

FENOMENOS DE RESONANCIA EN CHIMENEAS DE EQUILIBRIO

Ignacio Parra; Amable Liñán\*

Dep. Matemáticas  
 Dep. Mecánica de Fluidos\*  
 E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos.  
 Universidad Politécnica de Madrid

Resumen.- En lo que sigue se analiza el comportamiento oscilatorio del sistema de alimentación de una central hidroeléctrica, protegido del golpe de ariete por una chimenea de equilibrio, cuando la potencia suministrada a la red es pequeña frente a la máxima teórica y oscila con frecuencias cercanas a la de resonancia de la chimenea.

1. INTRODUCCION

El comportamiento estacionario y no estacionario del sistema al que concierne este artículo, ha sido ampliamente descrito en /1/, /2/ y /3/, fundamentalmente en el supuesto de que la potencia suministrada a la red sea constante. En dicho caso, el problema se reduce al estudio de un sistema autónomo de dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -\xi \left| \xi \right| + \zeta + \mu \frac{d\zeta}{d\tau} \left| \frac{d\zeta}{d\tau} \right| \\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\varepsilon \xi + \frac{\varepsilon \omega}{1 - \zeta - \mu \frac{d\zeta}{d\tau} \left| \frac{d\zeta}{d\tau} \right|} \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\xi$ ,  $\zeta$  y  $\tau$  son, respectivamente, la velocidad adimensional del fluido en el túnel de alimentación, la variación del nivel de la chimenea relativa a la altura total del embalse sobre la turbina y el tiempo adimensional. El sistema depende además de los parámetros adimensionales  $\varepsilon$ ,  $\omega$  y  $\mu$ , que son estrictamente positivos y respectivamente, una relación entre las áreas del túnel y la chimenea, la potencia suministrada a la red adimensionalizada y un coeficiente de pérdidas en la base de la chimenea.

Las soluciones estacionarias de (1) sólo dependen de  $\omega$  y vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \xi_0 (1 - \xi_0^2) &= \omega \\ \zeta_0 &= -\xi_0^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Para todo valor de  $\omega$  por debajo del máximo  $\omega_{m\acute{a}x} = 2/3\sqrt{3}$  existen dos soluciones estacionarias, siendo inestable la correspondiente al valor  $\xi_0$  más alto. La correspondiente al valor inferior de  $\xi_0$  es estable o inestable dependiendo de que  $\varepsilon$  sea, respectivamente, menor o mayor que el límite de Thoma,  $2(1 - \xi_0^2)$ . Esta última condición se traduce en que el área de la chimenea debe de ser mayor que un determinado valor, que depende de  $\omega$ , para que exista alguna solución estacionaria estable.

Cuando la solución estable, que existe para valores pequeños de  $\varepsilon$ , pierde estabilidad al crecer  $\varepsilon$ , aparece una bifurcación a soluciones periódicas, en forma de ciclo límite que rodea a la solución estacionaria en el plano de las fases  $(\xi, \zeta)$  de (1). Dichas soluciones periódicas son estables cuando la solución estacionaria que rodean es inestable, y su amplitud y período dependen de los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\omega$  y  $\mu$ .

2. POTENCIA DE SALIDA VARIABLE

El sistema de ecuaciones (1) describe también la respuesta de la chimenea cuando la potencia extraída,  $\omega$ , es variable con el tiempo. Analizaremos aquí los efectos de estas variaciones de  $\omega$  en la respuesta de la chimenea cuando  $\omega \ll 1$ . Este caso es importante en la práctica ya que, con objeto de disminuir las pérdidas por fricción, se opera con valores de  $\omega$  mucho menores que su valor máximo  $2/3\sqrt{3}$ .

La condición  $\omega \ll 1$  simplifica en gran medida los cálculos, sin que el comportamiento del sis-

tema pierda la riqueza descrita en el apartado anterior.

Por otra parte, supondremos que las oscilaciones de la potencia en torno a un valor medio,  $\omega_0$ , son pequeñas, con una frecuencia de oscilación muy cercana al valor  $\sqrt{\epsilon}$  de resonancia en primera aproximación para  $\omega_0 \ll 1$ . Escribiremos, por tanto,

$$\omega = \omega_0 (1 + \delta \omega_1 \cos \bar{v} \tau) \quad (3)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\epsilon} + \delta v \quad (4)$$

donde  $\delta = \xi_0 \ll 1$  y  $\xi_0$  es tal que  $\omega_0 = \xi_0 (1 - \xi_0^2) \ll 1$ .

Haciendo en (1) el cambio de variable  $\bar{\xi} = \xi - \xi_0$ ,  $\bar{\zeta} = \zeta + \xi_0^2$ , y teniendo en cuenta (3):

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\bar{\tau}} = -2\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}^2 + \bar{\zeta} + \mu \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{\tau}} \left| \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{\tau}} \right| \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{\tau}} = -\epsilon\bar{\xi} + \delta^2 \omega_1 \cos \bar{v} \tau + \frac{\delta(1 + \delta\omega_1 \cos \bar{v} \tau) \left( \bar{\zeta} + \mu \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{\tau}} \left| \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{\tau}} \right| \right)}{1 - \delta^2 \bar{\zeta} - \mu \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{\tau}} \left| \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{\tau}} \right|}$$

donde hemos supuesto que la velocidad,  $\xi$ , se mantiene positiva, lo que es cierto para un rango amplio de valores de los parámetros.

Desarrollando asintóticamente las soluciones en potencias de  $\delta$ ,  $\bar{\xi} = \delta y_1 + \delta^2 y_2 + \dots$ ,  $\bar{\zeta} = \delta z_1 + \delta^2 z_2 + \dots$ , y utilizando las escalas de tiempo  $x = \tau(1 + \delta v / \sqrt{\epsilon} + \dots)$ ,  $s = \tau \delta$ , se obtiene, en primera aproximación:

$$y_1 = A(s) \sin \sqrt{\epsilon} x + B(s) \cos \sqrt{\epsilon} x \quad (6)$$

$$z_1 = \sqrt{\epsilon} (-B(s) \sin \sqrt{\epsilon} x + A(s) \cos \sqrt{\epsilon} x)$$

que representa una frecuencia oscilatoria de frecuencia  $\sqrt{\epsilon}$  en la escala corta, con amplitud y fase variable en la escala larga.

Al imponer que en segunda aproximación no aparezcan términos seculares se deducen las ecuaciones que determinan la variación de A y B con la escala larga, s:

$$\frac{dA}{ds} = \left( \frac{\epsilon - 2}{2} - \mu' C \right) A + vB + \omega'$$

$$\frac{dB}{ds} = -vA + \left( \frac{\epsilon - 2}{2} - \mu' C \right) B$$

donde  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\mu' = 4\mu\epsilon^2/3\pi$  y  $\omega' = \sqrt{\epsilon} \omega_1/2$ .

El estudio del sistema anterior se puede simplificar redefiniendo las variables y los parámetros del modo siguiente:  $\alpha = \sqrt{\mu'} A / \sqrt{\omega'}$ ,  $\beta = \sqrt{\mu'} B / \sqrt{\omega'}$ ,  $\gamma = \sqrt{\mu'} C / \sqrt{\omega'}$ ,  $e = (\epsilon - 2) / 2\sqrt{\mu'} \omega'$ ,  $u = v / \sqrt{\mu'} \omega'$ ,  $\sigma = s \sqrt{\mu'} \omega'$ ; resultando:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = (e - \gamma)\alpha + u\beta + 1 \quad (7)$$

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = -u\alpha + (e - \gamma)\beta$$

Las soluciones estacionarias del sistema (7) se corresponden con las soluciones oscilatorias en la escala corta del sistema (5), cuya amplitud sera  $C_0 = \sqrt{\omega'} \gamma_0 / \sqrt{\mu'} = \sqrt{\omega' (\alpha_0^2 + \beta_0^2)} / \mu'$  y cuya frecuencia es la oscilación de la potencia,  $\bar{v}$ . Dichas soluciones se obtienen de:

$$(e - \gamma_0)\alpha_0 + u\beta_0 = -1$$

$$(e - \gamma_0)\beta_0 - u\alpha_0 = 0 \quad (8)$$

$$\gamma_0^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2$$

Combinándolas adecuadamente resulta:

$$((e - \gamma_0)^2 + u^2) \gamma_0^2 = 1, \quad (9)$$

ecuación que da la amplitud de las soluciones oscilatorias de (5) en función de e y u. Calculando un  $\gamma_0 > 0$  en (9) se obtienen fácilmente  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  de (8).

Para representar las soluciones de (9) en función de los parámetros dibujaremos  $\gamma_0$  en función de u para cada e fijo. En la figura 1 están esquematizadas las curvas  $\gamma_0 = \gamma_0(u)$  en los tres casos distintos que se pueden presentar (curvas (a), (c) y (e)), así como los dos casos límites (curvas (b) y (d)); obsérvese que las figuras son simétricas con respecto a  $u = 0$ .

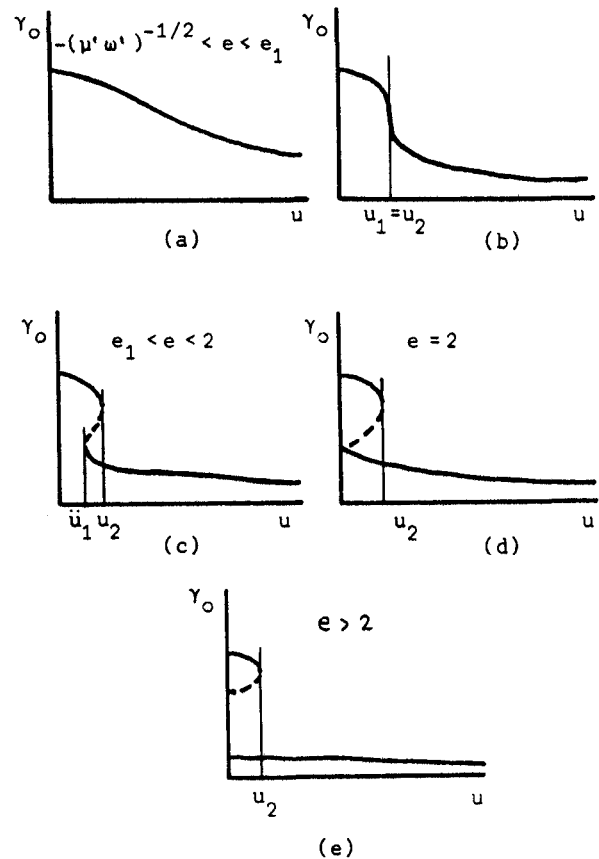


Fig. 1

Se observa en dichas figuras que cuando  $e > e_1 = 4/\sqrt{27} = 1.755\dots$  hay valores de  $u$  para los que existen tres soluciones de (9), que corresponden a tres soluciones oscilatorias de (5) con la frecuencia de oscilación de la potencia (en primera aproximación es la frecuencia de resonancia,  $\sqrt{\epsilon}$ , con potencia constante). Para establecer la zona de multiplicidad en el plano de los parámetros  $(e, u)$ , se ha dibujado en la figura 2 (simétrica con respecto a  $u=0$ ) la curva que representa  $u_1$  y  $u_2$  (valores en los que  $du/d\gamma_0 = 0$ ) en función de  $e$  y que está parametrizada con  $\gamma_0$  del siguiente modo:

$$u = \frac{1}{\gamma_0} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_0^4} \right)^{1/2} \quad (10)$$

$$e = \gamma_0 + \frac{1}{\gamma_0^3}$$

$u_1$  y  $u_2$  son las ramas que corresponden a valores de  $\gamma_0$  que son, respectivamente, menores y mayores que  $\sqrt{3}$ .

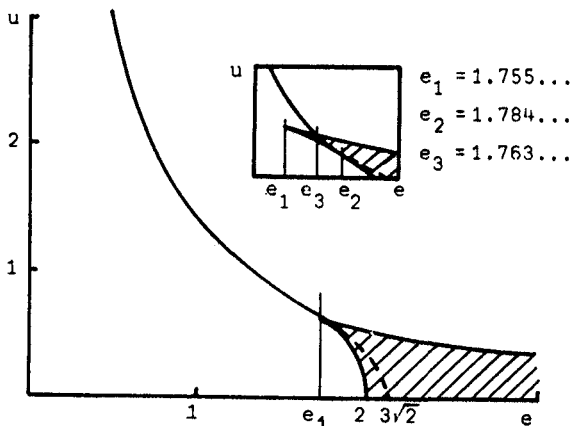


Fig. 2

La zona de multiplicidad, en la que coexisten tres soluciones estacionarias de (7), está delimitada por las curvas  $u_1(e)$ ,  $u_2(e)$  y el eje  $Oe$ . Fuera de esa zona hay una única solución estacionaria de (7).

### 3. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES

La estabilidad de las soluciones estacionarias de (7) se analiza linealizando (7) alrededor de las soluciones  $(\alpha_0, \beta_0)$  de (8), obteniéndose un sistema lineal de coeficientes constantes, cuya matriz  $M$  tiene los siguientes valores para la traza y el determinante

$$\text{tr } M = 2e - 3\gamma_0 \quad (11)$$

$$\det M = (e - \gamma_0)^2 - \gamma_0(e - \gamma_0) + u^2 \quad (12)$$

Lo primero que se observa es que  $\det M < 0$  sí y sólo sí  $u(du/d\gamma_0) > 0$ , es decir, que para las soluciones que en las curvas (c), (d) y (e) de la figura 1 están marcadas a trazos (soluciones intermedias de las tres que aparecen en la zona de multiplicidad de la figura 2) el deter-

minante de la matriz  $M$  de coeficientes es negativo, o lo que es lo mismo, dichas soluciones son inestables, presentando una inestabilidad de tipo puerto. El resto de las soluciones que aparecen, tanto en la zona de multiplicidad como fuera de ella, son focos o nodos que serán estables, o inestables, dependiendo de que la traza sea negativa o positiva, respectivamente. La condición de traza nula viene dada por:

$$u_3 = \left( \frac{9}{4e} - \frac{e^2}{9} \right)^{1/2} \quad (13)$$

La curva  $u_3 = u_3(e)$  dibujada en la figura 2 delimita las zonas de estabilidad (a la izquierda de la curva) y de inestabilidad (a la derecha) de la solución estacionaria inferior, cuando estamos en el dominio de multiplicidad (zona sombreada), y de la solución estacionaria única, cuando estamos fuera de ella. Dicha curva es tangente en  $e = e_2 = 3\sqrt{8} = 1.784\dots$  a la rama  $u_1$  del límite de la zona de multiplicidad; si bien, sólo tiene sentido como línea de cambio de estabilidad para  $e < e_2$ , pues para  $e > e_2$  (dibujada a trazos) representa un cambio del signo de la traza de  $M$  cuando el determinante de esta matriz es negativo, siendo inestable la solución correspondiente, de tipo puerto; por ello el cambio de signo de  $M$  no significa, entonces, un cambio de estabilidad en la solución.

A la vista de la figura 2 se observa que para  $e \leq 0$ , la solución estacionaria, única, es estable. Para  $e \geq e_2$ , en la zona de multiplicidad, la solución correspondiente a la rama superior de las curvas (c), (d) y (e) de la figura 1 es estable y las otras dos son inestables; fuera de la zona de multiplicidad la única solución estacionaria es inestable. Cuando  $0 < e < e_2$  se presentan cinco casos distintos que están esquematizados en la figura 3.

Como resumen podemos observar que para  $e < 0$  ( $\epsilon < 2$ ) la única solución  $C_0 = 0$  (estable), del caso de potencia constante ( $\omega' = 0$ ,  $\nu = 0$ ), se convierte en una solución oscilatoria con amplitud  $C_0 \neq 0$ , así mismo estable, para  $\omega' \neq 0$ . Para  $e > 0$  ( $\epsilon > 2$ ) aparecen dos soluciones con potencia constante: la estacionaria  $C_0 = 0$  convertida en inestable y la oscilatoria de amplitud  $C_0 = (\epsilon - 2)/2\mu'$  ( $\gamma_0 = e$ ), que es estable /2/; cuando  $\omega' \neq 0$  pueden existir una o tres soluciones oscilatorias, dependiendo de los valores de  $e$  y  $u$  (figura 2). En particular, para  $u > \max(u_2, u_3)$  sólo existe una solución oscilatoria con  $C_0 = \text{const.}$  que resulta ser inestable. Como veremos en el apartado siguiente, la solución oscilatoria estable para potencia constante,  $\gamma_0 = e$ , es sustituida cuando  $\omega' \neq 0$  y  $u > u_2$  por una solución doblemente oscilatoria y estable que aparece al desaparecer la solución oscilatoria estable que corresponde a la rama superior de las curvas (c), (d) y (e) de la figura 1.

### 4. SOLUCIONES CON DOS FRECUENCIAS DE OSCILACION

En los puntos de cambio de estabilidad de las soluciones estacionarias de (5), correspondientes a  $u = u_3$ , existe una bifurcación de Hopf /4/, /5/, que estudiada por técnicas de escalas

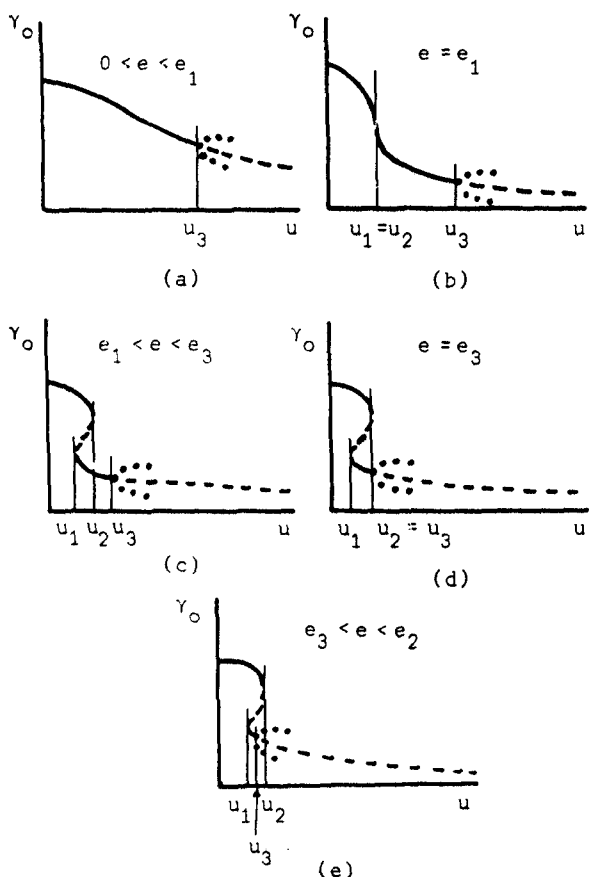


Fig. 3

múltiples /6/, /7/, resulta ser supercrítica (las soluciones periódicas bifurcadas son estables y rodean la solución inestable) para valores de  $e$  mayores que 0 y menores que  $e_2=1.784\dots$ . Esto significa que para  $0 < e < e_2$  la solución oscilatoria estable de (5) que corresponde a valores de  $|u| < u_3$ , es sustituida por una solución doblemente oscilatoria estable que bifurca de la anterior y tiene una frecuencia de oscilación en la escala corta ( $x$ ) igual a la de oscilación de la potencia, y una frecuencia de oscilación  $(v^2 - u^2 c_0^2 / 2)^{1/2}$  en la escala larga ( $s$ ). Se observa que para valores grandes de  $v$  ( $c_0 \ll 1$ ) coexisten en la solución las frecuencias de resonancia y la frecuencia de oscilación de la potencia ( $v = \sqrt{\epsilon} + \delta v$ ).

Para valores de  $e > e_1$  aparece otro tipo de solución con doble período de oscilación que es estable y sustituye a la solución estable que corresponde a la rama superior de las curvas (c), (d) y (e) de la figura 1.

Para comprender cómo se generan estas soluciones estudiaremos el sistema (7) para el caso distinguido  $e \gg 1$  con  $u \cdot e = v$  de orden unidad. Para ello hacemos el cambio  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = e\Gamma$ ,  $\phi = \arctg(-\alpha/\beta)$  y  $\sigma_1 = e\sigma$ , resultando el problema de dos escalas:

$$\frac{d\Gamma}{d\sigma_1} = (1-\Gamma)\Gamma - \frac{1}{e^2} \text{sen } \phi \quad (14)$$

$$\frac{d\phi}{d\sigma_1} = -\frac{1}{e^2} \left( v + \frac{\cos \phi}{\Gamma} \right) \quad (15)$$

Para valores grandes de  $e^2$ , en una primera etapa, con  $\sigma_1 \sim 1$ ,  $\Gamma$  evoluciona sin cambio apreciable de  $\phi$  hacia un valor muy próximo a 1. En la segunda etapa,  $\sigma/e^2 = \sigma_2 \sim 1$ ,  $\Gamma$  mantiene valores próximos a 1, tales que  $\Gamma^{-1} \sim 1/e^2$ ; en tanto que  $\phi$  evoluciona, de acuerdo con la ecuación

$$\frac{d\phi}{d\sigma_2} = -v - \cos \phi \quad (16)$$

hacia el valor  $\phi_0 = -\arccos(-v)$ , solución estacionaria estable de (16). Esta solución existe sólo si  $|v| < 1$ ; en otro caso  $\phi$  crecería o decrecería indefinidamente según el signo de  $v$  (figura 4).

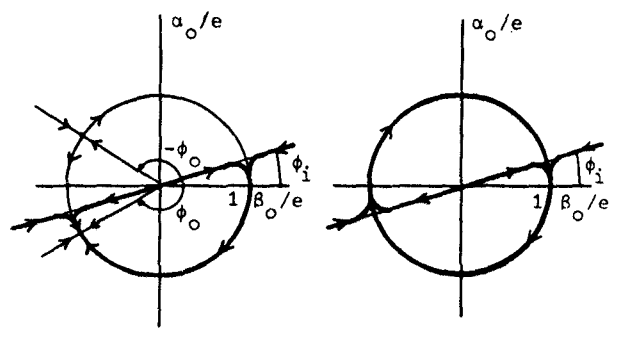


Fig. 4

5. REFERENCIAS

1. Parra, I. "Oscilaciones en Sistemas Hidráulicos". Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1981.
2. Parra, I. y Liñán, A. "Comportamiento no estacionario de las chimeneas de equilibrio en centrales hidroeléctricas". Anales de Ing. Mecánica, Nº 2, pp. 158-167, 1982.
3. Parra, I. y Rodríguez, M. "Transitorios en el sistema de alimentación de turbinas hidráulicas". Anales de Ing. Mecánica, Nº 1, pp. 151-159, 1983.
4. Friedrichs, K.O. "Advanced Ordinary Differential Equations". Pub. Gordon and Breach, 1965.
5. Guckenheimer, J. y Holmes, Ph. "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields". Pub. Springer-Verlag, 1983.
6. Kevorkian, J. y Cole, J.D. "Perturbations Methods in Applied Mathematics". Pub. Springer-Verlag, 1981.
7. Nayfeh, A.H. y Mook, D.T. "Nonlinear Oscillations". Pub. Wiley and Sons, 1979.