (32)$$

$$w(0, x) = w_0(x) \quad \text{en } \Omega \quad (33)$$

siendo Δ_q el q -laplaciano en la notación usual

$$\Delta_q g = \operatorname{div}(|\nabla g|^{q-2} \nabla g), \quad q > 1, \quad (34)$$

y m un parámetro no negativo. Se supone $\partial\Omega$ particionada en dos partes disjuntas Γ_1 y Γ_2 e.d.: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con Γ_2 no vacía y de vector unitario normal exterior ν . También supondremos en lo que sigue que:

$$h(t, x) = h, \quad h \in \mathbb{R}^+ \text{ y } w_0(x) \geq 0 \text{ en } \Omega. \quad (35)$$

Se puede probar que las condiciones (35) no representan ninguna limitación importante desde el punto de vista matemático pero su interés está resaltado por la formulación concreta antes vista.

Antes de seguir hagamos un breve comentario sobre la generalidad de la formulación anterior. En primer lugar la ecuación (30) se reduce al caso particular de la ecuación (23) haciendo $q = 3/2$ y $m = 2$.

Por otra parte ya se indicó en la sección anterior que otros exponentes m tienen también interés. Así, por ejemplo, en el movimiento turbulento en tubos lisos el coeficiente de Darcy-Weissbach es de la forma $\lambda = \lambda_1(u/u_1)^{-1/4}$ donde λ_1 es el valor de λ para la velocidad de referencia u_1 . En dicho caso las fuerzas de rozamiento llevan a reemplazar los términos de la derecha de las ecuaciones (2) (resp. (2*)) por $(\lambda_1 L/Du_1) \rho |u|^{3/4} u$ (resp. $-\rho |v|^{3/4} v$) con lo que en la ecuación de la presión (23) habría que reemplazar el término p^2 por $p^{7/4}$. En la formulación (30) equivaldría a hacer $m = 7/4$ y $q = 11/7$. También puede mostrarse (véase [12]) que en el caso de fluidos incompresibles el fenómeno de descarga (o carga) en conductos largos conduce a una ecuación para la presión renormalizada similar a (23) pero reemplazando el término p^2 por p . Señalemos también que en flujo laminar la aproximación hidráulica conduce a $\lambda = \lambda_1 u_1/u$ lo que correspondería a $m = 1$.

En la formulación de la sección anterior $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{0\}$ y $\Gamma_2 = \{1\}$ con lo que $\bar{v} = -\bar{x}$ así (31) coincide con (24). La constante h representa, en ese caso, al valor $\sqrt{p_a}$, con p_a dado en (25). Finalmente indiquemos que la condición inicial (33) incluye obviamente el caso particular $w_0(x) = 1$ pero el caso en el que w_0 no es constante tiene también un importante valor físico.

Señalemos también que el caso de $n = 2$ aparece en el estudio de la descarga de un gas limitado entre dos placas de grandes dimensiones comparadas con la distancia que las separa. En ese caso un análisis similar mostraría la existencia de dos etapas bien diferenciadas, y que en la segunda de ellas la presión vendría regida por la ecuación (30) con $q = 3/2$ y $m = 2$ en el caso de paredes rugosas y $m = 7/8$ en el caso de paredes lisas.

Por último es de resaltar que la ecuación parabólica (30) aparece en varios contextos diferentes al de descarga de gases en conductos largos. Este es el caso, por ejemplo, de filtración de fluidos en régimen turbulento en un medio poroso (véase p.e. la monografía [6] donde se encontrarán múltiples referencias).

La cuestión de la existencia, unicidad y regularidad de soluciones de problemas del tipo (30)-(33) ha atraído la atención de numerosos autores en los últimos años. Nuestro objetivo principal irá por otro camino pues nos centraremos en el estudio del comportamiento asintótico, para $t \rightarrow \infty$. Respecto a la existencia nos limitaremos a recordar el trabajo [1]

en el que el problema es «resuelto» bajo hipótesis muy generales sobre w_0 y que, en cualquier caso se aplican a cuando w_0 es acotada (lo que haremos en lo que sigue), e.d. supondremos

$$w_0 \in L^\infty(\Omega) \quad (36)$$

de lo que deducimos que:

$$0 \leq w(t,x) \leq M \quad (37)$$

para una cierta constante $M > 0$ (por ejemplo $M = \|w_0\|_{L^\infty} + h$).

El primer resultado de esta sección afirma, en términos de la presión, que la descarga del conducto se termina en un tiempo finito si $p_a > 0$ (o bien para cualquier $p_a \geq 0$ en el caso de conductos lisos o fluidos incompresibles).

Teorema 1. Sean $m > 0$ y $q > 1$. Supongamos que una de las siguientes hipótesis es verificada:

$$h > 0 \quad \text{y} \quad q < 2 \quad (m > 0 \text{ arbitrario}), \quad (38)$$

ó:

$$h = 0 \quad \text{y} \quad m(q-1) < 1. \quad (39)$$

Entonces existe un tiempo finito $T_0 > 0$ tal que $w(t,x) = h \forall t \geq T_0$ y $\forall x \in \Omega$.

Demostración. Comencemos homogeneizando la condición de contorno (32). Consideremos $z(t,x) = w^m(t,x) - h$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(z)}{\partial t} - \Delta_q z &= 0 && \text{en } (0,\infty) \times \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} &= 0 && \text{en } (0,\infty) \times \Gamma_1 \\ z &= 0 && \text{en } (0,\infty) \times \Gamma_2 \\ z(0,x) &= w_0^m(x) - h && \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (40)$$

siendo:

$$\psi(z) = (z+h)^{1/m} \text{sign}(z+h) \quad (41)$$

Para obtener la conclusión seguiremos el método integral de la energía de manera similar a [2]. Supongamos, por el momento que $z \geq 0$, lo

que equivale a suponer $w^m \geq h$. Multiplicando la ecuación por z^k con $k > 0$ a elegir más tarde e integrando por partes resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} B_k(z(t)) dx + k \int_{\Omega} |\nabla z|^q z^{k-1} = 0 \quad (42)$$

siendo:

$$B_k(r) = \psi(r)r^k - k \int_0^r \psi(s)s^{k-1} ds. \quad (43)$$

Obsérvese que si ψ es derivable (e.d. si $h > 0$ ó $h = 0$ y $m \leq 1$) se tiene que $B_k(r) = \int_0^r \psi'(s)s^k ds$. Nótese que para ψ dada por (41) se tiene que:

$$B_k(r) \leq Cr^{k+1}, \text{ con } C = C(h,m,k) > 0 \quad (44)$$

cuando (38) tiene lugar, pues en ese caso $\psi'(z) \geq C$. En el caso de la hipótesis (39), en (44) se tiene que:

$$B_k(r) = \frac{1}{m(k+1/m)} r^{k+1/m} \quad (45)$$

Utilizando la desigualdad de Poincaré-Sobolev (recuérdese que $\Gamma_2 \neq \emptyset$) es fácil demostrar que existe una constante $C = C(|\Omega|, q, n)$ tal que si $u \in C^1(\Omega)$ y $u = 0$ en Γ_1 , entonces:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^{q+(k-1)} \leq C k \int_{\Omega} |\nabla u|^q u^{k-1} dx$$

siendo:

$$1 \leq s \leq \frac{n(q+k-1)}{n-q} \quad \text{si } q < n$$

$$1 \leq s < \infty \quad \text{si } q = n$$

$$s = \infty \quad \text{si } q > n.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y haciendo $k \geq \frac{n}{q} (a - q + 1) - a$

con $a = 1$ si se supone (38) o $a = 1/m$ si se supone (39) se concluye que para una cierta constante positiva M se tiene que:

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} B_k(z(t)) dx + M \|z(t)\|_{L^{a+k(t)}}^{q+k-1} \leq 0$$

Introduciendo:

$$y(t) = \int_{\Omega} B_k(z(t)) dt$$

y utilizando (44) o (45), según la hipótesis supuesta, se llega a la desigualdad:

$$y'(t) + M y(t)^{\frac{q+k-1}{a+k}} \leq 0 \quad (46)$$

Dado que en las dos elecciones de a se tiene que $(q+k-1)/(a+k) < 1$, por un argumento estándar se concluye que existe un tiempo finito $T_0 > 0$ para el que $y(t) = 0 \forall t \in T_0$. De la definición de B_k se deriva que esto implica nuestra conclusión. El caso de $z(t,x)$ no negativo se trata multiplicando por $z^k(t,x) \cdot \text{sign}(z(t,x))$ y argumentando en forma similar. ■

Observación 1. En el trabajo [2] se mostró la anulación en tiempo finito para soluciones z de (40) (con condiciones homogéneas de Dirichlet) bajo la hipótesis:

$$C_1 r^\beta \leq \psi(r) \leq C_2 r^\beta$$

con $(1/\beta)(q-1) < 1$ y C_1 y C_2 constantes positivas. Nótese que la ψ dada por (41) no cumple la segunda desigualdad. Obsérvese también que en la hipótesis (38) el valor de m es arbitrario y así la conclusión se tiene si por ejemplo $q = 3/2$, $m = 2$ y $h > 0$ (en ese caso es $m(q-1) = 1$).

No es difícil mostrar que las hipótesis sobre los exponentes m y q en el Teorema 1 son óptimas. Así, por ejemplo, si suponemos $h = 0$ y $m(q-1) > 1$ el estudio del comportamiento cualitativo (en el caso de $\Gamma_1 = 0$) ha sido llevado a cabo en [13] mostrándose que aunque puede formarse una zona de anulación local para tiempos cortos (justificada por el carácter de difusión lenta) sin embargo la solución w es tal que $w(t,x) > 0$ en todo $x \in \Omega$ cuando t es suficientemente grande (la restricción $\Gamma_1 = 0$ no es importante en ese proceso). El decaimiento hacia cero cuando $t \rightarrow \infty$ puede verse también en [13]. Cuando $h > 0$ basta hacer el cambio de variable dado en la demostración del Teorema 1 y de nuevo se comprueba (por ejemplo comparando con subsoluciones adecuadas) que z no puede anularse. El caso $m(q-1) = 1$ merece la pena ser tratado explícitamente.

La primera observación relativa al caso $m(q - 1) = 1$ y $h = 0$ o bien $q = 2$ y $h > 0$, radica en la estimación:

$$\int_{\Omega} B_k(w^m(t, x) - h) dx \leq C_0 e^{-Mt} \quad \text{si } t > 0 \quad (47)$$

que se deriva de la ecuación (46) en la que ahora $(q - 1) = a$.

Con el fin de presentar un resultado más preciso que (47) comenzaremos tratando el caso de $h = 0$ para lo que estudiaremos previamente las soluciones de variables separadas de la ecuación (40) (ahora $m > 0$ y $q > 1$ son arbitrarios) e.d. de la forma:

$$w(t, x) = g(t)v(x), \quad g, v \geq 0 \quad (48)$$

Se ha de tener que:

$$g'(t)/g^{m(q-1)}(t) = \Delta_q v^m(x)/v(x) = \mu \neq 0 \quad (49)$$

Estamos interesados en soluciones que se amortiguan con el tiempo por lo que tomaremos $\mu = -\lambda$ con $\lambda > 0$. De la igualdad (49) se deduce que si $m(q - 1) = 1$ entonces:

$$g(t) = e^{-\lambda t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (50)$$

Análogamente, de (49) y las condiciones de contorno (31) (32) se concluye que la función $z = v^m$ debe satisfacer:

$$\begin{aligned} -\Delta_q z - \lambda z^{1/m} &= 0 && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} &= 0 && \text{en } \Gamma_1 \\ z &= 0 && \text{en } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (51)$$

Si $m(q - 1) = 1$ (51) es un problema de valores propios no lineal y por la teoría de puntos críticos para operadores no lineales (véase, por ejemplo [3] se tiene que (51) tiene solución distinta de la trivial si λ es un autovalor. Por otra parte del principio fuerte del máximo se deduce que si $\lambda = \lambda_1$ (λ_1 primer autovalor del operador Δ_q con las condiciones de contorno indicadas) entonces la correspondiente autofunción es tal que $z > 0$ en Ω).

Después de estas consideraciones ya podemos enunciar nuestro resultado de decaimiento cuando $t \rightarrow \infty$ para el caso $m(q - 1) = q$:

Teorema 2. Sea $w_0 \geq 0$ tal que $w_0^m \in C^1(\Omega)$ tal que satisface las condiciones de contorno (31) (32). Sea w solución de (30)-(33) con $m(p-1) = 1$. Entonces existen dos constantes $\tau_1, \tau_2 > 0$ tales que si t es suficientemente grande:

$$e^{-\lambda_1(t+\tau_2)v(x)} \leq w(t,x) \leq e^{-\lambda_1(t+\tau_1)v(x)} \quad (52)$$

siendo λ_1 el primer valor propio de (51) y $z = v^m$ solución positiva de (51).

Demostración. La desigualdad segunda se deduce del principio de comparación una vez comprobado que:

$$\exists \tau_1 > 0 \text{ tal que } e^{-\lambda_1 \tau_1 v(x)} \geq w_0(x) \quad \text{en } \Omega \quad (53)$$

Para mostrar (53) basta razonar por absurdo. En otro caso se tendría que $0 \leq z(x_n) < (1/n)^m w_0^m(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ y para alguna sucesión de puntos $x_n \in \Omega$, y por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(x_n)}{w_0^m(x_n)} = 0 \quad (54)$$

Como $\bar{\Omega}$ es compacto, existirá un punto $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ donde ahora x_n es una subsucesión de la sucesión primitiva. Como $z > 0$ y w_0 es acotada se tiene que $x_0 \in \partial\Omega$. Por tanto, si n es suficientemente grande se verifica que $d(x_n, \partial\Omega) < L < \infty$ y por un resultado bien conocido se sabe que de la regularidad de $\partial\Omega$ se deduce la existencia de un único punto $y_n \in \partial\Omega$ (para cada $n \in \mathbb{N}$) tal que $d(x_n, \partial\Omega) = |x_n - y_n|$. Definiendo las funciones:

$$I_n: [0, d(x_n, \partial\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I_n(s) = x_n - s\vec{v}_n, \quad \vec{v}_n = \vec{v}(y_n),$$

del teorema del valor medio se deduce que existen θ_n y $\mu_n \in [0, d(x_n, \partial\Omega)]$ tales que

$$\frac{z(x_n)}{w_0^m(x_n)} = \frac{z(y_n) + \nabla z(I_n(\theta_n)) \cdot \vec{v}_n(x_n, \partial\Omega)}{w^m(y_n) + \nabla w_0^m(I_n(\mu_n)) \cdot \vec{v}_n(x_n, \partial\Omega)}$$

En la región Γ_1 se sabe que $\nabla w_0^m \cdot \vec{v} = 0$ y como $z > 0$ se llega a una contradicción con (54). En la región Γ_2 se sabe que $\nabla z \cdot \vec{v} < 0$ y de nuevo se alcanza una contradicción con (54).

La primera desigualdad de (52) sería consecuencia del principio de comparación de soluciones si $w_0(x) \geq e^{-\lambda_1 \tau_2 v(x)}$ en Ω para algún $\tau_2 > 0$, lo que es bastante restrictivo, dado que el caso en el que w_0 puede anularse

es de importancia y v es estrictamente positiva. Para evitar esta restricción mostraremos previamente que:

$$\llcorner \text{existe } T \geq 0 \text{ y } \tau_2 > 0 \text{ tales que } w(T, x) \geq e^{-\lambda_1 \tau_2 v(x)} \text{ en } \Omega \llcorner \quad (55)$$

con lo que la primera desigualdad se obtiene de nuevo por comparación sobre el dominio $(T, \infty) \times \Omega$. Por el principio fuerte del máximo se tiene que $z = v^m$ satisface $z(x) \leq M d(x, \partial\Omega) \forall x \in \Omega$. Por tanto (55) se reduce a mostrar que:

$$\llcorner \text{existe } T \geq 0, \text{ y } C > 0 \text{ tales que } w^m(T, x) \geq C d(x, \partial\Omega) \text{ en } \Omega \llcorner \quad (56)$$

Con el fin de obtener (56) se introduce la familia biparamétrica de funciones de tipo autosimilaridad:

$$w(x, t; \tau, A) = (t + \tau)^{-\alpha} g_A(\eta), \quad \eta = |x| (t + \tau)^{-(m+1)/m}$$

donde τ y A son parámetros positivos y g_A viene definida por:

$$g_A(\eta) = \left\{ \left([A - \eta^{m+1}]_+ \right)^\mu + [A - \eta^{m+1}]_+ \right\}^{1/\mu}$$

donde μ es un exponente arbitrario tal que $\mu \in (1, (m+1)/m)$ si $m \leq 1$, $\mu \in (1, 2(2-1))$ si $m \geq 1$. No es difícil comprobar (véase [13]) que w es una subsolución en el sentido de que $v_t - \Delta_q(v)^m \leq 0$ en el interior de su soporte (nótese que $g_A(\eta) > 0$ en $(0, a)$, $a = A^{1/(m+1)}$, $g_A(a) = 0$ y $(g_A^m)'(a) < 0$). Comparando w con funciones del tipo $v(x-y; \tau, A)$ como en [13] (Teorema 4.3) se obtiene la conclusión (nótese que sobre la frontera Γ_1 se tiene que $\partial w / \partial v = 0$ así como $\frac{\partial v}{\partial v} < 0$, lo que permite la comparación $v \leq w$). ■

Con respecto al caso de $h > 0$ señalemos que el decaimiento exponencial ocurre cuando $q = 2$, independientemente del valor de m (véase [8]). Se puede mostrar que en el resto de los casos en los que no hay extinción en tiempo finito, e.d. si $q > 2$ el decaimiento hacia h , cuando $t \rightarrow \infty$, es más lento que exponencial, siendo modelado por una cierta potencia negativa de t que depende de $q - 2$.

Para terminar el estudio del comportamiento para t grande de las soluciones de (30)-(33), analizaremos con más detalle la extinción en tiempo finito bajo los dos tipos de hipótesis (38) y (39). Comenzaremos por el caso más sencillo en que $h = 0$ y $m(q-1) < 1$. Nuestro objetivo es «ilustrar el perfil» de $w(x, t)$ cuando $t \rightarrow T^*$, donde T^* es el tiempo de extinción de w , e.d. el primer instante t del tiempo en el que $w(t, x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, así como obtener estimaciones sobre cómo se produce ese de-

caimiento cerca de $t = T^*$. Comencemos calculando las soluciones separables $w(t,x) = g(t)v(x)$ que se anulan en $t = T^*$. De las identidades dadas en (49) deducimos que:

$$g(t) = \left\{ \lambda(1 - m(q - 1))(T^* - t) \right\}^{\frac{1}{1 - m(q - 1)}} \tag{59}$$

y $z = v^m$ ha de satisfacer el problema (51), donde $\lambda > 0$ es arbitrario. El siguiente resultado muestra que el comportamiento de estas soluciones separables es genérico.

Teorema 3. Sea w solución de (30)-(33) con $h = 0$ y supongamos que $m(q - 1) < 1$. Sea la función:

$$U(t,x) = w(t,x)/g(t) \tag{60}$$

con $g(t)$ dada por (59). Entonces existe una sucesión creciente $t_n \rightarrow T^*$ y una solución positiva z de (51) tal que $U^m(\cdot, t_n) \rightarrow z(\cdot)$ al menos en el espacio de Sobolev $W^{1,s}(\Omega)$, para un cierto $s^* \geq 1$, cuando $t_n \rightarrow T^*$.

La demostración del Teorema 3 está inspirada en el importante trabajo de Berryman y Holland [4] relativo al caso $q = 2$. La idea esencial de la demostración es introducir una nueva incógnita u y una nueva escala en el tiempo, de manera que $\tau(T^*) = +\infty$ y la función

$$u(\tau,x) = U^m(t,x) \tag{61}$$

verifique la ecuación:

$$\begin{cases} (u^{1/m})_\tau = \Delta_q u + \lambda u^{1/m} & \text{en } 0 < \tau < \infty, x \in \Omega. \end{cases} \tag{62}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } 0 < \tau < \infty, x \in \Gamma_1. \end{cases} \tag{63}$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{en } 0 < \tau < \infty, x \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{64}$$

Con el fin de explicitar el cambio de escala observemos que:

$$\Delta_q u = \frac{\Delta_q w^m}{g^{m(q-1)}} = \frac{w_t}{g^{m(q-1)}}$$

$$(u^{1/m})_\tau = \frac{\partial}{\partial t} U(t,x) \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{w_t}{g} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \lambda \frac{w}{g^{2-m(q-1)}} \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

(recuérdese que g satisface (49)). Entonces, si $\partial/\partial\tau = g^{1-m(q-1)}$ se concluye (62). Utilizando la expresión (59) y obligando a que $t(+\infty) = T^*$ y $t(0) = 0$ se obtiene:

$$t = T^*(1 - e^{-\lambda(1-m(q-1))\tau}) \tag{65}$$

La conclusión del Teorema 3 se reduce pues al estudio del comportamiento asintótico, cuando $\tau \rightarrow +\infty$, de las soluciones de (62)-(64), más concretamente, a demostrar que $u(\tau, \cdot) \rightarrow z(\cdot)$ en $W^{1,q}(\Omega)$. Nótese que la ecuación (62) contiene un término de «calentamiento» dado que $\lambda > 0$, sin embargo, tal término es moderado como se aprecia introduciendo $\hat{w}(\tau, x) = u^{1/m}(\tau, x)$ pues se tiene que $\hat{w}_\tau - \Delta_q(\hat{w})^m - \lambda\hat{w} = 0$. La posibilidad de explosión en tiempo finito de \hat{w} quedaría así excluida mostrando la monotonía (o acretividad) del operador $\hat{w} \rightarrow -\Delta_q(\hat{w})^m - \lambda\hat{w}$ en adecuados espacios funcionales ($L^1(\Omega)$, ó $H^{-1}(\Omega)$ si $q = 2$) lo que a su vez conduciría a la convergencia en esos espacios mediante la aplicación de resultados de la teoría abstracta de operadores. Aquí seguiremos otro camino que conduce a convergencia en espacios «mejores». Antes de entrar en materia indiquemos los resultados parciales de (11) (si $q = 2$) y (7) (si $m = 1$ y $q \leq 2$).

La demostración del Teorema 3 es bastante larga y, como ya se ha indicado, sigue de cerca el trabajo [4] (donde se suponen soluciones regulares) y [17] (que generaliza [4] a soluciones débiles). Por razones de extensión nos limitaremos a indicar los pasos fundamentales de la demostración.

Lema 1. Existe $\{\tau_n\}$, $\tau_n \rightarrow \infty$ tal que:

$$\| (u^{\frac{1+m}{2m}})_{\tau_n} \|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ cuando } \tau_n \rightarrow \infty \tag{66}$$

Demostración. En primer lugar señalemos que supondremos que u es una solución «fuerte» de (62)-(64), en otro caso se procede por aproximación (véase [17] para $q = 2$). Consideremos el funcional:

$$J(h) = \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla h|^q - \frac{\lambda m}{(m+1)} \int_{\Omega} h^{(m+1)/m}$$

y para $\tau \in (0, \infty^*)$ sea:

$$\Phi(\tau) = J(u(\tau, \cdot)).$$

Se tiene que si ∂J representa la derivada Gateaux de J :

$$\frac{d}{d\tau} \Phi(\tau) = \langle \partial J(u), u_\tau \rangle = - \int \frac{1}{m} u^{\frac{1-m}{m}} u_\tau^2 \leq 0$$

dato que $u \geq 0$. Además, por el lema que sigue (Lema 2) se tiene que

$\int_{\Omega} u^{(m+1)/m}(x, \tau) dx$ está acotado en τ , luego $\exists C > 0$ tal que $\Phi(\tau) \leq -C$

$\forall \tau \in (0, \infty)$. En consecuencia $\lim \Phi(\tau)$ existe y existe una sucesión $\tau_n \rightarrow \infty$ tal que $\Phi'(\tau_n) \rightarrow 0$. La conclusión resulta ahora de una simple manipulación algebraica.

Lema 2. Sea $m(q-1) < 1$, $w_0 \in L^{m+1}(\Omega)$ y sea T^* el tiempo de extinción de w solución de (30) (33) con $h = 0$. Entonces se tiene que $\exists C_1, C_2 > 0$ (dependiente de u_0) tal que si $t \leq T^*$,

$$C_1 (T^* - t)^{\frac{1+m}{(1-m)(q-1)}} \leq \int_{\Omega} w^{m+1}(t, x) \leq C_2 (T^* - t)^{\frac{1+m}{(1-m)(q-1)}} \quad (67)$$

En particular si $u(\tau, x)$ es definida por (61) se tiene que $\exists \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$ tal que $\forall \tau \in [0, \infty]$,

$$\tilde{C}_1 \leq \int_{\Omega} u^{\frac{m+1}{m}}(\tau, x) dx \leq \tilde{C}_2 \quad (68)$$

Demostración. La primera desigualdad se deduce integrando la desigualdad diferencial (46) correspondiente a $k = 1$ sobre el intervalo (t, T^*) . Para mostrar la segunda desigualdad obtendremos previamente que la función

$$Y(t) = \left(\int_{\Omega} w^{m+1}(t, x) dx \right)^b$$

es una función convexa para un cierto valor de $b > 0$ adecuado, en cuyo caso se tendrá que $\exists \sigma \in (t, T)$ tal que $y(t) = y(T) + (t - T)y'(\sigma) \leq (T - t)(-y'(\sigma))$, lo que lleva a la conclusión. Para mostrar la convexidad de $Y(t)$ basta ver que $Y'(s) \leq Y'(t)$ para todo $s \leq t$. Ahora bien, de la ecuación y condiciones de contorno se deduce que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^{m+1}(t, x) dx = -(m+1) \int_{\Omega} |\nabla w^m(t, x)|^q,$$

por lo que basta mostrar que si $s \leq t$ entonces:

$$\frac{\left(\int w^{m+1}(t,x) \right)^{b-1}}{\left(\int w^{m+1}(s,x) \right)^{b-1}} \geq \frac{\int |\nabla w^m(s,x)|^q}{\int |\nabla w^m(t,x)|^q} \quad (69)$$

A su vez (69) resulta de la integración de la siguiente desigualdad diferencial:

$$(b-1) \frac{\frac{d}{dt} \int w^{m+1}(t,x)}{\int w^{m+1}(t,x)} \geq \frac{\frac{d}{dt} \int |\nabla w^m(t,x)|^q}{\int |\nabla w^m(t,x)|^q} \quad (70)$$

Para obtener (70) observamos que:

$$\frac{d}{dt} \int |\nabla w^m|^q = -q \int (\Delta_q w^m) m \cdot w^{m-1} w_t = -qm \int (\Delta_q w^m)^2 w^{m-1} dx \quad (71)$$

Por otra parte:

$$\int_{\Omega} |\nabla w^m(t,x)|^q dx = - \int_{\Omega} (\Delta_q w^m) w^m dx$$

luego aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que:

$$\left(\int |\nabla w^m(t,x)|^q \right)^2 \leq \int w^{m+1} dx \cdot \int (\Delta_q w^m)^2 w^{m-1},$$

o equivalentemente:

$$\frac{\int |\nabla w^m|^q}{\int w^{m+1}} \leq \frac{\int (\Delta_q w^m)^2 w^{m-1}}{\int |\nabla w^m|^q} \quad (72)$$

La desigualdad (70) resulta ahora de (71) y (72) con $b = (1 - m(q-1))/(m+1)$.

Demostración del Teorema 3. De la ecuación (62) de u se tiene que:

$$\int |\Delta_q u(\tau_n, \cdot)|^{(m+1)} \leq A \int_{\Omega} (u^{1/m})^{m+1} + B \int_{\Omega} [(u^{1/m})_t]^{m+1} \quad (73)$$

El primer término de (73) está acotado por (68). Respecto al segundo término observemos que por la desigualdad de Hölder:

$$\int_{\Omega} u^{\frac{1-m}{m}} u_t \leq \left(\int_{\Omega} u^{m+1} \right)^{\frac{(1-m)m+1}{m+1}} \left(\int_{\Omega} u^{\frac{1-m}{m}} u_t^2 \right)^{(m+1)/2}$$

De esta manera aplicando (66) y (68) se deduce que $\{\Delta_q u(\tau_n, \cdot)\}$ está acotada en $L^{m+1}(X)$. Por los resultados de regularidad de [15] se sabe que existen s y s^* con $s > 1$ y $s^* > 1$ dependiendo de $q > m$ tales que la sucesión $\{u(\tau_n, \cdot)\}$ está uniformemente acotada en el espacio de Sobolev $W^{s,s^*}(\Omega)$ y por tanto existe una función $z(\cdot)$ y una subsucesión de τ_n (que aun la denominaremos de igual manera) de forma que $u(\tau_n, \cdot) \rightarrow z(\cdot)$ fuertemente en $W^{s,s^*}(\Omega)$ para todo $\hat{s} \in (0, s)$.

La convergencia puede mejorarse dado que como $\Phi(\tau)$ y $\int u^{(m+1)/m}$ están acotadas se tiene que $\int |\nabla u|^q$ está uniformemente acotada, lo que implica que $z \in W^{1,q}(X)$ y que $u(\tau_n, \cdot)$ converge débilmente a $z(\cdot)$ en $W^{1,q}(X)$. El demostrar que $z(\cdot)$ es una solución de (50) es estándar y se basa en la multiplicación de (62) por una función test y paso al límite cuando $v_n \rightarrow +\infty$. Por último, utilizando la primera desigualdad de (68) se deduce que $z \geq 0$ no es la solución trivial.

Observación. La conclusión del Teorema 3 puede ser mejorada bajo ciertas hipótesis adicionales. Así, si la dimensión del espacio es $n = 1$ entonces la convergencia dada en el Teorema 3 implica la convergencia en $L^\infty(\Omega)$. Por otra parte, puede mostrarse que en ese caso Z está unívocamente determinada y un simple argumento adicional permite ver que de hecho $U^\infty(\tau, \cdot) \rightarrow z$ cuando $\tau \rightarrow \infty$ (y no sólo cuando $\tau = \tau_n$). Nótese también que todo resultado de unicidad para z solución de (50) conduce a que el comportamiento límite, cuando $\tau \rightarrow \infty$ (o equivalentemente cuando $t \rightarrow T^*$) es independiente de la condición inicial. Señalemos, por último que se tiene $z > 0$ en Ω y así se concluye que $w(t, \cdot) > 0$ en Ω si t es suficientemente cercano a T^* cuando la convergencia tiene lugar en $L^\infty(\Omega)$.

Con respecto al caso en el que $h > 0$ y $q < 2$ (hipótesis (38)) la situación es más compleja dado que el problema pierde su homogeneidad. Por el Teorema 1, las soluciones w se hacen idénticamente h a partir de un tiempo finito. Sea T^* el primer instante en que eso ocurre. Ahora la única singularidad de la ecuación ocurre sobre ∇w debido a que $q < 2$. El

resultado que sigue muestra que el «perfil» en $t = T^*$ es muy semejante al del caso $m = 1$ y $h = 0$. Comencemos definiendo la función g que modula el decaimiento cuando $t \rightarrow T^*$; definamos

$$g(t) = \{\lambda(2 - q)(T^* - t)\}^{1/(2-q)} \tag{74}$$

donde $\lambda > 0$ es arbitrario. Para enunciar nuestro resultado será cómodo trabajar con la formulación equivalente ya utilizada en la demostración del Teorema 1. Sea $v = w^m - h$. Entonces v verifica

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}(v) - \Delta_q v &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times \Gamma_1 \\ v &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times \Gamma_2 \\ v(0, x) &= w_0^m(x) - h && \text{en } \Omega \end{aligned} \right\} \tag{75}$$

siendo $\psi(v) = (v + h)^{1/m} \text{sign}(v + h)$.

Teorema 4. Supongamos $h > 0$, $q < 2$ y $m \geq 1$. Sea $w_0 \in L^\infty(\Omega)$ con $w_0^m(x) \geq h$ en Ω y sea $v(t, x)$ la solución de (75). Definamos la función

$$V(t, x) = v(t, x)/g(t) \tag{76}$$

con $g(t)$ dada por (74). Entonces existe una sucesión creciente $t_n \rightarrow T^*$ y una función $z(x) > 0$ verificando

$$\left. \begin{aligned} -\Delta_q z - Cz &= 0 && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} &= 0 && \text{en } \Gamma_1 \\ z &= 0 && \text{en } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \tag{77}$$

con $C = 1/m h^{(1-m)/m}$ de manera que $V(\cdot, t_n) \rightarrow z(\cdot)$ al menos en el espacio de Sobolev $W^{1, s^*}(\Omega)$, para un cierto $s^* \geq 1$, cuando $t_n \rightarrow T^*$.

Idea de la demostración. Definamos la nueva incógnita

$$u(\tau, x) = V(t, x)$$

donde $\tau = \tau(t)$ es un cambio de variable cumpliendo $\tau(0) = 0$ y $\tau(T^*) = +\infty$. Eligiendo $\tau(t)$ de manera que $\partial t / \partial \tau = g^{2-q}$, e.d.

$$t = T^*(1 - e^{-\lambda(2-q)\tau}),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} a(\tau, x)u_\tau &= \Delta_q u + \lambda a(\tau, x)u & \text{en } 0 < \tau < \infty, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 & \text{en } 0 < \tau < \infty, x \in \Gamma_1 \\ u &= 0 & \text{en } 0 < \tau < \infty, x \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (78)$$

siendo $a(\tau, x) = \psi'(v(\tau, x))$. Obsérvese que $a \in L^\infty$ y $a > 0$. Más concretamente

$$(1/m)h^{(1-m)/m} \leq a(\tau, x) \leq 1/m M^{(1-m)/m}, \text{ si } 0 < m \leq 1,$$

$$(1/m) M^{(1-m)/m} \leq a(\tau, x) \leq 1/m h^{(1-m)/m}, \text{ si } m \geq 1,$$

con $M = \|v + h\|_{L^\infty}$ (véase p.e. (37)). Nótese también que $a(\tau, \cdot) \rightarrow \psi'(h)$ cuando $\tau \rightarrow +\infty$, en Ω . El esquema del resto de la demostración sigue de cerca la del Teorema 3 pero con adecuadas modificaciones en la obtención de cada una de esas etapas. Así la estimación sobre u_τ dada por (66) debe reemplazarse por

$$\|u_\tau(\tau_n, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \tau_n \rightarrow \infty. \quad (79)$$

La demostración de (79) se obtiene multiplicando la ecuación (78) por u_τ , integrando por partes y utilizando las acotaciones sobre $a(\tau, x)$ así como las estimaciones «a priori».

$$C_1(T^* - t)^{2/(2-q)} \leq \int_\Omega B_1(v(t, x)) dx \leq C_2(T^* - t)^{2/(2-q)}, \quad (80)$$

siendo B_1 la función dada por (43) y C_1 y C_2 adecuadas constantes positivas. Las desigualdades (80) son una de las piezas claves e implican que $\int_\Omega u^2(\tau, x) dx$ está acotada uniformemente en τ . La desigualdad de la izquierda se deduce de la inecuación (46). Para obtener la de la derecha se ha de modificar convenientemente la demostración del Lema 2 utilizando el hecho de que $\psi'(r)$ es decreciente toda vez que se ha supuesto $m \geq 1$. El resto de la demostración del Teorema 3 se adapta fácilmente gracias a las acotaciones señaladas sobre $a(\tau, x)$.

Observación. Nótese que la conclusión del Teorema 4 conduce, suponiendo $h \rightarrow 0$, a la dada en el Teorema 3 para $m = 1$ y $q < 2$. Obsérvese que la hipótesis $m(q - 1) < 1$ ahora no garantiza la aplicabilidad del Teorema 4.

REFERENCIAS

- [1] H. W. ALT y S. LUCKHAUS; «Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations», *Math. Z.*, 183, 311-341 (1983).
- [2] S. N. ANTONTSEV y J. I. DÍAZ; «New results on space and time localization of solutions of nonlinear elliptic or parabolic equations via energy methods». *Soviet Math. Dokl.* 303, 524-528 (1988).
- [3] M. BERGER; *Nonlinearity and Functional Analysis*. Academic Press, New York (1977).
- [4] J. G. BERRYMAN y C. J. HOLLAND; «Stability of the Separable Solution for Fast Diffusion», *Arch. for Rat. Mech. and Anal.* 74 379-388 (1980).
- [5] R. COURANT y D. HILBERT; *Methods of Mathematical Physics. Vol. II*. J. Wiley (1962).
- [6] J. I. DÍAZ; «Nonlinear partial differential equations and free boundary problems. Vol. I. Elliptic equations. Pitman, London (1985), Vol. II. Parabolic and Hyperbolic equations (en preparación).
- [7] A. EL HACHIMI y DE THÉLIN; «Supersolutions and stabilization of the solutions of the equation $u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)$ ». *Nonlinear Analysis* 1988.
- [8] C. J. HOLLAND y J. G. BERRYMAN; «Exponential convergence for nonlinear diffusion problems with positive lateral boundary conditions». *J. Math. Phys.* 26, 660-663 (1985).
- [9] J. M. KAY; *Introducción a la Mecánica de Fluidos y Transferencia de calor*, Marcombo, Barcelona (1964).
- [10] L. D. LANDAU y E. M. LIFCHITZ; *Mecánica de fluidos*, Reverté, Barcelona (1986).
- [11] M. LANGLAIS y D. PHILLIPS; «Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equations», *Nonlinear Analysis T.M.A.* 9, 321-333 (1985).
- [12] A. LIÑÁN; «Line packing and surge attenuation in long pipelines» (trabajo no publicado).
- [13] J. E. SAA; *Tesis Doctoral*. Univ. Complutense de Madrid (1988).
- [14] A. S. SHAPIRO; *Compressible Fluid Flow, Vol. II*. Ronald Press, New York (1954).
- [15] F. DE THELIN; «Local regularity properties for the solutions of a nonlinear partial differential equation». *Nonlinear Analysis, T.M.A.*, 6, 839-844 (1982).
- [16] G. B. WITHMAN; *Linear and nonlinear waves*, J. Wiley (1974).
- [17] Y. C. KWONG; «Asymptotic Behavior of the Plasma Equation with Homogeneous Dirichlet Boundary Condition and Non-Negative Initial Data», *Applicable Analysis*, 28, 95-113 (1988).
- [18] T. K. FANNELOP y I. L. RYHMING; «Massive release of gas from long pipe lines». *AIAA, Journal Energy*, 6, 132-140 (1982).