ANALES DE INGENIERIA MECANICA. AÑO 0. Nº 2. 1982

EFECTOS HIDROSTATICOS, HIDRODINAMICOS Y NO ESTACIONARIOS EN RETENES FRONTALES

Manuel Rodríguez y Amable Liñán
E.T.S.Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen.- Se obtienen la fuerza axial y los momentos de cabeceo en un retén frontal que trabaja en régimen de lubricación hidrodinámica. Se analizan simultáneamente los efectos hidrostáticos, hidrodinámicos y no estacionarios. El cálculo de la fuerza y los momentos se realizan considerando condiciones Sommerfeld y medio Sommerfeld y para todos los valores del ángulo de cabeceo, desde caras paralelas a caras con un punto de contacto. Se da un análisis simplificado en este último caso.

INTRODUCCION

Un retén frontal trabajando en régimen de lubricación hidrodinámica, ha sido analizado en las Refs. [1,2,3]. En la Ref. [1] se estudia la respuesta hidrostática debida a una diferencia de presiones entre el radio interior y exterior del retén. Los efectos hidrodinámicos debidos a la rotación de una de las caras con respecto a la otra, se analizan en la Ref. [2] con condiciones Sommerfeld y medio Sommerfeld. Los efectos no estacionarios debidos al aplastamiento de la película líquida se estudian en la Ref. [3].

En este trabajo se analizan simultáneamente los tres efectos: hidrostático, hidrodinámico y no estacionario con condiciones Sommerfeld y medio Sommerfeld. El análisis se realiza usando técnicas de perturbaciones para pequeños valores de la relación $(R_e-R_i)/R_e = \varepsilon$ (siendo R_e el radio exterior y R_i el radio interior del retén). Se calculan la distribución de presiones, la fuerza axial y los momentos de cabeceo en forma de desarrollos del parámetro ε dando, explícitamente, dos términos con condiciones Sommerfeld e incluyendo los efectos no estacionarios asociados con un movimiento arbitrario impuesto al retén.

Cuando la velocidad de giro es grande puede aparecer cavitación en el líquido, dando lugar a la aparición de una burbuja de vapor [4]. Se utilizan aquí las condiciones medio Sommerfeld para determinar la forma de la burbuja, la distribución de presiones, la fuerza axial y los momentos de cabeceo.

El análisis se realiza para cualquier valor del ángulo de cabeceo, desde caras paralelas a caras con un punto de contacto. Cuando las caras están próximas al contacto se da un análisis aproximado teniendo en cuenta que el parámetro $\beta = \gamma R_e/h_a$ (siendo γ el ángulo de cabeceo y h_a el espesor medio de la capa líquida en cada instante) es próximo a la unidad.

La solución obtenida en este trabajo se compara con la solución exacta de la ecuación de Reynolds para pequeños ángulos de cabeceo en el límite $\gamma \to 0$ con el producto $\gamma\omega$ (siendo ω la velocidad angular de giro) finito. También, cuando nuestros resultados se comparan con los dados en las Refs. [1,2,3], encontramos diferencias relativas de orden ε para pequeños valores de ε.

FORMULACION DEL PROBLEMA

En la Fig. 1 se describe la geometría del retén y el sistema de coordenadas utilizado. El es

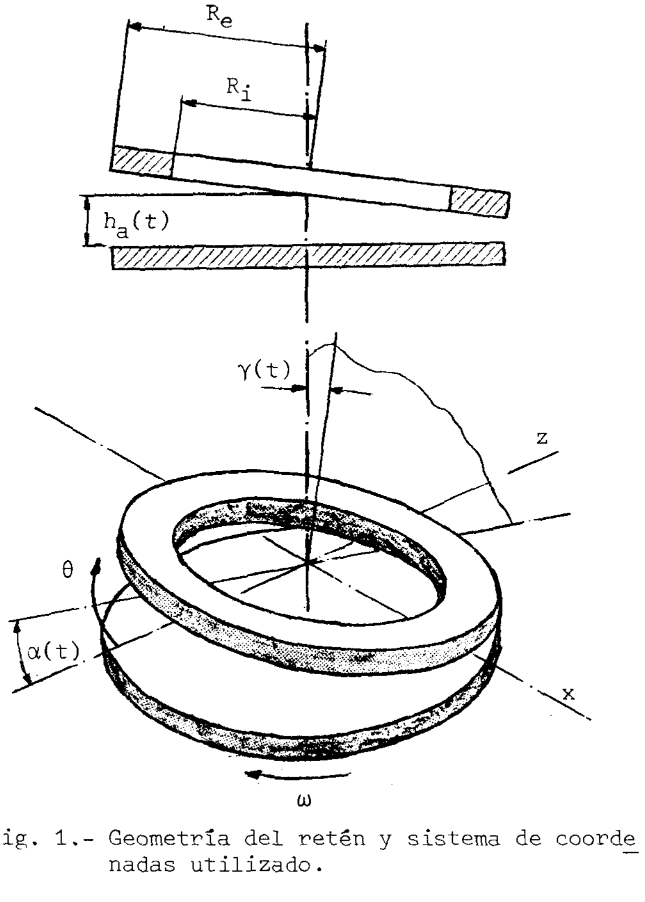

Fig. 1.- Geometría del retén y sistema de coordenadas utilizado.

pesor de la capa líquida $h(r,\theta,t)$ está dado por:

$$h(r,\theta,t) = h_a(t) + r\gamma(t)\cos\left(\theta-\alpha(t)\right), \qquad (1)$$

siendo r la coordenada radial, θ la coordenada angular y t el tiempo. La coordenada angular $\theta = \alpha(t)$ corresponde al espesor máximo de la capa líquida en cada instante. En la Ec. (1) el ángulo de cabeceo $\gamma(t)$ es pequeño, pero $R_e\gamma(t)$ es del mismo orden que $h_a(t)$, de modo que la relación $\gamma R_e/h_a = \beta$ es de orden unidad.

La ecuación de Reynolds para un fluido incompresible es:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rh^3\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) = 6\mu r\left(2\frac{\partial h}{\partial t} + \omega\frac{\partial h}{\partial\theta}\right), \qquad (2)$$

con las condiciones de contorno $p(R_i,\theta,t) = p_i$ y $p(R_e,\theta,t) = p_e$, donde p es la presión en la capa líquida y μ el coeficiente de viscosidad del líquido.

La Ec. (2) es válida para pequeños valores de las relaciones:

i) $h_a/(R_e-R_i)$; ya que en caso contrario la variación, transversal a la capa líquida, de la presión (para r y θ fijos) debería de retenerse.

ii) $\{\rho(p_i-p_e)h_a^4\}/\{\mu(R_e-R_i)\}^2$; para asegurar que los términos convectivos en las ecuaciones de Navier-Stokes puedan despreciarse.

Consideraremos que la relación $\{\mu\omega(R_e-R_i)^2\}/\{(p_i-p_e)h_a^2\}$ es de orden unidad y que el tiempo característico, asociado con las variaciones temporales de h y γ, son del orden de $1/\omega$ para que todos los efectos considerados sean del mismo orden. Dado que en la mayoría de los casos es $(R_e-R_i) \ll R_e$, supondremos que la relación $\varepsilon = (R_e-R_i)/R_e$ es pequeña frente a la unidad y, por lo tanto, es razonable describir la solución en forma de desarrollos para pequeños valores de ε. Para hacer esto comenzaremos por escribir la Ec. (2) en términos de las variables adimensionales: $\phi = (p-p_e)/(p_i-p_e)$, $\xi = (R_e-r)/(R_e-R_i)$ y $\tau = \omega t$. Si escribimos la solución en desarrollos de la forma: $\phi = \phi_o(\xi,\theta,\tau) + \varepsilon\phi_1(\xi,\theta,\tau) + \ldots$, se obtiene,

$$\partial^2\phi_o/\partial\xi^2 = 2F_o(\theta,\tau), \qquad (3)$$

con las condiciones de contorno $\phi_o = 0$ y 1 en $\xi=0$ y 1 respectivamente para la primera aproximación y

$$\partial^2\phi_1/\partial\xi^2 = (4-3H)(\partial\phi_o/\partial\xi+2\xi F_o) - 4\xi H^3\{A+EH+\beta\, CH\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)\}, \qquad (4)$$

con $\phi_1 = 0$ en $\xi = 0$ y 1 para los términos de orden ε. Las funciones $F_o(\theta,\tau)$, $H(\theta,\tau)$, $A(\tau)$, $C(\tau)$ y $E(\tau)$ se dan en el Apéndice I. Téngase en cuenta que el término $\partial\left(h^3(\partial p/\partial\theta)\right)/\partial\theta$ no entra en la solución a menos que se retengan términos de orden de ε^2 en del desarrollo de ϕ.

Una vez que se conoce la distribución de presiones $p(r,\theta,t)$, la fuerza axial $F(t)$ y los momentos de cabeceo $M_x(t)$ y $M_z(t)$ (véase Fig. 1) se obtienen del modo siguiente:

$$F(t) = \int_o^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} p\, r\, dr\, d\theta, \qquad (5)$$

$$M_x(t) = -\int_o^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} p\, r^2\cos(\theta-\alpha)dr d\theta, \qquad (6)$$

$$M_z(t) = \int_o^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} p\, r^2\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)dr\, d\theta. \qquad (7)$$

En las secciones próximas las expresiones para la fuerza axial y los momentos de cabeceo se dan en la forma adimensional:

$$f(\tau) = F/\{R_e(R_e-R_i)(p_i-p_e)\} = f_o+\varepsilon f_1+\ldots, \qquad (8)$$

$$m(\tau) = M/\{R_e^2(R_e-R_i)(p_i-p_e)\} = m_o+\varepsilon m_1+\ldots, \qquad (9)$$

DISTRIBUCION DE PRESIONES, FUERZA AXIAL Y MOMENTOS DE CABECEO

A.- Condiciones de Sommerfeld

Las soluciones periódicas de las Ecs. (3) y (4), satisfaciendo las condiciones de contorno arriba indicadas en $\xi = 0$ y $\xi = 1$ son:

$$\phi_o = \xi-\xi(1-\xi)F_o, \qquad (10)$$

$$\phi_1 = -\xi(1-\xi)\left(F_1+(2-\xi)G_1\right), \qquad (11)$$

que proporcionan la distribución de presiones en el retén para las condiciones de Sommerfeld, esto es: suponiendo capa líquida completa entre las dos caras del retén. Las funciones $F_o(\theta,\tau)$, $F_1(\theta,\tau)$ y $G_1(\theta,\tau)$ están dadas en el Apéndice I.

Introduciendo (10) y (11) en (5), (6) y (7) se obtiene la fuerza axial y los momentos de cabeceo,

$$f_o = \pi(p_i+p_e)/(p_i-p_e) - (AI_2+BI_3)/6, \qquad (12)$$

$$f_1 = -\pi(5p_i+p_e)/\{6(p_i-p_e)\} + (I_1-2\pi)/4 - \{AI_2-(3A-3B+2E)I_3 - 3BI_4\}/12, \qquad (13)$$

$$m_z = -\pi\beta W\{2(d\alpha/d\tau) - 1\}\{1 - 3\varepsilon/\left[2(1-\beta^2)\right]\}/6(1-\beta^2)^{3/2}, \qquad (14)$$

$$m_{ox} = -\{\pi\beta/(1-\beta^2)^{3/2}\}\{A/3+B/\left[2(1-\beta^2)\right]\} \qquad (15)$$

$$m_{1x} = (\pi/2\beta)\{(1-\beta^2)^{-3/2} - 1\} + \pi\beta(3A-2B-2E)/\{4(1-\beta^2)^{5/2}\} + \pi\beta B(1+\beta^2/4)(1-\beta^2)^{-7/2}. \qquad (16)$$

Las funciones $A(\tau)$, $B(\tau)$, $E(\tau)$ y $W(\tau)$ que aparecen aquí, están dadas en el Apéndice I; mientras que $I_n(\tau) = \int_o^{2\pi}(1+\beta\cos\theta)^{-n}d\theta = I_{n-1}+\left[\beta/n-1\right]\left[\partial I_{n-1}/\partial\beta\right]$, con $I_1=2\pi(1-\beta^2)^{-1/2}$.

A.1.- Caso Estacionario

En el caso estacionario h_a, γ y W son constantes y $\alpha = 0$, de modo que A, B y E son cero y $C = -W$. En este caso la fuerza axial y los momentos de cabeceo toman la forma,

$$f = \pi(p_i+p_e)/(p_i-p_e)+(\pi\varepsilon/2)\left[(1-\beta^2)^{-1/2} - 1 - (5p_i+p_e)/(3p_i-3p_e)\right], \qquad (17)$$

$$m_x = (\pi\varepsilon/2\beta)\left[(1-\beta^2)^{-1/2} - 1\right], \quad (18)$$

$$m_z = (\pi\beta W/6)\left[1-(3\varepsilon/2)(1-\beta^2)^{-1}\right](1-\beta^2)^{-3/2} \quad (19)$$

Por otra parte, la solución exacta de la ecuación de Reynolds cuando β es pequeño y ε de orden unidad, proporciona los resultados:

$$f = \pi p_e(2-\varepsilon)/(p_i-p_e)+(\pi/\varepsilon)\{[(1-\varepsilon)^2-1]/$$

$$/[2\ln(1-\varepsilon)]-(1-\varepsilon)^2\}, \quad (20a)$$

$$m_z = (\pi W/6)\left[1-(\varepsilon/2)^3\right]; \quad m_x = 0 \quad (20b)$$

El límite asintótico de las Ecs. (17), (18) y (19) para $\beta \to 0$, coincide con (20) cuando sus segundos miembros se desarrollan en potencias de ε para ε pequeño; sin embargo, el valor de f dado en la Ref. [1] difiere de los resultados dados en (17) y (20) en términos del orden de ε. En la Fig. 2 se han representado los valores de f obtenidos en (17), (20) y el obtenido en la Ref. [1], como función de ε. En esta figura puede verse que (17) se aproxima mucho a (20) incluso para valores de $\varepsilon \simeq 0'8$, fuera del rango $\varepsilon \ll 1$.

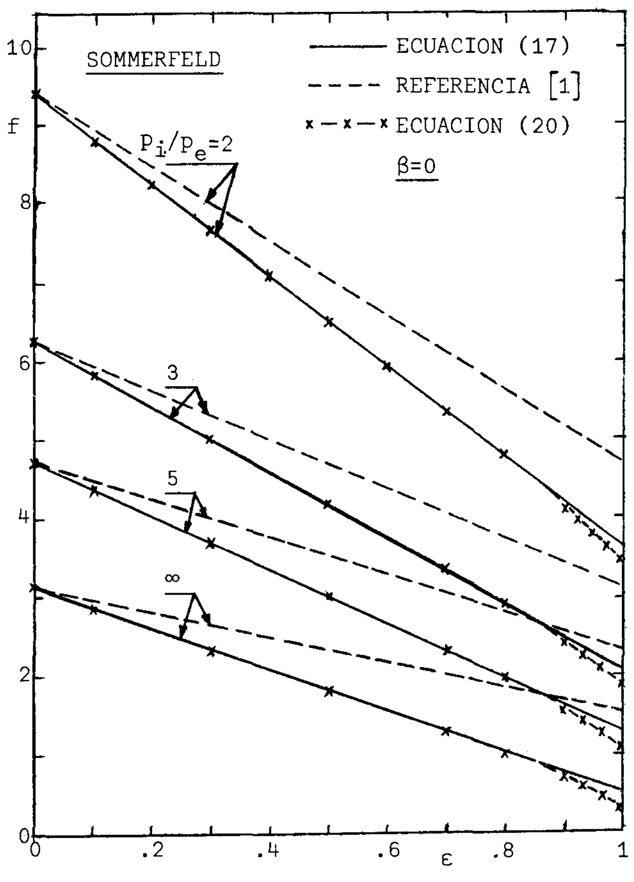

Fig. 2.- Fuerza axial f vs. ε para $\beta \to 0$ y diversos valores de p_e/p_i. Condiciones Sommerfeld.

El margen de validez de los resultados dados en (19) puede aumentarse si la reescribimos en la forma,

$$m_z = \left[(\pi/6)\beta W(1-\beta^2)^{-3/2}\right]/\left[1+(3\varepsilon/2)(1-\beta^2)^{-1}\right], \quad (21)$$

lo cual está justificado por ser ε pequeño. Sin embargo, las Ecs. (17), (18), (19) ó (21) tienden a infinito cuando $\beta \to 1$; esto es, cuando las caras del retén están en contacto. De hecho el análisis falla para valores de β del orden de $(1-\varepsilon)$, ya que en ese caso los términos de perturbación, de orden ε, se hacen tan importantes como los de orden unidad.

En el Apéndice II se obtiene una expresión para el momento m_z, válida para β próximo a la unidad, donde se ha resuelto la ecuación de Reynolds para pequeños valores de $1-\beta$. Esta solución nos lleva a,

$$m_z = \pi\sqrt{2}\, W(1-\beta)^{3/2}\varepsilon^{-3} S\,, \quad (22)$$

donde la función S se da también en el Apéndice II. En el caso límite $\varepsilon/(1-\beta) \to 0$, la Ec. (22) se reduce a,

$$m_z = (\pi\sqrt{2}\, W/24)(1-\beta)^{-3/2}\{1-3\varepsilon/[4(1-\beta)]\}, \quad (23)$$

que coincide con la forma límite, para $\beta \to 1$, de la Ec. (19). En el límite opuesto, $\varepsilon/(1-\beta) \to \infty$, la Ec. (22) toma la forma:

$$m_z = 4\pi\left[1-(2\sqrt{2})/3\right] W\varepsilon^{-3/2}\,, \quad (24)$$

que representa el valor de m_z cuando las caras del retén tienen un punto de contacto. En la Ref. [2] se obtiene el mismo resultado dado en (24) cuando el valor de $\bar{M}_z$ de esta referencia se desarrolla para pequeños valores de ε.

Una solución uniformemente válida [5] para todo β,

$$m_z = 4\pi\beta W\varepsilon^{-3}\left[(1-\beta)/(1+\beta)\right]^{3/2} S\,, \quad (25)$$

se puede obtener a partir de las Ecs. (21) y (22) teniendo en cuenta el valor común de ambas ecuaciones en una zona intermedia de valores de β, dado por la Ec. (23). La Ec. (25) se reduce a (24) en el límite $\beta \to 1$, y a la (21) para $(1-\beta) \sim 1$. En la Fig. 3 hemos representado el valor de m_z dado por las Ecs. (21), (22) y (25), donde podemos ver cómo empalman los resultados de (21) y (22) en una región de valores de β entre 0'8 y 0'95. También puede verse en esta figura cómo coincide (25) con (21) y con (22) en cada zona de validez de estas últimas.

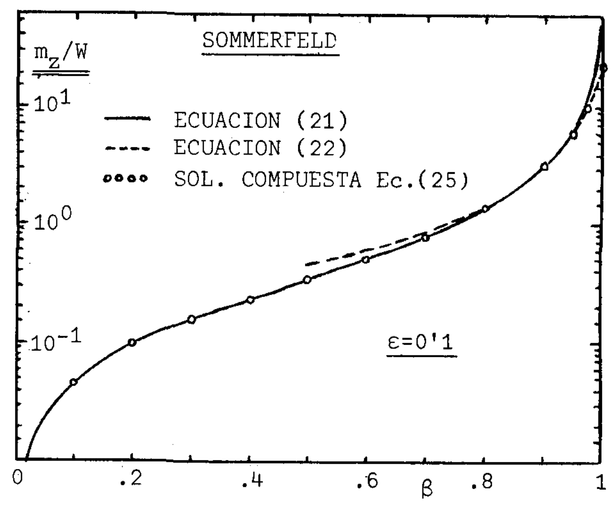

Fig. 3.- Momento de cabeceo m_z vs. β para ε=0'1. Condiciones Sommerfeld.

En la Fig. 4 se ha representado el valor de m_z, dado por (25), como función de β para varios valores de ε. En esta misma figura se ha representado el valor correspondiente de m_z dado en la Ref. [2].

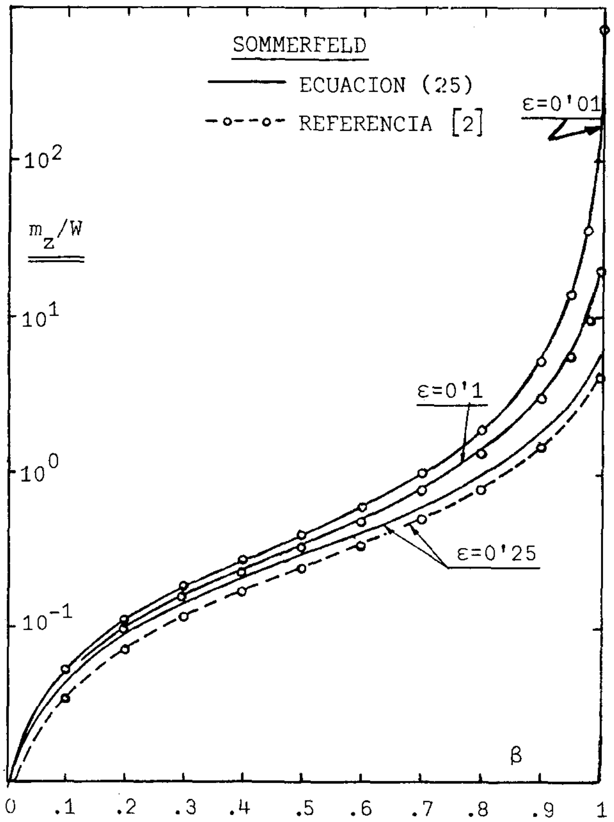

Fig. 4.- Momento de cabeceo m_z vs. β para distintos valores de ε. Condiciones Sommerfeld

A.2.- Efecto de Aplastamiento de la película líquida

En la Ref. [3] se analiza el caso en que h_a y γ varían con el tiempo con $p_i = p_e = 0$ y $\omega = 0$. Estos efectos están incluidos en los resultados de las Ecs. (12) a (16), que para este caso, y en primera aproximación para pequeños valores de ε, toman la forma:

$$F = \frac{2\pi\mu R_e^4 \varepsilon^3}{h_a^2(1-\beta^2)^{3/2}} \left[\frac{1+\beta^2/2}{(1-\beta^2)\beta}\frac{d\beta}{dt} - \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\right] , \qquad (26)$$

$$M_x = \frac{6\pi\mu R_e^5 \beta\, \varepsilon^3}{h_a^2(1-\beta^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{2(1-\beta^2)\beta}\frac{d\beta}{dt} - \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\right] , \qquad (27)$$

y $M_z = 0$. Cuando $\beta \to 1$ las Ecs. (26) y (27) se reducen a,

$$M_x = (3\sqrt{2}/8)\pi\mu(R_e^5/h_a^2)\varepsilon^3(1-\beta)^{-5/2}(d\beta/dt), \qquad (28a)$$

$$F = M_x/R_e , \qquad (28b)$$

que tiende a infinito cuando $\beta \to 1$. Mediante el análisis realizado en el Apéndice II para $\beta \to 1$ se obtiene,

$$R_e F = M_x = 12\pi\mu(R_e^5/h_a^2)\sqrt{2(1-\beta)}\,(d\beta/dt)\, V , \qquad (29)$$

que en el límite $\varepsilon/(1-\beta) \to 0$ se reduce a (28), de modo que las Ecs. (26), (27) y (29) empalman correctamente. En el límite opuesto, $\varepsilon/(1-\beta) \to \infty$, la Ec (29) toma la forma,

$$R_e F = M_x = 24\sqrt{2}\,\pi(1-\sqrt{2}/2)\mu\sqrt{\varepsilon}\,(R_e^5/h_a^2)(d\beta/dt) , \qquad (30)$$

que representan los valores finales de F y M_x cuando las caras del retén están en contacto.

B.- Condiciones medio Sommerfeld

Cuando se presenta la cavitación en la capa líquida y si se imponen las condiciones medio Sommerfeld para tener en cuenta este efecto, escribiremos $p = p_v$ (siendo p_v la presión de cavitación o presión de vapor) en la región donde la distribución de presiones dada por las Ecs. (10) y (11) es igual o menor que p_v. En este caso, la distribución de presiones está dada por las Ecs. (10) y (11) sólo fuera de la región limitada por las líneas $\xi = \xi_c(\theta,\tau) = \xi_{co} + \varepsilon\xi_{c1}$; donde,

$$\xi_{co} = (F_o-1)/(2F_o) \pm \sqrt{[(F_o-1)/(2F_o)]^2 - \phi_v/F_o} \qquad (31)$$

$$\xi_{c1} = \xi_{co}(1-\xi_{co})[F_1 + (2-\xi_{co})G_1]/[1-F_o(1-2\xi_{co})] . \qquad (32).$$

Las Ecs. (31) y (32) se obtienen de (10) y (11) poniendo $\phi_o + \varepsilon\phi_1 = -\phi_v$, con $\phi_v = (p_e-p_v)/(p_e-p_i)$. Por lo tanto, la región de cavitación está comprendida entre $\xi_c^- < \xi < \xi_c^+$ y $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Los valores ξ_c^- y ξ_c^+ están dados por (31) y (32) con el signo menos y más respectivamente. El valor de θ aguas arriba, θ_1, y aguas abajo, θ_2, se obtienen de la ecuación $\xi_c^- = \xi_c^+$; esto es;

$$[(F_o-1)/(2F_o)]^2 - (\phi_v/F_o) =$$

$$= -\varepsilon(F_o^2-1)[2F_oF_1 + (3F_o+1)G_1]/(2F_o)^4 , \qquad (33)$$

que en primera aproximación toma la forma,

$$F_o = 1 + 2\phi_v \pm 2\sqrt{\phi_v(1-\phi_v)} . \qquad (34)$$

El signo menos de la Ec. (34) se utiliza cuando $\phi_v < 0$.

B.1.- Caso Estacionario

En el caso estacionario (A=B=E=α=0, C=-W) las funciones F_o, F_1 y G_1, dadas en el Apéndice I y simplificadas para este caso, se sustituyen en las Ecs. (31) y (32) para obtener la forma de la burbuja de cavitación. En la Fig. 5 hemos representado las formas de las burbujas dadas por las Ecs. (31) y (32), comparándolas con la forma dada por,

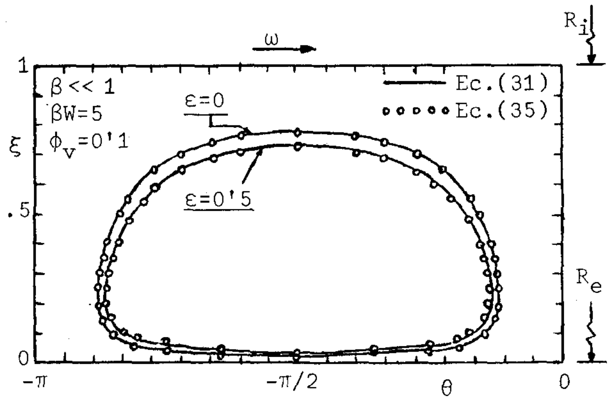

Fig. 5.- Forma de las burbujas de cavitación. β→0. Condiciones medio Sommerfeld.

$$(1-\varepsilon\xi_c)\left[1+(1-\varepsilon)^2-\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon\xi_c}\right)^2-(1-\varepsilon\xi_c)^2\right]\beta W\,\mathrm{sen}\,\theta =$$

$$= 4\varepsilon^2\left[\phi_v+\frac{\ln(1-\varepsilon\xi_c)}{\ln(1-\varepsilon)}\right] , \qquad (35)$$

y obtenida de la solución exacta de la ecuación de Reynolds para valores pequeños de β pero ε y βW de orden unidad. En la Fig. 5 puede verse que las formas de las burbujas dadas por las Ecs. (31), (32) y (35) concuerdan muy bien, incluso para valores de ε no muy pequeños.

La primera aproximación de la fuerza axial y los momentos de cabeceo se pueden determinar analíticamente para $\phi_v = 0$ y cualquier valor de β y W. Vamos a dar aquí tres simplificaciones diferentes de estas expresiones que son de interés:

i) Cuando β (y también $1-\beta$) es de orden unidad pero W es grande frente a la unidad, la forma de la burbuja está dada por,

$$\xi_{co}^{+} = 1+(3+4\phi_v)(1+\beta\cos\theta)^3/(\beta W\,\mathrm{sen}\,\theta) , \qquad (36)$$

$$\xi_{co}^{-} = -(1+4\phi_v)(1+\beta\cos\theta)^3/(\beta W\,\mathrm{sen}\,\theta) , \qquad (37)$$

siendo $\theta_1 = \pi+(1-\beta)^3/\beta W$, $\theta_2 = 2\pi-(1+\beta)^3/\beta W$. Cuando $W\to\infty$, $\xi_c^+\to 1$, $\xi_c^-\to 0$ (excepto cerca de $\theta=\theta_1$ y $\theta=\theta_2$), $\theta_1\to\pi$ y $\theta_2\to 2\pi$; de modo que la burbuja de cavitación ocupa la mitad de la capa lubricante. La fuerza axial y los momentos de cabeceo toman la forma:

$$f_o = \beta W/\left[3(1-\beta^2)^2\right] + (\pi/2)\left[(p_i+p_e)/(p_i-p_e) - 2\phi_v\right] , \qquad (38)$$

$$m_{ox} = \beta^2 W/\left[3(1-\beta^2)^2\right] , \qquad (39)$$

$$m_{oz} = \pi\beta W/\left[12(1-\beta^2)^{3/2}\right] + (p_i+p_e)/(p_i-p_e) - 2\phi_v . \qquad (40)$$

ii) Cuando $\beta \ll 1$ pero $\beta W \sim 1$, se tiene,

$$\xi_c^+ = 1 + 1/(\beta W\,\mathrm{sen}\,\theta) \ ; \quad \xi_c^- = 0 , \qquad (41)$$

con $\theta_1 = \pi + \mathrm{arcsen}(1/\beta W)$ y $\theta_2 = 2\pi - \mathrm{arcsen}(1/\beta W)$. El momento de cabeceo m_{ox} es de orden $\beta^2 \ll 1$ y

$$f_o=\pi/2+\mathrm{arcsen}(1/\beta W)+(\beta^2W^2-1)^{3/2}/(3\beta^2W^2) - (1/\beta W)\ln\left[\beta W-(\beta^2W^2-1)^{1/2}\right] , \qquad (42)$$

$$m_{oz}=(\beta W/12)\left[\pi+2\mathrm{arcsen}(1/\beta W)\right] - \left[1/(2\beta W)\right]\left[\pi-2\mathrm{arcsen}(1/\beta W)\right]+5(\beta^2W^2-1)^{1/2} - \left[1/(3\beta^2W^2)\right]\ln\left[\beta W-(\beta^2W^2-1)^{1/2}\right] . \qquad (43)$$

iii) Cuando $\beta\to 1$ (y $W\sim 1$) con el análisis dado en el Apéndice II, se obtiene,

$$f_{ox} = m_{ox} = 2W(1-\beta)\,\varepsilon^{-3}\,T , \qquad (44)$$

$$m_{oz} = (\pi\sqrt{2}/2)(1-\beta)^{3/2}\,W\varepsilon^{-3}\,S , \qquad (45)$$

donde las funciones T y S se dan también en el Apéndice II. Cuando $\beta = 1$, la relación $\varepsilon/(1-\beta)\to\infty$ y las Ecs. (44) y (45) se reducen a,

$$f_o = m_{ox} = 2(1-\ln 2)W\,\varepsilon^{-2} , \qquad (46)$$

$$m_{oz} = 2\pi(1-2\sqrt{2}/3)\,W\,\varepsilon^{3/2} , \qquad (47)$$

que son los valores de la fuerza axial y los momentos de cabeceo cuando las caras del retén están en contacto.

En la Ref. [2] se da la fuerza axial y los momentos de cabeceo, con condiciones medio Sommerfeld, cuando $p_i = p_e = p_v = 0$. Estos resultados pueden obtenerse de nuestra solución en el límite $W \gg 1$. Una solución compuesta [5] para f_o, m_{ox} y m_{oz}, válida para todo β y con $W \gg 1$, puede obtenerse a partir de las Ecs. (38), (39), (40), (44) y (45), tomando la forma,

$$m_{ox} = \beta f_o = 8\left[\beta^2(1-\beta)/(1+\beta)^2\right]W\varepsilon^{-3}\,T , \qquad (48)$$

$$m_{oz} = 2\pi\beta W\varepsilon^{-3}\left[(1-\beta)/(1+\beta)\right]^{3/2}\,S \qquad (49)$$

Obsérvese que el valor de m_{oz} dado por la Ec. (49) es la mitad del valor dado por la Ec. (25).

En la Fig. 6 se representan los valores de f_o y m_{ox} como función de ε. Como comparación se representan los mismos valores obtenidos en la Ref. [2].

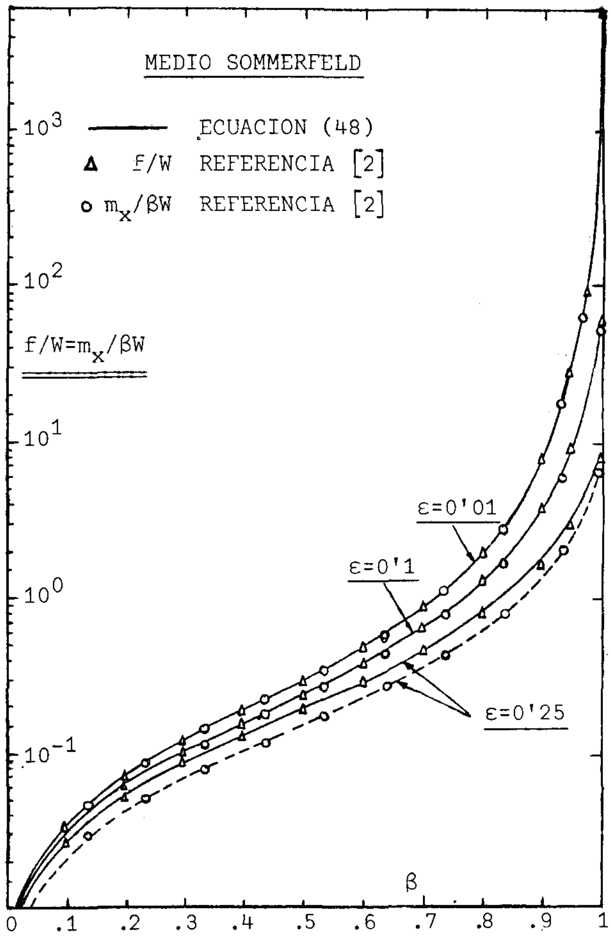

Fig. 6.- Fuerza axial f y momento de cabeceo m_x vs. β para distintos valores de ε. Condiciones medio Sommerfeld. $W \gg 1$.

CONCLUSIONES

Se han analizado los efectos hidrostáticos, hidrodinámicos y no estacionarios en un retén frontal en régimen de lubricación hidrodinámica, dando una solución analítica para pequeños valores de la relación $(R_e-R_i)/R_e$. Se dan expresiones para la fuerza axial y los momentos de cabeceo, reteniendo la variación radial de la presión hasta términos del orden de $(R_e-R_i)/R_e$ con condiciones Sommerfeld y hasta términos del orden de la unidad en el caso de condiciones medio Sommerfeld. Se dan expresiones analíticas para todos los valores del ángulo de cabeceo β, incluyendo el caso $\beta=1$ en que las caras del retén están en contacto.

La solución cuando $\beta \to 1$ se obtiene en el Apéndice II utilizando técnicas de perturbaciones [5]. Se muestra cómo la solución obtenida para β (y también $1-\beta$) de orden unidad, empalma correctamente con la solución válida para $\beta \to 1$.

Los valores de F y M_x cuando las caras del retén están en contacto, calculados en el caso estacionario y en condiciones medio Sommerfeld, Ecs. (46) y (47), coinciden con los valores dados en la Ref. [2] (Ecs. (34) y (46) de esta referencia) cuando se desarrollan para $(R_e-R_i)/R_e \ll 1$. La Ec. (30) también coincide con los valores de F y M_x dados en la Ref. [3] para los efectos no estacionarios de aplastamiento (véanse Ecs. (22), (23) y (24) de [3]).

Los resultados obtenidos en este trabajo se comparan también con la solución exacta de la ecuación de Reynolds cuando β es pequeño. Esta comparación se presenta en la Fig. 2 para la fuerza axial en el caso de condiciones Sommerfeld, y en la Fig. 3 para la forma de las burbujas de cavitación en el caso de condiciones medio Sommerfeld

Es interesante tener en cuenta que aunque la ecuación de Reynolds es lineal y se puede usar el principio de superposición para tener en cuenta los tres efectos (hidrostático, hidrodinámico y no estacionario), éstos se deben sumar antes de imponer las condiciones medio Sommerfeld cuando se calcula la forma de las burbujas.

Se han encontrado diferencias del orden de $(R_e-R_i)/R_e$ entre nuestros resultados y los dados en las Refs. [1], [2] y [3], debido a que no todos los términos de la ecuación de Reynolds de orden $(R_e-R_i)/R_e$, se han tenido en cuenta en estas referencias.

La descripción dada en este trabajo para caras planas se puede extender fácilmente para retener los efectos de ondulación de las caras [6,7], especialmente para retener la posible variación de h, distinta de la dada en (1), con la coordenada angular.

La forma cerrada de las expresiones aproximadas dadas en este trabajo para la fuerza axial y los momentos de cabeceo, son muy útiles para el estudio de la respuesta dinámica y estabilidad del sistema.

APENDICE I

En este Apéndice se dan las funciones que aparecen en las Ecs. (3), (4) y (10) a (16).

$$A(\tau) = 2W\{d[\ln(\beta h_a)]/d\tau\} ,$$

$$B(\tau) = -(2W/\beta)(d\beta/d\tau) ,$$

$$C(\tau) = W[2(d\alpha/d\tau) - 1] ,$$

$$E(\tau) = (W/h_a)[dh_a/d\tau+(2h_a/\beta)(d\beta/d\tau)] ,$$

$$F_o(\theta,\tau) = H^2[A+BH+\beta\, CH \operatorname{sen}(\theta-\tau)] ,$$

$$2F_1(\theta,\tau) = 4-3H+8AH^2-(9A-12B+4E)H^3-9BH^4 + \beta CH^3(8-9H)\operatorname{sen}(\theta-\alpha) ,$$

$$6G_1(\theta,\tau)=-12AH^2-4(4B-3A-E)H^3+12BH^4 - 12\beta C(1-H)H^3 \operatorname{sen}(\theta-\alpha) ,$$

$$H(\theta,\tau) = 1/[1+\beta\cos(\theta-\alpha)] ,$$

$$W(\tau) = [3\mu\omega(R_e-R_i)^2]/[(p_i-p_e)h_a^2] .$$

APENDICE II

En este Apéndice presentamos la solución asintótica de la ecuación de Reynolds cuando $\beta \to 1$. Cuando esto ocurre $h\to 0$ cuando $\theta\to\pi$ y $r\to R_e$ $(\xi\to 0)$ y, por lo tanto, las caras del retén están próximas a tocar una con otra. Para obtener la distribución de presiones en esta región usaremos las nuevas variables: $\eta=\varepsilon\xi/\nu$ y $\zeta=(\theta-\pi)/\sqrt{2\nu}$, donde $\nu=1-\beta\ll 1$; siendo η y ζ de orden unidad en esta región. En las nuevas variables h toma la forma (véase Ec. (1)) asintótica, $h/h_a=\nu(1+\eta+\zeta^2)$, y su variación con el tiempo, $\partial h/\partial t = dh_a/dt - (h_a/\gamma)(d\gamma/dt)$; de modo que la ecuación de Reynolds se puede escribir como,

$$(p_e-p_i)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1+\eta+\zeta^2)^3\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right] = \frac{12\mu R_e^2}{\nu h_a^2}\frac{d\nu}{dt}+\frac{6\sqrt{2}\,\mu\omega R_e^2\zeta}{h_a^2\sqrt{\nu}} .$$

Caso Estacionario

En el caso estacionario $dh_a/dt = d\gamma/dt = 0$ y la ecuación de Reynolds se reduce a $\partial[(1+\eta+\zeta^2)^3(\partial\Phi/\partial\eta)]/\partial\eta=0$, con $\Phi=(\varepsilon^2/2)\sqrt{\nu/2}\,(\phi/W)\sim 1$, lo que implica $\phi\sim(\varepsilon\nu^{1/4})^{-2}$; de modo que la presión en la zona cerca del contacto es muy grande comparada con la presión en el resto de la capa líquida. Obsérvese que las ecuaciones escritas anteriormente son sólo válidas para $\theta\to\pi$ y $r\to R_e$. Téngase también en cuenta que el término $\partial^2\Phi/\partial\zeta^2$ no interviene en la ecuación de Reynolds a menos que se retengan términos del orden de ν^2.

Las condiciones de contorno en las nuevas variables toman la forma $\Phi=0$ en $\eta=0$ y $\Phi\sim\varepsilon^2\sqrt{\nu}\to 0$ en $\eta=\varepsilon/\nu$. Integrando la ecuación de Reynolds escrita anteriormente con estas condiciones de contorno, se obtiene la distribución de presiones:

$$\Phi = -\zeta\eta[(\varepsilon/\nu)-\eta]\,[(\varepsilon/\nu)+2(1+\zeta^2)]^{-1}[1+\eta+\zeta^2]^{-2} .$$

Cuando se imponen las condiciones Sommerfeld la distribución de presiones calculada anteriormente nos proporciona: $f=m_x=0$ y $m_z=\pi W\nu\sqrt{2\nu}\,\varepsilon^{-3}S$. Mientras que con condiciones medio Sommerfeld se obtiene: $f=m_x=2W\nu\,\varepsilon^{-3}\,T$ y $m_z=\pi W(\sqrt{2}/2)\,\nu\sqrt{\nu}\,\varepsilon^{-3}S$. Las funciones S y T están dadas por:

$$S\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right) = \frac{2}{3}\left[1-\left(1+\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{3/2}\right]+\frac{2\varepsilon}{\nu}\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2\nu}}+ 2\left(1+\frac{\varepsilon}{2\nu}\right)\left[1-\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{\nu}}\right]+ \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^2\left[\left(1+\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2\nu}}\right)^{-1}-\left(\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\nu}}+\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2\nu}}\right)^{-1}\right],$$

$$T(\varepsilon/\nu) = (\varepsilon/\nu)\{1+\ln[1+(\varepsilon/2\nu)]\} - [1+(\varepsilon/\nu)]\ln[1+(\varepsilon/\nu)] .$$

En el límite asintótico $\varepsilon/\nu \to 0$ las funciones S y T toman la forma,

$$S(\varepsilon/\nu) \to (\varepsilon/\nu)^3[1-(3\varepsilon/4\nu)]/24; \; T(\varepsilon/\nu) \to (\varepsilon/\nu)^3/24.$$

En el límite opuesto $\varepsilon/\nu \to \infty$ las funciones S y T se reducen a,

$$S(\varepsilon/\nu) \to 2\sqrt{2}\,[1-(2\sqrt{2}/3](\varepsilon/\nu)^{3/2} ;$$
$$T(\varepsilon/\nu) \to (1-\ln 2)(\varepsilon/\nu) ,$$

que sustituidos en las expresiones correspondientes de f, m_x y m_z proporcionan los resultados dados en las Ecs. (24), (46) y (47), que representan los valores de f, m_x y m_z cuando las caras están en contacto ($\beta = 1$).

Efecto de Aplastamiento de la Película Líquida

Cuando se tienen en cuenta solamente los efectos del aplastamiento de la película líquida escribiremos $\omega = 0$ en la ecuación de Reynolds obteniendo, $\partial[(1+\eta+\zeta^2)^3(\partial\psi/\partial\eta)]/\partial\eta = 1$, donde $\psi = [\nu(p_i-p_e)h_a^2\phi]/[12\mu R_e^2(\partial\nu/dt)]$ con las condiciones de contorno $\psi = 0$ en $\eta = 0$ y $\psi \sim \nu \to 0$ en $\eta = \varepsilon/\nu$; lo que nos lleva a la solución:

$$\psi = \eta[\eta-(\varepsilon/\nu)]\,[(\varepsilon/\nu) + 2(1+\zeta^2)]^{-1}\,(1+\eta+\zeta^2)^{-2} .$$

Al imponer las condiciones de Sommerfeld, la distribución anterior de presiones nos proporciona: $R_eF = M_x = -12\pi\sqrt{2\nu}\,\mu(R_e^5/h_a^2)(d\nu/dt)V$ y $M_z = 0$. La función V está dada por:

$$V(\varepsilon/\nu) = 2[\sqrt{1+(\varepsilon/\nu)} - 1] - (\varepsilon/\nu)/\sqrt{1+(\varepsilon/2\nu)} .$$

En el límite $\varepsilon/\nu \to 0$ se tiene $V \to (\varepsilon/\nu)^3/32$, y en el opuesto, $\varepsilon/\nu \to \infty$; $V \to 2(1-\sqrt{2}/2)\sqrt{\varepsilon/\nu}$. Este último valor límite de V, sustituido en las expresiones de F y M_x nos proporciona el resultado dado en la Ec. (30), correspondiente al caso en que las caras están en contacto.

REFERENCIAS

1. Etsion, I., "Nonaxisymmetric Incompressible Hydrostatic Pressure Effects in Radial Face Seals", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 100, Nº 3, pp. 379-385, Julio 1978.
2. Etsion, I., "Hydrodynamic Effects in a Misaligned Radial Face Seal", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 101, Nº 3, pp. 283-292, Julio 1979.
3. Etsion, I., "Squeeze Effects in Radial Face Seals", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 102, Nº 2, pp. 283-292, Abril 1980.
4. Dowson, D. et al., "Cavitation in Bearings", Annual Review of Fluid Mechanics, Vo. 11, pp. 35-66, 1979.
5. Kevorkian, J. et al., "Perturbation Methods in Applied Mathematics", en "Applied Mathematical Sciences", Vol. 34. New York. Springer-Verlag 1980.
6. Kuzma, D.C., "Theory of the Mechanism of Sealing with Application to Face Seals", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 91, Nº 4, pp. 704-712, Octubre 1969.
7. Sneck, H.J., "The Eccentric Face Seal with a Tangentially Variying film Thickness", ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 91, Nº 4, pp. 748-755, Octubre 1969.