ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

INFLUENCIA DE LAS CORRIENTES NO HOMOENTROPICAS EN EL DISEÑO DE TURBINAS DE GAS

José J. Salvá Monfort

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

Febrero 1973

Turbinas axiales
Turbomáq

Antes de entrar en el tema objeto de este trabajo, queremos manifestar nuestro sincero agradecimiento a las personas que han contribuido con su ayuda a que esta Tesis se haya realizado.

En primer lugar a D. Carlos Sánchez Tarifa, Catedrático del grupo XIX: "Propulsión por Reacción Aerea y Espacial" de la Escuela y Director de esta Tesis, cuyas sugerencias y consejos durante el desarrollo de la misma han sido de gran valor.

En segundo lugar al Sr. Sánchez Gómez por su competente labor en la fase de delineación y finalmente a la Srta. Raquel Pérez y Sr. Sánchez Vallez por su apoyo prestado en el mecanografiado del original e impresión de esta Tesis.

Madrid, Febrero de 1.973

José Salvá Monfort

INDICE

NOMENCLATURA

v = Velocidad absoluta de la corriente.

w = Velocidad relativa de la corriente.

t = Tiempo.

ρ = Densidad del gas.

T = Temperatura absoluta del gas.

p = Presión del Gas.

H = Entalpia por unidad de masa.

S = Entropia.

u = Velocidad de arrastre del rotor.

ω = Velocidad angular del rotor.

$\mathcal{C}$ = Trabajo específico.

c_p = Calor específico á presión constante.

r_c = Radio de curvatura.

φ = Angulo de la velocidad meridional con el eje .

a = Velocidad local del sonido.

M = Número de Mach.

α = Angulo de la velocidad absoluta con el eje.

α_R = Angulo de la velocidad relativa con el eje.

γ = Relación de calores específicos (en el apendice tiene el mismo significado que φ).

γ' = Relación de calores específicos (para el apéndice).

T_r = Temperatura de recuperación del gas.

T_a = Temperatura del álabe.

tr = Temperatura de remanso de la corriente relativa en la sección 2.

Λ = Perímetro del perfil del álabe.

h_g = Coeficiente de convección.

A = Area de una sección del álabe.

K_m = Coeficiente de conducción del álabe.

C = Cuerda.

h = Altura del álabe.

K_g = Coeficiente de conducción del gas.

Nu = Número de Nusselt.

ρ_M = Densidad del álabe.

σ = Esfuerzo centrífugo.

C_1 = Distancia axial entre secciones 1 y 2.

C_2 = Distancia axial entre las secciones 2 y 3.

G = Gasto másico.

$\overline{\overline{\tau}}_v$ = Tensor de esfuerzos de viscosidad.

r, θ, z = Coordenadas cilíndricas

ξ = r/r_{e1}

θa = $Ta/T1tm$

θr = $Ta/T1tm$

Subíndices:

r, θ, z = Componentes en dirección radial, tangencial y axial.

m = Componente en dirección meridional (en el capítulo 2 y 3, significa condiciones en el punto medio).

1,2,3 = Variables referidas a la sección 1, 2 ó 3.

e = Extremo del álabe.

i = Raíz del álabe.

t = Condiciones de remanso.

S = Designa evolución isentrópica.

M = Punto medio.

INFLUENCIA DE LAS CORRIENTES NO HOMOENTROPICAS EN EL DISEÑO DE TURBINAS DE GAS

INTRODUCCION GENERAL

El tema de investigación con aplicación inmediata al diseño de álabes de turbina, que se estudia en esta Tesis, se basa en el estudio de la corriente aerodinámica que fluye alrededor de los álabes cuando la distribución de temperatura con el radio no es uniforme.

Esta variación de temperatura, es un problema que se presenta con gran frecuencia en la práctica por diferentes razones; Es un hecho conocido que los álabes móviles de la turbina trabajan sometidos a fuertes esfuerzos centrífugos, de flexión y además a fenómenos vibratorios, encontrándose tambien en condiciones de elevada temperatura. Es por tanto condición fundamental de diseño que no se alcance los límites de deformación ó rotura por termofluencia durante la vida que se fija para los mismos (superiores a 10.000 horas en la mayoría de las aplicaciones).

Los esfuerzos, tanto los centrífugos como los de flexión, son máximos en la raiz del álabe ó en la proximidad de la misma; siendo por tanto ventajose que las temperaturas en el álabe disminuyan desde el extremo hacia la raiz. Debido a que el disco de la turbina es un sumidero de calor, por estar intensamente refrigerado y por ser elemento de conducción de calor al circuito de lubricación y al resto del motor; tanto en álabes macizos sin refrigeración, como en álabes refrigerados, esta distribución de temperaturas en el interior de los mismos se dá en la práctica. No obstante este efecto puede reforzarse muy notablemente consiguiendo que la corriente de gases, que llega a la turbina procedente de la cámara de combustión, --

presente una variación radial de temperatura decreciente - desde el extremo a la raiz del álabe. Este efecto puede conseguirse, con cierta facilidad, mediante un diseño adecuado de la cámara de combustión en la que se induce una mayor -- proporción de aire en la zona interior de la misma.

En la figura se presenta una distribución de este tipo, objetivo de diseño para una cámara de combustión anular del motor supersónico GE4 de la "General Eléctric" (1) que muestra los resultados obtenidos.

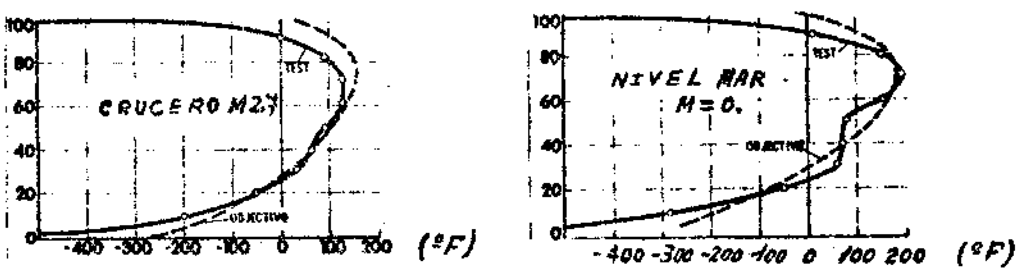


Fig.- 1.

Distribución de temperatura radial con respecto a la media.

La segunda razón por la que puede presentarse este fenómeno de no homoentropia de la corriente, es que en una cámara de combustión diseñada para conseguir una distribución de temperaturas, por modificaciones en el sistema de inyección ó - en los ajustes de los tubos de llamas, puede aparecer fortuitamente una distribución no uniforme, que con frecuencia se detecta en las pruebas de distribución de temperaturas que se efectuan en los Motores de Reacción insertando un gran número de termopares en las toberas de salida; por lo que resulta de gran interés preveer la influencia y alcance de tal modificación de las condiciones de funcionamiento, sobre las "performances" de la turbina.

Por lo tanto además del efecto termomecánico que produce la no uniformidad de la temperatura, existe otro fenómeno, muy poco estudiado, que consiste en la influencia que esta distribución de temperaturas produce en el campo de velocidades de la corriente y en consecuencia en los ángulos de entrada y salida en los anillos de álabes; lo que se traduce en una inmediata variación de las condiciones de funcionamiento de los mismos, criterios de diseño y muy en particular sobre el trabajo máximo y rendimiento que puede obtenerse.

Como se verá, durante la exposición y conclusiones de esta Tesis, ambos efectos termomecánicos y aerodinámicos pueden ser de considerable importancia.

Es muy escasa la literatura que existe sobre el tema. Sanchez Tarifa y Bollain (2), presentáron un trabajo en el congreso de F.I.S.I.T.A. en 1.964, en el que estudiaron solamente una parte del primer aspecto del problema. Existen otros estudios con distribución radial de temperatura especialmente en relación con refrigeración de álabes (2) y (3), pero estos estudios estan siempre referidos al caso de corriente homoentrópica y no conocemos ningun trabajo publicado sobre el tema objeto de la Tesis, salvo el indicado en la referencia (2). Esta escasez de literatura acontece porque, como en todo problema relacionado directamente con el diseño de compresores y turbinas de aviación, los trabajos de investigación son de naturaleza clasificada.

× El estudio del movimiento tridimensional no estacionario que tiene lugar en el interior de las turbomáquinas es en extremo complicado. El establecimiento de la hipótesis - de simetría axial basado en suponer que cada anillo de álabes está formado por infinito número de álabes, infinitamente delgados, simplifica razonablemente el problema que queda reducido de esta forma a un problema bidimensional (5), (6) (7) y (27). Con esto se estudia el movimiento sobre un plano meridional sobre el que se proyecta la superficie de corriente media representativa del movimiento entre álabes, - lo que constituye el "método de las lineas de corriente" -- (6) y (7).

La determinación del campo de velocidades alrededor del perfil se realiza, suponiendo que la superficies de corriente son aximétricas, yá sea mediante métodos teóricos como -- los de Stanitz (9) y Wu y Braun (10) ó mediante métodos experimentales realizados con cascadas de álabes como los de Ainley (11) ó Dunavant y Erwin (12).

En el primer capítulo de esta Tesis, se estudia el aspecto aerodinámico del problema siguiendo el "método de las líneas de corriente.", pero de modo que la no homoentropía de la corriente queda incluida en los términos de la ecuación - del impulso de una forma explícita y directamente tratable - (8). Se discuten además las hipótesis planteadas con especial mención sobre la forma en la que debe utilizarse la hipótesis de simetria axial, y finalmente se establece la formulación - adecuada para la determinación de las variable fluidas en un escalón.

En el segundo capítulo considerándo que las desviaciones radiales son pequeñas se desprecian los términos en velocidades radiales y sus derivadas (2) y (5), pudiéndose entonces deducir el efecto cualitativo de una distribución de temperaturas no uniforme.

La integración de la componente radial de la ecuación de equilibrio proporciona expresiones generales que determinan la distribución de velocidades con el radio, y con éllo la del resto de variables fluidas, para varias leyes torsionales elegidas y cualquiera que sea el perfil de temperaturas.

Para poner de manifiesto el efecto cuantitativo, que ocasiona la no homoentropía de la corriente, se ha hecho aplicación al caso de distribución lineal de temperatura con el radio, por ser el más interesante en aplicaciones prácticas; así como para el caso de distribución uniforme a fin de compararlas. Todo esto para varios valores de los parámetros geométricos y funcionales, característicos de la turbina, dentro del margen usual de variación de los mismos (5), (8), (13), (14) y (15). Se presentan en unos gráficos los resultados más representativos, obtenidos para los ángulos absolutos y relativos de la corriente, velocidades y números de Mach; Así como el importante efecto de reducción de la posible zona de diseño, que tiene lugar en el caso no homoentrópico, y que se pone claramente de manifiesto en el diagrama: coeficiente de carga - coeficiente de flujo.

El efecto termomecánico es estudiado a continuación en el capítulo 3. Partiendo de la ecuación de transmisión de calor unidimensional y en régimen estacionario se plantea el problema con la inclusión de varios parámetros caracte rísticos de este fenómeno (16) que generalizan su posible aplicación. Son estudiados igualmente varias, distribucio nes radiales de areas de los perfiles y su influencia en la distribución de esfuerzos (5). Finalmente se determi- na la distribución de temperatura en el interior del ála- be para corriente homoentrópica y no homoentrópica, con - la misma distribución de areas y el supuesto lógico de -- idéntica evacuación de calor a través del disco para que los resultados sean comparables.

A fin de comprobar la aproximación obtenida al despre ciar las desviaciones radiales se resuelve el problema - aerodinámico de determinación del campo fluido, mediante - cálculo numérico, realizado con la IBM-7090 del C.C.U.M. lo que se expone en el capítulo 4º (25), (26).

Las ecuaciones básicas las constituyen la ecuación - del impulso y la ecuación de continuidad. En principio se formuló el problema para un canal determinado y una ley - torsional dada; las lineas de corriente se aproximan me-- diante una linea polinómica de tercer grado (5), (7), - (17) y (18); La formulación de la ecuación de continuidad en forma integral plantea por consiguiente un sistema in tegrodiferencial con condiciones de contorno, para cuya - solución se estima la posición inicial de las lineas de - corriente según sugiere Novak (7) y Jansen (19). Con este procedimiento iterativo no se logró encontrar la solución a causa de la falta de convergencia del mismo, a pesar de la técnica de relajación utilizada (5). Por todo esto se - estimó mas conveniente y lógico utilizar la ecuación de continuidad en forma diferencia y resolver simultaneamente el sistema de ecuaciones diferenciales, con condiciones de contorno, con la técnica de integración de Kutta-Runge y el criterio de convergencia de Newton-Rapbson (20), (21) y (22). - Este método de solución, resulta muy satisfactorio y creemos es el más indicado cuando se especifican las condiciones iniciales (es decir en el problema básico de diseño) en lugar de la forma del canal, más propio del problema de actuaciones en el que deben ser datos además los ángulos de entrada y salida de los álabes y no la ley torsional. A continuación se estudia la estabilidad del método (22), encontrándose intervalos de condiciones iniciales para las cuales el Mach meridional se hace igual a la unidad y aparece una singularidad.

Se plantea además el problema directo o de actuaciones yá mencionado que proporciona la influencia sobre las "performances" (11), (23) y (24) de la turbina, cuando diseñada para una distribución uniforme de temperaturas, se la hece funcionar con una distribución lineal.

Los resultados se presentan en curvas en las que se -- comparan las soluciones obtenidas con las ecuaciones completas y las soluciones obtenidas despreciando las desviaciones radiales; así como tambien las solución del problema directo ó de actuaciones.

Finalmente se critica la validez de la hipotesis de las desviaciones radiales pequeñas y se intenta encontrar una solución analítica aproximada. Linealizándo las ecuaciones, alrededor de la solución arriba mencionada (20), se ha conseguido integrar el sistema de ecuaciones diferenciales para el estator, (en el caso de ley torsional torbellino libre y distribución de temperatura uniforme,) habiendo obtenido resultados muy satisfactorios y esperanzadores para posibles trabajos futuros.

CAPITULO I

ESTUDIOS AERODINAMICOS

1-1 DETERMINACION DE LAS VARIABLES FLUIDAS EN UN ESCALON HIPOTESIS Y DISCUSION.

Entendemos por escalón de una turbina (vease figura 1-1), el conjunto formado por un anillo de álabes fijos (estator) y un anillo de álabes giratorios (rotor), donde se extrae energía del fluido en forma de trabajo mecánico, en general las turbinas pueden estar constituidas por uno ó varios escalones. El objeto del presente capítulo es plantear las hipótesis en las que fundamentamos nuestro estudio adecuadamente justificadas; desarrollar las ecuaciones expuestas en el apéndice y finalmente establecerlas en la forma en que serán utilizadas posteriormente para la determinación de las variables fluidas en secciones entre anillos de álabes, poniendo de manifiesto y en forma explícita y directamente tratable el efecto de no homoentropía.

Dichas secciones características son las situadas entre estator y rotor (sección 2) y la situada entre rotor y estator siguiente (sección 3); se suponen conocidas las variables a la entrada (sección 1).

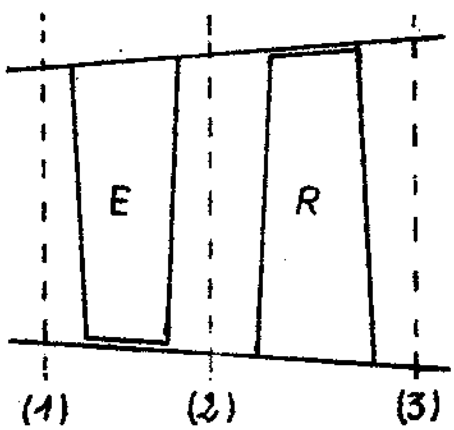


Fig. (1-1)

El método puede aplicarse sucesivamente al resto de escalones, es por esto que aquí nos limitaremos a estudiar un solo escalón y más concretamente el primer escalón, dividiendo este estudio en dos partes que denominaremos: estudio del estator, que establece las ecuaciones conducentes a la determinación de las variables fluidas en la sección situada detrás del mismo (sección 2); y estudio del rotor que formula igualmente las ecuaciones necesarias para la determinación de las variables fluidas en la sección situada detras de este anillo(sección 3).

Las hipotesis que estableceremos a continuación son las utilizadas normalmente en la aerodinámica de maquinas rotatorias, pero teniendo en cuenta la condición de no homoentropía del movimiento, es decir:

a) Fluido ideal

b) Gas perfecto

c) Simetría axial y condiciones estadionarias

d) Flujo no homoentrópico

e) Alabes radiales ó casi radiales

f) Trabajo específico en el rotor constante para cada linea de corriente.

El estudio aerodinámico y dimensionado de las máquinas rotatorias, se realiza en primera aproximación suponiendo que el fluido que evoluciona se comporte como fluido ideal, lo cual se admite teniendo en cuenta que el número de Reynolds de la corriente referido a la cuerda del álabe es normalmente superior a 10^5, por lo que las fuerzas de viscosidad tienen poca importancia, en el nucleo de la corriente, y son peque--

ñas comparadas con las fuerzas de inercia.

La influencia de la viscosidad de la que depende esencialmente las pérdidas de presión y también en compresores la deflexión máxima que puede darse a la corriente, se introduce mediante datos experimentales obtenidos en ensayos con cascadas de álabes pudiéndose entonces efectuar además las correcciones oportunas sobre las variables fluidas y ángulos de la corriente. Esto justifica por otra parte la hipótesis establecida de fluido ideal que implica que el flujo es isentrópico a lo largo de cada linea de corriente ; pero la constante de entropía es distinta para cada una de éllas según se establece mediante la hipótesis (d).

Incluso en el funcionamiento estacionario de la turbina un observador, situado en la sección 2 y ligado a ejes absolutos vería pasar sucesivamente álabes y espacios entre álabes, con las consiguientes perturbaciones introducidas, dado que el movimiento es subsónico, lo que se traduce en variaciones locales de las variables fluidas con respecto al tiempo. Igualmente el observador situado en el rotor y girando con él observaría sucesivamente estelas y zonas de corrientes sin estela de cierta uniformidad, lo que indica que las variables relativas a la entrada del rotor varían con él tiempo. En consecuencia el flujo como es sabido no es estacionario y el problema planteado en esta forma resulta extraordinariamente complejo incluso en el caso más simple.

Nuestro trabajo va dirigido a estudiar la influencia de la corriente no homoentrópica y a fin de aislar efectos podemos establecer la hipótesis de movimiento estacionario, que resulta por otra parte (cuando se considera turbina en funcionamiento estacionario) consecuencia de la hipótesis de simetría axial y puede formalizarse admitiendo la existencia de infinito número de álabes infinitamente delgados. No obstante el establecimiento de la hipótesis de la simetría axial requiere un analisis fisico más profundo del problema, para obtener conclusiones que permitan aplicar dicha hipótesis correctamente, puesto que en principio no parece justificada.

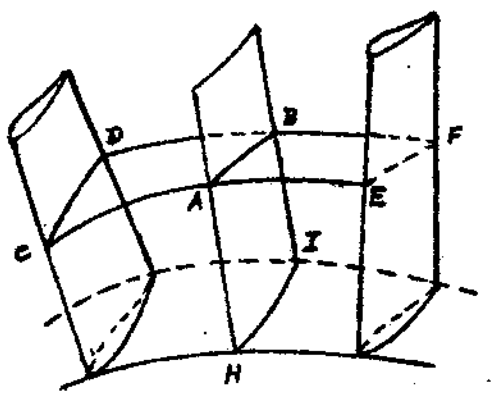


Fig. 1-2

La simetría axial exige que las variaciones de las variables fluidas y termodinámicas sean nulas en sentido tangencial. Esto exige, ecuación (A-14b) que : $\dfrac{\partial r V_\theta}{\partial m} = \dfrac{\partial V_m}{\partial \theta} = 0$ lo que significa que se conserva el momento cinético sobre cada linea de corriente y en consecuencia ó bien no se realiza trabajo alguno en el rotor ó bien no existe deflexión de la corriente en el estator; todo lo cual esta lejos de la realidad.

Igualmente resulta contradictorio suponer
cuando, es sabido, se produce una depresión sobre el extrados del perfil de álabe; mientras se crea una depresión en el intrados (causas de la fuerza resultante sobre el álabe).

Finalmente, es un hecho, que las superficies de corriente CAEFBD (fig. 1-2) no son cilíndricas sino que se alabean. El conjunto de partículas fluidas que inicialmente está sobre una linea circunferencial tal como CAE no sufre en desplazamiento paralelo así mismo sino que se distorsiona; puesto que C tiene un desplazamiento radial positivo mientras que E tiene un desplazamiento radial negativo. Esto está tambien en desacuerdo con la suposición $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$

Sin embargo todas estas contradicciones pueden ser soslayadas si limitamos la validez de la hipótesis de simetría axial a secciones entre anillos de álabes (sin situarnos dentro del espacio comprendido entre álabes). Sólo así puede tener sentido tal hipótesis y así será interpretada de ahora en adelante, teniendo en cuenta además que los valores que en tal sección tomen las variables fluidas son valores medios tomados circunferencialmente.

La hipótesis (f) que considera que el trabajo específico comunicado en el rotor es constante para cada linea de corriente, no modifica en absoluto el aspecto físico del problema; simplemente especifica una condición de diseño que se utiliza con gran frecuencia en la práctica.

Finalmente es interesante hacer constar que se aplican las ecuaciones del movimiento laminar, cuando sin embargo el movimiento es claramente turbulento; no obstante debe tenerse presente que el coeficiente de intensidad de turbulencia $\mathcal{E}$ alcanza valores $\mathcal{E} \simeq 4 \times 10^{-2}$ mientras que la longitud característica es del orden de la cuerda, en el nucleo de la corriente (donde son despreciables los efectos de viscosidad), de lo que se deduce que los términos de turbulencia son despreciables frente a los términos del movimiento medio. En cambio deben ser considerados en la capa límite donde la longitud característica es del orden del espesor de la misma.

1-2.- ESTUDIO AERODINAMICO DEL ESTATOR

La componente radial de la ecuación del impulso (desarrollada en el apéndice), al ser particularizada para las variables fluidas en la sección 2, puede escribirse:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V_{m2}^2}{\partial r_2} + \left[\frac{\cos\varphi}{r_c} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m}\right]_2 V_{m2}^2 + \frac{V_{\theta 2}}{r_2}\left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}\right)_2 = \left[\frac{\partial H_t}{\partial r} - T\frac{\partial S}{\partial r}\right]_2 \qquad 1\text{-}1$$

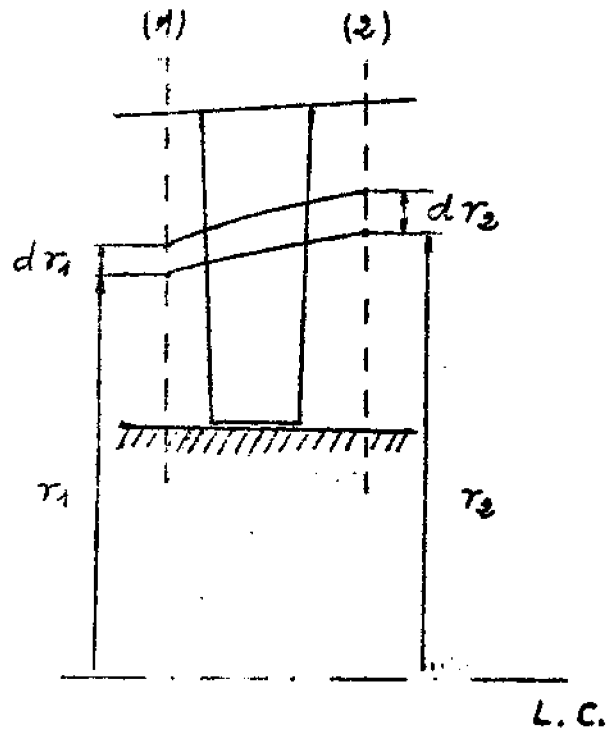


Fig. 1-2

El flujo se considera isentrópico según cada linea de corriente e isentálpico (ecuación A-31); en consecuencia teniendo en cuenta además la hipótesis de simetría axial, resulta (Vease Fig.1-2)

a) $$\left[\frac{\partial H_t}{\partial r}\right]_1 dr_1 = \left[\frac{\partial H_t}{\partial r}\right]_2 dr_2$$

b) $$T_2\left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_1 = T_2\left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_2 dr_2 \qquad (1\text{-}2)$$

es decir:

$$\left[\frac{\partial H_t}{\partial r} - T\frac{\partial S}{\partial r}\right]_2 = \left[\frac{\partial H_t}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_2} - T_2\left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_2} \qquad (1\text{-}3)$$

Por otra parte sabemos que:

$$T_1\left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_1 = \left[\frac{\partial H_t}{\partial r}\right]_1 - \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\right]_1 - \left[\frac{\partial \frac{1}{2}V^2}{\partial r}\right]_1 \qquad (1\text{-}4)$$

Aquí resulta necesario introducir una nueva hipótesis, para simplificar las ecuaciones, que consiste en suponer que la corriente es uniforme en presión y velocidad a la salida de la cámara de combustión, es decir en la sección de entrada de la turbina ó sección 1; lo cual puede admitirse si se tiene en cuenta que las variaciones de presión y velocidad - en dicha sección son pequeñas comparadas con las variaciones de temperatura. En consecuencia resulta:

$$\left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_1 = \frac{1}{T_1}\left[\frac{\partial H_t}{\partial r}\right]_1 \qquad (1\text{-}4)$$

De lo que se deduce que la no homoentropía de la corriente, en la sección de entrada se debe a la variación de temperatura con el radio.

La ecuación de la energía, por otra parte proporciona:

$$T_2 = \frac{H_{t1}}{c_p} - \frac{1}{2c_p}\left(V_{m2}^2 + V_{\theta 2}^2\right) = T_1 + \frac{1}{2c_p}\left(V_1^2 - V_{m2}^2 - V_{\theta 2}^2\right) \quad (1\text{-}5)$$

En consecuencia mediante las ecuaciones (1-4) y (1-5), y des pués de sencillas reducciones la ecuación (1-3) queda así:

$$\left[\frac{\partial H_t}{\partial r} - T\frac{\partial S}{\partial r}\right]_2 = -\frac{V_1^2 - V_{m2}^2 - V_{\theta 2}^2}{2T_1}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_2} \quad (1\text{-}6)$$

En consecuencia el segundo miembro de la ecuación del impulso se anula cuando la corriente es homoentrópica, ó lo que es -- equivalente cuando el perfil de temperaturas en la sección de entrada es uniforme; representa por tanto la influencia de una distribución no uniforme de temperaturas.

Este término puede evaluarse siempre que se conozca T1(r) dado que $\frac{dT_{1t}}{dr} = \frac{dT_1}{dr}$. No obstante es más practico y cómodo - utilizar como dato de partida T1t(r) y puesto que el número de Mach de la corriente en la sección de entrada (sección 1) es - pequeño, normalmente menor que 0.3, puede realizarse en estos casos la aproximación $T_1 \simeq T_{1t}$ en la ecuación (1-6), sin pérdida alguna de rigor físico y errores muy pequeños en los cálculos obtenidos.

En definitiva después de (1-6) la ecuación (1-1) queda reducida a la siguiente ecuación diferencial

$$\left(\frac{\partial V_m^2}{\partial r}\right)_2 + P(r)V_m^2 = T(r) \quad (1\text{-}7)$$

con

$$P(r) = 2\left[\frac{\cos\varphi}{r_c} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m} - \frac{1}{2T_1}\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_2}\right]_2 \quad (1\text{-}8)$$

$$T(r) = 2\left[\frac{V_{\theta 2}^2 - V_1^2}{2T_1}\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_2} - \frac{V_{\theta 2}}{r_2}\left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}\right)_2\right] \qquad (1\text{-}9)$$

La ecuación diferencial (1-7), constituirá la base de partida para todos nuestros estudios y desarrollos posteriores, que determinan las variables fluidas después del estator, cualquiera que sea la ley torsional impuesta y el perfil de temperaturas a la salida de la cámara de combustión $T_{1t}(r)$.

1-3.- ESTUDIO AERODINAMICO DEL ROTOR

Como en el caso del estator la componente radial de la ecuación del impulso aplicada a la sección 3 (fig. 1-3) proporciona

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V_{m3}^2}{\partial r_3} + \left[\frac{\cos\varphi}{r_c} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m}\right]_3 V_{m3}^2 + \frac{V_{\theta 3}}{r_3}\left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}\right)_3 = \qquad (1\text{-}10)$$

$$= \left[\frac{\partial H_t}{\partial r} - T\frac{\partial S}{\partial r}\right]_3$$

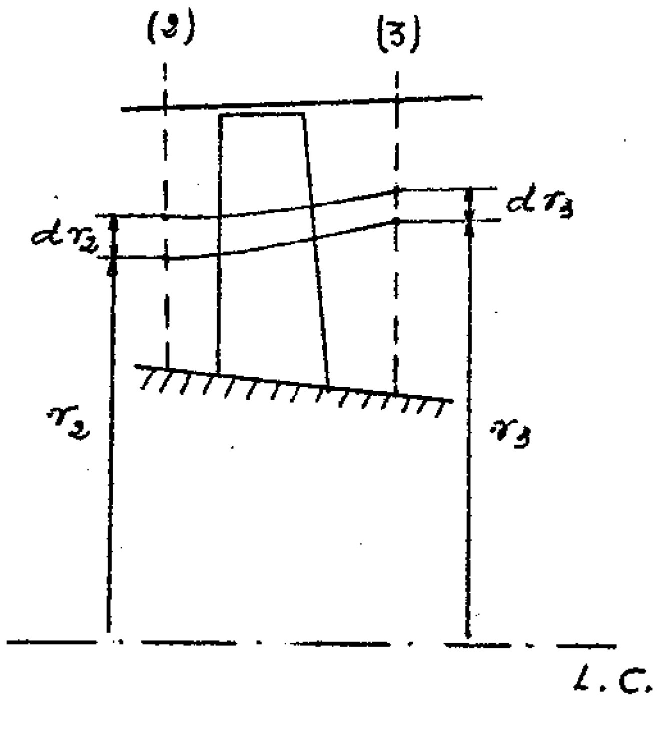


Fig. 1-3

La ecuación del momento cinético, con la hipótesis τ = cte. para cada linea de corriente es:

$$\tau = u_2 V_{\theta 2} - u_3 V_{\theta 3} \tag{1-11}$$

Esta ecuación relaciona $V\theta 3$ con $V\theta 2$ (para la misma linea de corriente), en consecuencia $V\theta 3$ no es arbitraria, quedando - determinada en cuanto se fije τ y $V\theta 2$.

Como consecuencia de lo anterior la ecuación de la energía (A-32) aplicada a una linea de corriente entre la entrada y salida del rotor (secciones 2 y 3) toma la forma:

$$H_{t3} + \tau = H_{t2} = H_{t1}$$

En el rotor la entalpía no permanece constante a lo largo de una linea de corriente, pero el movimiento continua siendo -- isentrópico de acuerdo con las hipótesis establecidas. Como - además $\frac{\partial \tau}{\partial r}$ = 0 se puede escribir:

$$\left[\frac{\partial H_t}{\partial r}\right]_3 dr_3 = \left[\frac{\partial H_t}{\partial r}\right]_1 dr_1 \tag{1-12}$$

$$T_3 \left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_3 d r_3 = T_3 \left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_1 d r_1$$

Es decir que en definitiva y de forma semejante a como ocu-- rría en el estator.

$$\left[\frac{\partial H_t}{\partial r} - T\frac{\partial S}{\partial r}\right]_3 = \left[\frac{\partial H_t}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_3} - T_3 \left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_3} \tag{1-13}$$

De la ecuación de la energía, se obtiene:

$$T_3 = T_1 - \frac{\zeta}{c_p} + \frac{1}{2c_p}\left(V_1^2 - V_{m3}^2 - V_{\theta3}^2\right) \qquad (1\text{-}14)$$

Con las ecuaciones (1-14) y (1-4), la ecuación (1-13) proporciona:

$$\left(\frac{\partial H_t}{\partial r} - T\frac{\partial S}{\partial r}\right)_3 = -\frac{V_1^2 - V_{m3}^2 - V_{\theta3}^2 - 2\zeta}{2T_1}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_3} \qquad (1\text{-}15)$$

Este término de la ecuación del impulso representa por tanto el efecto de la no homoentropía de la corriente en la distribución de velocidades detrás del rotor ó lo que es igual ~~que~~ de una distribución no uniforme de temperaturas.

Finalmente de las ecuaciones (1-15) y (1-10), después de algunas operaciones obtenemos la siguiente ecuación diferencial.

$$\left(\frac{\partial V_m^2}{\partial r}\right)_3 + M(r)\,V_{m3}^2 = N(r) \qquad (1\text{-}16)$$

con

$$M(r) = 2\left[\frac{\cos\varphi}{r_c} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m} - \frac{1}{2T_1}\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_3}\right]_3 \qquad (1\text{-}17)$$

$$N(r) = 2\left[\frac{V_{\theta3}^2 + 2\zeta - V_1^2}{2T_1}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_1 \frac{dr_1}{dr_3} - \frac{V_{\theta3}}{r_3}\left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}\right)_3\right] \qquad (1\text{-}18)$$

La expresión diferencial (1-16) constituye la base de partida, para la determinación de las variables fluidas en el rotor, -- en todos los desarrollos posteriores.

CAPITULO II

DETERMINACION DE LAS VARIABLES FLUIDAS CUANDO LAS DESVIACIONES RADIALES SON PEQUEÑAS.

2-1 INTRODUCCION

En las máquinas rotatorias, tipo axial, las desviaciones radiales de la corriente a lo largo de las mismas son en muchos casos pequeñas; particularmente cuando la divergencia del canal por el que circula la corriente es así mismo pequeña. Como consecuencia cabe esperar que tanto las velocidades radiales como sus derivadas sean pequeñas.

Por otra parte en el supuesto de que $\frac{V_r}{V_z} \ll 1$ puede realizarse una serie de aproximaciones en las ecuaciones (1-7) y (1-16), de forma que quedan enormemente simplificadas, pudiendo obtenerse entonces expresiones integrales para la variación de las magnitudes fluidas con el radio, según sea la ley torsional elegida.

A continuación realizamos tales aproximaciones y exponemos detalladamente los desarrollos para las leyes torsionales de uso más frecuente, a saber: torbellino libre, rotación sólida y ángulo de salida constante.

2-2 DETERMINACION DE VARIABLES FLUIDAS Y ANGULOS DE LA CORRIENTE EN EL ESTATOR.

Las aproximaciones resultantes de las pequeñas velocidades radiales son las siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} V_{m2}^2 \simeq V_{z2}^2 \\ \left(\frac{\cos\varphi}{r_c}\right)_2 \simeq 0 \\ (\operatorname{sen}\varphi)_2 \simeq 0 \\ \frac{dr_1}{dr_2} \simeq 1 \end{array}\right. \qquad (2\text{-}1)$$

Con estas simplificaciones la ecuación (1-7) se reduce a:

$$\frac{\partial V_{z2}^2}{\partial r} - \frac{1}{T_{1t}}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 V_{z2}^2 = \frac{V_{\theta 2}^2 - V_1^2}{T_{1t}}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 - \frac{2V_{\theta 2}}{r}\frac{\partial (rV_{\theta 2})}{\partial r} \quad (2\text{-}2)$$

ó bien teniendo en cuenta que:

a) $V_2^2 = V_{z2}^2 + V_{\theta 2}^2$

b) $$\frac{V_{\theta 2}}{r}\frac{\partial (rV_{\theta 2})}{\partial r} = \frac{V_{\theta 2}^2}{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial V_{\theta 2}^2}{\partial r} \quad (2\text{-}3)$$

puede escribirse también:

$$\frac{\partial V_2^2}{\partial r} - \frac{1}{T_{1t}}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 V_2^2 = -\frac{V_1^2}{T_{1t}}\left(\frac{\partial T_t}{\partial r}\right)_1 - \frac{2V_{\theta 2}^2}{r} \quad (2\text{-}4)$$

Puesto que lo que pretendemos es calcular las variaciones con el radio de las variables fluidas en la sección 2 (salida del estator) las ecuaciones diferenciales (2-2) y (2-4) pueden considerarse ecuaciones diferenciales ordinarias y así lo haremos a partir de este momento. Con cualquiera de estas ecuaciones puede determinarse la distribución de velocidades toda vez que ha sido fijada la ley torsional y la temperatura de entrada T1t (r).

Su integración se expone a continuación según cada caso tratado. No obstante indicamos previamente y de forma sucinta el método de calculo de las restantes magnitudes fluidas y ángulos de la corriente.

De la ecuación de la energía (A-31), se obtiene la distribución de temperatura y a continuación el número de Mach de la corriente M2, mediante las relaciones:

$$T_2 = T_{1t} - \frac{V_2^2}{2c_p}$$

$$M_2 = \frac{V_2}{\sqrt{\gamma R T_2}}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis de movimiento isentrópico según una linea de corriente y que el gas se comporta como gas perfecto puede escribirse igualmente:

$$\frac{p_2}{p_{1t}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\gamma/\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_{1t}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{1/\gamma-1}}$$

La ecuación global del gasto se emplea para la determi nación del tamaño de la máquina en el problema de diseño ó bien es la que determina la constante que resulta de inte-- grar las ecuaciones diferenciales (2-2) ó (2-4) en el pro-- blema de actuaciones.

En la figura (2-1) se presentan los triángulos de velo cidades del escalon y se indica el criterio de signos adop- tados para los ángulos y velocidades de la corriente, pudien do deducirse fácilmente.

$$\alpha_2 = \text{arc sen}\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_2}\right)$$

$$\alpha_{2R} = \text{arc tg}\left(\frac{V_{\theta 2} - u}{V_{z2}}\right)$$

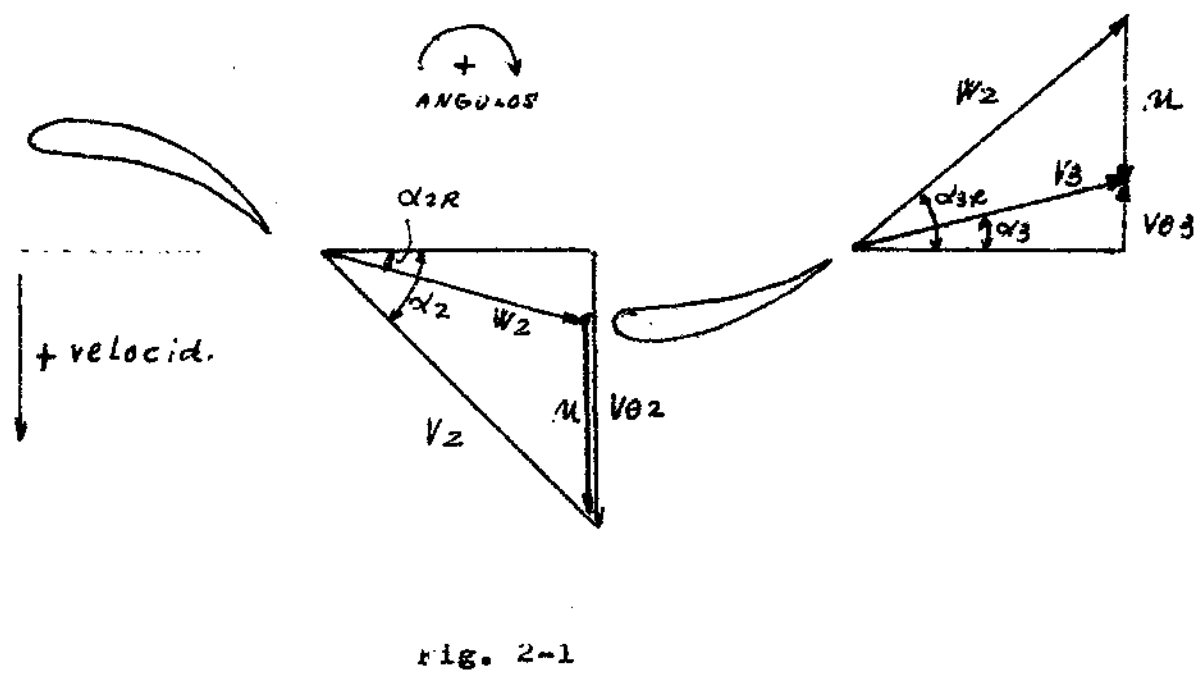


Fig. 2-1

Resulta además interesante la determinación del número de Mach relativo M2R, que puede obtenerse teniendo en cuenta las relaciones:

$$W_2 = \frac{V_{z2}}{|\cos \alpha_{2R}|}$$

$$V_{z2} = V_2 \, |\cos \alpha_2|$$

por lo que resulta:

$$M_{2R} = \left| \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_{2R}} \right| M_2$$

2-2-1 TORBELLINO LIBRE

La ley torsional conocida con el nombre de torbellino - libre viene dada por la expresión:

$$V_{\theta 2} \cdot r = K = V_{\theta 2m} \cdot r_m \qquad (2\text{-}5)$$

En consecuencia la ecuación diferencial (2-2) queda reducida a:

$$\frac{d V_{z2}^2}{d r} - \frac{d(\ell T_{1t})}{d r} V_{z2}^2 = \frac{K^2/r^2 - V_1^2}{T_{1t}} \left(\frac{d T_t}{d r} \right)_1 \qquad (2\text{-}6)$$

cuya expresión integral es:

$$V_{z2}^2 = e^{\int \frac{d(\ell T_{1t})}{d r} dr} \left[\int \frac{K^2/r^2 - V_1^2}{T_{1t}} \left(\frac{d T_t}{d r} \right)_1 e^{\int \frac{d(\ell T_{1t})}{d r} dr} dr + Q \right] \qquad (2\text{-}7)$$

Después de realizar las integraciones correspondientes y algunas simplificaciones queda:

$$V_{z2}^2 = T_{1t} \left[\frac{V_1^2}{T_{1t}} - \frac{V_{\theta 2}^2}{T_{1t}} - 2K^2 \int \frac{1}{T_{1t} r^3} dr + Q \right] \qquad (2\text{-}8)$$

La constante de integración Q puede determinarse imponiendo - que esta ecuación se satisfaga en el punto medio, es decir haciendo

$$\left. \begin{array}{l} V_{z2} = V_{z2m} \\ T_{1t} = T_{1tm} \end{array} \right\} r = r_m$$

De esta forma se deduce:

$$Q = \frac{1}{T_1t_m}\left(V_{2m}^2 - V_1^2\right) + 2K^2\phi(r_m) \qquad (2-9)$$

habiendo hecho:

$$\phi(r) = \int \frac{1}{T_1t\, r^3}\, dr$$

sustituyéndo el valor de Q dado por (2-6) en la ecuación -- (2-8) queda finalmente:

$$V_{z2}^2 = T_1t\left[\frac{V_1^2 - V_{\theta 2}^2}{T_1t} - 2K^2\int_{r_m}^{r}\frac{1}{T_1t\, r^3}\, dr + C\right] \qquad (2-10)$$

donde C puede calcularse mediante la expresión:

$$C = \frac{1}{T_1t_m}\left(V_{2m}^2 - V_1^2\right) \qquad (2-11)$$

La ecuación (2-10) permite por tanto la determinación de Vz2 cualquiera que sea la distribución de T1t(r).

Ahora bien teniendo en cuenta la relación (2-3a) se tiene por otra parte:

$$V_2^2 = V_1^2 - T_1t\left[2K^2\int_{r_m}^{r}\frac{1\cdot dr}{T_1t\, r^3} - C\right] \qquad (2-10a)$$

2-2-2 ROTACION SOLIDA

La ley torsional conocida con el nombre de rotación sólida viene dada por la expresión:

$$V\theta 2 = K1 \cdot r \qquad (2-12)$$

llamada así porque el aire gira como si fuese un sólido rígido.

Introduciendo el valor de Vθ2 dado por la ley torsional definida en la ecuación diferencial (2-4) resulta:

$$\frac{d V_2^2}{dr} - \frac{d(\ell T_1t)}{dr} V_2^2 = -\left(\frac{V_1^2}{T_1t}\frac{dT_1t}{dr} + 2K_1^2 r\right) \qquad (2-13)$$

cuya expresión integral es:

$$V_2^2 = e^{\int \frac{d(\ell T_1t)}{dr} dr} \left[-\int \left(\frac{V_1^2}{T_1t} \frac{dT_1t}{dr} + 2k_1^2 r \right) e^{-\int \frac{d(\ell T_1t)}{dr} dr} dr + Q_1 \right]$$

ó bien:

$$V_2^2 = T_1t \left[-\int \frac{V_1^2}{T_1t^2} \frac{dT_1t}{dr} dr - \int \frac{2k_1^2 r}{T_1t} dr + Q_1 \right]$$

es decir:

$$V_2^2 = V_1^2 - T_1t \left[\int 2 \frac{k_1^2 r}{T_1t} dr - Q_1 \right] \qquad (2\text{-}14)$$

La determinación de la constante Q_1 se efectua imponiendo la condición de que la ecuación anterior se satisfaga para los valores de las variables en el punto medio, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} V_2^2 = V_{2m}^2 \\ T_1t = T_1t_m \end{array} \right\} r = r_m$$

con lo que se obtiene:

$$Q_1 = \frac{1}{T_1t_m} \left(V_{2m}^2 - V_1^2 \right) + 2k_1^2 \varphi(r_m) \qquad (2\text{-}15)$$

habiendo hecho:

$$\varphi(r) = \int \frac{r}{T_1t} dr$$

sustituyendo el valor de Q_1 deducido en la ecuación (2-14) -- queda finalmente

$$V_2^2 = V_1^2 - T_1t \left[\int_{r_m}^{r} \frac{2k_1^2 r}{T_1t} dr - C_1 \right] \qquad (2\text{-}16)$$

estando determinada la constante C_1 con la expresión:

$$C_1 = \frac{1}{T_1t_m} \left(V_{2m}^2 - V_1^2 \right) \qquad (2\text{-}17)$$

Estas dos últimas expresiones permiten de nuevo el cálculo de V2(r) en la sección 2, cualquiera que sea el perfil de temperaturas T1t(r).

2-2-3 ANGULO DE SALIDA CONSTANTE

Es frecuente en la practica encontrarse con álabes de la directriz sin torsión, siendo la razón principal de tal diseño la facilidad de fabricación y en consecuencia la economía de coste.

Para tales álabes y en el supuesto de que las desviaciones de la corriente varíen poco de una sección del álabe a otra, se puede considerar con suficiente aproximación que el ángulo de la corriente a la salida α_2 es constante. Con este supuesto y procediendo en forma análoga a como se han estudiado los casos anteriores trataremos de obtener el campo de velocidades.

Tomaremos pues:

$$\mathrm{sen}\,\alpha_2 = \frac{V_{\theta 2}}{V_2} = cte. \qquad (2\text{-}18)$$

Introduciendo en la ecuación diferencial (2-4) el valor de - Vθ2 dado por la ley torsional definida, obtenemos:

$$\frac{d V_2^2}{d r} + \left(\frac{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2}{r} - \frac{d(\ell T_1 t)}{d r}\right) V_2^2 = - \frac{V_1^2}{T_1 t}\frac{d T_1 t}{d r} \qquad (2\text{-}19)$$

ecuación que integrada proporciona:

$$V_2^2 = \frac{T_1 t}{r^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2}}\left[\frac{r^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2} V_1^2}{T_1 t} - 2 V_1^2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2 \int \frac{r^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2 - 1}}{T_1 t}\, dr + Q_2\right] \qquad (2\text{-}20)$$

El valor de la constante Q2, se determina procediendo de forma análoga a los casos anteriores obteniéndose:

$$Q_2 = \frac{1}{T_1 t_m}\left(V_{2m}^2\, r_m^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2} - V_{21}^2\, r_m^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2}\right) + 2 V_1^2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2\, \Psi(r_m) \qquad (2\text{-}21)$$

siendo:

$$\Psi(r) = \int \frac{r^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2 - 1}}{T_1t}\, dr$$

sustituyéndo ahora el valor de la constante Q2 obtenido en - la ecuación (2-20), resulta:

$$V_2^2 = V_1^2 + \frac{T_1t}{r^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2}}\left[C_2 - 2V_1^2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2 \int_{r_m}^{r} \frac{r^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2 - 1}}{T_1t}\, dr\right] \quad (2\text{-}22)$$

donde el valor de C2 viene dado por la expresión:

$$C_2 = \frac{r_m^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2}}{T_1t_m}\left(V_{2m}^2 - V_1^2\right) \quad (2\text{-}23)$$

La ecuación (2-22) proporciona la expresión buscada para obtener el campo de velocidades cualquiera que sea T1t(r)

2-3 DETERMINACION DE LAS VARIABLES FLUIDAS EN EL ROTOR

Las aproximaciones resultantes de las pequeñas desviaciones radiales son:

$$V_{m3}^2 \simeq V_{z3}^2$$

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r_c}\right)_3 \simeq 0$$

$$\mathrm{sen}\,\varphi_3 \simeq 0$$

$$\frac{dr_1}{dr_3} \simeq 1$$

$$u_2 \simeq u_3 = u = \omega r$$

con estas simplificaciones la ecuación (1-16) se reduce a:

$$\frac{\partial V_{z3}^2}{\partial r} - \frac{1}{T_1t}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 V_{z3}^2 = \frac{V_{\theta 3}^2 + 2\zeta - V_1^2}{T_1t}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 - 2\frac{V_{\theta 3}}{r}\frac{\partial (rV_{\theta 3})}{\partial r} \quad (2\text{-}24)$$

ó bien, como en el caso del estator, teniendo en cuenta las relaciones (2-3) aplicadas a los valores de las variables fluidas en la sección 3 se obtiene:

$$\frac{\partial V_3^2}{\partial r} - \frac{1}{T_1t}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 V_3^2 = \frac{(2\zeta - V_1^2)}{T_1t}\left[\frac{\partial T_t}{\partial r}\right]_1 - \frac{2V_{\theta 3}^2}{r} \quad (2\text{-}25)$$

mientras que la ecuación (1-11) queda en la forma:

$$\tau = u\,(V_{\theta 2} - V_{\theta 3}) \qquad (2\text{-}26)$$

La integración de la ecuación diferencial proporciona la distribución de velocidades V_3. Para el resto de las variables fluidas, disponemos de las siguientes relaciones:

$$T_3 = T_{1t} - \frac{V_3^2}{2c_p} - \frac{\tau}{c_p}$$

obtenida a partir de la ecuación de la energía (A-32) y por otra parte:

$$p_3 = p_2 \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\gamma/\gamma-1} = p_1 \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\gamma/\gamma-1}$$

$$\rho_3 = \rho_2 \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{1/\gamma-1} = \rho_1 \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{1/\gamma-1}$$

Como consecuencia de las hipótesis de movimiento isentrópico según una linea de corriente y gas perfecto.

La ecuación del gasto será utilizada de igual forma a como se ha hecho para el estator.

Para los ángulos de la corriente (Fig.2-1, página 22) se deduce fácilmente:

$$\alpha_3 = \text{arc sen} \left(\frac{V_{\theta 3}}{V_3}\right)$$

$$\alpha_{3R} = \text{arc tg} \left(\frac{V_{\theta 3} - u}{V_{z3}}\right)$$

Puesto que lo que pretendemos es calcular las variaciones con el radio de las variables fluidas en la sección 3 (salida del rotor) las ecuaciones diferenciales (2-24) y (2-25) pueden considerárse ecuaciones diferenciales ordinarias.

La ecuación diferencial (2-25) es una ecuación de primer -- órden en V_3^2 y teniendo en cuenta que $V\theta 3$ es una función del radio su expresión integral general es:

$$V_3^2 = V_1^2 - 2\zeta - T_1 t \left[\int \frac{2 V_{\theta 3}^2}{r T_1 t} dr + Q' \right] \qquad (2\text{-}27)$$

la determinación de la constante Q' puede realizarse imponien do la condición:

$$\left. \begin{array}{l} V_3^2 = V_{3m}^2 \\ T_1 t = T_1 t_m \end{array} \right\} r = r_m$$

con lo que resulta:

$$V_3^2 = V_1^2 - 2\zeta - T_1 t \left[\int_{r_m}^{r} \frac{2 V_{\theta 3}^2}{r T_1 t} dr - C' \right] \qquad (2\text{-}28)$$

habiendo hecho:

$$C' = \frac{1}{T_1 t_m} \left(V_{3m}^2 + 2\zeta - V_1^2 \right) \qquad (2\text{-}29)$$

Las expresiones correspondientes a las leyes torsionales que se estudian se obtendrán a continuación.

2-3-1 TORBELLINO LIBRE

Teniendo en cuenta las relaciones (2-5) y (2-26) se ob tiene

$$V_{\theta 3} = \left(K - \frac{\zeta}{\omega} \right) \frac{1}{r} \qquad (2\text{-}30)$$

sustituyendo esta expresión de $V\theta 3$ en la ecuación (2-28) queda:

$$V_3^2 = V_1^2 - 2\zeta - T_1 t \left[\int_{r_m}^{r} \frac{2}{T_1 t\, r^3} \left(K - \frac{\zeta}{\omega} \right)^2 dr - C' \right] \qquad (2\text{-}31)$$

2-3-2 ROTACION SOLIDA

Teniendo en cuenta las relaciones (2-12) y (2-26) se obtiene para este caso:

$$V_{\theta 3} = K_1 r - \frac{\tau}{\omega r} \qquad (2\text{-}32)$$

sustituyéndo esta expresión en la ecuación (2-28) queda:

$$V_3^2 = V_1^2 - 2\tau - T_1 t \left[\int_{r_m}^{r} \frac{2}{T_1 t . r} \left(K_1 r - \frac{\tau}{\omega r} \right)^2 dr - C' \right] \qquad (2\text{-}33)$$

2-3-3 ANGULO DE SALIDA CONSTANTE

Este caso no es de aplicación inmediata como los anteriores yá que la expresión que proporciona $V\theta 3$ es:

$$V_{\theta 3} = V_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - \frac{\tau}{\mu} \qquad (2\text{-}34)$$

Debiendo recurrir a la expresión (2-22) que proporciona la - distribución radial de V2, cuando la directriz es de ángulo de salida constante. Se considera que en este caso difícilmente será posible obtener una expresión analítica para V3 por lo que se estima que el calculo númérico deberá efectuarse casi sin excepción.

2-4 EXPRESIONES ADIMENSIONALES

2-4-1 PARAMETROS CARACTERISTICOS

En todo lo que antecede se han obtenido expresiones generales, como consecuencia de una solución aproximada, que permiten el cálculo de las variables fluidas, en las secciones de salida del estator y salida del rotor, cualquiera que sea la distribución de temperaturas T1t(r).

La influencia de T1t no se manifiesta de forma clara porque depende de los valores de expresiones integrales, que implican el conocimiento de la misma distribución de temperatura y porque depende a su vez de los valores de otras variables; como son: tamaño de la máquina, trabajo específico, velocidad en el punto medio etc.

Es necesario pués desarrollar algún caso determinado que ponga de manifiesto su influencia tanto cualitativa (aunque esta puede deducirse en parte del análisis de las ecuaciones diferenciales como se verá más adelante) como cuantitativa. Con tal motivo estudiaremos el caso de distribución lineal de temperaturas, por ser este el de mayor interés en la práctica desde un punto de vista termomecánico, comparándolo con el caso de temperatura uniforme.

A fin de correlacionar los resultados y generalizárlos se pondrán en forma adimensional las ecuaciones anteriormente obtenidas. De esta forma será posible presentar tablas y gráficos dentro de los valores más usuales de los parámetros de diseño.

Consideraremos en lo que sigue que la velocidad axial puede ó no mantenerse constante a lo largo de la linea media;

es decir que en general, $V_1 = V_{z1} \neq V_{z2m} \neq V_{z3m}$

habiendo hecho

$$R_V = \frac{V_{z2m}}{V_1}$$

$$R_{V_1} = \frac{V_{z3m}}{V_1}$$

Los parámetros utilizados son los siguientes:

a) Relación de radios ξ_i definido así

$$\xi_i = ri/re$$

Este parámetro es representativo de la configuración geométrica de la turbina y sus valores varian normalmente en el intervalo, ξ_i (0.5,0.8)

Para simplificar las expresiones, que desarrollaremos a continuación, se tiene en cuenta que el radio medio adimensionalizado es:

$$\xi_m = (1+\xi_i)/2$$

b) Coeficiente de flujo λ, definido mediante la expresión

$$\lambda = \frac{V_{z2}}{u_m}$$

pudiendo utilizar tambien

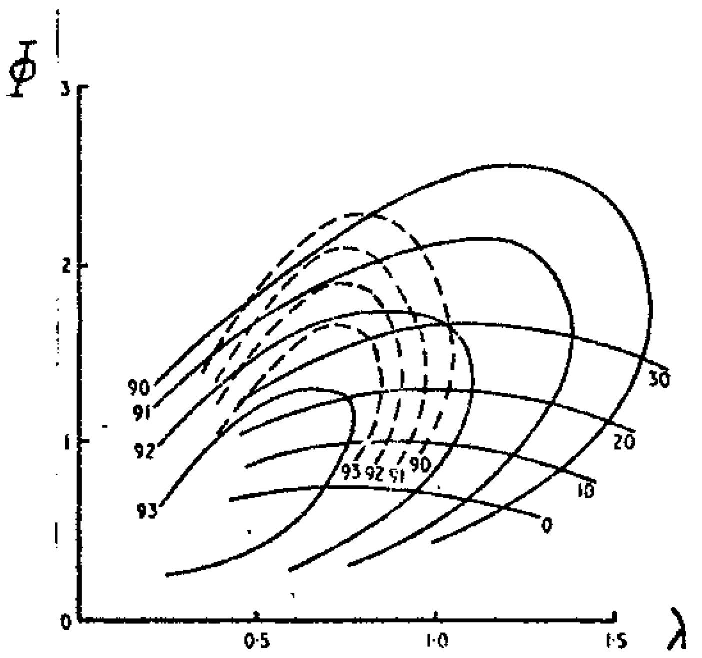
$$\lambda_1 = \frac{V_{z1}}{u_m} = \frac{\lambda}{R_V}$$

El coeficiente de flujo tiene una gran influencia en el rendimiento y sus valores varian en el intervalo, λ (0.5,1.5)

c) Coeficiente de carga ϕ, definido como sigue:

$$\phi = \frac{\tau}{u_m^2}$$

El coeficiente de carga proporciona una idea de la deflexión comunicada a la corriente comparada con la velocidad de arrastre; valores normales son ϕ (0.5,1.5) y tambien tiene gran influencia en el rendimiento de la máquina (fig. 2-2) (14).



Curvas del rendimiento
(tomadas de Smith, ref. 14)

Fig. 2-2

d) Coeficiente de torsión Ψ dado por

$$\Psi = \frac{V_{\theta 2m}}{V_{z2m}} = tg\,\alpha_{2m}$$

como se ve, se corresponde con el ángulo de salida de la corriente en la directriz, es decir, el ángulo que forman la velocidad absoluta de la corriente en el punto medio y el eje, por lo que podrá utilizarse este indistintamente.

Valores normales son, α_{2m} (60º, 80º)

e) Coeficiente de velocidad σ.

Se designa con este nombre la relación entre la velocidad circunferencial del álabe y la velocidad isentrópica V_{1s}, donde V_{1s} se obtiene según sigue:

$$\frac{V_{1s}^2}{2} = H_1t - H_3ts$$

y en consecuencia

$$\sigma = \sqrt{\frac{u_m^2}{2(H_1t - H_3ts)}}$$

En el movimiento real definimos el rendimiento de la turbina η_T, mediante la expresión

$$\eta_T = \frac{H_1t - H_3t}{H_1t - H_3ts}$$

ahora bien, teniendo en cuenta la relación anterior y la expresión (2-26) se puede escribir

$$\sigma = \sqrt{\frac{u_m^2 \, \eta_T}{2\,\zeta}}$$

y teniendo en cuenta la definición del coeficiente de carga tambien se escribe

$$\sigma = \sqrt{\frac{\eta_T}{2\,\phi}}$$

Puesto que nosotros consideramos que el movimiento es isentrópico según una linea de corriente, en particular para la linea media se tendrá finalmente

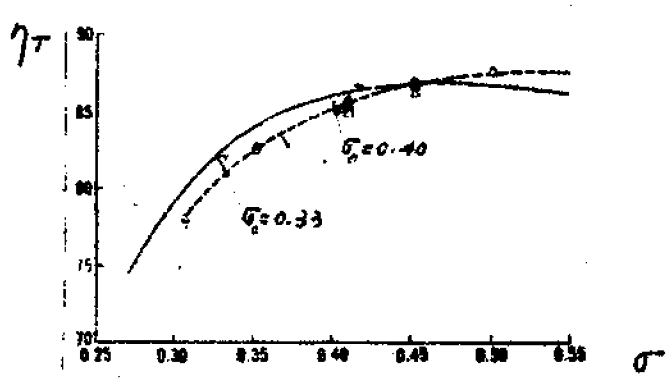
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\,\phi}}$$

es decir que los parámetros ϕ y σ estan relacionados pudiendo utilizarse indistintamente.

En lo que sigue utilizaremos el coeficiente de carga ϕ, no sin antes mencionar que la influencia del coeficiente σ en el rendimiento es marcadísima, llegando algunos autores --

como Horlock (5), a considerar que el rendimiento depende -- casi exclusivamente de σ.

Estudios experimentales y desarrollos prácticos llevados a cabo por Dorman y Welna (15) (fig.2-3), situan máximos del - rendimiento para valores σ (0.4,0.55)



Variación del rendimiento de la turbina con el coeficiente de velocidad, para dos turbinas diseñadas con valores nomi nales de σ = 0.33 y σ = 0.40

Fig. 2-3

f) Número de Mach de la corriente a la salida de la directriz M2m.

Es frecuente en la práctica diseñar el primera estator ó directriz para que funcione en condiciones sónicas. La variación del nº de Mach de la corriente M2 con el radio explica - que cuando se fija M2m=1 la corriente sea supersónica en la - raiz y sónica en el extremo. Para turbinas subsónicas se estima que cuando el número de Mach de la corriente alcanza valores próximos a 1.17, se produce una expansión de Prandlt-Meyer en la seccion de salida que modifica el esquema del flujo, -

y los angulos de la corriente difieren apreciablemente -- de los calculados a partir de los datos experimentales, obtenidos en ensayos con cascadas de corriente subsónica. Por otra parte en estos casos el número de Mach de la corriente relativa llega a ser superior al número de Mach crítico de los perfiles del rotor con el consiguiente detrimento en el rendimiento, a causa de la interacción de la onda de choque, que se origina, con la capa límite. Teniendo en cuenta todo lo anteriormente dicho y para el caso de expansion sońica en la directriz - (en condiciones de bloqueo) los valores de M2m varían normalmente en el intervalo (0.6,0.9), dependiendo de la ley torsional elegida.

g) Coeficiente de variación de temperatura.

La influencia de la temperatura se tendra en cuenta a través del parámetro δ, que denominaremos incremento relativo - de temperatura, definido según sigue:

$$\delta = \frac{T_{1tM} - T_{1tm}}{T_{1tm}}$$

donde T_{1tM} es la máxima temperatura.

En el caso de una distribución lineal de temperaturas, -- objeto de nuestro estudio consiguiente; $T_{1tM} = T_{1te}$ y en consecuencia

$$\delta = \frac{T_{1te} - T_{1tm}}{T_{1tm}}$$

por lo que

$$\frac{T_{1t}}{T_{1tm}} = 1 + \frac{\delta}{1-\xi_i}\left(2\xi - (1+\xi_i)\right) \qquad 7$$

ecuación que proporciona la distribución de temperaturas a la entrada de la turbina ó tambien

$$\frac{T_1t}{T_1t_m} = B + M\xi \qquad (2\text{-}35)$$

habiendo hecho

a) $$B = 1 - \frac{\delta(1+\xi_i)}{(1-\xi_i)}$$

b) $$M = \frac{2\delta}{1-\xi_i} \qquad (2\text{-}36)$$

con esto procedemos al calculo de las variables fluidas según las leyes torsionales que estamos considerándo.

2-4-2 <u>TORBELLINO LIBRE</u>

1ª.- Estator.

De la ecuación (2-10a) teniendo en cuenta las expresiones de los parámetros definidos anteriormente y el valor de K. obtenido mediante la relación (2-5) al particularizar las variables para el punto medio, se obtiene:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 1 - \frac{T_1t}{T_1t_m}\left[R_V^2\,\Psi^2 I_1(\xi) - \left(R_V^2(1+\Psi^2)-1\right)\right] \qquad (2\text{-}37)$$

donde

$$I_1(\xi) = \frac{(1+\xi_i)^2}{2}\int_{\xi_m}^{\xi}\frac{1}{\frac{T_1t}{T_1t_m}\,\xi^3}\,d\xi \qquad (2\text{-}38)$$

La expresión (2-37) es válida cualquiera que sea la distribución de temperaturas.

Igualmente de la ecuación (2-5) se obtiene:

$$\frac{V_{\theta 2}}{V_1} = \xi_m R_V \Psi / \xi \qquad (2\text{-}39)$$

esta expresión que proporciona la distribución tangencial - de velocidades, como puede apreciarse, es independiente de la distribución de temperaturas, dado que se ha elegido arbitrariamente, siendo por tanto válida en cualquier caso con ley torsional torbellino libre.

Efectuemos ahora, la aplicación a los dos casos siguientes:

a) Distribución lineal de temperaturas.

Sustituyéndo en (2-37) el valor de T_{1t}/T_{1tm} dado por la -- ecuación (2-35) e integrando se obtiene

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2_L = 1 - (B + M\xi)\left[R_V^2\,\Psi^2 I_{1L}(\xi) - \left(R_V^2(1+\Psi^2) - 1\right)\right] \qquad (2\text{-}37a)$$

con

$$I_{1L}(\xi) = \frac{\xi_m^2}{B^2}\left[\frac{2M\xi - B}{\xi^2} - \frac{4M(1+\xi_i) - 4B}{(1+\xi_i)^2} + \frac{2M^2}{B}\,\ell\,\frac{\xi}{(M\xi + B)\,\xi_m}\right] \qquad (2\text{-}40)$$

b) Temperatura de entrada constante T1t= T1tm .

La ecuación (2-37) proporciona para este caso

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2_C = R_V^2\left(1 + \frac{\Psi^2\,\xi_m^2}{\xi^2}\right) \qquad (2\text{-}37b)$$

2º.- Rotor

De la ecuación (2-32) teniendo en cuenta las expresiones de los parámetros definidos y la relación (2-30) particularizada para el punto medio se obtiene

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 = 1 + \frac{2\Phi}{\lambda_1^2}\left(\frac{T_{1t}}{T_{1tm}} - 1\right) - \frac{T_{1t}}{T_{1tm}}\left(\Psi - \frac{\Phi}{\lambda}\right)^2\left(I_1(\xi) - 1\right)R_V^2 + \frac{T_{1t}}{T_{1tm}}\left(R_V^2 - 1\right) \qquad (2\text{-}41)$$

como expresión que proporciona la distribución de velocidades absolutas cualquiera que sea T1t, deduciéndose para la velocidad tangencial la siguiente expresión.

$$\left(\frac{V\theta 3}{V_1}\right)=\left(Rr\,\Psi-\frac{\Phi}{\lambda_1}\right)\frac{\xi_m}{\xi} \qquad (2\text{-}42)$$

que igual que en el caso anterior es independiente de T1t.

Efectuaremos la aplicación a los casos:

a) Distribución lineal de temperaturas.

Sustituyéndo en la ecuación (2-41) el valor de $T1t/T1m$ dado por (2-35) se obtiene:

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)_L^2 = 1+2\frac{\Phi}{\lambda_1^2}\left(B+M\xi-1\right)-\left(B+M\xi\right)Rr^2\left(\Psi-\frac{\Phi}{\lambda^2}\right)\left[I_{1L}(\xi)-1\right]+\left(B+M\xi\right)\left(R_{r1}^2-1\right) \qquad (2\text{-}41a)$$

mientras que permanece invariable la expresión que proporciona la distribución de la velocidad tangencial.

b) Temperatura de entrada constante, T1 = T1m.

La ecuación (2-41) proporciona en este caso

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)_C^2 = R_{r1}^2 + Rr^2\,\frac{\xi_m^2}{\xi^2}\left(\Psi-\frac{\Phi}{\lambda}\right)^2 \qquad (2\text{-}41b)$$

2-4-3 <u>ROTACION SOLIDA</u>

1º.- Estator.

De la ecuación (2-16) con las expresiones de los parámetros utilizados y el valor de K1 deducido de la relación (2-12) al particularizar las variables en el radio medio se obtiene:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 1-\frac{T_1t}{T_1tm}\left[Rr^2\,\Psi^2 I_2(\xi)-\left(Rr^2\left(\Psi^2+1\right)-1\right)\right] \qquad (2\text{-}43)$$

con

$$I_2(\xi)=\frac{8}{(1+\xi_i)^2}\int_{\xi_m}^{\xi}\frac{\xi}{T_1t/T_1tm}\,d\xi \qquad (2\text{-}44)$$

como expresión que proporciona la distribución de velocidades, cualquiera que sea la distribución de temperaturas, -- mientras que para la velocidad tangencial se obtiene:

$$\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right) = R_V \Psi \frac{\xi}{\xi_m} \qquad (2\text{-}45)$$

que como puede apreciarse es independiente de la distribución de temperaturas.

Haremos aplicación a los casos:

a) Distribución lineal de temperaturas.

Sustituyendo en la ecuación (2-43) el valor de $\frac{T1t}{T1tm}$ dado - por la expresión (2-35) se obtiene:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_L^2 = 1-(B+M\xi)\left[R_V^2 \Psi^2 I_{2L}(\xi)-\left(R_V^2(\Psi^2+1)-1\right)\right] \qquad (2\text{-}43a)$$

con

$$I_{2L}(\xi) = \frac{2}{\xi_m}\left[\frac{\xi-\xi_m}{M} - \frac{B}{M^2}\,\ell\,(M\xi+B)\right] \qquad (2\text{-}46)$$

b) Temperatura constante T1t = T1tm.

La ecuación que proporciona la velocidad absoluta se reduce a:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_c^2 = R_V^2\left[\Psi^2\left(2-\frac{\xi^2}{\xi_m^2}\right)+1\right] \qquad (2\text{-}43b)$$

como es sabido la ecuación (2-45) que dá la velocidad tangencial es válida en cualquier caso.

2º.- Rotor

De la ecuación (2-33), teniendo en cuenta la relación -- (2-32) y procediendo en forma análoga a los casos anteriormente estudiados, obtenemos las siguientes expresiones que proporcionan la velocidad absoluta V3 y la tangencial Vθ3 respectivamente.

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 = 1 + 2\,\frac{\Phi}{\lambda_1^2}\left(\frac{T_{1t}}{T_{1tm}} - 1\right) - \frac{T_{1t}}{T_{1tm}}\left[I_2(\xi)\,R_V^2\,\Psi^2 + \frac{\Phi^2 I_1(\xi)}{\lambda_1^2} + \right.$$

$$\left. + R_V^2\,\Psi\,\frac{\Phi}{\lambda}\,I_3(\xi) - R_V^2\left(\Psi - \frac{\Phi}{\lambda}\right)^2 - R_{V1}^2 + 1\right] \qquad (2\text{-}47)$$

$$\frac{V_{\theta 3}}{V_1} = R_V\left(\Psi\,\frac{\xi}{\xi_m} - \frac{\Phi}{\lambda}\,\frac{\xi_m}{\xi}\right) \qquad (2\text{-}48)$$

donde

$$I_3(\xi) = -4\int_{\xi_m}^{\xi} \frac{1}{\xi\;T_{1t}/T_{1tm}}\,d\xi \qquad (2\text{-}49)$$

Distinguiremos los casos:

a) Distribución lineal de temperaturas.

En este caso se obtiene:

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)_L^2 = 1 + \frac{2\Phi}{\lambda^2}\,(B + M\xi - 1) - (B + M\xi)\left[I_{1L}(\xi)\left(\frac{\Phi}{\lambda_1}\right)^2 + \Psi\right.$$

$$\left. I_{2L}(\xi)\,R_V^2\,\frac{\Phi}{\lambda} - R_V^2\left(\Psi - \frac{\Phi}{\lambda}\right)^2 - R_{V1}^2 + 1\right] \qquad (2\text{-}47a)$$

con

$$I_{3L}(\xi) = \frac{4}{B}\,\ell\left[\frac{(B + M\xi)\,\xi_m}{\xi}\right] \qquad (2\text{-}50)$$

b) T1 = T1m

con lo que se obtiene (si, $R_V = R_{V1} = 1$)

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)_c^2 = 1 + 2\left(\Psi^2 + \left(\frac{\Phi}{\lambda}\right)^2\right) - \left\{\frac{4\Psi^2\xi^2}{(1+\xi_i)^2} + \left(\frac{\Phi}{\lambda}\right)^2\frac{\xi_m^2}{\xi^2} - 4\Psi\,\frac{\Phi}{\lambda}\,\ell\,\frac{\xi}{\xi_m}\right\} \qquad (2\text{-}47b)$$

2.4-4 ANGULO DE SALIDA CONSTANTE

1º.- Estator

De la expresión (2-22) teniendo en cuenta las expresiones de los parámetros definidos hasta ahora y el valor de C2, proporcionado por la expresión (2-23), al particularizar las variables para el punto medio, se obtiene:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 1 + \frac{Tt/Ttm}{\xi^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2}}\left[\xi_m^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2}\left(R_V^2\,(\psi^2+1)-1\right) - I_4(\xi)\right] \qquad (2\text{-}51)$$

con
$$I_4(\xi) = 2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2 \int_{\xi_m}^{\xi} \frac{\xi^{2\,\mathrm{sen}^2\alpha_2 - 1}}{Tt/Ttm}\, d\xi \qquad (2\text{-}52)$$

Teniendo en cuenta además que:

$$\mathrm{sen}^2\alpha_2 = \frac{\psi^2}{1+\psi^2}$$

La expresión que proporciona la distribución tangencial de - velocidades puede deducirse de la expresión (2-18), teniendo en cuenta además la expresión (2-51), es decir:

$$\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right) = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)\mathrm{sen}\,\alpha_2 \qquad (2\text{-}53)$$

Lo que pone de manifiesto que la distribución tangencial de -- velocidades ya no es independiente de la distribución de temperaturas, como ocurría con los casos anteriores.

La integral que aparece en la expresión (2-52) conduce en general a integrales de tipo Hermite, siendo muy engorroso su calculo, mientras que en otros casos (dependiendo de las distribución de temperaturas) se hace imprescindible el calculo numérico.

No obstante puede obtenerse una buena aproximación, válida para cualquier distribución de temperatura, según se desarrolla a continuación.

Otra forma de la ecuación (2-19), puesta en forma adimensional es

$$\frac{d\,(V_2/V_1)^2}{d\xi}+\left[\frac{2\operatorname{sen}^2\alpha_2}{\xi}-\frac{d\,\ell\,(T_1t/T_1tm)}{d\xi}\right]\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=-\frac{1}{T_1t/T_1tm}\,\frac{d\,T_1t/T_1tm}{d\xi}$$

que tambien puede ponerse en la forma

$$\frac{d(V_2/V_1)^2}{d\xi}=-2\operatorname{sen}^2\alpha_2\,\frac{d\xi}{\xi}+\left(1-\frac{1}{(V_2/V_1)^2}\right)\frac{d\,T_1t/T_1tm}{T_1t/T_1tm} \qquad (2\text{-}54)$$

si por ser $\left(\frac{V1}{V2}\right)^2 \ll 1$, realizamos la aproximación

$$\frac{1}{(V_2/V_1)^2}\simeq\frac{1}{(V_{2m}/V_1)^2}=\frac{\cos^2\alpha_2}{R_v^2}$$

La ecuación diferencial (2-54) puede ser integrada directamente obteniendose

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=cte.\;\xi^{-2\operatorname{sen}^2\alpha_2}\left(\frac{T_1t}{T_1tm}\right)^{\left(1-\frac{\cos^2\alpha_2}{R_v^2}\right)} \qquad (2\text{-}55)$$

La expresión de la constante se calcula imponiendo las condiciones:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=\left(\frac{V_{2m}}{V_1}\right)^2&=\frac{R_v^2}{\cos^2\alpha_2}\\ T_1t&=T_1tm\end{aligned}\right\}\;\xi=\xi_m$$

quedando finalmente

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=\frac{R_v}{\cos\alpha_2}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^{\operatorname{sen}^2\alpha_2}\left(\sqrt{\frac{T_1t}{T_1tm}}\right)^{\left(1-\frac{\cos^2\alpha_2}{R_v^2}\right)} \qquad (2\text{-}56)$$

Esta expresión, proporciona con muy buena aproximación según se verá más adelante la distribución de velocidades, cualquiera que sea la distribución de temperaturas.

haremos aplicación a los casos:

a) Distribución lineal de temperaturas.

Sustituyéndo en la ecuación (2-56) el valor de $\frac{T_1t}{T_1tm}$ se tiene

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_L = \frac{R_V}{\cos\alpha_2}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^{\operatorname{sen}^2\alpha_2}\left(\sqrt{B+M\xi}\right)^{\left(1-\frac{\cos^2\alpha_2}{R_V^2}\right)} \qquad (2\text{-}56a)$$

como comprobación de la aproximación obtenida se presenta - en la tabla (2-1) los valores de $\left(\frac{V2}{V1}\right)_L$ proporcionados por la - expresión anterior y los obtenidos mediante solución numérica de la ecuación diferencial (2-54) (por el método de Kutta-Run ge), para distintos valores de los parámetros. (Tabla (2-1) - pagina 47).

b) Temperatura constante T1t = T1tm.

En el caso de la ecuación (2-56), se reduce a

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_C = \frac{R_V}{\cos\alpha_2}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^{\operatorname{sen}^2\alpha_2} \qquad (2\text{-}56b)$$

Debiendo hacer constar que en este caso la solución analítica obtenida es la exacta, como puede comprobarse integrando la ecuación diferencial (2-51).

2 - Rotor

De la expresión (2-28) y teniendo en cuenta la expresión de los parámetros definidos anteriormente así como la rela-- ción (2-29) se obtiene:

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 = 1 - 2\frac{\Phi}{\lambda_1^2} - \frac{T_1t}{T_1tm}\left[I_4(\xi) - \left(R_{V1}^2 + \left(R_V\Psi - \frac{\Phi}{\lambda_1}\right)^2 + 2\frac{\Phi}{\lambda_1^2} - 1\right)\right] \qquad (2\text{-}57)$$

con

$$I_4(\xi) = \int_{\xi_m}^{\xi} \frac{2\,(V\theta_3/V_1)^2}{\xi\; T_1t/T_1tm}\, d\xi \qquad (2\text{-}58)$$

La expresión de $\frac{V\theta 3}{V1}$, que figura en la integral, se obtiene a partir de las ecuaciones (2-34) y (2-56), de forma que resulta:

$$\left(\frac{V\theta 3}{V_1}\right) = R_V\, \Psi\left(\frac{\xi m}{\xi}\right)^{sen^2\alpha_2}\left(\sqrt{T1t/T1tm}\right)^{\left(1-\frac{cos^2\alpha_2}{R_V^2}\right)} - \frac{\Phi}{\lambda_1}\,\frac{\xi m}{\xi} \qquad (2\text{-}59)$$

La ecuación (2-57) proporciona la distribución de velocidades cualquiera que sea la ley de temperaturas en cuestión. Solamente para casos muy particulares puede encontrarse una solución analítica para $I_4(\xi)$, por lo que esta debe calcularse numéricamente a través de la expresión (2-58) con cualquier método usual de integración numérica, como puede ser el método de Simpson.

Un caso particular es el de distribución de temperaturas uniforme T1t = T1tm; que queda reducido:

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)_c^2 = R_{V1}^2 + \left(R_V\,\Psi - \frac{\Phi}{\lambda_1}\right)^2 + I_{4C}(\xi) \qquad (2\text{-}57a)$$

Las expresiones (2-58) y (2-59) proporcionan

$$I_{4C}(\xi) = -2\int_{\xi m}^{\xi}\left(R_V\,\Psi\left(\frac{\xi m}{\xi}\right)^{sen^2\alpha_2} - \frac{\Phi}{\lambda_1}\,\frac{\xi m}{\xi}\right)^2\frac{d\xi}{\xi}$$

Desarrollando el cuadrado subintegral queda:

$$I_{4C}(\xi) = -2\int_{\xi m}^{\xi}\left[R_V^2\,\Psi^2\left(\frac{\xi m}{\xi}\right)^{2 sen^2\alpha_2} + \frac{\Phi^2}{\lambda_1^2}\left(\frac{\xi m}{\xi}\right)^2 - 2R_V\,\Psi\,\frac{\Phi}{\lambda}\left(\frac{\xi m}{\xi}\right)^{sen^2\alpha_2+1}\right]\frac{d\xi}{\xi}$$

Ahora bien teniendo en cuenta que:

$$\int R_V^2\,\Psi^2\left(\frac{\xi m}{\xi}\right)^{2\cdot sen^2\alpha_2}\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{R_V^2}{2cos^2\alpha_2}\left(\frac{\xi m}{\xi}\right)^{2 sen^2\alpha_2}$$

$$\int \frac{\Phi^2}{\lambda_1^2}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^2 \frac{d\xi}{\xi} = -\frac{\Phi^2}{2\lambda_1^2}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^2$$

$$\int R_V \psi \frac{\Phi}{\lambda_1}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^{sen^2\alpha_2+1} \frac{d\xi}{\xi} = -\frac{R_V \psi \Phi}{\lambda_1 (1+sen^2\alpha_2)}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^{sen^2\alpha_2+1}$$

quedará finalmente

$$I_{AC}(\xi) = \left[\frac{R_V^2}{\cos^2\alpha_2}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^{2\,sen^2\alpha_2} + \frac{\Phi^2}{\lambda_1^2}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^2 - \frac{4R_V\psi\Phi}{\lambda_1(1+sen^2\alpha_2)}\left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^{sen^2\alpha_2+1}\right]_{\xi_m}^{\xi} \qquad (2\text{-}60)$$

TABLA 2-1

α_2	ξ	$\delta = 0.1$ SOL. A.	$\delta = 0.1$ SOL. DIF.	$\delta = 0.15$ SOL. A.	$\delta = 0.15$ SOL. DIF.	$\delta = 0.2$ SOL. A.	$\delta = 0.2$ SOL. DIF.
	0.60	2.38	2.38	2.33	2.32	2.28	2.27
	0.65	2.26	2.26	2.23	2.23	2.19	2.19
	0.70	2.16	2.16	2.14	2.14	2.12	2.12
	0.75	2.07	2.07	2.06	2.06	2.05	-
60	0.80	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	-
	0.85	1.92	1.92	1.93	1.93	1.94	-
	0.90	1.86	1.86	1.88	1.88	1.89	-
	0.95	1.80	1.80	1.82	1.82	1.85	-
	1	1.75	1.75	1.78	1.77	1.81	1.80
	0.60	3.59	3.59	3.50	3.50	3.41	3.41
	0.65	3.39	-	3.33	3.33	3.26	3.26
	0.70	3.21	-	3.17	-	3.14	-
	0.75	3.06	-	3.04	-	3.02	-
70	0.80	2.92	-	2.92	-	2.92	-
	0.85	2.80	-	2.81	-	2.83	-
	0.90	2.69	-	2.72	-	2.74	-
	0.95	2.59	-	2.63	2.63	2.67	2.67
	1	2.50	2.50	2.55	2.55	2.60	2.60
	0.60	7.23	-	7.03	-	6.83	-
	0.65	6.78	-	6.64	-	6.50	-
	0.70	6.39	-	6.31	-	6.22	-
	0.75	6.05	-	6.01	-	5.98	-
	0.80	5.75	-	5.75	-	5.75	-
80	0.85	5.49	-	5.52	-	5.55	-
	0.90	5.26	-	5.32	-	5.38	-
	0.95	5.04	-	5.13	-	5.21	-
	1	4.85	-	4.96	-	5.06	-

NOTA - SOL.A., son datos obtenidos mediante la solución aproximada.

SOL.DIF., son datos obtenidos mediante calculo numérico de la solución diferencial.

2-5 INFLUENCIA DE LA NO HOMOENTROPIA DE LA CORRIENTE

Hasta ahora se han obtenido las expresiones que permiten calcular las variables fluidas de un escalón, cualquiera que sea el perfil de temperaturas T1t y en particular cuando dicha distribución de temperaturas es lineal ó uniforme.

Es momento de analizar la influencia de la no homoentropía y poner de manifiesto hasta que punto debe ser tenida en cuenta, cuando se trata del diseño aerodinámico de la turbina.

2-5-1.- TORBELLINO LIBRE

1 - ESTATOR

La ecuación diferencial (2-6) que proporciona la distribución de velocidades en el estator, con ley torsional -- torbellino libre, puede ponerse en la forma:

$$\frac{dV_{z2}^2}{dr} = \left(\frac{K^2}{r^2} - V_1^2 + V_{z2}^2\right)\frac{dT_{1t}}{T_{1t}\,dr}$$

ó también

$$\frac{dV_{z2}}{dr} = \frac{1}{2}\left(\frac{K^2/r^2 - V_1^2}{V_{z2}} + V_{z2}\right)\frac{1}{T_{1t}}\frac{dT_{1t}}{dr} \qquad (2\text{-}51)$$

cuando el perfil de temperaturas es tal que T1t disminuye desde el pto. medio hacia la raiz resulta que $\frac{dV_{z2}}{dr} > 0$, de forma que la velocidad axial disminuye tambien desde el punto medio hacia la raiz; pudiendo entonces diferir apreciablemente del valor -- calculado cuando la corriente es homoentrópica, yá que entonces V_{z2} = cte. Este efecto, es tanto más acusado cuando menor sea - la velocidad axial, según se pone de manifiesto mediante la expresión (2-51) y en consecuencia, en cualquier caso, cuando más pequeña sea la velocidad axial fijada para el punto medio. Por esto a partir de ahora consideraremos como caso más crítico el correspondiente a $R_v = 1$, que es el que suele darse en la práctica.

En las figuras (2-4) y (2-5) (Pág. 54), se presenta la influencia de un perfil de temperaturas lineal, para varios valores del parámetro δ, en los ángulos α_2 y α_{2R} de la corriente. Así mismo en la fig. (2-8) se presenta su influencia sobre la velocidad axial, confirmándose de una forma clara todo lo hasta ahora expuesto.

El número de Mach de la corriente absoluta, sin embargo, presenta poca variación (Tabla 2-2).

TABLA (2-2)

$\alpha_{2m} = 65^\circ$, $\xi_i = 0.5$ M2m = 0.61, $R_v = 1$

ξ	$M_2(\delta=0)$	$M_2(\delta=0.075)$	$M_2(\delta=0.15)$
0.50	0.89	0.91	0.92
0.55	0.81	0.82	0.83
0.60	0.74	0.75	0.76
0.65	0.60	-	-
0.70	0.64	-	-
0.75	0.61	-	-
0.80	0.57	-	-
0.85	0.55	-	-
0.90	0.52	-	-
0.95	0.50	-	-
1	0.48	-	-

Es evidente que el efecto más considerable y perjudicial es el de la disminución de la velocidad axial.

Para completar este estudio, resulta interesante efectuar los siguientes desarrollos:

De la ecuación (2-37a), cuando $R_v=1$, se tiene:

$$\left(\frac{V_z}{V_1}\right)_L^2 = 1 - \frac{T_1 t}{T_1 t_m} \psi^2 \left[I_1(\xi) - 1 \right]$$

Teniendo en cuenta la expresión que proporciona la velocidad tangencial resulta:

$$\left(\frac{V_{z2}}{V_1}\right)_L^2 = 1 - \frac{T_1 t}{T_1 t_m} \psi^2 \left[I_1(\xi) - 1 \right] - \psi^2 \left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^2 \qquad (2\text{-}52)$$

La expresión (2-52), proporciona la distribución de la velocidad axial y la influencia de los parámetros. Particularizándo para la raiz $\xi = \xi_i$, se obtiene entonces:

$$\left(\frac{V_{z2}}{V_1}\right)_{L,\ \xi=\xi_i}^2 = f(\delta, \psi, \xi_i)$$

De cuya expresión pueden deducirse los valores máximos permisibles de ψ, es decir de α_{2M}, en función de ξ_i; cuando se especifica un valor mínimo de $\left(\frac{V_{z2}}{V_1}\right)_{L,\ \xi=\xi_i}^2$ y el parámetro δ

En la figura (2-10) se dibuja dicha función para $\delta = 0.15$, poniendo de manifiesto una disminución considerable de la zona útil de diseño.

2 - ROTOR

De la ecuación general (2-24), teniendo en cuenta que por tratarse de la ley torsional torbellino libre se obtiene:

$$\frac{dV_{z3}}{dr} = \frac{V_{\theta 3}^2 + 2\zeta - V_1^2 + V_{z3}^2}{2 T_1 t\, V_{z3}} \frac{dT_1 t}{dr}$$

Teniendo en cuenta además que:

$$V_{\theta 3} = V_{\theta 2} - \frac{\tau}{m}$$

se deduce, igual que para el estator, que un gradiente positivo de temperaturas produce una disminución de la velocidad axial hacia la raiz, pudiendo alcanzar valores tan bajos que imposibilitan el diseño.

En las figuras (2-6) y (2-7) (página 55), se presenta la influencia de la distribución lineal de temperatura sobre los ángulos de la corriente $\alpha 3$ y $\alpha 3R$, para varios valores del parámetro δ de desviación de temperatura . Esta influencia no puede desestimarse, ya que las diferencias son apreciables y se aproximan a los 20º en la raiz, donde los efectos son mayores, cuando δ=0.15.

La fig.(2-9) (pag. 56), pone de manifiesto, lo indicado con respecto a la velocidad axial. Los efectos son mayores - cuando menor sea la velocidad axial fijada en el punto medio y nosotros consideraremos en lo que sigue como caso límite, ó más desfavorable, el más frecuente en diseño; es decir $R_V=R_{V1}=1$

De la ecuación (2-41a) y (2-42), se obtiene

$$\left(\frac{V_{z3}}{V_1}\right)_L^2 = 1 + 2\frac{\Phi}{\lambda^2}\left(\frac{T_1t}{T_1t_m} - 1\right) - \frac{T_1t}{T_1t_m}\left(\Psi - \frac{\Phi}{\lambda}\right)^2 \left[I_1(\xi) - 1\right]$$
$$- \left(\Psi - \frac{\Phi}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\xi_m}{\xi}\right)^2$$

De cuya expresión puede deducirse la influencia de cualquier parámetro. Fijando un valor mínimo admisible en la raiz --

$\left(\frac{V_{z3}}{V_1}\right)_L$, $\xi = \xi_i$;

la expresión anterior proporciona:

$$\left(\frac{V_{z1}}{V_1}\right)^2_{i,\,\xi=\xi_i} = \varphi(\Phi, \lambda, \delta, \xi_i, \Psi)$$

función que se ha dibujado en el diagrama coeficiente de carga - coeficiente de flujo, para δ =0.15 y varios valores del resto de los parámetros, en las figuras (2-11) a (2-14) (pagina 58); con lo cual se delimitan las zonas aptas para el diseño, en cada caso.

2-5-2 <u>ROTACION SOLIDA</u>

Para esta ley torsional, cuando el gradiente de temperaturas es nulo, la velocidad axial V_{z2} disminuye al aumentar radio. Es necesario por tanto, después de todo lo expuesto - y en forma parecida, estudiar previamente la viabilidad de tal ley en el caso de distribución de temperaturas uniforme ó dicho de otra forma su practicabilidad en el diseño de turbinas.

De las expresiones (2-43b) y (2-45), después de algunas simplificaciones, se deduce:

$$\left(\frac{V_{z2}}{V_1}\right)^2_c = R_V^2\left[2\Psi^2\left(1-\left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^2\right)+1\right]$$

La condición $\left(\frac{V_{z2}}{V_1}\right)_c$ = 0 para ξ = 1

proporciona $\Psi = f(\xi_i)$, función que determina los valores máximos admisibles de α_{2M}. Esta función se representa en la -- Fig. (2-15) (pág. 62) observándose que el valor máximo admisible para α_{2M}, es $\alpha_{2M} = 55°$ para ξ_i = 0.8. Esto excluye la utilización de la ley torsional rotación sólida en el diseño de turbinas, razón por la cual ya no la consideraremos de ahora en adelante. La utilización en el diseño de compresores se explica teniendo en cuenta que en este caso, las defexiones máximas de la corriente son $\alpha_2 \simeq 30°$ y para estos valores de α_2 , pueden obtenerse valores razonables de la velocidad axial en el extremo.

(INFLUENCIA DE δ, TORBELLINO LIBRE)

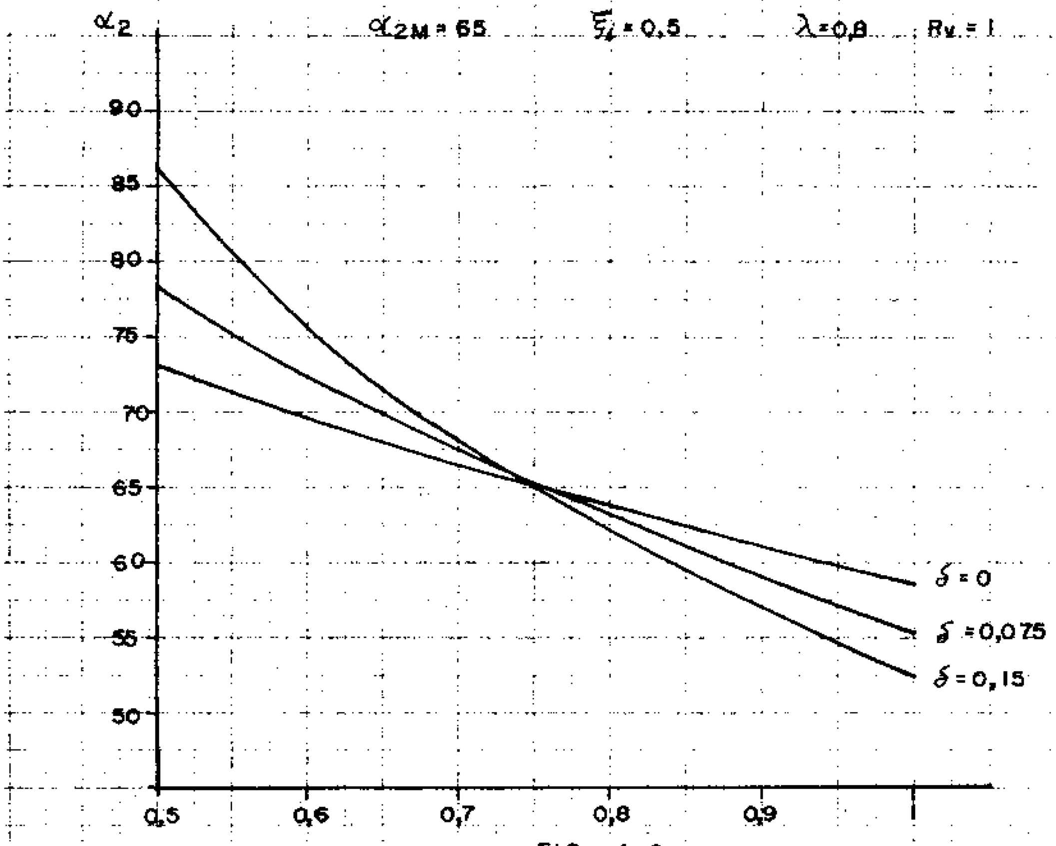


FIG.- 4-2.

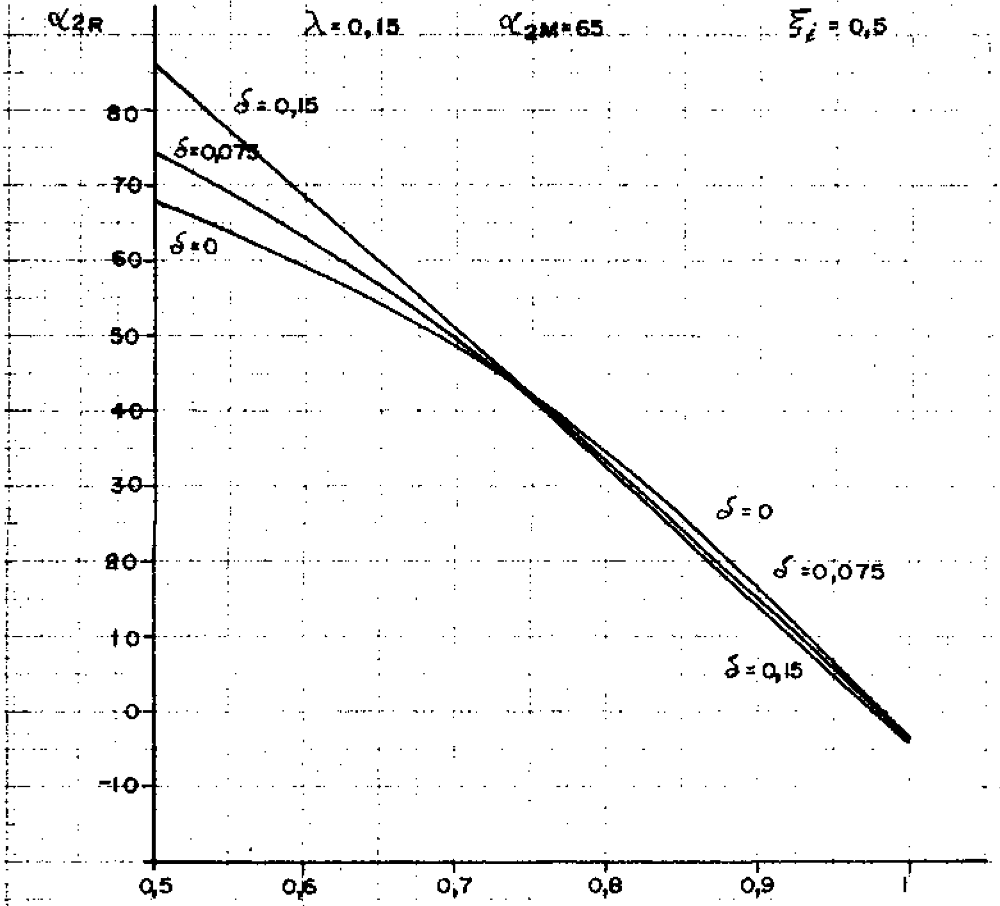
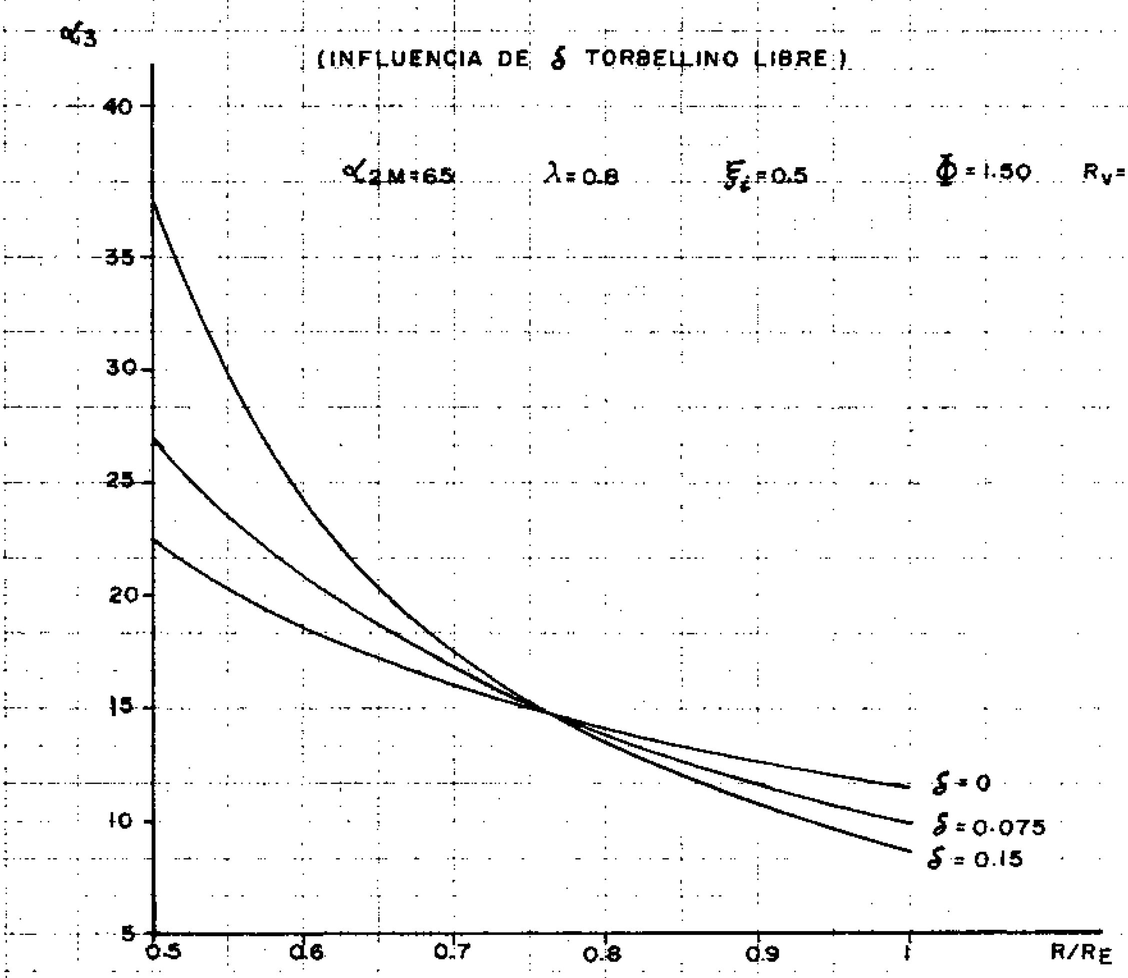
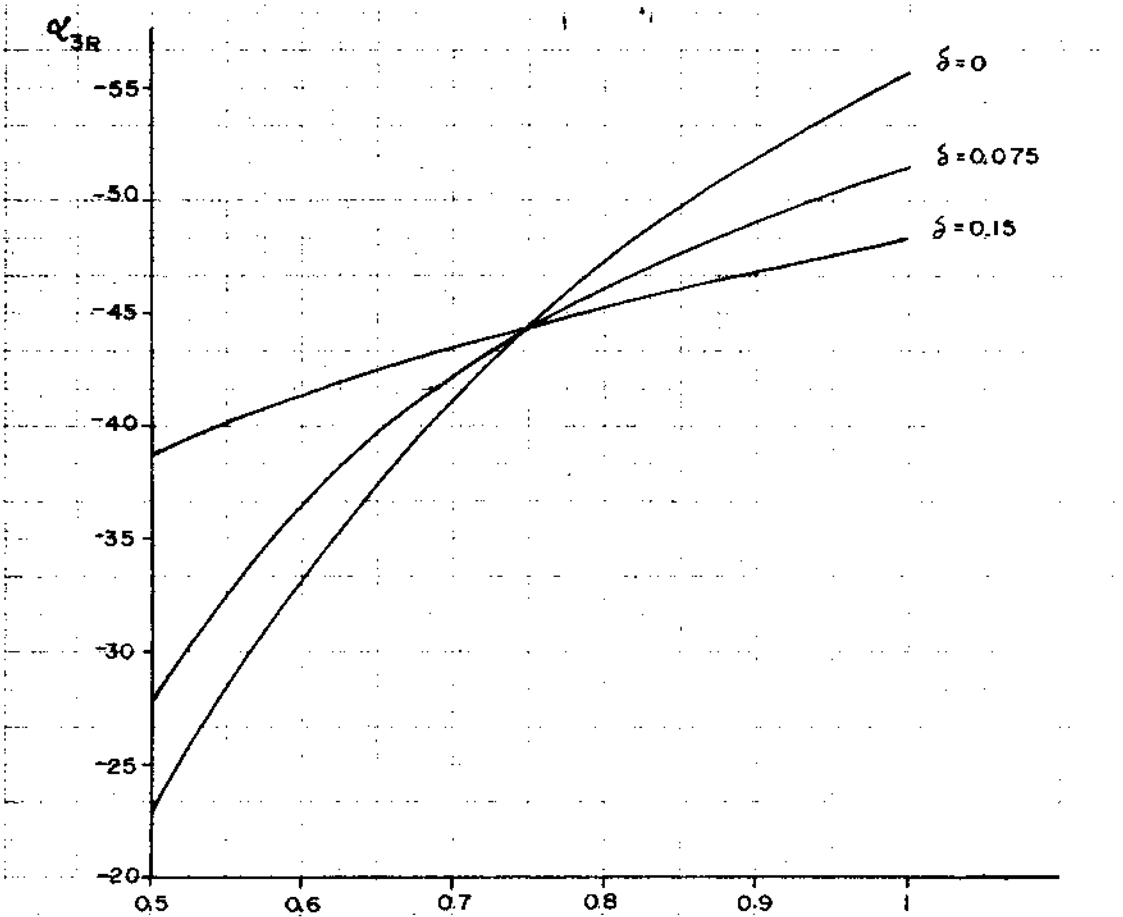


FIG.- 5-2.



(INFLUENCIA DE δ TORBELLINO LIBRE)
α2M=65 λ=0.8 ξi=0.5 Φ=1.50 Rv=1
α3
40
35
30
25
20
15
10
5
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
R/RE
δ=0
δ=0.075
δ=0.15

FIG.-6-2.



α3R
-55
-50
-45
-40
-35
-30
-25
-20
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
δ=0
δ=0.075
δ=0.15

FIG.-7-2.

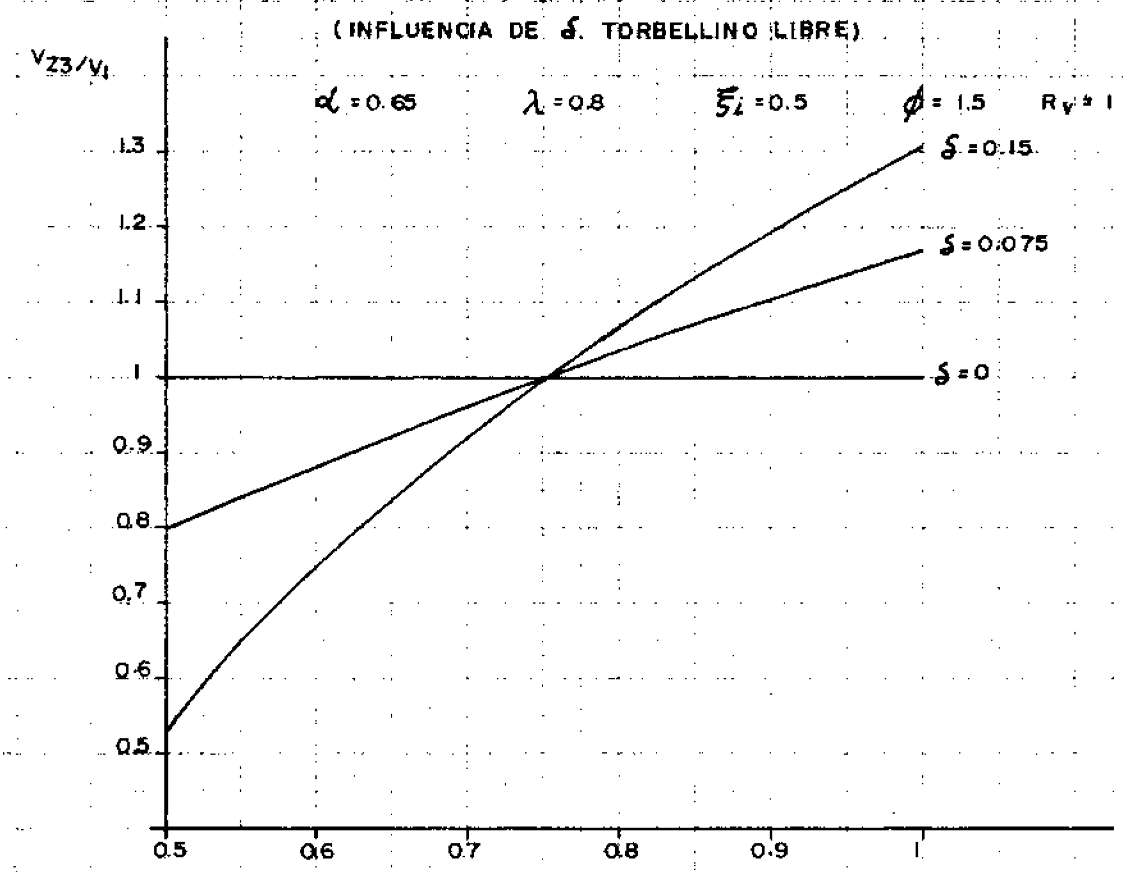

(INFLUENCIA DE δ. TORBELLINO LIBRE)
V_{Z3}/V_1
α = 0.65
λ = 0.8
ξ_i = 0.5
ϕ = 1.5
R_V = 1
δ = 0.15
δ = 0.075
δ = 0
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

FIG.- 9 - 2.

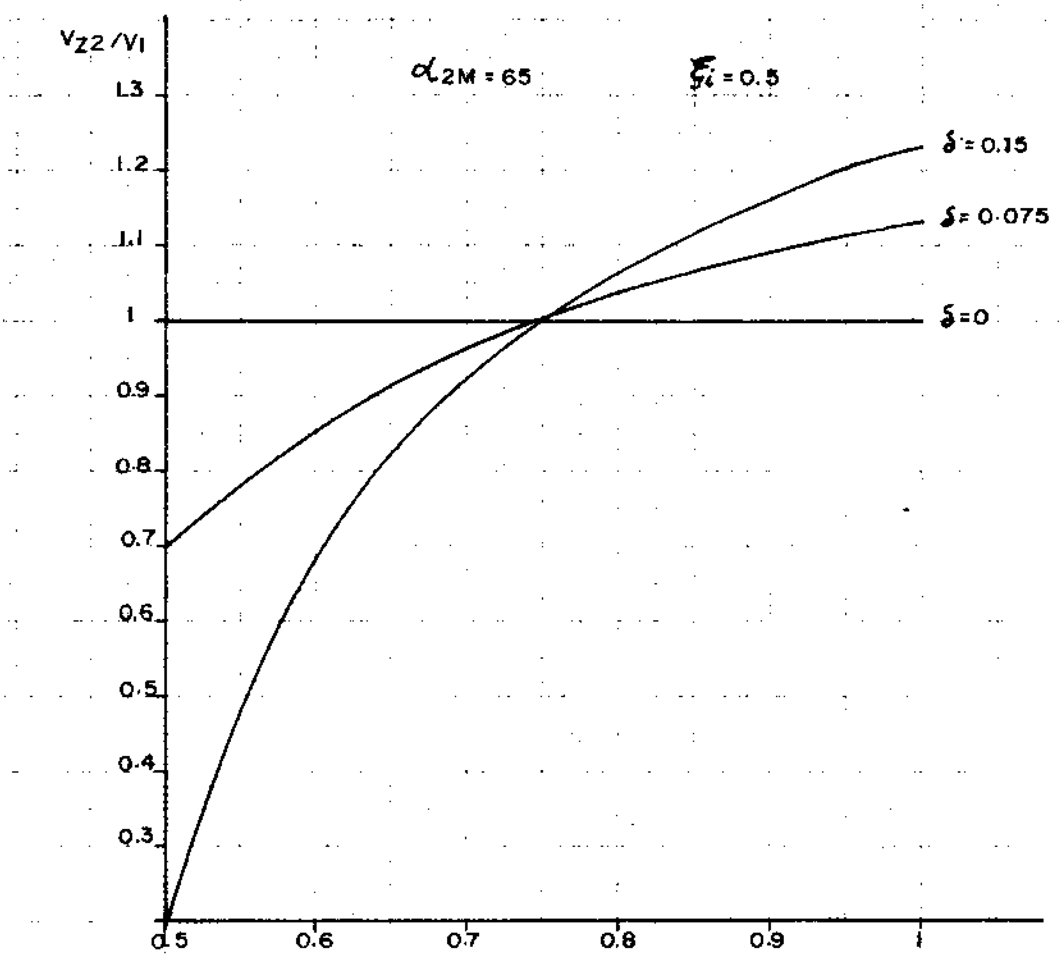

V_{Z2}/V_1
α_{2M} = 65
ξ_i = 0.5
δ = 0.15
δ = 0.075
δ = 0
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

FIG.- 8 - 2.

LIMITES DE $\alpha_2 = f(\xi_i)$ PARA TORBELLINO LIBRE (ESTATOR).
FLUJO NO HOMOENTROPICO ($\delta = 0.15$)

$R_v = 1$

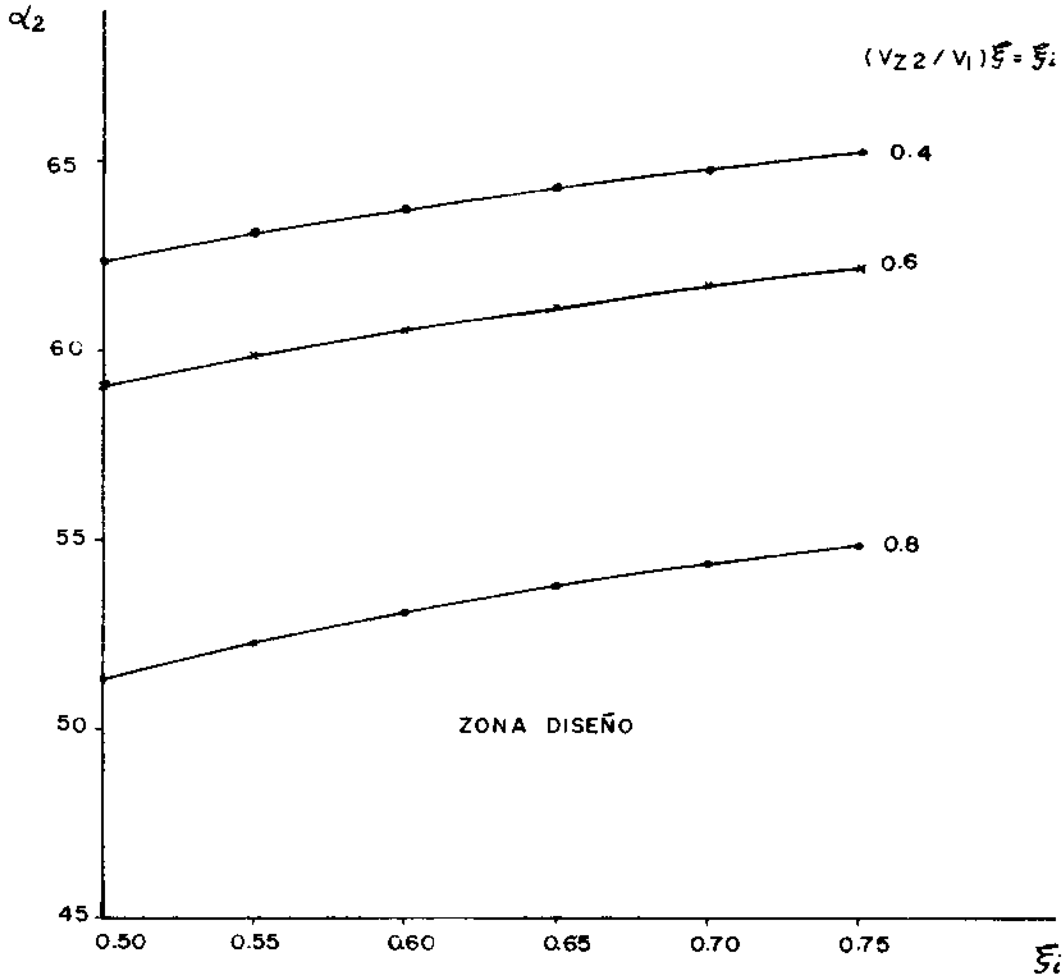


FIG.- 10-2.

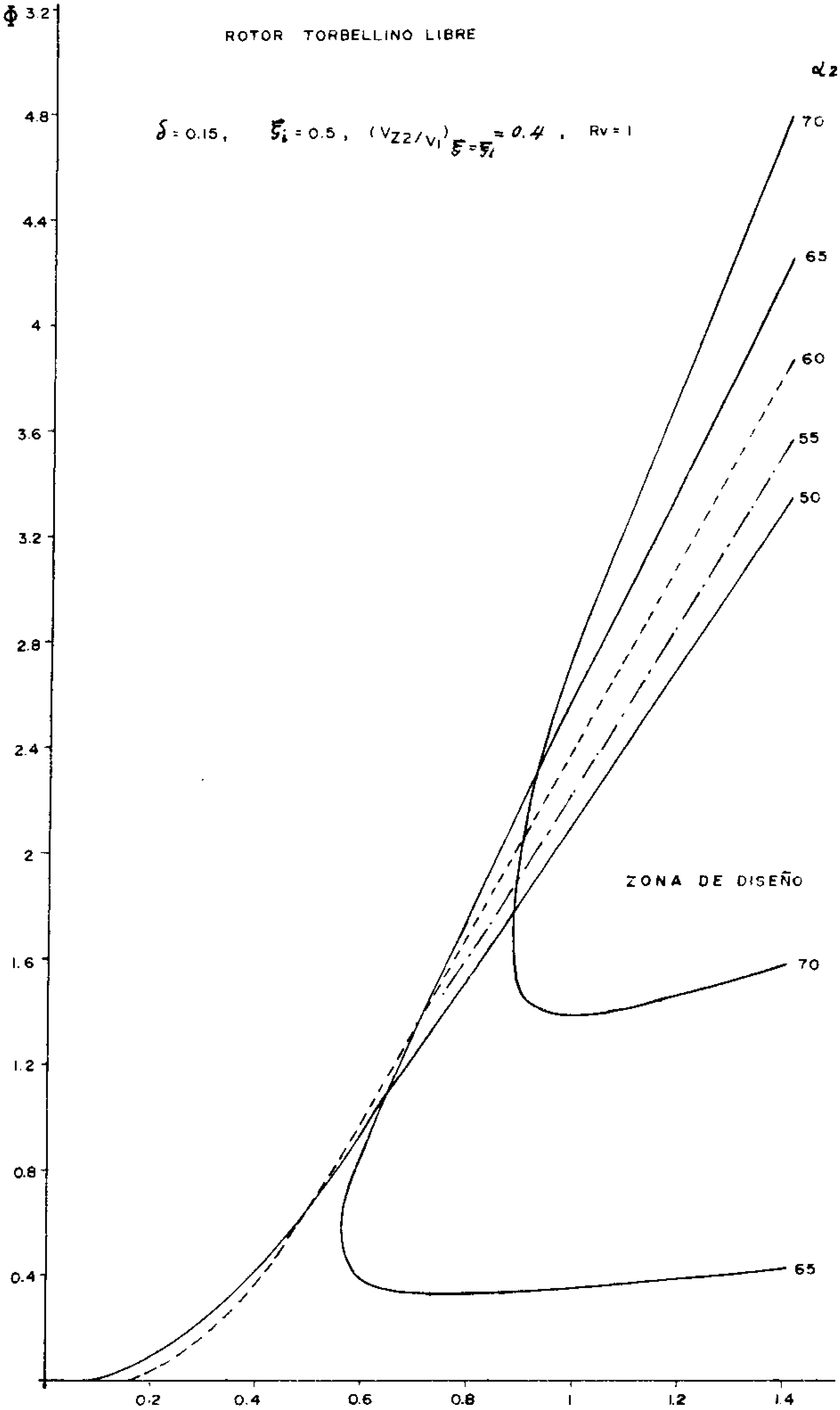

ROTOR TORBELLINO LIBRE
$\delta = 0.15$, $\bar{\xi}_i = 0.5$, $(V_{Z2}/V_1)_{\bar{\xi}=\bar{\xi}_i} = 0.4$, Rv = 1
Φ
3.2
4.8
4.4
4
3.6
3.2
2.8
2.4
2
1.6
1.2
0.8
0.4
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
α_2
70
65
60
55
50
70
65
ZONA DE DISEÑO

FIG. — II-2.

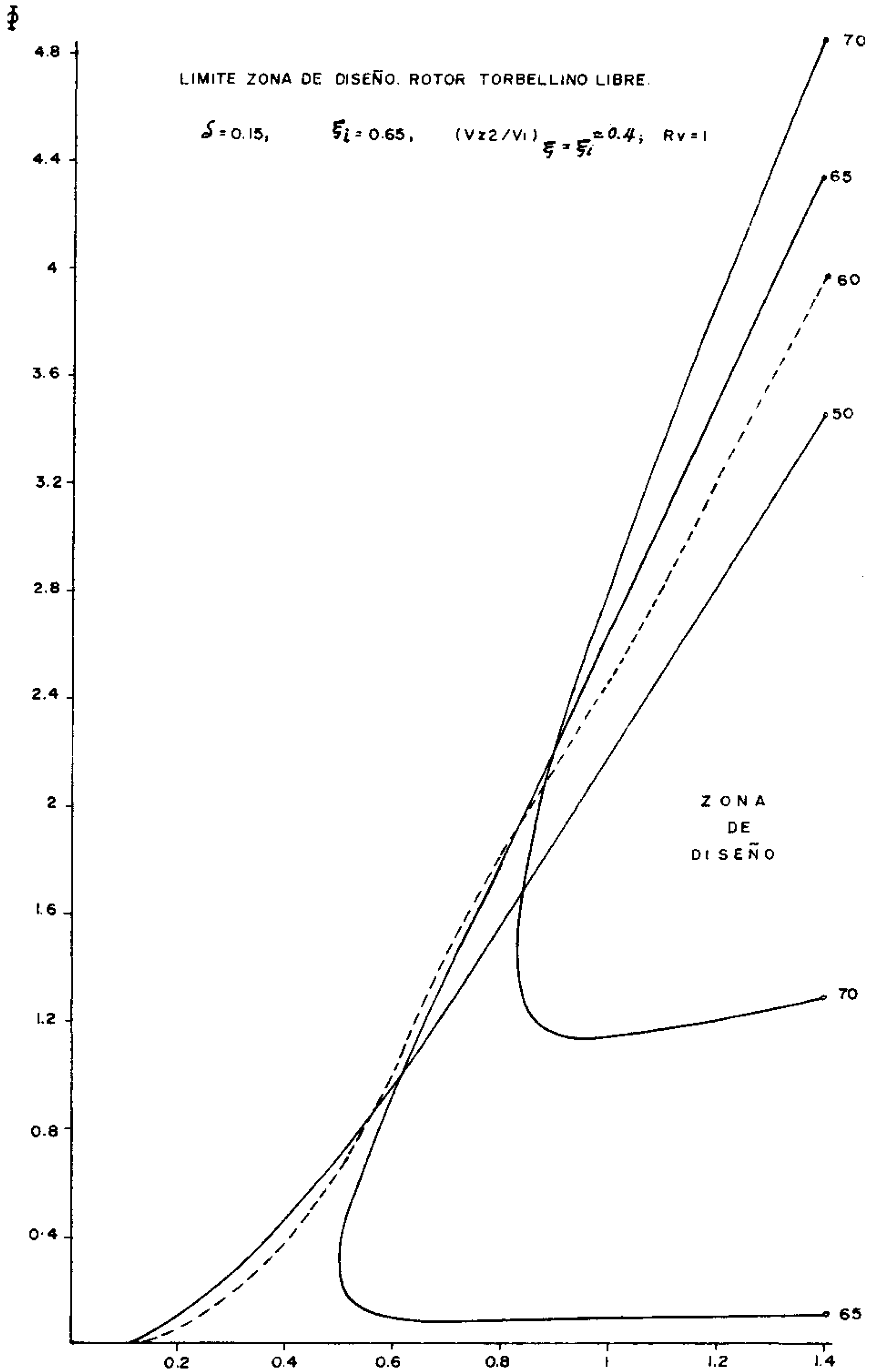

LIMITE ZONA DE DISEÑO. ROTOR TORBELLINO LIBRE.
$\delta = 0.15$, $\xi_i = 0.65$, $(V_{Z2}/V_1)_{\xi=\xi_i} = 0.4$; $R_V = 1$
Φ
4.8
4.4
4
3.6
3.2
2.8
2.4
2
1.6
1.2
0.8
0.4
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
λ
70
65
60
50
70
65
ZONA DE DISEÑO

FIG. – 12 – 2.

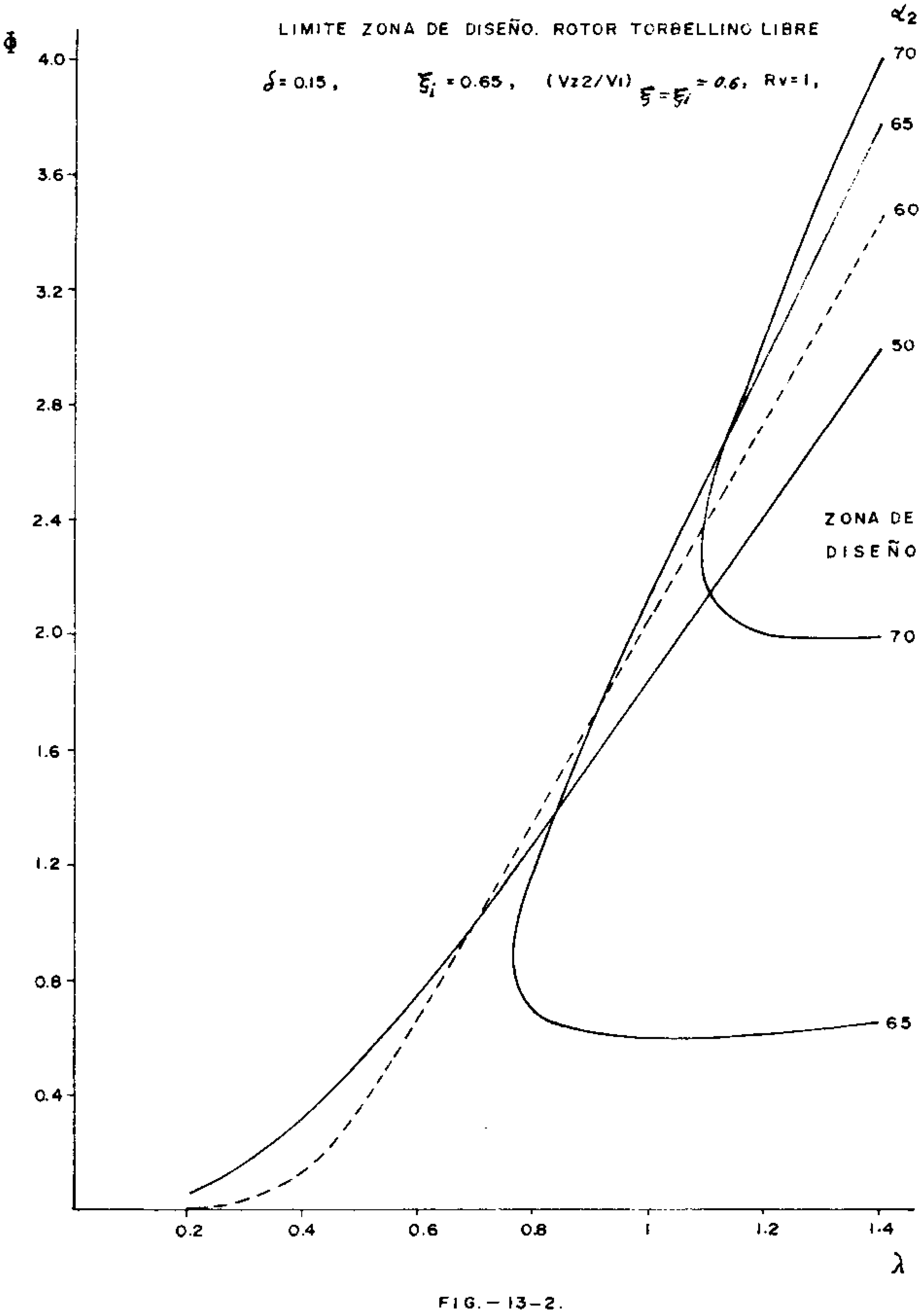

LIMITE ZONA DE DISEÑO. ROTOR TORBELLINO LIBRE
δ = 0.15 , ξ_i = 0.65 , $(Vz2/V1)_{\xi=\xi_i}$ = 0.6 , Rv = 1 ,
α_2
70
65
60
50
70
65
ZONA DE DISEÑO
Φ
4.0
3.6
3.2
2.8
2.4
2.0
1.6
1.2
0.8
0.4
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
λ

FIG. — 13-2.

LIMITE ZONA DE DISENO. ROTOR TORBELLINO LIBRE.

$\delta = 0.15$, $\xi_i = 0.65$, $(Vz2/V1)_{\xi = \xi_i} = 0.8$, $Rv = 1.$

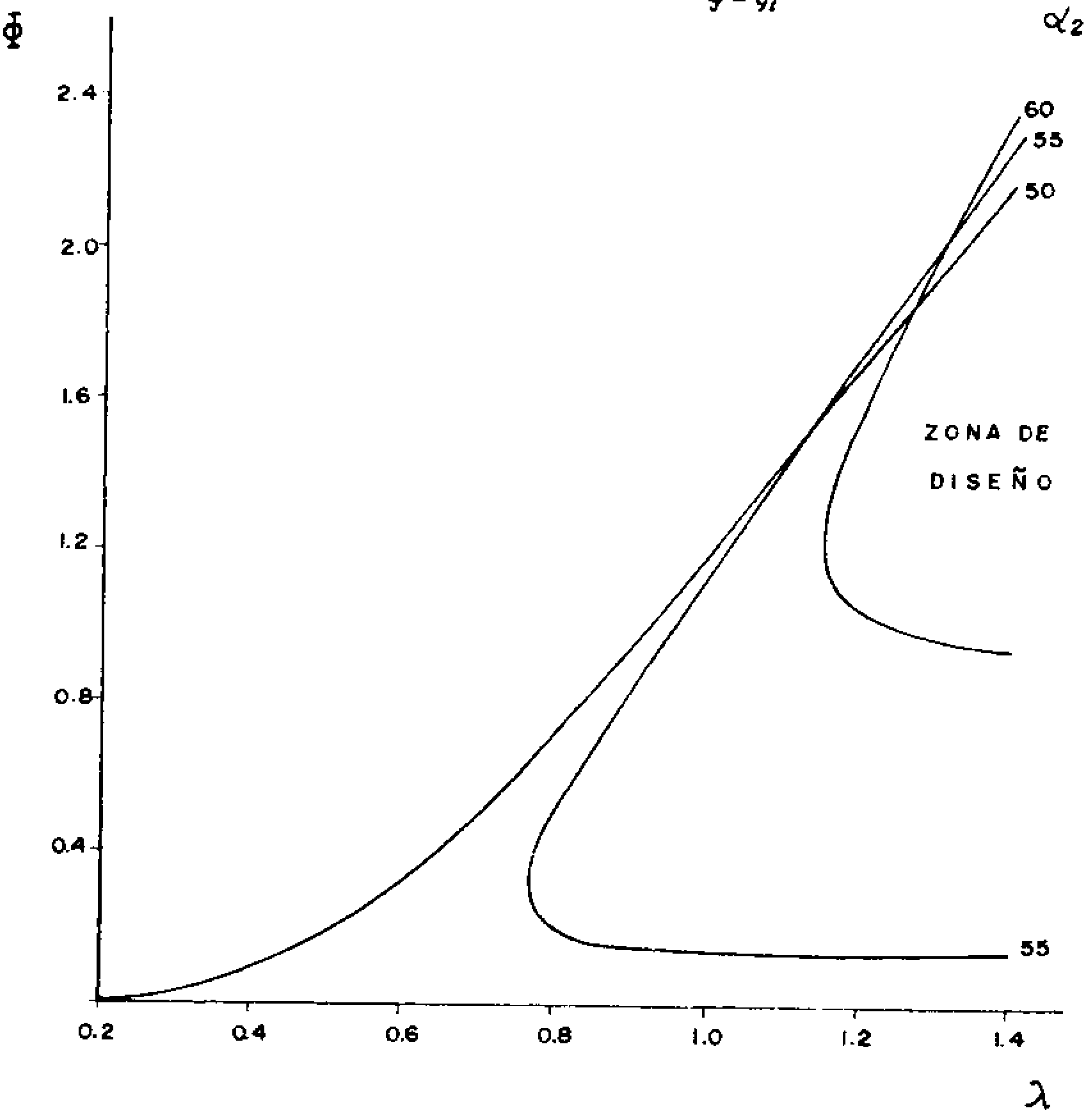


FIG.-14-2.

LEY TORSIONAL : ROTACION SOLIDA

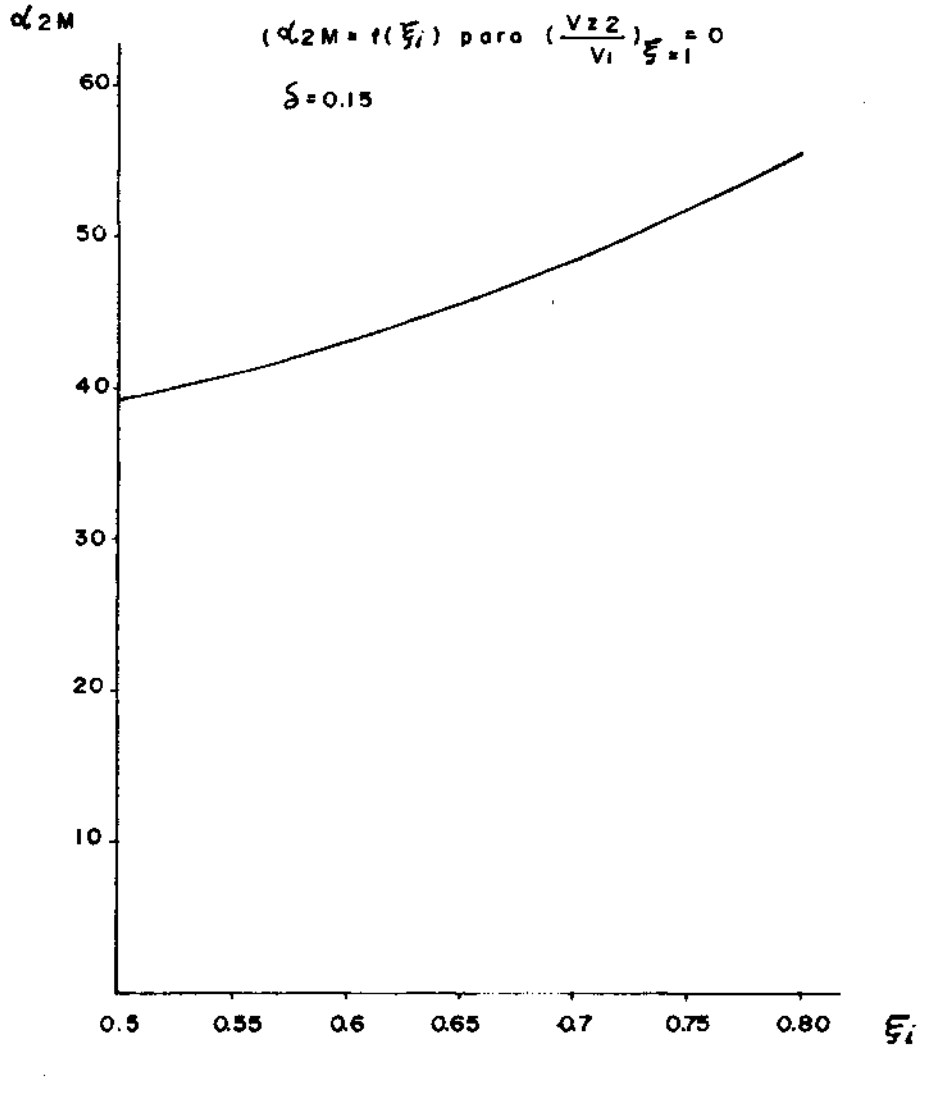


FIG.- 15-2.

2-5-3 ANGULO DE SALIDA DE LA DIRECTRIZ CONSTANTE

Para esta ley torsional los efectos de una distribución lineal de temperatura son pequeños en el estator, según se aprecia en la fig.(2-16) (pag. 66) donde se representa el angulo relativo de la corriente α_{2R} para varios valores de δ y en la figura (2-17) (pag. 66), donde se representa la velocidad axial $\left(\frac{V_{a2}}{V_1}\right)$. Así mismo puede verse que la influencia de tal distribución de temperaturas en el número de Mach M2 es igualmente pequeña (Tabla 2-3).

TABLA 2-3

0.60	1.15	-	1.16
0.65	1.06	-	1.07
0.70	0.99	-	-
0.75	0.92	-	-
0.80	0.87	-	-
0.85	0.82	-	-
0.9	0.78	-	-
0.95	0.74	-	-
1	0.71	-	0.70

El comportamiento del rotor, en cambio difiere apreciablemente según muestran las figuras (2-18), (2-19) y (2-20) (paginas 67 y 68).

La diferencia de α_{3R} , del caso no homoentrópico $(\delta = 0.15)$ con respecto al caso homoentrópico $(\delta = 0)$, llega a ser de 20° en la raiz. Así mismo la disminución de (V_{a3}/V_1) con el radio cuando δ =0.15, es muy acusada y su diferencia con respecto al caso homoentrópico considerable.

Por otra parte de la expresión (2-57), con Rv=Rv =1 y - teniendo en cuenta además la expresión (2-59), puede escribirse:

$$\left(\frac{V_{z3}}{V_1}\right)^2_{L,\xi=\xi_i} = 2\frac{\Phi}{\lambda^2}\left(B+M\xi_i-1\right)-\left(B+M\xi_i\right)\int_{\xi_m}^{\xi_i}\frac{2V_{\theta 3}/V_1}{\xi(B+M\xi)}d\xi - \left(\psi-\frac{\Phi}{\lambda}\right)^2-\left[\psi\left(\frac{\xi_m}{\xi_i}\right)^{\sin^2\alpha_2}\left(B+M\xi_i\right)^{\frac{\sin^2\alpha_2}{2}}-\frac{\Phi}{\lambda}\left(\frac{\xi_m}{\xi_i}\right)\right]^2$$

es decir:

$$\left(\frac{V_{z3}}{V_1}\right)_{L,\xi=\xi_i} = f\left(\Phi,\lambda,\psi,\xi_i,\delta\right)$$

expresión que proporciona la influencia de cualquier parámetro sobre $\left(\frac{V_{z3}}{V_1}\right)_{L,\xi=\xi_i}$

En las figuras (2-21) a (2-23) (pag. 69) se representan las curvas que delimitan la zona apta para el diseño en el -- diagrama $\Phi-\lambda$, cuando se fijan valores mínimos para $\left(\frac{V_{z3}}{V_1}\right)_{L,\xi=\xi_i}$ y $\delta=0.15$

En el caso isentrópico de las ecuaciones (2-57a) y (2-60) se obtiene fácilmente:

$$\frac{\Phi}{\lambda} = \frac{\left(V_{z3}/V_1\right)_{e,\xi=\xi_1} - \left(\frac{\xi_m}{\xi_i}\right)^{2\sin^2\alpha_2}}{2\psi\frac{\cos^2\alpha_2}{1+\sin^2\alpha_2}\left[1-\left(\frac{\xi_m}{\xi_i}\right)^{\sin^2\alpha_2+1}\right]}$$

funciones que se representan asi mismo en las figuras mencionadas y permiten poner de manifiesto que el efecto del parámetro δ se traduce en una reducción de la zona de diseño, cuando se especifican valores mínimos para la velocidad axial en la raiz.

INFLUENCIA DE δ ALABES. ESTATOR SIN TORSION

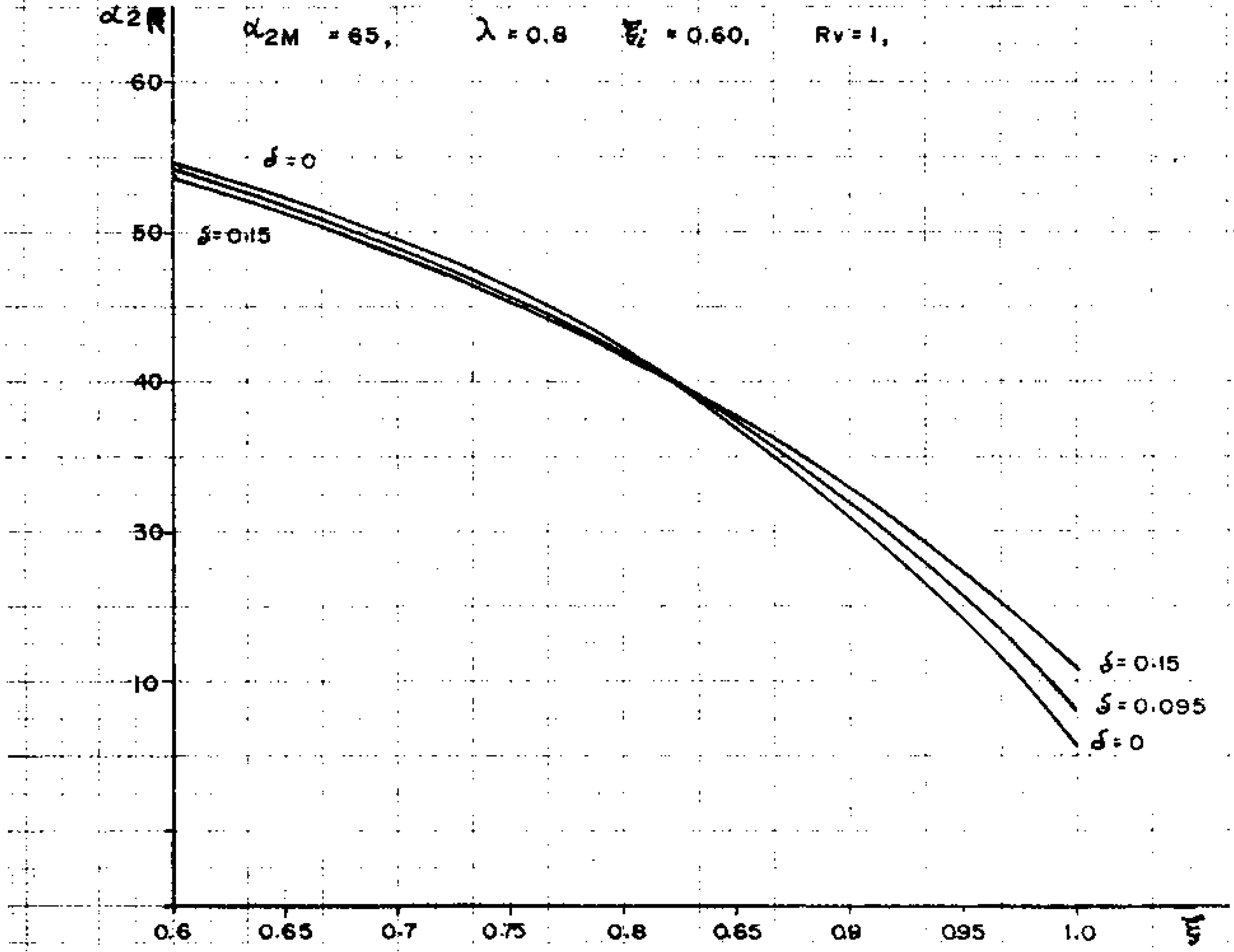


FIG.– 16–2.

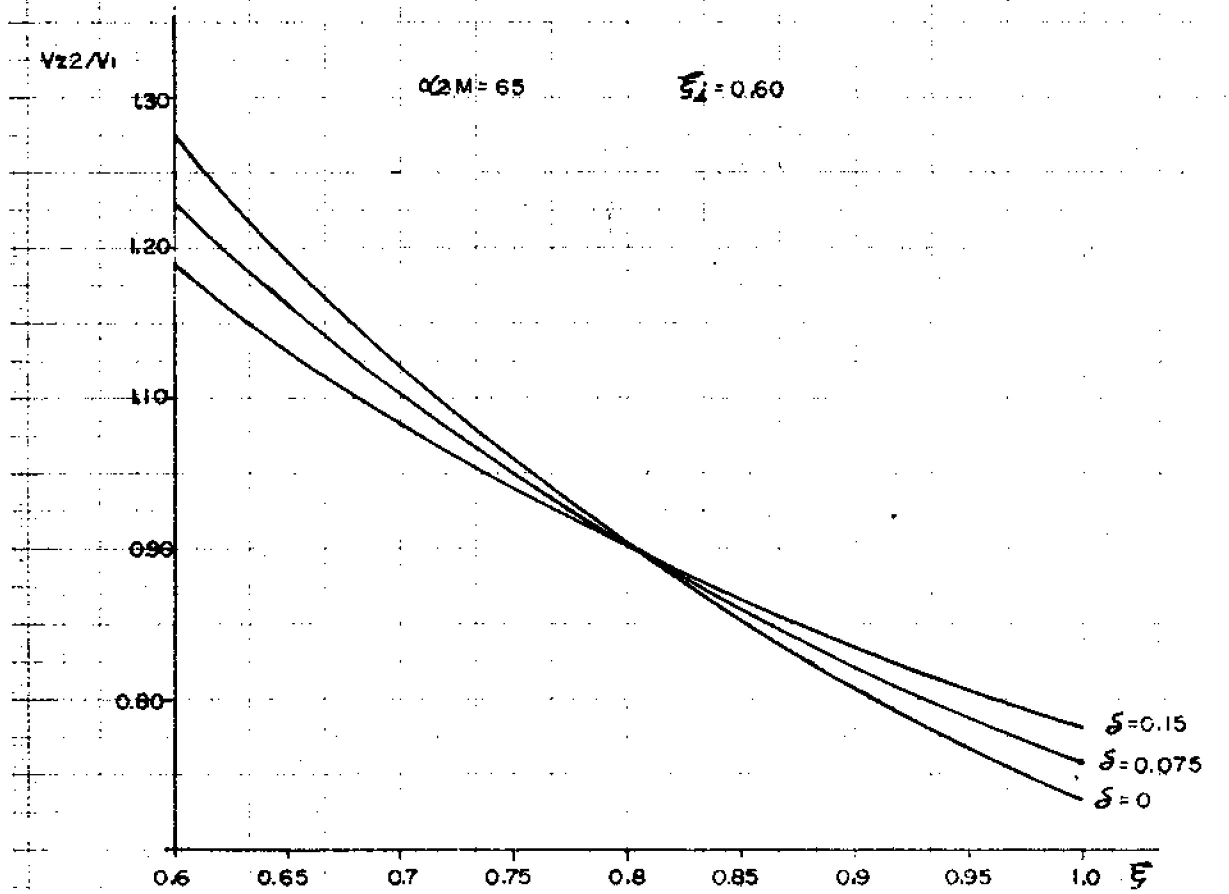


FIG.– 17–2.

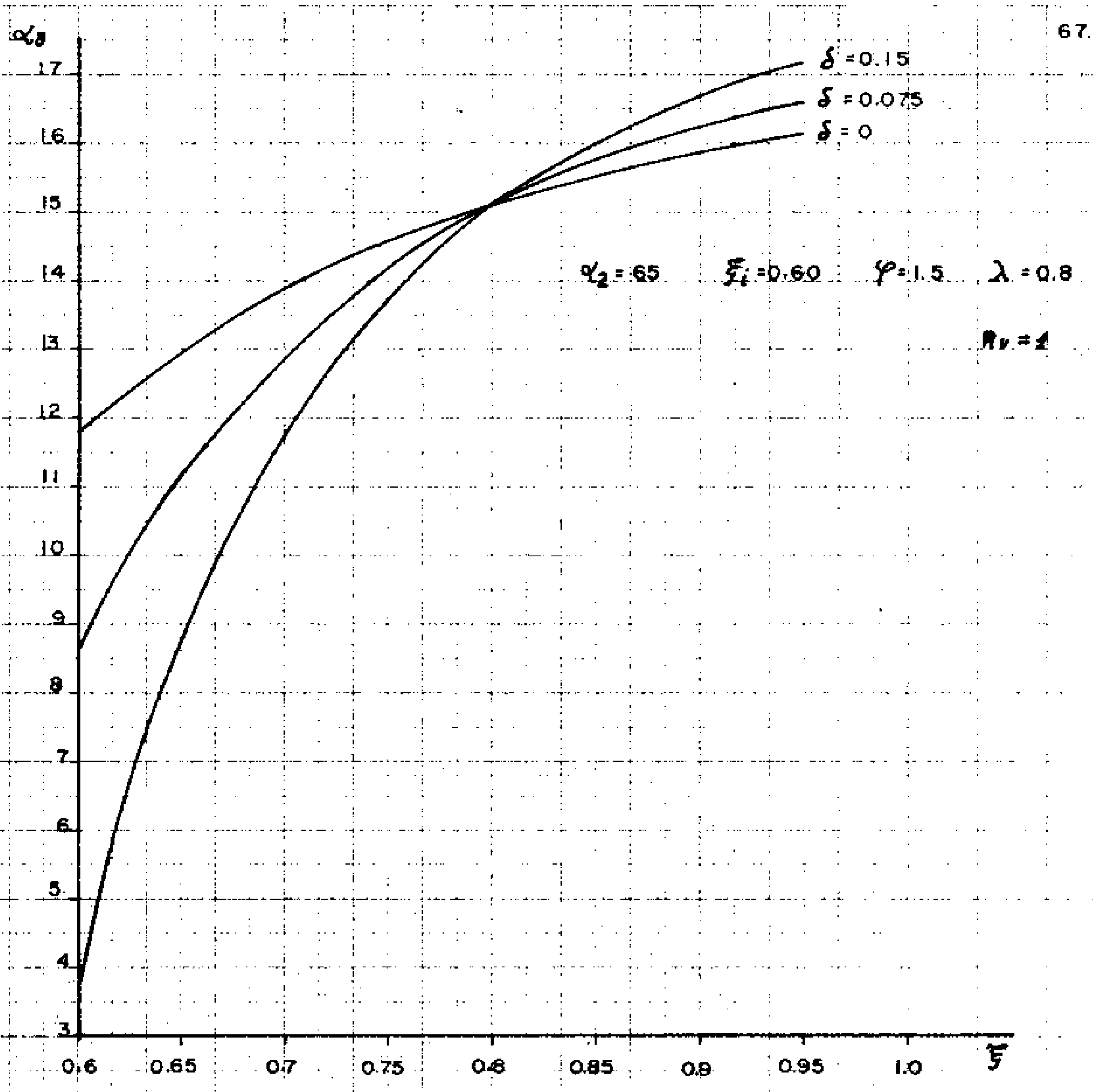
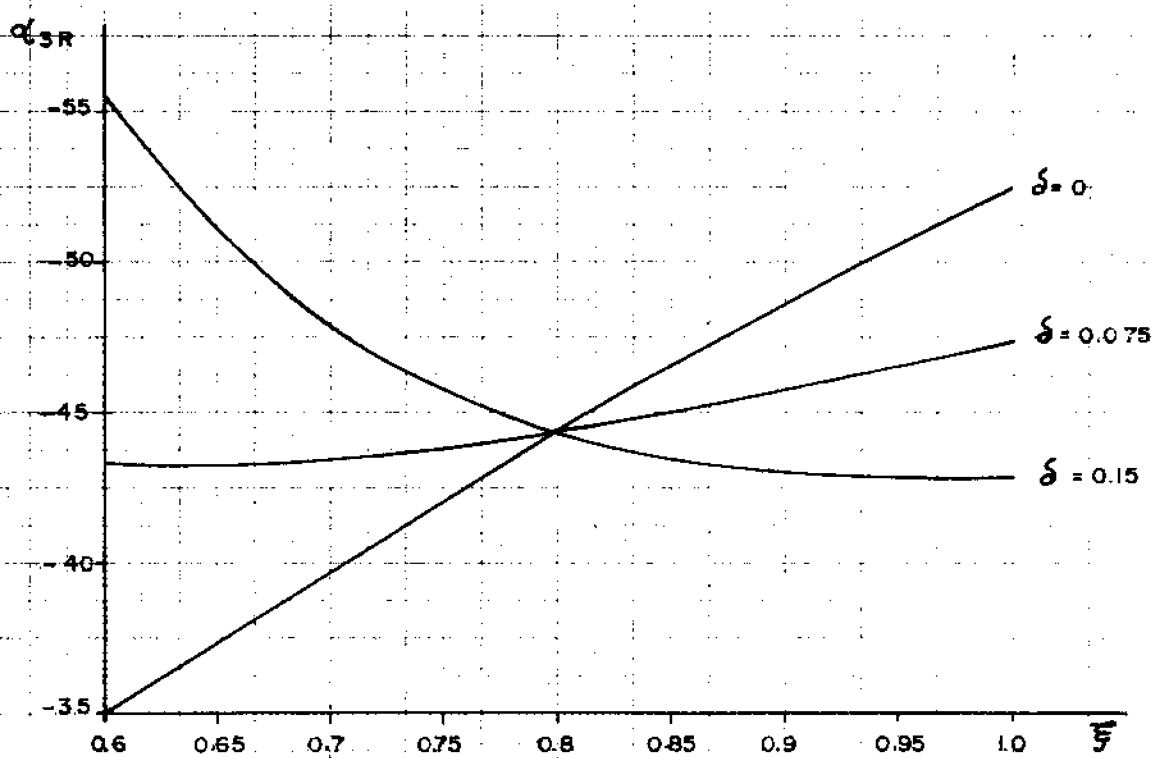


FIG. - 18-2.



INFLUENCIA DE δ, ALABES ESTATOR SIN TORSION

FIG. - 19-2.

INFLUENCIA DE δ, ALABES ESTATOR SIN TORSION

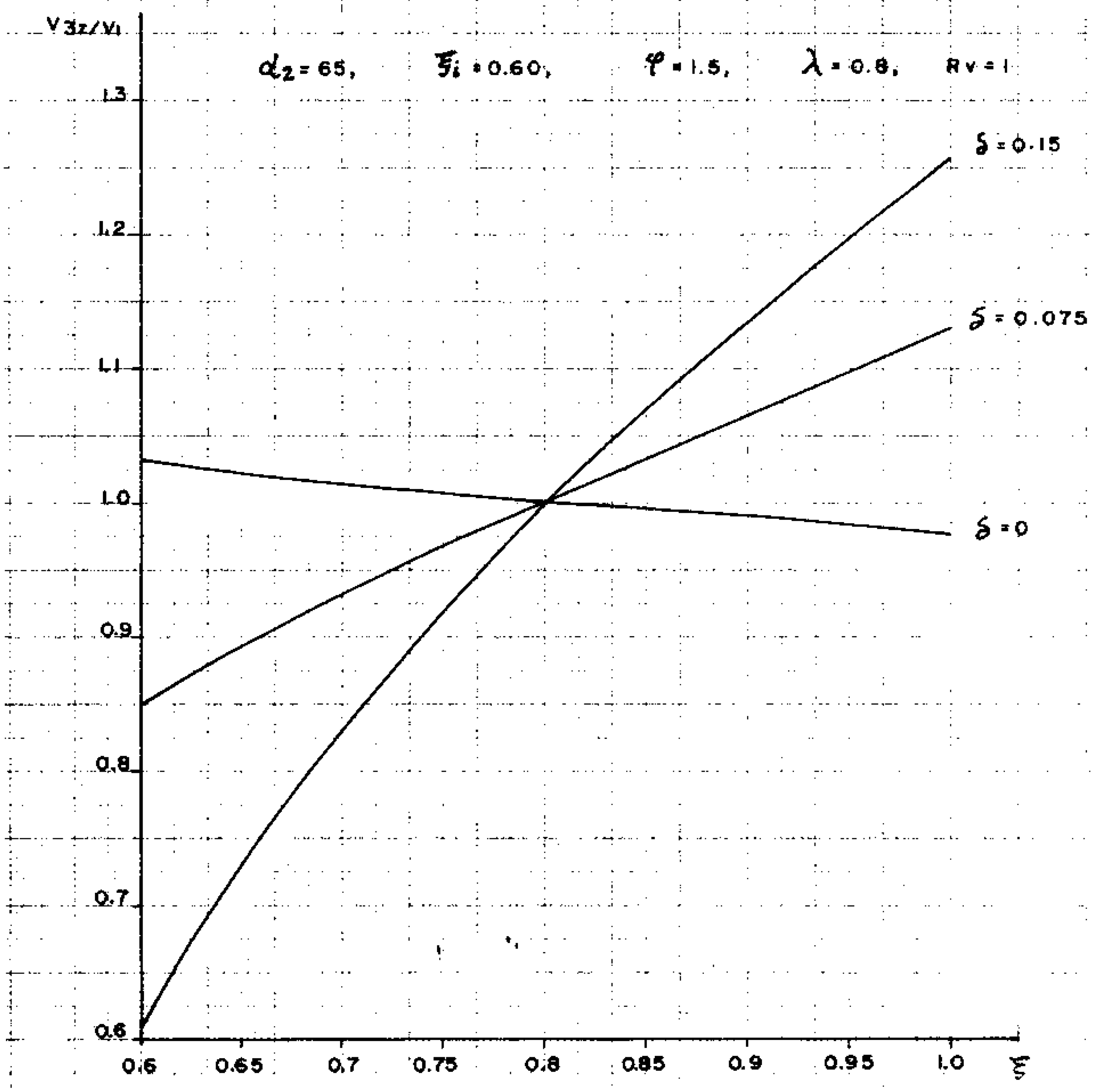


FIG.- 20-2.

LIMITES ZONA DE DISEÑO. ROTOR.

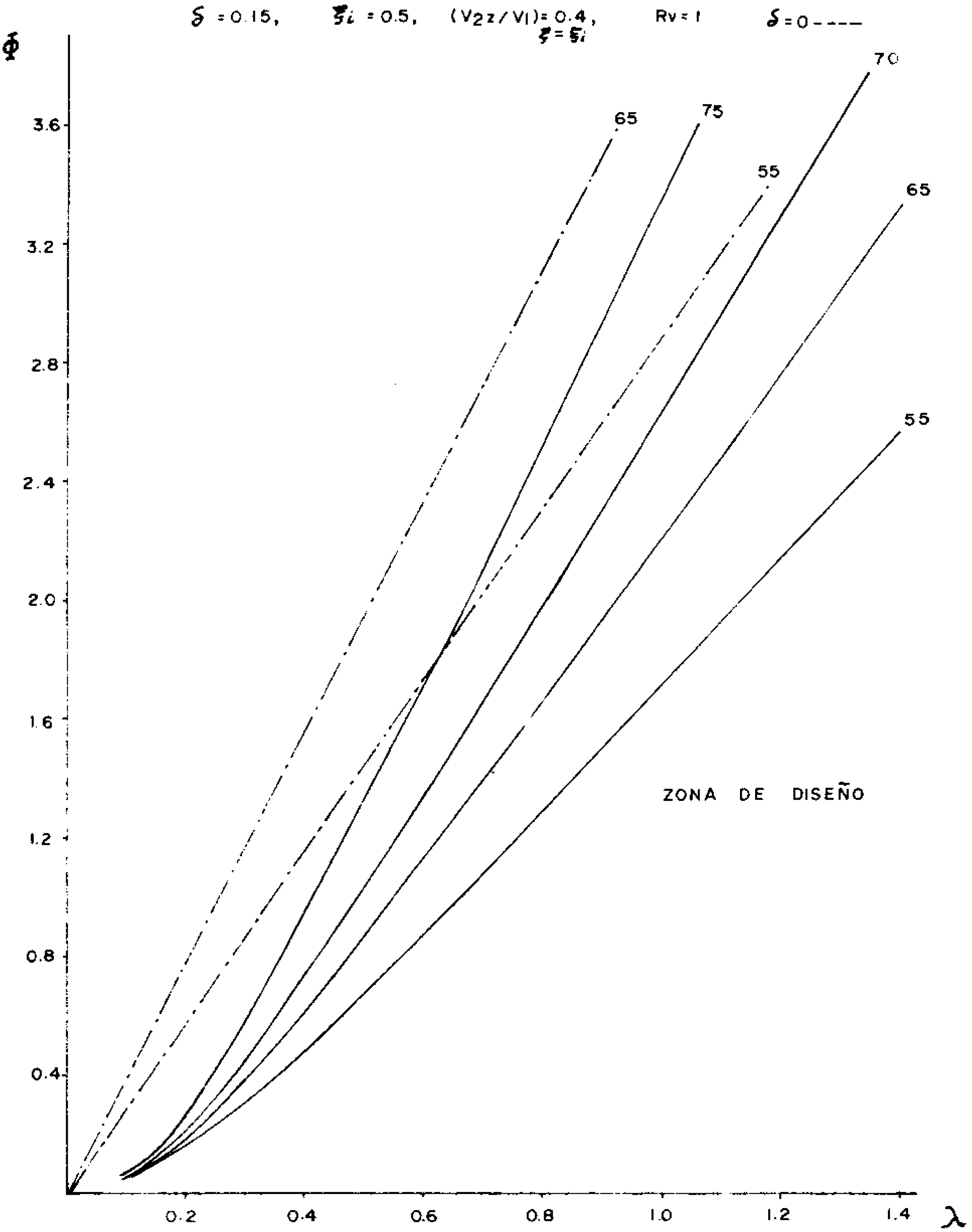


FIG.- 21-2.

LIMITES ZONA DE DISEÑO. ROTOR

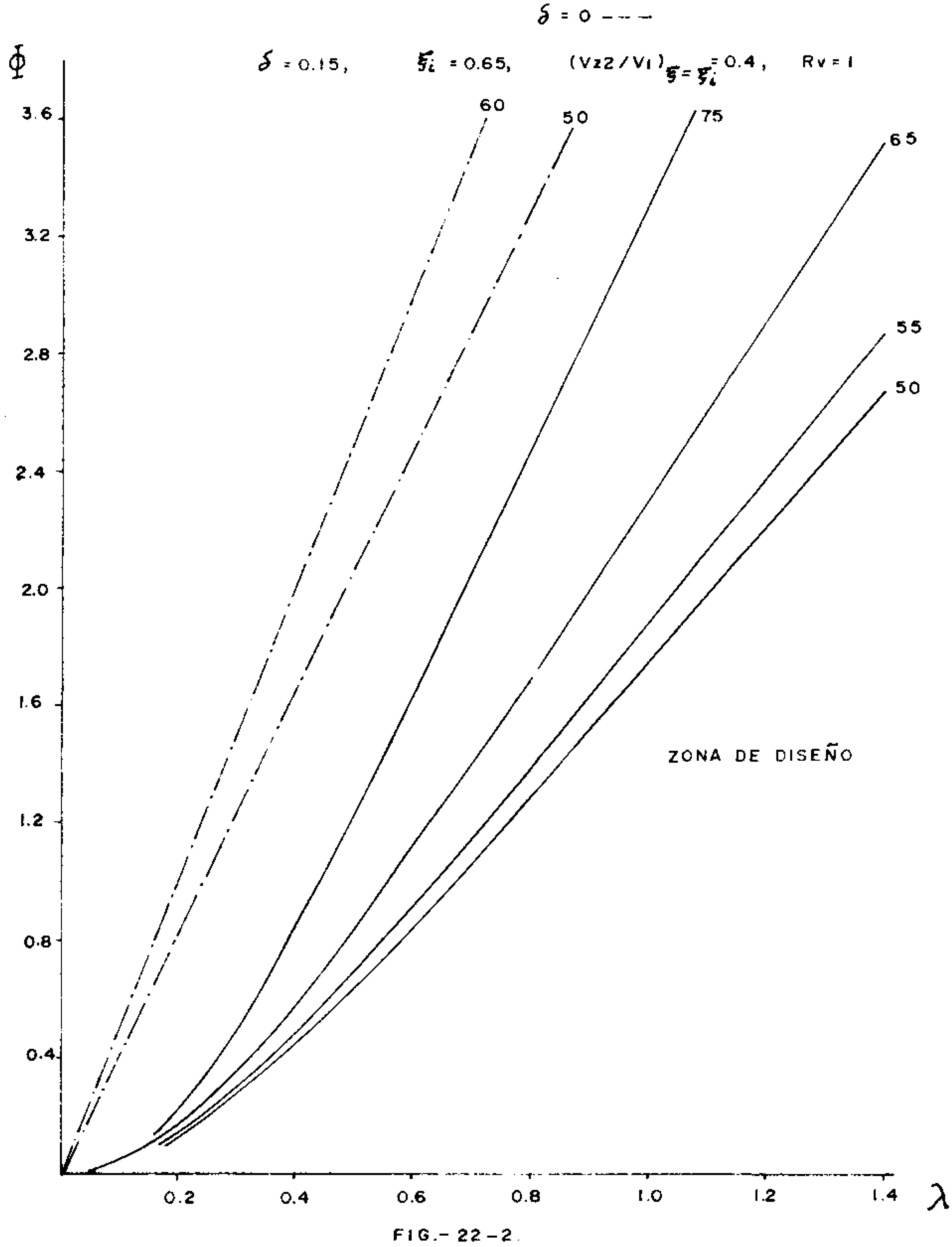


FIG.- 22-2.

LIMITES ZONA DE DISEÑO. ROTOR

$\delta = 0.15, \quad \xi_i = 0.65, \quad \left(\frac{V_{2z}}{V_1}\right)_{\xi=\xi_i} = 0.6, \quad R_V = 1.$

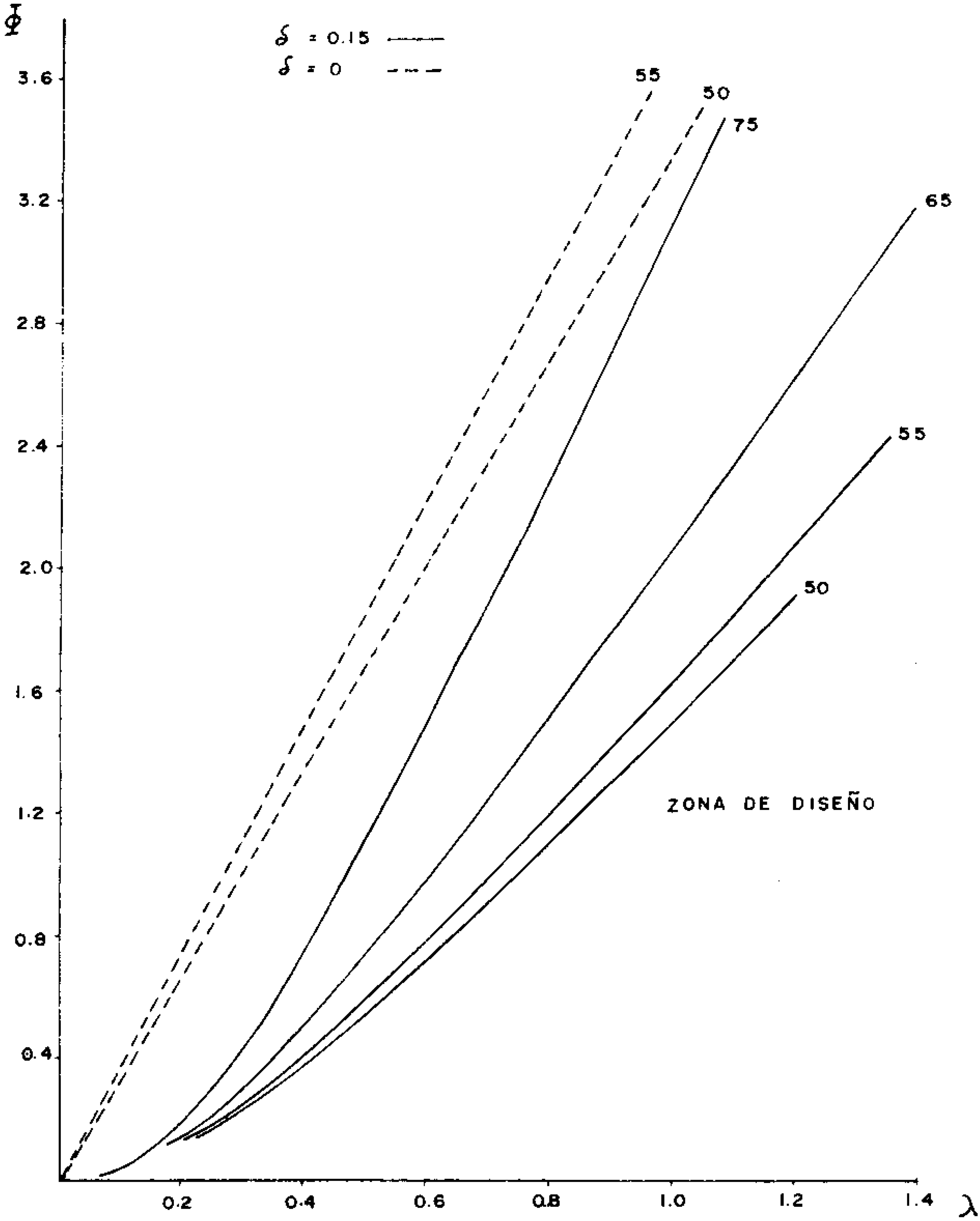


FIG.—23—2.

CAPITULO III

ESTUDIOS TERMOMECANICOS

1-1- INTRODUCCION

Los álabes del rotor de la turbina se encuentran sometidos a fuertes esfuerzos centrífugos y de flexión, así como tambien a fenomenos vibratorios; no obstante los esfuerzos de flexión son como máximo del orden del 15% de los esfuerzos centrífugos. En el caso de álabes de sección constante, dichos esfuerzos centrífugos alcanzarían valores inadmisibles en la raiz, siendo por tanto necesario disminuir el espesor de los mismos, y en consecuencia su area, desde la raiz hacia el extremo en forma tal que la distribución de esfuerzos con el radio sea lo mas uniforme posible.

Debido a que además los álabes trabajan en condiciones de elevada temperatura, debe ser considerado el fenómeno de termofluencia; lo que exige la determinación de la distribución de temperatura en el interior de los mismos, previo conocimiento de la distribución de areas. Este es el motivo por el cual realizamos aquí ambos estudios con el objetivo principal de poner de manifiesto cuantitativamente el efecto beneficioso de una distribución lineal de temperaturas T1t, decreciente desde el extremo a la raiz del álabe.

1-2- DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN EL ALABE

Para realizar este estudio supondremos que la temperatura del álabe en cada sección es uniforme, en cambio se tendrá en cuenta que la temperatura del gas y las velocidades relativas, son función del radio, lo que se traduce en una variación de la temperatura de recuperación con el mismo. Por otra parte -

consideraremos que el proceso de transmisión de calor es estacionario, de forma que si establecemos el equilibrio térmico para un elemento diferencial de álabe, como el representado en la figura (3-1), puede obtenerse la siguiente ecuación diferencial:

$$h_g \Omega \left(T_r - T_a\right) = -K_M \left[A \frac{d^2 T_a}{dr^2} + \frac{dA}{dr} \frac{dT_a}{dr} \right]$$

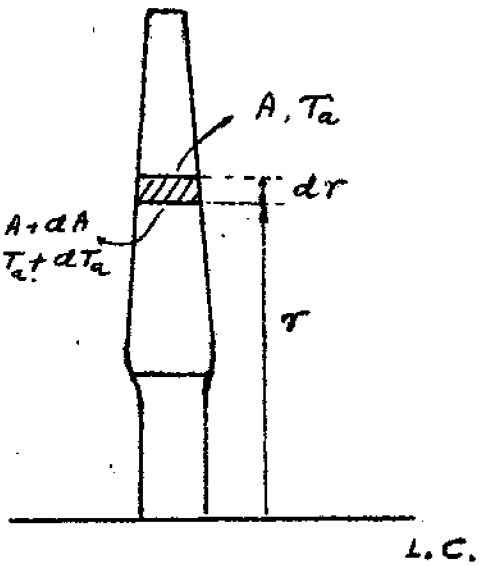


Fig. 3-1

ó bien en forma adimensional:

$$\left[\frac{A}{A_i} \frac{d^2 \theta_a}{d \xi^2} \quad \frac{d\, A/A_i}{d \xi} \frac{d \theta_a}{d \xi} \right] = -\Omega \frac{h_g}{K_M} \frac{r_e^2}{A_i} \left(\theta_r - \theta_a\right)$$

Ahora bien teniendo en cuenta que:

$$N_u = \frac{h_g c}{K_g}$$

$$\left(\frac{r_e}{c}\right)^2 = \frac{1}{(1-\xi_i)^2} \left(\frac{h}{c}\right)^2$$

puede escribirse:

$$\left[\frac{A}{A_i} \frac{d^2 \theta_a}{d \xi^2} + \frac{d\, A/A_i}{d \xi} \frac{d \theta_a}{d \xi} \right] = -B_g \left(\theta_r - \theta_a\right) \qquad (3\text{-}1)$$

con:

$$B_g = N_u\left(\frac{K_g}{K_M}\right)\left(\frac{\Omega}{c}\right)\left(\frac{h}{c}\right)^2 \frac{1}{\frac{A_i}{c^2}\left(1-\xi_i\right)^2} \qquad (3\text{-}2)$$

El coeficiente Bg, es por tanto función de parámetros geomé tricos del álabe y de parámetros y constantes físicas carac terísticas de todo problema de transmisión de calor. Hay que hacer notar que las variaciones de $\left(\frac{\Omega}{c}\right)$ con el radio son pequeñas; mientras que $\left(\frac{A_i}{c^2}\right)$, en álabes de cuerda constante, es una constante que depende exclusivamente de la distribu ción básica de espesores y deflexión geométrica del perfil. El valor de $\left(\frac{h}{c}\right)$ es constante si la cuerda permanece constan te y varía normalmente entre (2-3.5), para todas las turbinas.

La ecuación diferencial (3-1), porporciona la solución - del problema cuando se fijan las condiciones de contorno.

Estableciendo que el flujo de calor que pasa al álabe - por convección, a través de la sección del extremo del mismo, es igual al calor que se conduce por el interior del álabe en dicha sección se obtiene:

$$\left(\frac{d\theta_a}{d\xi}\right)_{\xi=1} = B'_g\left[\left(\theta_r - \theta_a\right)\right]_{\xi=1}$$

con:

$$B'_g = N_u\left(\frac{K_g}{K_M}\right)\left(\frac{h}{c}\right)\frac{1}{1-\xi_i} \qquad (3\text{-}3)$$

La determinación del coeficiente de convección en el extremo resulta en la práctica difícil; pero carece de importancia,- ya que el flujo de calor que pasa al álabe a través de la -- sección del extremo es pequeño comparado con el flujo de calor que pasa a través de toda la superficie lateral del mismo, pudiendose tomar con muy buena aproximación, según se verá en las aplicaciones numéricas, $B'g = 0$.

La condición de contorno en la raiz, puede imponerse - en dos formas:

a) Especificando una temperatura para el álabe, es decir:

$$\left(\theta a\right)_{\xi=\xi i} = \theta a_i$$

La posibilidad de conseguir esta temperatura depende de la evacuación de calor a través del disco.

b) Dado que de acuerdo con los resultados experimentales, la temperatura en la periferia del disco de la turbina es prácticamente uniforme, puede escribirse:

$$K_M\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi i} = \dot{q}$$

siendo $\dot{Q}$, el flujo de calor que pasa a través del disco por unidad de superficie periférica del mismo y por unidad de -- tiempo, e igual al que debe ser absorbido globalmente mediante el sistema de refrigeración, sistema de lubricación y conducción al resto de elementos del motor.

El problema de determinación de la distribución de temperaturas en el interior del álabe queda reducido por tanto, a la resolución de una ecuación diferencial de segundo órden - con condiciones de contorno.

Aunque en general es necesario recurir al cálculo numérico, hay que tener en cuenta que en este caso las condiciones de contorno no complican el problema, dado que la ecuación diferencial (3-1) es lineal; circunstancia que puede ser aprovechada para obtener su solución resolviendo el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer órden equivalente, mediante técnicas de integración apropiadas para condiciones iniciales, como el método de Kutta Runge. La solución que cumple las condiciones de contorno se obtiene mediante superposición de dos soluciones con condiciones iniciales sin necesidad de recurrir a ningun proceso de iteración.

1-3- DETERMINACION DE LA TEMPERATURA DE RECUPERACION

Para porder determinar la distribución de temperatura en el interior del álabe, mediante la ecuación diferencial (3-1) y las condiciones de contorno impuestas, según los casos estudiados; es necesario determinar previamente la temperatura de recuperación θ_r, que como se ha dicho es función del radio y depende fundamentalmente de la distribución de temperaturas - en la sección de salida de la cámara de combustión.

El factor de recuperación de temperatura S, si designamos con T_2tr la temperatura de remanso de la corriente relativa - se define como sigue:

$$S = \frac{T_r - T_2}{T_{2}tr - T_2}$$

de donde se deduce:

$$T_r = T_2 + S\left(T_{2}tr - T_2\right)$$

Por otra parte S es función del número de Prandlt, pudiendo - tomarse en régimen turbulento la relación: $S = P_r^{1/4}$. No obstante el número de Prandlt, para los gases resultantes de la - combustión, varía poco con la temperatura en el intervalo -- (500 - 1.500º K) (veáse tablas de Kayes and London) pudiendo - tomarse como valor medio en dicho intervalo $P_r \simeq 0.7$, con lo - que $S \simeq 0.92$. En consecuencia y desde un punto de vista conservativo puede tomarse $T_r \simeq T_{2}tr$, o lo que es igual:

$$T_r \simeq T_2 + \frac{W^2}{2c_p} \qquad (3\text{-}4)$$

como además, del triangulo de velocidades (figura 2-1), se deduce:

$$W^2 = V_2^2 - 2U V_{\theta 2} - U^2$$

al sustituir el valor de W en la ecuación (3-4), queda:

$$T_r = T_{1t} - \frac{2U V_{\theta 2} - U^2}{2c_p}$$

ó en forma adimensional

$$\theta_r = \theta_{1t} - \frac{(\gamma-1) M_{2m}^2}{R_v \lambda \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{2m}^2\right)} \frac{\xi}{\xi_m} \left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1} - \frac{\xi}{\xi_m} \frac{R_v}{2\lambda} \right) \qquad (3\text{-}5)$$

Esta expresión es la que utilizaremos para determinar la temperatura de recuperación del gas, que como se observa, depende fundamentalmente del perfil de temperaturas θ_{1t} en la sección de salida de la cámara de combustión, de la ley torsional elegida y del número de Macn absoluto de la corriente M_{2m} en el punto medio.

1-4 - LEYES DE AREAS Y DISTRIBUCION DE ESFUERZOS

Las unicas distribuciones de areas que se mencionan en la literatura, referente a turbomáquinas, son la lineal y la cónica, llamada así porque la variación del area de los perfiles con el radio, es una función igual a la que relaciona una sección genérica del cono con la altura. Además aquélla se presenta no porque se utilice en la practica sino más bien a fin de realizar comparaciones con la cónica y poner de manifiesto las mejores cualidades de esta ultima.

El objetivo que se persigue con una variación del area del álabe en disminuir la magnitud del esfuerzo centrífugo - en la raiz, lo que equivale a conseguir una distribución de esfuerzos lo más uniforme posible y en consecuencia minimizar el volúmen ó peso del álabe, para una relación de areas extremo-raiz determinadas.

Con estos objetivos, aqui analizamos y comparamos diversas distribuciones de areas en forma resumida. En la figura (3-8) (pag. 85), se representan posibles distribuciones de areas, además de las yá mencionadas; como son: la de tipo exponencial, hiperbólico y parabólico con ventajas manifiestas sobre la cónica y lineal, por cuanto el volumen del álabe que se obtendría con aquéllas es menor. No obstante - esta ventaja debe ser confirmada con la distribución de esfuerzos, y determinación del esfuerzo máximo que se obtiene con tales leyes de areas.

El esfuerzo centrífugo, en una sección genérica del - álabe, se obtiene mediante la expresión:

$$\sigma = \frac{\rho_M U_e^2}{A/A_e} \int_{\xi}^{1} \frac{A}{A_e} \xi \, d\xi \qquad (3\text{-}6)$$

Las leyes estudiadas son:

a) Distribución lineal de areas, cuya expresión es:

$$\frac{A}{A_e} = 1 + m\,(1+\xi)$$

con $m = \dfrac{A_i/A_e - 1}{1 + \xi_i}$, con lo que resulta:

$$\sigma = \frac{\rho_M U_e^2}{6\, A/A_e} \left[3(1+m) - 2m - \xi^2 \left(3(1+m) - 2m\xi \right) \right]$$

b) Distribución de areas de tipo cónico, dada por:

$$\frac{A}{A_e} = \left(\frac{C-\xi}{C-1}\right)^2 \qquad (3\text{-}8)$$

con:

$$C = \frac{1-\xi_i\,(A_e/A_i)^{1/2}}{1-(A_e/A_i)^{1/2}}$$

por lo que se obtiene:

$$\sigma = \frac{\rho_M U_e^2}{12(C-\xi)^2}\left[(C-\xi)^3(C+3\xi)-(C-1)^3(C+3)\right]$$

c) Ley de areas exponencial, cuya expresión es:

$$\frac{A}{A_e} = e^{\left(\frac{1-\xi}{1-\xi_i}\right)\ell\, A_i/A_e} = \left(\frac{A_i}{A_e}\right)^{\frac{1-\xi}{1-\xi_i}}$$

de lo que se deduce:

$$\sigma = \frac{\rho_M U_e^2}{K_2^2}\left(K_2\xi + 1 - \frac{K_2+1}{A/A_e}\right), \text{ con } K_2 = \frac{\ell\, A_i/A_e}{1-\xi_i}$$

d) Distribución de areas parabólica :

$$\frac{A}{A_e} = \frac{A_i}{A_e} - \left(\frac{A_i}{A_e}-1\right)\sqrt{\frac{\xi-\xi_i}{1-\xi_i}}$$

con lo que resulta:

$$\sigma = \frac{\rho_M U_e^2}{2K_r}\left\{1-\frac{8}{15}\left(1-\frac{A_e}{A_i}\right)\left(\frac{3}{2}+\xi_i\right)(1-\xi_i)-\xi^2+\frac{8}{15}\left(1-\frac{A_e}{A_i}\right)\right.$$
$$\left.(\xi-\xi_i)\sqrt{\frac{\xi-\xi_i}{1-\xi_i}}\left(\xi_i+\frac{3}{2}\xi\right)\right\}$$

siendo

$$A_r = 1-\left(1-\frac{A_e}{A_i}\right)\sqrt{\frac{\xi-\xi_i}{1-\xi_i}}$$

e) Distribución de areas hiperbólica

$$\frac{A}{A_R} = \left(\frac{1-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right), \quad \text{con} \quad \xi_0 = \frac{\xi_i - A_R/A_i}{1-A_R/A_i}$$

con lo que se obtiene:

$$\sigma = \frac{\rho_M U_e^2}{A/A_e}\left[1-\xi+\xi_0 \, l\left(\frac{1-\xi_0}{\xi-\xi_0}\right)\right](1-\xi_0)$$

Con las expresiones expuestas, se han obtenido las distribuciones de esfuerzos que se presentan en las figuras (3-5) a (3-7) pág. 84 y 85, deduciéndose que:

1º con la ley de tipo parabólico se obtienen esfuerzos superiores a los obtenidos con la ley cónica, aunque el máximo en el primer caso no se presenta en la raiz.

2º La ley de tipo hiperbólico fig. (3-7) (pag. 85), se comporta favorablemente hasta valores de $Ae/Ai \simeq 0.35$; pero es desventajosa para valores más bajos, que son los que se dan en la práctica.

3º La ley de tipo exponencial presenta un perfil muy uniforme y con élla se obtienen los menores esfuerzos en la raiz del álabe, sección donde se alcanza el máximo.

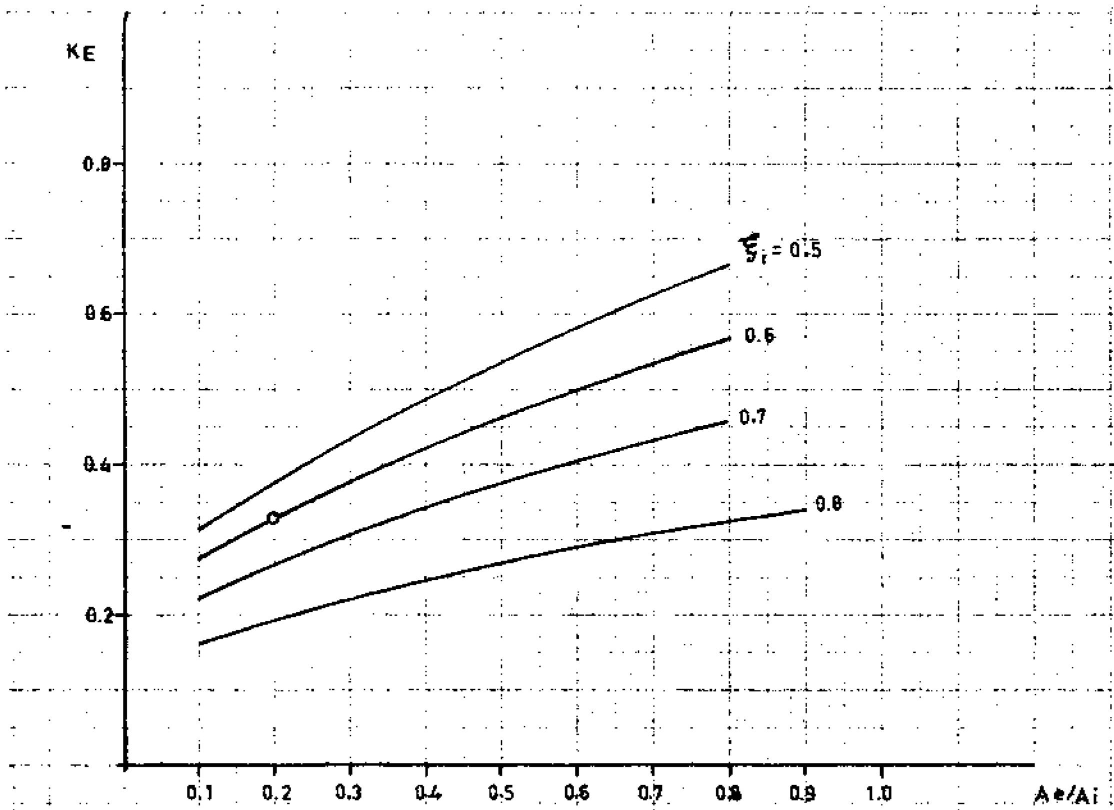
El coeficiente de esfuerzos, definido mediante la relación:

$$k = \frac{\sigma_i}{\frac{1}{2}\rho_M U_e^2}$$

resulta independiente del material de los álabes y de la velocidad de giro, dependiendo en cambio solamente de características geométricas del mismo, por lo que resulta muy util en el diseño.

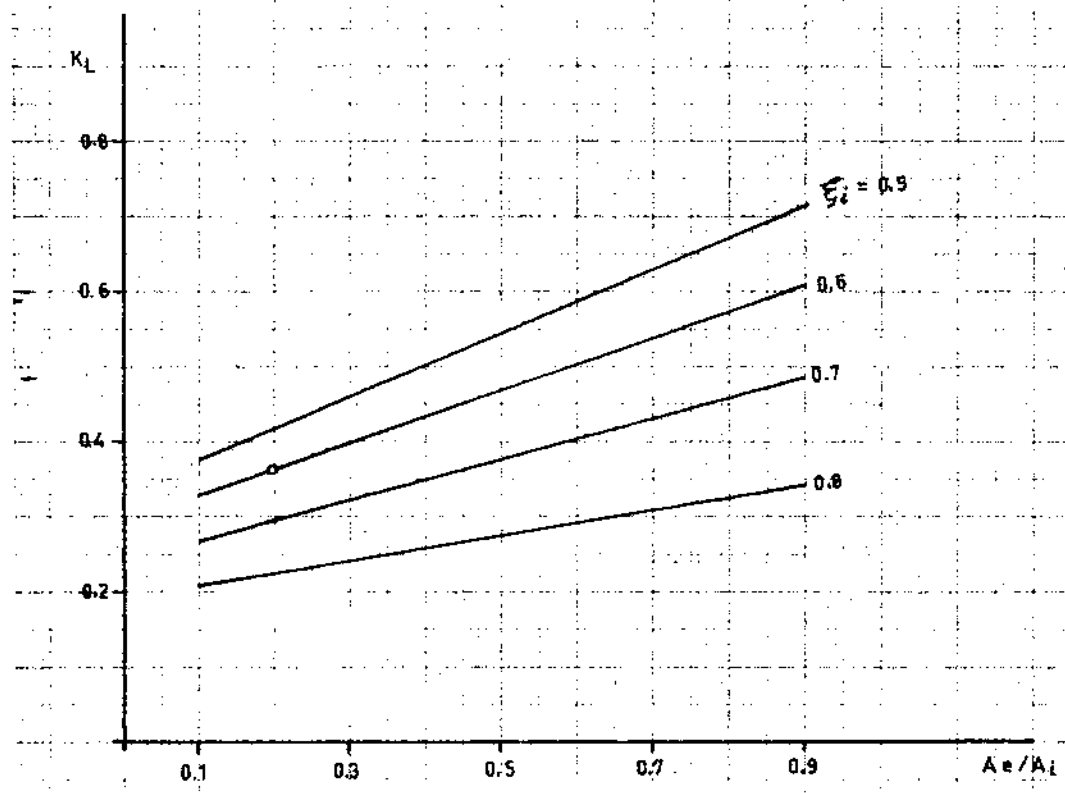
En las figuras (3-2), (3-3) y (3-4) (pag. 82 y 83) se representa la variación del coeficiente de esfuerzos, para las leyes de -

areas lineal, cónica y exponencial respectivamente, en función de la relación de areas $\frac{Ae}{Ai}$ con ζ_i como parámetro.



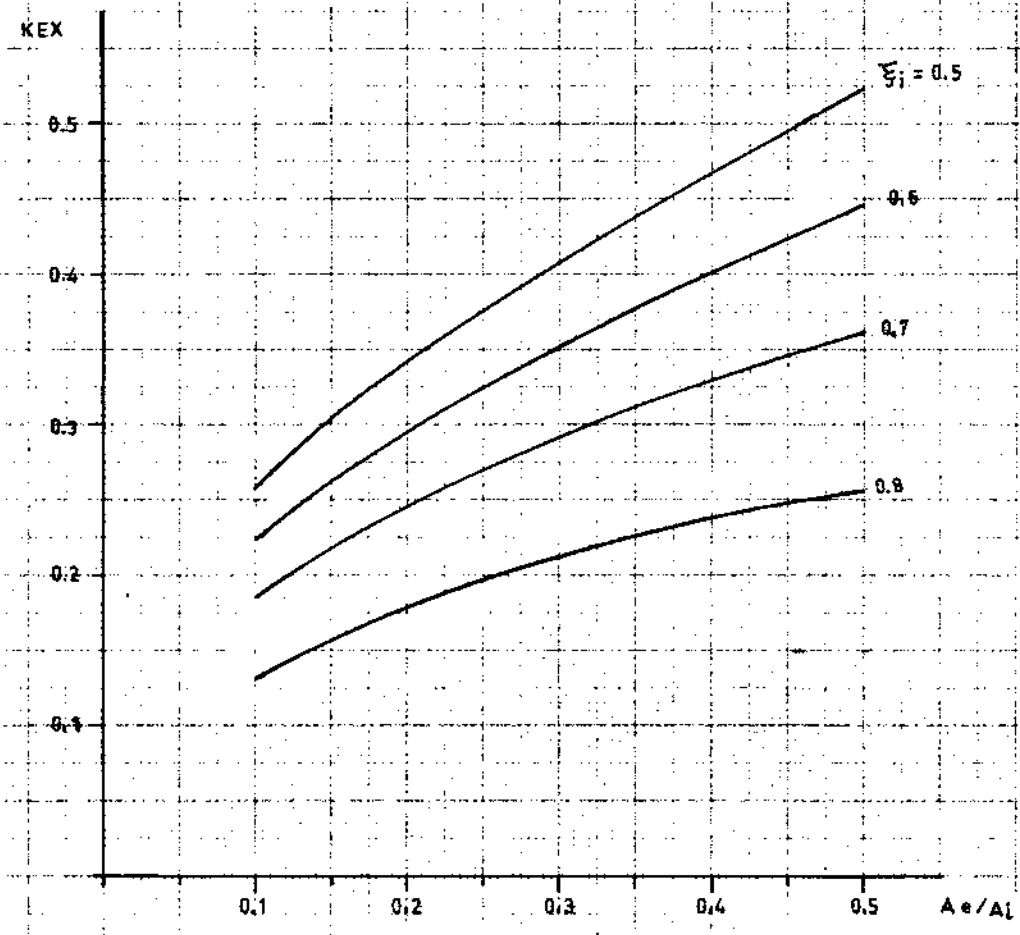
(COEFICIENTE DE ESFUERZOS. LEY DE AREAS TIPO CONICO)

FIG.- 3-3.



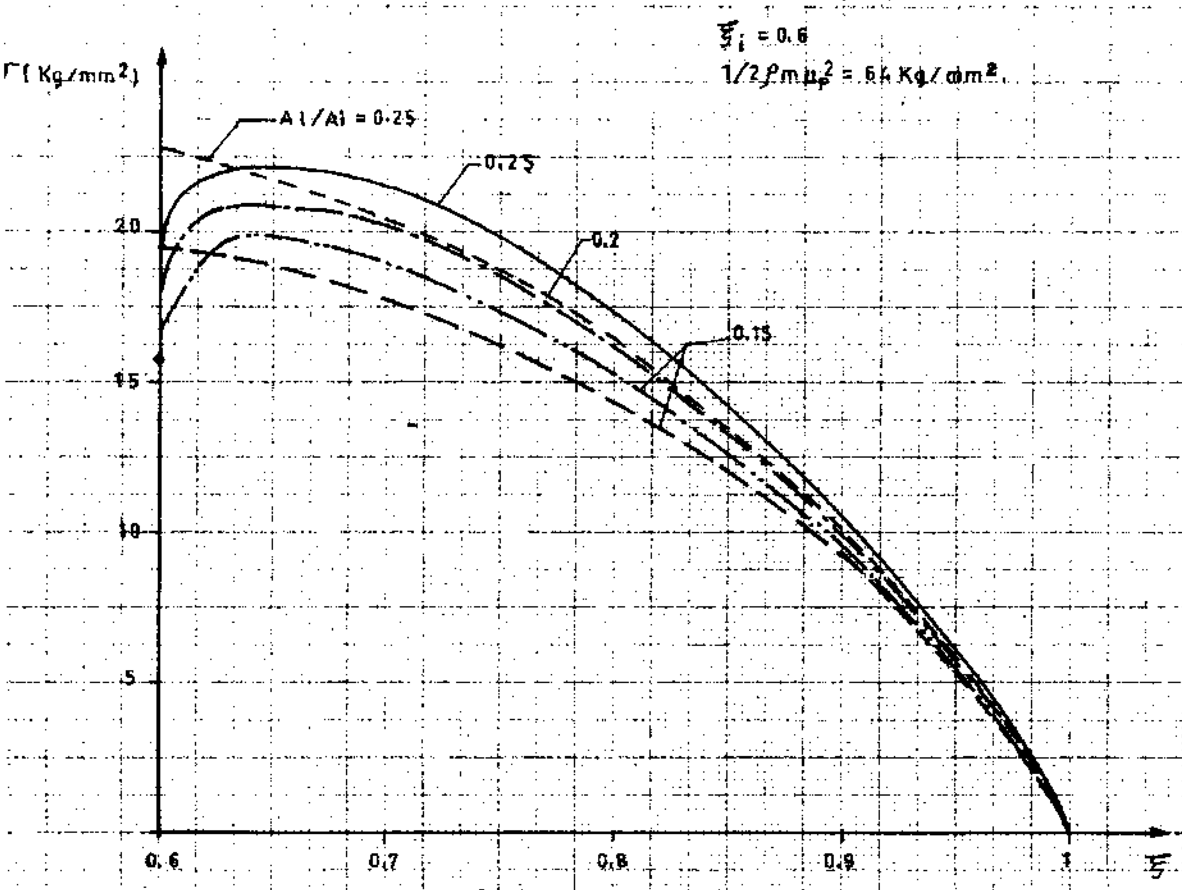
(COEFICIENTE DE ESFUERZOS. LEY DE AREAS LINEALES)

FIG.- 3-2.



COEFICIENTE DE ESFUERZOS. LEY DE AREAS EXPONENCIAL

FIG.- 3 - 4.



DISTRIBUCION DE ESFUERZOS

FIG — 3 - 5

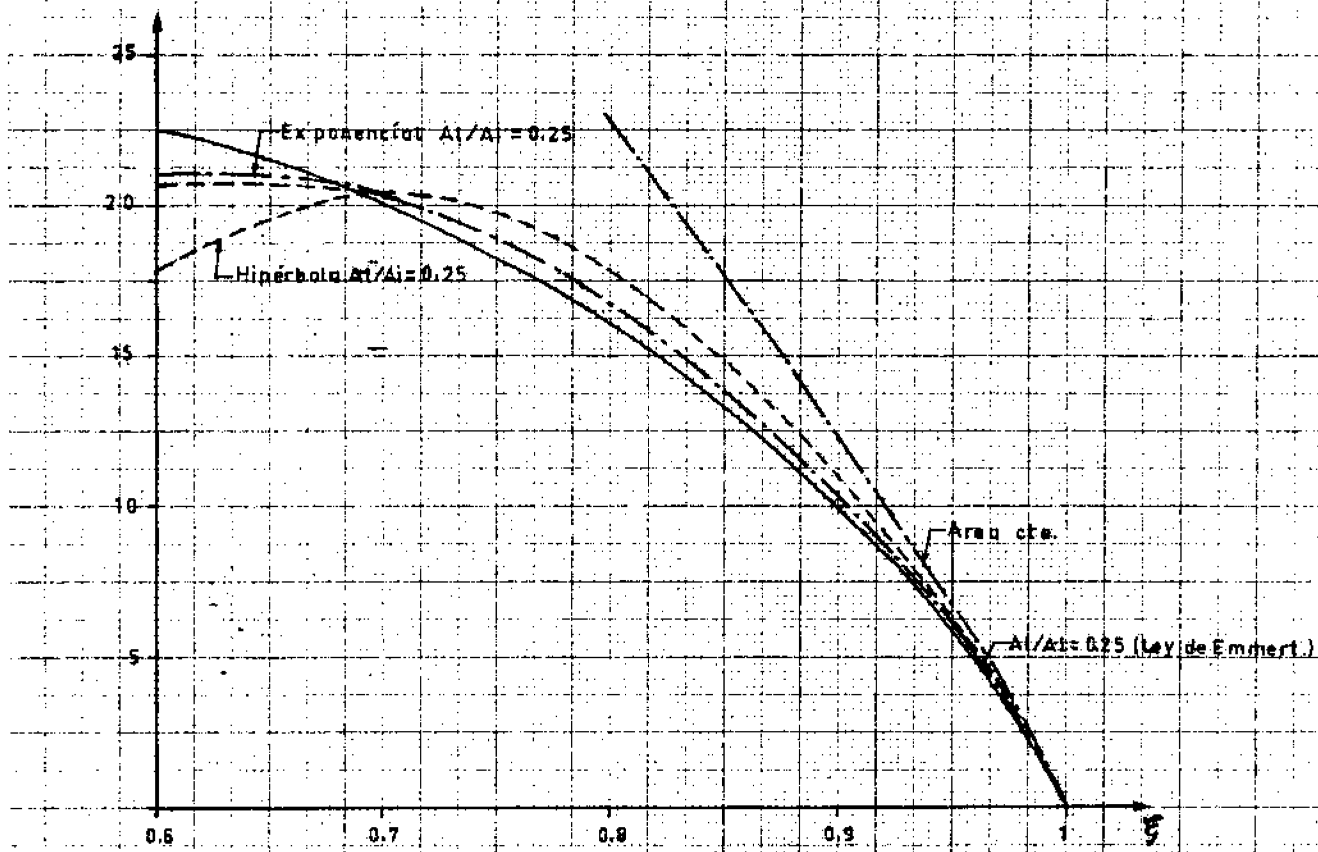


FIG. — 3 - 6.

DISTRIBUCION DE ESFUERZOS
(DISTRIBUCION DE AREAS HIPERBOLICA)

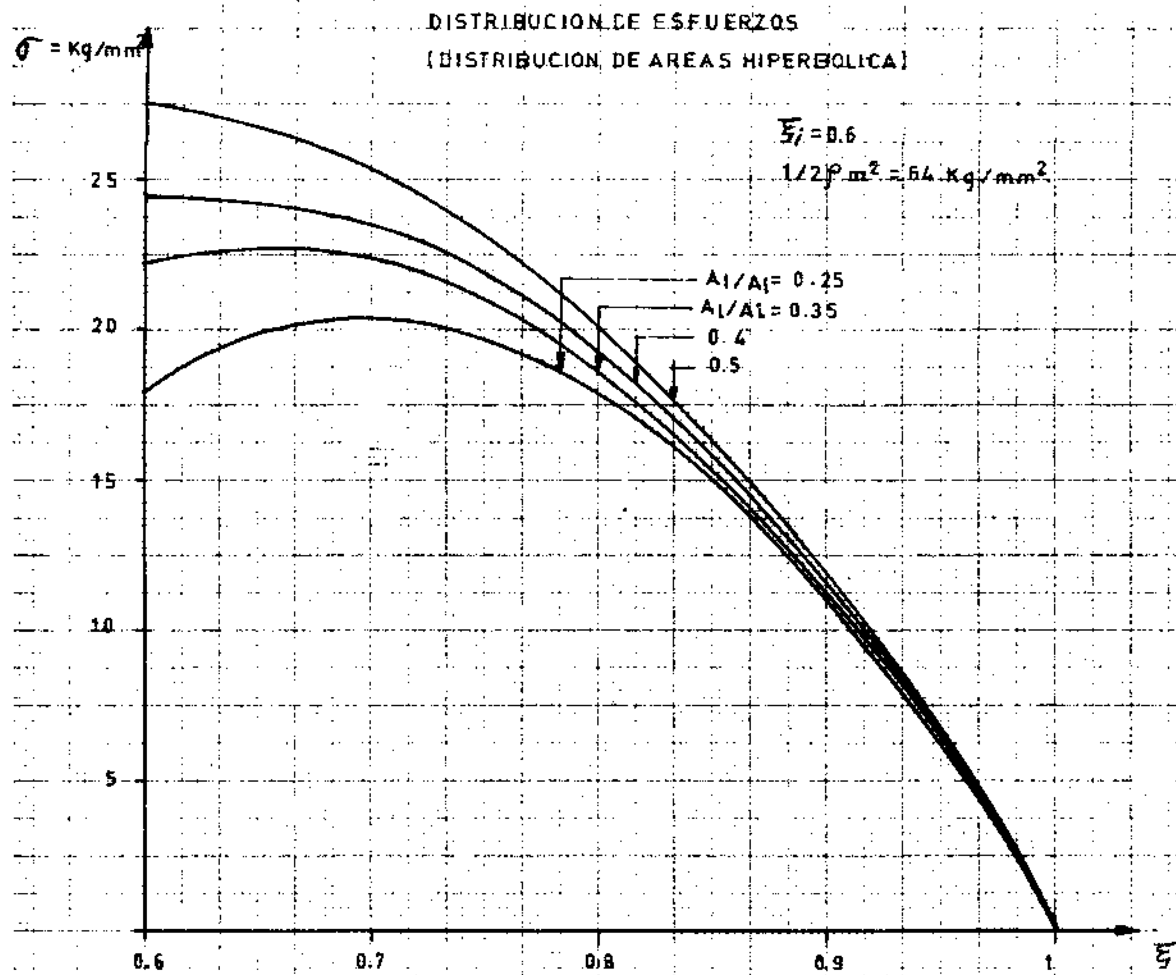


FIG. 3-7

(DISTRIBUCION DE AREAS)

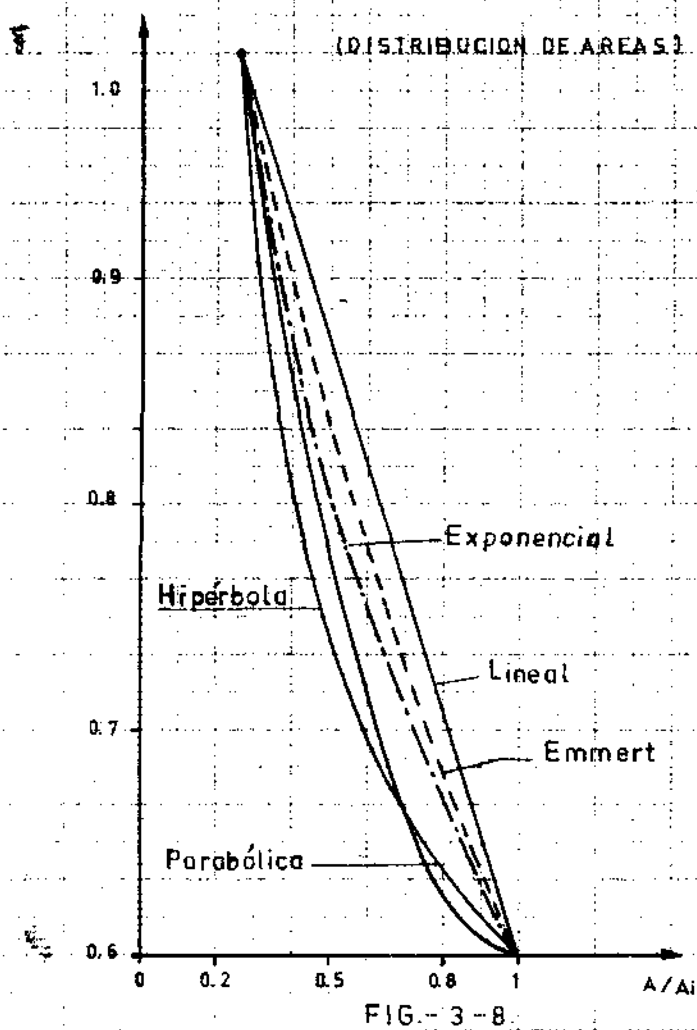


FIG. 3-8

1-5 - SOLUCION ANALITICA DE LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS

La ecuación diferencial (3-1), que proporciona la distribución de temperaturas en el álabe, puede resolverse en cualquier caso, mediante el procedimiento numérico indicado. No obstante puede encontrarse una solución analítica, cuando la distribución de areas es de tipo cónico y el coeficiente Bg no varía apreciablemente. El interés de esta solución radica en la posibilidad de comparar las distribuciones de temperatura obtenidas en el caso homoentrópico y no homoentrópico, con relativa facilidad.

Teniendo en cuenta la relación (3-8) y mediante el cambio de variable $y = l\,\dfrac{c-\xi}{c-\xi_i}$, la ecuación (3-1) queda reducida a:

$$\frac{d^2\theta_a}{dy^2} + \frac{d\theta_a}{dy} = \frac{Bg}{(c-\xi_i)^2}\left(\theta_a - \theta_r\right) \tag{3-9}$$

Ecuación lineal de coeficientes constantes cuya solución general será:

$$\theta_a = K_1 e^{r_1 y} + K_2 e^{r_2 y} + \theta_{ap}$$

donde:

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Bg\,(c-\xi_i)^2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4Bg\,(c-\xi_i)^2}}{2} \tag{3-10}$$

La solución particular de la ecuación completa es θ_{ap} y K1 y K2 son constantes que se determinan con las condiciones de contorno.

El calculo de la solución particular puede realizárse por el metodo de variación de las constantes, aunque en el caso de torbellino libre y distribución de temperaturas polinómica pue de obtenerse fácilmente, teniendo en cuenta que para este caso la expresión (3-5), que proporciona la temperatura de recuperación, es tambien de tipo polinómico.

Si como venimos haciendo, se aplica al caso de distribución lineal de temperaturas $\left(\theta_{it} = B + M\xi\right)$ se obtiene:

$$\theta_{ap} = F' e^{2y} + E' e^{y} + G'$$

con

$$F' = \frac{Bg\, F\, (\xi_i - C)^4}{Bg\, (\xi_i - C)^2 - 6}$$

$$E' = \frac{Bg\, (2CF + M)\, (\xi_i - C)^3}{Bg\, (\xi_i - C)^2 - 2}$$

$$G' = FC^2 + MC + Bg - \frac{\Psi}{\chi(1+\Psi^2)}\, \frac{(\gamma-1)\, M_{2m}^2}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{2m}^2\right)} \qquad (3\text{-}11)$$

$$F' = \frac{1}{\chi^2 (1+\Psi^2)}\, \frac{\gamma - 1}{2\, \xi_m^2}\, \frac{M_{2m}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{2m}^2}$$

De forma que en definitiva queda:

$$\theta_a = K_1 e^{r_1 y} + K_2 e^{r_2 y} + F' e^{2y} + E' e^{y} + G'$$

ó mediante el cambio $X = e^{y}$, es decir $X = \frac{C - \xi}{C - \xi_i}$, que resulta más cómodo, se tiene:

$$\theta_a = K_1 X^{r_1} + K_2 X^{r_2} + F' X^2 + E' X + G' \qquad (3\text{-}12)$$

Después de lo expuesto en el apartado (1-2), las condiciones de contorno para nuestro problema serán:

a) $$\left(\frac{d\theta_a}{d\xi}\right)_{\xi = \xi_e} = B'g\, \left(\theta_r - \theta_a\right)_{\xi = 1}$$

(3-13)

b) $$\left(\theta_a\right)_{\xi = \xi_i} = \theta_{ai}$$

con lo que se obtiene un sistema de dos ecuaciones con las constantes K_1 y K_2 como incógnitas del que se deduce:

$$K_1 = \frac{SV - Z}{V - T}$$

$$K_2 = \frac{Z - TS}{V - T} \qquad (3\text{-}14)$$

con:

$$S = \theta_{ai} - F' - E' - G'$$

$$T = X_e^{r_1 - 1}\left(B'g\, X_e - \frac{r_1}{c - \xi_i}\right)$$

$$V = X_e^{r_2 - 1}\left(B'g\, X_e - \frac{r_2}{c - \xi_i}\right) \qquad (3\text{-}15)$$

$$Z = B'g\left(\theta r_e - G'\right) - F' X_e\left(B'g\, X_e - \frac{2}{c - \xi_i}\right) - E'\left(B'g\, X_e - \frac{1}{c - \xi_i}\right)$$

La ecuación (3-12), con las relaciones (3-14) y (3-18), - proporciona la distribución de temperaturas en un interior del álabe, cuando la distribución de temperaturas θ1t es lineal. - El caso de distribución uniforme de temperaturas,es un caso -- particular del obtenido cuando R=1 y M=0; lo cual será utiliza do en lo que sigue, para comparar las distribuciones de tempera turas en ambos casos.

1-6 INFLUENCIA DE LA NO HOMOENTROPIA DE LA CORRIENTE EN LA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA EN EL ALABE

El interes de una distribución lineal de temperaturas T1t, decreciente desde el extremo a la raiz, radica en la posibilidad de que las temperaturas que se alcancen en la raiz del álabe sean menores que en el caso de temperatura uniforme, lograndose en consecuencia aumentar la vida ó el esfuerzo de trabajo del material, teniendo en cuenta el fenómeno de fluencia.

Interesa pues realizar una aplicación numérica que ponga de manifiesto cuantitativamente los efectos beneficiosos de tal distribución de temperaturas sobre el caso uniforme.

Para poder comparar la distribución de temperaturas en -el álabe en ambos casos es necesario partir de una hipótesis logica, que consiste en suponer que el flujo de calor a través del disco de la turbina es el mismo en ambos casos. La -experiencia demuestra que la temperatura en la periferia del disco es practicamente uniforme, por lo que el flujo de calor a través de disco por unidad de superficie y por unidad de --tiempo será:

$$\dot{q} = K_M \left(\frac{dT_a}{dr}\right)_{r=r_i}$$

De lo que se deduce que nuestra hipótesis implica que:

$$\left(\frac{d\theta_a}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_i} = \left(\frac{d\theta_{ah}}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_i} \qquad (3\text{-}16)$$

Siendo Θa la temperatura en el interior del álabe en el caso no homoentrópico y Θah la temperatura en el caso homoentrópico. Utilizaremos de ahora en adelante esta nomenclatura a fin de evitar confusiones denotando con el subindice h constantes ó variables referidas al caso homoentrópico y sin subindice las referidas al caso no homoentrópico.

Establecida esta hipótesis que implica la relación (3-16), describiremos el método seguido para la obtención de resultados comparativos.

Mediante la ecuación (3-12) y las condiciones de contorno (3-13), se obtiene:

$$\theta_{ah} = K_{1h} X^{r_1} + K_{2h} X^{r_2} + F_h' X^2 + E_h' X + G_h' \qquad (3\text{-}17)$$

Las constantes de esta expresión se obtienen con las relaciones (3-10), (3-11), (3-15) y (3-15), pero con M=0, B=1.

La distribución de temperatura para el caso no homoentrópico se obtiene igualmente de la ecuación (3-12), pero la determinación de las constantes se efectúa al imponer las condiciones de contorno (3-13a) y (3-16), con lo que se obtiene:

$$\theta_a = K_1 X^{r_1} + K_2 X^{r_2} + F' X^2 + E' X + G'$$

Las constantes F', E' y G' vienen determinadas por las - relaciones (3-11), pero en cambio K1 y K2 se deducen de:

$$K_1 = \frac{V W - r_2 Z}{r_1 V - r_2 T}$$

$$K_2 = \frac{r_1 Z - T W}{r_1 V - r_2 T}$$

con V, Z, T, determinadas por las relaciones (3-15) y W determinada mediante la expresión:

$$W = r_1 K_1 h + r_2 K_2 h + \frac{M B_g (C - \xi_i)^3}{B_g (C - \xi_i)^2 - 2}$$

En las figuras (3-10) pag. 95 y (3-11) pag. 96 se representan las distribuciones de temperaturas obtenidas para $\delta = 0$ y $\delta = 0.2$, con el procedimiento indicado.

El valor del parámetro Bg, ha sido estimado a través de la expresión (3-2), teniendo en cuenta los siguientes valores geométricos y característicos del problema de transmisión de calor que nos ocupa:

$$\left(\frac{\Omega}{c}\right) = 2.5 \quad ; \quad \frac{A_i}{C^2} = 0.75$$

$$\left(\frac{h}{c}\right) = 2.5 \quad ; \quad \xi_i = 0.6$$

$$\lambda = 0.6 \quad ; \quad \alpha_{gM} = 55^{\circ}$$

$$Nu = 350 \quad (\text{Ref. } 5).$$

$$K_g = 2.191 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{cal.}}{\text{cm.}\cdot\text{sg.}\ ^{\circ}\text{C}}$$

$$K_M = 0.0865 \quad \frac{\text{cal.}}{\text{cm.}\cdot\text{sg.}\ ^{\circ}\text{C}}$$

Los valores correspondientes a $\left(\frac{\Omega}{c}\right)$ y $\left(\frac{Ai}{c^2}\right)$, se han deducido de las características geométricas de perfiles de línea media parabólica y distribución de espesor C-4 (fig. 3-9) -- (pg. 94). Estas características se han obtenido mediante medida del area, (con planímetro) y medida del périmetro (con curvímetro) de 7 perfiles dibujados de distinta deflexión geométrica.

El valor del parametro B'g, como se ha mencionado, es - dificil de estimar; no obstante para poner de manifiesto su influencia se ha calculado la distribución de temperaturas con B'g=2.23, correspondiente a Nu=350 y con B'g= 0.

Como puede verse en la Tabla (3-1), su influencia es - inapreciable. Se estima que debe tomarse en la práctica el valor B'g=0, teniendo en cuenta además que el flujo de calor a través del extremo es muy pequeño.

Igualmente se ha obtenido la distribución de temperaturas para una distribución de areas tipo exponencial, mediante calculo numérico; los resultados se presentan en la fig. (3-12) (pag. 97). Por otra parte resultados obtenidos con - varios valores diferentes de ξ_i y λ , indican que estos parámetros ejercen poca influencia sobre la temperatura en la raiz.

Las Tablas (3-2), ponen de manifiesto que la diferencia de temperaturas que se obtiene en la raiz entre el caso homoentrópico y no homoentrópico es el valor de:

TABLA (3-1)

M2m = 0.9; λ = 0.6; Ae/Ai = 0.20; α2m = 55º

$(Ta/T1tm)^{\delta=0}_{B'_\delta=0}$	$(Ta/T1tm)^{\delta=0}_{B'_\delta=2.23}$	$(Ta/T1tm)^{\delta=0.2}_{B'_\delta=0}$	$(Ta/T1tm)^{\delta=0.2}_{B'_\delta=2.2}$
0.8	0.8	0.658	0.658
0.85	0.85	0.722	0.722
0.881	0.881	0.785	0.785
0.902	0.902	0.849	0.849
0.919	0.919	0.912	0.912
0.934	0.934	0.977	0.977
0.949	0.949	1.042	1.042
0.964	0.964	1.102	1.103
0.972	0.973	1.136	1.141

TABLA (3-2)

M2m = 0.85 ; λ = 0.6 ; α2m = 55º , τ_i = 0.6, Ae/Ai = 0.2, Bg = 125

δ	$(Ta/T1tm)_E$	$(Ta/T1tm)_{EX}$
0	0.8	0.8
0.1	0.729	0.728
0.15	0.693	0.692
0.20	0.658	0.656

Nota: Continua en la página siguiente.

$M_{2m} = 0.85$; $\lambda = 0.6$; $\alpha_{2m} = 55^{o}$; $\xi_i = 0.6$; $A_e/A_i = 0.25$; $B_g = 185$

δ	$(T_a/T_{itm})_E$	$(T_a/T_{itm})_{EX}$
0	0.8	0.8
0.1	0.726	0.7258
0.15	0.69	0.688
0.20	0.653	0.652

Nota: El subindice E, significa datos obtenidos con distribución de areas de tipo cónico.

El subindice Ex, significa datos obtenidos con distribución de areas exponencial.

Areas y perimetros en función de la deflexión para perfiles con distribución de espesor básico, tipo C-A $\left(\frac{e\ max}{c} = 10\%\right)$

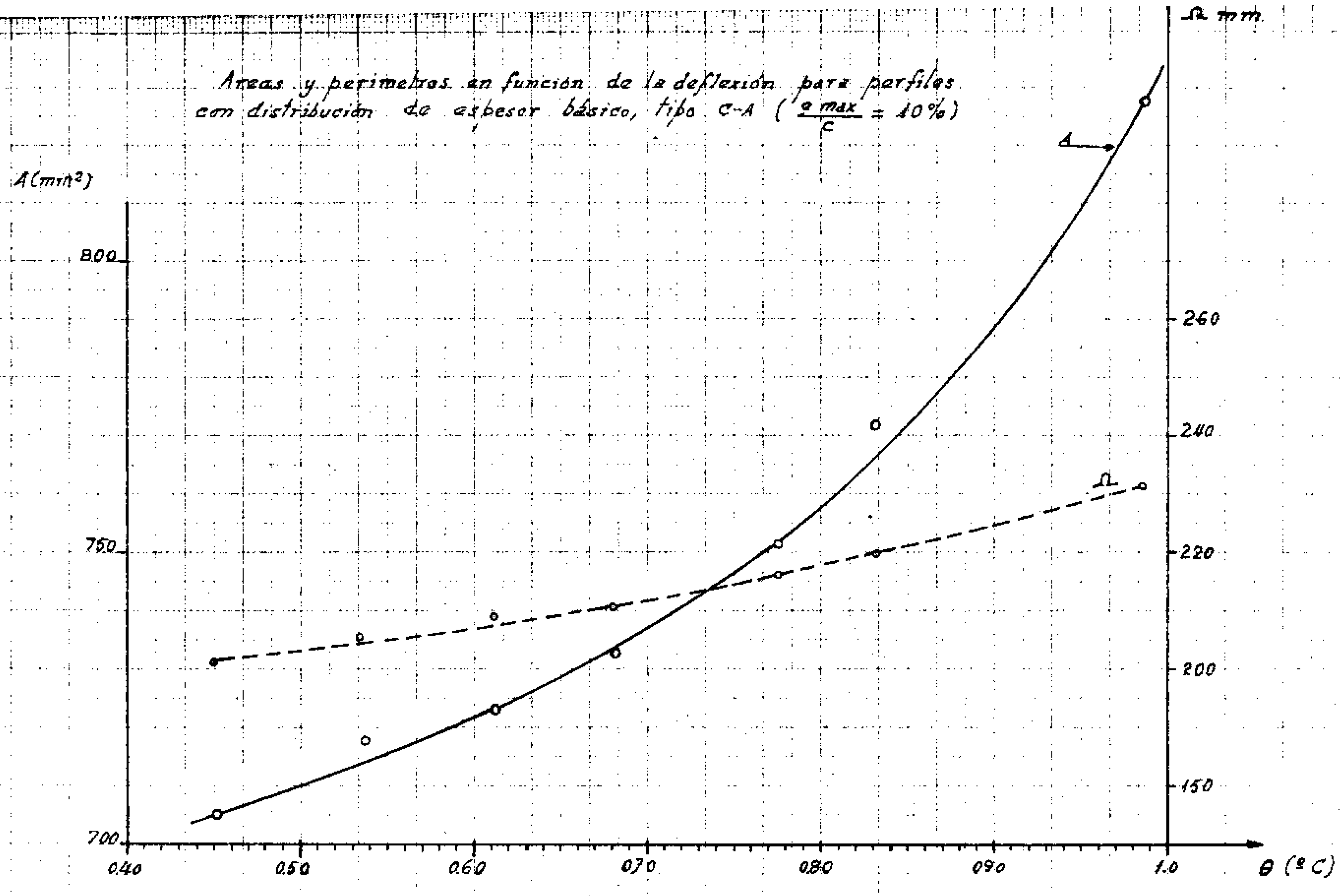


FIG.- 9-3.

Distribución de temperaturas en el Alabe

Ley de áreas cónica

$$\begin{cases} Al/A_i = 0.20 \\ B_g = 185 \\ B'_g = 0 \\ M_{2m} = 0.9 \end{cases}$$

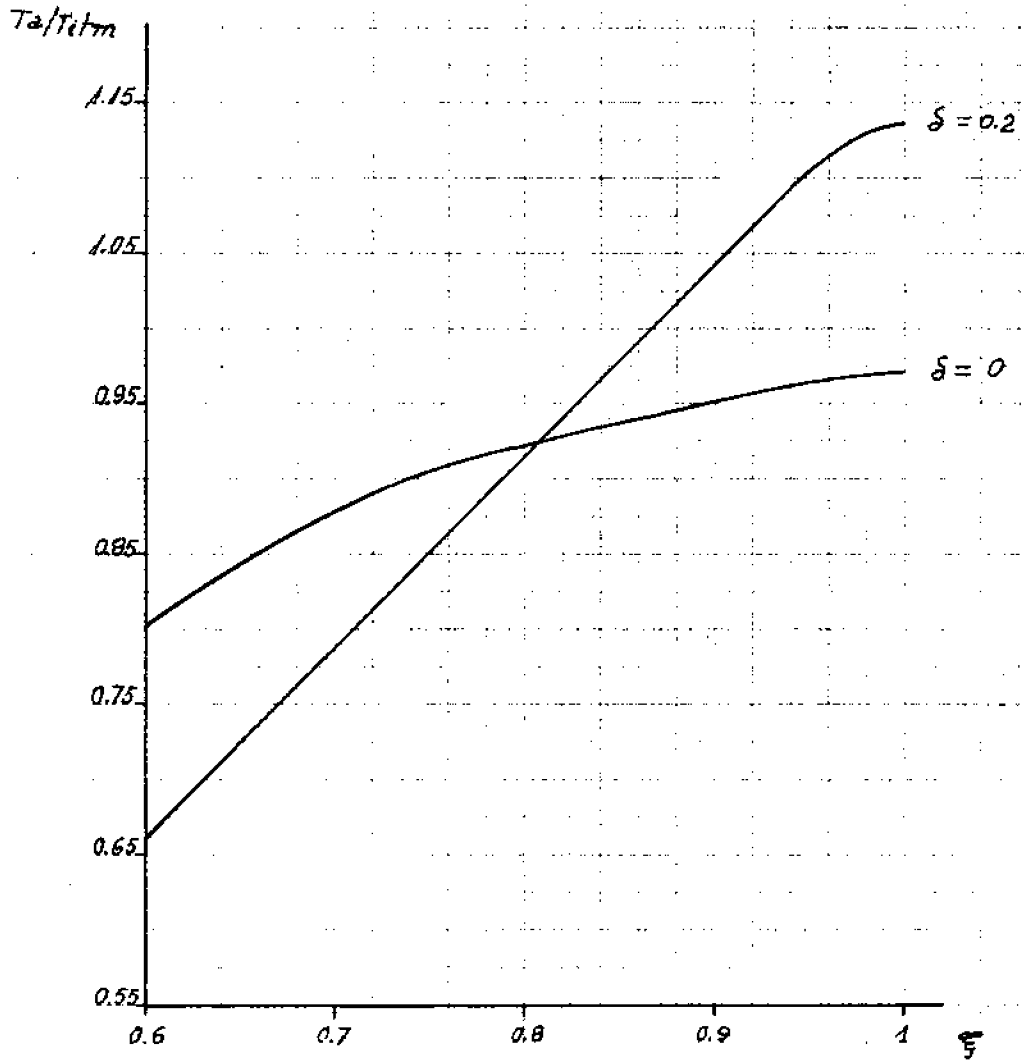


FIG.- 10-3.

Distribución de temperaturas en el Alabe

Ley de áreas cónica $\begin{cases} Al/A_i = 0.25 \\ B_2 = 185 \\ B_3 = 0 \\ M_{2H} = 0.9 \end{cases}$

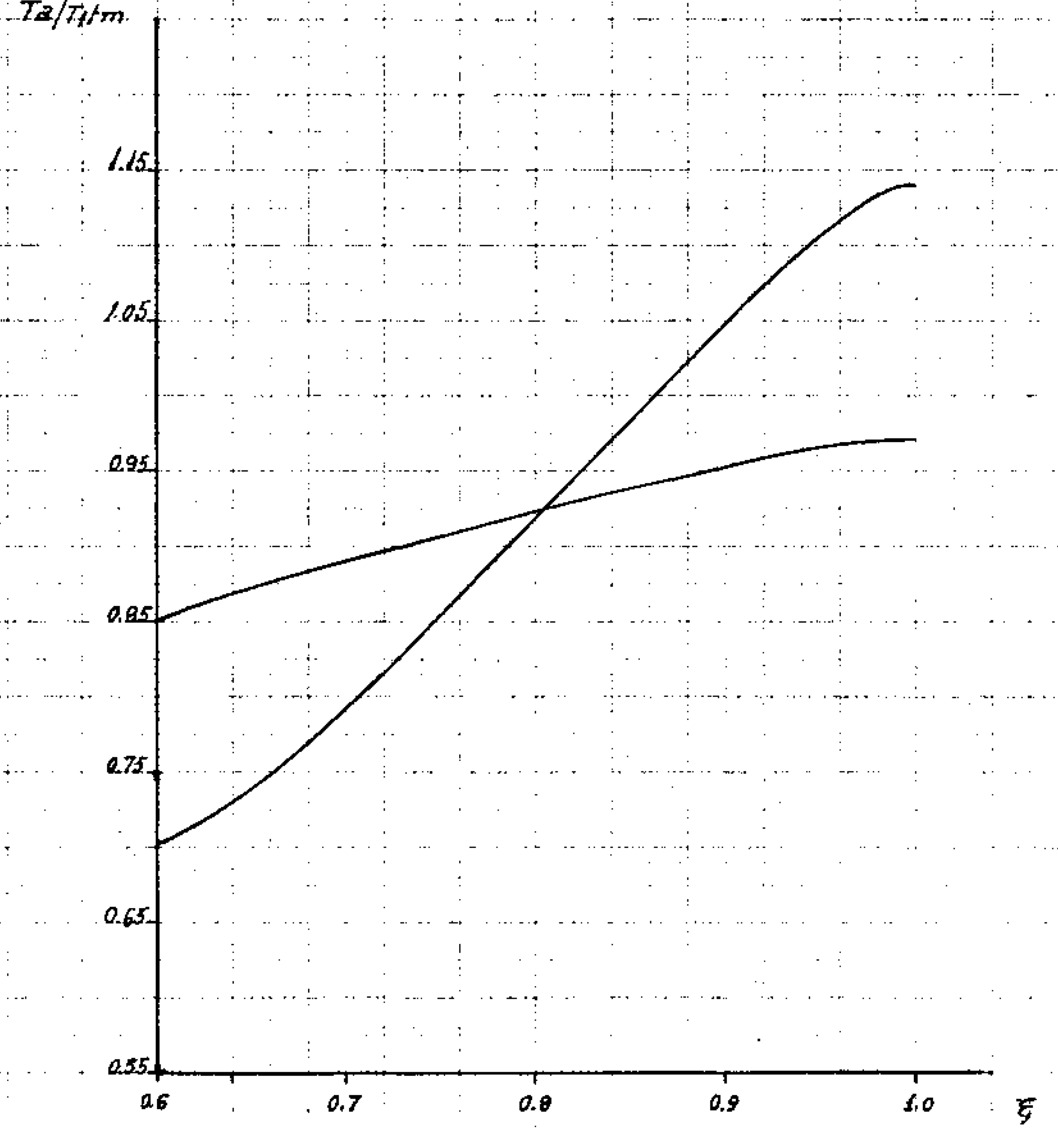


FIG.- 11-II.

Distribución de Temperaturas en el alabe

Ley de Areas Exponencial $\begin{cases} A_l/A_i = 0.20 \\ B_g = 185 \\ B'_g = 0 \\ M_{2m} = 0.9 \end{cases}$

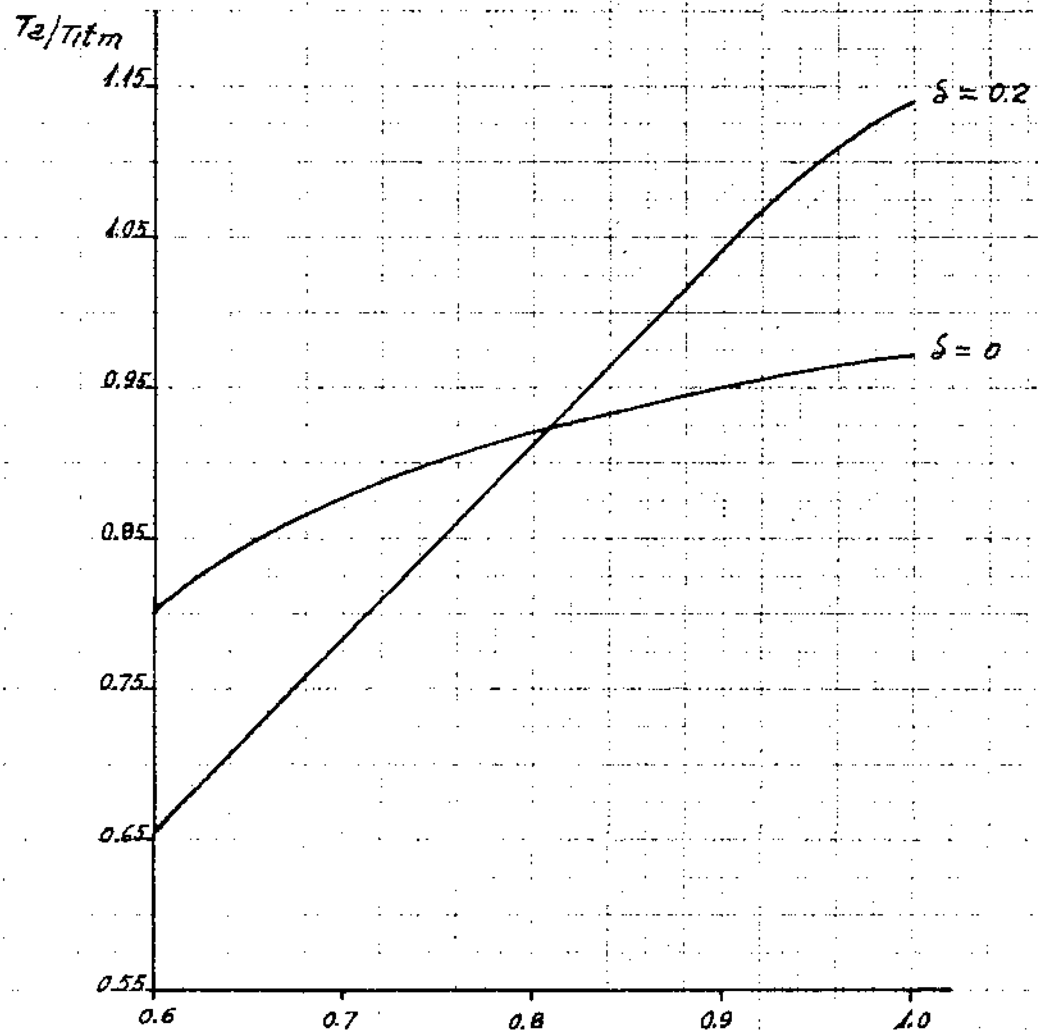


FIG.- 12-3

CAPITULO IV

SOLUCION NUMERICA

4-1 INTRODUCCION

Para obtener una solucion analítica del problema de determinación de las variables fluidas y ángulos de la corriente en un escalón, ha sido necesario simplificar las ecuaciones me-- diante el establecimiento de la hipótesis consistente en suponer que las desviaciones radiales son pequeñas, con lo que hemos visto se desprecian los términos en velocidades radiales y sus derivadas en la ecuación del impulso.

El objeto de este capítulo es obtener la solución del problema reteniendo todos los términos, mediante calculo numérico, a fín de comprobar la validez de subsodicha hipótesis.

La primera parte vá dirigida al planteamiento y desarrollo de las ecuaciones que resuelven el problema indirecto, así como a la descripción del metodo numérico empleado y resultados obtenidos.

En la segunda parte se plantea el problema de actuaciones y se expone igualmente el método de calculo.

Finalmente se efectúa un juicio crítico sobre la validez de la hipótesis de las pequeñas desviaciones radiales y se expone un método de linealización que permite encontrar una solución analítica aproximada para el estator en el caso de torbellino libre y corriente homoentrópica.

4-2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES QUE RESUELVEN EL PROBLEMA EN EL ESTATOR.

Recordemos que la componente radial de la ecuación del impulso, aplicada en la sección 2, proporciona:

$$\left(\frac{\partial V_m}{\partial r}\right)_2^2 + P(r)\, V_{m2}^2 = T(r) \qquad (4\text{-}1)$$

con:

$$P(r) = 2\left[\frac{\cos\varphi}{r_c} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m} - \frac{1}{2T_1t}\left[\frac{\partial T_1t}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_2}\right]_2$$

$$T(r) = 2\left[\frac{V_{\theta 2}^2 - V_1^2}{2T_1t}\left[\frac{\partial T_1t}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_2} - \frac{V_{\theta 2}}{r_2}\left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}\right)_2\right]$$

Por otra parte de la ecuación de continuidad (Veáse apéndice). se obtiene:

$$\left[\frac{\operatorname{sen}\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m}\right]_2 = -\left[\frac{\left(1 + M_\theta^2 + \frac{r}{\cos\varphi\, r_c}\right)\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}}{1 - M_m^2}\right]_2$$

con lo cual P(r), puede escribirse en la forma:

$$P(r) = 2\left[\frac{\cos\varphi}{r_c} + \frac{\left(1 + M_\theta^2 + \frac{r}{\cos\varphi\, r_c}\right)\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}}{1 - M_m^2} - \frac{1}{2T_1t}\left(\frac{\partial T_1t}{\partial r}\right)_1 \frac{dr_1}{dr_2}\right]_2$$

La ecuación de continuidad aplicada a un tubo de corriente, - entre las secciones 1 y 2, Fig. (1-2), proporciona tambien:

$$r_1 \rho_1 V_{z1}\, dr_1 = r_2 \rho_2 V_{z2}\, dr_2 \qquad (4\text{-}2)$$

La ecuación del impulso (4-1) y la ecuación de continuidad -- (4-2) constituyen el sistema básico de nuestra solución, pero antes de plantear la forma definitiva en la que van a ser uti lizadas, es conveniente estudiar por separado el caso de ley torsional torbellino libre y ángulo de la directriz constante.

Por otra parte la ecuación del impulso puede ser considerada como una ecuación en derivadas ordinarias puesto que el - problema que tratamos de resolver es el calculo de las variables fluidas en la sección (2) y por tanto V_1 = cte.

4-2-1 <u>LEY TORSIONAL TORBELLINO LIBRE</u>

Teniendo en cuenta que la ley torsional torbellino libre es: $(r V_{\theta 2})$ = cte, resultará $(d\, r V_\theta / dr)_2 = 0$

Por otra parte, dado que $r_2 = f(r_1)$, puede escribirse:

$$\frac{d}{dr_2} = \frac{d}{dr_1}\,\frac{dr_1}{dr_2}$$

si además tenemos en cuenta que $\left(\frac{dV_m}{dr}\right)_2^2 = 2V_m\left(\frac{dV_m}{dr}\right)_2$, las ecuaciones diferenciales (4-1) y (4-2), en forma adimensional, pueden escribirse como sigue:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\, V_{m2}/V_1}{d\xi_1} &= T(\xi)\frac{1}{(V_{m2}/V_1)} - P(\xi)\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right) \\ \frac{d\xi_2}{d\xi_1} &= \frac{\rho_1}{\rho_{1tM}}\,\frac{1}{\rho_2/\rho_{1tM}}\,\frac{\xi_1}{\xi_2}\,\frac{1}{V_{m2}/V_1\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}3)$$

con:

$$\text{a)}\quad T(\xi_1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right)^2+\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)^2-1\right]\frac{1}{T_{1t}/T_{1tM}}\,\frac{d\,T_{1t}/T_{1tM}}{d\xi_1} \qquad (4\text{-}4)$$

$$\text{b)}\quad P(\xi_1) = \left[\frac{\cos\varphi\, r_{e1}}{r_c}\frac{d\xi_2}{d\xi_1} + \frac{\left(1+M_\theta^2+\frac{\xi_2 r_{e1}}{\cos\varphi\, r_c}\right)\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\xi_2}\frac{d\xi_2}{d\xi_1}+\operatorname{tg}\varphi\frac{d\varphi}{d\xi_1}}{1-M_m^2}\right]_2$$

c) $\frac{V_{\theta 2}}{V_1} = \psi\,\frac{\xi_{2m}}{\xi_2}$ (fijada por la ley torsional)

El sistema de ecuaciones diferenciales (4-3) puede ser - resuelto numéricamente, con lo que se obtendrá $\left(V_{m2}/V_1\right) = \frac{V_{m2}}{V_1}(\xi_1)$ y $\xi_2 = \xi_2(\xi_1)$, previa determinación de las funciones que relacionan φ, r_c y cualquier variable fluida con: ξ_1, ξ_2 y $\frac{V_{2m}}{V_1}$

4-2-2 DIRECTRIZ CON ANGULO DE SALIDA CONSTANTE

Con esta ley torsional, definida mediante la relación $\alpha_2 = cte.$, es más indicado formular la ecuación del impulso en función de la velocidad absoluta V2.

Teniendo en cuenta las relaciones:

$$\frac{V_{\theta 2}}{r_2}\left(\frac{d\,r V_\theta}{dr}\right)_2 = \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} + \frac{1}{2}\frac{dV_{\theta 2}^2}{dr_2}$$

$$\frac{dV_{m2}^2}{dr_2} + \frac{dV_{\theta 2}^2}{dr_2} = \frac{dV_2^2}{dr_2}$$

y procediendo como en el caso de ley torsional torbellino libre, de las ecuaciones (4-1) y (4-2) se obtiene el siguiente sistema:

$$\frac{d\,V_2/V_1}{d\xi_1} = T(\xi)\frac{1}{(V_2/V_1)} - P(\xi)\left(\frac{V_{m2}/V_1}{V_2/V_1}\right)^2\frac{V_2}{V_1} - \frac{1}{\xi_2}\left(\frac{V_{\theta 2}/V_1}{V_2/V_1}\right)^2\frac{V_2}{V_1}\frac{d\xi_2}{d\xi_1}$$

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\rho_1}{\rho_{1tm}}\,\frac{1}{\rho_2/\rho_{1tm}}\,\frac{\xi_1}{\xi_2}\,\frac{1}{V_{m2}/V_1\cos\varphi} \qquad (4-5)$$

con

a) $$T(\xi) = \left[\frac{(V_2/V_1)^2 - 1}{2\,T_1t/T_{1tm}}\,\frac{dT_{1tm}}{d\xi_1}\right] \qquad (4-6)$$

b) $$\frac{V_{m2}/V_1}{V_2/V_1} = \cos\beta \;,\; \frac{V_{\theta 2}/V_1}{V_2/V_1} = \sin\beta \;,\; \beta = \operatorname{arctg}(\psi\cos\varphi)$$

habiendo deducido las relaciones (4-6b) de la ley torsional mientras que $P(\xi)$, viene dada por la relación (4-4b).

El sistema de ecuaciones diferenciales proporciona $(V_2/V_1) = \frac{V_2}{V_1}(\xi_1)$, $\xi_2(\xi_1)$ previa determinación de las mismas relaciones funcionales indicadas en el caso de torbellino libre y con ello el resto de las variables fluidas.

4-2-3 ECUACION DE LA LINEA DE CORRIENTE Y RELACIONES FUNCIONALES RESULTANTES.

Supondremos, de acuerdo con varios autores (5) (7) (17) y (16) que las lineas de corriente pueden ser aproximadas mediante un polinomio de tercer grado. La ecuación de la linea de corriente será por tanto:

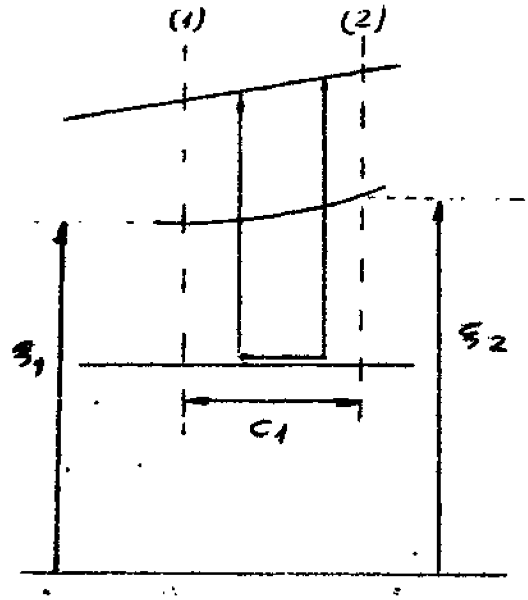


Fig. (4-0)

Las constantes a,b,d y e, se determinan imponiendo las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \xi_1 \\ \left(\dfrac{d\xi}{d z/c_1}\right) = 0 \\ \left(\dfrac{d^2\xi}{d(z/c_1)^2}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ para } \frac{z}{c_1} = 0$$

$$\xi = \xi_2 \ , \text{ para } \frac{z}{c_1} = 1$$

(

De forma que resulta:

$$\xi = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)\left(\frac{z}{c}\right)^3$$

No obstante, para tener en cuenta el efecto de las paredes, que son rectas, tomaremos para las lineas de corriente la ecuación modificada:

$$\xi = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)\left(\frac{z}{c}\right)^n \qquad (4\text{-}7)$$

con:

$$n = 3 - 2e^{K(1-\xi_i)(\xi_i - 1)}$$

Para los calculos hemos utilizado K = 250, de forma que cuando ξ_i = 0.7, n toma los valores indicados en la (Tabla 4-1).

TABLA (4-1)

ξ	n
0.7	1
0.71	2
0.72	2.5
0.73	2.65
0.74	2.8
0.76	≃ 3
0.85	≃ 3
0.94	≃ 3
0.96	2.8
0.97	2.65
0.98	2.5
0.99	2
1	1

Con la ecuación de la linea de corriente puede obtenerse φ_2 y $(r_c)_2$, de la siguiente manera:

$$tg\,\varphi_2 = \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=c_1} = \frac{r_{e1}}{c_1}\left(\frac{d\xi}{d(z/c_1)}\right)_{z/c_1 = 1}$$

es decir:

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left[s_0 \left(\frac{d\xi}{d z/c_1}\right)_{z/c_1=1}\right] = \operatorname{arctg}\left(n s_0(\xi_2-\xi_1)\right) \qquad (4-8)$$

habiendo hecho:

$$s_0 = \frac{r_{e1}}{c_1} = \left(\frac{h}{c_1}\right) \frac{1}{1-\xi_i}$$

Por otra parte:

$$\left(\frac{1}{r_c}\right)_2 = -\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)_2 = \left(\frac{d\varphi}{d z/c_1}\right)_{z/c_1=1} \cos\varphi/c_1 = -\cos^3\varphi_2 \left(\frac{d^2\xi}{d z/c_1}\right)_{z/c_1=1} s_0/c_1$$

Por tanto se tiene:

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r_c}\right)_2 r_{e1} = -\cos^4\varphi \left(\frac{d^2\xi}{d(z/c_1)^2}\right)_{z/c_1=1} s_0^2 = -s_0^2 \cos^4\varphi . n(n-1)(\xi_2-\xi_1) \qquad (4-9)$$

$$\left(\frac{r_{e1}}{\cos\varphi . r_c}\right)_2 = -\cos^2\varphi \left(\frac{d^2\xi}{d(z/c_1)^2}\right)_{z/c_1=1} s_0^2 = -s_0^2 n(n-1) \cos^2\varphi . (\xi_2-\xi_1) \qquad (4-10)$$

y además

$$\frac{d\varphi_2}{d\xi_1} = s_0 \frac{d\left(\operatorname{arctg}\left[\frac{d\xi}{d z/c_1}\right]_{z/c_1=1}\right)}{d\xi_1} = n s_0^2 \left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1} - 1\right)\cos^2\varphi \qquad (4-11)$$

4-2-4 <u>RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES FLUIDAS</u>

Teniendo en cuenta las relaciones (A-7) y que la ley torsional elegida fija la componente tangencial de velocidad ó -- una relación entre dos componentes es fácil obtener las relaciones de cualquier componente de velocidad en función de una de éllas.

Por otra parte cuando se especifican las condiciones en la sección de entrada y por tanto M1m, se puede escribir:

$$M_2^2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \frac{V_1^2}{\gamma R T_{1tm}} \frac{T_{1M}}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \frac{M_{1M}}{B + M\xi_1} \frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2} M_{1M}^2\right)} \qquad (4-12)$$

es decir:

$$M_2^2 = \frac{(V_2/V_1)^2 M_{1M}^2}{(\beta + M\xi_1)(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{1M}^2) - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 M_{1M}^2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 f(M_{1M}, \gamma)$$

por lo que tambien resulta:

$$M_{e2}^2 = \left(\frac{V_{e2}}{V_1}\right)^2 f'(M_{1M}, \gamma)$$

$$M_{m2}^2 = \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)^2 f'(M_{1M}, \gamma)$$

También se tiene:

$$\left(\frac{M_1}{M_{1M}}\right)^2 = \frac{T_{1M}}{T_1} = \frac{T_{1tM}}{T_{1t}} \frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{1M}^2\right)} \simeq \frac{T_{1tM}}{T_{1t}}$$

De lo que resulta:

$$M_1^2 = \frac{M_{1M}^2}{\beta + M\xi_1}$$

y finalmente:

$$\frac{p_1/p_{1tM}}{p_2/p_{1tM}} = \frac{p_1/p_{1t}}{p_2/p_{1t}} = \left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

viceversa, si se especifican condiciones en la sección de - salida, la ecuación (4-12) puede ser utilizada para determinar M_{1M} y de nuevo se pueden aplicar las mismas relaciones que hemos obtenido.

4-3 METODO DE CALCULO Y DISCUSION DE RESULTADOS

Mediante las relaciones que proporcionan las lineas de corriente y las relaciones existentes entre las variables fluidas, el sistema (4-3), por ejemplo (el método es igualmente aplicable al sistema (4-5)), queda implícitamente reducido a:

$$\left(\frac{d\, V_{m2}/V_1}{d\xi_1}\right) = f_1\left(\frac{V_{m2}}{V_1}, \xi_2, \xi_1\right)$$

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = f_2\left(\frac{V_{m2}}{V_1}, \xi_2, \xi_1\right) \qquad (4\text{-}13)$$

cuya forma sugiere la aplicación del método de integración numérica de Kutta-Runge. No obstante el problema, en apariencia sencillo, debe ser considerado bajo dos aspectos:

1º Problema con condiciones de contorno, que resulta cuando se especifica la ley torsional y la forma del canal, es decir:

$$\xi_2 = \xi_{2e} \quad , \text{para} \quad \xi_1 = 1$$

$$\xi_2 = \xi_{2i} \quad , \text{para} \quad \xi_1 = \xi_{1i}$$

$$\frac{V_{\theta 2}}{V_1} = \frac{\psi}{\xi_2}\,\xi_{2m}$$

2º Problema con condiciones iniciales, que resulta cuando se especifica la ley torsional y condiciones de ambas funciones para un valor de la variable, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_2 = \xi_{20} \\ \left(\dfrac{V_{m2}}{V_1}\right) = \left(\dfrac{V_{m2}}{V_1}\right)_0 \end{array}\right\} \text{para} \quad \xi_1 = \xi_{10}$$

$$\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right) = \frac{\psi}{\xi_2}\,\xi_{2m}$$

siendo lo más frecuente especificar condiciones sobre la linea media, es decir para $\xi_1 = \xi_{1m}$

Cuando el problema es de condiciones iniciales, el método de integración numérica indicado, proporciona la solución directamente; sin embargo cuando el problema es de condiciones de contorno debe ser resuelto por algún procedimiento de iteración, si se emplea el método de Kutta-Runge, yá que este método solo es aplicable a problemas de condiciones iniciales. El procedimiento utilizado es como sigue: Se transforma el problema de condiciones de contorno en un problema de condiciones iniciales, es decir:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_{2i} \\ \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right) &= \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_i \end{aligned}\right\} \text{para } \xi_1 = \xi_{1i}$$

si se considera $\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_i$, como parámetro, se obtiene: $(\xi_2)_{\xi_1=1} = \xi_2\left[\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_i\right]$, habiendo resuelto el problema cuando se determina el valor de $(V_{m2}/V_1)_i$, para el cual $(\xi_2)_{\xi_1=1} = \xi_{2e}$ es decir, cuando se determina la raiz de la función $\xi_2\left[\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_i\right] - \xi_{2e} = 0$. El método de iteración de Newton-Raphson, que hemos utilizado para este caso, proporciona buenos resultados.

En las figuras (4-1) a (4-3) (pag. 109), se presentan los resultados obtenidos para un canal recto (torbellino libre) y valores de los parámetros allí indicados; siendo de notar que la variación de la velocidad axial entre el extremo y la raiz es de un 20% (caso $\delta=0$, M1M=0.35), cuando la solución obtenida en la hipótesis de pequeñas desviaciones radiales es $\frac{V_{z2}}{V_1}$=cte.

En las figuras (4-4) a (4-8), se presentan las soluciones obtenidas para un canal imétrico, con una divergencia de 8º y se comparan los ángulos y velocidades de la corriente para --

varios valores de los parámetros, pero con ley torsional torbellino libre, deduciéndose las mismas conclusiones que en el caso anterior y observándose al mismo tiempo que el efecto de la distribución radial de temperaturas, no puede ser ignorado.

Para algunos canales divergentes, con radio interior constante, se observó que fallaba el método de cálculo cuando la velocidad inicial se fijaba en 0.85. Dado que el problema de calculo estaba automatizado, es decir que sólo escribía la solución definitiva, sin proporcionar datos de pasos intermedios del proceso de iteración; se cambió el programa para que escribiera la solución para varios valores de la velocidad inicial como parámetro. Los resultados obtenidos explican la causa de tal anomalía. En la fig.(4-9) (pag. 116), se pone de manifiesto que la divergencia del canal aumenta, cuando se aumenta el valor de la velocidad inicial; comportamiento que es explicable a la vista del perfil de velocidades axiales, pero no intuible a "priori" cuando se piensa en un comportamiento parecido al del caso obtenido, considerándo que las desviaciones radiales son pequeñas; razón por la que habíamos estimado $\left(V_{zm}/V_1\right)_i = 0.85$ como valor aproximado para el comienzo de la iteración.

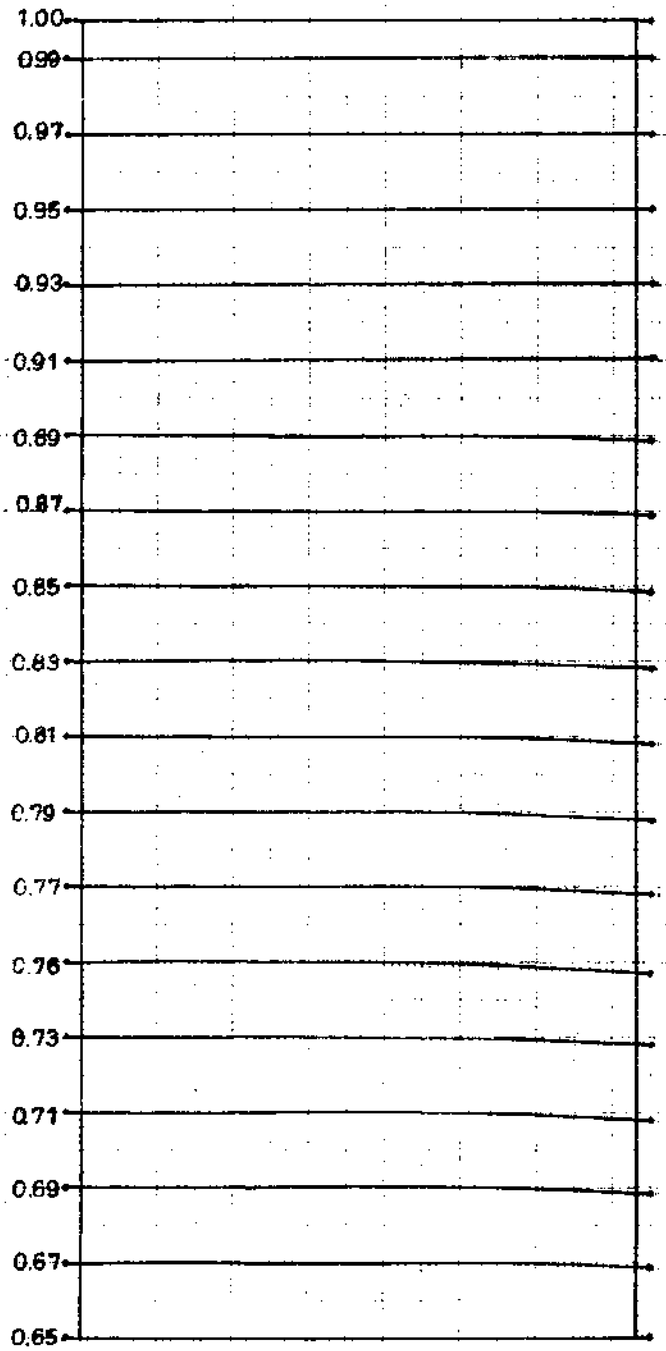
Por otra parte en las figuras (4-10) a (4-12), se observa que en el intervalo $\left(V_{mz}/V_1\right)_i = \left[0.84-0.95\right]$ el problema es muy sensible a las condiciones iniciales y no se logra encontrar solución porque la velocidad meridional aumenta progresivamente, apareciendo una singularidad en las ecuaciones cuando

Esto obliga a comprobar la estabilidad del sistema para asegurar que la solución no vá acompañada de soluciones parásitas, lo que se ha hecho en la figura (4-13) para poder dar como válidos los resultados obtenidos en el caso de canal recto.

El problema más frecuente de diseño en la práctica, consiste en especificar condiciones iniciales en la línea media. En las fig.(4-14) a (4-19), se presentan varias soluciones en un amplio margen de condiciones iniciales para el caso de torbellino libre; puede observarse que el comportamiento del sistema es estable y que las soluciones obtenidas se apartan del caso V_{2}/V_{1} = cte, salvo para valores de la velocidad inicial muy determinados.

Finalmente en las figuras (4-20) a (4-22), se presentan soluciones para el caso de álabes de la directriz sin torsión y se comprueba que en este caso el efecto de las desviaciones radiales no es tan acusado.

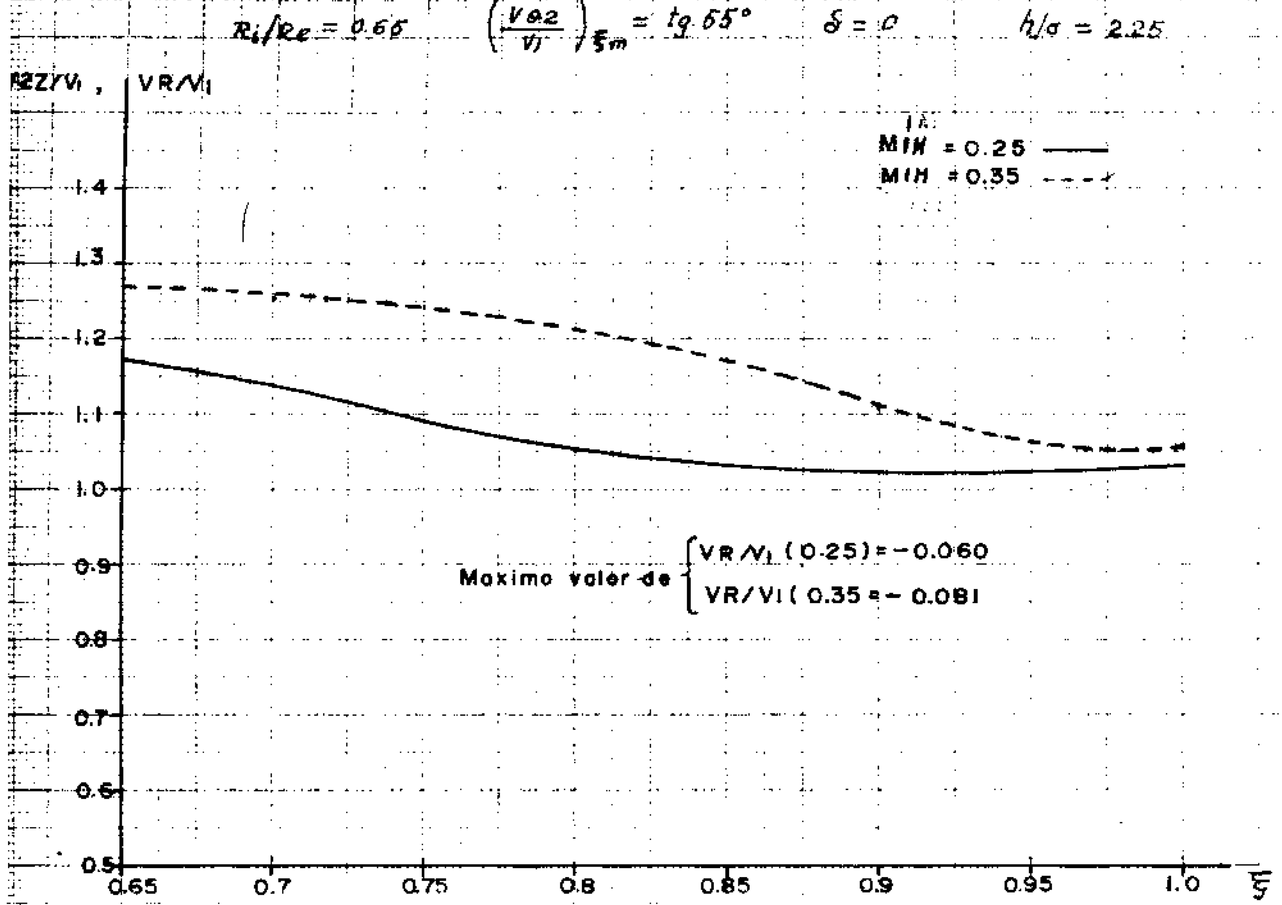
$(V\theta 2/V_1)_{\xi m} = tg\ 55^{\circ}$ $M_1H = 0.25$ $\delta = 0$ $Re/R_i = 0.65$ $h/c = 2.25$



LINEAS DE CORRIENTE. CANAL RECTO
ESTATOR TORBELLINO LIBRE

FIG.- 1-4

(Condiciones iniciales en ξ_i)



ESTATOR. TORBELLINO LIBRE. CANAL RECTO

FIG.– 2-4.

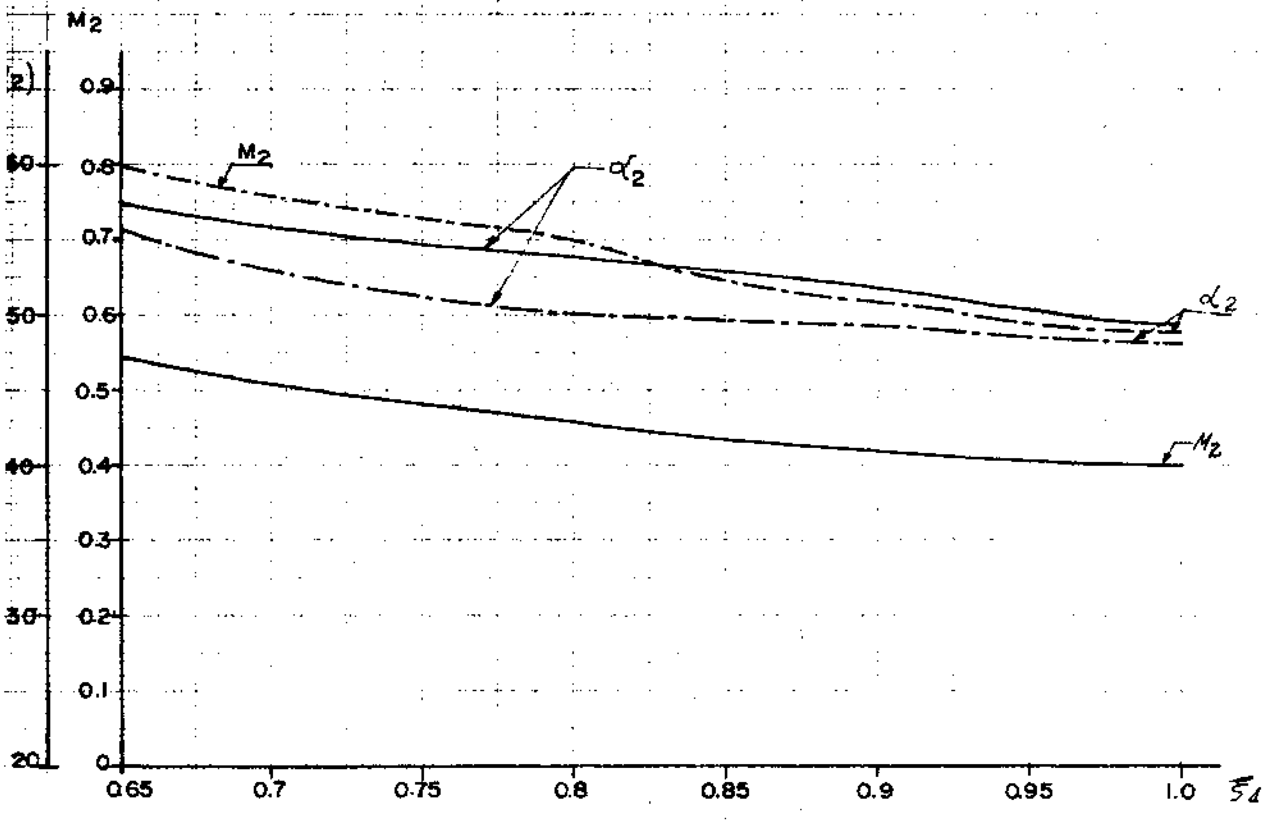
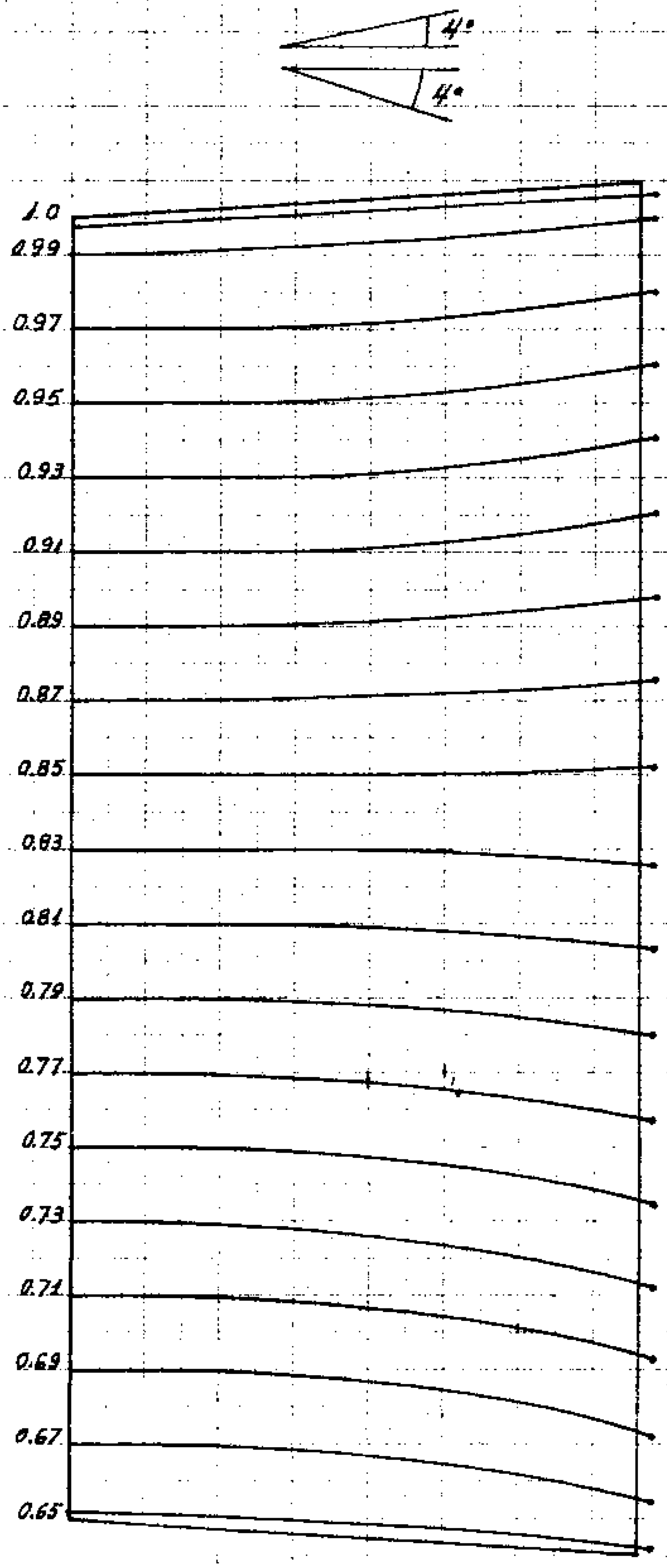


FIG.– 3-4.

(Condiciones iniciales en ξ_1)

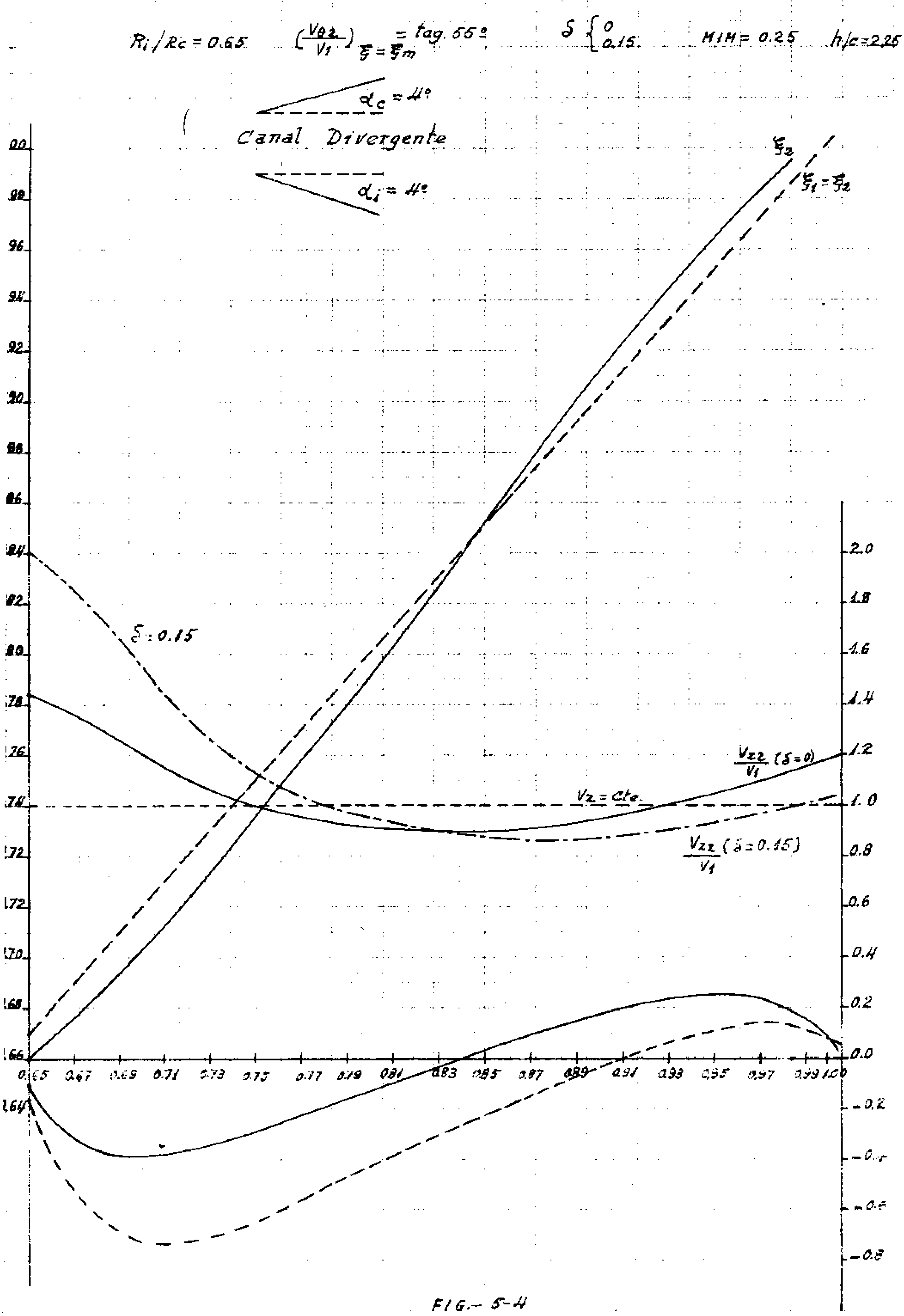
Desviaciones Canal Divergente

$\xi_i/l = 0.65$, $\delta = 0$, $H_i/H = 0.25$ $\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right)_{\xi=\xi_m} = tg\ 55^\circ$



$h/c = 2.25$

FIG.- 4-4.



$R_i/R_c = 0.65$ $\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right)_{\xi=\xi_m} = tag. 65°$ $\delta \begin{cases} 0 \\ 0.15 \end{cases}$ $M/H = 0.25$ $h/c = 2.25$
$\alpha_c = 4°$
Canal Divergente
$\alpha_i = 4°$
ξ_2
$\xi_1 = \xi_2$
$\delta : 0.15$
$\frac{V_{z2}}{V_1}$ $(\delta = 0)$
$V_2 = cte.$
$\frac{V_{z2}}{V_1}$ $(\delta = 0.15)$

FIG.- 5-4

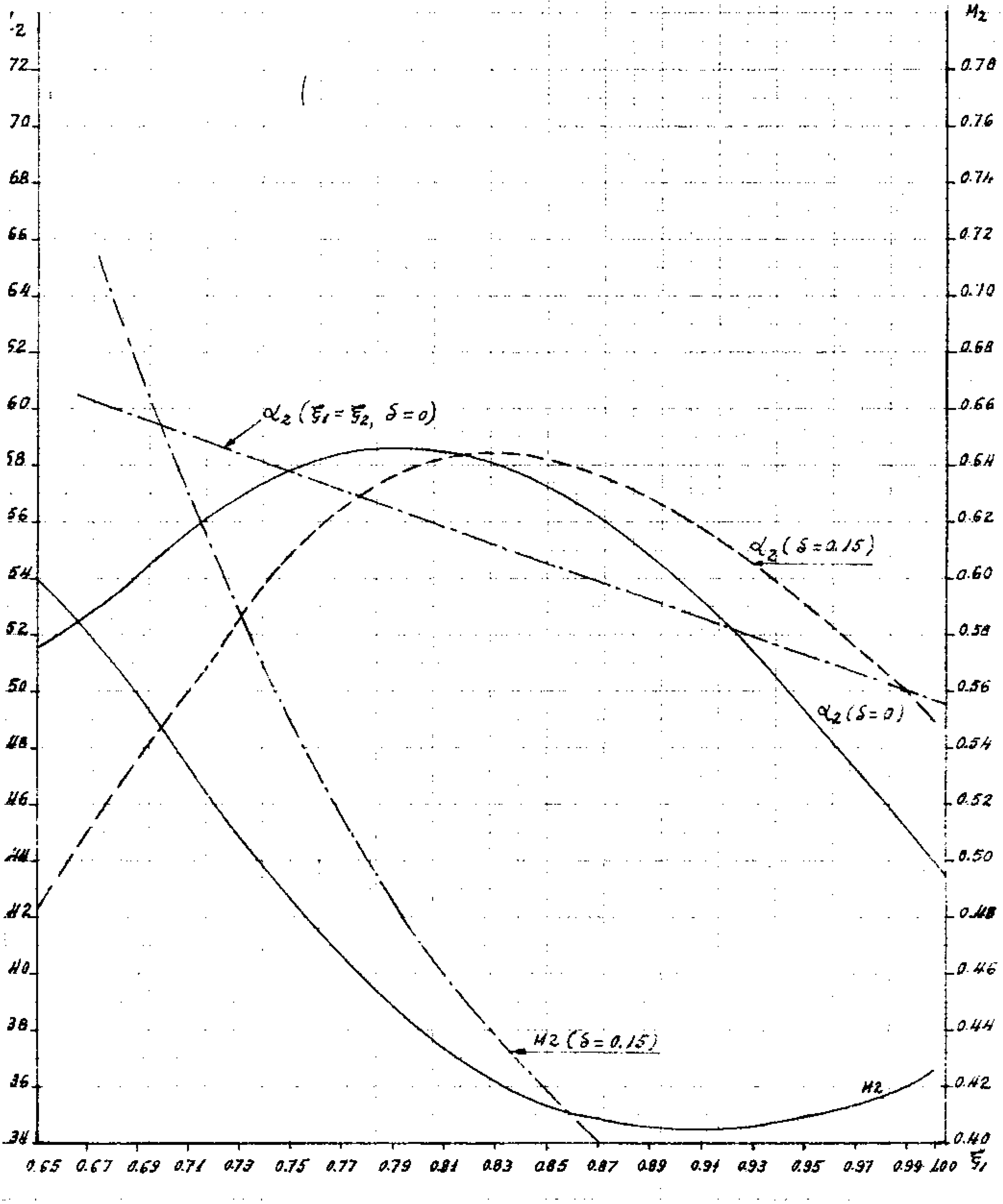


FIG.- 6-4.

Condiciones iniciales en ξ_{i_1}. Canal Divergente

$R_i/R_e = 0.65 \quad \left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right)_{\xi=\xi_m} = tag.\,55 \quad \delta \begin{cases} 0.15 \\ 0.0 \end{cases} \quad M_{1H} = 0.35 \quad h/c = 2.25$

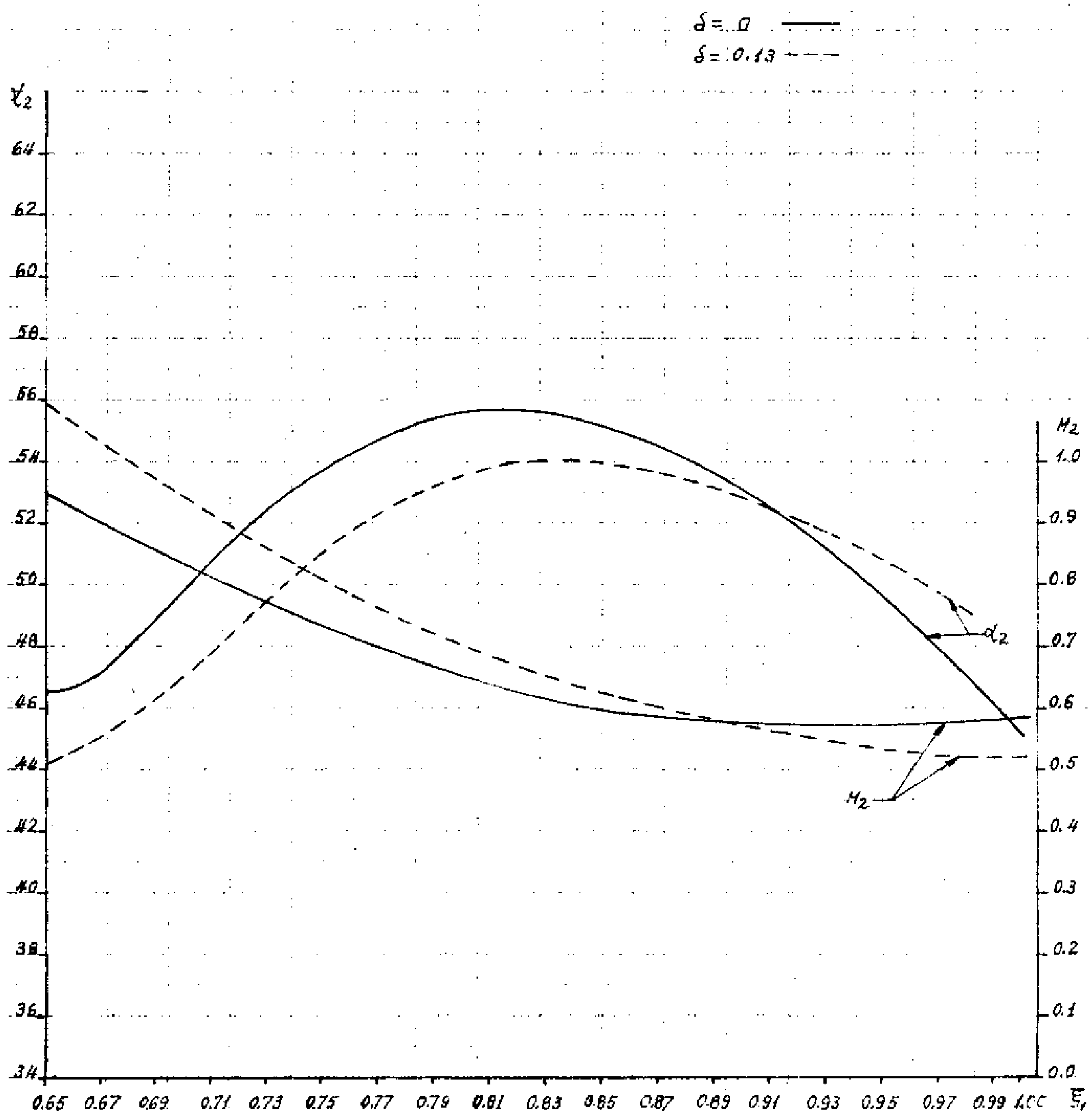
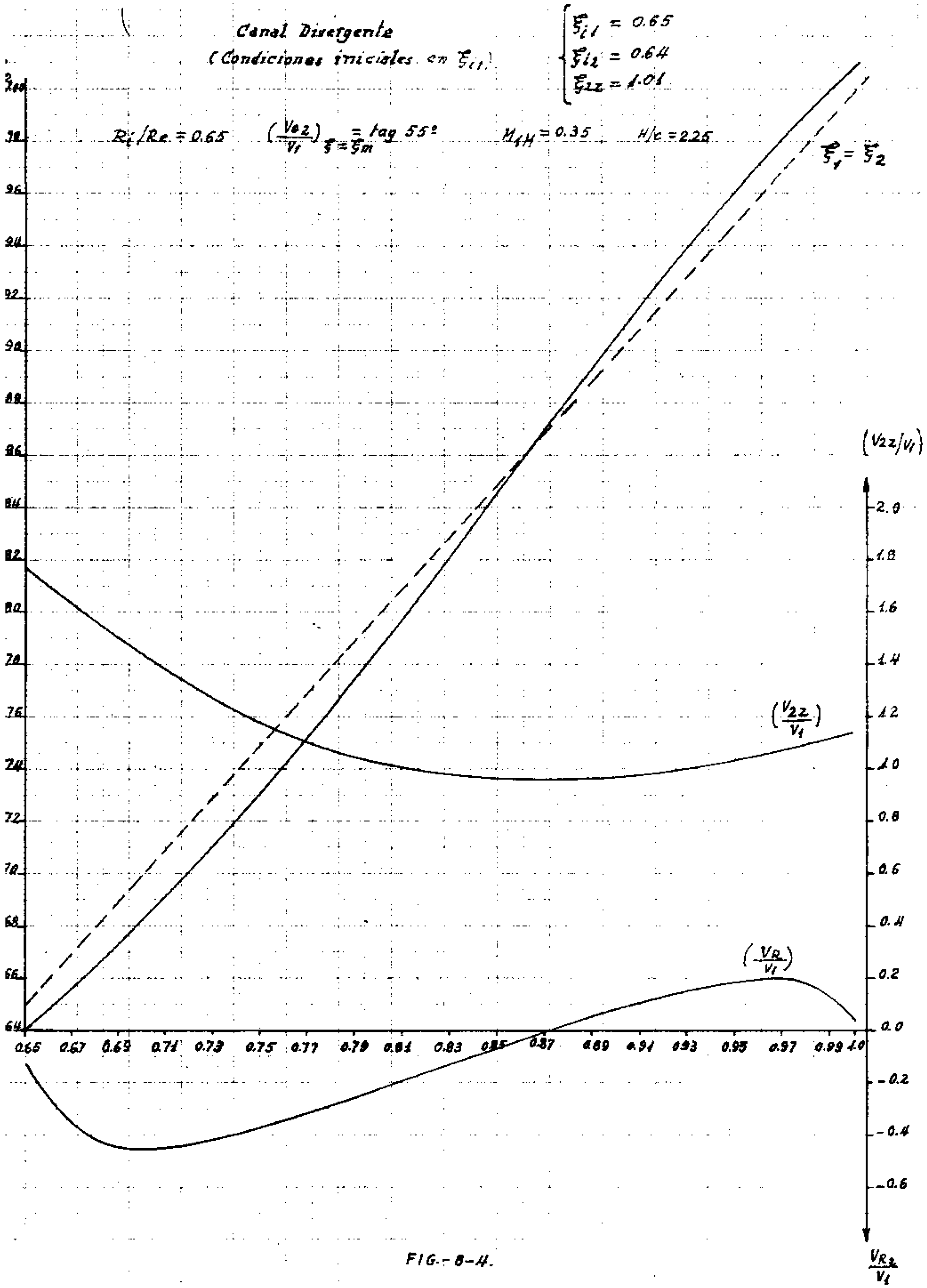


FIG.-7-4.



Canal Divergente
(Condiciones iniciales en ξ_{i1})
$\xi_{i1} = 0.65$
$\xi_{i2} = 0.64$
$\xi_{2z} = 1.01$
$R_i/R_e = 0.65$
$\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right)_{\xi=\xi_m} = \tan 55^\circ$
$H_1/H = 0.35$
$H/c = 2.25$
$\xi_1 = \xi_2$
(V_{2z}/V_1)
$\left(\frac{V_{2z}}{V_1}\right)$
$\left(\frac{V_R}{V_1}\right)$
$\frac{V_{R2}}{V_1}$

FIG.-8-4.

Perfiles de velocidades y desviaciones.

$\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right)_{\xi m} = \tan g. 67°$

Valores de parámetros $\begin{cases} \xi_{i1} = 0.65 \\ \xi_{i2} = 0.65 \\ M_{1M} = 0.25 \\ \delta = 0.0 \\ h/c = 2.25 \end{cases}$

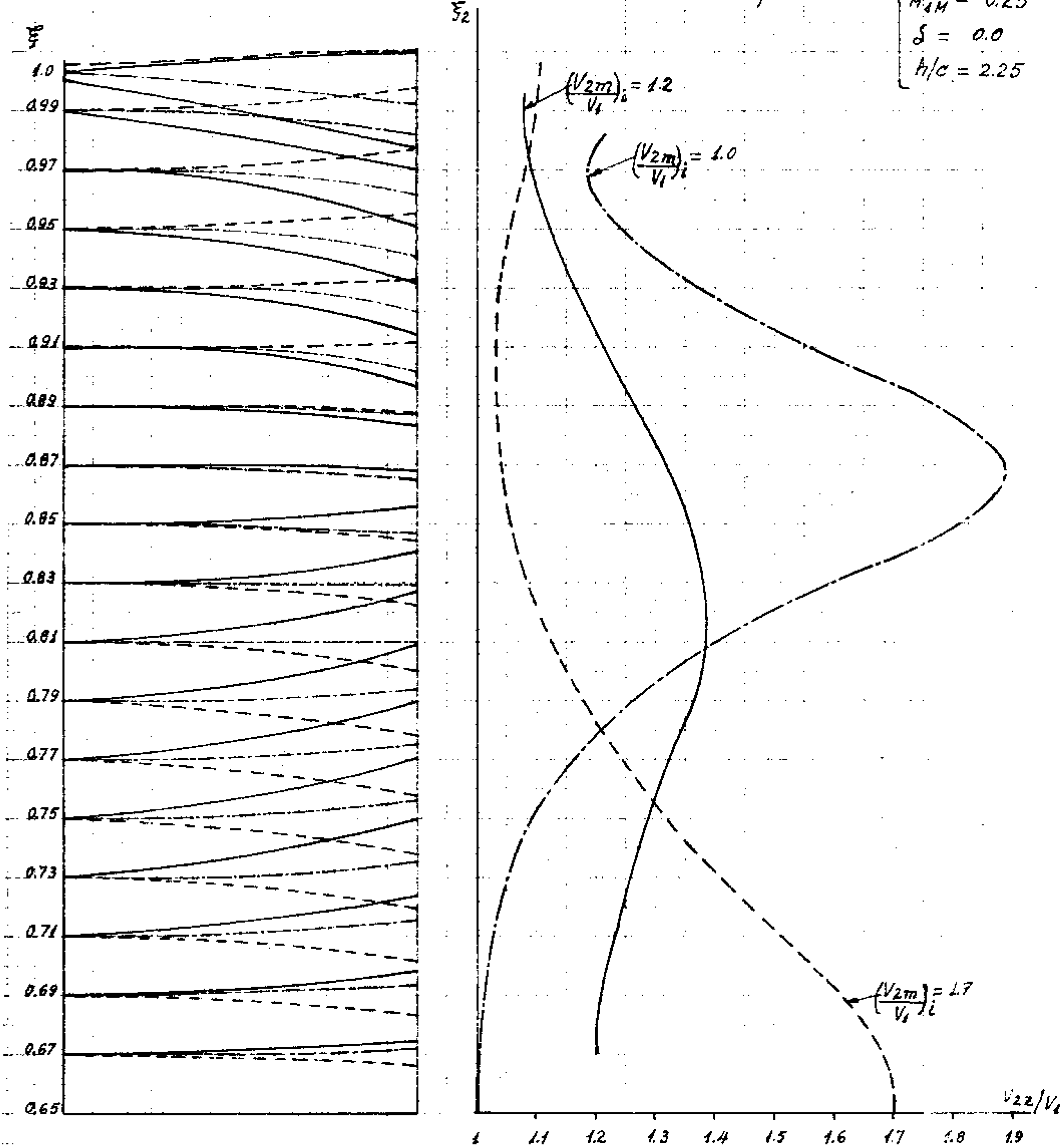


FIG.- 9-4.

Perfil de velocidades y desviaciones

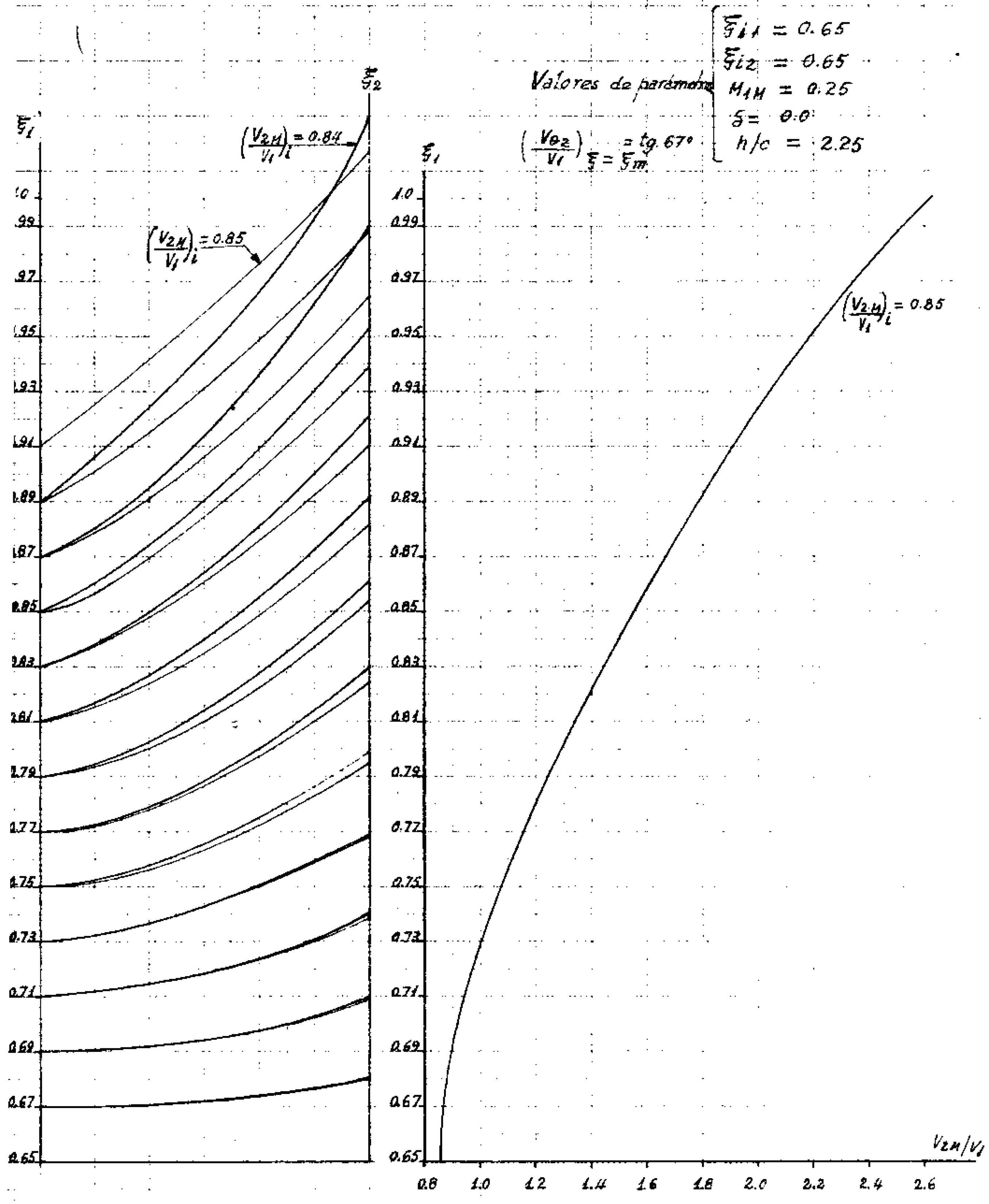
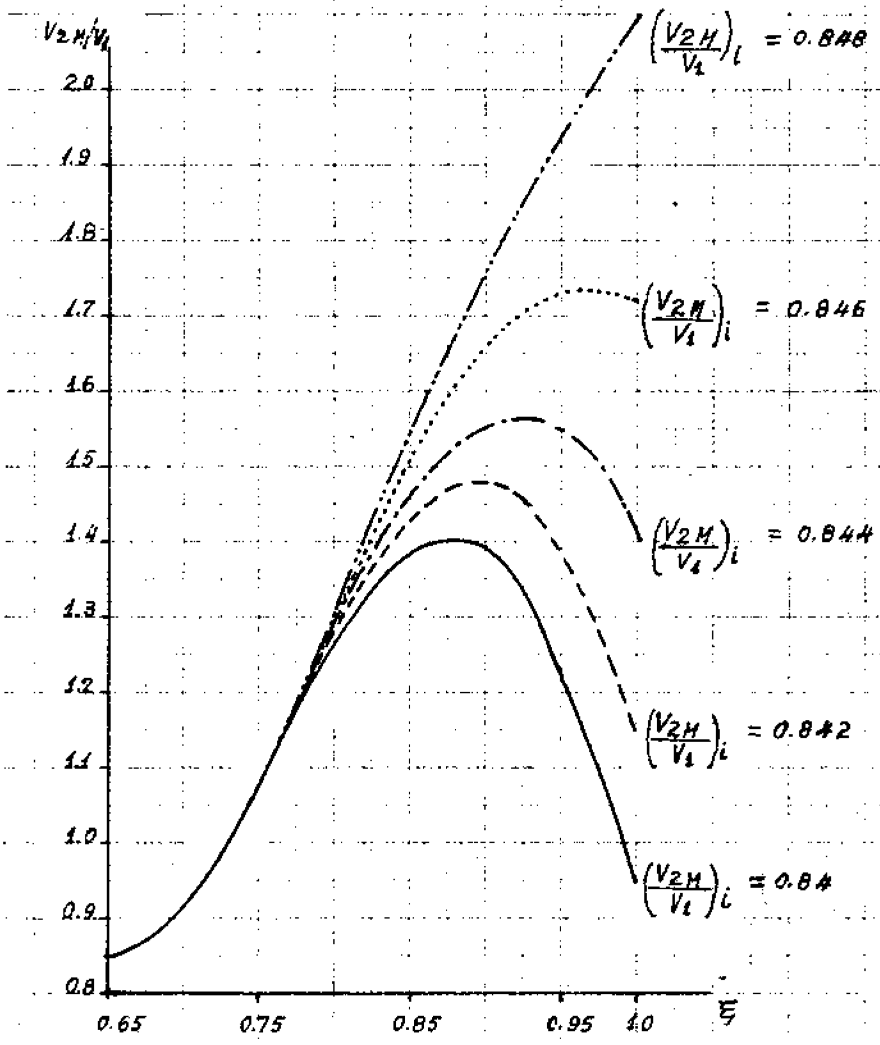


FIG.-10-4.

Torbellino Libre. Estator

Estudios de Estabilidad



Condiciones iniciales en ξ_{i1}.

FIG.- 12-4

Variación de la velocidad meridional en función de V_{2Mi}

Valores de los parámetros $\begin{cases} \xi_{i1} = 0.65 \\ \xi_{i2} = 0.65 \\ M_{1m} = 0.25 \\ \delta = 0.0 \\ h/c = 2.25 \end{cases}$ $\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right)_{\xi = \xi_m} = tg\, 67^o$

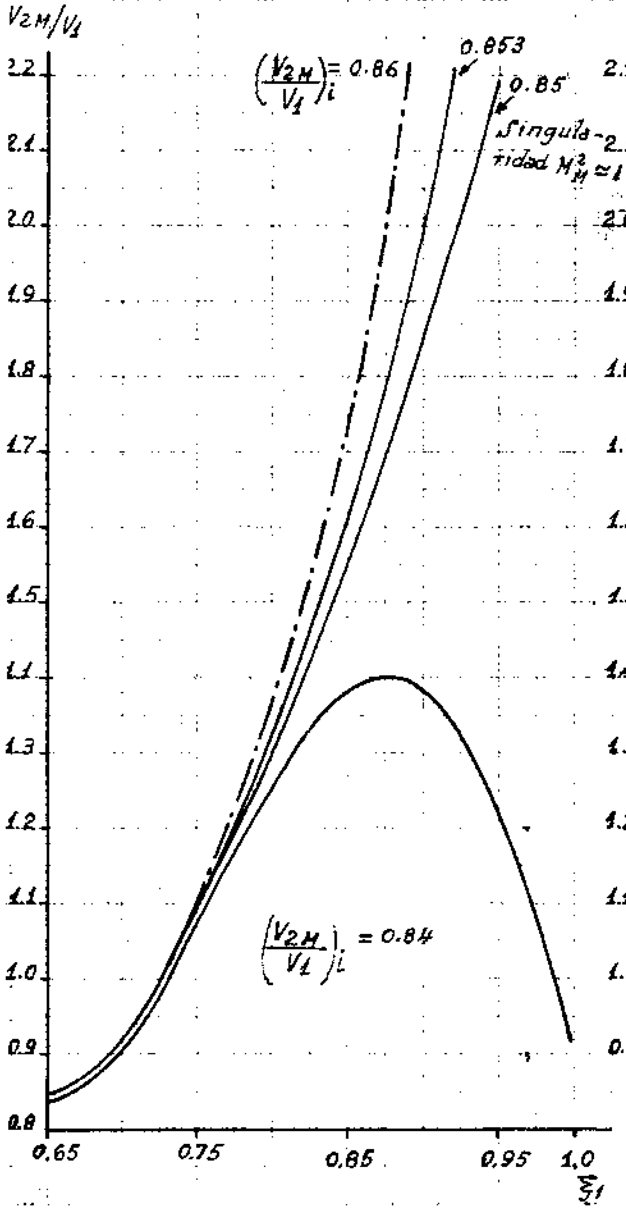


FIG.- 11-4.

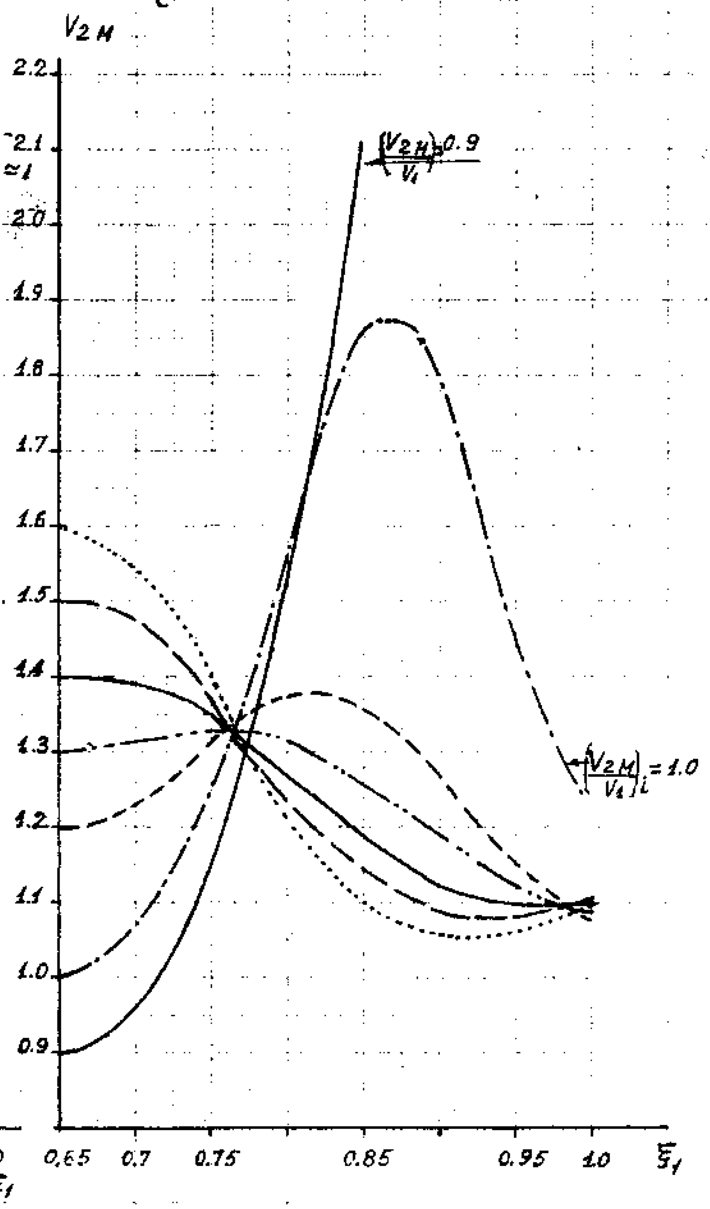


FIG.- 13-4.

Estudio de Estabilidad
Torbellino libre (Estator)

$\xi_{it} = 0.65$, $\delta = 0$, $h/c = 2.25$, $M_{1M} = 0.25$ $(V_{e2}/V_1)_{\xi=\xi_m} = tg\ 65^{\circ}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{V_{2a}}{V_{1z\,en}} = cte. \\ \xi_{1m} = \xi_{2m} \end{array} \right.$$

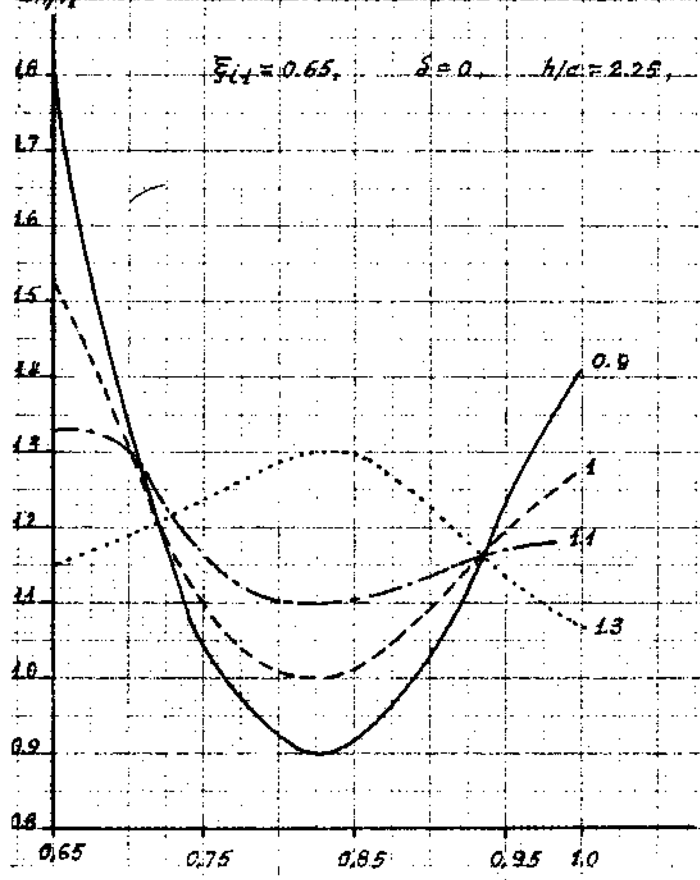


FIG.-14-4.

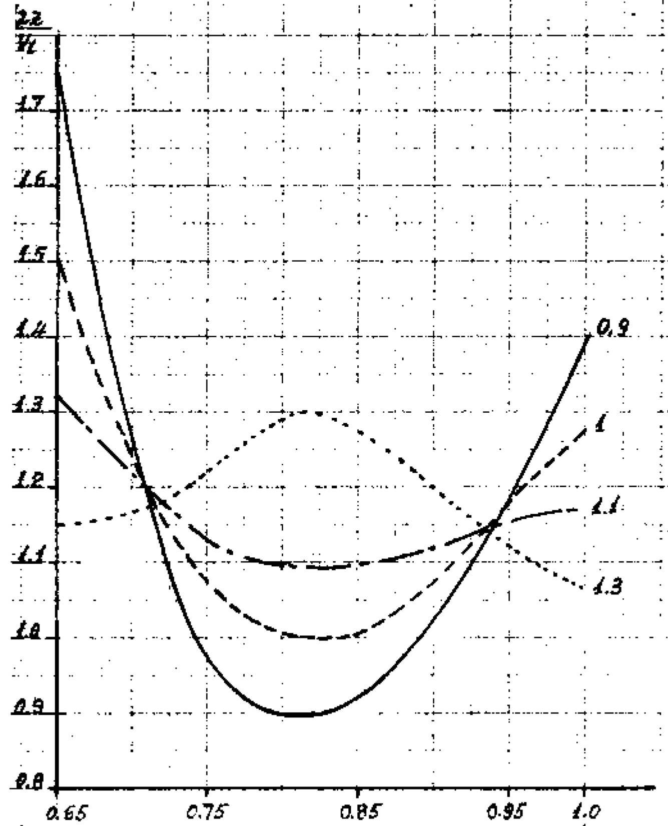


FIG.- 15-4.

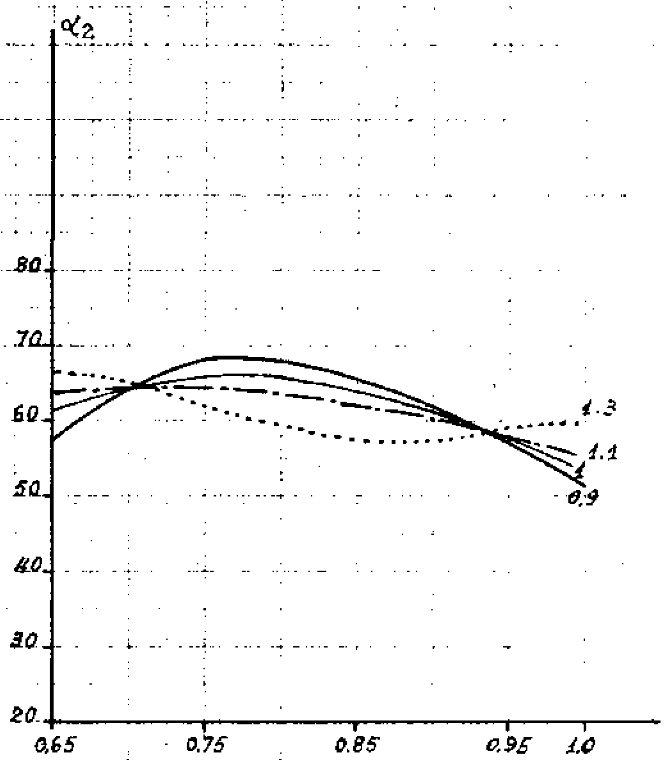


FIG.- 16-4.

Estudio de Estabilidad
Torbellino Libre (Estator)

$\xi_{i1} = 0.65$ $\delta = 0$ $h/c = 2.25$ $M_{1M} = 0.30$ $(V_{\theta 2}/V_1)_{\xi=\xi_m} = tg\ 65°$

$\left\{ \frac{V_{2z}}{V_{1z}} = cte \right.$ para $\xi_{1m} = \xi_{2m}$

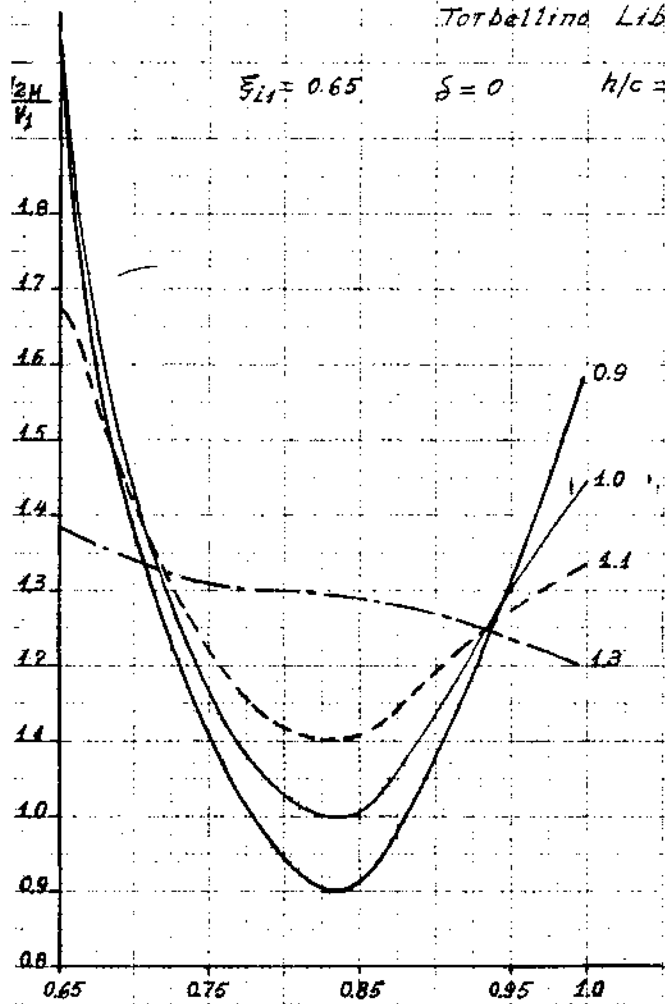


FIG.-17-4.

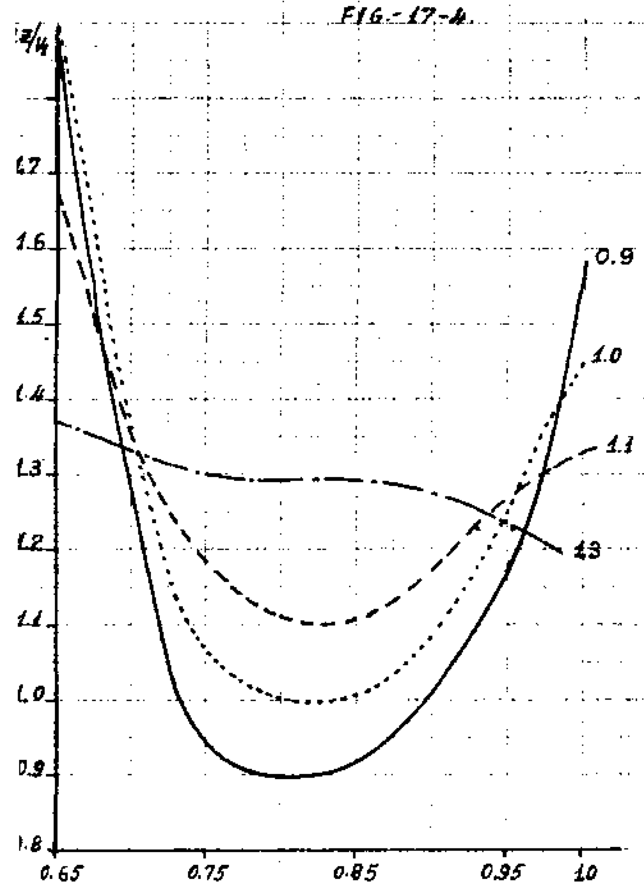


FIG.- 18-4.

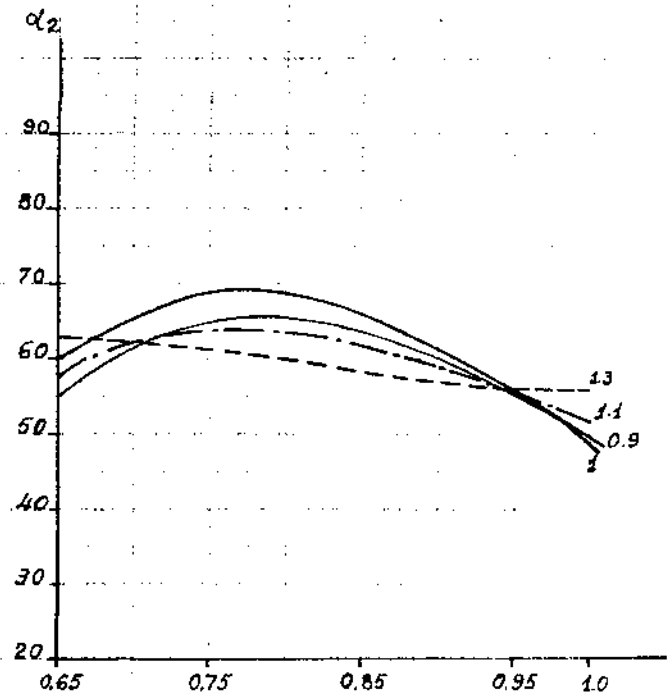


FIG.-19-4.

Líneas de corriente

(Alabes de Estator sin torsión

Condiciones línea media ($\alpha_2 = 65$, $\xi_{i1} = 0.65$, $h/c = 2.25$, $M_{1m} = 0.25$ $\frac{V_{2z}}{V_{1z}} = 1.$)

$\delta = 0$

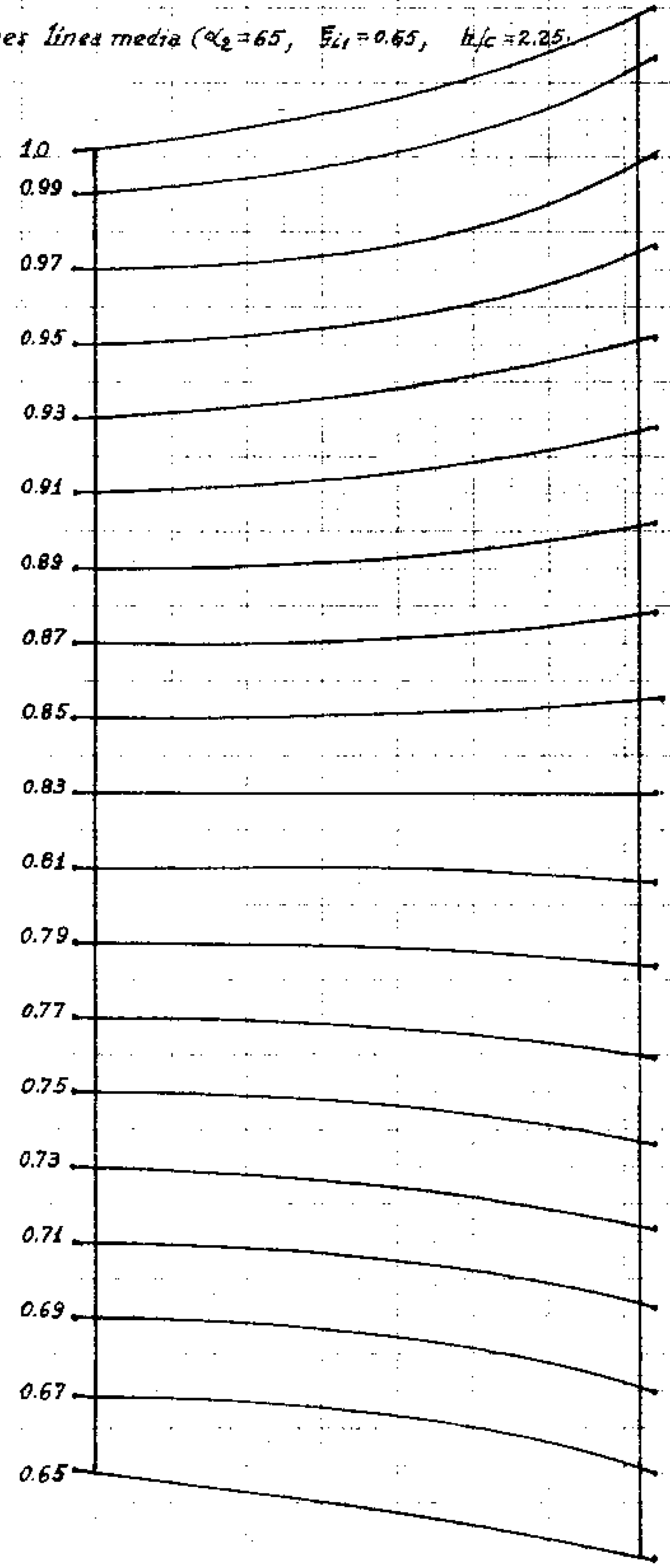


FIG.- 20-4.

Influencia de las Desviaciones

Condiciones línea media ($\alpha_2 = 65°$, $\xi_{1i} = 0.65$, $h/c = 2.25$, $M_{1\mu} = 0.25$, $\frac{V_{2z}}{V_{1z}} = 1$)

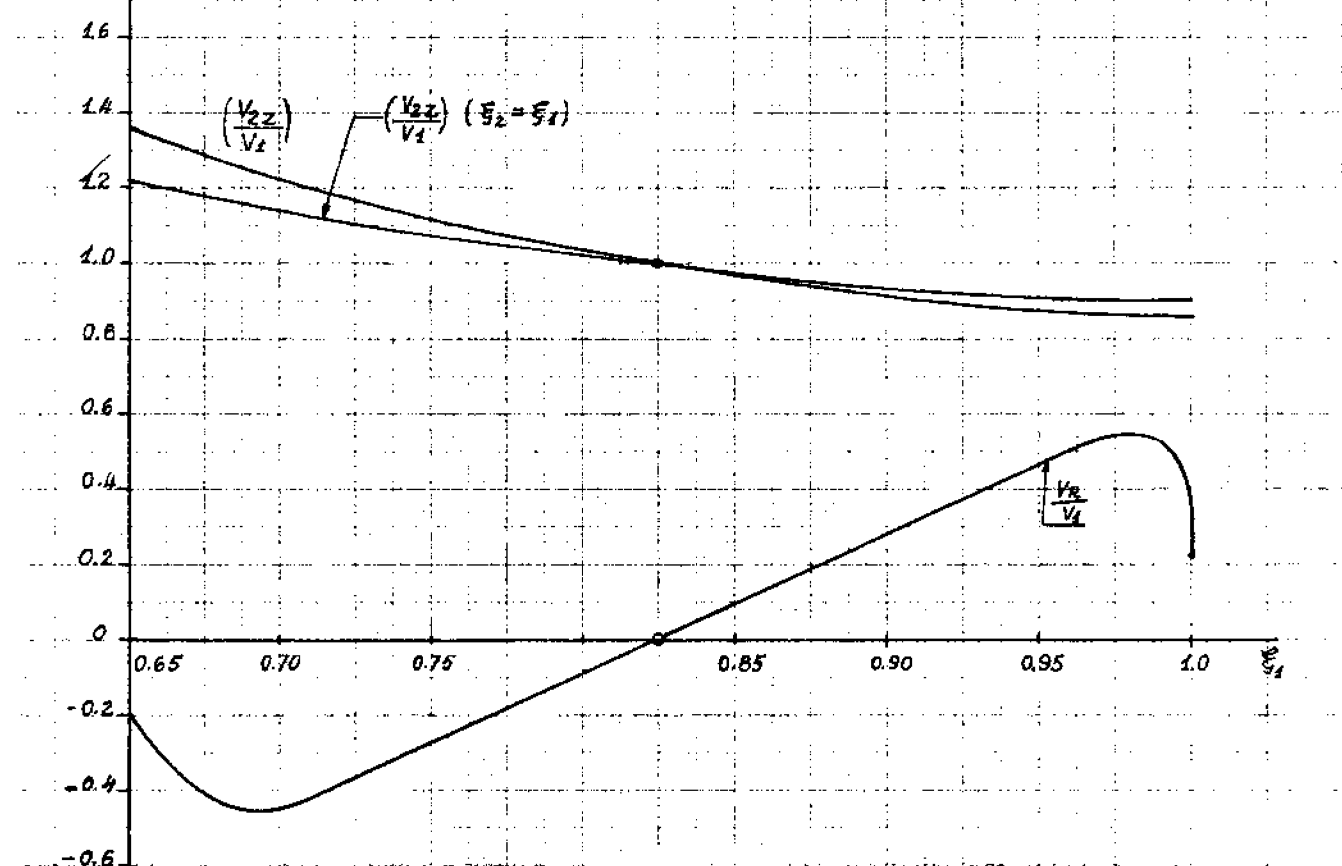


FIG.-21-4.

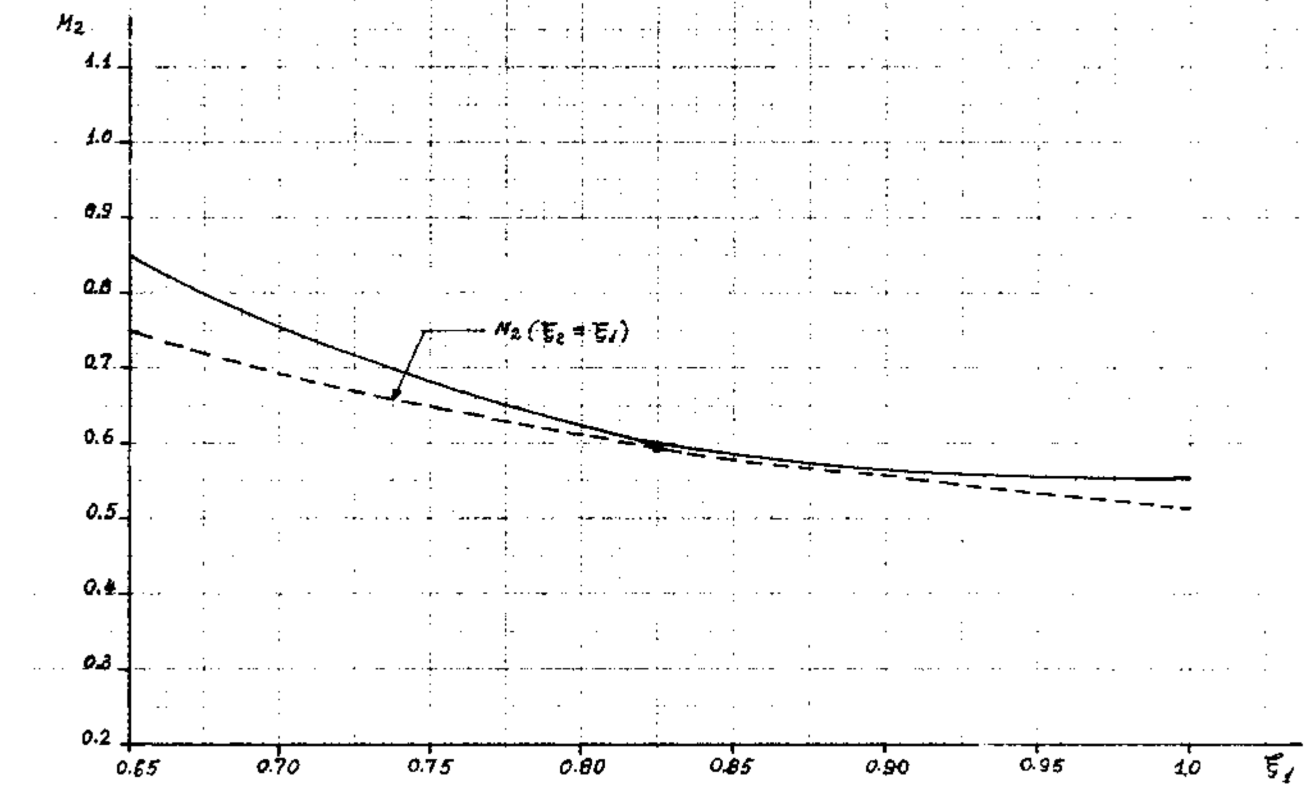


FIG.-22-4.

4-4 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES QUE RESUELVEN EL ROTOR.

Recordemos que la componente radial de la ecuación del impulso, aplicada en la sección 3, proporciona

$$\left(\frac{\partial V_m^2}{\partial r}\right)_3 + M(r) V_{m3}^2 = N(r) \tag{4-14}$$

con:

$$M(r) = 2\left[\frac{\cos\varphi}{r_c} - \frac{\sin\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m} - \frac{1}{2T_1 t}\left[\frac{\partial T_1 t}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_3}\right]_3$$

$$N(r) = 2\left[\frac{V_{\theta 3}^2 + 2\zeta - V_1^2}{2T_1 t}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_1 \frac{dr_1}{dr_3} - \frac{V_{\theta 3}}{r_3}\left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}\right)_3\right]$$

La ecuación de continuidad (vease apéndice) proporciona:

$$\left[\frac{\sin\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m}\right]_3 = -\left[\frac{\left(1+M_\theta^2+\frac{r}{\cos\varphi\, r_c}\right)\frac{\sin^2\varphi}{r} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\varphi}{dr}}{1-M_m^2}\right]_3$$

Por lo cual $M(r)$, puede escribirse así:

$$M(r) = 2\left[\frac{\cos\varphi}{r_c} + \frac{\left(1+M_\theta^2+\frac{r}{\cos\varphi\, r_c}\right)\frac{\sin^2\varphi}{r} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}}{1-M_m^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2T_1 t}\left[\frac{\partial T_1 t}{\partial r}\right]_1 \frac{dr_1}{dr_2}\right]_2$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad aplicada a un tubo de corriente entre las secciones 1 y 3 proporciona:

$$r_1 \rho_1 V_{z1} dr_1 = r_3 \rho_3 V_{z3} dr_3 \tag{4-15}$$

Las ecuaciones (4-14) y (4-15), igual que en el caso del estator, constituyen el sistema básico de nuestra solución para el rotor.

Procediendo en forma análoga, después de algunos desarrollos y simplificaciones en cierto modo considerables, resulta:

1º El sistema aplicado al caso de ley torsional torbellino libre en forma adimensional es:

$$\frac{d\,V_{m3}/V_1}{d\,\xi_1} = N(\xi)\frac{1}{(V_{m3}/V_1)} - M(\xi)\,\frac{V_{m3}}{V_1}$$

(4-16)

$$\frac{d\,\xi_3}{d\,\xi_1} = \frac{\rho_1}{\rho_{1tm}}\;\frac{1}{\rho_3/\rho_{1tm}}\;\frac{\xi_1}{\xi_3}\;\frac{1}{(V_{m3}/V_1)\cos\varphi_3}$$

con:

a) $$N(\xi) = \frac{2\,\Phi/\lambda_1^{\,2} + (V_3/V_1)^2 - 1}{2\,T_{1t}/T_{1tm}}\;\frac{d\,T_{1t}/T_{1tm}}{d\,\xi_1}$$

b) $$M(\xi) = \left[\frac{\cos\varphi}{r_c}\,r_{e1}\,\frac{d\,\xi_3}{d\,\xi_1} + \left(\left(1 + M_\theta^2 + \frac{\xi_3\,r_{e1}}{\cos\varphi\,r_c}\right)\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\xi_3}\,\frac{d\xi_3}{d\xi_1} + \mathrm{tg}\,\varphi\,\frac{d\varphi}{d\xi_1}\right)\Big/\left(1 - M_m^2\right)\right]_3$$

c) $$\left(\frac{V_{\theta 3}}{V_1}\right) = \frac{\xi_{1m}}{\xi_3}\left[R_v\,\Psi - \frac{\Phi}{\lambda_1}\right]$$

2º El sistema apropiado para su aplicación al caso de directriz con ángulo de salida constante es:

$$\frac{d\,V_3/V_1}{d\,\xi_1} = N(\xi)\frac{1}{(V_3/V_1)} - M(\xi)\left(\frac{V_{m3}/V_1}{V_3/V_1}\right)^2\frac{V_3}{V_1} - \frac{1}{\xi_3}\left(\frac{V_{\theta 3}/V_1}{V_3/V_1}\right)^2\frac{V_3}{V_1}\,\frac{d\,\xi_3}{d\,\xi_1}$$

(4-17)

$$\frac{d\,\xi_3}{d\,\xi_1} = \frac{\rho_1}{\rho_{1tm}}\;\frac{1}{\rho_3/\rho_{1tm}}\;\frac{\xi_1}{\xi_3}\;\frac{1}{(V_{m3}/V_1)\cos\varphi_3}$$

En este caso $N(\xi)$ y $M(\xi)$, tienen expresiones idénticas - al caso anterior, pero para la expresión de la componente tangencial de velocidad se tiene:

$$\left(\frac{V_{\theta 3}}{V_1}\right) = \frac{\xi_2}{\xi_3}\left(\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right) - \frac{\Phi}{\lambda_1}\;\frac{\xi_{1m}}{\xi_3}$$

donde $\left(V_{\theta 2}/V_1\right)$ es la velocidad tangencial obtenida en la solución del estator, para el caso que nos ocupa.

4-4-1 ECUACION DE LA LINEA DE CORRIENTE Y RELACIONES FUNCIONALES RESULTANTES.

La expresión de la linea de corriente en el intervalo comprendido entre las secciones 2 y 3, es:

$$\xi = a + b\left(\frac{z}{c_2}\right) + d\left(\frac{z}{c_2}\right)^2 + e\left(\frac{z}{c_2}\right)^n$$

el exponente n, está definido en la misma forma que en el caso del estator y tiene en cuenta que las paredes del canal -- son rectas, mientras que C_2 es la distancia axial entre las - secciones 2 y 3.

La determinación de las constantes se efectúa teniendo en cuenta que la linea de corriente debe de pasar por

y debe tener un punto de tangencia doble con la linea de corriente aproximada para el tramo 1-2, es decir:

$$\xi = \xi_3 \ , \ para \ \frac{z}{c_2} = 1$$

$$\xi = \xi_2 \ , \ para \ \frac{z}{c_2} = 0$$

$$\left(\frac{d\xi}{d(z/c_2)}\right)_{z/c_2=0} \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_1}\left(\frac{d\xi_{1-2}}{d(z/c_1)}\right)_{z/c_1=1}$$

$$\left(\frac{d^2\xi}{d(z/c_2)^2}\right)_{z/c_2=0} \frac{1}{c_2^2} = \frac{1}{c_1^2}\left(\frac{d^2\xi_{1-2}}{d(z/c_1)^2}\right)_{z/c_1=1}$$

Teniendo en cuenta que la expresión de ξ_{1-2} es la que proporciona la relación (4-7) resulta:

$$a = \xi_2$$

$$b = \frac{c_2}{c_1} n(\xi_2 - \xi_1)$$

$$d = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{n(n-1)}{2}(\xi_2 - \xi_1)$$

$$e = (\xi_3 - \xi_2) - \left(\frac{c_2}{c_1}\right) n(\xi_2 - \xi_1)\left[1 + \frac{c_2}{c_1}\frac{(n-1)}{2}\right]$$

puede observarse que cuando $\xi_1 = \xi_i$ ó $\xi_1 = 1$, es decir cuando n=1, la ecuación de la línea de corriente es una recta que pasa por ξ_{2i}, ξ_{3i} ó por ξ_{2e}, ξ_{3e} respectivamente.

Los términos en φ_3 y $(rc)_3$ que figuran en las expresiones de $N(\xi)$, pueden obtenerse como sigue:

$$\varphi_3 = \operatorname{arc\,tg}\left(\left(\frac{d\xi}{d(z/c_2)}\right)_{z/c_2=1} f_1\right)$$

con:

$$f_1 = \frac{r_{e1}}{c_2}$$

$$\frac{\cos\varphi_3}{(rc)_3}\, r_{e1} = -\cos^4\varphi_3 \left(\frac{d^2\xi}{d(z/c_2)}\right)_{z/c_2=1} f_1^2$$

$$\frac{r_{e1}}{\cos\varphi_3\,(rc)_3} = -\cos^2\varphi_3 \left(\frac{d^2\xi}{d(z/c_2)}\right)_{z/c_2=1} f_1^2$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\xi_1} = \operatorname{sen}\varphi_3 \cos\varphi_3\, f_1 \frac{d}{d\xi_1}\left[\left(\frac{d\xi}{d(z/c_2)}\right)_{z/c_2=1}\right]$$

para lo cual hay que tener en cuenta, que de la ecuación de la línea de corriente se deduce:

$$\left(\frac{d\xi}{d(z/c_2)}\right)_{z/c_2=1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) n\,(\xi_2-\xi_1)\left[(1-n)+\frac{c_2}{2c_1}\left(3n-n^2-2\right)\right] + n(\xi_3-\xi_2)$$

$$\left[\frac{d^2\xi}{d(z/c_2)^2}\right]_{z/c_2=1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) n(n-1)(\xi_2-\xi_1)\left[\frac{c_2}{c_1} - n\left(1+\frac{c_2}{c_1}\,\frac{n-1}{2}\right)\right] + n(n-1)(\xi_3-\xi_2)$$

$$\frac{d}{d\xi_1}\left[\left(\frac{d\xi}{d(z/c_2)}\right)_{z/c_2=1}\right] = \frac{c_2}{c_1}\, n\left[\frac{d\xi_2}{d\xi_1} - 1\right]\left[(1-n)+\frac{c_2}{2c_1}\left(3n-n^2-2\right)\right] +$$

$$+\, n\left(\frac{d\xi_3}{d\xi_1} - \frac{d\xi_2}{d\xi_1}\right)$$

4-4-2 RELACIONES ENTRE VARIABLES FLUIDAS

Las relaciones que existen entre los componentes de la velocidad son las fijadas en el Apéndice y además la que se deduce de la ley torsional elegida para el estator y la condición de que el trabajo específico para cada linea de corriente es constante. En estas condiciones cualquier componente de velocidad puede ponerse en función de una de éllas.

Por otra parte de la ecuación de la energía, se obtiene:

$$\frac{T_3}{T_{1t}} = 1 - \frac{(\gamma-1)\, M_{1M}^2}{(B+M\xi_1)\left(1+\frac{\gamma-1}{2} M_{1M}^2\right)} \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 + \frac{\Phi}{\lambda_1^2}\right)$$

y en consecuencia de la condición de isentropía según una linea de corriente, se deduce:

$$\frac{\rho_1/\rho_{1tm}}{\rho_3/\rho_{1tm}} = \left[\frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) T_3/T_{1t}}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Por otra parte también puede deducirse fácilmente:

$$M_{\theta 3}^2 = \left(\frac{V_{\theta 3}}{V_1}\right)^2 \frac{M_{1M}^2}{1+\frac{\gamma-1}{2} M_{1M}^2} \quad \frac{1}{(B+M\xi_1)\,(T_3/T_{1t})}$$

$$M_{m3}^2 = \left(\frac{V_{m3}}{V_1}\right)^2 \frac{M_{1M}^2}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2} M_{1M}^2\right)} \, \frac{1}{(B+M\xi_1)\,(T_3/T_{1t})}$$

por lo que finalmente.

$$M_3^2 = M_{\theta 3}^2 + M_{m3}^2$$

Estas relaciones obtenidas entre las variables fluidas son necesarias para la reducción numérica del sistema (4-16) ó (4-17), según sea la ley torsional elegida.

4-5 METODO DE CALCULO Y DISCUSION DE RESULTADOS

El sistema (4-16) (lo mismo puede decirse del sistema (4-17)), si se tiene en cuenta las relaciones funcionales deducidas de la ecuación de las líneas de corriente y las relaciones existentes entre variables fluidas puede ponerse implícitamente en la forma:

$$\frac{d\, V_{m3}/V_1}{d\xi_1} = f_2\left(\frac{V_{m3}}{V_1}, \frac{V_{m2}}{V_1}, \xi_3, \xi_2, \xi_1\right)$$

$$\frac{d\xi_3}{d\xi_1} = f_1\left(\frac{V_{m3}}{V_1}, \frac{V_{m2}}{V_1}, \xi_3, \xi_2, \xi_1\right) \qquad (4\text{-}18)$$

Este sistema puede ser resuelto numéricamente mediante el método de Kutta-Runge, debiendo hacer constar que la solución del problema del estator proporciona $V_{m2}/V_1 = V_{m2}/V_1(\xi_1)$ y $\xi_2 = \xi_2(\xi_1)$; de forma que el sistema (4-18) es un sistema de dos ecuaciones diferenciales en $V_{m3}/V_1(\xi_1)$ y $\xi_3(\xi_1)$; no obstante se ha puesto intencionadamente como función explícita de V_{m2}/V_1 y ξ_2 , porque el problema de determinación de las variables fluidas en un escalón puede ser resuelto en bloque mediante la solución conjunta del sistema (4-13) y (4-18), lo cual ahorra tiempo de calculo y espacio de memoria.

Aunque el problema puede presentarse como problema de condiciones iniciales ó como problema de condiciones de contorno, no entramos aquí en esta discusión porque ha sido tratada suficientemente en el estudio del estator y porque además creemos que el problema de condiciones de contorno es más propio del estudio de actuaciones.

Siguiendo el método de resolución conjunta de estator y rotor se presenta en el Apéndice B los programas denominados "B" y "A" que determinan las variables fluidas en un escalón para torbellino libre y ángulo de directriz constante respectivamente, cuando se especifican condiciones iniciales en la línea media.

En las tablas (4-2) a (4-4)(pag. 131), se presentan soluciones completas obtenidas para el caso de torbellino libre. La influencia de las desviaciones radiales no puede desestimarse dado que la variación radial de la velocidad axial es considerable y en consecuencia los ángulos difieren apreciablemente de los calculados con la hipótesis de las pequeñas desviaciones radiales. El efecto de la no homoentropía es igualmente acusado; en el rotor con δ =0.15 tabla (4-3), la velocidad axial disminuye hasta hacerse nula prácticamente; a partir de este punto no continúa la solución debida a una sentencia de control especificada en el programa para evitar el "over-flow".

Este comportamiento cualitativo, tal como se vió, puede -- predecirse en cambio mediante la hipótesis de pequeñas desvia-- ciones radiales.

En la tabla (4-5), (pag. 137), se presenta una solución -- para el caso de álabes de directriz sin torsión y δ = 0, la influencia de la no homoentropía de la corriente es pequeña en el estator tabla (4-6) (pag. 139), mientras que influye decisivamente en el rotor figuras (4-23) y (4-24) (pag. 140), comportamiento que también se dedujo en el estudio de las pequeñas desviaciones radiales. En las figuras (4-25) y (4-26) (pag. 141), se observa que el efecto de las desviaciones radiales en el comportamiento del estator es pequeño pero en cambio es apreciable en el rotor.

R11/RE1=0.65 ALFA2M=65. DELTA=0. M2M=0.61 H/C1=2.25 FI=1.50 LANDA=0.51 V2Z/V1=1.175 V2U/V1=[illegible]

R1/RE1	R2/RE1	V2Z/V1	V2R/V1	ALFA2	ALFA2R	M2	M2R
0.6500D 00	0.6452D 00	1.232	-0.038	69.07	53.90	0.76	0.46
0.6600D 00	0.6558D 00	1.228	-0.072	68.82	52.72	0.75	0.45
0.6700D 00	0.6663D 00	1.221	-0.077	68.62	51.56	0.74	0.43
0.6800D 00	0.6767D 00	1.213	-0.072	68.45	50.38	0.73	0.42
0.6900D 00	0.6872D 00	1.206	-0.064	68.27	49.14	0.72	0.41
0.7000D 00	0.6976D 00	1.199	-0.055	68.09	47.84	0.71	0.39
0.7100D 00	0.7080D 00	1.193	-0.046	67.89	46.47	0.70	0.38
0.7200D 00	0.7184D 00	1.188	-0.038	67.68	45.02	0.69	0.37
0.7300D 00	0.7287D 00	1.184	-0.030	67.46	43.49	0.68	0.36
0.7400D 00	0.7390D 00	1.181	-0.023	67.23	41.88	0.67	0.35
0.7500D 00	0.7493D 00	1.179	-0.017	66.99	40.20	0.66	0.34
0.7600D 00	0.7595D 00	1.177	-0.011	66.73	38.44	0.65	0.33
0.7700D 00	0.7697D 00	1.176	-0.007	66.48	36.62	0.64	0.32
0.7800D 00	0.7798D 00	1.175	-0.003	66.21	34.73	0.64	0.31
0.7900D 00	0.7900D 00	1.175	-0.001	65.94	32.78	0.63	0.31
0.8000D 00	0.8000D 00	1.175	0.000	65.67	30.77	0.62	0.30
0.8100D 00	0.8100D 00	1.175	0.001	65.40	28.71	0.62	0.29
0.8200D 00	0.8200D 00	1.175	0.001	65.13	26.61	0.61	0.29
0.8300D 00	0.8300D 00	1.175	-0.001	64.87	24.46	0.60	0.28
0.8400D 00	0.8399D 00	1.175	-0.003	64.61	22.29	0.60	0.28
0.8500D 00	0.8498D 00	1.174	-0.005	64.36	20.08	0.59	0.27
0.8600D 00	0.8596D 00	1.173	-0.009	64.12	17.85	0.58	0.27
0.8700D 00	0.8695D 00	1.172	-0.012	63.89	15.59	0.58	0.26
0.8800D 00	0.8793D 00	1.170	-0.016	63.67	13.32	0.57	0.26
0.8900D 00	0.8891D 00	1.168	-0.020	63.46	11.03	0.57	0.26
0.9000D 00	0.8989D 00	1.165	-0.025	63.27	8.73	0.56	0.26
0.9100D 00	0.9087D 00	1.161	-0.029	63.09	6.42	0.56	0.25
0.9200D 00	0.9185D 00	1.157	-0.033	62.93	4.10	0.55	0.25
0.9300D 00	0.9283D 00	1.152	-0.037	62.77	1.77	0.55	0.25
0.9400D 00	0.9382D 00	1.147	-0.040	62.63	-0.56	0.54	0.25
0.9500D 00	0.9480D 00	1.142	-0.042	62.49	-2.89	0.54	0.25
0.9600D 00	0.9579D 00	1.136	-0.044	62.36	-5.22	0.53	0.25
0.9700D 00	0.9678D 00	1.131	-0.044	62.23	-7.53	0.53	0.25
0.9800D 00	0.9778D 00	1.126	-0.042	62.09	-9.82	0.52	0.25
0.9900D 00	0.9877D 00	1.123	-0.036	61.92	-12.06	0.52	0.25
0.1000D 01	0.9976D 00	1.122	-0.017	61.70	-14.23	0.51	0.25

R1/RE1	R3/RE1	V3Z/V1	V3R/V1	ALFA3	ALFA3R	M3	GRAD.REAC.
0.6500D 00	0.6341D 00	1.255	-0.090	-23.41	-58.50	0.31	0.13
0.6600D 00	0.6451D 00	1.252	-0.095	-23.10	-58.77	0.30	0.16
0.6700D 00	0.6560D 00	1.259	-0.050	-22.66	-58.85	0.30	0.19
0.6800D 00	0.6668D 00	1.270	-0.034	-22.14	-58.83	0.31	0.21
0.6900D 00	0.6775D 00	1.282	-0.042	-21.65	-58.81	0.31	0.24
0.7000D 00	0.6882D 00	1.290	-0.060	-21.22	-58.86	0.31	0.27
0.7100D 00	0.6987D 00	1.292	-0.082	-20.90	-59.03	0.31	0.29
0.7200D 00	0.7093D 00	1.288	-0.103	-20.67	-59.31	0.31	0.31
0.7300D 00	0.7199D 00	1.279	-0.121	-20.52	-59.69	0.31	0.33
0.7400D 00	0.7306D 00	1.266	-0.133	-20.43	-60.14	0.30	0.35
0.7500D 00	0.7413D 00	1.251	-0.139	-20.38	-60.64	0.30	0.37
0.7600D 00	0.7522D 00	1.236	-0.139	-20.34	-61.16	0.30	0.38
0.7700D 00	0.7632D 00	1.220	-0.132	-20.31	-61.67	0.29	0.39
0.7800D 00	0.7743D 00	1.206	-0.119	-20.25	-62.15	0.29	0.41
0.7900D 00	0.7855D 00	1.194	-0.100	-20.17	-62.59	0.28	0.42
0.8000D 00	0.7967D 00	1.185	-0.077	-20.05	-62.98	0.28	0.43
0.8100D 00	0.8080D 00	1.179	-0.049	-19.89	-63.31	0.28	0.44
0.8200D 00	0.8193D 00	1.175	-0.017	-19.69	-63.58	0.28	0.46
0.8300D 00	0.8307D 00	1.175	0.018	-19.44	-63.78	0.28	0.47
0.8400D 00	0.8419D 00	1.179	0.055	-19.15	-63.92	0.28	0.48
0.8500D 00	0.8532D 00	1.185	0.094	-18.82	-63.99	0.28	0.50
0.8600D 00	0.8643D 00	1.196	0.134	-18.44	-63.99	0.28	0.51
0.8700D 00	0.8753D 00	1.210	0.175	-18.03	-63.92	0.29	0.53
0.8800D 00	0.8862D 00	1.228	0.215	-17.57	-63.77	0.29	0.54
0.8900D 00	0.8969D 00	1.251	0.254	-17.08	-63.55	0.30	0.56
0.9000D 00	0.9074D 00	1.278	0.291	-16.55	-63.23	0.30	0.58
0.9100D 00	0.9177D 00	1.311	0.325	-15.98	-62.83	0.31	0.60
0.9200D 00	0.9277D 00	1.350	0.354	-15.38	-62.32	0.32	0.62
0.9300D 00	0.9375D 00	1.396	0.376	-14.75	-61.71	0.33	0.64
0.9400D 00	0.9469D 00	1.448	0.390	-14.11	-60.99	0.34	0.67
0.9500D 00	0.9561D 00	1.507	0.391	-13.45	-60.19	0.36	0.69
0.9600D 00	0.9649D 00	1.571	0.375	-12.81	-59.31	0.37	0.72
0.9700D 00	0.9734D 00	1.637	0.331	-12.20	-58.43	0.38	0.74
0.9800D 00	0.9817D 00	1.698	0.247	-11.68	-57.66	0.39	0.76
0.9900D 00	0.9897D 00	1.738	0.116	-11.33	-57.21	0.40	0.78
0.1000D 01	0.9977D 00	1.747	0.000	-11.19	-57.23	0.40	0.79

RI1/RE1=0.65 ALFA2M=65. DELTA=0.150 M2M=0.61 H/C1=2.25 FI=1.50 LANDA=0.51 V2Z/V1=1.17 V3Z/V1=1.17

R1/RE1	R2/RE1	V2Z/V1	V2R/V1	ALFA2	ALFA2R	M2	M2R
0.6500D 00							
0.6600D 00							
0.6700D 00							
0.6800D 00							
0.6900D 00							
0.7000D 00							
0.7100D 00							
0.7200D 00	0.7019D 00	0.899	-0.312	73.12	55.26	0.72	0.37
0.7300D 00	0.7158D 00	0.930	-0.254	72.25	52.35	0.70	0.35
0.7400D 00	0.7291D 00	0.958	-0.201	71.44	49.49	0.69	0.34
0.7500D 00	0.7418D 00	0.984	-0.155	70.66	46.63	0.67	0.33
0.7600D 00	0.7541D 00	1.009	-0.115	69.89	43.77	0.66	0.32
0.7700D 00	0.7659D 00	1.034	-0.081	69.14	40.90	0.65	0.31
0.7800D 00	0.7774D 00	1.060	-0.053	68.38	38.03	0.64	0.30
0.7900D 00	0.7885D 00	1.085	-0.031	67.62	35.16	0.63	0.29
0.8000D 00	0.7993D 00	1.111	-0.015	66.86	32.33	0.62	0.29
0.8100D 00	0.8098D 00	1.137	-0.005	66.11	29.56	0.62	0.29
0.8200D 00	0.8200D 00	1.163	-0.000	65.36	26.86	0.61	0.28
0.8300D 00	0.8299D 00	1.187	-0.001	64.64	24.25	0.60	0.28
0.8400D 00	0.8397D 00	1.210	-0.008	63.95	21.75	0.60	0.28
0.8500D 00	0.8492D 00	1.231	-0.020	63.31	19.36	0.59	0.28
0.8600D 00	0.8585D 00	1.249	-0.036	62.72	17.08	0.58	0.28
0.8700D 00	0.8677D 00	1.263	-0.056	62.21	14.90	0.58	0.28
0.8800D 00	0.8768D 00	1.273	-0.078	61.77	12.82	0.57	0.28
0.8900D 00	0.8858D 00	1.278	-0.103	61.42	10.81	0.57	0.28
0.9000D 00	0.8948D 00	1.280	-0.128	61.16	8.85	0.56	0.27
0.9100D 00	0.9038D 00	1.276	-0.153	60.98	6.92	0.55	0.27
0.9200D 00	0.9127D 00	1.269	-0.177	60.88	5.00	0.54	0.27
0.9300D 00	0.9218D 00	1.258	-0.199	60.86	3.06	0.54	0.26
0.9400D 00	0.9308D 00	1.244	-0.218	60.89	1.09	0.53	0.26
0.9500D 00	0.9400D 00	1.228	-0.233	60.96	-0.93	0.52	0.25
0.9600D 00	0.9493D 00	1.211	-0.243	61.06	-3.00	0.51	0.25
0.9700D 00	0.9586D 00	1.196	-0.246	61.13	-5.12	0.51	0.25
0.9800D 00	0.9681D 00	1.185	-0.237	61.11	-7.24	0.50	0.24
0.9900D 00	0.9775D 00	1.186	-0.204	60.86	-9.29	0.49	0.24
0.1000D 01	0.9869D 00	1.206	-0.101	60.22	-11.09	0.49	0.25

R1/RE1	R3/RE1	V3Z/V1	V3R/V1	ALFA3	ALFA3R	M3	GRAD.REAC.
0.6500D 00							
0.6600D 00							
0.6700D 00							
0.6800D 00							
0.6900D 00							
0.7000D 00							
0.7100D 00							
0.7200D 00	0.6445D 00	0.014	-0.001	-88.47	-89.60	0.12	0.18
0.7300D 00	0.6579D 00	0.288	-0.087	-61.18	-82.13	0.14	0.22
0.7400D 00	0.6943D 00	0.504	-0.021	-44.58	-76.78	0.16	0.25
0.7500D 00	0.7184D 00	0.657	0.013	-36.13	-73.26	0.19	0.29
0.7600D 00	0.7375D 00	0.780	0.017	-30.91	-70.62	0.21	0.32
0.7700D 00	0.7539D 00	0.878	0.002	-27.49	-68.64	0.23	0.35
0.7800D 00	0.7687D 00	0.955	-0.018	-25.14	-67.21	0.24	0.38
0.7900D 00	0.7823D 00	1.016	-0.035	-23.45	-66.15	0.25	0.40
0.8000D 00	0.7952D 00	1.065	-0.042	-22.13	-65.34	0.26	0.42
0.8100D 00	0.8075D 00	1.110	-0.036	-21.03	-64.66	0.27	0.44
0.8200D 00	0.8193D 00	1.153	-0.016	-20.04	-64.01	0.27	0.45
0.8300D 00	0.8306D 00	1.197	0.019	-19.11	-63.36	0.28	0.47
0.8400D 00	0.8415D 00	1.243	0.068	-18.23	-62.69	0.29	0.49
0.8500D 00	0.8520D 00	1.291	0.131	-17.40	-61.99	0.30	0.51
0.8600D 00	0.8621D 00	1.340	0.207	-16.61	-61.28	0.31	0.53
0.8700D 00	0.8718D 00	1.390	0.293	-15.87	-60.58	0.32	0.55
0.8800D 00	0.8813D 00	1.440	0.388	-15.19	-59.88	0.34	0.58
0.8900D 00	0.8904D 00	1.492	0.490	-14.54	-59.18	0.35	0.61
0.9000D 00	0.8992D 00	1.546	0.595	-13.92	-58.44	0.37	0.64
0.9100D 00	0.9078D 00	1.607	0.702	-13.29	-57.63	0.39	0.68
0.9200D 00	0.9161D 00	1.677	0.807	-12.64	-56.67	0.41	0.72
0.9300D 00	0.9241D 00	1.764	0.907	-11.94	-55.50	0.43	0.77
0.9400D 00	0.9318D 00	1.874	0.997	-11.16	-54.02	0.46	0.83
0.9500D 00	0.9391D 00	2.019	1.067	-10.30	-52.13	0.49	0.90
0.9600D 00	0.9459D 00	2.212	1.091	-9.35	-49.72	0.53	0.99
0.9700D 00	0.9522D 00	2.467	1.012	-8.35	-46.74	0.57	1.09
0.9800D 00	0.9579D 00	2.770	0.700	-7.40	-43.55	0.61	1.19
0.9900D 00	0.9633D 00	2.971	0.041	-6.87	-41.67	0.64	1.26
0.1000D 01	0.9685D 00	2.964	-0.351	-6.85	-41.85	0.64	1.27

E1=0.65 ALFA2M=65. DELTA=0. M2M=0.70 H/C1=2.25 FI=1.50 LANDA=0.48 V2Z/V1=1.25 V3Z/V1=1.25

R1/RE1	R2/RE1	V2Z/V1	V2R/V1	ALFA2	ALFA2R	M2	M2R
0.6500D 00	0.6436D 00	1.317	-0.054	69.00	53.94	0.89	0.54
0.6600D 00	0.6544D 00	1.311	-0.101	68.77	52.76	0.88	0.52
0.6700D 00	0.6652D 00	1.301	-0.106	68.60	51.62	0.86	0.51
0.6800D 00	0.6758D 00	1.291	-0.097	68.45	50.46	0.85	0.49
0.6900D 00	0.6865D 00	1.281	-0.084	68.29	49.24	0.83	0.47
0.7000D 00	0.6971D 00	1.273	-0.070	68.12	47.94	0.82	0.46
0.7100D 00	0.7076D 00	1.265	-0.057	67.93	46.57	0.81	0.44
0.7200D 00	0.7181D 00	1.260	-0.045	67.73	45.11	0.80	0.43
0.7300D 00	0.7286D 00	1.255	-0.034	67.51	43.57	0.78	0.41
0.7400D 00	0.7390D 00	1.252	-0.024	67.28	41.95	0.77	0.40
0.7500D 00	0.7494D 00	1.249	-0.016	67.03	40.25	0.76	0.39
0.7600D 00	0.7596D 00	1.248	-0.009	66.77	38.48	0.75	0.38
0.7700D 00	0.7699D 00	1.247	-0.004	66.50	36.63	0.74	0.37
0.7800D 00	0.7800D 00	1.247	0.000	66.23	34.73	0.74	0.36
0.7900D 00	0.7901D 00	1.247	0.003	65.96	32.77	0.73	0.35
0.8000D 00	0.8001D 00	1.248	0.004	65.68	30.75	0.72	0.34
0.8100D 00	0.8101D 00	1.248	0.003	65.40	28.70	0.71	0.34
0.8200D 00	0.8201D 00	1.248	0.001	65.13	26.60	0.70	0.33
0.8300D 00	0.8299D 00	1.248	-0.002	64.87	24.47	0.70	0.32
0.8400D 00	0.8398D 00	1.248	-0.006	64.62	22.32	0.69	0.32
0.8500D 00	0.8496D 00	1.247	-0.010	64.38	20.14	0.68	0.31
0.8600D 00	0.8593D 00	1.245	-0.016	64.15	17.93	0.67	0.31
0.8700D 00	0.8691D 00	1.242	-0.022	63.95	15.71	0.67	0.30
0.8800D 00	0.8788D 00	1.239	-0.028	63.76	13.48	0.66	0.30
0.8900D 00	0.8885D 00	1.235	-0.035	63.59	11.22	0.65	0.30
0.9000D 00	0.8983D 00	1.229	-0.041	63.43	8.94	0.65	0.29
0.9100D 00	0.9080D 00	1.223	-0.047	63.30	6.64	0.64	0.29
0.9200D 00	0.9177D 00	1.217	-0.053	63.18	4.33	0.63	0.29
0.9300D 00	0.9275D 00	1.209	-0.058	63.08	2.00	0.63	0.28
0.9400D 00	0.9373D 00	1.201	-0.062	62.99	-0.36	0.62	0.28
0.9500D 00	0.9471D 00	1.193	-0.065	62.91	-2.72	0.62	0.28
0.9600D 00	0.9570D 00	1.184	-0.067	62.83	-5.10	0.61	0.28
0.9700D 00	0.9669D 00	1.176	-0.066	62.75	-7.47	0.60	0.28
0.9800D 00	0.9768D 00	1.169	-0.063	62.65	-9.82	0.60	0.28
0.9900D 00	0.9868D 00	1.164	-0.052	62.51	-12.13	0.59	0.28
0.1000D 01	0.9967D 00	1.163	-0.025	62.30	-14.35	0.59	0.28

R1/RE1	R3/RE1	V3Z/V1	V3R/V1	ALFA3	ALFA3R	M3	GRAD.REAC.
0.6500D 00	0.6324D 00	1.411	-0.102	-22.30	-57.01	0.37	0.14
0.6600D 00	0.6432D 00	1.411	-0.084	-21.97	-57.23	0.37	0.17
0.6700D 00	0.6541D 00	1.423	-0.021	-21.47	-57.21	0.37	0.20
0.6800D 00	0.6647D 00	1.445	-0.012	-20.87	-57.02	0.38	0.23
0.6900D 00	0.6752D 00	1.465	-0.040	-20.31	-56.88	0.38	0.26
0.7000D 00	0.6856D 00	1.475	-0.085	-19.91	-56.91	0.38	0.29
0.7100D 00	0.6960D 00	1.471	-0.132	-19.67	-57.18	0.38	0.32
0.7200D 00	0.7064D 00	1.457	-0.174	-19.59	-57.65	0.38	0.34
0.7300D 00	0.7170D 00	1.433	-0.206	-19.61	-58.29	0.38	0.35
0.7400D 00	0.7277D 00	1.404	-0.226	-19.71	-59.02	0.37	0.37
0.7500D 00	0.7386D 00	1.373	-0.234	-19.85	-59.78	0.36	0.38
0.7600D 00	0.7497D 00	1.344	-0.230	-19.97	-60.54	0.35	0.39
0.7700D 00	0.7609D 00	1.317	-0.215	-20.07	-61.25	0.35	0.40
0.7800D 00	0.7724D 00	1.294	-0.192	-20.12	-61.89	0.34	0.41
0.7900D 00	0.7839D 00	1.275	-0.160	-20.11	-62.44	0.33	0.42
0.8000D 00	0.7956D 00	1.262	-0.121	-20.03	-62.91	0.33	0.43
0.8100D 00	0.8074D 00	1.253	-0.076	-19.89	-63.28	0.33	0.44
0.8200D 00	0.8191D 00	1.249	-0.026	-19.69	-63.57	0.32	0.46
0.8300D 00	0.8309D 00	1.249	0.027	-19.43	-63.78	0.32	0.47
0.8400D 00	0.8426D 00	1.253	0.085	-19.13	-63.92	0.32	0.48
0.8500D 00	0.8542D 00	1.261	0.145	-18.78	-63.98	0.33	0.50
0.8600D 00	0.8658D 00	1.273	0.207	-18.38	-63.97	0.33	0.51
0.8700D 00	0.8772D 00	1.289	0.270	-17.95	-63.89	0.34	0.53
0.8800D 00	0.8884D 00	1.309	0.333	-17.47	-63.73	0.34	0.55
0.8900D 00	0.8995D 00	1.335	0.396	-16.95	-63.48	0.35	0.57
0.9000D 00	0.9104D 00	1.368	0.457	-16.39	-63.12	0.37	0.59
0.9100D 00	0.9210D 00	1.408	0.516	-15.77	-62.64	0.38	0.61
0.9200D 00	0.9314D 00	1.457	0.571	-15.10	-62.01	0.40	0.64
0.9300D 00	0.9414D 00	1.518	0.620	-14.37	-61.22	0.41	0.67
0.9400D 00	0.9511D 00	1.591	0.661	-13.60	-60.24	0.43	0.70
0.9500D 00	0.9604D 00	1.680	0.687	-12.78	-59.06	0.46	0.74
0.9600D 00	0.9693D 00	1.786	0.689	-11.94	-57.67	0.48	0.77
0.9700D 00	0.9777D 00	1.908	0.649	-11.10	-56.10	0.51	0.82
0.9800D 00	0.9857D 00	2.038	0.534	-10.33	-54.50	0.53	0.85
0.9900D 00	0.9933D 00	2.144	0.311	-9.75	-53.27	0.54	0.88
0.1000D 01	0.1001D 01	2.182	0.056	-9.52	-52.94	0.55	0.89

R1/RE1=0.65 ALFA2M=65. DELTA=0. M2M=0.70 H/C1=2.25 FI=1.50 LANDA=0.60 V2Z/V1=1.25 V3Z/V1=1.25

R1/RE1	R2/RE1	V2Z/V1	V2R/V1	ALFA2	ALFA2R	M2	M2R
0.65000 00	0.65910 00	1.468	0.086	65.00	45.35	0.84	0.50
0.66000 00	0.66820 00	1.452	0.165	65.00	44.53	0.83	0.49
0.67000 00	0.67740 00	1.438	0.180	65.00	43.73	0.82	0.48
0.68000 00	0.68670 00	1.426	0.172	65.00	42.93	0.81	0.47
0.69000 00	0.69590 00	1.414	0.157	65.00	42.10	0.80	0.46
0.70000 00	0.70520 00	1.403	0.139	65.00	41.24	0.80	0.45
0.71000 00	0.71460 00	1.391	0.121	65.00	40.33	0.79	0.44
0.72000 00	0.72390 00	1.379	0.104	65.00	39.37	0.78	0.43
0.73000 00	0.73330 00	1.367	0.088	65.00	38.36	0.77	0.42
0.74000 00	0.74280 00	1.355	0.073	65.00	37.29	0.77	0.41
0.75000 00	0.75230 00	1.342	0.059	65.00	36.17	0.76	0.40
0.76000 00	0.76180 00	1.330	0.047	65.00	34.98	0.75	0.39
0.77000 00	0.77140 00	1.317	0.036	65.00	33.72	0.74	0.38
0.78000 00	0.78110 00	1.304	0.027	65.00	32.40	0.73	0.37
0.79000 00	0.79070 00	1.292	0.018	65.00	31.00	0.73	0.36
0.80000 00	0.80050 00	1.279	0.011	65.00	29.54	0.72	0.35
0.81000 00	0.81020 00	1.267	0.006	65.00	28.00	0.71	0.34
0.82000 00	0.82010 00	1.254	0.002	65.00	26.38	0.70	0.33
0.83000 00	0.82990 00	1.242	-0.001	65.00	24.68	0.70	0.32
0.84000 00	0.83990 00	1.230	-0.003	65.00	22.91	0.69	0.32
0.85000 00	0.84990 00	1.218	-0.003	65.00	21.06	0.68	0.31
0.86000 00	0.85990 00	1.206	-0.003	65.00	19.13	0.67	0.30
0.87000 00	0.87000 00	1.195	-0.001	65.00	17.13	0.67	0.30
0.88000 00	0.88010 00	1.184	0.003	65.00	15.06	0.66	0.29
0.89000 00	0.89030 00	1.172	0.007	65.00	12.93	0.65	0.28
0.90000 00	0.90050 00	1.162	0.012	65.00	10.74	0.65	0.28
0.91000 00	0.91080 00	1.151	0.019	65.00	8.49	0.64	0.27
0.92000 00	0.92120 00	1.141	0.026	65.00	6.20	0.64	0.27
0.93000 00	0.93160 00	1.131	0.034	65.00	3.88	0.63	0.27
0.94000 00	0.94200 00	1.122	0.043	65.00	1.53	0.62	0.26
0.95000 00	0.95250 00	1.113	0.053	65.00	-0.84	0.62	0.26
0.96000 00	0.96300 00	1.104	0.063	65.00	-3.21	0.61	0.26
0.97000 00	0.97360 00	1.095	0.072	65.00	-5.58	0.61	0.26
0.98000 00	0.98430 00	1.087	0.078	65.00	-7.95	0.60	0.26
0.99000 00	0.99490 00	1.078	0.074	65.00	-10.33	0.60	0.26
0.10000 01	0.10060 01	1.070	0.039	65.00	-12.77	0.59	0.26

R1/RE1	R3/RE1	V3Z/V1	V3R/V1	ALFA3	ALFA3R	M3	GRAD.REAC.
0.6500D 00	0.6324D 00	2.247	-0.386	-19.37	-46.70	0.60	0.52
0.6600D 00	0.6404D 00	1.984	-1.038	-21.27	-50.27	0.59	0.52
0.6700D 00	0.6496D 00	1.729	-1.265	-23.38	-54.07	0.56	0.50
0.6800D 00	0.6597D 00	1.588	-1.267	-24.38	-56.32	0.53	0.48
0.6900D 00	0.6703D 00	1.511	-1.190	-24.61	-57.62	0.50	0.46
0.7000D 00	0.6811D 00	1.462	-1.086	-24.47	-58.47	0.48	0.44
0.7100D 00	0.6921D 00	1.426	-0.975	-24.18	-59.13	0.45	0.43
0.7200D 00	0.7033D 00	1.397	-0.865	-23.83	-59.71	0.43	0.42
0.7300D 00	0.7145D 00	1.370	-0.758	-23.47	-60.24	0.41	0.41
0.7400D 00	0.7259D 00	1.347	-0.656	-23.10	-60.75	0.39	0.41
0.7500D 00	0.7373D 00	1.326	-0.558	-22.73	-61.23	0.38	0.41
0.7600D 00	0.7488D 00	1.307	-0.467	-22.35	-61.69	0.36	0.41
0.7700D 00	0.7604D 00	1.290	-0.380	-21.98	-62.12	0.35	0.41
0.7800D 00	0.7721D 00	1.275	-0.299	-21.59	-62.52	0.34	0.42
0.7900D 00	0.7838D 00	1.264	-0.223	-21.19	-62.87	0.34	0.43
0.8000D 00	0.7955D 00	1.255	-0.152	-20.76	-63.18	0.33	0.43
0.8100D 00	0.8073D 00	1.250	-0.087	-20.31	-63.43	0.33	0.45
0.8200D 00	0.8191D 00	1.248	-0.028	-19.83	-63.62	0.32	0.46
0.8300D 00	0.8309D 00	1.250	0.026	-19.31	-63.74	0.32	0.47
0.8400D 00	0.8426D 00	1.256	0.074	-18.75	-63.79	0.32	0.48
0.8500D 00	0.8542D 00	1.266	0.116	-18.15	-63.76	0.33	0.50
0.8600D 00	0.8656D 00	1.281	0.150	-17.52	-63.66	0.33	0.51
0.8700D 00	0.8770D 00	1.300	0.177	-16.86	-63.48	0.33	0.53
0.8800D 00	0.8881D 00	1.323	0.195	-16.18	-63.24	0.34	0.55
0.8900D 00	0.8990D 00	1.349	0.204	-15.49	-62.95	0.35	0.56
0.9000D 00	0.9098D 00	1.376	0.202	-14.81	-62.63	0.35	0.58
0.9100D 00	0.9203D 00	1.403	0.189	-14.16	-62.32	0.36	0.59
0.9200D 00	0.9307D 00	1.428	0.165	-13.56	-62.05	0.36	0.61
0.9300D 00	0.9409D 00	1.447	0.130	-13.02	-61.88	0.36	0.62
0.9400D 00	0.9511D 00	1.457	0.087	-12.56	-61.86	0.37	0.63
0.9500D 00	0.9612D 00	1.455	0.039	-12.19	-62.02	0.36	0.64
0.9600D 00	0.9713D 00	1.441	-0.006	-11.91	-62.37	0.36	0.64
0.9700D 00	0.9816D 00	1.418	-0.036	-11.70	-62.88	0.35	0.64
0.9800D 00	0.9920D 00	1.395	-0.031	-11.48	-63.40	0.35	0.65
0.9900D 00	0.1002D 01	1.382	0.028	-11.18	-63.75	0.34	0.65
0.1000D 01	0.1013D 01	1.381	0.066	-10.84	-63.90	0.34	0.66

R1/RE1=0.65 ALFA2M=65. DELTA=0.150 M2M=0.70 H/C1=2.25 FI=1.50 LANDA=0.48 V2Z/V1=1.25 V3Z/V1=1.25

R1/RE1	R2/RE1	V2Z/V1	V2R/V1	ALFA2	ALFA2R	M2	M2R
0.6500D 00	0.6530D 00	1.393	0.027	65.00	43.90	0.86	0.51
0.6600D 00	0.6629D 00	1.382	0.055	65.00	43.09	0.85	0.49
0.6700D 00	0.6727D 00	1.373	0.063	65.00	42.27	0.84	0.48
0.6800D 00	0.6825D 00	1.364	0.063	65.00	41.43	0.83	0.47
0.6900D 00	0.6924D 00	1.355	0.060	65.00	40.57	0.82	0.46
0.7000D 00	0.7022D 00	1.347	0.055	65.00	39.69	0.81	0.44
0.7100D 00	0.7120D 00	1.339	0.051	65.00	38.77	0.80	0.43
0.7200D 00	0.7218D 00	1.330	0.046	65.00	37.82	0.79	0.42
0.7300D 00	0.7316D 00	1.322	0.041	65.00	36.84	0.78	0.41
0.7400D 00	0.7414D 00	1.314	0.035	65.00	35.83	0.77	0.40
0.7500D 00	0.7512D 00	1.306	0.030	65.00	34.77	0.76	0.39
0.7600D 00	0.7610D 00	1.298	0.026	65.00	33.68	0.75	0.38
0.7700D 00	0.7708D 00	1.291	0.021	65.00	32.55	0.75	0.37
0.7800D 00	0.7807D 00	1.283	0.017	65.00	31.37	0.74	0.36
0.7900D 00	0.7905D 00	1.275	0.012	65.00	30.16	0.73	0.36
0.8000D 00	0.8003D 00	1.267	0.008	65.00	28.90	0.72	0.35
0.8100D 00	0.8102D 00	1.260	0.005	65.00	27.59	0.71	0.34
0.8200D 00	0.8201D 00	1.252	0.002	65.00	26.23	0.70	0.33
0.8300D 00	0.8299D 00	1.245	-0.001	65.00	24.83	0.70	0.32
0.8400D 00	0.8398D 00	1.237	-0.004	65.00	23.39	0.69	0.32
0.8500D 00	0.8497D 00	1.230	-0.006	65.00	21.89	0.68	0.31
0.8600D 00	0.8597D 00	1.222	-0.008	65.00	20.35	0.67	0.30
0.8700D 00	0.8696D 00	1.215	-0.009	65.00	18.76	0.67	0.30
0.8800D 00	0.8796D 00	1.208	-0.010	65.00	17.13	0.66	0.29
0.8900D 00	0.8895D 00	1.201	-0.011	65.00	15.45	0.65	0.29
0.9000D 00	0.8995D 00	1.194	-0.011	65.00	13.73	0.65	0.28
0.9100D 00	0.9095D 00	1.187	-0.011	65.00	11.97	0.64	0.28
0.9200D 00	0.9196D 00	1.180	-0.010	65.00	10.17	0.63	0.27
0.9300D 00	0.9296D 00	1.173	-0.009	65.00	8.34	0.63	0.27
0.9400D 00	0.9397D 00	1.167	-0.007	65.00	6.48	0.62	0.26
0.9500D 00	0.9498D 00	1.160	-0.005	65.00	4.60	0.61	0.26
0.9600D 00	0.9599D 00	1.154	-0.002	65.00	2.70	0.61	0.26
0.9700D 00	0.9700D 00	1.148	0.001	65.00	0.78	0.60	0.25
0.9800D 00	0.9802D 00	1.142	0.003	65.00	-1.14	0.60	0.25
0.9900D 00	0.9904D 00	1.136	0.006	65.00	-3.08	0.59	0.25
0.1000D 01	0.1001D 01	1.130	0.004	65.00	-5.02	0.58	0.25

Influencia de δ, en el rotor cuando la directriz es de angulo cte

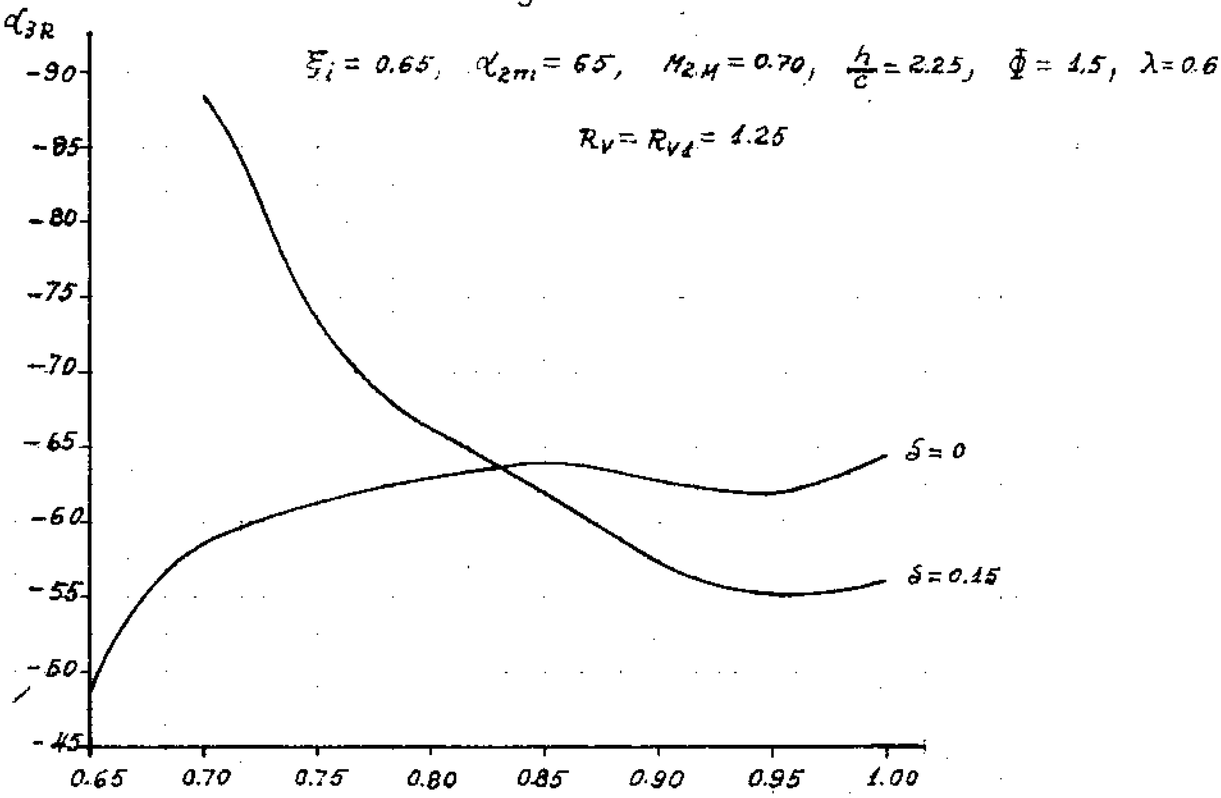


FIG.- 23 - 4

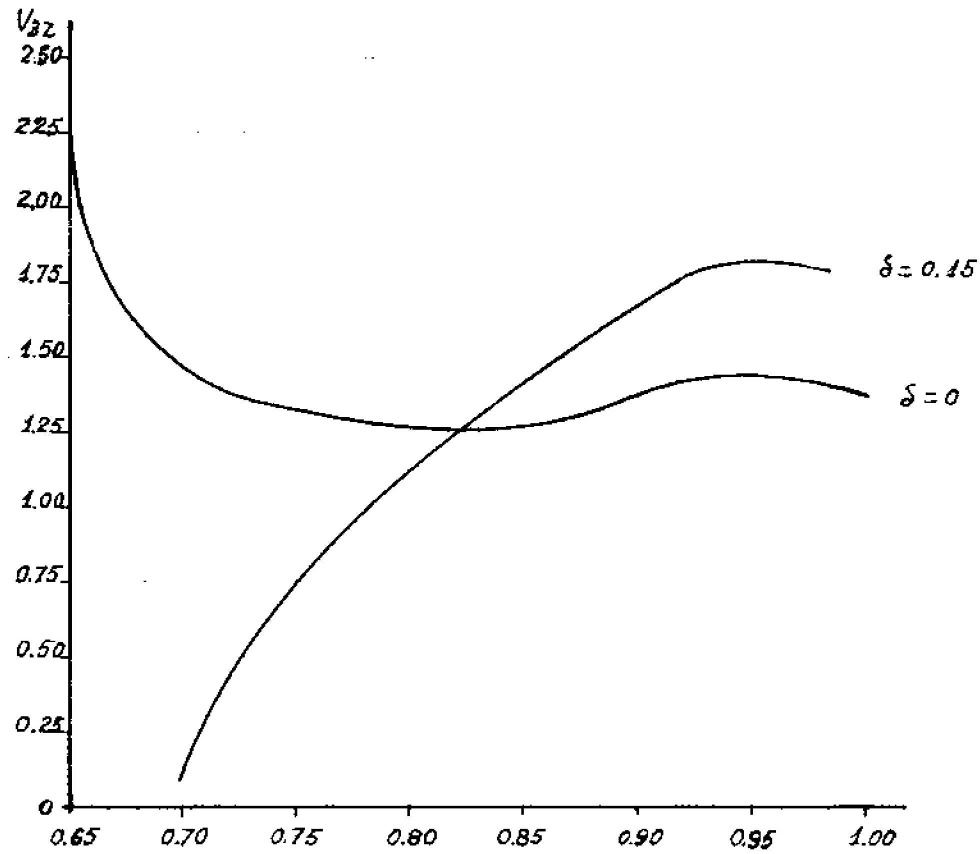


FIG.- 24 - 4.

Influencia de las desviaciones radiales. Directriz con angulo de salida constante $\delta = 0$.

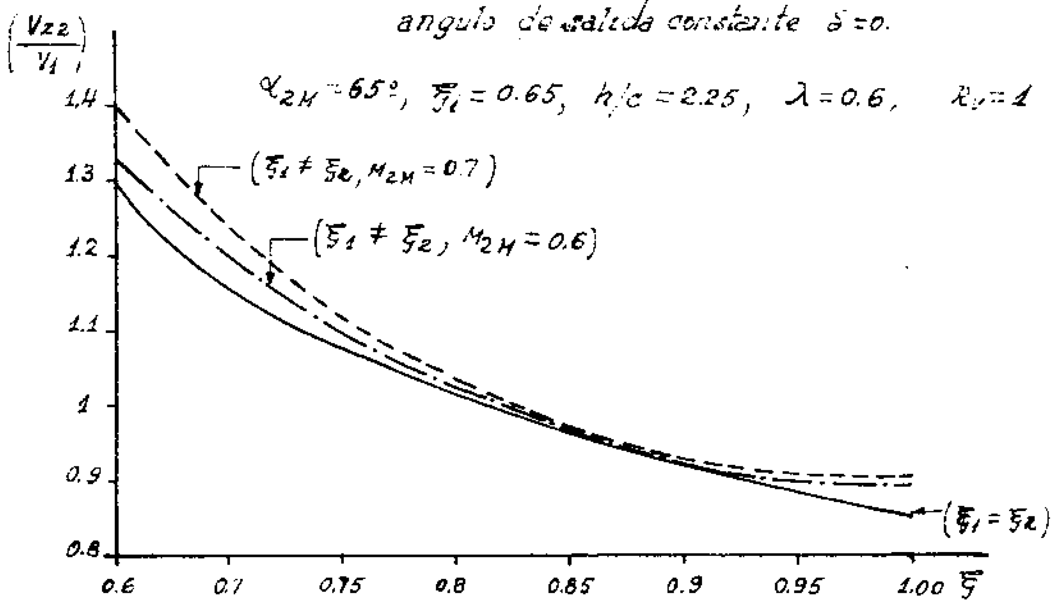


FIG.- 25-4.

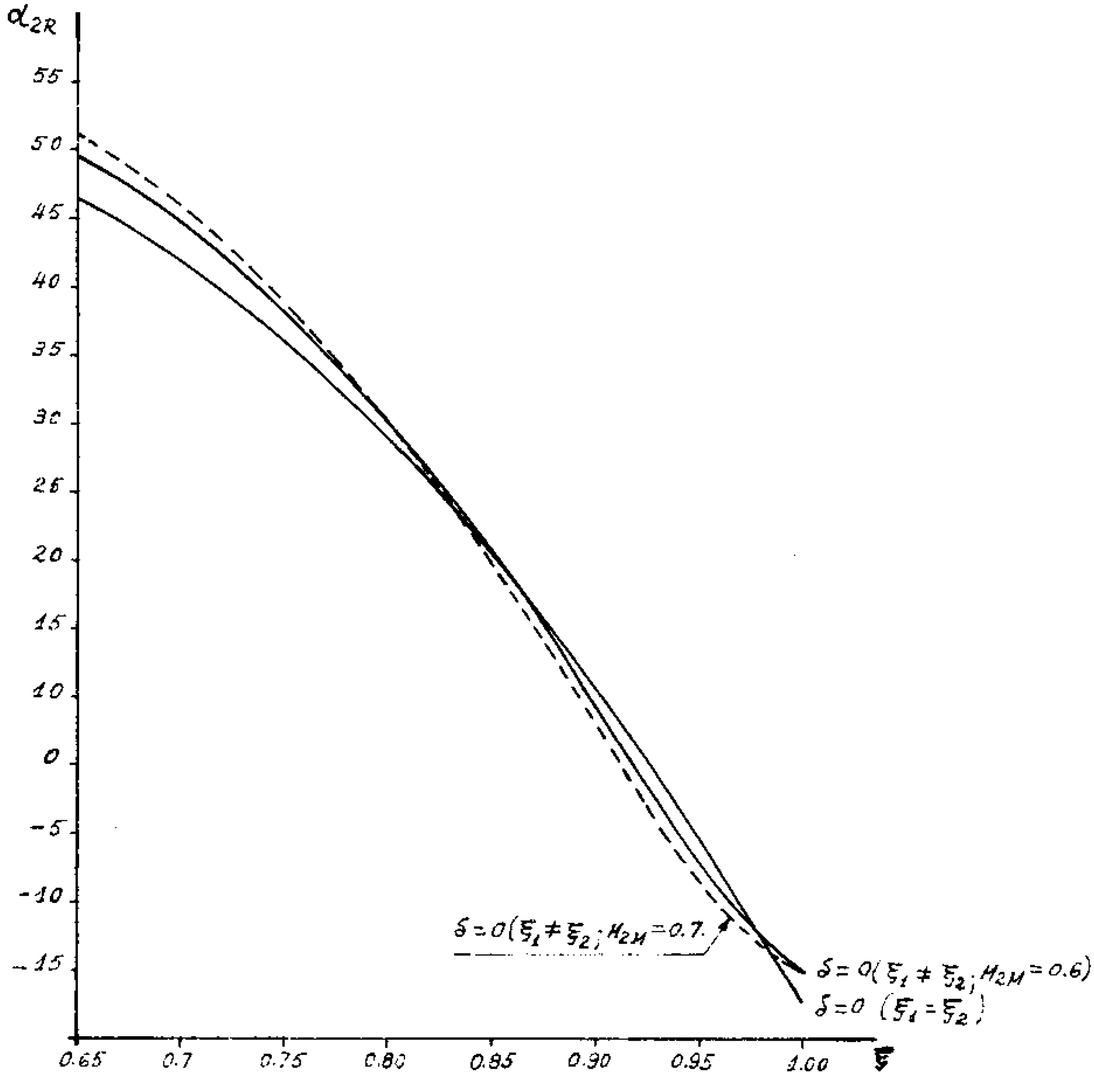


FIG.- 26-4

4-6 PROBLEMA DE ACTUACIONES

El problema de actuaciones, que tiene interés para nosotros, puede formularse de la siguiente manera: Diseñada una turbina con corriente homoentrópica, se trata de determinar las variables fluidas, ángulos de la corriente, rendimiento y trabajo específico que puede obtenerse; cuando se le hace funcionar con una corriente no homoentrópica. Es claro que en este caso son conocidos los ángulos de la corriente primitiva, la forma del canal y las condiciones nuevas de entrada. Supondremos que los ángulos de la corriente α_2 y α_{3R}, se mantienen constantes, lo que equivale a decir que las deflexiones de la corriente se mantienen constantes ó que las desviaciones angulares de la corriente son iguales en ambos casos.

En estas circunstancias el problema, para el caso del estator, queda resuelto mediante el sistema (4-5); teniendo en cuenta únicamente que en este caso $\alpha_2 = \alpha_2(\xi_1)$, conocida. Las condiciones de contorno son las impuestas por la forma especificada del canal.

El programa, què se presenta en el Apéndice, denominado programa "C" resuelve este tipo de problemas.

En la tabla (4-7) (pag. 145), se presenta la solución de un estator diseñado con corriente homoentrópica y en la tabla (4-8) (pag. 146), las actuaciones de dicho estator cuando el perfil de temperatura a la entrada es lineal y δ =0.15. La variación del ángulo α_{2R}, aunque no muy grande en este caso, significa una variación del ángulo de incidencia de la corriente relativa al rotor, causa por la cual las perdidas aumentan.

En cambio el problema del rotor no podemos resolverlo -- todavía mediante las ecuaciones de que disponemos ya que es-- tas han sido deducidas con la condición de que el trabajo específico se mantiene constante sobre una linea de corriente, cosa que no se cumple ó no tiene porque cumplirse en el problema de actuaciones.

La solución puede obtenerse como sigue: De la ecuación del impulso (1-10) y teniendo en cuenta que la ecuación de - la energía proporciona:

$$H_{t3} - u_3 V_{\theta 3} = H_{t2} - u_2 V_{\theta 2}$$

puede deducirse después de un desarrollo análogo al seguido en el apartado (1-3):

$$V_{m3}\frac{\partial V_{m3}}{\partial r_3} + \frac{V_{\theta 3}}{r_3}\left(\frac{\partial r V_{\theta 3}}{\partial r}\right)_3 - \left(\frac{\partial u V_{\theta 3}}{\partial r}\right)_3 = -\left[\frac{\cos\varphi}{r_c} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m}\right]_3 V_{m3}^2 +$$

$$+ \frac{V_3^2 + 2\tau - V_1^2}{2T_{t}}\frac{\partial T_t}{\partial r_1}\frac{dr_1}{dr_3} - \frac{\partial(u_2 V_{\theta 2})}{\partial r_2}\frac{dr_2}{dr_3} \qquad (4-19)$$

Por otra parte sabemos que en este caso es conocido $\alpha_{3R}(r)$ lo que proporciona la relación:

$$V_{m3} = \frac{V_{\theta 3} - u_3}{\cos\varphi_3 \operatorname{tg}\alpha_{3R}} \qquad (4-20)$$

Eliminándo $\dfrac{\partial V_{m3}}{\partial r_3}$ entre las ecuaciones (4-19) y (4-20), se obtiene en forma adimensional:

$$\frac{\partial V_{\theta 3}/V_1}{\partial \xi_1} = \frac{\cos\beta}{\lambda_1 \xi_{1m}}\frac{d\xi_3}{d\xi_1} + \frac{\cos^2\beta}{\operatorname{tg}\beta}\left(\frac{V_{\theta 3}}{V_1} - \frac{\xi_3}{\lambda_1\xi_{1m}}\right)\frac{d}{d\xi_1}(\operatorname{tg}\beta)$$

$$- \frac{V_{\theta 3}/V_1}{\xi_3}\operatorname{sen}^2\beta\frac{d\xi_3}{d\xi_1} - \left[\frac{\cos\varphi}{r_c}r_{e1} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m}r_{e1}\right]_3 \cos^2\beta \times$$

$$\times\left(\frac{V_{\theta 3}}{V_1} - \frac{\xi_3}{\lambda_1\xi_{1m}}\right)\frac{d\xi_3}{d\xi_1} + \left[\frac{(V_3/V_1)^2 + 2\tau/V_1^2 - 1}{2T_t/T_{t1m}}\frac{dT_t/T_{t1m}}{d\xi_1} - \frac{\partial\left(\frac{u_2}{V_1}\frac{V_{\theta 2}}{V_1}\right)}{\partial\xi_1}\right]\times$$

$$\times\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{V_{\theta 3}/V_1 - \xi_3/\lambda_1\xi_{1m}} \qquad (4-21)$$

habiendo hecho:

$$tg\,\delta = \cos\gamma_3\, tg\,\alpha_{3R}$$

si se opera ahora igual que en el apartado (4-4), pero uti lizándo la ecuación (4-21), en lugar de la ecuación (4-14), se obtiene un sistema análogo al (4-16) ó (4-17) que puede ser resuelto en la misma forma teniendo en cuenta las rela ciones deducidas de la ecuación de la linea de corriente y las relaciones existentes entre las variables fluidas, pero con la salvedad de que el problema actual es un problema en condiciones de contorno.

RI1/RE1=0.65 ALFA2M=65. DELTA=0. M2M=0.61 H/C1=2.25 FI=1.50 LANDA=0.60 V2Z/V1=1.17 V3Z/V1=1.17

R1/RE1	R2/RE1	V2Z/V1	V2R/V1	ALFA2	ALFA2R	M2	M2R
0.6500D 00	0.6599D 00	1.380	0.088	65.00	45.28	0.72	0.43
0.6600D 00	0.6689D 00	1.365	0.167	65.00	44.46	0.71	0.42
0.6700D 00	0.6779D 00	1.353	0.180	65.00	43.68	0.71	0.41
0.6800D 00	0.6870D 00	1.342	0.171	65.00	42.90	0.70	0.40
0.6900D 00	0.6962D 00	1.331	0.154	65.00	42.09	0.69	0.39
0.7000D 00	0.7054D 00	1.321	0.135	65.00	41.24	0.69	0.39
0.7100D 00	0.7146D 00	1.310	0.116	65.00	40.35	0.68	0.38
0.7200D 00	0.7239D 00	1.299	0.098	65.00	39.40	0.67	0.37
0.7300D 00	0.7333D 00	1.287	0.081	65.00	38.40	0.67	0.36
0.7400D 00	0.7427D 00	1.276	0.066	65.00	37.33	0.66	0.35
0.7500D 00	0.7521D 00	1.264	0.052	65.00	36.21	0.66	0.34
0.7600D 00	0.7617D 00	1.252	0.040	65.00	35.02	0.65	0.33
0.7700D 00	0.7712D 00	1.240	0.030	65.00	33.77	0.64	0.33
0.7800D 00	0.7809D 00	1.228	0.021	65.00	32.44	0.64	0.32
0.7900D 00	0.7906D 00	1.216	0.013	65.00	31.04	0.63	0.31
0.8000D 00	0.8003D 00	1.204	0.008	65.00	29.56	0.62	0.30
0.8100D 00	0.8102D 00	1.193	0.003	65.00	28.01	0.62	0.29
0.8200D 00	0.8200D 00	1.181	0.001	65.00	26.38	0.61	0.29
0.8300D 00	0.8300D 00	1.169	-0.000	65.00	24.68	0.60	0.28
0.8400D 00	0.8400D 00	1.158	-0.000	65.00	22.89	0.60	0.27
0.8500D 00	0.8501D 00	1.146	0.001	65.00	21.03	0.59	0.27
0.8600D 00	0.8602D 00	1.135	0.004	65.00	19.09	0.58	0.26
0.8700D 00	0.8704D 00	1.125	0.009	65.00	17.09	0.58	0.26
0.8800D 00	0.8807D 00	1.114	0.014	65.00	15.01	0.57	0.25
0.8900D 00	0.8910D 00	1.104	0.021	65.00	12.87	0.57	0.25
0.9000D 00	0.9014D 00	1.094	0.029	65.00	10.68	0.56	0.24
0.9100D 00	0.9118D 00	1.084	0.037	65.00	8.44	0.56	0.24
0.9200D 00	0.9223D 00	1.075	0.047	65.00	6.16	0.55	0.23
0.9300D 00	0.9328D 00	1.066	0.058	65.00	3.86	0.55	0.23
0.9400D 00	0.9435D 00	1.057	0.070	65.00	1.53	0.54	0.23
0.9500D 00	0.9541D 00	1.049	0.082	65.00	-0.81	0.54	0.23
0.9600D 00	0.9648D 00	1.041	0.094	65.00	-3.14	0.53	0.23
0.9700D 00	0.9756D 00	1.034	0.105	65.00	-5.48	0.53	0.23
0.9800D 00	0.9864D 00	1.026	0.111	65.00	-7.81	0.53	0.22
0.9900D 00	0.9973D 00	1.019	0.102	65.00	-10.15	0.52	0.22
0.1000D 01	0.1008D 01	1.011	0.053	65.00	-12.55	0.52	0.22

ξ_i=0.6500 ξ_{2i}=0.6599 ξ_{2e}=1.0080 $\bar{c}$=0.1500 M_m=0.2125 $\frac{b}{c}$=2.2500 λ=0.5106

R1/RE1	R2/RE1	V2Z/V1	V2R/V1	ALFA2	ALFA2R	M2	M2R
0.6500D 00	0.6599D 00	1.229	0.078	65.00	41.03	0.69	0.39
0.6600D 00	0.6698D 00	1.219	0.164	65.00	40.05	0.69	0.38
0.6700D 00	0.6796D 00	1.212	0.196	65.00	39.13	0.68	0.37
0.6800D 00	0.6895D 00	1.207	0.208	65.00	38.23	0.67	0.36
0.6900D 00	0.6994D 00	1.202	0.212	65.00	37.35	0.67	0.35
0.7000D 00	0.7093D 00	1.198	0.212	65.00	36.45	0.66	0.35
0.7100D 00	0.7193D 00	1.194	0.211	65.00	35.54	0.65	0.34
0.7200D 00	0.7292D 00	1.190	0.209	65.00	34.61	0.65	0.33
0.7300D 00	0.7391D 00	1.187	0.207	65.00	33.66	0.64	0.33
0.7400D 00	0.7490D 00	1.183	0.205	65.00	32.69	0.64	0.32
0.7500D 00	0.7589D 00	1.180	0.203	65.00	31.70	0.63	0.31
0.7600D 00	0.7689D 00	1.177	0.201	65.00	30.68	0.63	0.31
0.7700D 00	0.7788D 00	1.173	0.199	65.00	29.64	0.62	0.30
0.7800D 00	0.7887D 00	1.170	0.197	65.00	28.58	0.62	0.30
0.7900D 00	0.7986D 00	1.167	0.195	65.00	27.49	0.61	0.29
0.8000D 00	0.8086D 00	1.164	0.193	65.00	26.38	0.61	0.29
0.8100D 00	0.8185D 00	1.162	0.191	65.00	25.25	0.60	0.28
0.8200D 00	0.8285D 00	1.159	0.189	65.00	24.10	0.60	0.28
0.8300D 00	0.8384D 00	1.156	0.188	65.00	22.92	0.60	0.27
0.8400D 00	0.8484D 00	1.153	0.186	65.00	21.72	0.59	0.27
0.8500D 00	0.8583D 00	1.151	0.185	65.00	20.50	0.59	0.27
0.8600D 00	0.8683D 00	1.148	0.183	65.00	19.26	0.58	0.26
0.8700D 00	0.8782D 00	1.146	0.182	65.00	18.00	0.58	0.26
0.8800D 00	0.8882D 00	1.143	0.181	65.00	16.72	0.58	0.25
0.8900D 00	0.8982D 00	1.141	0.180	65.00	15.43	0.57	0.25
0.9000D 00	0.9082D 00	1.139	0.179	65.00	14.12	0.57	0.25
0.9100D 00	0.9181D 00	1.137	0.178	65.00	12.79	0.57	0.24
0.9200D 00	0.9281D 00	1.135	0.177	65.00	11.45	0.56	0.24
0.9300D 00	0.9381D 00	1.132	0.176	65.00	10.09	0.56	0.24
0.9400D 00	0.9481D 00	1.130	0.175	65.00	8.72	0.55	0.24
0.9500D 00	0.9581D 00	1.128	0.173	65.00	7.34	0.55	0.24
0.9600D 00	0.9681D 00	1.126	0.170	65.00	5.95	0.55	0.23
0.9700D 00	0.9780D 00	1.124	0.164	65.00	4.53	0.54	0.23
0.9800D 00	0.9880D 00	1.122	0.152	65.00	3.09	0.54	0.23
0.9900D 00	0.9981D 00	1.119	0.124	65.00	1.58	0.54	0.23
0.1000D 01	0.1008D 01	1.115	0.058	65.00	-0.06	0.53	0.23

$IBSYS

4-7 DISCUSION DE LA HIPOTESIS DE LAS DESVIACIONES RADIALES Y SOLUCION APROXIMADA.

A través de desarrollos anteriores, ha podido comprobarse que la solución numérica obtenida en el caso de torbellino libre, difiere en general de la obtenida con la hipótesis de que las desviaciones radiales son pequeñas. Las siguientes consideraciones explican la razón de tal comportamiento.

Refiriéndonos al sistema (4-3), si se supone $\xi_2 \simeq \xi_1$ es decir $d\xi_2/d\xi_1 = 1$, la ecuación del impulso proporciona $\frac{V_{m2}}{V_1}$ = cte, con lo que la ecuación de continuidad proporciona:

$$\frac{V_{2m}}{V_1} \simeq \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Esto significa que para esperar pequeñas desviaciones radiales y en consecuencia que sea válida la solución:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 \\ \frac{V_{m2}}{V_1} &= cte \end{aligned} \tag{4-22}$$

debe cumplirse que $V_{m2}/V_1 \simeq \rho_1/\rho_2$; contrariamente si V_{m2}/V_1 difiere apreciablemente de ρ_1/ρ_2, existirán desviaciones radiales apreciables y su influencia en la ecuación del impulso considerable, no siendo válida entonces la solución (4-22), lo -- que en cierto modo se pone de manifiesto en las figuras (4-14), (4-15), (4-17) y (4-18).

De todo lo anterior no obstante, se deduce la posibilidad de obtener una solución aproximada del sistema (4-3), mediante linealización alrededor de la solución (4-22) que puede ser -- considerada como una solución primera. Si denotamos con la solución aproximada que se vá a obtener a partir de la solución (4-22), que designaremos con el subindice cero, puede escribirse teniendo en cuenta además la expresión general (4-13):

$$\frac{d(Vm2/V_1)_1}{d\xi_1} = f_1\left(\left(\frac{Vm2}{V_1}\right)_0, \xi_{20}, \xi_1\right) + \left(\frac{\partial f_1}{d\xi_2}\right)_0 (\xi_{21} - \xi_{20}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{Vm2}{V_1}\right)}\right)_0 \left[\left(\frac{Vm2}{V_1}\right)_1 - \left(\frac{Vm2}{V_1}\right)_0\right]$$

$$\frac{d\xi_{21}}{d\xi_1} = f_2\left(\left(\frac{Vm2}{V_1}\right)_0, \xi_{20}, \xi_1\right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial\xi_2}\right)_0 (\xi_{21} - \xi_{20}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial\left(\frac{Vm2}{V_1}\right)}\right)_0 \left(\left(\frac{Vm2}{V_1}\right)_1 - \left(\frac{Vm2}{V_1}\right)_0\right)$$

por lo que al tener en cuenta las relaciones (4-4), el sistema que proporciona la solución aproximada es:

$$\text{a)} \quad \frac{d(Vm2/V_1)_1}{d\xi_1} = C(\xi_1)(\xi_{21} - \xi_1)$$

$$\text{b)} \quad \frac{d\xi_{21}}{d\xi_1} = \frac{TD_0}{(V2m/V_1)_0} - \frac{TD_0}{(Vm2/V_1)_0}\,\frac{\xi_{21} - \xi_{20}}{\xi_1} - \frac{TD_0}{(Vm2/V_1)_0^2}\left[\left(\frac{V2m}{V_1}\right)_1 - \left(\frac{V2m}{V_1}\right)_0\right] \qquad (4\text{-}23)$$

habiendo hecho

$$C(\xi_1) = 3\,\delta_0^2 \left(\frac{Vm2}{V_1}\right)_0 \left(3 - \frac{TD_0}{(Vm2/V_1)_0}\right)$$

$$TD_0 = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)_0$$

No obstante el sistema (4-23) puede simplificarse todavía más, teniendo en cuenta que el término $\frac{TD_0}{(Vm2/V_1)_0}\,\frac{\xi_{21} - \xi_{20}}{\xi_1}$ es pequeno comparado con los demás términos de la ecuación de continuidad, y haciendo $C(\xi_1) \simeq C(\xi_{1m}) = C$, lo que puede confirmarse con los resultados numéridos obtenidos.

Eliminando ahora ξ_{21} entre las ecuaciones (4-23a) y (4-23b), queda finalmente:

$$\frac{d^2(Vm2/V_1)_1}{d\xi_1} + \nu^2\left(\frac{Vm2}{V_1}\right)_1 = f(\xi_1) \qquad (4\text{-}24)$$

con:

a) $$\nu^2 = C \frac{T\Delta_0}{(V_{m2}/V_1)_0^2}$$ (4-25)

b) $$f(\xi_1) = C\left[2\frac{T\Delta_0}{(V_{m2}/V_1)} - 1\right]$$

Si para ν se toma el valor correspondiente al punto medio, es decir $\nu = \nu_M$, la ecuación (4-24), puede ser considerada como una ecuación lineal de segundo órden de coeficientes constantes; obteniéndose la siguiente solución para la ecuación homogenea:

$$\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_1 = A \operatorname{sen} \nu_M \xi_1 + B \cos \nu_M \xi_1$$

La solución completa puede obtenerse por el método de variación de las constantes; resultando finalmente:

$$\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_1 = \operatorname{sen} \nu_M \xi_1 \left[\int^{\xi_1} \frac{f(\xi_1)}{\nu_M} \cos \nu_M \xi_1 \, d\xi_1 + K_1\right] + \cos \nu_M \xi_1 \left[K_2 - \int^{\xi_1} \frac{f(\xi_1)}{\nu_M} \operatorname{sen} \nu_M \xi_1 \, d\xi_1\right]$$

La determinación de las constantes K_1 y K_2 se obtiene imponiendo las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_1 &= \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_{1M} \\ \xi_{21} &= \xi_{1m} \end{aligned}\right\} \text{ para } \xi_1 = \xi_{1m}$$

lo que equivale a:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_1 &= \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_{1M} \\ \frac{d\,(V_{m2}/V_1)_1}{d\xi_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ para } \xi_1 = \xi_{1m}$$

si se tiene en cuenta la ecuación diferencial (4-23a), después de determinar las constantes la expresión que resulta es:

$$\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_1 = \operatorname{sen} \nu_n \xi_1 \int_{\xi_{1m}}^{\xi_1} \frac{f(\xi_1)}{\nu_n} \cos \nu_n \xi_1 \, d\xi_1 - \cos \nu_n \xi_1 \int_{\xi_{1m}}^{\xi_1} \frac{f(\xi_1)}{\nu_n} \operatorname{sen} \nu_n \xi_1 \, d\xi_1$$
$$+ \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_{1m} \cos \nu_n (\xi_1 - \xi_{1m})$$

Las integrales pueden ser obtenidas sustituyéndo el valor de - $f(\xi_1)$ proporcionado por la relación (4-25b) y teniendo en -- cuenta que para $\gamma = 1.33$

$$TD_0 \simeq \left(\frac{1+0.165 M_2^2}{1+0.165 M_{1m}^2}\right)_0^3 \simeq \left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2} V_2^2 M_{1m}^2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)_{0m}}{1+\frac{\gamma-1}{2} M_{1m}^2}\right)^3$$

es decir, (teniendo en cuenta además la ley torsional torbellino libre)

$$TD_0 = \frac{1}{Fa}\left(1+Fb\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_0^2 + \frac{Fc}{\xi_1^2}\right)^3$$

con

$$Fa = \left(1+0.165 M_{1m}^2\right)^{3.03}$$
$$Fb = 0.165 M_{1m}^2 \left(\frac{T_1}{T_0}\right)_{0M}$$
$$Fc = \left(\xi_{1m} \Psi R_r\right)^2 Fb$$

por lo que finalmente resulta:

$$\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_1 = \frac{M}{\nu_n^2} + \left[\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_{1m} - \frac{m}{\nu_n^2}\right] \cos \nu_n (\xi_1 - \xi_{1m}) + \frac{N \operatorname{sen} \nu_n (\xi_1 - \xi_{1m})}{\nu_n \xi_{1m}}$$
$$- N \left[\operatorname{sen} \nu_n \xi_1 \int_{x_m}^{x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \cos \nu_n \xi_1 \int_{x_m}^{x} \frac{\cos x}{x} dx \right] \quad (4\text{-}26)$$

con

$$M = \frac{C}{Fa\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_0} \left[2a^3 - Fa\left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_0 + \frac{6a\,Fc^2}{\xi_{1m}^4} + 2\,\frac{Fc^3}{\xi_{1m}^6} \right]$$

$$N = \frac{6a^2 C \bar{F}_c}{(V_{m2}/V_1)\bar{F}_a}$$

$$a = \left[1 + \bar{F}_b \left(V_{m2}/V_1\right)_0^2\right]$$

$$x = \nu_M \xi_1$$

La expresión (4-26) proporciona por tanto la distribución - aproximada de velocidades. Las integrales que aparece en di_ cha expresión son conocidas con el nombre de integral seno e integral coseno y estan tabuladas. Por otra parte teniendo en cuenta la expresión (4-23a), puede obtenerse sin difi_ cultad:

$$\xi_{21} = \xi_1 + \frac{\nu_M}{C}\left[\frac{M}{C} - \left(\frac{V_{m2}}{V_1}\right)_{1m}\right] \operatorname{sen} \nu_M(\xi_1 - \xi_{1m}) -$$

$$- N\left[\frac{1}{\xi_1} - \frac{\cos \nu_M(\xi_1 - \xi_{1m})}{\xi_{1m}}\right] - N\nu_M\left[\cos \nu_M \xi_1 \int_{x_m}^{x} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx - \operatorname{sen} \nu_M \xi_1 \int_{x_m}^{x} \frac{\cos x}{x}dx\right] \quad (4\text{-}27)$$

habiendo completado con esto la solución del problema.

En las tablas (4-9), (4-11) y (4-13) (Pag.152 a 157), - se presentan soluciones numéricas del estator para diversos valores de los parámetros y en las tablas (4-10), (4-12)y -- (4-14), las correspondientes soluciones aproximadas obtenidas con las ecuaciones (4-26) y (4-27). Como puede comprobarse la aproximación obtenida para la distribución de velocidad axial, ángulos de la corriente y número de Mach es satisfactoria.

R1/RE1	R2/RE1	V2Z/V1	V2R/V1	ALFA2	ALFA2R	M2
0.6500D 00	0.6342D 00	1.513	-0.154	61.52	44.91	0.83
0.6600D 00	0.6434D 00	1.468	-0.336	61.90	44.64	0.82
0.6700D 00	0.6529D 00	1.411	-0.407	62.50	44.59	0.81
0.6800D 00	0.6626D 00	1.353	-0.427	63.12	44.53	0.79
0.6900D 00	0.6726D 00	1.300	-0.422	63.71	44.37	0.77
0.7000D 00	0.6829D 00	1.251	-0.405	64.23	44.07	0.76
0.7100D 00	0.6935D 00	1.207	-0.381	64.68	43.62	0.74
0.7200D 00	0.7043D 00	1.168	-0.352	65.06	42.99	0.72
0.7300D 00	0.7153D 00	1.135	-0.321	65.36	42.19	0.71
0.7400D 00	0.7265D 00	1.105	-0.287	65.59	41.20	0.70
0.7500D 00	0.7378D 00	1.080	-0.253	65.74	40.02	0.68
0.7600D 00	0.7493D 00	1.059	-0.218	65.84	38.66	0.67
0.7700D 00	0.7609D 00	1.042	-0.183	65.87	37.11	0.66
0.7800D 00	0.7725D 00	1.028	-0.148	65.84	35.38	0.65
0.7900D 00	0.7842D 00	1.016	-0.114	65.75	33.47	0.64
0.8000D 00	0.7959D 00	1.008	-0.080	65.60	31.39	0.63
0.8100D 00	0.8076D 00	1.003	-0.047	65.40	29.15	0.62
0.8200D 00	0.8192D 00	1.000	-0.015	65.15	26.77	0.61
0.8300D 00	0.8308D 00	1.000	0.015	64.84	24.28	0.60
0.8400D 00	0.8423D 00	1.003	0.044	64.48	21.69	0.60
0.8500D 00	0.8537D 00	1.008	0.072	64.06	19.04	0.59
0.8600D 00	0.8650D 00	1.016	0.097	63.59	16.35	0.58
0.8700D 00	0.8761D 00	1.026	0.120	63.06	13.67	0.58
0.8800D 00	0.8870D 00	1.039	0.141	62.48	11.03	0.58
0.8900D 00	0.8978D 00	1.055	0.159	61.84	8.46	0.57
0.9000D 00	0.9084D 00	1.073	0.174	61.16	5.98	0.57
0.9100D 00	0.9188D 00	1.093	0.185	60.42	3.64	0.57
0.9200D 00	0.9290D 00	1.115	0.192	59.65	1.43	0.57
0.9300D 00	0.9389D 00	1.139	0.195	58.85	-0.63	0.56
0.9400D 00	0.9486D 00	1.164	0.192	58.02	-2.53	0.56
0.9500D 00	0.9582D 00	1.190	0.185	57.20	-4.29	0.56
0.9600D 00	0.9675D 00	1.215	0.170	56.41	-5.92	0.56
0.9700D 00	0.9766D 00	1.238	0.149	55.66	-7.43	0.56
0.9800D 00	0.9856D 00	1.257	0.119	55.00	-8.87	0.56
0.9900D 00	0.9945D 00	1.270	0.079	54.47	-10.27	0.56
0.1000D 01	0.1003D 01	1.275	0.027	54.12	-11.68	0.55

CONCLUSIONES

1ª Los efectos de la no homoentropía de la corriente, consecuencia de una distribución no uniforme de temperatura en la sección de salida de la cámara de combustión, pueden ser tenidos en cuenta sin complicar la formulación y solución del problema de determinación de velocidades y ángulos de la corriente en un escalón.

2ª Estos efectos no pueden ser ignorados porque se cometen grandes errores, cuando dichos ángulos y velocidades son calculados suponiendo que la corriente es homoentrópica.

3ª Con un perfil lineal de temperaturas, decreciente desde el extremo a la raiz del álabe, se consigue disminuir la temperatura en la raiz del mismo en órden de magnitud igual al de la desviación de la temperatura maxima con respecto a la media; sin embargo las zonas apropiadas para el diseño, en el diagrama coeficiente de carga - coeficiente de flujo, se reducen cuando se elige como ley torsional: torbellino libre ó ángulo de salida de la directriz constante.

4ª La hipótesis de pequeñas desviaciones radiales solo es valida para los casos en los que la relación $\left(\frac{h}{c}\right)$ es pequeña y se cumple además $\frac{\rho_1}{\rho_2} \simeq \frac{\rho_1}{\rho_3} \simeq \frac{V_{z2}}{V_1} \simeq \frac{V_{z3}}{V_1}$; no obstante puede ser utilizada para el estudio cualitativo de diversas leyes torsionales, estudio comparativo de la influencia de las corrientes no homoentrópicas y finalmente para la obtención de una solución primera en el diseño de turbinas de gas.

5ª El problema de determinación de las variables fluidas en un escalón, con la inclusión de los términos que dependen de las desviaciones radiales, puede ser resuelto numéricamente por resolución simultanea de las ecuaciones de continuidad e impulso, mediante el método de integración numérica de Kutta-Runge.

6ª Se obtiene una solución analítica para el estator, en el caso de ley torsional torbellino libre y corriente no homoentrópica, linealizándo el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de continuidad e impulso.

APENDICE

ECUACIONES GENERALES APLICADAS A TURBOMAQUINAS

A-1.- ECUACION DEL IMPULSO

La ecuación del movimiento para un fluido no viscoso, en forma vectorial, referida a ejes absolutos es:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

que al descomponerla en sus componentes según $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$; en un sistema de coordenadas cilíndricas resulta:

$$\text{a)}\quad \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + V_\theta\frac{V_r}{r} = -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \quad \text{(A-1)}$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Añadiendo y sustrayendo $V_\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial r}$ a la ecuación (A-1a) $\frac{1}{r}\left(V_r\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial \theta}\right)$ a la ecuación (A-1b), y $V_r\frac{\partial V_r}{\partial z} + V_\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial z}$ a la ecuación (A-1c) puede escribirse:

$$\text{a)}\quad \frac{\partial V_r}{\partial t} - \frac{V_\theta}{r}\left(\frac{\partial rV_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) + V_z\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial \frac{1}{2}V^2}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial V_\theta}{\partial t} - \frac{V_z}{r}\left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial rV_\theta}{\partial z}\right) + \frac{V_r}{r}\left(\frac{\partial rV_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \frac{1}{2}V^2}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \quad \text{(A-2)}$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial V_z}{\partial t} - V_r\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} \quad \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{V_\theta}{r}\left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial rV_\theta}{\partial z}\right) + \frac{\partial \frac{1}{2}V^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Los terminos entre parentesis del sistema de ecuaciones (A-2) son los componentes del vector torbellino (vease ecuación -- (A-10)) y en consecuencia el sistema de ecuación (A-2) queda reducido a la ecuación vectorial:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V}_\wedge (\nabla_\wedge \vec{V}) + \nabla \frac{1}{2} \vec{V}^2 = \frac{-1}{\rho} \nabla p \qquad (A-3)$$

ahora bien el segundo principio de la termodinámica aplicado a un fluido homogeneo proporciona:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla H_t - T \nabla S - \nabla \frac{1}{2} V^2 \qquad (A-4)$$

De forma que la ecuación (A-3) puede expresarse en la forma:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V}_\wedge (\nabla_\wedge \vec{V}) = -\nabla H_t + T \nabla S \qquad (A-5)$$

La ecuación (A-5) es una forma de la ecuación del movimiento conocida con el nombre de ecuación de Crocco.

En el caso de que consideremos que el movimiento es estacionario queda:

$$\vec{V}_\wedge (\nabla_\wedge \vec{V}) = \nabla H_t - T \nabla S \qquad (A-6)$$

A partir de este punto es muy util, en las aplicaciones de la ecuación de Crocco, a las máquinas rotatorias, descomponer la velocidad en sus componentes meridional y tangencial; es decir según la tangente a la proyección de la trayectoria sobre un plano meridional y según la normal de dicho plano respectivamente, tal como se indica en la figura A-1, de donde resultan las relaciones:

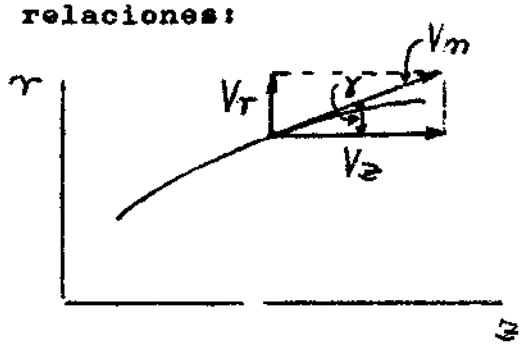


Fig. A-1

a) $V_m^2 = V_r^2 + V_z^2$

b) $tg\,\gamma = \frac{V_r}{V_z}$

c) $V^2 = V_m^2 + V_\theta^2$ (A-7)

d) $V_z = V_m \cos\gamma$

e) $V_r = V_m \,sen\,\gamma$

Dado que:

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{dr}{dm} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dm} = sen\,\gamma\frac{\partial}{\partial r} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{(A-8)}$$

Se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\cos\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial m} - sen\,\gamma\frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad \text{(A-9)}$$

Recordando:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \left(\nabla\wedge\vec{V}\right)_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial rV_\theta}{\partial z}\right)\\ &b)\ \left(\nabla\wedge\vec{V}\right)_\theta = \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\\ &c)\ \left(\nabla\wedge\vec{V}\right)_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rV_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A-10)}$$

Al hacer uso de las relaciones (A-7) y (A-9) las ecuaciones (A-10), pueden escribirse:

$$a)\ \left(\nabla\wedge\vec{V}\right)_r = \frac{tg\,\gamma}{r}\left[\frac{\partial rV_\theta}{\partial r} - \frac{1}{sen\,\gamma}\frac{\partial rV_\theta}{\partial m} + \frac{\cos^2\gamma}{sen\,\gamma}\frac{\partial V_m}{\partial\theta} - V_m^2\left(\frac{\cos\gamma}{V_m}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right]$$

b) $$(\nabla\wedge\vec{V})_\theta = \frac{1}{V_m \cos\gamma}\left[V_m^2\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m} - \frac{\cos\gamma}{r_c}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial V_m^2}{\partial r}\right] \quad \text{(A-11)}$$

c) $$(\nabla\wedge\vec{V})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \operatorname{sen}\gamma\frac{\partial V_m}{\partial \theta} - V_m^2\left(\frac{\cos\gamma}{V_m}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right]$$

donde r_c, es el radio de curvatura de la proyección meridional de una linea de corriente estando definido por:

$$\frac{1}{r_c} = -\frac{\partial\gamma}{\partial m} \quad \text{(A-12)}$$

En consecuencia la ecuación vectorial de Crocco puede escribirse descompuesta en sus componentes según sigue:

a) radial

$$V_\theta(\nabla\wedge\vec{V})_z - V_z(\nabla\wedge\vec{V})_\theta = \frac{\partial H_t}{\partial r} - T\frac{\partial S}{\partial r}$$

b) tangencial

$$V_z(\nabla\wedge\vec{V})_r - V_r(\nabla\wedge\vec{V})_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_t}{\partial\theta} - T\frac{\partial S}{\partial\theta}\right) \quad \text{(A-13)}$$

c) axial

$$V_r(\nabla\wedge\vec{V})_\theta - V_\theta(\nabla\wedge\vec{V})_r = \frac{\partial H_t}{\partial z} - T\frac{\partial S}{\partial z}$$

Las ecuaciones (A-13) desarrolladas teniendo en cuenta las - ecuaciones (A-11) y (A-9) y las relaciones (A-7) toman la -- forma:

a) $$\frac{V_\theta}{r}\left[\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \operatorname{sen}\gamma\frac{\partial V_m}{\partial\theta} - V_m^2\left(\frac{\cos\gamma}{V_m}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right] - \left[V_m^2\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m} - \frac{\cos\gamma}{r_c}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial V_m^2}{\partial r}\right] = \frac{\partial H_t}{\partial r} - T\frac{\partial S}{\partial r}$$

b) $$V_m\left[\frac{\partial V_m}{\partial\theta} - \frac{\partial r V_\theta}{\partial m}\right] = \frac{\partial H_t}{\partial\theta} - T\frac{\partial S}{\partial\theta} \quad \text{(A-14)}$$

c) $$\operatorname{tg}\gamma \left[V_m^2 \left(\frac{\operatorname{sen}\gamma}{V_m} \frac{\partial V_m}{\partial m} - \frac{\cos\gamma}{r_c} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial V_m^2}{\partial r} \right] - \frac{V_\theta}{r} \operatorname{tg}\gamma$$

$$\left[\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma} \frac{\partial r V_\theta}{\partial m} + \frac{\cos^2\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} - V_m^2 \left(\frac{\cos\gamma}{V_m} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right] =$$

$$\frac{1}{\cos\gamma} \left[\left(\frac{\partial H_t}{\partial m} - T \frac{\partial S}{\partial m} \right) - \operatorname{sen}\gamma \left(\frac{\partial H_t}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right]$$

El sistema (A-14) se simplifica considerablemente en movimientos con simetría axial, reduciéndose al siguiente sistema de ecuaciones:

a) $$\frac{1}{2} \frac{\partial V_m^2}{\partial r} + \left[\frac{\cos\gamma}{r_c} - \frac{\operatorname{sen}\gamma}{V_m} \frac{\partial V_m}{\partial m} \right] V_m^2 + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} = \frac{\partial H_t}{\partial r} - \frac{T \partial S}{\partial r}$$

b) $$\frac{\partial r V_\theta}{\partial m} = 0 \qquad \text{(A-16)}$$

c) $$V_m^2 \left[\frac{\operatorname{sen}\gamma}{V_m} \frac{\partial V_m}{\partial m} - \frac{\cos\gamma}{r_c} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial V_m^2}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}$$
$$\left(\frac{\partial H_t}{\partial m} - \frac{T \partial S}{\partial m} \right) - \left(\frac{\partial H_t}{\partial r} - \frac{T \partial S}{\partial r} \right)$$

A-2 ECUACION DE CONTINUIDAD

A-2-1 EXPRESION DIFERENCIAL

La ecuación de continuidad en forma diferencial para - movimientos estacionarios y en coordenadas cilíndricas toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho r V_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r V_z) = 0 \qquad \text{(A-17)}$$

cuando el movimiento es aximétrico resulta

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r V_z) = 0 \qquad \text{(A-18)}$$

Igual que en el caso de las ecuaciones del impulso se puede obtener a partir de la ecuación (A-18) una expresión de la ecuación de continuidad más util para nuestros estudios y que se desarrolla a continuación.

Haciendo uso de las relaciones (A-7) y ecuación (A-8) la ecuación (A-18) puede escribirse

$$\cos\gamma\,\rho r V_m \frac{\partial\gamma}{\partial r} + \frac{\partial(\rho r V_m)}{\partial m} - \rho r V_m \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial m} - \operatorname{sen}\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right) = 0$$

ó bien

$$\rho\,\frac{r V_m}{\cos\gamma}\,\frac{\partial\gamma}{\partial r} + \frac{\partial\,\rho r V_m}{\partial m} + \rho r V_m \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}\,\frac{1}{r_c} = 0$$

Desarrollándo queda:

$$\frac{1}{\cos\gamma}\,\frac{\partial\gamma}{\partial r} + \frac{1}{V_m}\,\frac{\partial V_m}{\partial m} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial m} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial m} + \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}\,\frac{1}{r_c} = 0 \qquad \text{(A-19)}$$

Recordemos:

a) $\dfrac{\partial r}{\partial m} = \operatorname{sen}\gamma$

b) $\rho = \rho_t\left[1 - \dfrac{\gamma'-1}{2}\left(\dfrac{V_\theta^2 + V_m^2}{a_t^2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma'-1}}$ (A-20)

c) $a = a_t\left[1 - \dfrac{\gamma'-1}{2}\left(\dfrac{V_\theta^2 + V_m^2}{a_t^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

De la ecuación (A-20b) mediante derivación logaritmica

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial m} = -\frac{1}{a^2}\left(V_\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial m} + V_m\frac{\partial V_m}{\partial m}\right) \qquad \text{(A-21)}$$

De la ecuación (A-16b) se deduce:

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial m} = -\frac{V_\theta}{r}\operatorname{sen}\gamma \qquad \text{(A-22)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (A-21) y (A-22) la ecuación (A-19) puede escribirse:

$$\frac{1}{\cos\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial r}+\frac{1}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m}-\frac{V_m}{a^2}\frac{\partial V_m}{\partial m}+\frac{V_\theta^2}{a^2}\frac{\operatorname{sen}\gamma}{r}+\frac{\operatorname{sen}\gamma}{r}+\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}\frac{1}{r_c}=0 \quad \text{(A-23)}$$

Pero dado que es:

a) $M_\theta^2=\dfrac{V_\theta^2}{a^2}$

b) $M_m^2=\dfrac{V_m^2}{a^2}$ (A-24)

queda como expresión final para la ecuación (A-23) ,

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{V_m}\frac{\partial V_m}{\partial m}=-\frac{\left(1+M_\theta^2+r/\cos\gamma\, r_c\right)\dfrac{\operatorname{sen}^2\gamma}{r}+\operatorname{tg}\gamma\dfrac{\partial\gamma}{\partial r}}{1-M_m^2} \quad \text{(A-25)}$$

La ecuación (A-25) se utilizará con frecuencia posteriormente

A-2-2º EXPRESION INTEGRAL

En movimientos estacionarios la expresión integral de la ecuación de continuidad es:

$$\iint_\sigma \rho\vec{V}\,d\sigma=G \quad \text{(A-26)}$$

En movimientos que sean además axisimétricos y en aplicaciones a turbomáquinas resulta:

$$2\pi\int_{r_i}^{r_e}\rho V_z\, r\,dr=G \quad \text{(A-27)}$$

Siendo R_i y R_e los radios interior y exterior de la corona circular correspondiente a la sección plana considerada de eje OZ y situada entre anillos de álabes, teniendo en cuenta la relación (A-7d) tambien se puede escribir que:

$$2\pi\int_{r_i}^{r_e}\rho(V_m\cos\gamma)\,r\,dr=G \quad \text{(A-28)}$$

A-3 ECUACION DE LA ENERGIA

Considerando que el movimiento es estacionario pueden tomarse las siguientes expresiones:

a) Estator

$$\frac{1}{2} V^2 + H = \int T\,dS + Cte. + \int \frac{1}{\rho}(\nabla . Tev) . \vec{V} dt \qquad (A-29)$$

b) Rotor

$$H + \frac{1}{2} V^2 - u V_\theta = \int T\,dS + cte. + \int \frac{1}{\rho}(\nabla . Tev) . \vec{w} dt \qquad (A-30)$$

válidas según una linea de corriente. En el supuesto de que el fluido sea ideal las ecuaciones (A-29) y (A-39) quedan reducidas a:

$$\frac{1}{2} V^2 + H = cte. \qquad (A-31)$$

$$H + \frac{1}{2} V^2 - u V_\theta = cte. \qquad (A-32)$$

para estator y rotor respectivamente

APENDICE B

PROGRAMAS FORTRAN

B-1 DICCIONARIO DE VARIABLES

El nombre asignado a las variables en los programas que se presentan a continuación es común y se ha procurado, siempre que ha sido posible, utilizar el mismo con el que figura en todo el texto.

A continuación se identifican los nombres de algunas variables que ó bien nó han sido utilizadas anteriormente ó ha sido conveniente utilizarlas con otro nombre en el programa. La relación de tales variables es:

EI = ξ_i

D = δ

SO = h/c

FI = Φ

LAN = λ

RC = c_2/c_1

IER = indicador de error; toma el valor 1 si los resultados son correctos y 0 si son erroneos.

A = ψ

SOC = S_0

SOC2 = S_1

EM = ξ_m

PEN = M

M2MC = M_{2m}^2

M1MC = M_{1m}^2

SO2C = S_1^2

E1 = ξ_1

E2 = ξ_2

E3 = ξ_3

ETA = φ

VT = V_θ

DE1 = $\left(d\xi / d(z/c_2)\right)_{z/c_2 = 1}$

V2C = V_z^2

GR = grado de reacción

VTC = V_θ^2

VMC = V_m^2

MTC = M_θ^2

MMC = M_m^2

M1C = M_1^2

TD = ρ_2/ρ_1

TDT = conjunto de términos de la ecuación del impulso que dependen de $d(T_t/T_{1tn})/d\xi_1$

TDC = conjunto de términos de la ecuación del impulso en los que figura el radio de curvatura.

TDD = Resto de términos de la ecuación del impulso que depende de las desviaciones radiales.

TN = Términos de la ecuación del impulso que no dependen de las desviaciones radiales.

DE2 = $\left(d^2\xi / d(z/c_2)^2\right)_{z/c_2 = 1}$

DE3 = $d\left[\left(d\xi/d(z/c_2)\right)_{z/c_2 = 1}\right]/d\xi_1$

PROGRAMA "A"

LINI - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
      REAL M2M,M2MC,LAN,M1MC,LAM,M2(101),M3(101)
      DIMENSION V2Z(101),V2R(101),ALFA2(101),V3Z(101),V3R(101),ALFA3(101
     1),ALFA3R(101),ALFA2R(101),SA(4),GR(101),FM2R(101)
      DOUBLE PRECISION X,E1(101),E2(101),E3(101),V2M(101),V3M(101),AUM,H
     1,H2,Y(4),YB(4),XB,YB1(4),R(4,4),F,ENE,ETA,BETA
      COMMON EI,SOC,SOC2,CA,B,PEN,M1MC,COMB,COMBI,FILAN,FILAN2,TMAG,EM,R
     1C,SO2C ,A,FILAM,IER
      DATA S,T,U,W/4*0.0/
      READ(5,29)EI,M2M,ALFA2M,D,SO,FI,LAN,RC,RV,RV1
      IF(EI.GT.1.) GO TO 57
      WRITE(6,95)EI,M2M,ALFA2M,D,SO,FI,LAN,RC,RV,RV1
      IER=1
      LAN=LAN/RV
      BETA2M=ALFA2M*0.3141592/18.
      A=TAN(BETA2M)
      CA=250.
      SPAN=1.-EI
      SOC=SO/SPAN
      SOC2=SOC/RC
      B=1.-D*(1.+EI)/SPAN
      EM=0.5*(1.+EI)
      PEN=2.*D/SPAN
      M2MC=M2M**2
      M1MC=M2MC/(RV**2*(1.+A**2)*(1.+0.165*M2MC)-0.165*M2MC)
      TMAG=1.+0.165*M1MC
      COMB=RV*A
      COMBI=RV*A*EM
      FILAN=FI/LAN
      FILAN2=FILAN/LAN
      FILAM=FILAN*EM
      LAM=LAN*EM
      SO2C=SOC2**2
      M=1+IFIX(200.*(1.003-EI))
      NA=(1+M)/2
      X=EM
      Y(1)=EM
      Y(3)=EM
      Y(2)=RV*SQRT(1.+A**2)
      Y(4)=SQRT(RV1**2+(COMB-FILAN)**2)
      DO 10 J=1,M
      IF(J.LE.NA)  K=NA+J-1
      IF(J.GT.NA)  K=2*NA-J
      IF(J.EQ.1)   GO TO 331
      N=1
    1 AUM=200*N
      IF(J.GT.NA)  AUM=-AUM
      H=1.D00/AUM
      H2=H/2.D00
      IF(J.LE.NA)  NI=K-1
      IF(J.GT.NA)  NI=K+1
      X=E1(NI)
      Y(1)=E2(NI)
      Y(2)=V2M(NI)
      Y(3)=E3(NI)
      Y(4)=V3M(NI)
```

LINI - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
DO 173 L=1,N
DO 5 I=1,4
R(I,1)=F(I,X,Y)
IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
YB(I)=Y(I)+H2*R(I,1)
XB=X+H2
X=X+H
DO 6 I=1,4
R(I,2)=F(I,XB,YB)
IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
YB1(I)=Y(I)+H2*R(I,2)
DO 7 I=1,4
R(I,3)=F(I,XB,YB1)
IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
YB(I)=Y(I)+H*R(I,3)
DO 8 I=1,4
IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
R(I,4)=F(I,X,YB)
DO 9 I=1,4
Y(I)=Y(I)+(H/6.0)*(R(I,1)+2.0*(R(I,2)+R(I,3))+R(I,4))
CONTINUE
SA(1)=ABS(S-Y(1))
SA(2)=ABS(T-Y(2))
SA(3)=ABS(U-Y(3))
SA(4)=ABS(W-Y(4))
IF((ABS(S-Y(1)).GT.1.E-6).OR.(ABS(T-Y(2)).GT.1.E-6)) GO TO 330
IF((ABS(U-Y(3)).LT.1.E-6).AND.(ABS(W-Y(4)).LT.1.E-6)) GO TO 331
S=Y(1)
T=Y(2)
U=Y(3)
W=Y(4)
N=2*N
IF(N.GT.4)  GO TO 70
GO TO 1
WRITE(6,71) N,K
FORMAT(1H ,25X,2HN=,I2,3X,2HK=,I3)
WRITE(6,73)(SA(I),I=1,4)
FORMAT(3X,13HERROR IGUAL A,3X,4(E8.2,3X))
E1(K)=X
E2(K)=Y(1)
V2M(K)=Y(2)
E3(K)=Y(3)
V3M(K)=Y(4)
ENE=3.-2.*DEXP(CA*(EI-X)*(1.-X))
ETA=DATAN(ENE*(Y(1)-X)*SOC)
BETA=DATAN(A*DCOS(ETA))
V2Z(K)=Y(2)*DCOS(ETA)*DCOS(BETA)
V2R(K)=Y(2)*DSIN(ETA)*DCOS(BETA)
VT=Y(2)*DSIN(BETA)
BETA2=ATAN(VT/V2Z(K))
ALFA2(K)=BETA2*57.2958
V2C=Y(2)**2
RICO=V2C
T1T=B+PEN*X
CORR=M1MC/(T1T*TMAG-0.165*V2C*M1MC)
M2(K)=SQRT(V2C*CORR)
```

LINI - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
 IF(M2(K).GT.1.15)   IER=0
 IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
 BABI=(VT-Y(1)/LAM)/V2Z(K)
 BETA2R=ATAN(BABI)
 ALFA2R(K)=BETA2R*57.2958
 FM2R(K)=M2(K)*COS(BETA2)/COS(BETA2R)
 DE1=(RC*(Y(1)-X)*((3.*ENE-ENE**2-2.)*0.5*RC-(ENE-1.))+Y(3)-Y(1))*B
1NE
 ETA=ATAN(DE1*SOC2)
 V2C=Y(4)**2
 VT=(Y(1)*VT-FILAM)/Y(3)
 VM=SQRT(V2C-VT**2)
 V3Z(K)=VM*DCOS(ETA)
 V3R(K)=VM*DSIN(ETA)
 BETA2=ATAN(VT/V3Z(K))
 ALFA3(K)=BETA2*57.2958
 BABI=(VT-Y(3)/LAM)/V3Z(K)
 BETA2R=ATAN(BABI)
 ALFA3R(K)=BETA2R*57.2958
 RT=TIT-0.33*M1MC*(0.5*V2C+FILAN2)/TMAG
 CORR=M1MC/(TMAG*RT)
 GR(K)=1.+0.5*(V2C-RICO)/FILAN2
 M3(K)=SQRT(V2C*CORR)
 WRITE(6,200)IER,K
 FORMAT(5X,4HIER=,I2,3X,2HK=,I2)
 LAN=LAN*RV
 WRITE(6,99)EI,ALFA2M,D,M2M,SO,FI,LAN,RV,RV1
 WRITE(6,100)
 DO 103 K=1,M,2
 WRITE(6,72)E1(K),E2(K),V2Z(K),V2R(K),ALFA2(K),ALFA2R(K),M2(K)
1,FM2R(K)
 WRITE(6,101)
 DO 104 K=1,M,2
 WRITE(6,12)E1(K),E3(K),V3Z(K),V3R(K),ALFA3(K),ALFA3R(K),M3(K),GR(K
1)
 GO TO 32
 FORMAT(10F6.0)
 FORMAT(1H1,5X,10(F6.3,5X))
 FORMAT(1H ,20X,6HR1/RE1,8X,6HR2/RE1,8X,6HV2Z/V1,4X,6HV2R/V1,5X,5HA
1LFA2,4X,6HALFA2R,6X,2HM2,5X,3HM2R,/)
 FORMAT(1H ,20X,2(D10.4,4X),2(F6.3,4X),2(F6.2,4X),2(F4.2,4X))
 FORMAT(1H1,20X,6HR1/RE1,8X,6HR3/RE1,8X,6HV3Z/V1,4X,6HV3R/V1,5X,5HA
1LFA3,4X,6HALFA3R,6X,2HM3,3X,10HGRAD.REAC.,/)
 FORMAT(1H ,20X,2(D10.4,4X),2(F6.3,4X),2(F6.2,4X),F4.2,8X,F5.2)
 FORMAT(1H1,5X,8HRI1/RE1=,F4.2,3X,7HALFA2M=,F3.0,3X,6HDELTA=,F5.3,3
1X,4HM2M=,F4.2,3X,5HH/C1=,F4.2,3X,3HFI=,F4.2,3X,6HLANDA=,F4.2,3X,7H
2V2Z/V1=,F4.2,3X,7HV3Z/V1=,F4.2,//)
 STOP
 END
```

SUBPROGRAMA "A"

PEPE - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION F(I,X,Y)
      REAL M1MC
      DOUBLE PRECISION X,Y(4),ENE,ETA,VTC,YC,V2C,T1T,CORR,MTC,M2C,MMC,M1
     1C,DESV,TMACH,TD,FC,DG1,TDT,TDC,TDD1,TDD2,TDD,TEN,DESVI,DE1,DE2,RT,
     1DG2,DE3  ,BETA,VMC,VZ,TN,VT,VM
      COMMON EI,SOC,SOC2,CA,B,PEN,M1MC,COMB,COMBI,FILAN,FILAN2,TMAG,EM,R
     1C,SO2C  ,A,FILAM,IER
      GO TO (1,2,7,8),I
      ENE=3.-2.*DEXP(CA*(EI-X)*(1.-X))
      DESV=(Y(1)-X)*ENE
      ETA=DATAN(DESV*SOC)
      BETA=DATAN(A*DCOS(ETA))
      VT=Y(2)*DSIN(BETA)
      VTC=VT**2
      VM=Y(2)*DCOS(BETA)
      VMC=VM**2
      V2C=Y(2)**2
      T1T=B+PEN*X
      CORR=M1MC/(T1T*TMAG-0.165*V2C*M1MC)
      MTC=VTC*CORR
      M2C=V2C*CORR
      MMC=CORR*VMC
      IF(MMC.GT.0.9D00)  MMC=0.1D00
      M1C=M1MC/T1T
      TMACH=1.+0.165*M1C
      TD=((1.+0.165*M2C)/TMACH)**3.030303
      FC=TD*X/Y(1)
      VZ=VM*DCOS(ETA)
      F=FC/VZ
      DG1=F
      RETURN
      TDT=0.5*PEN*(Y(2)-1./Y(2))/T1T
      EN=ENE-1.
      TDC=SOC*FC*DSIN(ETA)*(DCOS(ETA)**2)*EN*DCOS(BETA)
      TDD1=(1.+MTC)*DESV/Y(1)-EN*(DSIN(ETA)**2)+ENE
      TDD2=ENE*VZ
      TDD=SOC*(TDD2-TDD1*FC)*DSIN(ETA)*DCOS(BETA)/(1.-MMC)
      TN=-FC*DSIN(BETA)*A/Y(1)
      F=TDC+TDD+TDT+TN
      RETURN
      TEN=(3.*ENE-ENE**2-2.)*0.5*RC-EN
      DESVI=ENE*(Y(3)-Y(1))
      DE1=RC*DESV*TEN+DESVI
      DE2=RC*EN*DESV*(RC-ENE*(1.+0.5*RC*EN))+EN*DESVI
      VTC=((Y(1)*VT-FILAM)/Y(3))**2
      V2C=Y(4)**2
      VMC=V2C-VTC
      IF(VMC)3,3,4
      F=1.DC0
      IER=0
      RETURN
      VM=DSQRT(VMC)
      ETA=DATAN(DE1*SOC2)
      VZ=VM*DCOS(ETA)
      BETA=VM/Y(4)
```

```
      RT=T1T-0.33*M1MC*(0.5*V2C+FILAN2)/TMAG
      CORR=M1MC/(TMAG*RT)
      MTC=VTC*CORR
      MMC=CORR*VMC
      TD=(T1T/(TMACH*RT))**3.030303
      FC=TD*X/Y(3)
      F=FC/VZ
      DG2=F
      RETURN
3     DE3=ENE*RC*(DG1-1.)*TEN+ENE*(DG2-DG1)
      TDT=(FILAN2+0.5*(V2C-1.))*PEN/(T1T*Y(4))
      TDD1=(DCOS(ETA)*DSIN(ETA)*DE2*SO2C-(1.+MTC)*DE1*SOC2/Y(3))*FC
      TDD2=-DCOS(ETA)*SOC2*DE3*VM
      TDD=(TDD1+TDD2)*DSIN(ETA)/(1.-MMC)*BETA
      TDC=(DCOS(ETA)**3)*SO2C*DE2*FC*BETA
      TN=-FC*VTC/(Y(3)*VZ*Y(4))
      F=TDC+TDD+TDT+TN
      RETURN
      END
```

PROGRAMA "B"

LINCOR - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
      REAL M2M,M2MC,LAN,M1MC,LAM,M2(101),M3(101)
      DIMENSION V2Z(101),V2R(101),ALFA2(101),V3Z(101),V3R(101),ALFA3(10
     1),ALFA3R(101),ALFA2R(101),SA(4),GR(101),FM2R(101)
      DOUBLE PRECISION X,E1(101),E2(101),E3(101),V2M(101),V3M(101),AUM,H
     1,H2,Y(4),YB(4),XB,YB1(4),R(4,4),F,ENE,ETA
      COMMON EI,SOC,SOC2,CA,B,PEN,M1MC,COMB,COMBI,FILAN,FILAN2,TMAG,EM,R
     1C,SO2C,IER
      DATA S,T,U,W/4*0.0/
      READ(5,29)EI,M2M,ALFA2M,D,SO,FI,LAN,RC,RV,RV1
      IF(EI.GT.1.) GO TO 57
      WRITE(6,95)EI,M2M,ALFA2M,D,SO,FI,LAN,RC,RV,RV1
      IER=1
      LAN=LAN/RV
      BETA2M=ALFA2M*0.3141592/18.
      A=TAN(BETA2M)
      CA=250.
      SPAN=1.-EI
      SOC=SO/SPAN
      SOC2=SOC/RC
      B=1.-D*(1.+EI)/SPAN
      EM=0.5*(1.+EI)
      PEN=2.*D/SPAN
      M2MC=M2M**2
      M1MC=M2MC/(RV**2*(1.+A**2)*(1.+0.165*M2MC)-0.165*M2MC)
      TMAG=1.+0.165*M1MC
      COMB=RV*A
      COMBI=RV*A*EM
      FILAN=FI/LAN
      FILAN2=FILAN/LAN
      LAM=LAN*EM
      SO2C=SOC2**2
      M=1+IFIX(200.*(1.003-EI))
      NA=(1+M)/2
      X=EM
      Y(1)=EM
      Y(3)=EM
      Y(2)=RV
      Y(4)=RV1
      DO 10 J=1,M
      IF(J.LE.NA)  K=NA+J-1
      IF(J.GT.NA)  K=2*NA-J
      IF(J.EQ.1)   GO TO 331
      N=1
    1 AUM=200*N
      IF(J.GT.NA)  AUM=-AUM
      H=1.D00/AUM
      H2=H/2.D00
      IF(J.LE.NA)  NI=K-1
      IF(J.GT.NA)  NI=K+1
      X=E1(NI)
      Y(1)=E2(NI)
      Y(2)=V2M(NI)
      Y(3)=E3(NI)
      Y(4)=V3M(NI)
      DO 173 L=1,N
```

```
     DO 5 I=1,4
     R(I,1)=F(I,X,Y)
     IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
     YB(I)=Y(I)+H2*R(I,1)
     XB=X+H2
     X=X+H
     DO 6 I=1,4
     R(I,2)=F(I,XB,YB)
     IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
     YB1(I)=Y(I)+H2*R(I,2)
     DO 7 I=1,4
     R(I,3)=F(I,XB,YB1)
     IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
     YB(I)=Y(I)+H*R(I,3)
     DO 8 I=1,4
     R(I,4)=F(I,X,YB)
     IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
     DO 9 I=1,4
     Y(I)=Y(I)+(H/6.0)*(R(I,1)+2.0*(R(I,2)+R(I,3))+R(I,4))
 )   CONTINUE
     SA(1)=ABS(S-Y(1))
     SA(2)=ABS(T-Y(2))
     SA(3)=ABS(U-Y(3))
     SA(4)=ABS(W-Y(4))
     IF((ABS(S-Y(1)).GT.1.E-6).OR.(ABS(T-Y(2)).GT.1.E-6)) GO TO 330
     IF((ABS(U-Y(3)).LT.1.E-6).AND.(ABS(W-Y(4)).LT.1.E-6)) GO TO 331
 )   S=Y(1)
     T=Y(2)
     U=Y(3)
     W=Y(4)
     N=2*N
     IF(N.GT.4)  GO TO 70
     GO TO 1
 )   WRITE(6,71) N,K
 1   FORMAT(1H ,25X,2HN=,I2,3X,2HK=,I3)
     WRITE(6,73)(SA(I),I=1,4)
 3   FORMAT(3X,13HERROR IGUAL A,3X,4(E8.2,3X))
 1   E1(K)=X
     E2(K)=Y(1)
     V2M(K)=Y(2)
     E3(K)=Y(3)
     V3M(K)=Y(4)
     ENE=3.-2.*DEXP(CA*(EI-X)*(1.-X))
     ETA=DATAN(ENE*(Y(1)-X)*SOC)
     V2Z(K)=Y(2)*DCOS(ETA)
     V2R(K)=Y(2)*DSIN(ETA)
     VT=COMBI/Y(1)
     BETA2=ATAN(VT/V2Z(K))
     ALFA2(K)=BETA2*57.2958
     V2C=Y(2)**2+VT**2
     RICO=V2C
     T1T=B+PEN*X
     CORR=M1MC/(T1T*TMAG-0.165*V2C*M1MC)
     M2(K)=SQRT(V2C*CORR)
     IF(M2(K).GT.1.15)   IER=0
     IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
```

```
 BABI=(VT-Y(1)/LAM)/V2Z(K)
 BETA2R=ATAN(BABI)
 ALFA2R(K)=BETA2R*57.2958
 FM2R(K)=M2(K)*COS(BETA2)/COS(BETA2R)
 DE1=(RC*(Y(1)-X)*((3.*ENE-ENE**2-2.)*0.5*RC-(ENE-1.))+Y(3)-Y(1))*E
1NE
 ETA=ATAN(DE1*SOC2)
 V3Z(K)=Y(4)*DCOS(ETA)
 V3R(K)=Y(4)*DSIN(ETA)
 VT=EM*(COMB-FILAN)/Y(3)
 BETA2=ATAN(VT/V3Z(K))
 ALFA3(K)=BETA2*57.2958
 BABI=(VT-Y(3)/LAM)/V3Z(K)
 BETA2R=ATAN(BABI)
 ALFA3R(K)=BETA2R*57.2958
 V2C=Y(4)**2+VT**2
 RT=T1T-0.33*M1MC*(0.5*V2C+FILAN2)/TMAG
 CORR=M1MC/(TMAG*RT)
 GR(K)=1.+0.5*(V2C-RICO)/FILAN2
 M3(K)=SQRT(V2C*CORR)
 WRITE(6,200)IER,K
 FORMAT(5X,4HIER=,I2,3X,2HK=,I2)
 LAN=LAN*RV
 WRITE(6,99)EI,ALFA2M,D,M2M,SC,FI,LAN,RV,RV1
 WRITE(6,100)
 DO 103 K=1,M,2
 WRITE(6,72)E1(K),E2(K),V2Z(K),V2R(K),ALFA2(K),ALFA2R(K),M2(K)
1,FM2R(K)
 WRITE(6,101)
 DO 104 K=1,M,2
 WRITE(6,12)E1(K),E3(K),V3Z(K),V3R(K),ALFA3(K),ALFA3R(K),M3(K),GR(K
1)
 GO TO 32
 FORMAT(10F6.0)
 FORMAT(1H1,5X,10(F6.3,5X))
 FORMAT(1H ,20X,6HR1/RE1,8X,6HR2/RE1,8X,6HV2Z/V1,4X,6HV2R/V1,5X,5HA
1LFA2,4X,6HALFA2R,6X,2HM2,5X,3HM2R,/)
 FORMAT(1H1,20X,6HR1/RE1,8X,6HR3/RE1,8X,6HV3Z/V1,4X,6HV3R/V1,5X,5HA
1LFA3,4X,6HALFA3R,6X,2HM3,3X,10HGRAD.REAC.,/)
 FORMAT(1H ,20X,2(D10.4,4X),2(F6.3,4X),2(F6.2,4X),2(F4.2,4X))
 FORMAT(1H ,20X,2(D10.4,4X),2(F6.3,4X),2(F6.2,4X),F4.2,8X,F5.2)
 FORMAT(1H1,5X,8HRI1/RE1=,F4.2,3X,7HALFA2M=,F3.0,3X,6HDELTA=,F5.3,3
1X,4HM2M=,F4.2,3X,5HH/C1=,F4.2,3X,3HFI=,F4.2,3X,6HLANDA=,F4.2,3X,7H
2V2Z/V1=,F4.2,3X,7HV3Z/V1=,F4.2,//)
 STOP
 END
```

SUBPROGRAMA "A"

PEPE - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION F(I,X,Y)
      REAL M1MC
      DOUBLE PRECISION X,Y(4),ENE,ETA,VTC,YC,V2C,T1T,CORR,MTC,M2C,MMC,M1
     1C,DESV,TMACH,TD,FC,DG1,TDT,TDC,TDD1,TDD2,TDD,TEN,DESVI,DE1,DE2,RT,
     1DG2,DE3
      COMMON EI,SOC,SOC2,CA,B,PEN,M1MC,COMB,COMBI,FILAN,FILAN2,TMAG,EM,R
     1C,SO2C,IER
      GO TO (1,2,7,8),I
      VTC=(COMBI/Y(1))**2
      YC=Y(2)**2
      V2C=VTC+YC
      T1T=B+PEN*X
      CORR=M1MC/(T1T*TMAG-0.165*V2C*M1MC)
      MTC=VTC*CORR
      M2C=V2C*CORR
      MMC=CORR*YC
      IF(MMC.GT.0.9000)  MMC=0.1000
      M1C=M1MC/T1T
      ENE=3.-2.*DEXP(CA*(EI-X)*(1.-X))
      DESV=(Y(1)-X)*ENE
      ETA=DATAN(DESV*SOC)
      TMACH=1.+0.165*M1C
      TD=((1.+0.165*M2C)/TMACH)**3.030303
      FC=TD*X/Y(1)
      F=FC/(Y(2)*DCOS(ETA))
      DG1=F
      RETURN
    2 TDT=0.5*PEN*(Y(2)+(VTC-1.)/Y(2))/T1T
      EN=ENE-1.
      TDC=SOC*FC*DSIN(ETA)*(DCOS(ETA)**2)*EN
      TDD1=(1.+MTC)*DESV/Y(1)-EN*(DSIN(ETA)**2)+ENE
      TDD2=ENE*DSIN(ETA)*DCOS(ETA)*Y(2)
      TDD=SOC*(TDD2-TDD1*FC*DSIN(ETA))/(1.-MMC)
      F=TDC+TDD+TDT
      RETURN
    7 TEN=(3.*ENE-ENE**2-2.)*0.5*RC-EN
      DESVI=ENE*(Y(3)-Y(1))
      DE1=RC*DESV*TEN+DESVI
      DE2=RC*EN*DESV*(RC-ENE*(1.+0.5*RC*EN))+EN*DESVI
      VTC=(EM*(COMB-FILAN)/Y(3))**2
      YC=Y(4)**2
      V2C=VTC+YC
      RT=T1T-0.33*M1MC*(0.5*V2C+FILAN2)/TMAG
      IF(RT)3,3,4
    3 IER=0
      F=1.D00
      RETURN
      CORR=M1MC/(TMAG*RT)
      MTC=VTC*CORR
      MMC=CORR*YC
      TD=(T1T/(TMACH*RT))**3.030303
      ETA=DATAN(DE1*SOC2)
      FC=TD*X/Y(3)
      F=FC/(Y(4)*DCOS(ETA))
      DG2=F
```

```
      RETURN
    8 DE3=ENE*RC*(DG1-1.)*TEN+ENE*(DG2-DG1)
      TDT=(FILAN2+0.5*(V2C-1.))*PEN/(T1T*Y(4))
      TDD1=(DCOS(ETA)*DSIN(ETA)*DE2*SO2C-(1.+MTC)*DE1*SOC2/Y(3))*FC
      TDD2=-DCOS(ETA)*SOC2*DE3*Y(4)
      TDD=(TDD1+TDD2)*DSIN(ETA)/(1.-MMC)
      TDC=(DCOS(ETA)**3)*SO2C*DE2*FC
      F=TDC+TDD+TDT
      RETURN
      END
```

PROGRAMA "C"

LINA - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
 REAL M2M,M2MC,LAN,M1MC,LAM,M2(101),M3(101),M1M,LANP
 DIMENSION V2Z(101),V2R(101),ALFA2(101),V3Z(101),V3R(101),ALFA3(101
1),ALFA3R(101),ALFA2R(101),SA(4),GR(101),FM2R(101),ERR(2)
 DOUBLE PRECISION X,E1(101),E2(101),E3(101),V2M(101),V3M(101),AUM,H
1,H2,Y(4),YB(4),XB,YB1(4),R(4,4),F,ENE,ETA,BETA
 COMMON EI,SOC,CA,B,PEN,M1MC,TMAG,EM,IER
 DATA S,T,U,W/4*0.0/
 READ(5,29) EI,EI2,EE2,D,M1M,SO,LANP
 IF(EI.GT.1.) GO TO 57
 CA=250.
 SPAN=1.-EI
 SOC=SC/SPAN
 B=1.-D*(1.+EI)/SPAN
 EM=0.5*(1.+EI)
 PEN=2.*D/SPAN
 A=TAN(65./57.2958)
 RV=1.175
 M1MC=M1M**2
 M2MC=M1MC
 M1MC=M2MC/(RV**2*(1.+A**2)*(1.+0.165*M2MC)-0.165*M2MC)
 M1M=SQRT(M1MC)
 TMAG=1.+0.165*M1MC
 LAN=LANP
 LAM=LAN*EM
 M=1+IFIX(200.*(1.003-EI))
 V2I=2.24
 IP=1
 IER=1
 X=EI
 Y(1)=EI2
 Y(2)=V2I
 DO 10 K=1,M
 IF(K.EQ.1) GO TO 331
 N=1
 AUM=200*N
 H=1.D00/AUM
 H2=H/2.D00
 NI=K-1
 X=E1(NI)
 Y(1)=E2(NI)
 Y(2)=V2M(NI)
 DO 173 L=1,N
 DO 5 I=1,2
 R(I,1)=F(I,X,Y)
 IF(IER.EQ.0) GO TO 56
 YB(I)=Y(I)+H2*R(I,1)
 XB=X+H2
 X=X+H
 DO 6 I=1,2
 R(I,2)=F(I,XB,YB)
 IF(IER.EQ.0) GO TO 56
 YB1(I)=Y(I)+H2*R(I,2)
 DO 7 I=1,2
 R(I,3)=F(I,XB,YB1)
 IF(IER.EQ.0) GO TO 56
```

```
YB(I)=Y(I)+H*R(I,3)
DO 8 I=1,2
IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
R(I,4)=F(I,X,YB)
DO 9 I=1,2
Y(I)=Y(I)+(H/6.0)*(R(I,1)+2.0*(R(I,2)+R(I,3))+R(I,4))
CONTINUE
SA(1)=ABS(S-Y(1))
SA(2)=ABS(T-Y(2))
IF((SA(1).LT.1.E-6).AND.(SA(2).LT.1.E-6)) GO TO 331
S=Y(1)
T=Y(2)
N=2*N
IF(N.GT.4)  GO TO 70
GO TO 1
WRITE(6,71) N,K
FORMAT(1H ,25X,2HN=,I2,3X,2HK=,I3)
WRITE(6,73)(SA(I),I=1,2)
FORMAT(3X,13HERROR IGUAL A,3X,4(E8.2,3X))
E1(K)=X
E2(K)=Y(1)
V2M(K)=Y(2)
ENE=3.-2.*DEXP(CA*(EI-X)*(1.-X))
ETA=DATAN(ENE*(Y(1)-X)*SOC)
BETA2=65./57.2958
A=TAN(BETA2)
BETA=DATAN(A*DCOS(ETA))
V2Z(K)=Y(2)*DCOS(ETA)*DCOS(BETA)
V2R(K)=Y(2)*DSIN(ETA)*DCOS(BETA)
VT=Y(2)*DSIN(BETA)
ALFA2(K)=BETA2*57.2958
V2C=Y(2)**2
RICO=V2C
T1T=B+PEN*X
CORR=M1MC/(T1T*TMAG-0.165*V2C*M1MC)
M2(K)=SQRT(V2C*CORR)
IF(M2(K).GT.1.15)   IER=0
IF(IER.EQ.0)  GO TO 56
BABI=(VT-Y(1)/LAM)/V2Z(K)
BETA2R=ATAN(BABI)
ALFA2R(K)=BETA2R*57.2958.
FM2R(K)=M2(K)*COS(BETA2)/COS(BETA2R)
CONTINUE
WRITE(6,200)IER,K
FORMAT(5X,4HIER=,I2,3X,2HK=,I2)
WRITE(6,95) EI,EI2,EE2,D,M1M,SO,LANP
FORMAT(1H1,15X,7(F7.4,5X),//)
WRITE(6,100)
DO 103 K=1,M,2
WRITE(6,72)E1(K),E2(K),V2Z(K),V2R(K),ALFA2(K),ALFA2R(K),M2(K)
1,FM2R(K)
ERR(IP)=E2(K)-EE2
IF(ABS(ERR(IP)).LT.1.E-3) GO TO 57
IF(IP.EQ.2) GO TO 87
V2I=V2I+0.01
IP=IP+1
```

LINA - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
GO TO 90
IP=1
DERE2=(ERR(2)-ERR(1))*100.
V2I=V2I-ERR(2)/DERE2
GO TO 90
FORMAT(1H ,20X,6HR1/RE1,8X,6HR2/RE1,8X,6HV2Z/V1,4X,6HV2R/V1,5X,5H
1LFA2,4X,6HALFA2R,6X,2HM2,5X,3HM2R,/)
FORMAT(1H ,20X,2(D10.4,4X),2(F6.3,4X),2(F6.2,4X),2(F4.2,4X))
FORMAT(7F6.0)
STOP
END
```

SUBPROGRAMA "C"

PEPE - EFN - SENTENCIA FUENTE - IFN(S) -

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION F(I,X,Y)
      REAL M1MC
      DOUBLE PRECISION X,Y(4),ENE,ETA,VTC,YC,V2C,T1T,CORR,MTC,M2C,MMC,M1
     1C,DESV,TMACH,TD,FC,DG1,TDT,TDC,TDD1,TDD2,TDD,TEN,DESVI,DE1,DE2,RT,
     1DG2,DE3  ,BETA,VMC,VZ,TN,VT,VM
      COMMON EI,SOC,CA,B,PEN,M1MC,TMAG,EM,IER
      GO TO(1,2),I
      ENE=3.-2.*DEXP(CA*(EI-X)*(1.-X))
      DESV=(Y(1)-X)*ENE
      ETA=DATAN(DESV*SOC)
      BETA2=65./57.2958
      A=TAN(BETA2)
      BETA=DATAN(A*DCOS(ETA))
      VT=Y(20*DSIN(BETA)
      VTC=VT**2
      VM=Y(2)*DCOS(BETA)
      VMC=VM**2
      V2C=Y(2)**2
      T1T=B+PEN*X
      CORR=M1MC/(T1T*TMAG-0.165*V2C*M1MC)
      MTC=VTC*CORR
      M2C=V2C*CORR
      MMC=CORR*VMC
      IF((MMC.GT.0.9DC0).OR.(CORR.LT.0.D00))  IER=0
      IF(IER)3,3,4
      F=1.D00
      RETURN
      M1C=M1MC/T1T
      TMACH=1.+0.165*M1C
      TD=((1.+0.165*M2C)/TMACH)**3.030303
      FC=TD*X/Y(1)
      VZ=VM*DCOS(ETA)
      F=FC/VZ
      RETURN
      TDT=0.5*PEN*(Y(2)-1./Y(2))/T1T
      EN=ENE-1.
      TDC=SOC*FC*DSIN(ETA)*(DCOS(ETA)**2)*EN*DCOS(BETA)
      TDD1=(1.+MTC)*DESV/Y(1)-EN*(DSIN(ETA)**2)+ENE
      TDD2=ENE*VZ
      TDD=SOC*(TDD2-TDD1*FC)*DSIN(ETA)*DCOS(BETA)/(1.-MMC)
      TN=-FC*DSIN(BETA)*A/Y(1)
      F=TDC+TDD+TDT+TN
      RETURN
      END
```

LISTA DE REFERENCIAS

(1) PIRTLE, J.C. "GE4 Supersonic Transport Engine Development Progress and Status" SAE paper 690373, April 1.969.

(2) TARIFA C.S. and BOLLAIN,A. "Design of Gas Turbine Blades for Automotive Application" I.A. Congress of F.I.S.I.T.A. (Tokio) Mayo 1.964.

(3) BARNES,J.F. and FRAY, D.E. "Some Aspects of Research at the N.G.T.E. on Internali air cooled Turbine Blades" Proc. I.M.E., 178,1.963.

(4) BROWN, T.W.F."High Temperature Turbine Machinery for Marine Propulsión" Proc. IME, 168 (1.954).

(5) HORLOCK J.H. "Axial Flow Turbines" Butterworths, 1.966

(6) SMITH L.H. "The Radial Equilibrium Equatión of Turbomachinery" Trans.ASME, ser. A, vol 88, 1.966 - pp-1-12.

(7) NOVAK, A.R. "Streamline Curvature Computing Procedures - for Fluid-Flow Problems" Trans.ASME,Oct.1.967, pp 478.

(8) PEREZ DEL NOTARIO,P. "Bombas Turbinas y compresores" Apunte E.T.S.I. Aeronauticos.

(9) STANITZ, J.D. "Design of Two-Dimensional Channels With Prescribd Velocity Distributions Along the Channel Walls" Part 1 - "Relaxation Solu-- tions" Naca Tech. Note 2593 (1.952)

(10) WU, C.H., BROWN,C.A. and PRIAN "An Approximate Method of Determining the subsonic Flow in an Arbitra ry Stream Filament of Revolution cut by Ar- bitrary Turbomachine Blades" Naca TN. 2702 June 1.952.

(11) AINLEY,D.G. And MATHIESON, G.C.R." A Method of Performan- ce Estimation for Axial Flow Turbines" A.R.C., R.M 2974 (1.957)

(12) DUNAVANT,J.C.and ERWIN,J.R. "Investigation of a Related - series of turbines Blade Profiles in Cascades, Naca, T.N 3802 (1.956).

(13) BARNES J.F. and DUNHAM,J."Aerodynamic and Thermal Conside- rations in Designing Axial Flow Turbine Bla-- des" Proced. I.M.E, vol 183, April 1.969 pp-11

(14) SMITH,S.F. " A Simple Correlation of Turbine Efficiency" J.R. Aero.Soc. 1.965, vol 69, Nº 655.

(15) DORMAN, T.E., WELNA, H. "The Application of controlled-vortex aerodinamics to Advanced Axial flow - Turbines "Trans. ASME July 68, pp 245.

(16) The COLLEGE OF AERONAUTICS "Steady State Heat Transfer in root Cooled Blade" Depart. of Aircraft Prop. Cranfield. 1.969.

(17) SMITH, L.H. "A Practical Solution of a Three-Dimensional Problem of axial Flow Turbomachinery" -- Trans. ASME, 75, 1.953, pp 789.

(18) RANNIE "An Approximate Method for Calculating Three Dimensional flow in axial Turbomachines" - J. of. Aero. Sci. vol 23, 1.956, pp 543.

(19) JANSEN, W. and MOFFAT W.C. "The off Design Analysis of -- Axial-Flow Compressors" Trans.ASME ser. A, Oct. 1.967, pp 453.

(20) ROBERTS M.S. AND SHIPMAN, J. "Two-point Boundary value -- Problems: Shooting Methods" American Elsevier, 1.972.

(21) FOX, L. "Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations" Pergamon Press, 1.962.

(22) FOX, L. and MAYERS, D.F. "Computing methods for Scientists and Engineers" Osford University Press, - 1.968.

(23) CRAIG, H.R.M. AND COX, H.J. "Performance Estimation of Axial-flow Turbines" Proced. of I.M.E.

(24) SMITH L.H. "Secondary flow in Axial-flow Turbomachinery" Trans. ASME, Oct. 1.955 pp -- 1.066 vol. 185, 1.970-71, pp 407.

(25) SMITH, J.W. "Applied Numerical Methods for Digital Computation with Fortran" Int. Text-Book Company, 1.967.

(26) BRIONES F. "Cálculo Numérico" C.C.U.M., 1.970.

(27) SMITH L.H. "Sweep and Dihedral Effects in Axial-- Flow Turbomachinery" Trans. ASME ser. D vol. 85, 1.963, pp-401-416.