

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

TESIS DOCTORAL

**INTERACCIÓN ENTRE ONDAS
DE FARADAY
Y FLUJOS MEDIOS**

por

Elena Martín Ortega

Madrid, Septiembre 2002

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS
DEPARTAMENTO DE MOTOPROPULSIÓN Y TERMOFLUIDODINÁMICA

TESIS DOCTORAL

INTERACCIÓN ENTRE ONDAS DE FARADAY Y FLUJOS MEDIOS

Autor:

Elena Martín Ortega

Ingeniero Aeronáutico

Prof. Asociado de Mecánica de Fluidos

Departamento de Mecánica, Máquinas y Motores Térmicos y Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales

Universidad de Vigo

Directores:

Dr. Carlos Martel Escobar
Prof. Titular de Universidad

Dr. José Manuel Vega de Prada
Catedrático de Universidad

Departamento de Fundamentos Matemáticos de la Tecnología Aeronáutica
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

Madrid, Septiembre 2002

Resumen

En este trabajo se analiza la evolución débilmente no lineal de las ondas de Faraday que aparecen en la superficie libre de un líquido sometido a vibración vertical. En particular, se estudia el efecto del acoplamiento entre el flujo medio que se desarrolla en el seno del fluido y estas ondas superficiales excitadas paramétricamente, obteniéndose que el flujo medio es causante de la desestabilización de las mismas. Para ello se analiza una configuración simplificada, bidimensional y periódica en sentido horizontal, como aproximación de un depósito de sección recta anular, cuyo radio es mucho mayor que la anchura del depósito, y ésta mucho mayor que la altura del fluido en reposo. Dicha configuración se somete a vibración vertical y se estudia en el caso límite de baja viscosidad, amplitud de vibración pequeña y frecuencia de vibración próxima al doble de una frecuencia propia. Un primer análisis lineal del estado de reposo del problema no forzado proporciona los dos tipos de modos del sistema: (*i*) modos oscilatorios, llamados también no viscosos, que producen las ondas superficiales y (*ii*) modos no oscilatorios, o viscosos, que son los causantes de la aparición de un flujo medio no oscilatorio. A continuación, en el límite débilmente no lineal, se deduce un sistema de ecuaciones que describe la evolución conjunta de las ondas superficiales y del flujo medio en una escala de tiempo lenta en comparación con la de vibración del depósito. El par de ondas superficiales que se generan debido al forzamiento paramétrico evolucionan a una onda de tipo “standing” de amplitud constante y con un desfase espacial que puede depender del tiempo y cuya evolución depende del flujo medio no oscilatorio, que se genera a través de la capa límite viscosa oscilatoria del fondo del depósito. Por último, estas ecuaciones se integran numéricamente obteniéndose primero la solución estacionaria más sencilla, que consiste en una onda superficial con desfase espacial constante y un flujo medio asociado estacionario con dos torbellinos contrarrotatorios en cada periodo de la onda superficial. Para valores más altos de la amplitud de vibración esta solución pierde estabilidad y aparecen nuevos atractores para los que el acoplamiento con el flujo medio es esencial y que incluyen: (*i*) distintos tipos de ciclos límite (los torbellinos oscilan lateralmente, induciendo oscilaciones en la onda superficial), (*ii*) ondas que son de tipo standing en un sistema de referencia que se mueve a velocidad constante y (*iii*) atractores más complejos e incluso caóticos. La desestabilización de la solución estacionaria más sencilla tiene siempre lugar a través de una bifurcación de Hopf, mientras que la secuencia de aparición y la estabilidad de las otras soluciones descritas anteriormente depende fuertemente de los parámetros del problema. Se obtienen también fenómenos de histéresis entre los distintos atractores encontrados.

Abstract

The weakly-nonlinear evolution of the Faraday waves that appear on the free surface of a vertically vibrated container and its associated mean flow is analysed in the limit of both small viscosity and small parametric forcing. In particular, we study the coupling effect between the mean flow and the parametrically forced surface waves to show that the mean flow is responsible for several instabilities leading to waves pattern drift. A simplified (bidimensional and horizontally periodic) configuration, which approximates the fluid flow in an annular container (whose radius is much bigger than its width, and the latter much bigger than the height of the unperturbed free surface), is considered. This configuration is vertically vibrated with a forcing frequency close to the double of a natural one. The analysis of the dispersion relation of the linear unforced problem near the rest state leads to two different kind of modes: (*i*) surface modes, also named inviscid modes, which are oscillatory and produce the surface waves, and (*ii*) hydrodynamic modes, also called viscous modes, which produce a non-oscillatory mean flow. Taking into account all these nearly marginal modes, a system of equations is derived for the coupled slow evolution of the amplitudes of the surfaces waves and the mean flow in the weakly-nonlinear regime. The two surface waves excited by the parametric forcing evolve to a standing wave of constant amplitude whose spatial phase can change with time and is coupled to the associated mean flow. This mean flow (known as streaming flow) is generated at the oscillatory boundary layer attached to the vibrating wall supporting the liquid. These equations are numerically integrated to show that the simplest non-flat reflection symmetric steady solution (a surface standing wave with the associated mean flow consisting of the usual two counter-rotating eddies in each period of the surface wave) becomes unstable for realistic values of the parameters. Coupling with the mean flow is essential for the new states that appear, which include limit cycles (the array of eddies oscillating laterally, producing oscillations of the surface wave nodes), drifted standing waves (patterns that are standing in a uniformly propagating reference frame) and some more complex and even chaotic attractors. The destabilization of the simplest steady state takes place always through a Hopf bifurcation (at least for the parameter values considered in this work), while the appearance sequence and even the stability of the other described solutions depend strongly on the parameter values. Hysteresis phenomena is also obtained between different states.

A mis padres

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que han contribuido a la elaboración de este trabajo.

A los Profesores José Manuel Vega y Carlos Martel por la dedicación con que han dirigido esta tesis. En particular quiero agradecerles la orientación y apoyo que me han proporcionado durante este tiempo. Deseo también agradecerles la paciencia y disposición que han tenido conmigo desde el principio hasta el final de la realización de la tesis.

A todos los miembros del Departamento de Fundamentos Matemáticos por los ánimos que me han dado siempre. Al profesor Francisco José Higuera por haberme introducido en el estudio de la Mecánica de Fluidos. A mis compañeros del Departamento de Mecánica, Máquinas y Motores Térmicos y Fluidos por el interés y ayuda que me han prestado en todo momento.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Contenido de la tesis	6
2. Deducción de las ecuaciones asintóticas	9
2.1. Introducción	9
2.1.1. Hipótesis generales	10
2.2. Formulación del problema	10
2.2.1. Región casi-potencial y capas límite	14
2.3. Análisis lineal. Modos viscosos y no viscosos	16
2.3.1. Modos no viscosos	18
2.3.2. Modos viscosos	22
2.4. Análisis débilmente no lineal	22
2.4.1. Ecuaciones de amplitud	24
2.4.2. Solución en la región casi-potencial	30
2.4.3. Cálculo de los términos de las ecuaciones de amplitud.	33
2.4.4. Ecuaciones del flujo medio	38
3. Análisis de las ecuaciones asintóticas	43
3.1. Análisis de las ecuaciones de amplitud	48

3.1.1.	Cálculo y estabilidad de las soluciones estacionarias de (3.1.9)	51
3.2.	Análisis de las ecuaciones del flujo medio	53
4.	Resultados	57
4.1.	Soluciones encontradas	57
4.1.1.	Soluciones para Re más bajos	58
4.1.2.	Bifurcación de Hopf	59
4.1.3.	Atractores encontrados	60
4.2.	Comparación cualitativa con resultados experimentales	67
4.3.	Figuras	70
5.	Conclusiones y extensiones previsibles	86
5.1.	Conclusiones	86
5.2.	Extensiones previsibles	89
A.	Solución en las capas límite	92
A.1.	Capa límite de Stokes en el fondo del depósito	92
A.1.1.	Solución del problema lineal	93
A.1.2.	Términos no oscilatorios de orden ϵ^2	95
A.2.	Capa límite superficial	97
A.2.1.	Solución del problema estrictamente lineal	98
A.2.2.	Términos no oscilatorios	100
B.	Método numérico	103
B.1.	Discretización espacial de las ecuaciones (3.2.1)-(3.2.4).	103
B.1.1.	Cálculo numérico del término no lineal	108
B.1.2.	Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante	110

B.2. Integración temporal	111
B.3. Estimación de los errores.	112
B.4. Condiciones iniciales	115
C. Cálculo de los exponentes de Lyapunov	116

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

En esta tesis se aborda el problema de la estabilidad de las ondas gravitatorio-capilares que aparecen excitadas paraméricamente en la superficie libre de un líquido cuando el recipiente que lo contiene se somete a una vibración vertical. Este tipo de ondas fueron descritas por primera vez por Michael Faraday en 1831 [14] y por ello se conocen también con el nombre de ondas de Faraday.

Las ondas gravitatorio-capilares en fluidos no viscosos han sido objeto de numerosos estudios, desde el trabajo pionero de, entre otros, Stokes, Boussinesq y Rayleigh durante el siglo XIX hasta la actualidad (ver Newell [42] para más detalles). Las ondas de Faraday han recibido también una atención considerable (ver Miles & Henderson [40] y Cross & Hohenberg [8]) debido en parte a la impresionante variedad de comportamientos experimentales a que dan lugar, ya descritos por Faraday [14], y que los modelos teóricos actuales no logran predecir, especialmente en el límite de baja viscosidad. En varios experimentos, que cubren un amplio rango de valores de los parámetros, se ha comprobado que la inestabilidad de Faraday da lugar a histéresis (Simonelli y Gollub [52], Craik y Armitage [7]), modos de compresión (Douady y Fauve [11]), sucesiones de duplicación de periodo (Keolian *et al.*[24]), intermitencia (Ezerskii *et al.* [12]) y caos espacio-temporal (Ezerskii *et al.*[13], Ciliberto *et al.*[4]), ver Miles & Henderson [40] y Cross & Hohenberg [8] para más información.

A la hora de describir la inestabilidad de Faraday en el límite de viscosidad pequeña, los efectos viscosos no pueden despreciarse. Este límite es singular y su análisis es complicado, debido en parte a la presencia de flujos medios que afectan a la dinámica de las ondas superficiales

(Milewski & Benney [41], Mashayek & Ashgriz [36]) y que, frecuentemente, o son ignorados o no son tratados correctamente. En el límite estrictamente no viscoso, el flujo medio fue ya considerado por Davey & Stewartson [9] (ver también Pierce & Knobloch [48]). Este flujo medio potencial es debido a un efecto de segundo orden producido por la condición de conservación de masa. Para viscosidad pequeña, el camino típico que se ha seguido hasta ahora es añadir, a posteriori, a las ecuaciones no viscosas obtenidas de una formulación Hamiltoniana el efecto de la viscosidad sólo a través de un término de disipación viscosa. Sin embargo, la viscosidad tiene un efecto mayor que la simple corrección de los resultados no viscosos, debido a la presencia de capas límite oscilatorias. En ellas, los esfuerzos de Reynolds son grandes, y tienen media temporal no nula incluso en el límite en el que la viscosidad tiende a cero. Los esfuerzos de Reynolds producen un flujo medio en las capas límite, ya analizado en el trabajo pionero de Rayleigh de 1883 [49], que induce un flujo medio viscoso fuera de las capas límite. Los términos forzantes son una velocidad y un esfuerzo tangencial no oscilatorio en el borde de las capas límite adyacentes a las paredes sólidas y a las superficies libres respectivamente, que calcularon por primera vez Schlichting [51] y Longuet-Higgins [32] (ver Riley [50]). Este flujo medio es debido a la viscosidad, pero no desaparece en el límite de viscosidad tendiendo a cero, a pesar de que no puede estar presente cuando la viscosidad es idénticamente nula (en este caso desaparecen las capas límite). Esta aparente paradoja es debida al carácter de perturbación singular de este límite. Este flujo medio, necesariamente viscoso y conocido como “steady streaming”, es importante porque, como veremos más adelante, conduce a nuevos términos en las ecuaciones de amplitud de las ondas superficiales, interaccionando por tanto con el flujo oscilatorio.

A pesar de que la necesidad de tener en cuenta el flujo medio en el análisis de las ondas que lo producen aparece en los trabajos de Longuet-Higgins [32], Phillips [47] y Craik [6], el flujo medio se ha ignorado sistemáticamente, salvo en algunos estudios en los que el flujo medio viscoso es una mera corrección de orden superior, no acoplada con las ondas de la superficie libre (p.e. Liu & Davis [31], Iskandarani & Liu [23]). El correspondiente tratamiento asintóticamente correcto de este flujo medio viscoso es sutil y sólo muy recientemente (Vega, Knobloch & Martel [57], Higuera, Vega & Knobloch [21], Knobloch & Vega [28], Knobloch, Martel & Vega [27]) se han obtenido formulaciones que incluyen el efecto del flujo medio, persiguiendo ideas básicas desarrolladas por Nicolás & Vega [44] y Nicolás, Rivas & Vega [43].

Este flujo medio fue observado de forma indirecta por Faraday [14] a través de la acumu-

lación de arena en el fondo del depósito, y más tarde Rayleigh [49] calculó el flujo medio viscoso en la capa límite oscilatoria adyacente a una pared sólida. El flujo medio también fue observado directamente por Douady [10] para visualizar determinadas configuraciones, y ha sido asociado de modo fenomenológico con la rotación de ondas espirales (Kiyashko et al. [26]). Pero, más allá de estas menciones colaterales, el flujo medio viscoso en conexión con las ondas de Faraday ha sido ignorado de forma sistemática.

Los comportamientos más interesantes de ondas de Faraday tienen lugar en depósitos de alargamiento grande (ver Kudrolli & Gollub [29]). Un análisis apropiado de flujos poco viscosos en este tipo de depósitos, en los que la longitud de onda es pequeña comparada con la dimensión horizontal del recipiente, requiere incluir en las ecuaciones de amplitud la modulación espacial de las ondas superficiales (es decir, incluir los efectos de la velocidad de grupo y la dispersión de las ondas). Pero el análisis combinado de estos efectos no es sencillo, ya que conduce a nuevos términos en las ecuaciones de amplitud, que no pueden ser del mismo orden de magnitud entre sí. Esta dificultad ha sido resuelta recientemente para ecuaciones de amplitud en sistemas disipativos (ver Martel & Vega [35]) y en sistemas casi-conservativos, como el asociado a la inestabilidad de Faraday (ver Vega, Knobloch & Martel [57], para la obtención de las ecuaciones asintóticas que incluyen el efecto combinado de la modulación de la onda superficial, flujo medio viscoso y el no viscoso). Sin embargo, existen fenómenos interesantes y no muy bien justificados teóricamente que involucran únicamente a trenes de ondas no modulados espacialmente. Este es el caso de algunos de los modos con deriva (“drift modes”) observados por Douady, Fauve & Thual [11] en depósitos anulares, que consisten en una onda de tipo “standing” no modulada y monocromática que gira en el depósito anular con velocidad angular constante (ver también Thual, Douady & Fauve [53] y Fauve, Douady & Thual [16] para una descripción fenomenológica y Cross & Hohenberg [8] para una mayor discusión sobre este tipo de comportamientos).

En los últimos treinta años, la teoría de la bifurcación y, en particular, la teoría de formas normales se han desarrollado y aplicado a gran cantidad de problemas débilmente no lineales (como son los asociados a las ondas en el agua), en los que aparecen simultáneamente varias escalas espaciales y/o temporales. Las ecuaciones de amplitud resultantes describen, en la escala temporal más lenta, la evolución de los modos marginales y pueden estudiarse analítica y numéricamente para obtener el comportamiento dominante para tiempos grandes. Los resultados teóricos obtenidos de este modo están con frecuencia de acuerdo con las observaciones

experimentales (Cross y Hohenberg [8]).

Las ecuaciones de amplitud más usadas para las ondas de Faraday monocromáticas, no moduladas espacialmente y débilmente amortiguadas, en un dominio que permite la propagación de las ondas en una única dirección distinguida, son

$$A' = [-\delta - id + i\alpha_3|A|^2 - i\alpha_4|B|^2]A + i\mu\alpha_6\bar{B}, \quad (1.1.1)$$

$$B' = [-\delta - id + i\alpha_3|B|^2 - i\alpha_4|A|^2]B + i\mu\alpha_6\bar{A}, \quad (1.1.2)$$

donde A y B son las amplitudes complejas de dos ondas contrapropagatorias superficiales, de modo que el desplazamiento de la superficie libre respecto de su posición de reposo tiene, en primera aproximación, la forma siguiente

$$f = e^{i\Omega t} \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) + c.c., \quad (1.1.3)$$

donde $|A| \sim |B| \ll 1$.

En estas ecuaciones el término proporcional a δ representa el amortiguamiento debido a la disipación viscosa lineal (“damping”), el proporcional a d proviene de la diferencia entre la mitad de la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del sistema (“detuning”), los proporcionales a α_3 y α_4 representan la no linealidad cúbica conservativa (Miles [38]) y el correspondiente a μ proceden del forzamiento paramétrico.

Estas ecuaciones ignoran el flujo medio y, como se verá a continuación, conducen a inconsistencias. El comportamiento de (1.1.1)-(1.1.2) para tiempos largos consiste en ondas de tipo “standing” (que se denominarán de tipo estático) cuyas amplitudes complejas son de la forma $|A| = |B| = \text{constante}$ y están determinadas salvo por el desfase espacial ψ (proporcional a la diferencia de fases de A y B), que es tal que

$$\psi' = 0. \quad (1.1.4)$$

Por otro lado, las ecuaciones del flujo medio producido por las ondas de tipo estático para un dominio bidimensional periódico (figura 2.2, pág. 14) se reducen, tras reescalados apropiados, al siguiente sistema de ecuaciones y condiciones de contorno (ver Iskandarani & Liu [23])

$$u_x + v_y = 0, \quad (1.1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + v(u_y - v_x) = -q_x + Re^{-1}(u_{xx} + u_{yy}), \quad (1.1.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - u(u_y - v_x) = -q_y + Re^{-1}(v_{xx} + v_{yy}), \quad (1.1.7)$$

$$u = -\sin 2kx, \quad v = 0, \quad \text{en } y = 0, \quad (1.1.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = 0, \quad \text{en } y = 1, \quad (1.1.9)$$

$$u, v, \text{ y } q \text{ son } x\text{-periódicas, de periodo } \Lambda = 2\pi r/k. \quad (1.1.10)$$

El término forzante de (1.1.8) proviene del término lentamente variable de la capa límite de Stokes adyacente a la pared del fondo del depósito (Batchelor [1]). La integración numérica de este problema conduce a una primera solución estacionaria que corresponde a una sucesión de vórtices contrarrotatorios para el flujo medio, como los obtenidos numéricamente en la figura 4.1(a) (pág. 70) para los valores $\Lambda = \pi/2$, $k = 4$ ($r = 1$) y $Re = 55$. Esta configuración ha sido descrita cualitativamente por Liu & Davis [31] y calculada numéricamente por Iskandarani & Liu [23] y se ha asumido como la única configuración asociada con ondas de tipo estático. Esta solución tiene simetría de reflexión en x y no puede inducir ninguna velocidad angular de rotación en la onda superficial, lo que es consistente con (1.1.4). Sin embargo, esta solución estacionaria de (1.1.5)-(1.1.10) pierde estabilidad a través de una bifurcación de pérdida de simetría (de tipo horca) para los Reynolds críticos representados por la línea discontinua de la figura 4.3 (pág. 72), y aparecen otro tipo de soluciones estacionarias no simétricas, similares a la de la figura 4.1(b), que poseen un flujo neto en la superficie libre (Yan, Inham & Morton [59] obtuvieron un resultado similar para una cascada de cilindros). Este flujo neto produce por convección una variación de la fase de las ondas superficiales y genera un término distinto de cero en (1.1.4). En consecuencia, las ecuaciones de amplitud (1.1.1)-(1.1.2) son incompletas, y el acoplamiento entre el flujo medio y el desfase espacial de la onda no puede ser ignorado.

Para explicar comportamientos más complicados se han incluido efectos de disipación no lineal y forzamiento no lineal (Miles [39]), que son efectos de orden superior, pero en ningún momento se han incluido los efectos del flujo medio que, como se verá, van a ser del mismo orden que los términos no lineales que aparecen en (1.1.1)-(1.1.2). La contribución más importante de este trabajo es probar que el flujo medio es el causante de la desestabilización de las ondas de tipo estático (cuyo desfase espacial cumple (1.1.4)), y que da lugar a ondas superficiales cuyo desfase oscila (con el tiempo característico de variación del flujo medio), ondas de tipo estático en un sistema de referencia que se mueve a velocidad constante (en las que $\psi' = \text{cte}$) y ondas superficiales más complicadas que presentan incluso comportamientos caóticos.

1.2. Contenido de la tesis

El objetivo general de esta tesis es abordar el análisis débilmente no lineal de la aparición de la inestabilidad de Faraday en recipientes anulares bidimensionales cuando los efectos viscosos son pequeños. Para ello se obtienen las ecuaciones que describen la evolución conjunta del desfase espacial de las ondas superficiales y del flujo medio en una escala de tiempo lenta en comparación con la de vibración del depósito. De aquí en adelante estas ecuaciones se denominarán *ecuaciones asintóticas*.

Los pasos llevados a cabo para la consecución de este objetivo son los siguientes:

1. *Deducción de las ecuaciones asintóticas.* En el capítulo 2 se deducen las ecuaciones asintóticas que describen la dinámica débilmente no lineal. Para ello se analiza el flujo de un líquido de baja viscosidad en un depósito periódico bidimensional sometido a vibración vertical con excitación paramétrica (la frecuencia de excitación es cercana al doble de una frecuencia natural del sistema). Primero, teniendo en cuenta las hipótesis generales indicadas en §2.1.1, se formulan en §2.2 las ecuaciones y condiciones de contorno que describen el movimiento de un fluido, identificando las distintas regiones características del movimiento: (i) una zona central, denominada casi-potencial, en la que el movimiento del fluido es irrotacional en primera aproximación, y (ii) dos capas límite, una en el fondo del recipiente y otra en la superficie libre, en las que los efectos viscosos son dominantes. Tras un primer análisis lineal del problema, se obtienen los modos propios del sistema que son de dos tipos: (i) los modos no viscosos, que son oscilatorios, con una frecuencia del orden del inverso del tiempo gravitatorio, $\sqrt{\frac{g}{h}}$, donde g es la gravedad y h la altura del líquido en reposo; estos modos conducen a la formación de dos ondas superficiales que se propagan en sentidos contrarios. Y (ii) los modos viscosos, que son no oscilatorios y decaen en el tiempo viscoso $\frac{h^2}{\nu}$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido; estos modos dan lugar al flujo medio. A continuación se analiza el problema débilmente no lineal en función de los parámetros pequeños del problema y se obtienen las ecuaciones de evolución de las amplitudes de las ondas superficiales y del flujo medio. Estas ecuaciones se deducen a partir de principios generales de la mecánica de fluidos sin usar ningún argumento fenomenológico. En este trabajo no se considera la modulación de las ondas superficiales que se generan en el flujo (y, por tanto, los efectos de la velocidad de grupo y la dispersión de las ondas). El análisis

debe completarse con un estudio de las capas límite (presentes en el fondo y en la superficie libre del depósito) para obtener las condiciones de contorno para el flujo en el resto del campo fluido. Dicho estudio se presenta en el Apéndice A.

2. *Estudio analítico de las ecuaciones asintóticas.* Con objeto de describir y clasificar los comportamientos del sistema para tiempos grandes, en el capítulo 3 se estudian analíticamente las ecuaciones asintóticas. Éstas son dos ecuaciones diferenciales ordinarias para la evolución las amplitudes complejas de las ondas superficiales, acopladas con ecuaciones (en derivadas parciales) de continuidad y cantidad de movimiento, con condiciones de contorno apropiadas, para la evolución del flujo medio. Dicho acoplamiento se produce a través de: (i) un término no local en las ecuaciones de amplitud, que involucra a una integral con peso de la velocidad horizontal del flujo medio. Y (ii) condiciones de contorno no homogéneas para el flujo medio en el fondo y en la superficie libre, que dependen cuadráticamente de las dos amplitudes complejas de las ondas superficiales. Se comprueba que la evolución de los módulos de las amplitudes y la suma de las fases (que es la fase temporal de la onda superficial) quedan desacopladas del flujo medio y tienden a valores estacionarios para tiempos grandes. La diferencia de las fases de las dos ondas (la fase espacial de la onda superficial), en cambio, evoluciona acoplada con el flujo medio.
3. *Integración numérica de las ecuaciones asintóticas.* Las ecuaciones asintóticas incluyen ecuaciones de Navier-Stokes, con un número de Reynolds relativamente alto. Estas ecuaciones se integran numéricamente para obtener el comportamiento del sistema para tiempos grandes. El método numérico empleado, que se describe en el apéndice B, utiliza una descomposición espectral en la dirección horizontal y un esquema de diferencias finitas equiespaciado y de segundo orden en la dirección vertical. Para avanzar en el tiempo se emplea un método semimplícito de orden dos.
4. *Interpretación de los resultados obtenidos y comparación cualitativa con experimentos.* En el capítulo 4 se lleva a cabo un estudio exhaustivo de los comportamientos para tiempos grandes, que incluye el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Estos exponentes se usan para cuantificar el grado de complejidad de las soluciones y para localizar con mayor precisión las bifurcaciones que se presentan. Se pondrá especial énfasis en interpretar las

bifurcaciones en términos de las pérdidas de simetrías del problema, que es invariante ante el grupo ortogonal generado por las traslaciones y las reflexiones horizontales. En lo posible, se comparan las soluciones obtenidas con resultados experimentales [11], pero tal comparación sólo puede ser cualitativa, dado el carácter bidimensional de esta teoría y la poca precisión en los experimentos.

Finalmente, en el capítulo 5 se exponen las conclusiones y las posibles extensiones de este trabajo.

Capítulo 2

Deducción de las ecuaciones asintóticas

2.1. Introducción

En este capítulo se deducen las *ecuaciones asintóticas*, en el límite doble de pequeña viscosidad y pequeña amplitud de las ondas, que proporcionan la evolución conjunta de las ondas superficiales y del flujo medio asociado, en recipientes anulares bidimensionales sometidos a vibración vertical, cuando la frecuencia de excitación es cercana al doble de una frecuencia natural del sistema.

Tras formular el problema (sección §2.2) y realizar el análisis lineal del estado de reposo del problema no excitado (apartado §2.3), se lleva a cabo el análisis débilmente no lineal (sección §2.4), expresándose la solución en la zona casi-potencial como la de equilibrio más la contribución de los modos propios marginalmente estables (que se amortiguan muy lentamente). La solución se desarrolla en potencias de los parámetros pequeños del problema, obteniendo para cada orden un sistema recurrente de ecuaciones lineales (apartado §2.4.2) y las ecuaciones de la evolución no lineal del flujo medio secundario (apartado §2.4.4). Imponiendo que las soluciones de todos estos problemas lineales no tengan términos seculares se establece una condición integral de resolubilidad para el problema original completo, obteniéndose así las ecuaciones de evolución de las amplitudes de las ondas superficiales (ver apartados §2.4.1 y §2.4.3). En el apéndice A se completa el análisis con el estudio de las capas límite que proporcionan las condiciones de contorno para el flujo en la zona casi-potencial.

2.1.1. Hipótesis generales

En el desarrollo de la presente tesis se han tenido en cuenta las siguientes hipótesis:

(a) Se consideran fluidos incompresibles, de modo que el volumen del líquido dentro del depósito permanece constante.

(b) Se consideran despreciables la densidad y viscosidad del aire en contacto con la superficie del líquido, de modo que el gas no afecta a la dinámica del mismo. Se consideran el gas y el líquido del contenedor totalmente inmiscibles.

(c) Los líquidos considerados son homogéneos, y se desprecia el efecto de surfactantes en la superficie libre debidos, por ejemplo, a contaminantes. Esto, unido a la ausencia de gradientes térmicos, implica que todas las propiedades físicas del líquido (densidad ρ y viscosidad μ), y de la interfase líquido-gas (tensión superficial σ), son uniformes y constantes.

2.2. Formulación del problema

Consideramos un depósito anular, de anchura l y profundidad h , cuyo radio de curvatura medio R es mucho mayor que la anchura del depósito l , que a su vez es grande comparada con la altura y con la longitud de onda. En tal caso, podemos utilizar la aproximación a una caja bidimensional periódica de periodo igual a la longitud de la caja, $L = 2\pi R$, y de altura h (figura 2.1).

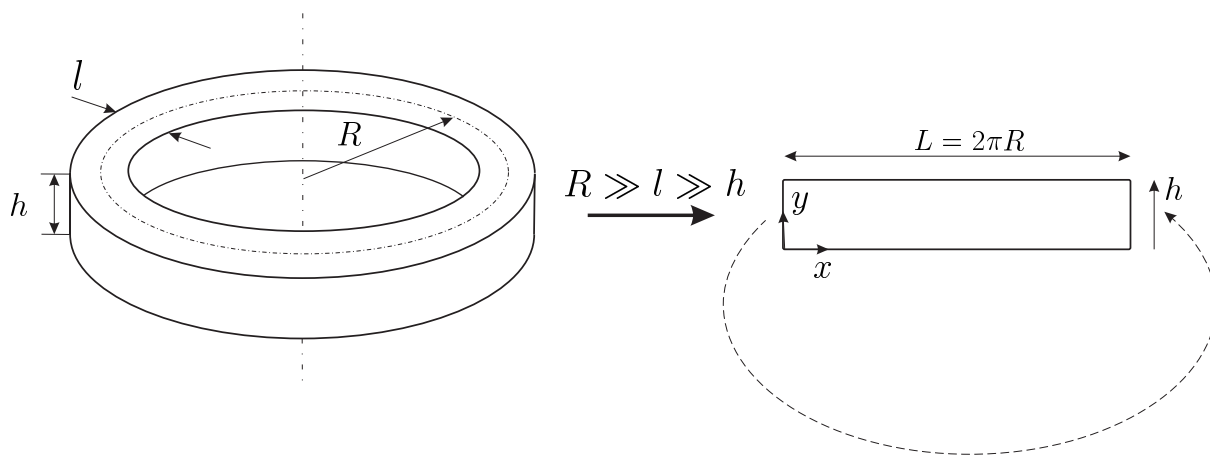


Figura 2.1: Depósito anular y simplificación bidimensional

Las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento para un fluido incompresible respecto a un observador ligado al movimiento vibratorio del depósito son:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{g} + a w_{ex}^2 \cos(w_{ex}t) \mathbf{j} + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (2.2.2)$$

Y las condiciones de contorno son:

(a) En el fondo del depósito no existe deslizamiento

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0. \quad (2.2.3)$$

(b) En la superficie libre, $y = f(x, t)$, se impone:

(b.1) Balance de esfuerzos normales

$$\sigma M + p = \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\eta}). \quad (2.2.4)$$

(b.2) Balance de esfuerzos tangenciales

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\eta}) = 0. \quad (2.2.5)$$

En las expresiones anteriores \mathbf{T} es el tensor de esfuerzos viscosos, igual a

$$\mathbf{T} = \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) = 2\mu \begin{pmatrix} u_x & \frac{u_y + v_x}{2} \\ \frac{u_y + v_x}{2} & v_y \end{pmatrix}, \quad (2.2.6)$$

y M es la curvatura de la superficie libre, que en $2D$ se reduce a una curva, es decir,

$$M = \frac{f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.2.7)$$

(b.3) Compatibilidad cinemática (la velocidad normal de la superficie libre coincide con la velocidad del fluido en la dirección perpendicular a la superficie libre)

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad \text{con} \quad \mathbf{x}_s = (x, f(x, t)). \quad (2.2.8)$$

A estas ecuaciones habrá que añadir:

(c) La condición de periodicidad en la dirección horizontal de las variables \mathbf{v} , p , y f , con periodo igual a la longitud del depósito L .

(d) Y por último, la ecuación integral de conservación del volumen de líquido en el depósito

$$\int_0^L f(x, t) dx = L h, \quad (2.2.9)$$

que es consecuencia de la ecuación de continuidad (2.2.1) y compatibilidad cinemática (2.2.8) y que fija la cantidad de fluido que hay inicialmente en el recipiente.

Conviene hacer un cambio de variable de la presión p a la presión total q (presión reducida más presión dinámica)

$$q = p + \rho U(y, t) + \rho \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right), \quad (2.2.10)$$

donde $U(y, t)$ es el potencial de fuerzas másicas,

$$U(y, t) = [g - a \omega_{ex}^2 \cos(\omega_{ex} t)] (y - 1), \quad (2.2.11)$$

y adimensionalizar el problema, reescalando todas las longitudes con la profundidad h del depósito, los tiempos con el tiempo gravitatorio $\sqrt{\frac{h}{g}}$, la velocidad con \sqrt{gh} y la presión con ρgh . Finalmente, se obtienen las siguientes ecuaciones adimensionales

$$u_x + v_y = 0, \quad (2.2.12)$$

$$u_t + v(u_y - v_x) = -q_x + C(u_{xx} + u_{yy}), \quad (2.2.13)$$

$$v_t - u(u_y - v_x) = -q_y + C(v_{xx} + v_{yy}), \quad (2.2.14)$$

y las siguientes condiciones de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u, v, q, f \quad \text{son funciones periódicas en } x, \text{ de periodo } \Lambda, \\
 \int_0^\Lambda f(x, t) dx = \Lambda, \\
 y = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0, \\ v = 0, \end{array} \right. \\
 \\
 y = f(x, t) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 q - \frac{u^2 + v^2}{2} - (f - 1) + \frac{T f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{\frac{3}{2}}} + (f - 1) \mu w_{ex}^2 \cos(\omega_{ex} t) = \\
 = 2C \frac{v_y - (u_y - v_x) f_x + u_x f_x^2}{1 + f_x^2}, \\
 (1 - f_x^2)(u_y + v_x) + 2f_x(v_y - u_x) = 0, \\
 v = f_t + u f_x.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (2.2.15)$$

Los parámetros adimensionales que aparecen son los siguientes:

$$C = \frac{\nu}{\sqrt{gh^3}}, \quad (2.2.16)$$

que es el inverso del número de Reynolds basado en la altura del líquido en el contenedor y mide el efecto relativo de los términos viscosos y gravitatorios,

$$T = \frac{\sigma}{\rho g h^2} \quad (2.2.17)$$

es el número de Weber (o el inverso del número de Bond) y mide la importancia relativa de los efectos capilares frente a los gravitatorios. Por último μ es la amplitud adimensional del forzamiento

$$\mu = \frac{a}{h}. \quad (2.2.18)$$

De estas ecuaciones se considera el límite de baja viscosidad y pequeño forzamiento, es decir,

$$C \ll 1, \quad \mu \ll 1, \quad y \quad |\delta| \ll 1, \quad (2.2.19)$$

donde δ es un parámetro real y adimensional, que mide la diferencia entre la mitad de la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del sistema, Ω ,

$$\omega_{ex} = 2\omega, \quad \omega - \Omega = \delta. \quad (2.2.20)$$

El problema anterior (2.2.12)-(2.2.15) es invariante frente a reflexiones y a traslaciones en la variable x , es decir, frente a las transformaciones de la forma

$$x \rightarrow -x, \quad u \rightarrow -u, \tag{2.2.21}$$

y

$$x \rightarrow x + c. \tag{2.2.22}$$

2.2.1. Región casi-potencial y capas límite

El límite de baja viscosidad nos conduce a un problema de perturbaciones singulares. Las soluciones del problema lineal y no viscoso (en el que se desprecian los términos viscosos de las ecuaciones) es irrotacional y no cumple la condición de velocidad horizontal nula en el fondo del depósito ni la condición de balance de esfuerzos tangenciales nulos en la superficie libre. Esto indica la presencia de dos capas límite en las que será necesario retener los términos viscosos. El análisis de estas capas límite proporciona las condiciones de contorno que deben imponerse a la solución en la región central.

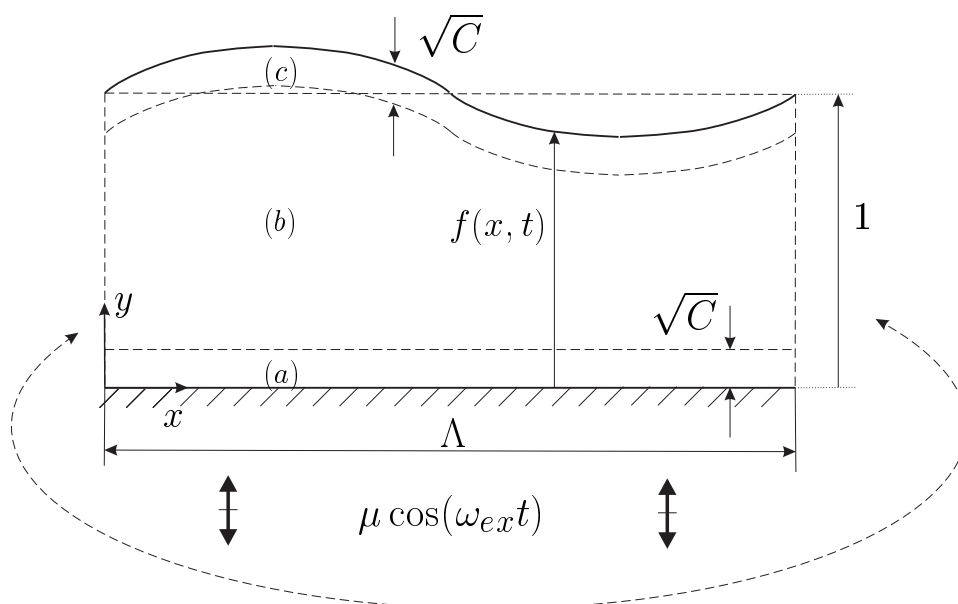


Figura 2.2: Distintas regiones de análisis: (a) Capa límite de Stokes en el fondo del depósito. (b) Zona casi-potencial. (c) Capa límite de la superficie libre.

- **Espesor de las capas límite**

El espesor δ de la capa límite del fondo del depósito es $\delta \sim \sqrt{C}$, y en ella, la velocidad horizontal experimenta una variación del orden de ella misma. El tamaño característico δ se determina haciendo que los términos viscosos e inerciales en la ecuación de cantidad de movimiento horizontal sean del mismo orden. El movimiento del fluido en esta región presenta una distribución de velocidad horizontal que es en primera aproximación la que proporciona el segundo problema de Stokes. Esta capa límite se conoce con el nombre de capa límite oscilatoria (Batchelor [1]) debido a que en ella el fluido realiza un movimiento oscilatorio inducido por un forzamiento externo, también oscilatorio que, en este caso, corresponde a la oscilación de la componente horizontal de la velocidad del flujo, justo en el borde de la capa. Dicho movimiento oscilatorio está asociado a una frecuencia propia del flujo de la región potencial.

Análogamente, del hecho de que el flujo en la zona potencial no satisfaga en la superficie libre la condición de equilibrio de esfuerzos tangenciales, se deduce que los esfuerzos tangenciales ($\tau \sim u_y$) experimentan una variación del orden de sí mismos a lo largo de un espesor $\delta \sim \sqrt{C}$; no así la velocidad, que experimenta una variación \sqrt{C} veces más pequeña que ella misma. El espesor de la capa límite en la superficie libre se obtiene con el mismo razonamiento aplicado al cálculo del espesor de la capa límite del fondo. El análisis de ambas capas límite se lleva a cabo en el Apéndice A.

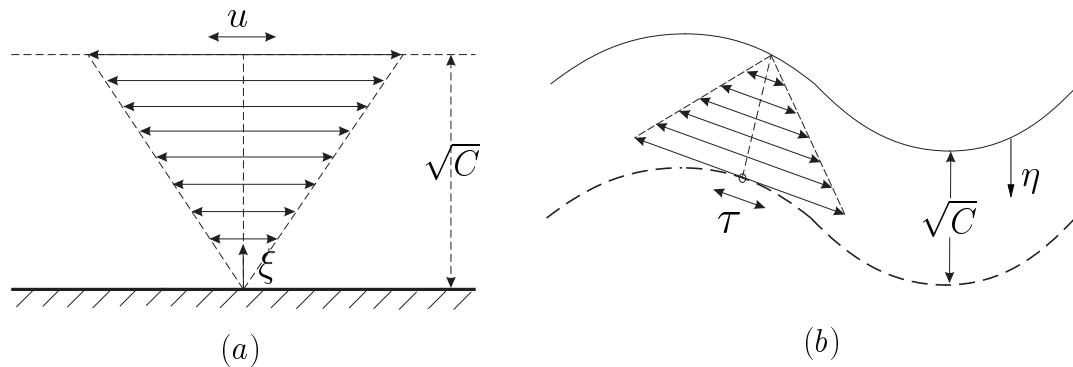


Figura 2.3: Esquemas de las capas límite: (a) Capa límite oscilatoria de Stokes en el fondo del depósito. (b) Capa límite de la superficie libre.

2.3. Análisis lineal. Modos viscosos y no viscosos

El problema de estabilidad lineal en torno a la posición de equilibrio, puede resolverse de modo exacto para valores arbitrarios de C , y tomar en tal solución el límite $C \rightarrow 0$.

- **Formulación del problema lineal**

Se van a tener en cuenta oscilaciones libres de pequeña amplitud en torno a la posición de equilibrio (fluido en reposo respecto al depósito y superficie libre plana):

$$u = v = q = f - 1 = 0. \quad (2.3.1)$$

Linealizando el problema (2.2.12)-(2.2.15) no forzado ($\mu = 0$) en torno al estado básico descrito anteriormente, se obtienen las siguientes ecuaciones y condiciones de contorno

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla q + C \Delta \mathbf{v}, \quad (2.3.3)$$

\mathbf{v}, q, f son funciones periódicas en x , de periodo Λ ,

$$\int_0^\Lambda f(x, t) dx = \Lambda,$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{en } y = 0, \quad (2.3.4)$$

$$q - (f - 1) + T f_{xx} = 2C v_y \quad \text{en } y = 1,$$

$$u_y + v_x = 0 \quad \text{en } y = 1,$$

$$v = f_t \quad \text{en } y = 1.$$

Siguiendo a Martel & Knobloch [33], las soluciones del problema (2.3.2)-(2.3.4) son de la forma

$$(u, v, q, f - 1) = \varepsilon (U_k(y), V_k(y), Q_k(y), F_k) e^{ikx + i\Omega t} + \text{c.c.}, \quad (2.3.5)$$

donde ε representa la amplitud adimensional de las ondas superficiales y cumple

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad (2.3.6)$$

y, debido a la periodicidad del problema, el número de onda k es tal que

$$k\Lambda = 2\pi r, \quad (2.3.7)$$

con $r \in Z$ (gracias a la simetría (2.2.21) basta con considerar los valores $r > 0$). Las autofunciones $U_k(y)$, $V_k(y)$, $Q_k(y)$, F_k cumplen las ecuaciones (2.3.8)-(2.3.10) con las ecuaciones de contorno (2.3.11)-(2.3.14),

$$i\Omega U_k = -ikQ_k + C \left(\frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} - k^2 U_k \right), \quad (2.3.8)$$

$$i\Omega V_k = -\frac{\partial Q_k}{\partial y} + C \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} + k^2 V_k \right), \quad (2.3.9)$$

$$ikU_k + \frac{\partial V_k}{\partial y} = 0, \quad (2.3.10)$$

$$U_k(0) = V_k(0) = 0, \quad (2.3.11)$$

$$i\Omega F_k = V_k(1), \quad (2.3.12)$$

$$Q_k(1) - (1 + k^2 T)F_k = 2C \frac{\partial V_k}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (2.3.13)$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial y} \Big|_{y=1} + ikV_k(1) = 0, \quad (2.3.14)$$

donde el tamaño de la solución se ha normalizado haciendo $F_k = 1$ si $k \neq 0$, ($F_0 = 0$ en virtud del principio de conservación de masa). Eliminando U_k y Q_k , se obtiene una única ecuación diferencial de cuarto orden para V_k

$$\left[i\Omega - C \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right] V_k(y) = 0, \quad (2.3.15)$$

con las cinco condiciones de contorno

$$V_k(0) = \frac{\partial V_k}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (2.3.16)$$

$$V_k(1) = i\Omega F_k, \quad (2.3.17)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) V_k(y) \Big|_{y=1} = 0, \quad (2.3.18)$$

$$\left[i\Omega - C \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 3k^2 \right) \right] \frac{\partial V_k(y)}{\partial y} \Big|_{y=1} = -k^2(1 + Tk^2)F_k. \quad (2.3.19)$$

El problema anterior determina unívocamente el valor de $V_k(y)$ y de $\Omega(k)$.

- **Soluciones en función del número de onda k**

En primer lugar se determinan los autovalores de la ecuación característica asociada a $V_k(y)$,

$$-\lambda^4 + \lambda^2 \left(2k^2 + \frac{i\Omega}{C} \right) - k^2 \left(k^2 + \frac{i\Omega}{C} \right) = 0, \quad (2.3.20)$$

cuyas raíces son de la forma

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{i\Omega}{C} + k^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = k^2. \quad (2.3.21)$$

La solución general de (2.3.15) es, por tanto, de la forma

$$V_k(y) = a e^{qy} + b e^{-qy} + c e^{ky} + d e^{-ky}, \quad \text{con } q^2 = \frac{i\Omega}{C} + k^2. \quad (2.3.22)$$

Aplicando ahora las condiciones de contorno (2.3.16)-(2.3.19) se obtiene el siguiente sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & k & 0 \\ \cosh q & \sinh q & \cosh k & \sinh k & C(k^2 - q^2) \\ (q^2 + k^2) \cosh q & (q^2 + k^2) \sinh q & 2k^2 \cosh k & 2k^2 \sinh k & 0 \\ 2Cqk^2 \sinh q & 2Cqk^2 \cosh q & Ck(k^2 + q^2) \sinh k & Ck(k^2 + q^2) \cosh k & k^2(1 + Tk^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

que debe tener solución no trivial. De aquí se deduce la siguiente relación de dispersión,

$$\begin{aligned} k(1 + Tk^2)[q \cosh q \sinh k - k \cosh k \sinh q] = \\ C^2 4k^2 q(k^2 + q^2) + (k^4 + 6k^2 q^2 + q^4)k \sinh q \sinh k - \\ - (5k^4 + 2k^2 q^2 + q^4)q \cosh q \cosh k. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

El análisis asintótico de las soluciones de la ecuación (2.3.24) $\Omega(k)$, en el límite de baja viscosidad $C \ll 1$, determina la presencia de dos tipos de modos muy distintos, que llamaremos no viscosos y viscosos respectivamente.

2.3.1. Modos no viscosos

Los modos no viscosos verifican $|\Omega| \sim 1$ y corresponden al autovalor asociado a una solución que en primera aproximación es no viscosa. Introduciendo en la relación de dispersión desarrollos asintóticos de la forma

$$i\Omega = i\Omega_0 + \sqrt{C}i\Omega_1 + Ci\Omega_2, \quad (2.3.25)$$

de modo que

$$q = \frac{q_0}{\sqrt{C}} + q_1 + q_2\sqrt{C} + \dots, \quad y \quad i\Omega = C(q^2 - k^2), \quad (2.3.26)$$

se obtienen los siguientes resultados

$$i\Omega_0 = q_0^2 = \pm i \sqrt{k(1 + Tk^2) \tanh k} \quad (2.3.27)$$

$$i\Omega_1 = 2q_0q_1 = -k \frac{[k(1 + Tk^2) \tanh k]^{\frac{1}{4}}}{\sinh(2k)} \left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.3.28)$$

$$i\Omega_2 = q_1^2 + 2q_0q_2 - k^2 = -k^2 \left(2 + \frac{1 + \tanh^2 k}{4 \sinh^2 k} \right) \quad (2.3.29)$$

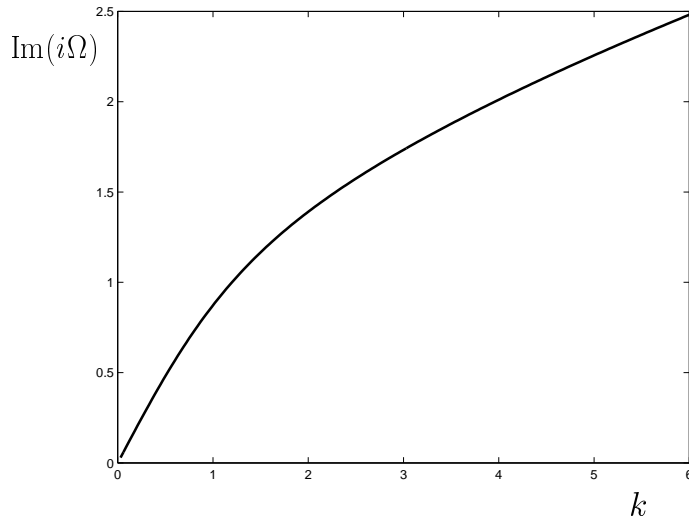


Figura 2.4: Parte imaginaria de los modos no viscosos para $C = 10^{-5}$ y $T = 7.27 \cdot 10^{-4}$

En las figuras 2.4 y 2.5 se han representado las partes imaginaria y real de la frecuencia natural del sistema en función del número de onda para $C = 10^{-5}$ y $T = 7.27 \cdot 10^{-4}$, que corresponden a valores del inverso del número de Reynolds y Bond, respectivamente, para un contenedor anular lleno de agua hasta una altura $h = 10.1$ cm. Nótese que, en este caso, para valores de k del orden de 2 o mayores es necesario retener el término de orden C en el desarrollo asintótico de los modos no viscosos si se quiere obtener una buena aproximación de los mismos.

Para $k \sim 1$, estos modos oscilan con una frecuencia adimensional de orden unidad, y su amortiguamiento es proporcional a \sqrt{C} si $k \sim 1$ y proporcional a C en tanto en cuanto k es moderadamente grande.

Otra forma de obtener Ω_0 , Ω_1 y Ω_2 es calcular las soluciones lineales en las distintas capas límite hasta orden C y hacer el acoplamiento con la solución lineal en la zona potencial. Como es evidente, esta última forma de calcular Ω_0 , Ω_1 y Ω_2 es más complicada que la anterior, pero

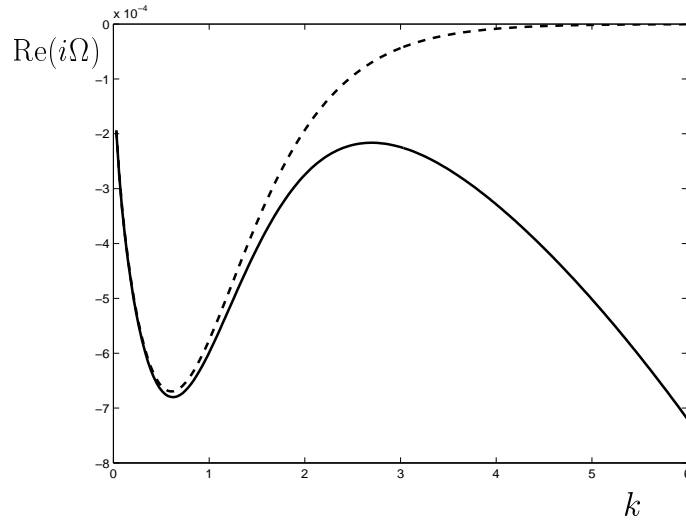


Figura 2.5: Parte real de los modos no viscosos hasta orden C (—) y hasta orden \sqrt{C} (.....), para $C = 10^{-5}$ y $T = 7.27 \cdot 10^{-4}$

pone de manifiesto la estructura espacial de estos modos no viscosos, para los que la vorticidad está confinada a las capas límite.

Los sucesivos términos de la parte real de $i\Omega$ se deben a la disipación viscosa de la energía mecánica en (a) la capa límite del fondo (que proporciona el término de orden \sqrt{C}), y (b) la zona central (término de orden C). Las estimaciones anteriores se obtienen mediante un análisis de órdenes de magnitud en la ecuación linealizada de la energía mecánica del problema no forzado, promediada a lo largo del periodo del modo no viscoso excitado, que se obtiene multiplicando escalarmente por \mathbf{v} la ecuación de evolución lineal de la cantidad de movimiento:

$$\frac{1}{2} \frac{d|\mathbf{v}|^2}{dt} + \mathbf{v} \nabla q + C \mathbf{v} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})) = 0. \quad (2.3.30)$$

Integrando la ecuación anterior en todo el dominio fluido y teniendo en cuenta las condiciones de contorno (2.3.4), la ecuación linealizada de la energía mecánica, tras algunas manipulaciones algebraicas, puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^\Lambda \int_0^1 \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} dy dx + \int_0^\Lambda \left\{ \frac{(f-1)^2}{2} + T \frac{f_x^2}{2} \right\} dx \right] = - \int_0^\Lambda \int_0^1 \Phi_v dy dx, \quad (2.3.31)$$

donde Φ_v es la disipación viscosa (por unidad de volumen) adimensional, e igual a

$$\Phi_v = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = C (2u_x^2 + 2v_y^2 + (v_x + u_y)^2). \quad (2.3.32)$$

El miembro de la izquierda de la ecuación (2.3.31) representa la variación de la energía mecánica en el fluido, y es la suma de la energía cinética, la potencial gravitatoria y la elástica de la superficie libre. Esta variación es igual a la energía que se pierde por disipación viscosa.

Promediando la ecuación (2.3.31) a largo del periodo de oscilación del modo no viscoso excitado e introduciendo la forma de la solución (2.3.5) del problema estrictamente lineal en la ecuación resultante, se obtiene la ecuación que deben cumplir la parte real de los autovalores de la solución lineal,

$$2 \left(\text{Re}(i\Omega_1)\sqrt{C} + \text{Re}(i\Omega_2)C \right) \Lambda \left[\int_0^1 (U\bar{U} + V\bar{V}) dy + (1 + Tk^2)F\bar{F} \right] = \quad (2.3.33)$$

$$- 2C\Lambda \int_0^1 (2k^2U\bar{U} + 2V_y\bar{V}_y + (ikV + U_y)(-ik\bar{V} + \bar{U}_y)) dy$$

Por tanto, el amortiguamiento de los modos superficiales es debido a la disipación viscosa que tiene lugar en (i) las capas límite (de orden \sqrt{C} para la capa límite de Stokes y de orden $C\sqrt{C}$ en la capa límite superficial) y (ii) en la zona casi-potencial (de orden C), ya que

- Capa límite de Stokes $\rightarrow U_y \sim \frac{1}{\sqrt{C}}, U \sim V_y \sim 1, V \sim \sqrt{C}$

$$\begin{array}{ccc} \text{Disipación viscosa} \rightarrow 2C\Lambda \int_0^1 \underbrace{(2k^2U\bar{U} + 2V_y\bar{V}_y + (ikV + U_y)(-ik\bar{V} + \bar{U}_y))}_{\downarrow} \underbrace{dy}_{\downarrow} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & \left(\frac{1}{\sqrt{C}}\right)^2 & \sqrt{C} \Rightarrow \sqrt{C} \end{array} \quad (2.3.34)$$

- Capa límite superficial $\rightarrow U \sim V_y \sim U_y \sim V \sim 1,$

$$\begin{array}{ccc} \text{Disipación viscosa} \rightarrow 2C\Lambda \int_0^1 \underbrace{(2k^2U\bar{U} + 2V_y\bar{V}_y + (ikV + U_y)(-ik\bar{V} + \bar{U}_y))}_{\downarrow} \underbrace{dy}_{\downarrow} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & 1 & \sqrt{C} \Rightarrow C\sqrt{C} \end{array} \quad (2.3.35)$$

- Zona casi-potencial $\rightarrow U \sim U_y \sim V \sim V_y \sim 1$

$$\begin{array}{ccc} \text{Disipación viscosa} \rightarrow 2C\Lambda \int_0^1 \underbrace{(2k^2U\bar{U} + 2V_y\bar{V}_y + (ikV + U_y)(-ik\bar{V} + \bar{U}_y))}_{\downarrow} \underbrace{dy}_{\downarrow} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & 1 & 1 \Rightarrow C \end{array} \quad (2.3.36)$$

2.3.2. Modos viscosos

Además de los modos no viscosos, la relación de dispersión (2.3.24) admite otro tipo de soluciones para los que $|\Omega| \sim C$. Introduciendo el desarrollo de la forma $i\Omega = Ci\Omega_2 + \dots$ (y, por tanto, $q = q_0 + \dots$) se obtiene, para el primer orden,

$$q_0 \cosh q_0 \sinh k - k \cosh k \sinh q_0 = 0 \Rightarrow \frac{q_0}{\tanh q_0} = \frac{k}{\tanh k}. \quad (2.3.37)$$

Esta ecuación tiene únicamente soluciones para valores de q_0 imaginarios puros

$$q_0 = iq_n \Rightarrow \tan q_n = q_n \frac{\tanh k}{k}, \quad (2.3.38)$$

que corresponden a la intersección de la curva $\tan q_n$ con la línea recta de pendiente $\frac{\tanh k}{k}$. Por tanto, para cada valor de k , hay infinitos modos no oscilatorios, cuyo amortiguamiento crece monótonamente con k ,

$$\begin{aligned} i\Omega &= -C(k^2 + q_n^2(k)) + \dots \\ n\pi &< q_n(k) < n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{donde } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

Nótese que estos modos son independientes de T en primera aproximación.

En la figura 2.6 se muestran los tres primeros modos viscosos en función del número de onda k para $C = 10^{-5}$. A estos modos naturales que decaen monótonamente con el tiempo se les denomina modos viscosos, debido a que se manifiestan en cualquier fluido con viscosidad, por pequeña que esta sea. Los modos viscosos son los modos naturales del sistema que decaen más lentamente (ver (2.3.28) y (2.3.39)), por lo que no deben ignorarse a priori a la hora de obtener las ecuaciones que determinan la evolución lenta débilmente no lineal del sistema. Como se verá más adelante, estos modos interactúan con los modos superficiales y son los causantes de los flujos medios secundarios, lentamente variables, que en primera aproximación no involucran deformaciones de la superficie libre.

2.4. Análisis débilmente no lineal

El objetivo de este apartado consiste en la deducción asintótica de las ecuaciones que describen la dinámica débilmente no lineal de las dos ondas gravitatorio-capilares contrapropa-

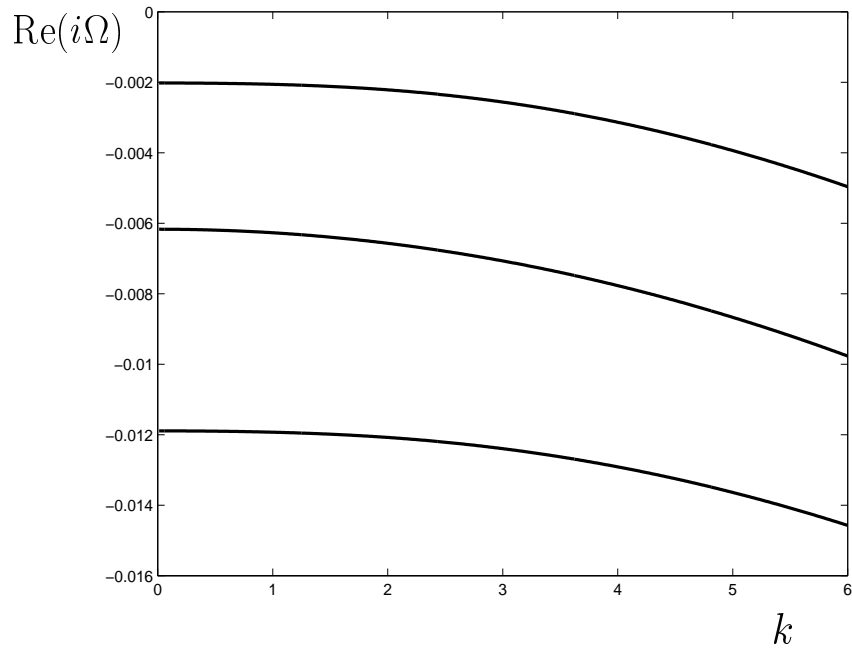


Figura 2.6: Parte real de los tres primeros modos viscosos, $n = 1, 2, 3$, para $C = 10^{-5}$

gatorias y del flujo medio asociado en el límite de baja viscosidad. Como se indicó anteriormente, las ondas están forzadas paramétricamente mediante vibraciones verticales de pequeña amplitud y de frecuencia cercana al doble de una frecuencia natural no viscosa

$$\omega_{ex} \simeq 2\Omega_0 = 2\sqrt{k(1 + kT^2) \tanh k}. \quad (2.4.1)$$

Si sólo se excita una pareja de modos no viscosos, el fluido evolucionará, en primera aproximación, como dos ondas superficiales contrapropagatorias de amplitudes complejas A y B , que dependerán del tiempo en una escala temporalmente lenta, de forma que

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| \ll |A| \quad , \quad \left| \frac{dB}{dt} \right| \ll |B|. \quad (2.4.2)$$

El resto de los modos no viscosos, al no ser excitados por la vibración del recipiente, decaen exponencialmente a causa de la disipación viscosa en la escala temporal lenta. Por otro lado, este par de ondas contrapropagatorias generan en ambas capas límite un flujo no oscilatorio que evoluciona lentamente con el tiempo. El término forzante de este flujo proviene de la media temporal de los esfuerzos de Reynolds que están concentrados en la capa límite oscilatoria. Estos esfuerzos generan un flujo con vorticidad no nula cuya velocidad tangencial es no nula en el borde interior de la capa límite adyacente al fondo del depósito. De modo similar, se genera un

esfuerzo cortante no nulo en las cercanías de la superficie libre. Estos dos términos forzantes no oscilatorios excitan, a su vez, gran cantidad de modos hidrodinámicos, dando lugar a un flujo medio secundario en el resto del campo fluido.

En el análisis débilmente no lineal se estudia la evolución del sistema en las cercanías de su posición de equilibrio, por lo que la solución se expresará como la solución de equilibrio más los modos propios marginalmente estables, que se amortiguan muy lentamente. Por otro lado, la solución se desarrolla en potencias de los parámetros pequeños del problema y en primera aproximación es del orden de la amplitud adimensional de las ondas superficiales, ε , siendo $0 < \varepsilon \ll 1$. Haciendo uso de un método de escalas múltiples se obtienen las ecuaciones de evolución en el tiempo lento de las amplitudes de los modos marginalmente estables. El objetivo de esta sección es obtener estas ecuaciones.

2.4.1. Ecuaciones de amplitud

Se considera en este apartado el problema forzado planteado en la sección §2.2, formado por las ecuaciones (2.2.12) - (2.2.14) y las condiciones de contorno (2.2.15), en el límite de baja viscosidad y pequeño forzamiento, es decir, en el límite

$$C \ll 1, \quad \mu \ll 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad |\delta| \ll 1. \quad (2.4.3)$$

En principio, los parámetros pequeños C , ε , μ y δ se tratan como parámetros independientes y se consideran separadamente la zona casi-potencial y las dos capas límite. Para ello se deben utilizar dos escalas temporales,

$$t \sim 1 \quad \text{y} \quad \tau = |\delta|t \sim 1 \quad \text{donde} \quad |\delta| \ll 1. \quad (2.4.4)$$

La solución en la zona casi-potencial es de la forma:

$$u = \varepsilon \left\{ e^{i\omega t} \left(A(\tau)e^{ikx} - B(\tau)e^{-ikx} \right) \left(U_0(y) + \sqrt{C}U_1(y) + CU_2(y) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \left(u^s(x, y, \tau) + u_{n_1}(x, y, t) \right) + \varepsilon^2 \sqrt{C}u_{n_2} + \varepsilon^3 u_{n_3} + \varepsilon \mu u_{n_4} + \dots, \quad (2.4.5)$$

$$v = \varepsilon \left\{ e^{i\omega t} \left(A(\tau)e^{ikx} + B(\tau)e^{-ikx} \right) \left(V_0(y) + \sqrt{C}V_1(y) + CV_2(y) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \left(v^s(x, y, \tau) + v_{n_1}(x, y, t) \right) + \varepsilon^2 \sqrt{C}v_{n_2} + \varepsilon^3 v_{n_3} + \varepsilon \mu v_{n_4} + \dots, \quad (2.4.6)$$

$$q = \varepsilon \left\{ e^{i\omega t} \left(A(\tau)e^{ikx} + B(\tau)e^{-ikx} \right) \left(Q_0(y) + \sqrt{C}Q_1(y) + CQ_2(y) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \left(q^s(x, y, \tau) + q_{n_1}(x, y, t) \right) + \varepsilon^2 \sqrt{C}q_{n_2} + \varepsilon^3 q_{n_3} + \varepsilon \mu q_{n_4} + \dots, \quad (2.4.7)$$

$$f - 1 = \varepsilon \left\{ e^{i\omega t} \left(A(\tau)e^{ikx} + B(\tau)e^{-ikx} \right) \left(F_0 + \sqrt{C}F_1 + CF_2 \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 (f^s(x, \tau) + f_{n_1}(x, t)) + \varepsilon^2 \sqrt{C} f_{n_2} + \varepsilon^3 f_{n_3} + \varepsilon \mu v_{n_4} + \dots, \quad (2.4.8)$$

donde

$$i\omega t = i\frac{\omega_{ex}}{2}t = i\Omega_0 t + i\delta t, \quad (2.4.9)$$

y los términos lineales (proporcionales a ε , $\varepsilon\sqrt{C}$, ...) se calculan implícitamente en §2.3 y explícitamente en §2.4.2. Los términos con superíndice s son los correspondientes al flujo medio cuyas ecuaciones de evolución se obtienen en §2.4.4, mientras que los términos con subíndice n representan las sucesivas contribuciones no lineales.

Nótese que el problema original (2.2.12)-(2.2.15) es invariante frente a las transformaciones (2.2.21) y (2.2.22), por lo que también debe serlo la solución en cada orden (ε , $\varepsilon\sqrt{C}$, ..., etc). Debido a esta invariancia, las ecuaciones de amplitud son a su vez invariantes frente a las transformaciones

$$A \leftrightarrow B, \quad x \leftrightarrow -x, \quad u^s \leftrightarrow -u^s; \quad (2.4.10)$$

$$\text{y } A \rightarrow Ae^{ic}, \quad B \rightarrow Be^{-ic}, \quad x \rightarrow x - \frac{c}{k}, \quad \forall c \in \mathbf{R}. \quad (2.4.11)$$

La ecuación para la amplitud compleja B puede obtenerse de la correspondiente a A a partir de la transformación (2.4.10), con lo que basta obtener una de las dos ecuaciones de amplitud.

La ecuación de amplitud para A tendrá la forma siguiente en función de los parámetros pequeños del problema (2.4.3)

$$|\delta|\varepsilon \frac{dA}{d\tau} = H_1\varepsilon\sqrt{C} + H_2\varepsilon^2 + H_3\varepsilon C + H_4\varepsilon^2\sqrt{C} + H_5\varepsilon^3 + H_6\mu\varepsilon + \dots \quad (2.4.12)$$

La forma usual de obtener los coeficientes H_k consiste en establecer condiciones de resolubilidad apropiadas para cada uno de los problemas que proporciona cada orden del desarrollo. Estos problemas vienen dados por un sistema recurrente de ecuaciones lineales para cada orden, obtenidas introduciendo los desarrollos del flujo fuera de las capas límite (2.4.5)-(2.4.8) y la ecuación de evolución (2.4.12) en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento; las condiciones de contorno resultan de realizar el acoplamiento con las soluciones en las dos capas límite, la del fondo y la de la superficie libre. Las condiciones de resolubilidad consisten en imponer que las soluciones de dichos problemas lineales estén acotadas en la escala temporal corta ($t \sim 1$), es decir, que no existan términos seculares, esto es, proporcionales a $e^{\pm i\Omega t}$ (Kevorkian

& Cole [25]).

Teniendo en cuenta los desarrollos de u, v, q y $f - 1$ (2.4.5)-(2.4.8), es fácil ver que los términos de órdenes ε^2 y $\varepsilon^2\sqrt{C}$ derivan de productos del término $e^{i\Omega t}(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) + c.c$ por sí mismo, por lo que dependen de t de la forma $e^{0i\Omega t}$ o $e^{\pm 2i\Omega t}$. Por tanto, estos términos son no resonantes y se tiene

$$H_2 = H_4 = 0. \quad (2.4.13)$$

Si se procediese de forma similar para calcular H_1, H_3, H_5 y H_6 , eliminando términos seculares para cada orden, el trabajo de cálculo sería bastante laborioso, porque habría que resolver los problemas de capa límite hasta el orden ε^3 . Para evitar esto, se establecerá una condición integral de resolubilidad para el problema original completo, que es equivalente a la suma de las condiciones de resolubilidad en cada orden. Con ello, para llegar a calcular el término no lineal de orden ε^3 de la ecuación de amplitud, no es necesario calcular la velocidad ni la presión hasta ese orden, sino que basta con conocer v y q hasta orden ε^2 . De igual forma, para llegar a obtener el término lineal de orden εC de ecuación de amplitud, únicamente es necesario conocer la estructura de la solución (en la zona casi-potencial y en las capas límite) hasta orden $\varepsilon\sqrt{C}$, y tampoco es necesario calcular como evoluciona la solución del problema con el forzamiento paramétrico, es decir, no es necesario obtener v y q del orden de $\varepsilon\mu$ para calcular la evolución de la ecuación de amplitud hasta ese orden. Este procedimiento permite calcular los coeficientes de las ecuaciones de amplitud recurriendo únicamente a los términos de la solución en la región casi-potencial y en las capas límite de órdenes $\varepsilon, \varepsilon\sqrt{C}$ y ε^2 .

- **Condición integral de resolubilidad**

Se procede de la siguiente manera. En el sistema de ecuaciones y condiciones de contorno original (2.2.12)-(2.2.15) se introducen las dos escalas temporales, $t \sim 1$ y $\tau = |\delta|t$ (donde $|\delta| \ll 1$ se elegirá más adelante), y se multiplica escalarmente la ecuación de cantidad de movimiento original,

$$\mathbf{v}_t + |\delta|\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - C\Delta\mathbf{v} + \nabla q = 0, \quad \text{con } \mathbf{v} = (u, v), \quad (2.4.14)$$

por la velocidad asociada al modo propio no viscoso que se está excitando tal que

$$\bar{\mathbf{v}}_0(x, y, t) = (\bar{U}_0(y), \bar{V}_0(y)) e^{-i\Omega_0 t - ikx}, \quad (2.4.15)$$

que cumple

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_0 = 0, \quad (2.4.16)$$

$$-i\Omega_0 \bar{\mathbf{v}}_0 + \nabla \bar{q}_0 = 0, \quad (2.4.17)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \text{en } y = 0, \quad (2.4.18)$$

$$-i\Omega_0 \bar{f}_0 - \bar{\mathbf{v}}_0 \mathbf{j} = 0, \quad \bar{q}_0 - \bar{f}_0 + T \bar{f}_{0xx} = 0 \quad \text{en } y = 1, \quad (2.4.19)$$

A la ecuación resultante se le suma el producto de la ecuación (2.4.17) por la velocidad \mathbf{v} , obteniéndose

$$(\mathbf{v}_t + |\delta| \mathbf{v}_\tau - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - C \Delta \mathbf{v} + \nabla q) \cdot \bar{\mathbf{v}}_0 + (-i\Omega_0 \bar{\mathbf{v}}_0 + \nabla \bar{q}_0) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.4.20)$$

Introduciendo ahora el cambio

$$\mathbf{v}_t \cdot \bar{\mathbf{v}}_0 = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}_0) + i\Omega_0 \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}_0, \quad (2.4.21)$$

la ecuación (2.4.20) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}_0) + (|\delta| \mathbf{v}_\tau - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - C \Delta \mathbf{v}) \cdot \bar{\mathbf{v}}_0 + \nabla q \cdot \bar{\mathbf{v}}_0 + \nabla \bar{q}_0 \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.4.22)$$

Integrando (2.4.22) a lo largo de todo el campo fluido, $x \in [0, \Lambda]$ y $y \in [0, f(x, t)]$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\Omega_0 t} I_1) + e^{-i\Omega_0 t} (I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = 0, \quad (2.4.23)$$

donde

$$I_1 = \int_0^\Lambda \int_0^{f(x,t)} (u \bar{U}_0 + v \bar{V}_0) e^{-ikx} dy dx + \int_0^\Lambda \bar{Q}_0|_{y=f} (f-1) e^{-ikx} dx \quad (2.4.24)$$

$$I_2 = |\delta| \left\{ \int_0^\Lambda \int_0^{f(x,t)} (u_\tau \bar{U}_0 + v_\tau \bar{V}_0) e^{-ikx} dy dx + \int_0^\Lambda \bar{Q}_0|_{y=f} f_\tau e^{-ikx} dx \right\} \quad (2.4.25)$$

$$I_3 = C \left\{ \int_0^\Lambda [-2\bar{V}_0 u_y f_x + 4\bar{V}_0 u_x f_x^2 + \dots]_{y=f} e^{-ikx} dx + \int_0^\Lambda [(v_x - u_y) \bar{U}_0]_{y=0}^{y=f} e^{-ikx} dx \right\} + \\ + C \int_0^\Lambda \left[2 \frac{v_y - (u_y - v_x) f_x + u_x f_x^2}{1 + f_x^2} (\bar{V}_0 - \bar{U}_0 f_x) \right]_{y=f} e^{-ikx} dx \quad (2.4.26)$$

$$\begin{aligned}
I_4 = & - \int_0^\Lambda [u\bar{U}_0 + v\bar{V}_0]_{y=f} f_t e^{-ikx} dx + i\Omega_0 \int_0^\Lambda (f-1)\bar{Q}_0|_{y=f} e^{-ikx} dx + \\
& + \int_0^\Lambda \left[\left(\frac{u^2 + v^2}{2} + (f-1) - \frac{Tf_{xx}}{(1+f_x^2)^{\frac{3}{2}}} - (f-1)\mu w_{ex}^2 \cos(\omega_{ex}t) \right) (\bar{V}_0 - \bar{U}_0 f_x) \right]_{y=f} e^{-ikx} dx
\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

$$\begin{aligned}
I_5 = & \int_0^\Lambda \left[vu\bar{V}_0 + \frac{v^2 + u^2}{2}\bar{U}_0 \right]_{y=f} f_x e^{-ikx} dx + \int_0^\Lambda \left[f_t u\bar{U}_0 - \frac{v^2 + u^2}{2}\bar{V}_0 \right]_{y=f} e^{-ikx} dx + \\
& + \int_0^\Lambda \int_0^{f(x,t)} (2uv_x\bar{V}_0 + u^2 ik\bar{U}_0) e^{-ikx} dy dx
\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

En la deducción de la ecuación (2.4.23) se ha hecho una aplicación sucesiva de:

- Integración por partes en x e y , con lo que se consigue reducir el problema de integrales a lo largo de un volumen fluido (en este caso por ser el problema bidimensional, a lo largo de una superficie fluida) a integrales a lo largo de las superficies fluidas de dicho volumen fluido (en dos dimensiones se corresponden con las líneas del fondo del depósito y de la superficie libre).
- La ecuación de continuidad
- La condición de periodicidad en x del problema
- Las condiciones de contorno de no deslizamiento del fluido en el fondo del depósito, y de compatibilidad cinemática y balance de esfuerzos tangenciales en la superficie libre.
- La igualdad

$$\int_0^\Lambda \int_0^{f(x,t)} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}_0) dy dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\Lambda \int_0^{f(x,t)} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}_0 dy dx - \int_0^\Lambda [\mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}_0]_{y=f} f_t dx \tag{2.4.29}$$

- La irrotacionalidad de la solución $\bar{\mathbf{v}}_0$ de la zona casi-potencial, $\bar{U}_{0y} + ik\bar{V}_0 = 0$.

Conviene hacer notar que si bien $\bar{\mathbf{v}}_0$ y \bar{q}_0 sólo están definidas en principio en el campo fluido no perturbado ($x \in [0, \Lambda]$ y $y \in [0, 1]$, ver ecuaciones (2.4.18) y (2.4.19)), ambas pueden extenderse a un entorno del dominio no perturbado, es decir, al dominio perturbado $x \in [0, \Lambda]$ e $y \in [0, f(x, t)]$.

Finalmente, la condición integral de resolubilidad se obtiene eliminando los términos seculares en la escala corta de tiempos. Por tanto, solamente es necesario integrar (2.4.23) en la escala temporal corta t entre 0 y t (para un valor fijo de τ), dividir por t y hacer tender t a ∞ , con lo que se obtiene, si I_1 está acotada para $t \rightarrow \infty$, la siguiente ecuación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\Omega_0 t} (I_2 + I_3 + I_4 + I_5) dt = 0, \quad (2.4.30)$$

que implica que la parte resonante de $I_2 + I_3 + I_4 + I_5$ (es decir, la que depende de la escala de tiempos corta como $e^{i\Omega_0 t}$) debe ser igual a cero.

Cada una de las integrales aporta distintos términos a las ecuaciones de amplitud. Así, la integral I_2 es del orden de $|\delta|\varepsilon$ y conduce al *término de inercia de la ecuación de amplitud*. La integral I_3 proporciona los términos de disipación viscosa de la ecuación de amplitud, de órdenes $\varepsilon\sqrt{C}$ y εC (que ya se obtuvieron en §2.3.1). La integral I_4 conduce a una *parte de la no linealidad cúbica, de orden ε^3 , que procede de la capa límite superficial y al término de forzamiento paramétrico*, de orden $\varepsilon\mu$. La integral I_5 es la contribución del término convectivo,

$$I_5 = - \int_0^\Lambda \int_0^{f(x,t)} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \bar{\mathbf{v}}_0 dy dx = O(\varepsilon^3) + \dots, \quad (2.4.31)$$

y proporciona el *resto de los términos cúbicos* de la ecuación de amplitud, y el *término del acoplamiento entre el flujo medio y las ondas superficiales*. Conviene hacer notar que la mayoría de los términos no lineales de I_4 se anulan con términos de I_5 .

En resumen, para el cálculo de las integrales I_1, I_2, I_3, I_4 y I_5 , (2.4.24)-(2.4.28), es necesario conocer la estructura de la solución en las capas límite y en la región casi-potencial para los órdenes $\varepsilon, \varepsilon\sqrt{C}$ y ε^2 . En los apartados §2.4.2 y §2.4.4 se lleva a cabo el cálculo de los términos de los desarrollos (2.4.5)-(2.4.8) de la zona casi-potencial, mientras que el cálculo de las capas límite se indica en el apéndice A.

En las capas límite, se calculan únicamente los términos no oscilatorios de orden ε^2 , necesarios para obtener las condiciones de contorno de las ecuaciones del flujo medio en la zona casi-potencial. Dicho flujo medio va a estar acoplado con las ondas superficiales a través de la ecuación de amplitud. Con respecto al cálculo de los términos oscilatorios de orden ε^2 de las capas límite, que evolucionan con el tiempo de la forma $e^{2i\Omega t}$, no es necesario calcularlos, ya que como se mostró en el trabajo de Nicolás & Vega [44], los límites $C \rightarrow 0$ y $|A| + |B| \rightarrow 0$ son

intercambiables a la hora de calcular los términos de la ecuación de amplitud independientes de C . Por ello, la capa límite oscilatoria de orden ε^2 no se tiene en cuenta a la hora del cálculo de los términos no lineales de la ecuación de amplitud, y únicamente se calcularán los términos oscilatorios de orden ε^2 en el límite estrictamente no viscoso ($C = 0$) en la zona casi-potencial.

2.4.2. Solución en la región casi-potencial

En esta región, la variable vertical es $y \sim 1$ y, en primera aproximación, la solución corresponde a un problema lineal no viscoso. Teniendo en cuenta la forma general de la solución (2.4.5)-(2.4.8), se procede a calcular los siguientes términos

$$u = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(A e^{ikx} - B e^{-ikx} \right) \left(U_0(y) + \sqrt{C} U_1(y) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \left(u^s(x, y, \tau) + (u_{22} e^{2i\Omega t} + \text{c.c.}) \right) + \dots, \quad (2.4.32)$$

$$v = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) \left(V_0(y) + \sqrt{C} V_1(y) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \left(v^s(x, y, \tau) + (v_{22} e^{2i\Omega t} + \text{c.c.}) \right) + \dots, \quad (2.4.33)$$

$$q = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) \left(Q_0(y) + \sqrt{C} Q_1(y) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \left(q_{20}(x, y, \tau) + (q_{22} e^{2i\Omega t} + \text{c.c.}) \right) + \varepsilon^4 q^s(x, y, \tau) + \dots, \quad (2.4.34)$$

$$f - 1 = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) \left(F_0 + \sqrt{C} F_1 \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \left(f_{20}(x, \tau) + \sqrt{C} f_1^s(x, \tau) + (f_{22} e^{2i\Omega t} + \text{c.c.}) \right) + \dots \quad (2.4.35)$$

Los términos de orden ε y $\varepsilon\sqrt{C}$ de los desarrollos (2.4.32)-(2.4.35) provienen del desarrollo del problema estrictamente lineal en potencias de \sqrt{C} .

- **Desarrollo del problema estrictamente lineal (orden ε y $\varepsilon\sqrt{C}$).**

Las ecuaciones del problema estrictamente lineal en todo el campo fluido son las calculadas en la sección §2.3, (2.3.8)-(2.3.10), junto con las condiciones de contorno linealizadas (2.3.11)-(2.3.14). Introduciendo la parte lineal de los desarrollos (2.4.32)-(2.4.35) en (2.3.8)-(2.3.10), teniendo en cuenta la forma de los modos no viscosos (2.3.25), se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones que proporcionan las soluciones U_0 , V_0 , Q_0 , y U_1 , V_1 , Q_1 , correspondientes

a los dos primeros órdenes de la solución estrictamente lineal en la zona casi-potencial:

- Orden ε :

$$ikU_0 + V_{0y} = 0, \quad (2.4.36)$$

$$i\Omega_0 U_0 + ikQ_0 = 0, \quad (2.4.37)$$

$$i\Omega_0 V_0 + Q_{0y} = 0. \quad (2.4.38)$$

$$V_0 = 0, \text{ en } y = 0, \quad (2.4.39)$$

$$V_0 - i\Omega_0 F_0 = 0, \quad Q_0 - (1 - Tk^2)F_0 = 0, \text{ en } y = 1.$$

- Orden $\varepsilon\sqrt{C}$:

$$ikU_1 + V_{1y} = 0, \quad (2.4.40)$$

$$i(\Omega_0 U_1 + \Omega_1 U_0) + ikQ_1 = 0, \quad (2.4.41)$$

$$i(\Omega_0 V_1 + \Omega_1 V_0) + Q_{1y} = 0. \quad (2.4.42)$$

$$V_1 = G_1 = -\frac{ik^2}{\Omega_0 \sqrt{i\Omega_0}} Q_0(0), \text{ en } y = 0, \quad (2.4.43)$$

$$V_1 - i\Omega_0 F_1 = H_1 = i\Omega_1 F_0, \text{ en } y = 1,$$

$$Q_1 - (1 - Tk^2)F_1 = I_1 = 0, \text{ en } y = 1,$$

donde G_1 , H_1 e I_1 se determinan en el acoplamiento de esta solución de la zona casi-potencial, con la capa límite del fondo y de la superficie libre (ver apéndice A).

Resolviendo (2.4.36)-(2.4.39) y (2.4.40)-(2.4.43) se obtienen las dos primeras aproximaciones de la solución lineal en la zona casi-potencial:

- Orden ε :

$$(U_0(y), V_0(y), Q_0(y)) = \frac{k(1 + Tk^2)}{\Omega_0 \cosh k} (-\cosh ky, i \sinh ky, \frac{\Omega_0}{k} \cosh ky). \quad (2.4.44)$$

- Orden $\varepsilon\sqrt{C}$:

$$U_1(y) = -\frac{\Omega_1}{\Omega_0} U_0(y) - \frac{k}{\Omega_0} Q_1(y), \quad (2.4.45)$$

$$V_1(y) = -\frac{\Omega_1}{\Omega_0} V_0(y) - \frac{1}{i\Omega_0} Q_{1y}(y),$$

$$Q_1(y) = A_1 \cosh ky + B_1 \sinh ky,$$

con

$$A_1 = \frac{(1 + Tk^2)F_1}{\cosh k} + \frac{\Omega_0^2 F_0}{\sqrt{i\Omega_0} \cosh k}, \quad B_1 = \frac{k(1 + Tk^2)F_0}{\sqrt{i\Omega_0} \cosh k}. \quad (2.4.46)$$

- **Solución oscilatoria de orden ε^2 .**

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para los términos oscilatorios de la forma $e^{2i\Omega t}$ y de orden ε^2 , junto con sus condiciones de contorno son

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{22} = 0, \quad (2.4.47)$$

$$2i\Omega \mathbf{v}_{22} + \nabla q_{22} = 0. \quad (2.4.48)$$

$$v_{22} = 0, \text{ en } y = 0,$$

$$v_{22} = -V_{0y}F_0(Ae^{ikx} + Be^{-ikx})^2 + 2i\Omega f_{22} + U_0F_0ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx})^2, \text{ en } y = 1, \quad (2.4.49)$$

$$q_{22} = -Q_{0y}F_0(Ae^{ikx} + Be^{-ikx})^2 + \frac{U_0^2}{2}(Ae^{ikx} - Be^{-ikx})^2 + \frac{V_0^2}{2}(Ae^{ikx} + Be^{-ikx})^2 + \\ + f_{22} - Tf_{22xx}, \text{ en } y = 1.$$

donde se ha tenido en cuenta la irrotacionalidad de la solución lineal \mathbf{v}_0 . De la ecuación (2.4.48) se deduce que \mathbf{v}_{22} es también irrotacional.

Resolviendo (2.4.47)-(2.4.49) se obtiene

$$u_{22} = U_{22}(y) \left(A^2 e^{2ikx} - B^2 e^{-2ikx} \right), \quad U_{22}(y) = -2k\gamma_1 \frac{\cosh 2ky}{\sinh 2k}, \quad (2.4.50)$$

$$v_{22} = V_{22}(y) \left(A^2 e^{2ikx} + B^2 e^{-2ikx} \right), \quad V_{22}(y) = i2k\gamma_1 \frac{\sinh 2ky}{\sinh 2k}, \quad (2.4.51)$$

$$q_{22} = 2\Omega_0 \left[\gamma_1 \frac{\cosh 2ky}{\sinh 2k} \left(A^2 e^{2ikx} + B^2 e^{-2ikx} \right) - \Omega_0 \frac{1 + 3\sigma^2}{2\sigma^2} AB \right], \quad (2.4.52)$$

$$f_{22} = \gamma_2 \left(A^2 e^{2ikx} + B^2 e^{-2ikx} \right). \quad (2.4.53)$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{3\Omega_0 (1 - \sigma^2) + Tk^2(3 - \sigma^2)}{2\sigma (\sigma^2 + Tk^2(\sigma^2 - 3))}, \quad \gamma_2 = \frac{k (3 - \sigma^2)(1 + Tk^2)}{2\sigma (\sigma^2 + (\sigma^2 - 3)Tk^2)}, \quad \text{con } \sigma = \tanh k. \quad (2.4.54)$$

- **Solución no oscilatoria q_{02} y f_{02} de orden ε^2 .**

De la ecuación de cantidad de movimiento para orden ε^2 se obtiene la siguiente ecuación, que involucra términos no oscilatorios (proporcionales a e^{i0t}),

$$\nabla q_{20} = 0, \quad (2.4.55)$$

con la condición de contorno

$$q_{20} = (V_0\bar{V}_0 - 2Q_{0y}\bar{F}_0)[|A|^2 + |B|^2 + A\bar{B}e^{2ikx} + \bar{A}Be^{-2ikx}] + U_0\bar{U}_0[|A|^2 + |B|^2 - A\bar{B}e^{2ikx} - \bar{A}Be^{-2ikx}] + f_{20} - Tf_{20xx}, \text{ en } y = 1. \quad (2.4.56)$$

La ecuación (2.4.55) se obtiene de la irrotacionalidad de los términos derivados del análisis estrictamente lineal. Teniendo en cuenta la condición de contorno para q_{20} en $y = 1$ se obtiene

$$q_{20} = f_{20} - Tf_{20xx} + \frac{\Omega_0^2 F_0^2}{\sinh^2 k} \left[|A|^2 + |B|^2 - \left(A\bar{B}e^{2ikx} + \bar{A}Be^{-2ikx} \right) \cosh 2k \right], \quad (2.4.57)$$

donde

$$f_{20} = \frac{\Omega_0^2}{1 + 4Tk^2} \frac{\cosh 2k}{\sinh^2 k} \left(A\bar{B}e^{2ikx} + \bar{A}Be^{-2ikx} \right). \quad (2.4.58)$$

2.4.3. Cálculo de los términos de las ecuaciones de amplitud.

Una vez obtenidas las expresiones de las soluciones en la zona casi-potencial y en las capas límite, se procede a calcular la parte resonante de las integrales I_2 , I_3 , I_4 , e I_5 , cuya suma debe ser igual a cero.

- **Contribución de I_2 :**

Teniendo en cuenta la forma de la solución (2.4.32)-(2.4.35), la parte resonante de u_τ , v_τ y f_τ , es decir, la que depende de t y x de la forma $e^{i\Omega_0 t + ikx}$, será

$$u_\tau = |\delta|\varepsilon e^{i\Omega_0 t + ikx + i\tau} \left\{ \frac{dA}{d\tau} + iA \operatorname{sign}(\delta) \right\} U_0 + \dots, \quad (2.4.59)$$

$$v_\tau = |\delta|\varepsilon e^{i\Omega_0 t + ikx + i\tau} \left\{ \frac{dA}{d\tau} + iA \operatorname{sign}(\delta) \right\} V_0 + \dots, \quad (2.4.60)$$

$$f_\tau = |\delta|\varepsilon e^{i\Omega_0 t + ikx + i\tau} \left\{ \frac{dA}{d\tau} + iA \operatorname{sign}(\delta) \right\} F_0 + \dots, \quad (2.4.61)$$

donde U_0 y V_0 son la primera aproximación de las velocidades en la zona casi potencial (2.4.44). Introduciendo en la ecuación de I_2 la expresión (2.4.25), los desarrollos (2.4.59)-(2.4.61) y las autofunciones $\bar{U}_0(y)$, $\bar{V}_0(y)$ y $\bar{Q}_0(y)$, se obtiene

$$e^{-i\Omega_0 t} I_2 = |\delta|\varepsilon \Lambda \left\{ \frac{dA}{d\tau} + Ai \operatorname{sign}(\delta) \right\} \left\{ \int_0^1 (U_0\bar{U}_0 + V_0\bar{V}_0) dy + \bar{Q}_0(1) \right\} + \dots \quad (2.4.62)$$

- **Contribución de I_3 :**

La parte resonante de la primera integral de I_3 (2.4.26), que está únicamente evaluada en la capa límite de la superficie libre, es del orden de $\varepsilon^3 C$. Como en la ecuación de amplitud (2.4.12) se pretende llegar sólo hasta el orden ε^3 , no se calcula la contribución de la parte no lineal de I_3 . La segunda integral de (2.4.26) es de orden $\varepsilon\sqrt{C}$ para la capa límite del fondo del recipiente (el esfuerzo tangencial en la pared, u_y , es del orden de $\frac{\varepsilon}{\sqrt{C}}$) y de orden εC para la capa límite de la superficie libre ($u_y \sim \varepsilon$). Por tanto, I_3 proporciona términos de orden $\varepsilon\sqrt{C}$ y εC . Teniendo en cuenta la estructura de la capa límite de la superficie libre (A.2.20)-(A.2.21) y del fondo del depósito (A.1.13)-(A.1.14) hasta el orden $\varepsilon\sqrt{C}$, la ecuación (2.4.26) que proporciona la contribución de I_3 se puede expresar, hasta el orden εC , como

$$e^{-i\Omega t} I_3 = \varepsilon\sqrt{C}\Lambda A (U_{0\xi}^*(0)\bar{U}_0(0)) + \\ + \varepsilon C \Lambda A \left\{ \left(ik\tilde{V}_0(0) - \tilde{U}_{1\eta}(0) \right) \bar{U}_0(1) + 2\tilde{V}_{1\eta}(0)\bar{V}_0(1) + \left(U_{1\xi}^*(0) - \frac{H_1}{i\Omega_0} U_{0\xi}^*(0) \right) \bar{U}_0(0) \right\} + \dots \quad (2.4.63)$$

donde $\xi = \frac{y}{\sqrt{C}}$ y $\eta = \frac{y-1}{\sqrt{C}}$ son las variables verticales que recorren la capa límite del fondo y de la superficie libre, respectivamente.

- **Contribución de $I_4 + I_5$:**

Agrupando la contribución de las soluciones del problema estrictamente lineal a la ecuación (2.4.27) y las contribuciones no lineales a I_4 e I_5 (2.4.28), se obtienen los términos resonantes de $I_4 + I_5$ (proporcionales a $e^{i\Omega t + ikx}$):

$$(I_4)_{lineal} = - \int_0^\Lambda (f-1)\mu 2\Omega_0^2 e^{2i\Omega_0 t + 2i\tau} \bar{V}_0(1) e^{-ikx} dx + \dots, \quad (2.4.64)$$

$$(I_4 + I_5)_{no\ lineal} = \int_0^\Lambda e^{-ikx} [\bar{U}_0(1) (T f_x f_{xx} - f_x(f-1)) - \bar{V}_0(1) v f_t]_{y=f} dx + \\ + \int_0^\Lambda e^{-ikx} \left[\bar{U}_{0y}(1) (f-1) (T f_x f_{xx} - f_x(f-1)) + \right. \\ \left. + \bar{V}_0(1) \left(\frac{3}{2} T f_{xx} f_x^2 + v u f_x \right) + \bar{V}_{0y}(1) (f-1) f_t^2 \right]_{y=f} dx + \quad (2.4.65) \\ + \int_0^\Lambda \int_0^{f(x,t)} (2u v_x \bar{V}_0 + i k u^2 \bar{U}_0) e^{-ikx} dy dx + O(\varepsilon^4).$$

En la obtención de (2.4.64) y (2.4.65) se ha tenido en cuenta la forma de las autofunciones (2.4.44), la ecuación de compatibilidad cinemática en la superficie libre y los desarrollos de la solución potencial en torno a $y = f$,

$$\begin{aligned}\bar{U}_0|_{y=f} &= \bar{U}_0|_{y=1} + (f-1)\bar{U}_{0y}|_{y=1} + O(\varepsilon^2), \\ \bar{V}_0|_{y=f} &= \bar{V}_0|_{y=1} + (f-1)\bar{V}_{0y}|_{y=1} + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{2.4.66}$$

De (2.4.64) se obtiene el término correspondiente al forzamiento paramétrico del problema. Este último proviene del término resonante de $\mu(f-1)\cos(2\omega t)$, que se obtiene del producto

$$\varepsilon e^{-i\Omega_0 t + ikx} \bar{B} \bar{F}_0 \times \mu 2\Omega_0^2 e^{2i\Omega_0 t + 2i\tau}.\tag{2.4.67}$$

Introduciendo la solución en la zona casi-potencial ((2.4.44), (2.4.46)) y en la capa límite de la superficie libre ((A.2.20), (A.2.21)) en (2.4.64), se obtiene,

$$e^{-i\Omega t} I_{4lineal} = \varepsilon \mu \bar{B} (-2\Lambda \Omega_0^2 \bar{F}_0 \bar{V}_0(1)).\tag{2.4.68}$$

Para obtener la contribución de los términos no lineales a $(I_4 + I_5)$, se comienza por el cálculo de la integral extendida a lo largo de todo el campo fluido, presente en la ecuación (2.4.65), que es en la que interviene el acoplamiento entre la evolución de la amplitud de las ondas superficiales con el flujo medio. De los términos uv_x y u^2 únicamente interesan las partes resonantes, es decir, las que son proporcionales a $e^{i\Omega_0 t + ikx}$. Por tanto, dada la estructura de la solución (2.4.32)-(2.4.35), uv_x y u^2 no aportan ningún término resonante de orden ε^2 . El primero será de orden ε^3 y se formará por el producto de términos de la forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 e^{i0t + 2ikx} \times \varepsilon e^{i\Omega t - ikx} &= \varepsilon^3 e^{i\Omega t + ikx}, \\ \varepsilon^2 e^{i0t + 0ikx} \times \varepsilon e^{i\Omega t + ikx} &= \varepsilon^3 e^{i\Omega t + ikx}, \\ \varepsilon^2 e^{2i\Omega t + 2ikx} \times \varepsilon e^{-i\Omega t - ikx} &= \varepsilon^3 e^{i\Omega t + ikx}.\end{aligned}\tag{2.4.69}$$

Los dos primeros corresponden al producto de términos no oscilatorios, de orden ε^2 , que son los términos del flujo medio, por términos lineales de orden ε , proporcionales a las amplitudes complejas B y A respectivamente. El tercer término proviene de multiplicar términos oscilatorios de orden ε^2 por términos lineales de orden ε proporcionales a \bar{A} .

Introduciendo en la última integral de (2.4.65) la estructura de la solución hasta orden ε^2

en la zona casi-potencial (2.4.32)-(2.4.35), y en las capas límite (ver apéndice A), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\Lambda \int_0^f (2uv_x \bar{V}_0 + ik u^2 \bar{U}_0) e^{-ikx} dy dx &= \\
 &= \varepsilon^3 e^{i\Omega t} \left\{ \bar{A} A^2 2ik \int_0^\Lambda \int_0^1 [2V_{22} \bar{U}_0 \bar{V}_0 - U_{22} (\bar{V}_0 \bar{V}_0 - \bar{U}_0 \bar{U}_0)] dy dx + \right. \\
 &\quad \left. + A 2ik \int_0^\Lambda \int_0^1 u^s (V_0 \bar{V}_0 + U_0 \bar{U}_0) dy dx \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.4.70}$$

Esta última ecuación ha sido obtenida tras la aplicación sucesiva de integración por partes en las variables x e y , periodicidad del problema en x , la ecuación de continuidad, la irrotacionalidad de la solución \mathbf{v}_0 en la zona casi-potencial y la estructura de la solución no oscilatoria de orden ε^2 en las capas límite (A.1.23), (A.2.26).

Para completar el cálculo de la contribución no lineal de $I_4 + I_5$, falta calcular únicamente el término dado por las dos primeras integrales de (2.4.65), al que contribuye únicamente la superficie libre. La primera integral involucra el producto de dos términos de la solución ($f_x f_{xx}$, $f_x(f-1)$ y $v f_t$) y como ya quedó demostrado anteriormente, los primeros términos resonantes serán los indicados en (2.4.69), de orden ε^3 . Para el cálculo de esta primera integral conviene tener en cuenta que el término oscilatorio de orden ε^2 $v_{22} e^{2i\Omega t}$ (ver 2.4.51) está calculado para la zona casi-potencial, es decir, para $0 \leq y \leq 1$, por lo que el valor de esta función en $y = f$ se debe aproximar por un desarrollo de Taylor centrado en $y = 1$

$$v_{22}|_{y=f} = v_{22}|_{y=1} + (f-1)v_{22y}|_{y=1} + \dots, \tag{2.4.71}$$

En cuanto a la segunda integral de (2.4.65), los términos resonantes $e^{i\Omega_0 t + ikx}$, procederán, en primera aproximación, de la multiplicación de tres términos lineales de la forma:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon A e^{i\Omega_0 t + ikx} \times \varepsilon \bar{A} e^{-i\Omega_0 t - ikx} \times \varepsilon A e^{i\Omega_0 t + ikx} &\rightarrow \varepsilon^3 A |A|^2 e^{i\Omega_0 t + ikx}, \\
 \varepsilon B e^{i\Omega_0 t - ikx} \times \varepsilon \bar{B} e^{-i\Omega_0 t + ikx} \times \varepsilon A e^{i\Omega_0 t + ikx} &\rightarrow \varepsilon^3 A |B|^2 e^{i\Omega_0 t + ikx}.
 \end{aligned}$$

Introduciendo en (2.4.65) el resultado de (2.4.70) y la estructura de la solución tanto en las capas límite como en la zona casi-potencial, se obtiene la contribución no lineal a la ecuación de

amplitud,

$$(I_4 + I_5)_{no\ lineal} = \varepsilon^3 e^{i\Omega_0 t} 2\Lambda(1 + Tk^2) \left\{ A \frac{2ik}{2\Lambda(1 + Tk^2)} \int_0^\Lambda \int_0^1 u^s (V_0 \bar{V}_0 + U_0 \bar{U}_0) dy dx - i\alpha_3 A |A|^2 + i\alpha_4 A |B|^2 \right\}. \quad (2.4.72)$$

Finalmente, sumando los términos resonantes de las integrales I_2 , I_3 , I_4 , I_5 (es decir, sumando (2.4.62), (2.4.63), (2.4.68) y (2.4.72)) e igualando el resultado a cero se obtiene la ecuación de evolución de la amplitud compleja A y, aplicando la simetría del problema frente a reflexiones (2.4.10), la de B :

$$\varepsilon |\delta| \frac{dA}{d\tau} = -\varepsilon A \left[\alpha_1 \sqrt{C}(1+i) + \alpha_2 C + i\delta - i\varepsilon^2 (\alpha_3 |A|^2 - \alpha_4 |B|^2) + i \frac{\alpha_5}{\Lambda} \int_0^\Lambda \int_0^1 g(y) \varepsilon^2 u^s dy dx \right] - i\mu \varepsilon \alpha_6 \bar{B} + \dots, \quad (2.4.73)$$

$$\varepsilon |\delta| \frac{dB}{d\tau} = -\varepsilon B \left[\alpha_1 \sqrt{C}(1+i) + \alpha_2 C + i\delta - i\varepsilon^2 (\alpha_3 |A|^2 - \alpha_4 |B|^2) - i \frac{\alpha_5}{\Lambda} \int_0^\Lambda \int_0^1 g(y) \varepsilon^2 u^s dy dx \right] - i\mu \varepsilon \alpha_6 \bar{A} + \dots, \quad (2.4.74)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{k\sqrt{\Omega_0}}{\sqrt{2} \sinh 2k}, & \alpha_2 &= k^2 \left(2 + \frac{1 + \tanh^2 k}{4 \sinh^2 k} \right), \\ \alpha_3 &= \frac{\Omega_0 k^2 (\sigma^2 - 3)(\sigma^2 - 7)(1 + Tk^2) - 12}{4\sigma^2 (\sigma^2 - Tk^2(3 - \sigma^2))} + \frac{\Omega_0 k^2 (8 + 5Tk^2)}{4(1 + Tk^2)}, & \sigma &= \tanh k, \\ \alpha_4 &= \frac{\Omega_0 k^2}{2} \left(\frac{(1 + Tk^2)(1 + \sigma^2)^2}{\sigma^2(1 + 4Tk^2)} + \frac{4 + 7Tk^2}{1 + Tk^2} \right), \\ \alpha_5 &= \frac{k \tanh k}{2\Omega_0}, & g(y) &= \frac{2\Omega_0 k}{\sinh^2 k} \cosh 2ky, & \alpha_6 &= \Omega_0 k \tanh k. \end{aligned} \quad (2.4.75)$$

Los parámetros α_1 y α_2 se podrían haber anticipado ya que deben coincidir con el desarrollo de los autovalores del problema lineal (2.3.28) y (2.3.29) en potencias de \sqrt{C} , que se deben al amortiguamiento viscoso. El término $i\delta$ es consecuencia de la diferencia entre la frecuencia de

excitación y el doble de la frecuencia natural del problema. Los términos de orden ε^3 representan el efecto de la no linealidad del problema mientras que el último término de las ecuaciones de amplitud refleja la excitación paramétrica del sistema. Nótese que α_3 diverge si $Tk^2(3-\sigma^2) = \sigma^2$, que corresponde a una resonancia de tipo 2:1 (la frecuencia en el límite estrictamente no viscoso cumple $\Omega_0(2k) = 2\Omega_0(k)$) que no se analiza en esta tesis, ver Jones (1992) y Christodoulides & Dias [3] para un estudio estrictamente no viscoso de esta singularidad, y McGoldrick [37], Trulsen & Mei [55] y Trulsen [56] para estudios que incluyen efectos viscosos (el flujo medio se ignora en todos estos trabajos).

Estas ecuaciones de evolución de las amplitudes complejas (2.4.73)-(2.4.74) *están acopladas con el flujo medio* a través de una integral extendida a la zona central del fluido proporcional a la velocidad horizontal del flujo medio

$$i \frac{\alpha_5}{\Lambda} \int_0^\Lambda \int_0^1 g(y) \varepsilon^2 u^s dy dx. \quad (2.4.76)$$

Por tanto, para calcular la dinámica no lineal del problema es necesario resolver las ecuaciones (2.4.73)-(2.4.74) junto con las de evolución del flujo medio en la zona central del fluido (2.4.97)-(2.4.103), que se obtienen en el siguiente apartado.

2.4.4. Ecuaciones del flujo medio

Introduciendo los desarrollos (2.4.32)-(2.4.35) en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento (2.2.12)-(2.2.14), y teniendo en cuenta que las variables u^s , v^s y q^s dependen únicamente del tiempo lento $\tau = |\delta|t$, las ecuaciones que proporcionan la evolución temporal de u^s , v^s y q^s quedan

$$\varepsilon^2 \nabla \cdot \mathbf{v}^s = 0, \quad (2.4.77)$$

$$\begin{aligned} |\delta| \varepsilon^2 \mathbf{v}_\tau^s &= C \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v}^s - \varepsilon^4 \nabla q^s + \varepsilon^4 \mathbf{v}^s \times (\nabla \times \mathbf{v}^s) + \\ &+ \varepsilon^4 \mathbf{v}_{22} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{v}}_{22}) + \varepsilon^4 \bar{\mathbf{v}}_{22} \times (\nabla \times \mathbf{v}_{22}) + \\ &+ \varepsilon^4 \mathbf{v}_0 \times (\nabla \times \bar{\mathbf{v}}_{31}) + \varepsilon^4 \bar{\mathbf{v}}_0 \times (\nabla \times \mathbf{v}_{31}). \end{aligned} \quad (2.4.78)$$

Nótese que en la evolución de \mathbf{v}^s intervienen los gradientes de q (no oscilatorios) de orden ε^4 . Por otro lado, los términos convectivos, también de orden ε^4 , de la ecuación (2.4.78), deben obtenerse del producto vectorial de:

1. La velocidad del flujo medio con el rotor de dicha velocidad, es decir, $\mathbf{v}^s \times (\nabla \times \mathbf{v}^s)$.

2. Una velocidad \mathbf{v}_{22} oscilante (de la forma $e^{2i\Omega t}$), de orden ε^2 , con el r6tor de su compleja conjugada, y viceversa. Este t6rmino es nulo ya que \mathbf{v}_{22} deriva de un potencial de acuerdo con la expresi3n (2.4.48).
3. Una velocidad oscilatoria lineal de orden ε , con el r6tor de una velocidad *oscilatoria soluci3n del problema no lineal* de orden ε^3 . Esta velocidad \mathbf{v}_{31} (que evoluciona temporalmente como $e^{i\Omega t}$) no es potencial y verifica la siguiente ecuaci3n, obtenida de la ecuaci3n de cantidad de movimiento para dicho orden,

$$e^{i\Omega t} (\varepsilon^3 i\Omega_0 \mathbf{v}_{31} + |\delta| \varepsilon \mathbf{v}_0 - \varepsilon^3 \mathbf{v}_0 \times (\nabla \times \mathbf{v}^s)) = -e^{i\Omega t} (\varepsilon^3 \nabla q_{31}), \quad (2.4.79)$$

cuyo rotor proporciona

$$\nabla \times \mathbf{v}_{31} = -\frac{i}{\Omega_0} \nabla \times [\mathbf{v}_0 \times (\nabla \times \mathbf{v}^s)]. \quad (2.4.80)$$

Sustituyendo esta 6ltima expresi3n en la ecuaci3n de cantidad de movimiento (2.4.78) se obtiene para la evoluci3n del flujo medio las ecuaciones siguientes

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^s = 0, \quad (2.4.81)$$

$$|\delta| \mathbf{v}_\tau^s - \varepsilon^2 \left\{ \mathbf{v}^s \times (\nabla \times \mathbf{v}^s) + \left[\frac{-i}{\Omega_0} \bar{\mathbf{v}}_0 \times \left(\nabla \times (\mathbf{v}_0 \times (\nabla \times \mathbf{v}^s)) \right) + \text{c.c.} \right] \right\} = -\varepsilon^2 \nabla q^s + C \Delta \mathbf{v}^s. \quad (2.4.82)$$

Teniendo en cuenta la forma de \mathbf{v}_0

$$\mathbf{v}_0 = e^{i\Omega t} \left[(Ae^{ikx} - Be^{-ikx})U_0, (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})V_0 \right], \quad (2.4.83)$$

y el valor de las autofunciones (2.4.44), la ecuaci3n (2.4.82) se transforma en

$$|\delta| u_\tau^s - \varepsilon^2 v^s (v_x^s - u_y^s) = -\varepsilon^2 \hat{q}_x^s + C(u_{xx}^s + u_{yy}^s), \quad (2.4.84)$$

$$|\delta| v_\tau^s + \varepsilon^2 [u^s + (|B|^2 - |A|^2)g(y)](v_x^s - u_y^s) = -\varepsilon^2 \hat{q}_y^s + C(v_{xx}^s + v_{yy}^s), \quad (2.4.85)$$

donde

$$g(y) = \frac{i}{\Omega} \frac{d(U_0 \bar{V}_0)}{dy} + \text{c.c.}, \quad (2.4.86)$$

es la misma funci3n g que aparece en las ecuaciones (2.4.73)-(2.4.74), y adem6s, se ha realizado un cambio de variable en la presi3n total q^s de la forma

$$\hat{q}^s = q^s + \frac{i}{\Omega} (|A|^2 - |B|^2) (U_0 \bar{V}_0 - V_0 \bar{U}_0) (u_y^s - v_x^s). \quad (2.4.87)$$

Las ecuaciones (2.4.84)-(2.4.85) son las de cantidad de movimiento, que coinciden con las ecuaciones de Navier-Stokes salvo por la presencia de un término convectivo adicional

$$\varepsilon^2 \mathbf{v}_{sd} \times (\nabla \times \mathbf{v}^s) = (0, \varepsilon^2(|B|^2 - |A|^2)g(y)(v_x^s - u_y^s)), \quad (2.4.88)$$

siendo \mathbf{v}_{sd} una velocidad horizontal que cumple

$$\mathbf{v}_{sd} = ((|B|^2 - |A|^2)g(y), 0). \quad (2.4.89)$$

La velocidad $\varepsilon^2 \mathbf{v}_{sd}$ recibe el nombre de velocidad de deriva de Stokes (Stokes drift), y, como se verá más adelante, está íntimamente relacionada con la velocidad de transporte de masa o lagrangiana $\varepsilon^2 \mathbf{v}_{tm}$, que es la asociada a las trayectorias de las partículas fluidas promediadas temporalmente a lo largo de un periodo de la oscilación,

$$\mathbf{v}_{tm} = \mathbf{v}^s + \mathbf{v}_{sd}. \quad (2.4.90)$$

Introduciendo la velocidad de transporte de masa en las ecuaciones (2.4.84)-(2.4.85), éstas pueden reescribirse como

$$|\delta| \mathbf{v}_\tau^s - \varepsilon^2 [\mathbf{v}_{tm} \times (\nabla \times \mathbf{v}^s)] = -\varepsilon^2 \nabla \hat{q}^s + C \Delta \mathbf{v}^s. \quad (2.4.91)$$

- **Cálculo de la velocidad de transporte de masa**

Para calcular el desplazamiento de una partícula fluida que en el instante inicial $t = t_0$ estaba en \mathbf{x}_0 , durante un periodo de la oscilación de las ondas superficiales $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, se debe resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \tau(t)), \quad (2.4.92)$$

$$\text{en } t = t_0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{x}_0.$$

Teniendo en cuenta los desarrollos (2.4.32)-(2.4.33), se tiene que

$$\mathbf{v} = \varepsilon [e^{i\Omega t}(\mathbf{v}_0 + \dots) + \text{c.c.}] + \varepsilon^2 [\mathbf{v}^s + e^{2i\Omega t}(\mathbf{v}_{22} + \text{c.c.})] + \dots, \quad (2.4.93)$$

y desarrollando \mathbf{v} en serie de Taylor en torno a \mathbf{x}_0 e integrando la anterior ecuación diferencial, se obtiene el desplazamiento de la partícula fluida entre t_0 y un instante cualquiera t

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 &= \int_{t_0}^t \left\{ \varepsilon [e^{i\Omega t}(\mathbf{v}_0 + \dots) + \text{c.c.}] + \varepsilon^2 [\mathbf{v}^s + e^{2i\Omega t}(\mathbf{v}_{22} + \text{c.c.})] \right\} dt + \\ &+ \int_{t_0}^t \left\{ \int_{t_0}^t \varepsilon (e^{i\Omega \xi}(\mathbf{v}_0 + \dots) + \text{c.c.}) d\xi \right\} \varepsilon [e^{i\Omega t}(\nabla \mathbf{v}_0 + \dots) + \text{c.c.}] dt + \dots \end{aligned} \quad (2.4.94)$$

Por tanto, para un periodo de la oscilación, se obtiene

$$\Delta \mathbf{x}]_{t_0}^{t_0+T} = \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\mathbf{v}^s(\mathbf{x}_0, \tau(t)) + \left[\frac{i}{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x}_0) \nabla \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0) + \text{c.c} \right] \right) dt + \dots \quad (2.4.95)$$

Luego la velocidad de transporte de masa de una partícula fluida es, en primera aproximación, del orden de ε^2 e igual a

$$\varepsilon^2 \mathbf{v}_{tm} = \varepsilon^2 (\mathbf{v}^s + \mathbf{v}_{sd}), \quad \mathbf{v}_{sd} = \left[\frac{i}{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x}_0) \nabla \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0) + \text{c.c} \right], \quad (2.4.96)$$

donde \mathbf{v}^s es la velocidad del flujo medio y \mathbf{v}_{sd} es la velocidad de deriva de Stokes, que viene dada por (2.4.89). Por tanto, la trayectoria que sigue una partícula fluida debido a los modos superficiales, a lo largo de un periodo de la oscilación, se puede descomponer en la suma de una trayectoria cerrada (de tamaño característico ε) más una traslación en dirección horizontal del orden de ε^2 que depende de la posición vertical de la partícula fluida. Por su parte, los modos viscosos, causantes del flujo medio, trasladan la partícula una cantidad del orden de ε^2 en dirección tanto vertical como horizontal, durante un periodo de la oscilación.

A través del acoplamiento con las soluciones en las capas límite, tal y como se indica en el apéndice A, se obtienen las condiciones de contorno de orden ε^2 para las ecuaciones del flujo medio y, finalmente, el problema para la evolución del flujo medio se puede escribir como:

$$u_x^s + v_y^s = 0, \quad (2.4.97)$$

$$|\delta| u_\tau^s - \varepsilon^2 (v_x^s - u_y^s) v^s = -\varepsilon^2 \hat{q}_x^s + C(u_{xx}^s + u_{yy}^s), \quad (2.4.98)$$

$$|\delta| v_\tau^s + \varepsilon^2 (v_x^s - u_y^s) [g(y) (|B|^2 - |A|^2) + u^s] = -\varepsilon^2 \hat{q}_y^s + C(v_{xx}^s + v_{yy}^s), \quad (2.4.99)$$

$$u^s = \alpha_7 (|B|^2 - |A|^2 + iA\bar{B}e^{2ikx} - i\bar{A}Be^{-2ikx}), \text{ en } y = 0, \quad (2.4.100)$$

$$v^s = 0, \text{ en } y = 0, \quad (2.4.101)$$

$$u_y^s = \alpha_8 (|B|^2 - |A|^2), \text{ en } y = 1, \quad (2.4.102)$$

$$v^s = 0, \text{ en } y = 1, \quad (2.4.103)$$

donde u^s , v^s y \hat{q}^s son funciones periódicas en x de periodo igual al alargamiento del contenedor,

$$\Lambda = \frac{2\pi r}{k}, \quad \text{con } r \in N, \quad (2.4.104)$$

y

$$\alpha_7 = \frac{3k\Omega_0}{\sinh^2 k}, \quad \alpha_8 = \frac{8\Omega_0 k^2}{\tanh k}. \quad (2.4.105)$$

Capítulo 3

Análisis de las ecuaciones asintóticas

El análisis de las ecuaciones asintóticas (2.4.73)-(2.4.74) y (2.4.97)-(2.4.103) lleva ahora a elegir el orden de ε , que es el tamaño característico de la respuesta a la vibración. Para valores de C del orden de 10^{-5} , típicos de las configuraciones experimentales que se encuentran en la literatura, y valores de k de orden unidad, $\alpha_1\sqrt{C}$ y α_2C resultan ser numéricamente comparables (ver figura 3.1). Además, como se intenta analizar la dinámica débilmente no lineal, los términos de orden ε^3 en la ecuación de amplitud deben ser retenidos. Por lo tanto, se elige ε de forma que los términos que provienen del amortiguamiento y los términos no lineales sean del mismo orden, es decir, se tomará

$$\varepsilon^2 = \alpha_1\sqrt{C} + \alpha_2C. \quad (3.0.1)$$

A su vez, la evolución temporal de las amplitudes complejas de las ondas superficiales, A y B , debe ser del orden del mayor de los términos de la ecuación. Por lo tanto, el tiempo lento ($\tau = |\delta|t$) será

$$|\delta| = \varepsilon^2, \quad (3.0.2)$$

y el forzamiento paramétrico del orden de ε^2 .

Utilizando estas relaciones entre los parámetros pequeños del problema, ε , C y δ , se obtiene finalmente el siguiente problema para el flujo medio acoplado con la evolución temporal de las amplitudes complejas A y B

$$A_\tau = -A \left[1 + id - i(\alpha_3|A|^2 - \alpha_4|B|^2) + i\frac{\alpha_5}{\Lambda} \int_0^\Lambda \int_0^1 g(y) \cdot u^s dx dy \right] - im\bar{B}, \quad (3.0.3)$$

$$B_\tau = -B \left[1 + id - i(\alpha_3|B|^2 - \alpha_4|A|^2) - i\frac{\alpha_5}{\Lambda} \int_0^\Lambda \int_0^1 g(y) \cdot u^s dx dy \right] - im\bar{A}, \quad (3.0.4)$$

$$u_x^s + v_y^s = 0, \quad (3.0.5)$$

$$u_\tau^s + (u_y^s - v_x^s)v^s = -\hat{q}_x + \gamma(u_{xx}^s + u_{yy}^s), \quad (3.0.6)$$

$$v_\tau^s - (u_y^s - v_x^s)[g(y)(|B|^2 - |A|^2) + u^s] = -\hat{q}_y + \gamma(v_{xx}^s + v_{yy}^s), \quad (3.0.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^s, v^s, \hat{q}^s \text{ son funciones periódicas en } x, \text{ de periodo } \Lambda = \frac{2\pi r}{K}, r \in N, \\ y = 0 \left\{ \begin{array}{l} u^s = \alpha_7(|B|^2 - |A|^2 + iA\bar{B}e^{2iKx} - i\bar{A}Be^{-2iKx}), \\ v^s = 0, \end{array} \right. \\ y = 1 \left\{ \begin{array}{l} u_y^s = \alpha_8(|B|^2 - |A|^2), \\ v^s = 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.0.8)$$

donde

$$\begin{aligned} d &= \frac{\alpha_1\sqrt{C} + \delta}{\alpha_1\sqrt{C} + \alpha_2C}, \\ m &= \frac{\mu\alpha_6}{\alpha_1\sqrt{C} + \alpha_2C} > 0, \\ \gamma &= \frac{C}{\alpha_1\sqrt{C} + \alpha_2C} > 0. \end{aligned} \quad (3.0.9)$$

En las ecuaciones (2.4.75) y (2.4.105) se encuentran las expresiones del resto de coeficientes α_1 , \dots , α_5 , α_7 y α_8 . En las figuras 3.3-3.6 se han dibujado los parámetros α_3 , α_4 , α_5 y α_7 en función de K para una contenedor anular lleno de agua hasta una altura de 10.1 cm (que corresponden a valores del inverso del número de Bond $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$).

Como se vio en el capítulo anterior la invarianza del problema original (2.2.12)-(2.2.15) frente a reflexiones y traslaciones en x hace que el problema formado por las ecuaciones de amplitud (3.0.3)-(3.0.4) junto con las ecuaciones del flujo medio (3.0.5)-(3.0.8) sea invariante frente a las transformaciones (2.4.10) y (2.4.11). Debido a la forma de la condición de contorno

del flujo medio en el fondo del depósito, el problema (3.0.3)-(3.0.8) es además invariante frente a transformaciones de la forma

$$x \rightarrow x + j \frac{\pi}{K}, \quad \text{con } j = 1, \dots, r, \quad \text{donde } r \in N \quad \text{siendo } K = \frac{2\pi r}{\Lambda}, \quad (3.0.10)$$

que corresponde para $j = r$ a desplazamientos horizontales de tamaño media longitud de onda. Esta transformación es debida al forzamiento sinusoidal presente en las condiciones de contorno del flujo medio (3.0.8).

Las ecuaciones (3.0.3) y (3.0.4) describen la evolución de las amplitudes complejas de las ondas superficiales: A es la amplitud de la onda que se propaga hacia la derecha con la velocidad de fase $\frac{\Omega}{K}$ donde K es el número de onda (que cumple (2.3.7)) y Ω la frecuencia de la onda superficial (2.3.27), mientras que la amplitud B corresponde a la onda que viaja en sentido contrario con la misma velocidad que la anterior.

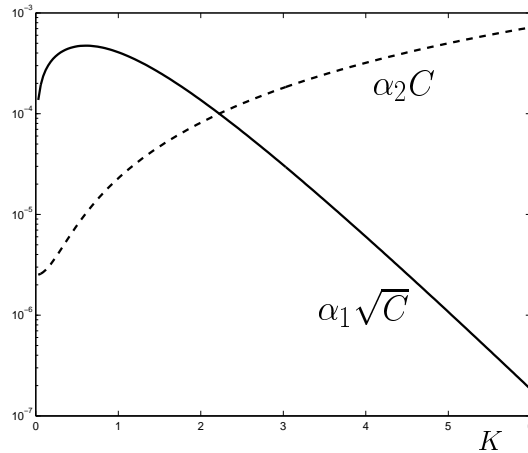


Figura 3.1: Valores de $\alpha_1 \sqrt{C}$ (—) y $\alpha_2 C$ (.....) en función del número de onda K , con $C = 10^{-5}$ y $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$

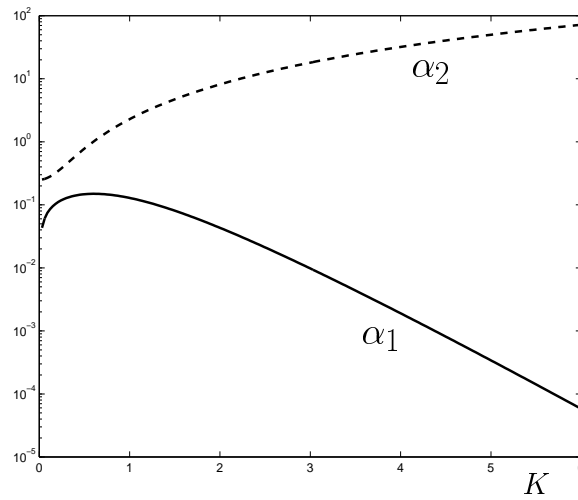


Figura 3.2: Valores de α_1 (—) y α_2 (.....) en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$

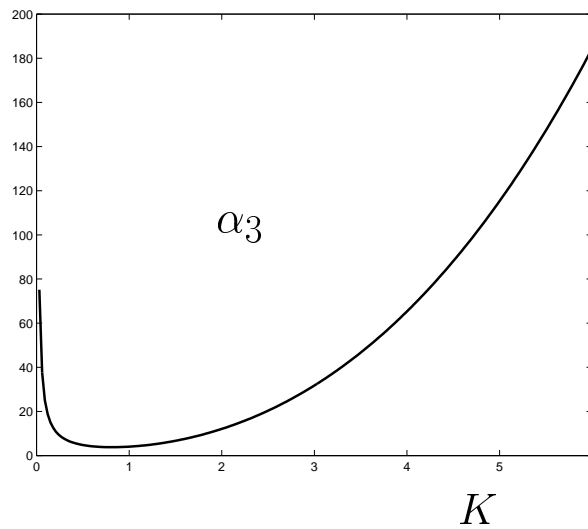


Figura 3.3: Valores del parámetro α_3 en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$

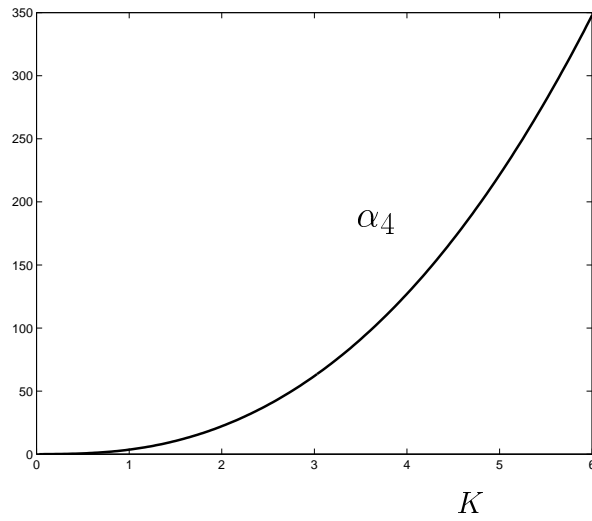


Figura 3.4: Valores típicos del parámetro α_4 en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$

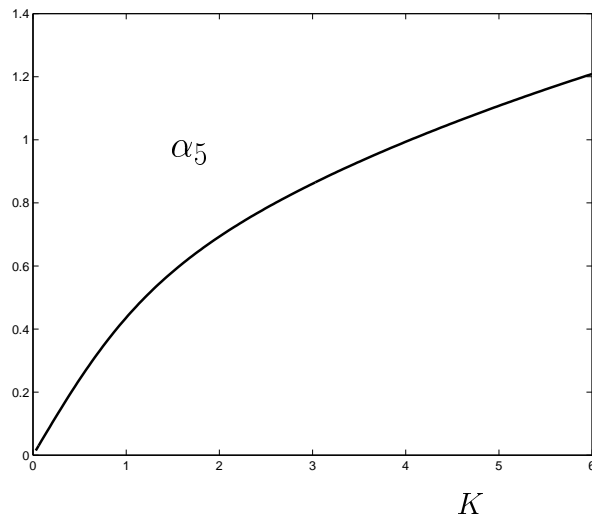


Figura 3.5: Valores típicos del parámetro α_5 en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$

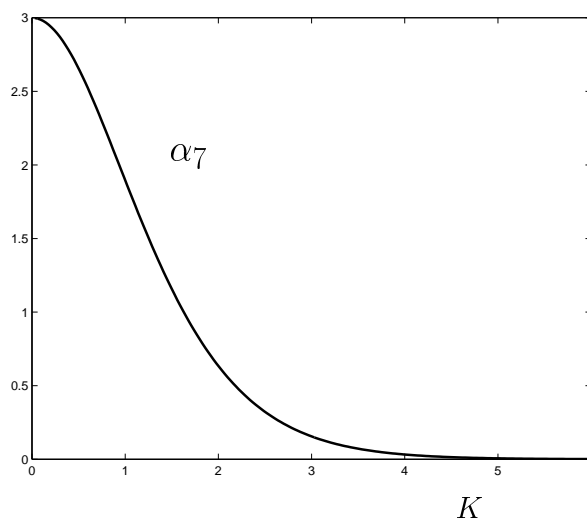


Figura 3.6: Valores típicos del parámetro α_7 en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$

3.1. Análisis de las ecuaciones de amplitud

Se consideran en primer lugar las ecuaciones (3.0.3) y (3.0.4). Si la primera se multiplica por el complejo conjugado de A , \bar{A} , y la segunda por el complejo conjugado de B , \bar{B} , y se suma en cada caso la ecuación compleja conjugada, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d|A|^2}{d\tau} &= -2|A|^2 + im(AB - \bar{A}\bar{B}), \\ \frac{d|B|^2}{d\tau} &= -2|B|^2 + im(AB - \bar{A}\bar{B}). \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\frac{d}{d\tau} (|A|^2 + |B|^2) = -2(|A|^2 + |B|^2) + 2im(AB - \bar{A}\bar{B}). \quad (3.1.2)$$

Puesto que la energía mecánica del sistema (energía cinética más potencial gravitatoria y elástica)

$$\int_0^\Lambda \int_0^{f(x,t)} \left[\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + y - 1 \right] dy dx + \int_0^\Lambda T \sqrt{1 + f_x^2} dx, \quad (3.1.3)$$

promediada a lo largo de una oscilación, es proporcional a $|A|^2 + |B|^2$, esta última ecuación (3.1.2) representa, en primera aproximación, la ecuación de la energía mecánica (versión no lineal y forzada de (2.3.31)), evaluada en todo el dominio fluido y promediada a lo largo de una oscilación de las ondas superficiales.

Nótese que ni los términos cúbicos ni el término de acople con el flujo medio dan contribución al balance de energía. Esto es así porque ambos términos son conservativos en primera aproximación. En particular, el flujo medio contribuye en orden ε^4 a la energía cinética del sistema que, en primera aproximación (orden ε^2), se debe solamente al movimiento inducido por las ondas superficiales.

Por otro lado, restando las dos ecuaciones (3.1.1) se obtiene que

$$\frac{d(|A|^2 - |B|^2)}{d\tau} = -2(|A|^2 - |B|^2) \quad (3.1.4)$$

de modo que

$$|A|^2 - |B|^2 = C e^{-2\tau}, \quad (3.1.5)$$

y después de un transitorio inicial, se tiene

$$|A| = |B|. \quad (3.1.6)$$

Ignorando este transitorio y redefiniendo las amplitudes complejas de la forma

$$A = A_0 e^{-iK\psi}, \quad B = A_0 e^{iK\psi}, \quad (3.1.7)$$

con

$$\psi = \frac{\text{fase}(B) - \text{fase}(A)}{2} \quad \text{y} \quad A_0 = |A| e^{i \frac{\text{fase}(A) + \text{fase}(B)}{2}}, \quad (3.1.8)$$

se consigue que el efecto del flujo medio sólo esté acoplado con la diferencia de fases ψ de las ecuaciones de amplitud, que se reescriben de la forma siguiente

$$\frac{dA_0}{d\tau} = -A_0 \left[1 + id - i(\alpha_3 - \alpha_4)|A_0|^2 \right] - im\bar{A}_0, \quad (3.1.9)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\alpha_5}{K\Lambda} \int_0^\Lambda \int_0^1 g(y) u^s dx dy. \quad (3.1.10)$$

Veamos ahora que para cualquier condición inicial, $A_0(0)$, la solución de (3.1.9) (i) está acotada y (ii) converge a una solución estacionaria para $\tau \rightarrow \infty$. Para demostrar (i) se consideran las siguientes ecuaciones, que se obtienen multiplicando (3.1.9) por \bar{A}_0 y por A_0 respectivamente, y sumando a las ecuaciones resultantes sus complejas conjugadas

$$\frac{d|A_0|^2}{d\tau} = -2|A_0|^2 + im(A_0^2 - \bar{A}_0^2), \quad (3.1.11)$$

$$\frac{d(A_0^2 + \bar{A}_0^2)}{d\tau} = -2(A_0^2 + \bar{A}_0^2) - 2i(A_0^2 - \bar{A}_0^2) [d - (\alpha_3 - \alpha_4)|A_0|^2]. \quad (3.1.12)$$

Despejando el valor de $im(A_0^2 - \bar{A}_0^2)$ de la ecuación (3.1.11) e introduciéndolo en la ecuación (3.1.12), previamente multiplicada por $\frac{m}{\alpha_3 - \alpha_4}$, se obtiene, tras algunas manipulaciones algebraicas, la ecuación

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\tau} = -2\mathcal{V} - |A_0|^4, \quad (3.1.13)$$

donde

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{1}{2} \left[|A_0|^4 - 2 \frac{d}{\alpha_3 - \alpha_4} |A_0|^2 - \frac{m}{\alpha_3 - \alpha_4} (A_0^2 + \bar{A}_0^2) \right]. \quad (3.1.14)$$

De (3.1.14) se deduce la acotación inferior de la variable \mathcal{V}

$$\mathcal{V}(\tau) \geq -\frac{1}{2} \left(\frac{|d| + |m|}{\alpha_3 - \alpha_4} \right)^2, \quad (3.1.15)$$

mientras que de (3.1.13) se deduce que si la condición inicial de \mathcal{V} es positiva, entonces

$$\mathcal{V}(\tau) \leq \mathcal{V} \Big|_{\tau=0}. \quad (3.1.16)$$

Por tanto $|\mathcal{V}|$ está acotada, y de la acotación de \mathcal{V} se sigue que $|A_0|^2$ está también acotada. Obsérvese que se está suponiendo que $\alpha_3 - \alpha_4 \neq 0$, ya que en caso contrario hubiera sido necesario considerar términos de orden superior a ε^3 en (2.4.73) y (2.4.74).

Para demostrar (ii) se utiliza, en primer lugar, el teorema generalizado de Poincaré-Bendixon para dos dimensiones (Perko [46], pág. 226-231), según el cual, dado que la solución está acotada, ésta se aproxima, cuando $\tau \rightarrow \infty$, o bien a un punto crítico, o a una curva cerrada (ya sea esta una órbita periódica o una unión finita de órbitas homoclínicas ó heteroclínicas). La segunda alternativa implicaría que el plano de fases de (3.1.9) contendría al menos una curva cerrada, y esto no es posible en virtud del criterio de Bendixon (Perko, 1991, pp 245-246), que afirma que si un sistema bidimensional,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \quad (3.1.17)$$

es tal que $\mathbf{f} \in C^1$ y $\nabla \cdot \mathbf{f}$ tiene signo constante en una región de \mathbf{R}^2 , entonces el sistema no tiene ninguna órbita cerrada que esté contenida completamente en dicha región. Descomponiendo la ecuación (3.1.9) en sus partes real e imaginaria, en la forma $A_0 = x + iy$, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = -x + y \left(d - m - (\alpha_3 - \alpha_4)(x^2 + y^2) \right) = f_1, \quad (3.1.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - x \left(d + m - (\alpha_3 - \alpha_4)(x^2 + y^2) \right) = f_2. \quad (3.1.19)$$

Por tanto $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in C^1$, y

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2. \quad (3.1.20)$$

En consecuencia, toda solución de (3.1.9) converge a un punto crítico para $\tau \rightarrow \infty$, es decir, converge a una solución estacionaria como quería probarse.

3.1.1. Cálculo y estabilidad de las soluciones estacionarias de (3.1.9)

Si se descompone la amplitud compleja A_0 en módulo y argumento de la siguiente forma

$$A_0 = Re^{i\phi} \quad \text{donde} \quad R = |A| = |B| \quad \text{y} \quad \phi = \frac{\text{fase}(A) + \text{fase}(B)}{2}, \quad (3.1.21)$$

y se introduce en la ecuación de evolución de A_0 (3.1.9), se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{dR}{d\tau} = -R[1 + m \sin(2\phi)] = f_1, \quad (3.1.22)$$

$$R \frac{d\phi}{d\tau} = R[R^2(\alpha_3 - \alpha_4) - d - m \cos(2\phi)] = f_2, \quad (3.1.23)$$

donde se han separado la parte real y la imaginaria. Existen dos tipos de soluciones estacionarias (i) y (ii):

$$(i) \quad R_0 = 0, \quad (3.1.24)$$

$$(ii) \quad R_0^2 = \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_4} (d \pm \sqrt{m^2 - 1}), \quad \text{y} \quad \phi_0 = \frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{1}{m}\right) \quad \text{con} \quad m > 1. \quad (3.1.25)$$

La primera rama, $R_0 = 0$, corresponde a la solución de equilibrio, en la que el fluido se mueve como sólido rígido con el recipiente. La segunda rama (3.1.25) bifurca de la primera en el punto donde ésta pierde su estabilidad,

$$m^2 = m_c^2 = 1 + d^2. \quad (3.1.26)$$

Nótese que la segunda rama es monótona si $\frac{d}{\alpha_3 - \alpha_4} \leq 0$, y de tipo C en el otro caso, ver figura 3.7.

• Estabilidad de las soluciones estacionarias

Para analizar la estabilidad lineal de estas dos ramas de soluciones estacionarias se calcula la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones diferenciales autónomas (3.1.22) y (3.1.23). La estabilidad lineal viene determinada por el signo de los autovalores del jacobiano particularizados para estas dos ramas de soluciones. Se obtiene que la rama $R_0 = 0$ es asintóticamente estable si

$$m^2 < 1 + d^2, \quad (3.1.27)$$

y es inestable si

$$m^2 > 1 + d^2, \quad (3.1.28)$$

tal y como se anticipó más arriba. Para la rama bifurcada (3.1.25) dos configuraciones son posibles dependiendo del signo de $d(\alpha_3 - \alpha_4)$ ya que para estas soluciones

$$\left. \frac{dm^2}{dR_0^2} \right|_{R_0=0} = -2d(\alpha_3 - \alpha_4). \quad (3.1.29)$$

La bifurcación será supercrítica, si $d(\alpha_3 - \alpha_4) < 0$, y subcrítica, si $d(\alpha_3 - \alpha_4) > 0$. En la figura 3.7 se muestra un ejemplo de los dos tipos de bifurcación posibles. Cuando la rama es monótona, todas las ramas son asintóticamente estables, y cuando es de tipo C, la subrama inferior (en la que $\frac{d}{\alpha_3 - \alpha_4} > R_0^2 > 0$) corresponde a soluciones inestables, y la superior ($R_0^2 > \frac{d}{\alpha_3 - \alpha_4}$), a soluciones asintóticamente estables.

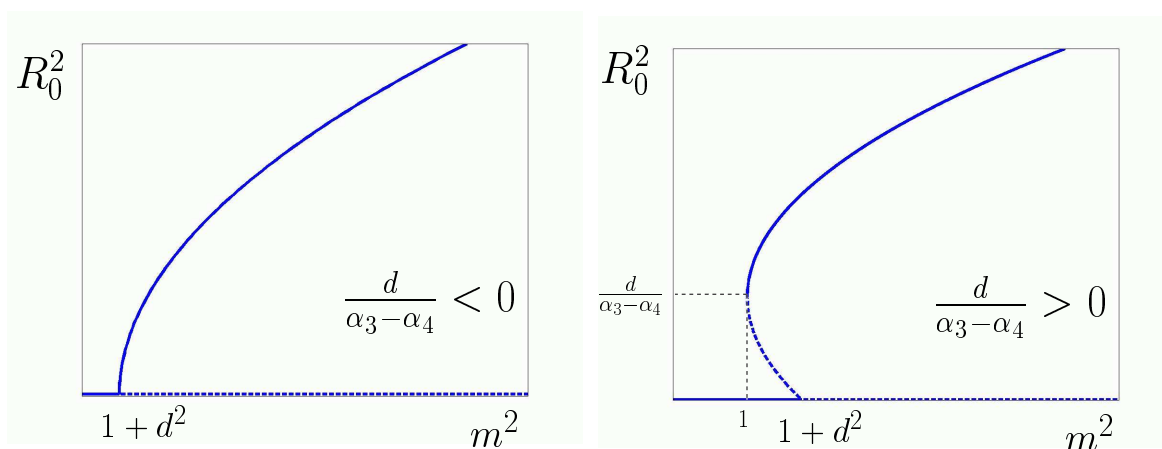


Figura 3.7: Bifurcación: (a) supercrítica y (b) subcrítica de las soluciones estacionarias, en función del cuadrado del parámetro de forzamiento reescalado, m^2 , para $K = 2$, $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$, $C = 1 \cdot 10^{-5}$

Las soluciones de la rama bifurcada dan lugar a ondas superficiales de amplitud constante con el tiempo que generan, a su vez, en el resto del campo fluido un flujo medio. En concreto, se clasificarán las ondas superficiales en dos clases:

- (a) Ondas de tipo *estático*
- (b) Ondas de tipo *casi-estático*.

Para explicar como es cada tipo de onda, conviene hacer notar que la deflexión de la superficie libre, en primera aproximación, viene dada por la ecuación

$$f(x, t) - 1 = \varepsilon 4R_0 \cos(\Omega t + \phi) \cos[K(x - \psi)], \quad \text{donde } K\Lambda = 2\pi r, \quad r \in \mathbf{N} \quad (3.1.30)$$

en la que se ha hecho uso de las descomposiciones de las amplitudes complejas A y B en módulo y argumento (3.1.7) y (3.1.21). Por tanto, ϕ es la fase temporal, ψ la fase espacial, y la superficie libre tiene $2r$ nodos, estando localizado el primero de ellos en

$$x_{nodo} = \frac{\Lambda}{4r} + \psi = \frac{\pi}{2K} + \psi. \quad (3.1.31)$$

Las ondas de tipo estático (a) están formadas por dos ondas contrapropagatorias de igual amplitud, $|A| = |B| = R_0$, cuyos nodos no se desplazan, por tanto

$$\psi = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A\bar{B} = R_0^2 e^{-2iK\psi} = \text{cte.} \\ \bar{A}B = R_0^2 e^{2iK\psi} = \text{cte.} \end{cases} \quad (3.1.32)$$

Las ondas de tipo casi-estático (b) están también formadas por dos ondas contrapropagatorias de igual amplitud, $|A| = |B| = R_0$, pero los nodos pueden moverse en una escala temporal lenta comparada con el periodo de oscilación de la onda $\frac{2\pi}{\Omega}$. Es decir,

$$\psi \neq \text{cte}, \quad (3.1.33)$$

y su evolución está acoplada con el flujo medio.

3.2. Análisis de las ecuaciones del flujo medio

Teniendo en cuenta que la velocidad de deriva de Stokes (2.4.89) es nula (debido a que $|A| = |B| = R_0$), la velocidad de transporte de masa es igual a la velocidad del flujo medio. Además, el esfuerzo tangencial de la superficie libre para este orden es nulo (ver (3.0.8)). Teniendo en cuenta todo lo visto anteriormente y reescalando las variables del problema en la forma

$$\begin{aligned} \tau' &= 2R_0^2 \alpha_7 \tau, \\ W &= \frac{1}{2R_0^2 \alpha_7} (u_y^s - v_x^s), \\ \Psi_y &= \frac{1}{2R_0^2 \alpha_7} u^s, \\ \Psi_x &= -\frac{1}{2R_0^2 \alpha_7} v^s, \end{aligned}$$

las ecuaciones (3.0.5)-(3.0.8) y (3.1.10) se reescriben en función de la vorticidad W y la función

de corriente Ψ de la forma siguiente:

$$W_{\tau'} = \frac{1}{Re} \Delta W + \frac{\partial}{\partial y} (W \Psi_x) - \frac{\partial}{\partial x} (W \Psi_y), \quad (3.2.1)$$

$$W = \Delta \Psi, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau'} = \frac{2K}{\tanh(2K)\Lambda} \int_0^\Lambda \int_0^1 G(y) \Psi_y dx dy, \quad G(y) = \frac{\cosh(2Ky)}{\cosh(2K)}, \quad (3.2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi, W \text{ son funciones periódicas en } x, \text{ de periodo } \Lambda = \frac{2\pi r}{K}, r \in N, \\ \\ y = 0 \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\Lambda W_y dx = 0, \\ \Psi_y = -\sin(2K(x - \psi)), \\ \Psi_x = 0, \end{array} \right. \\ \\ y = 1 \left\{ \begin{array}{l} \Psi = 0, \\ \Psi_{yy} = 0, \\ \Psi_x = 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

donde

$$Re = 2\alpha_7 \frac{\alpha_1 \sqrt{C} + \alpha_2 C}{C} R_0^2 > 0, \quad (3.2.5)$$

es el número de Reynolds efectivo, que es proporcional al cuadrado de la pendiente de la onda superficial $\varepsilon R_0 K$, que debe ser pequeño en el límite débilmente no lineal (ver definición de α_7 en (2.4.105) y (3.0.1)). Como C es también pequeño (del orden de entre 10^{-5} y 10^{-6} para depósitos de agua con alturas del orden de centímetros), Re puede variar en un amplio rango. Asumiendo valores pequeños del inverso del número de Bond T (cierto para ondas gravitatorias), $\varepsilon R_0 K \leq 0.1$ y $C \geq 10^{-6}$ y usando la ecuación (2.4.105) se obtiene

$$0 \leq Re \leq \frac{1,2 \cdot 10^5}{\Omega_0 \sinh 2K}. \quad (3.2.6)$$

Conviene hacer notar que el tiempo característico de evolución del flujo medio τ' , y el de la oscilación de la onda superficial t , están relacionados de la forma $\tau' = Re C t$.

Por tanto, fijando los parámetros K , Λ y Re , el problema del acoplamiento entre el flujo medio y el desfase espacial de las ondas se reduce a resolver las *ecuaciones asintóticas* (3.2.1)

-(3.2.3) con las condiciones de contorno (3.2.4).

El problema (3.2.1)-(3.2.4) es invariante frente a transformaciones del tipo

$$x \rightarrow x + c, \quad \psi \rightarrow \psi + c, \quad (3.2.7)$$

$$x \rightarrow -x, \quad W \rightarrow -W, \quad \Psi \rightarrow -\Psi, \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad (3.2.8)$$

$$x \rightarrow x + j \frac{\Lambda}{2r}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, r. \quad (3.2.9)$$

Las dos primeras simetrías provienen de la invarianza del problema original frente a traslaciones y reflexiones horizontales respectivamente, mientras que (3.2.9) aparece únicamente por la forma particular (sinusoidal) del término forzante en el fondo del depósito (3.2.4). Si una solución del problema es invariante frente a (3.2.9), siendo j un divisor de r , dicha solución es periódica de periodo $j \frac{\Lambda}{2r}$.

La condición de contorno integral que aparece en el fondo del contenedor proviene del cambio de variables realizado (de \hat{q}, u^s, v^s a Ψ, W), que obliga a que la presión esté definida unívocamente en cada uno de los puntos del problema y sea continua y periódica. En este caso, y debido a que el problema es periódico en x , el dominio del problema $\Sigma \subset \mathbf{R}^2$ no es simplemente conexo. El contorno del dominio Σ , tal y como se ilustra en el esquema 3.8, está formado por dos curvas cerradas, una, la pared del fondo del contenedor Γ_1 , y otra, la superficie libre Γ_2 . Por tanto, debe cumplirse

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \nabla \hat{q}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Omega = 0 = \oint_{\Gamma_1} \nabla \hat{q} \cdot \mathbf{t} \, dl + \oint_{\Gamma_2} \nabla \hat{q} \cdot \mathbf{t} \, dl. \quad (3.2.10)$$

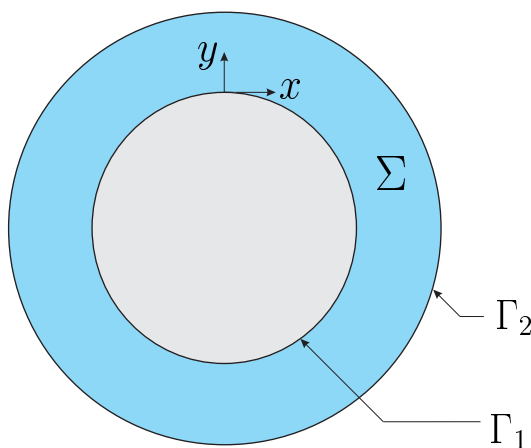


Figura 3.8: Dominio Σ del problema

La integral a lo largo de la curva cerrada Γ_2 es nula, por lo que de la ecuación de cantidad de movimiento para el flujo medio (3.0.6)-(3.0.7) y (3.2.10) se deduce que

$$\oint_{\Gamma_1} \nabla \hat{q} \cdot \mathbf{t} \, dl = \int_0^\Lambda [\gamma(u_{xx}^s + u_{yy}^s) - u_\tau^s + v^s(v_x^s - u_y^s)]_{y=0} dx = 0, \quad (3.2.11)$$

y por tanto, teniendo en cuenta los valores de la velocidad en el fondo del contenedor, la ecuación (3.2.11) conduce a una condición de contorno sobre la vorticidad de la forma

$$\int_0^\Lambda \gamma u_{yy}^s|_{y=0} dx = \int_0^\Lambda Re W_y|_{y=0} dx = 0. \quad (3.2.12)$$

La función de corriente Ψ está definida salvo por una constante aditiva. Para evitar esta ambigüedad se ha asignado a la función de corriente el valor 0 en $y = 1$.

Capítulo 4

Resultados

Como se vio en §3.2, el problema del acoplamiento entre el flujo medio y las ondas contrapropagatorias se reduce a resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales y no lineales (3.2.1)-(3.2.3) con las condiciones de contorno (3.2.4), para cada terna de valores dados de los parámetros adimensionales K , r y Re , donde K es el número de onda de las ondas superficiales que se forman por excitación paramétrica, r es la relación entre la longitud del contenedor y la longitud de onda superficial y Re es el número de Reynolds efectivo (3.2.5). La resolución de las ecuaciones asintóticas (3.2.1)-(3.2.4) debe llevarse a cabo numéricamente, en el apéndice B se explica el método numérico empleado para aproximar las soluciones de las ecuaciones asintóticas.

Las simetrías (3.2.7), (3.2.8) y (3.2.9) se van a utilizar para clasificar las soluciones obtenidas. A las soluciones del problema que sean invariantes frente a reflexiones después de una traslación (simetrías (3.2.7) y (3.2.8)) se les llamará soluciones r -simétricas. A su vez, se dirá que la r -simetría es local o global dependiendo de que la solución sea r -simétrica para todo t o presente una órbita r -simétrica en el espacio de fases. Las soluciones que son invariantes frente a (3.2.9) con $j = r$, y que son también soluciones del problema con alargamiento $\frac{\Lambda}{2}$, se llamarán $(\frac{L}{2})$ -periódicas. Pero tales soluciones pueden dejar de ser estables al duplicar el alargamiento.

Todas las figuras a las que se hace referencia en este capítulo se encuentran en la sección 4.3.

4.1. Soluciones encontradas

Los cálculos menos costosos numéricamente (para $Re < 450$ y $r = 1$), requieren, al menos, 128 modos de Fourier para mantener el error de truncación (B.1.33) acotado ($< 10^{-4}$), y pasos

de discretización espacial vertical y temporal iguales a $\Delta y = \Delta t = 0.01$. Por ello, con objeto de limitar el tiempo de cálculo, se restringirán los cálculos a soluciones con $1 \leq r \leq 10$ y $0 < Re < 900$, a pesar de que el número de Reynolds efectivo Re puede alcanzar valores muy superiores en situaciones de interés práctico, especialmente para valores pequeños del número de onda K de las ondas superficiales.

Como primera condición inicial, para iniciar el cálculo de la evolución de los modos de Fourier de la vorticidad y la función de corriente, se tomó la expresión dada por (B.4.1) del apéndice B.4.

4.1.1. Soluciones para Re más bajos

Para valores de Re pequeños, las ecuaciones son lineales en primera aproximación y presentan un único atractor que corresponde a una solución estacionaria r -simétrica con una fase espacial constante $\psi = \psi_0$. Por tanto, las ondas superficiales corresponden a ondas no progresivas, de tipo estático (standing wave), es decir, ondas cuyos $2r$ nodos permanecen fijos en los puntos

$$x_{nodo} = \frac{\pi}{2K}(2i - 1) + \psi_0, \quad \text{con } i = 1, \dots, 2r. \quad (4.1.1)$$

Las líneas de corriente de este tipo de soluciones (con $r = 1$) son análogas a las de las figuras 4.1(a) y 4.2, calculadas para unos valores de K y Re representativos. En la figura 4.2 también se muestra el campo de la vorticidad. Nótese que estas soluciones consisten en una sucesión periódica de vórtices estacionarios contrarrotatorios y son las previstas por Liu & Davis [31]. Estas soluciones, correspondientes a ondas de tipo estático, también se obtienen si el acoplamiento del flujo medio con el desfase espacial de las ondas es ignorado, tal y como se anticipó en el capítulo 1. Es decir, son soluciones del problema formado por las ecuaciones (3.2.1)-(3.2.2) y

$$\psi' = 0 \quad (4.1.2)$$

con las condiciones de contorno (3.2.4).

Para valores mayores del número de Reynolds, estas soluciones se hacen inestables y aparecen otras soluciones que se obtienen mediante continuación numérica. Para valores crecientes del parámetro Re , se toma en cada paso como condición inicial el valor de la solución encontrada en el paso anterior más una pequeña perturbación aleatoria dada por la expresión (B.4.2) (ver

apéndice B.4).

4.1.2. Bifurcación de Hopf

Al aumentar el valor de Re (que equivale a aumentar la amplitud del forzamiento paramétrico), el estado estacionario correspondiente a ondas de tipo estático mencionado anteriormente se desestabiliza a través de una bifurcación de Hopf supercrítica para $Re = Re^c$. Dicho Re^c se ha representado en línea continua en la figura 4.3, en función del número de onda K . Esta figura corresponde al valor de $r = 1$, pero se comprobó que, manteniendo constante el valor de K , esta bifurcación de Hopf tiene lugar en el mismo Re^c al menos hasta valores de $r = 10$, es decir, hasta valores del alargamiento $\Lambda = 2\pi 10/K$. La frecuencia de los modos inestables para estos Re es de orden unidad por lo que esta inestabilidad está causada básicamente por efectos convectivos (el tiempo característico viscoso es mayor que el convectivo, del orden $\tau \sim Re \gg 1$).

Como complemento a las soluciones encontradas numéricamente y para comprobar la estabilidad de las mismas y los puntos de bifurcación encontrados, se calcularon, para cada una de las soluciones, los dos primeros exponentes de Lyapunov (la descripción del proceso de cálculo de dichos exponentes se recoge en el apéndice C). Los valores de los dos primeros exponentes para la solución existente a Re bajos (con $K = 2.37$ y $r = 1$) se dibujan en la figura 4.5. Como es de esperar, los exponentes obtenidos son negativos y disminuyen en valor absoluto a medida que aumenta el Re hasta que en $Re = Re^c = 267.7$ (el punto de la bifurcación de Hopf) se hacen nulos ambos exponentes. Las soluciones periódicas bifurcadas en $Re = Re^c$ son globalmente r -simétricas y para éstas el primer exponente se mantiene igual a cero, debido a la invariancia del problema frente a las traslaciones en el tiempo, mientras que el segundo es negativo puesto que son soluciones estables (ver figura 4.6).

Este Reynolds crítico de desestabilización de la solución estacionaria básica de las ecuaciones asintóticas es siempre mayor que el obtenido cuando el acoplamiento entre la fase espacial y el flujo medio secundario es ignorado (ver línea discontinua en 4.3). Por tanto, *el acoplamiento del flujo medio con la fase espacial de la onda superficial, tiene un efecto estabilizante en el flujo secundario.*

4.1.3. Atractores encontrados

Para resumir los distintos atractores encontrados se han dibujado en las figuras 4.7 y 4.13 dos diagramas de bifurcación completos (con $K = 2.37$ y r igual a 1 y 2 respectivamente), utilizando Re como parámetro de bifurcación. Para cada solución encontrada, tras eliminar transitorios, se dibujaron las siguientes cantidades, muy útiles para determinar si los atractores son r -simétricos y $\frac{L}{2}$ -periódicos:

$$\left[\frac{d\psi}{dt} \right]_{t_j}, \quad \|W\|_{np} = \sum_{n=\text{impar}} \|W^n(t_j)\|_{L_2}, \quad (4.1.3)$$

donde t_j son instantes para los que la derivada temporal del desfase $\frac{d\psi}{dt}$ alcanza su valor máximo o mínimo, es decir, aquellos instantes en los que

$$\left. \frac{d^2\psi}{dt^2} \right|_{t_j} = 0, \quad (4.1.4)$$

$\|\cdot\|_{L_2}$ es la norma L_2 y

$$W = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} W^n e^{2\pi i n \frac{x}{L}}. \quad (4.1.5)$$

De esta forma, si para una solución los valores de $\left[\frac{d\psi}{dt} \right]_{t_j}$ son simétricos en torno al valor nulo, la solución será r -simétrica (es decir, invariante frente a (3.2.8) después de una traslación) mientras que si $\|W\|_{np} = 0$, los únicos modos de Fourier no nulos de la vorticidad son aquellos con n par y la solución será $\frac{L}{2}$ -periódica (invariante frente a (3.2.9) con $j = r$), es decir, la solución aparece duplicada en el dominio.

El diagrama de bifurcación para $K = 4$ y $r = 1$ y $0 < Re < 160$ se representa en la figura 4.4. La bifurcación de Hopf en $Re = Re^c \simeq 105$ es supercrítica como se anticipó más arriba, y el ciclo límite obtenido es globalmente r -simétrico y $\left(\frac{L}{2}\right)$ -periódico ($\|W\|_p = 0$). La solución obtenida para el flujo medio consiste en una sucesión periódica de vórtices que oscilan lateralmente (su tamaño también oscila) y es cualitativamente similar al de la figura 4.10(a). El periodo de estas soluciones oscilatorias varía entre 46 y 79 cuando el Re crece desde 105 hasta 160. Hasta valores de $r = 10$ se ha comprobado que la pérdida de estabilidad de la solución estacionaria ocurre en $Re = Re^c$ a través de una bifurcación de Hopf.

En la figura 4.7 se presenta un diagrama de bifurcación más completo, para $K = 2.37$ y $r = 1$ ($\Lambda = \frac{2\pi r}{K} = 2.65$). La bifurcación de Hopf en $Re = Re^c = 267.7$ es de nuevo supercrítica.

El ciclo límite resultante es también $(\frac{L}{2})$ -periódico y globalmente r -simétrico, como se muestra en la figura 4.10(a), donde las líneas gruesas verticales representan la posición de los nodos de la onda superficial de acuerdo con (3.1.31). Como se observa en la figura, la posición de los nodos oscila levemente generando una *onda superficial de tipo casi-estático*. Esta rama de soluciones pierde estabilidad en $Re = Re^1 = 289.8$, y aparece una nueva rama de ciclos límite globalmente r -simétricos pero no $(\frac{L}{2})$ -periódicos (la parte inestable dibujada en línea discontinua en la figura 4.7, ha sido obtenida numéricamente imponiendo $(\frac{L}{2})$ -periodicidad). Una de estas soluciones se muestra en la figura 4.10(b) donde se aprecia claramente la pérdida de la $(\frac{L}{2})$ -periodicidad y, nuevamente, una oscilación lateral pequeña de la onda superficial, que genera ondas de tipo casi-estático. La bifurcación que tiene lugar en $Re = Re^1$ es una bifurcación supercrítica, de pérdida de la simetría asociada a invariancia frente a $(\frac{L}{2})$ -traslaciones en la dirección x . Los exponentes de Lyapunov de las soluciones estables descritas hasta ahora se representan en la figura 4.6. En ella se observa como, a medida que aumenta el Re , el segundo exponente de Lyapunov del ciclo límite obtenido inmediatamente después de la bifurcación de Hopf disminuye inicialmente para luego volver a aumentar hasta que se anula en $Re = Re^1$. Para $Re > Re^1$ la solución se vuelve inestable, heredando la estabilidad el ciclo límite globalmente r -simétrico pero no $(\frac{L}{2})$ -periódico.

Esta solución oscilatoria no $(\frac{L}{2})$ -periódica es estable en el intervalo de valores $Re^1 < Re < Re^2 = 463$. En $Re = Re^2$ el segundo exponente de Lyapunov de dicha solución se hace igual a cero, tal y como se observa en la figura 4.8. Para $Re > Re^2$ la solución se hace inestable a través de una bifurcación subcrítica y el sistema salta a una nueva rama de ondas viajeras, cuyos exponentes se han dibujado también en la figura 4.8 (λ_1 en color magenta y λ_2 rojo). Esta nueva rama de soluciones presentan una velocidad de deriva constante, $\psi' = u_0$; las soluciones son estacionarias en un sistema de referencia que se mueve horizontalmente a velocidad u_0 . Las líneas de corriente y el campo de la vorticidad respecto al sistema de referencia móvil (usando la nueva velocidad horizontal $u - u_0$) se muestran en la figura 4.11. Este tipo de atractores corresponden por tanto a *ondas viajeras de tipo casi-estático* y no son ni r -simétricos (la simetría de reflexión se pierde en el sistema de referencia móvil) ni $(\frac{L}{2})$ -periódicos. Además, esta nueva rama de soluciones existe en un intervalo de Re amplio: $323 \simeq Re^3 < Re < Re^4 \simeq 800$, disminuyendo la velocidad de deriva $\psi' = u_0$ a medida que aumenta Re . Nótese que debido a la simetría de reflexión, además de esta rama de soluciones con velocidad de deriva igual a $\psi' = u_0$,

existe también la solución simétrica que viaja con velocidad $\psi' = -u_0$. Que el sistema caiga a una u otra solución depende de la condición inicial. En el diagrama de bifurcación de la figura 4.7 se optó por omitir estas últimas soluciones para no confundirlas con soluciones oscilatorias r -simétricas. Como se muestra en la figura 4.9, el primer exponente de Lyapunov de ambas soluciones estacionarias se hace igual a cero en Re^4 .

Para $Re > Re^4$ aparece una nueva solución estacionaria con $\psi' = 0$, localmente r -simétrica y no $(\frac{L}{2})$ -periódica, que genera ondas de tipo estático y cuyas líneas de corriente y mapa de vorticidad para el flujo medio se han representado en 4.12. Conviene hacer notar que dichas soluciones son completamente diferentes a las soluciones estacionarias $(\frac{L}{2})$ -periódicas que existen para $Re < Re^c$ (ver figura 4.2). La bifurcación presente en Re^4 es, por tanto, una bifurcación de tipo horca supercrítica para Re decrecientes. Tal bifurcación se conoce como rotura de la paridad (parity breaking) y está bien documentada en la literatura (Greene & Kim 1988, Dangelmayr, Hettel & Knobloch 1997). Dicha bifurcación aparece en sistemas invariantes frente a reflexión y traslación y produce una velocidad de deriva en la configuración, tal y como ocurre aquí.

Para $Re = Re^3 = 323.1$ la solución viajera con $\psi' = u_0$ pierde estabilidad a través de una bifurcación de Hopf a ciclos límite que no son ni r -simétricos ni $(\frac{L}{2})$ -periódicos; a su vez, esta última solución deja de ser estable en $Re = Re^5 \simeq 319$, donde el sistema presenta de nuevo histéresis, y salta a la solución oscilatoria r -simétrica pero no $(\frac{L}{2})$ -periódica anteriormente descrita. Esta bifurcación de Hopf que tiene lugar en Re^3 queda recogida en el diagrama 4.8, donde se observa que el primer exponente se hace cero en $Re = Re^3$ y sigue siendo nulo para la solución oscilatoria comprendida en $Re^5 < Re < Re^3$.

Si se mantiene constante el valor de K del diagrama de bifurcación 4.7 ($K = 2.37$), pero se duplica el alargamiento del depósito (lo que implica duplicar r con $r = 2$), se obtiene un nuevo diagrama de bifurcación (figura 4.13) que presenta algunas diferencias respecto al de $r = 1$ (figura 4.7). Las primeras bifurcaciones, en $Re = Re^c$ y en $Re = Re^1$, no cambian, pero ahora la rama de ciclos límite no $(\frac{L}{2})$ -periódicos que nacen en Re^1 pierden estabilidad antes, en $Re = \widehat{Re}^2 \simeq 413.9$, mientras que en el caso $r = 1$ dejan de ser estables en $Re^2 = 463$. Además, las ondas de tipo casi-estático obtenidas para $r = 1$, son inestables en el caso $r = 2$ y se representan en línea discontinua en la figura 4.13. En la figura 4.14 se muestran los dos primeros exponentes de Lyapunov para las soluciones estables existentes en torno a \widehat{Re}^2 . En concreto, se

observa como el segundo exponente de la solución oscilatoria no $(\frac{L}{2})$ -periódica (línea verde de 4.14), se hace igual a cero en $Re = \widehat{Re}^2$.

A partir de \widehat{Re}^2 , dicha solución oscilatoria se desestabiliza, y el sistema evoluciona a una nueva solución localmente r -simétrica (con $\psi' = 0$) pero no $(\frac{L}{2})$ -periódica, que no está presente en el caso $r = 1$, y cuyas líneas de corriente y mapa de vorticidad se muestran en la figura 4.15. A pesar de que las líneas de corriente son similares a las de la figura 4.12, este estado es distinto del estado estacionario con $\psi' = 0$ que se encontró para $Re > Re^4$ en $r = 1$. Al duplicar la longitud del depósito, manteniendo fijo K , los modos impares del problema en $r = 1$ se convierten en modos pares del problema en $r = 2$ por lo que, si la solución de la figura 4.12 fuese la misma que la de la figura 4.15, el valor de $\|W\|_{np}$ de esta última debería ser $\|W\|_{np} = 0$ y, sin embargo, es $\|W\|_{np} \neq 0$, como se observa en la figura 4.13. Este nuevo estado estacionario es estable al menos hasta valores de $Re = 900$, y existe para $Re > \widehat{Re}^3 \simeq 230$. Para $Re < \widehat{Re}^3$ el sistema cae al estado básico inicial, tal y como se indica en el diagrama de los exponentes de Lyapunov 4.14. De nuevo, el sistema presenta una histéresis considerable. Para evitar errores de interpretación de la figura inferior del diagrama de bifurcación 4.13, conviene hacer notar que esta rama de soluciones (con $\|W\|_{np} \neq 0$) también es distinta de la solución para Re más bajos, que tiene $\|W\|_{np} = 0$ (ver figura 4.2 y 4.7), a pesar de tener ambas soluciones $\psi' = 0$.

- **Atractores más complejos. Caos.**

Los atractores descritos hasta ahora son los únicos que se han obtenido al continuar las soluciones en función de Re , perturbando levemente las soluciones ya obtenidas. Pero si al estado básico estacionario se añade una perturbación mayor para valores elevados de Re se obtiene una nueva rama de soluciones con $\psi' = \text{cte} \neq 0$ (ver rama de soluciones con $Re > \widehat{Re}^4$ en 4.13), que genera ondas de tipo casi-estático y cuyas líneas de corriente y mapa de vorticidad se muestran en la figura 4.16. Estas soluciones son no $(\frac{L}{2})$ -periódicas y por lo tanto no son soluciones del problema para $r = 1$. Además, su velocidad de deriva ψ' aumenta al aumentar el valor de Re . Esta rama de soluciones se hace inestable en $Re = \widehat{Re}^4 \simeq 620$ a través de una bifurcación subcrítica. En el intervalo $480 < Re < \widehat{Re}^4$ el sistema evoluciona hacia atractores más complejos y caóticos como los que se muestran en la figura 4.17. Para estas soluciones se han representado en la figura 4.18 los valores máximos y mínimos de la derivada temporal del desfase espacial, $\frac{d\psi}{dt}$, en función del número de Reynolds Re (para no complicar el diagrama de bifurcación 4.13, se han omitido estos

valores máximos y mínimos de $\frac{d\psi}{dt}$ de las soluciones caóticas). Se observa como la rama de soluciones con $\psi' = \text{cte} \neq 0$ desaparece en \widehat{Re}^4 , apareciendo para $480 < Re < \widehat{Re}^4$ una serie de soluciones claramente caóticas, que a su vez desaparecen en $\widehat{Re}^5 \simeq 480$, presentando el sistema histéresis con la solución estacionaria de la figura 4.15, anteriormente comentada. Estas soluciones caóticas presentan típicamente oscilaciones, tanto en el tiempo convectivo ($t \sim 1$) como en el difusivo ($t \sim Re$) (véase figura 4.17). Los exponentes de Lyapunov para algunos de estos atractores caóticos se muestran en la figura 4.19. Nótese que el primer exponente es estrictamente positivo, de modo que las soluciones mostradas en las figuras 4.17 y 4.18 son efectivamente caóticas.

Dadas las grandes diferencias existentes entre los diagramas de bifurcación para $r = 1$ y $r = 2$, más que describir exhaustivamente la dinámica compleja presente en el caso $r = 2$, conviene determinar qué partes del diagrama de bifurcación no cambian al aumentar el alargamiento del depósito, manteniendo K fijo. Como se comentó anteriormente, para el caso $r = 10$ (muy costoso numéricamente) se obtuvo que las dos primeras bifurcaciones en Re^c y Re^1 y sus respectivas ramas bifurcadas oscilatorias permanecen inalterables para $Re < \widehat{Re}^2$.

Resumen diagrama de bifurcación 4.7 ($K = 2.37, r = 1$)

Re ramas soluciones	Tipo de Onda superficial	Flujo medio			Tipo Bifurcación	Nº Figura
		r-simétrico local	global	$L/2$ - Periódico		
$Re < Re^c$	SW	x		x		4.2
$Re = Re^c$					Hopf, supercrítica	
$Re^c < Re < Re^1$	OSW		x	x		4.10(a)
$Re = Re^1$					Pérdida de simetría, supercrítica	
$Re^1 < Re < Re^2$	OSW		x			4.10(b)
$Re = Re^2$					subcrítica	
$Re^3 < Re < Re^4$	DSW					4.11
$Re = Re^3$					Hopf, supercrítica para Re decrecientes	
$Re^5 < Re < Re^3$	DOSW					
$Re = Re^4$					Rotura de paridad, supercrítica para Re decrecientes	
$Re^4 < Re \leq 900$	SW	x				4.12

SW = Onda de tipo estático (Standing Wave)

OSW = Onda de tipo casi-estático oscilatoria (Oscillatory standing wave)

DSW = Onda viajera de tipo casi-estático (Drift standing wave)

DOSW = Onda viajera (y oscilatoria) de tipo casi-estático (Drift oscillatory standing wave)

Resumen diagrama de bifurcación 4.13 ($K = 2.37, r = 2$)

Re ramas soluciones	Tipo de Onda superficial	Flujo medio		Tipo Bifurcación	Nº Figura
		r-simétrico local	$\frac{L}{2}$ - Periódico		
		global			
$Re < Re^c$	SW	x		x	4.2 duplicada
$Re = Re^c$					
$Re^c < Re < \widehat{Re}^1$	OSW		x		4.10(a) duplicada
$Re = \widehat{Re}^1$					
$Re^1 < Re < \widehat{Re}^2$	OSW		x		4.10(b) duplicada
$Re = \widehat{Re}^2$					
$\widehat{Re}^3 < Re \leq 900$	SW	x			4.15
$Re > \widehat{Re}^4$	DSW				4.16
$\widehat{Re}^5 < Re < \widehat{Re}^4$	Atractores complejos; Caos				4.17, 4.18

SW = Onda de tipo estático (Standing Wave)

OSW = Onda de tipo casi-estático oscilatoria (Oscillatory standing wave)

DSW = Onda viajera de tipo casi-estático (Drift standing wave)

4.2. Comparación cualitativa con resultados experimentales

Dado el carácter bidimensional de esta teoría, la comparación de los resultados obtenidos a través de la integración numérica de las ecuaciones asintóticas, con resultados experimentales, sólo podrá ser *cualitativa*.

La estructura de vórtices estacionarios contrarrotatorios correspondientes a la solución para Re más bajos (ver figura 4.2), presente cuando la superficie libre evoluciona a ondas de tipo estático, fue ya detectada en 1831 por Faraday [14] al notar que la arena depositada sobre la superficie libre del fluido se acumulaba en determinadas zonas del fondo del depósito excitado paraméricamente, coincidiendo dichas zonas con las líneas nodales de la superficie libre. Douady [10] visualizó claramente esta estructura de vórtices (en un pequeño depósito de sección 80 mm×80 mm con una capa de agua de 2 mm de altura) a través del movimiento de unas pequeñas partículas introducidas en el agua. Cuando en la superficie libre están presentes las ondas de tipo estático, el flujo medio asciende en la zona donde se encuentran los máximos de la onda superficial y desciende coincidiendo con las líneas nodales superficiales. Este hecho se observa claramente en el modelo bidimensional de este trabajo, en las líneas de corriente de las soluciones que tienen lugar para Re más bajos como, por ejemplo, las de la figura 4.2, donde las líneas verticales gruesas corresponden a los nodos de las ondas superficiales y éstas, coinciden con la zona de descenso del flujo medio.

En *contenedores anulares* estrechos forzados verticalmente, Douady, Fauve & Thual [11] observaron la *inestabilidad del desfase* de las ondas superficiales que conduce a *ondas viajeras de tipo casi-estático* (*drift standing waves*). Para ello experimentaron con un contenedor anular de diámetro medio 110 mm, 5 mm de anchura y 8 mm de altura. El depósito estaba completamente lleno de agua a 5⁰C de forma que el menisco de la superficie libre permaneciese anclado al extremo de las paredes laterales y se evitasen fenómenos de evaporación y de variación de la tensión superficial con la temperatura, y ondas laterales debidas al menisco. En el experimento se varió la frecuencia de excitación ω_{ex} entre 30 y 50 Hz, así como la aceleración del forzamiento, (entre 4 y 22 m/s^2). Por tanto, los números adimensionales de este experimento son

$$\Lambda = 43.2, \quad C = \frac{\nu}{\sqrt{gh^3}} = 6.10^{-4}, \quad T = \frac{\sigma}{\rho gh^2} = 0.119, \quad \Omega_0 \in [2.7, 4.5],$$

$$K \in [3.3, 5.1], \quad r \in [23, 35], \quad \mu \Omega_0^2 \in [0.102, 0.561], \quad \mu \in [0.005, 0.08].$$
(4.2.1)

Como primera solución obtuvieron una onda superficial de tipo estático (standing wave), cuya longitud de onda era seleccionada con la relación de dispersión (2.3.27) de tal forma que la fre-

cuencia de la onda superficial es la más cercana a la mitad de la frecuencia de excitación $\omega_{ex}/2$. Al variar la frecuencia de excitación se producen inestabilidades provocadas por el cambio del número de onda. Estas inestabilidades tienen lugar con la presencia de histéresis y corresponden a la transición entre los dominios de estabilidad (lenguas resonantes) de distintos números de onda (ver Martel, Knobloch & Vega [34], Knobloch, Martel & Vega [27]). El modelo desarrollado en esta tesis no tiene en cuenta el efecto de la modulación espacial, por lo que no permite describir este tipo de inestabilidades. Al variar Douady *et al.* [11] la amplitud del forzamiento paramétrico, encontraron distintos tipos de inestabilidad oscilatoria: (i) una modulación temporal de la amplitud de la onda superficial sin cambiar ésta de posición ($|A|$ varía con el tiempo con un periodo 4 a 7 veces mayor que el periodo de excitación), (ii) un modo de compresión en el que el propio desfase espacial de la onda se comporta como una onda de tipo estático (la amplitud $|A|$ de la onda oscila, y la posición de los máximos de la onda oscilan también de forma que la longitud de onda está modulada espacial y temporalmente), (iii) una inestabilidad de deriva (ver Fauve [15]) en la que la configuración anterior se mueve a velocidad constante y que se corresponde con las ondas viajeras de tipo casi-estático obtenidas en este trabajo por integración numérica de las ecuaciones asintóticas (en la figura 4.11, la rama de soluciones estables para $Re^3 < Re < Re^4$; en la figura 4.13, la rama $Re > \widehat{Re}^4$; las respectivas líneas de corriente y mapas de vorticidad están en las figuras 4.11 y 4.16). Douady *et al.* [11] observaron que en torno al estado correspondiente a la onda modulada temporal y espacialmente existen gran variedad de configuraciones posibles (por ejemplo, soluciones caóticas) dependiendo de la frecuencia y amplitud del forzamiento, la altura del fluido en reposo, y las condiciones iniciales. Soluciones de este tipo también se han encontrado por integración numérica de las ecuaciones asintóticas.

También en geometría anular (suprimiendo la estructura radial), Keolian *et al.* [24] observaron secuencias de subarmónicos de la frecuencia de excitación, en función de la amplitud de la oscilación. Sin embargo no describen ningún comportamiento lentamente oscilatorio ni rotatorio.

El resto de los resultados experimentales existentes se han obtenido en recipientes no anulares y, por tanto, no corresponden al modelo bidimensional de la tesis. Además, las modulaciones espaciales (que no se han tenido en cuenta en el modelo 2D) juegan un papel importante. En *depósitos cilíndricos*, los trabajos experimentales son abundantes. Gollub & Meyer [18] observaron la inestabilidad de precesión del centro y su evolución a atractores caóticos al aumentar la amplitud del forzamiento. Pero esta inestabilidad de precesión del centro de la onda casi-

axilsimétrica no está presente en la geometría anular (debido a la desaparición del centro) y, por tanto, no puede ser descrita por el modelo de la tesis (tal y como indican Gollub & Meyer [18] en su artículo). Esta inestabilidad puede deberse principalmente a pérdidas de simetría, en las que el flujo medio puede influir, pero de modo distinto al del modelo bidimensional de la tesis. Feng & Sethna [17] y Truffilaro *et al* [54] observaron una rotación lenta de las ondas de tipo estático alrededor del eje vertical central. Ciliberto *et al.* [4] obtuvieron, en un depósito de base cuadrada, la inestabilidad oscilatoria y la modulación espacial de las ondas de Faraday, así como fenómenos de intermitencia oscilatoria (también observados por Simonelli & Gollub [52] y Craik & Armitage [7]), histéresis (Ciliberto & Gollub [5], Simonelli & Gollub [52]) y caos espacio-temporal (Craik & Armitage [7]). Seguramente el flujo medio juega un papel esencial en todas estas configuraciones, pero las correspondientes ecuaciones asintóticas son distintas a las consideradas aquí, tanto por la geometría de la sección recta del recipiente, que es cuadrada o rectangular, como por los modos superficiales involucrados, ver Higuera, Vega & Knobloch [22].

4.3. Figuras

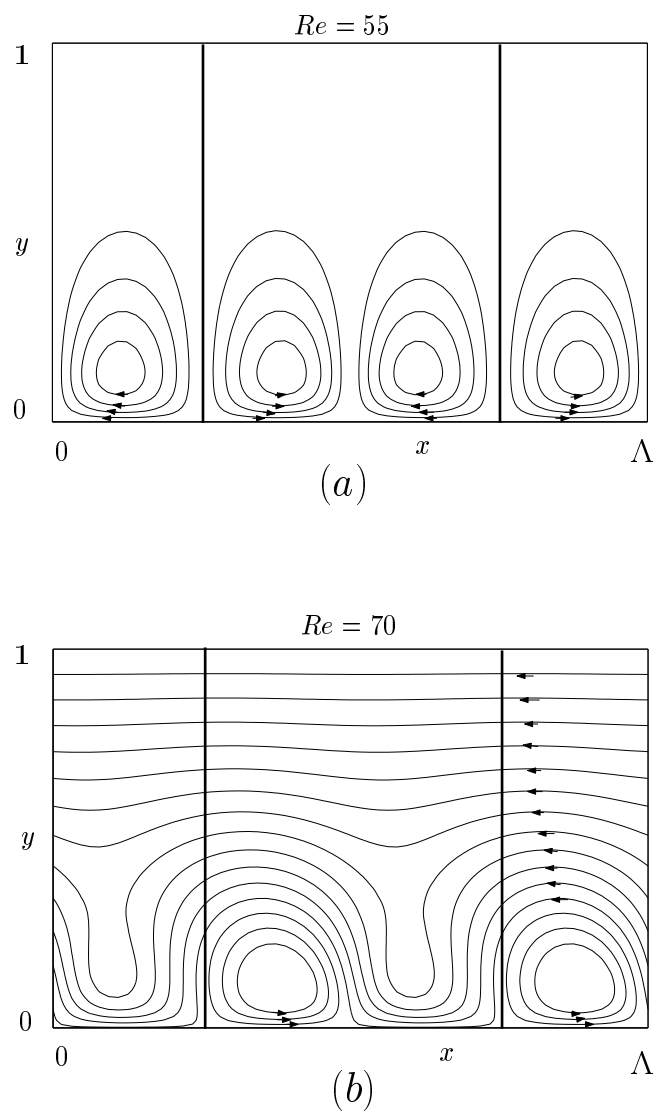


Figura 4.1: Líneas de corriente del estado estacionario estable con $\psi' = 0$ para $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$ ($K = 4$) para los valores indicados de Re . Las líneas verticales gruesas corresponden a los nodos de las ondas superficiales.

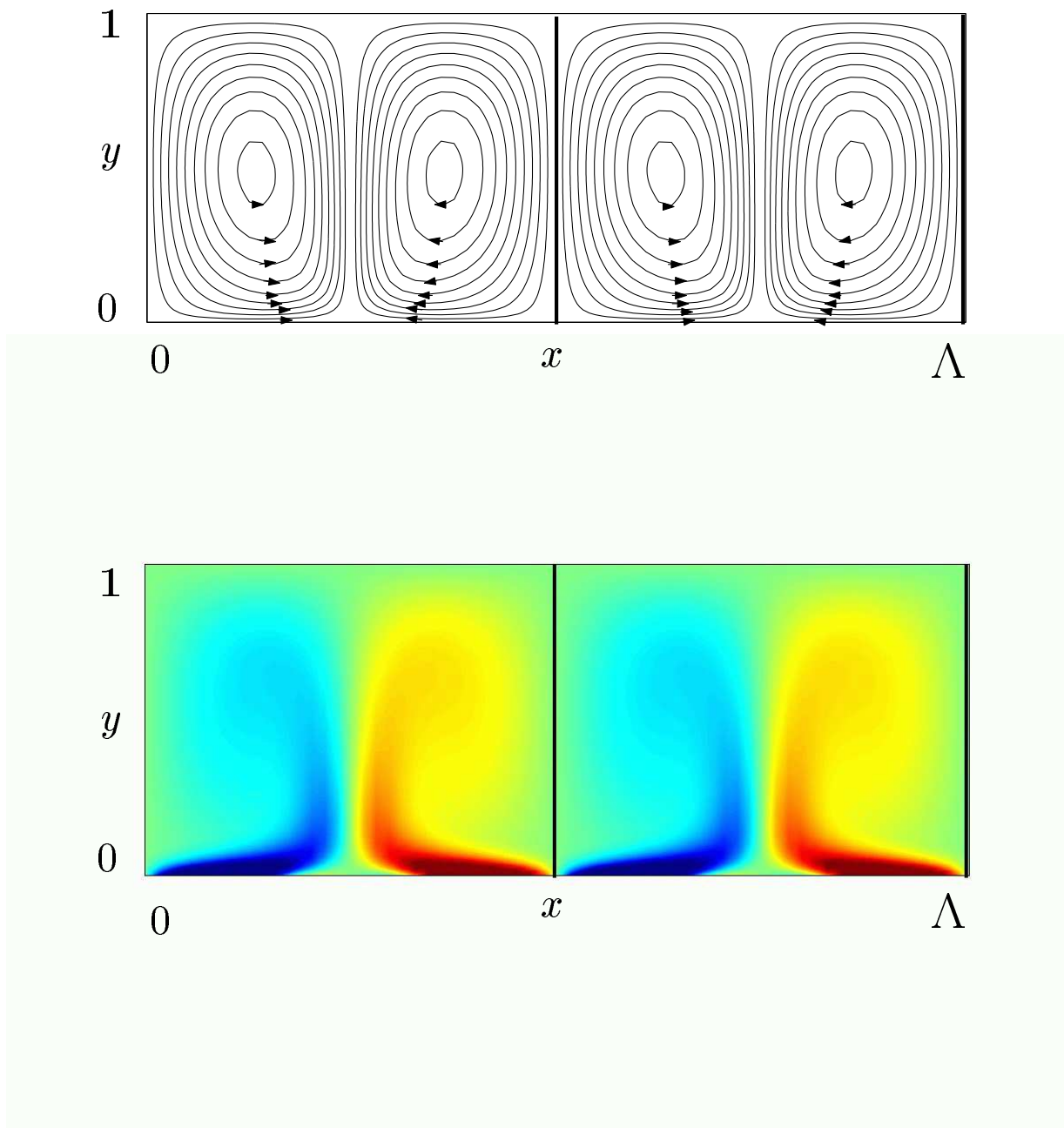


Figura 4.2: Líneas de corriente y mapa de vorticidad (rojo= vorticidad > 0 , azul= vorticidad < 0) del estado estacionario básico correspondiente a ondas superficiales de tipo estático, para $Re = 260$, $K = 2.37$ y $r = 1$ ($\Lambda = 2.65$).

Líneas gruesas verticales indican lo mismo que en 4.1.

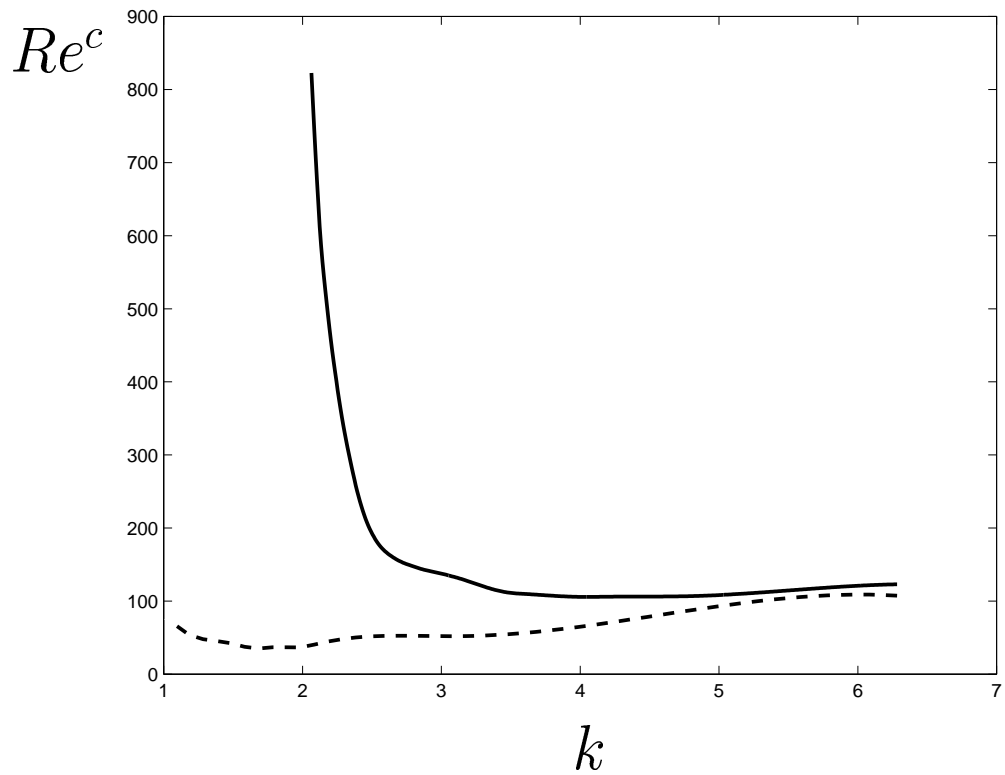


Figura 4.3: Diagramas de estabilidad de la solución básica. (—) indica la bifurcación de Hopf del sistema de ecuaciones completo y (.....) indica la bifurcación del sistema de ecuaciones del flujo medio desacoplado de las ondas superficiales (con $\psi' = 0$).

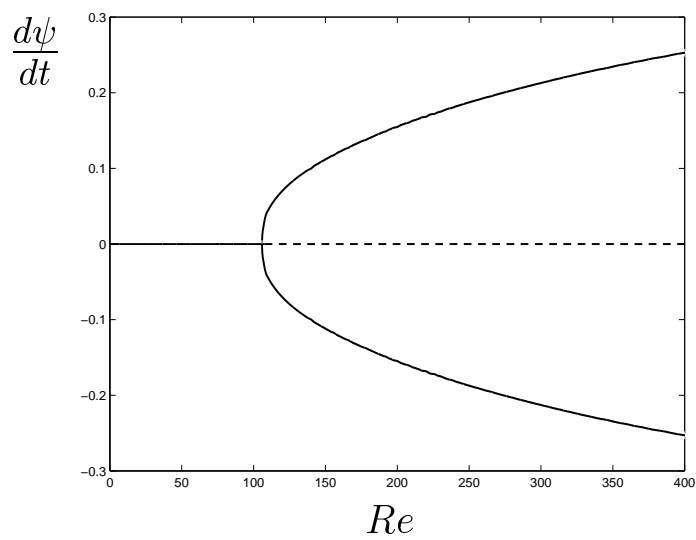


Figura 4.4: Diagrama de bifurcación del sistema para $K = 4$ y $r = 1$ ($\Lambda = \frac{\pi}{2}$).

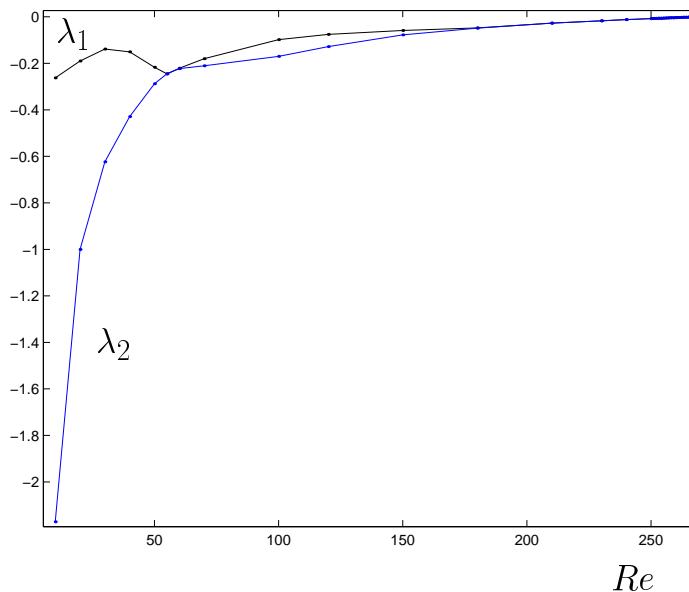


Figura 4.5: Primeros exponentes de Lyapunov, λ_1 (negro), λ_2 (azul) en función de Re para la solución existente para bajos números de Re , con $K = 2.37$ y $r = 1$.

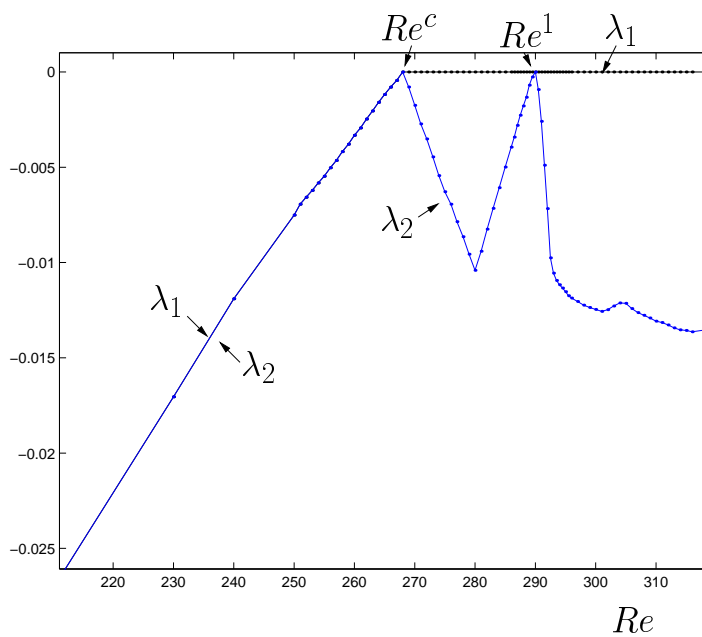


Figura 4.6: Primeros exponentes de Lyapunov, λ_1 (negro), λ_2 (azul) en función de Re para la solución existente a bajos números de Re , y para la solución oscilatoria ($Re^c < Re < Re^1$) que aparece tras la bifurcación de Hopf en Re^c , con $K = 2.37$ y $r = 1$.

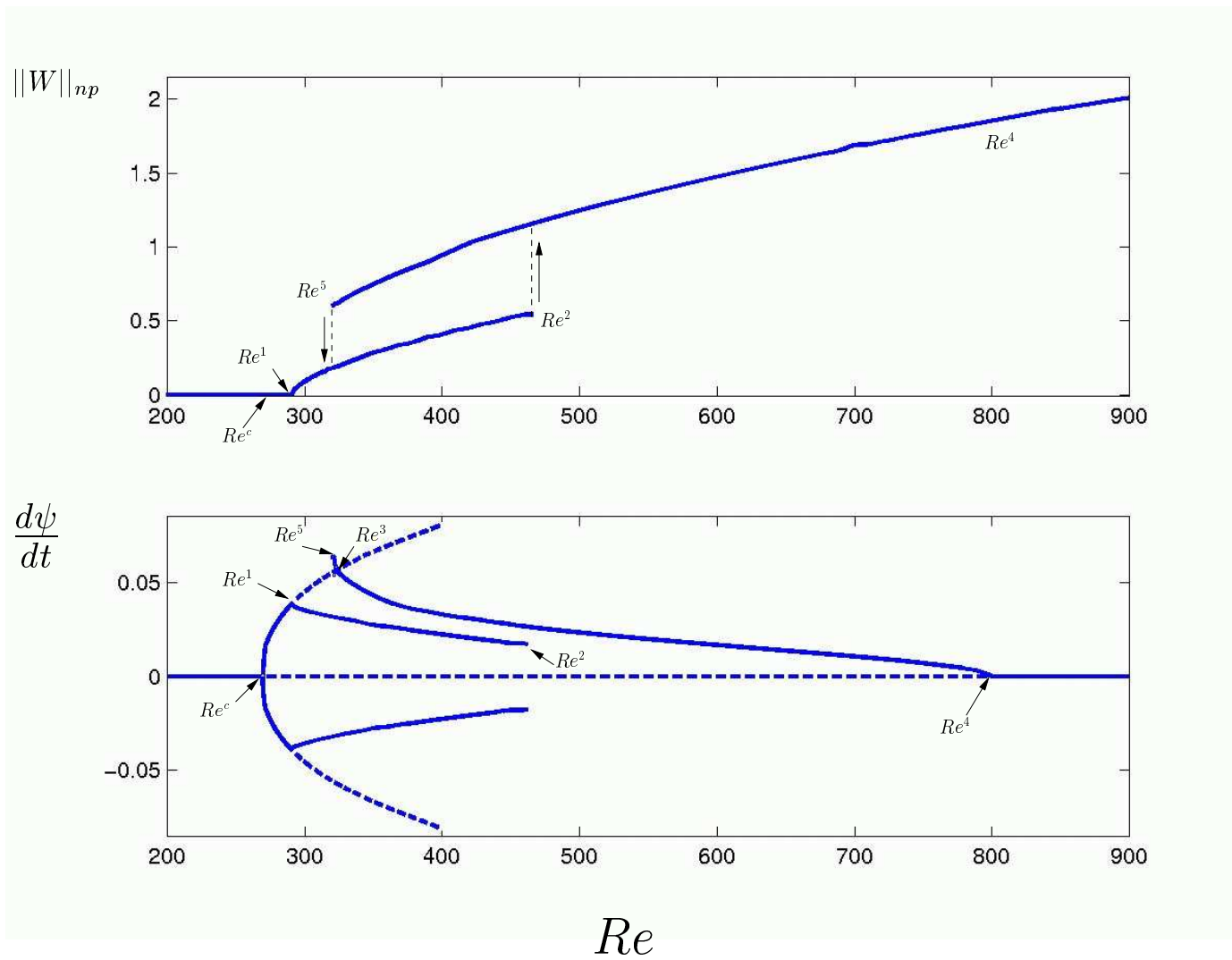


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación del sistema para $K = 2.37$ y $r = 1$ ($\Lambda = 2.65$).

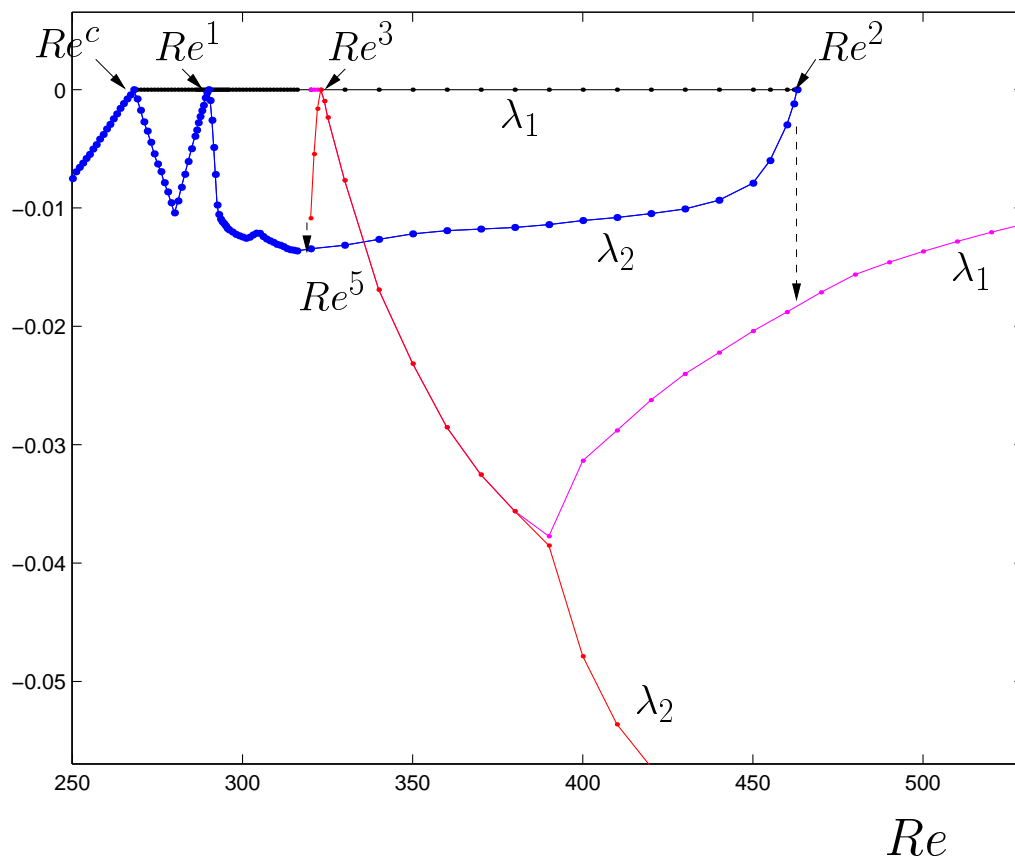


Figura 4.8: Primeros exponentes de Lyapunov en función de Re (con $K = 2.37$, $r = 1$) para (i) las soluciones oscilatorias con $Re^c < Re < Re^1$ y $Re^1 < Re < Re^2$ (λ_1 en negro y λ_2 en azul) que aparecen tras la bifurcación de Hopf en Re^c , (ii) la solución para $Re > Re^3$ y la oscilatoria para $Re^5 < Re < Re^3$, (λ_1 en magenta y λ_2 en rojo).

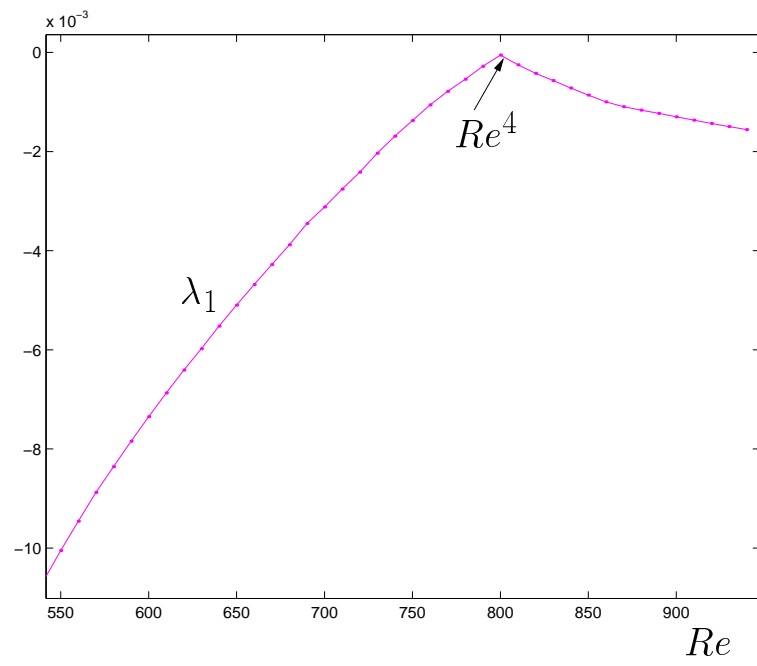


Figura 4.9: Primer exponente de Lyapunov λ_1 en función de Re (con $K = 2.37$, $r = 1$) para las soluciones existentes a altos números de Re : Ondas viajeras de tipo casi-estático ($Re < Re^4$) y ondas de tipo estático ($Re > Re^4$) tras la bifurcación de rotura de paridad ($Re = Re^4$)

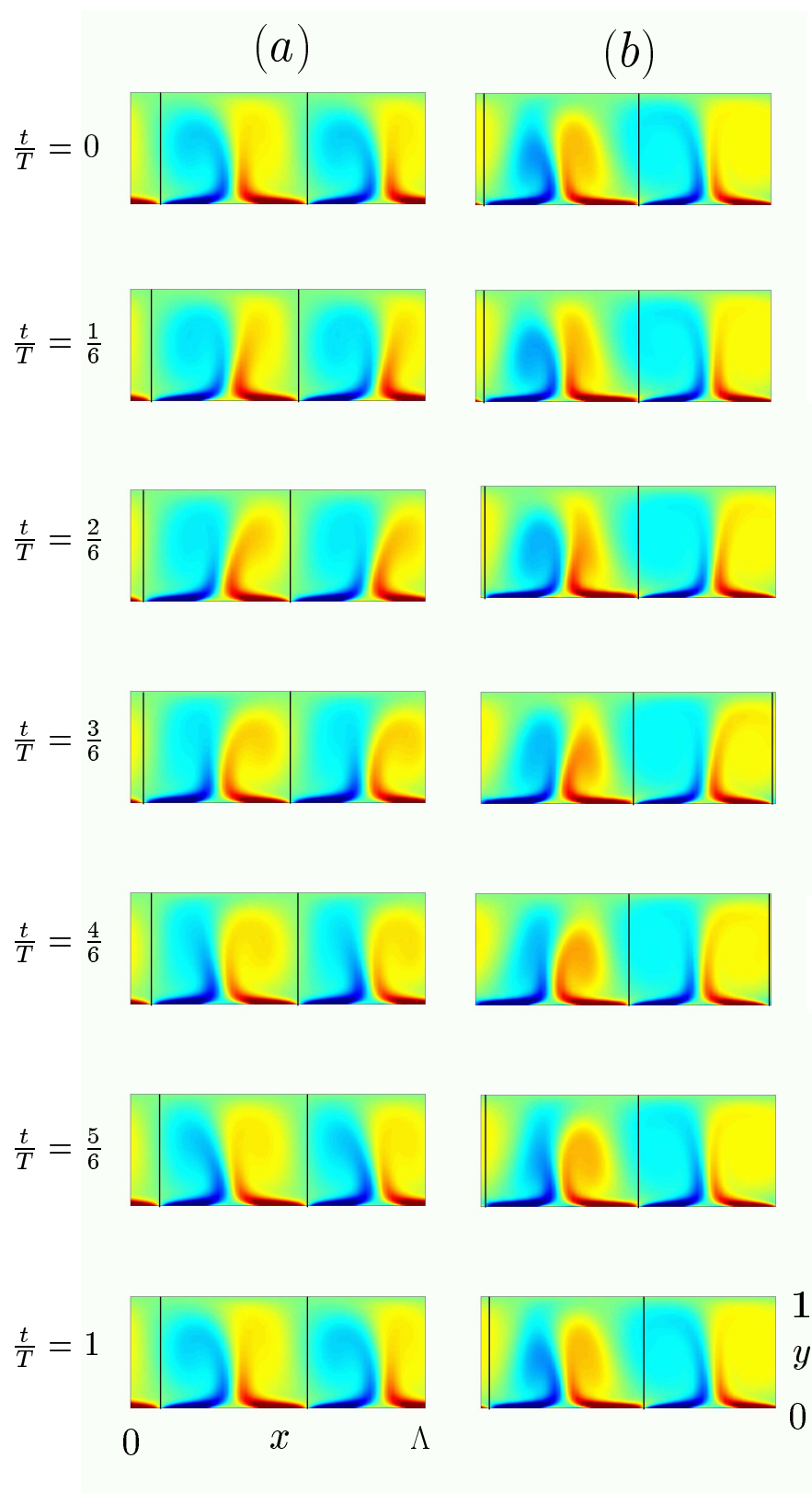


Figura 4.10: Mapas de vorticidad de las soluciones oscilatorias, para valores equiespaciados del tiempo, existentes para $K = 2.37$, $r = 1$ y (a) $Re = 290$ y (b) $Re = 400$.

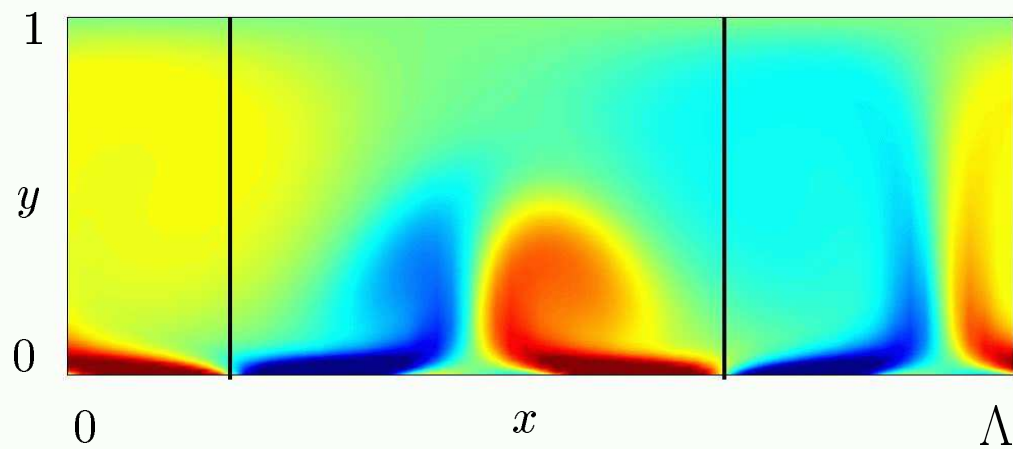
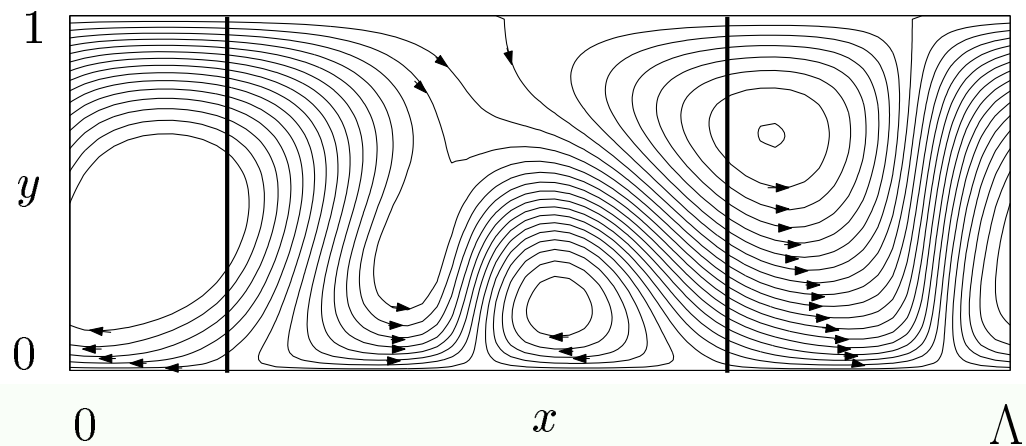


Figura 4.11: Líneas de corriente y mapa de vorticidad del flujo medio, respecto a ejes móviles, producido por una onda viajera de tipo casi-estático con $Re = 325$.

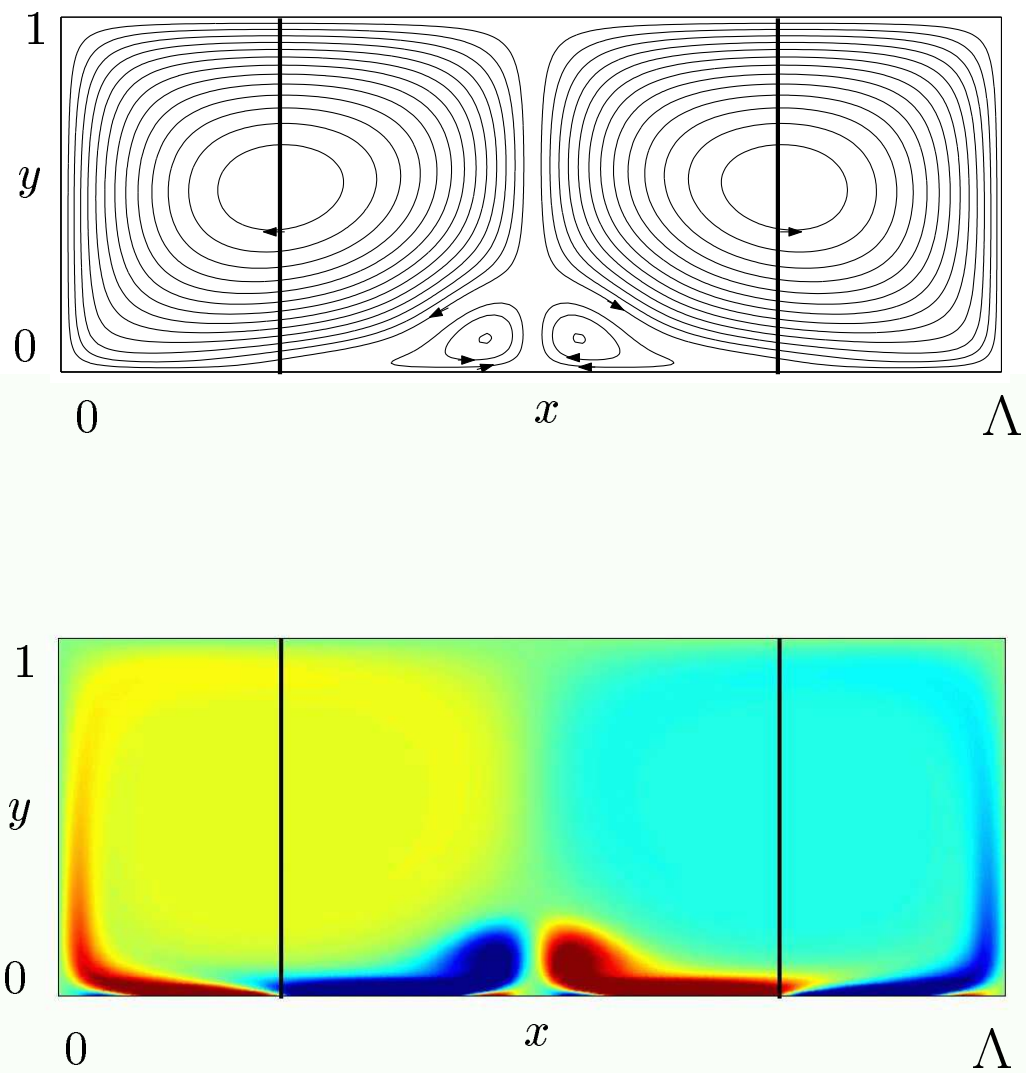


Figura 4.12: Líneas de corriente y mapa de vorticidad de la solución estacionaria estable para $Re = 850$ que aparece en el diagrama de bifurcación 4.7, correspondiente a una onda superficial de tipo estático.

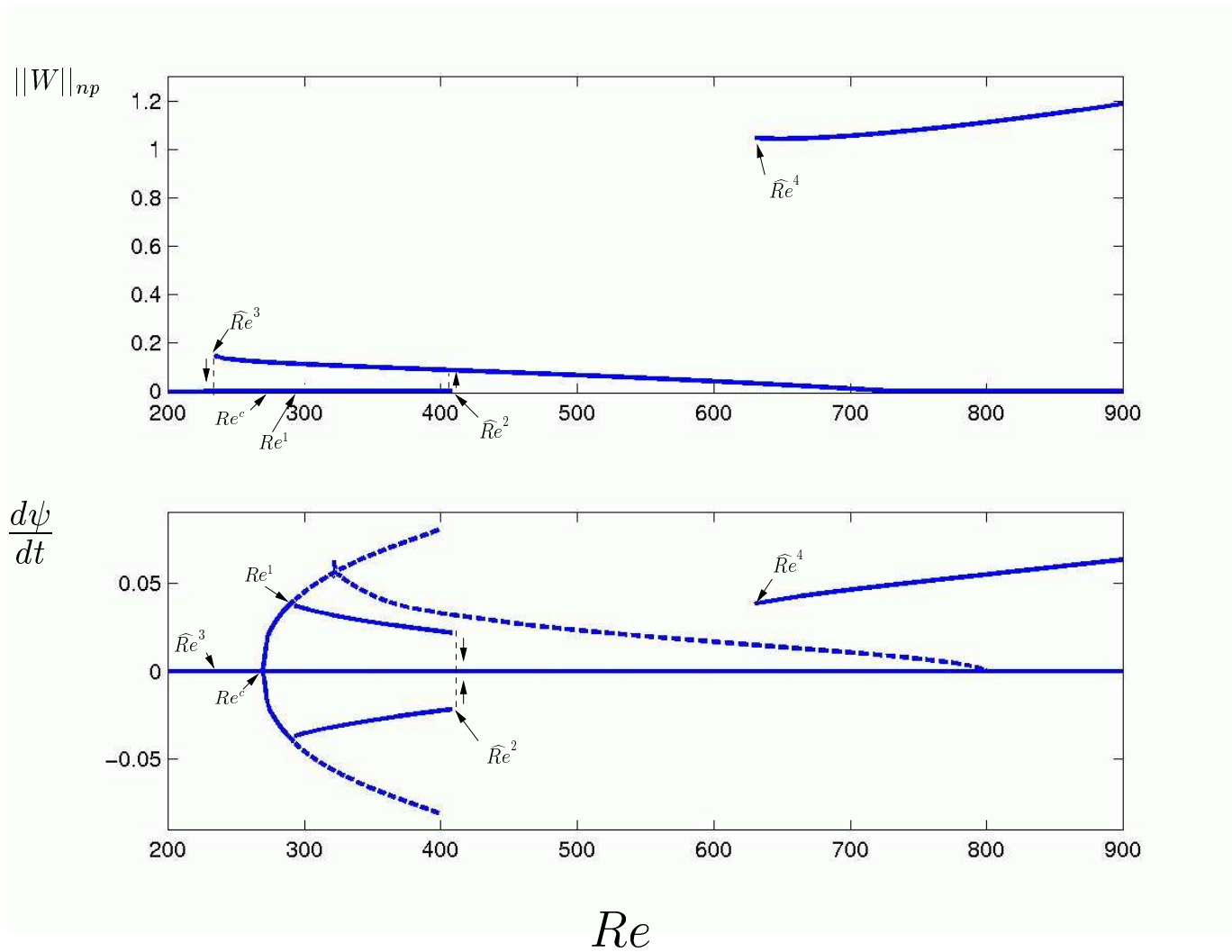


Figura 4.13: Diagrama de bifurcación del sistema para $K = 2.37$ y $r = 2$

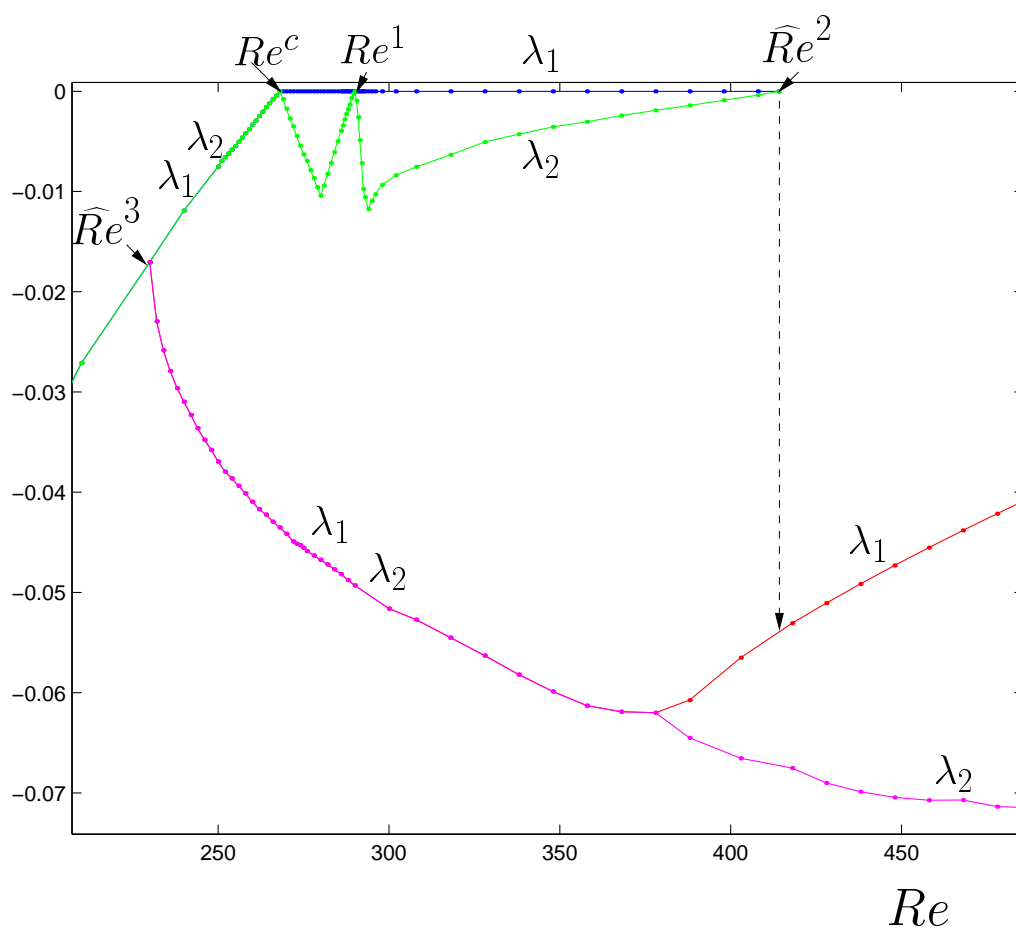


Figura 4.14: Primeros exponentes de Lyapunov en función de Re (con $K = 2.37$, $r = 2$) para: (i) las soluciones oscilatorias con $Re^c < Re < Re^1$ y $Re^1 < Re < \widehat{Re}^2$ (λ_1 en azul y λ_2 en verde) que aparecen tras la bifurcación de Hopf en Re^c , (ii) la solución estacionaria para $Re > \widehat{Re}^3$, (λ_1 en magenta y λ_2 en rojo).

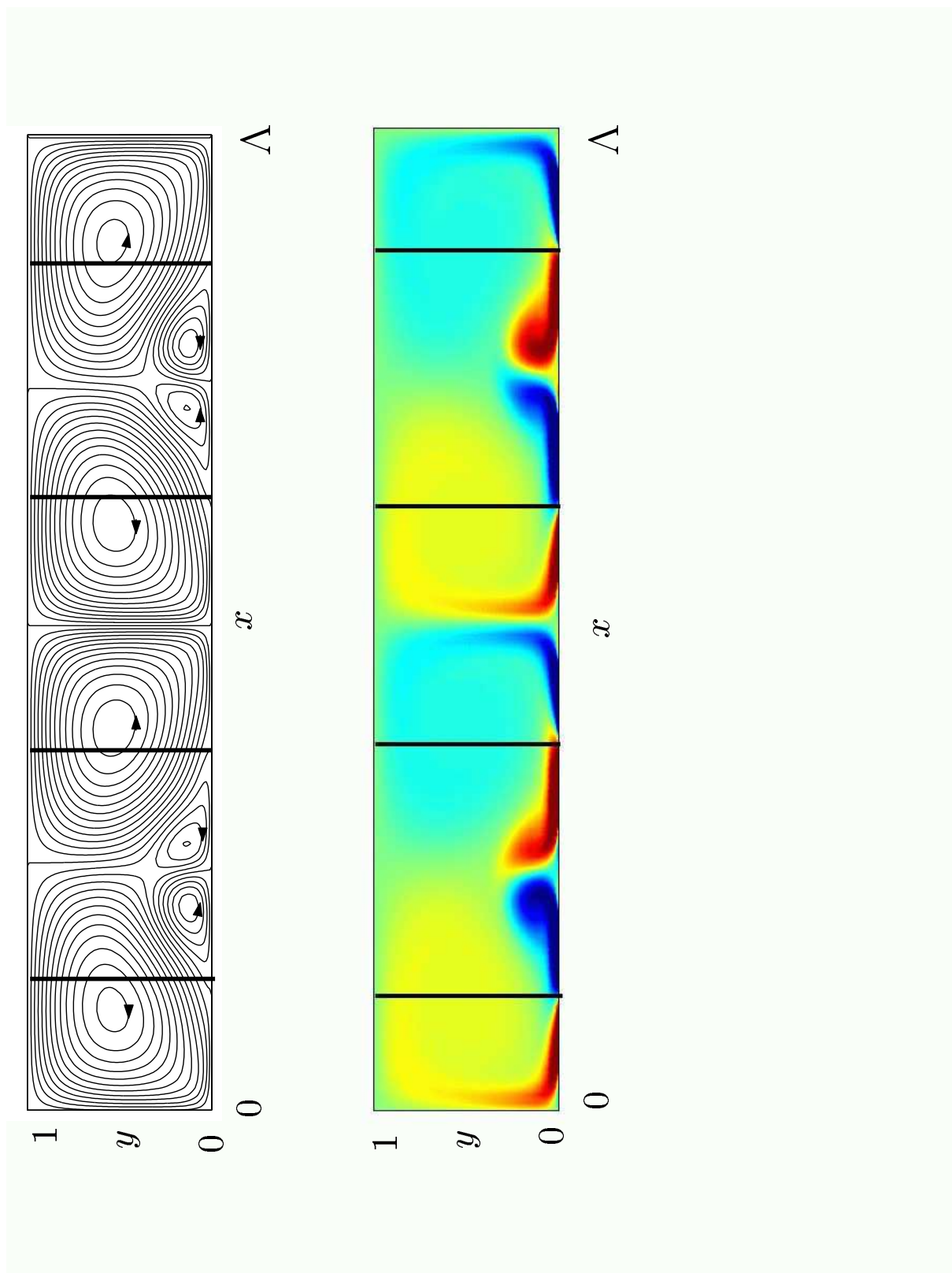


Figura 4.15: Líneas de corriente y mapa de vorticidad de la solución estacionaria estable para $Re = 418$ que aparece en el diagrama de bifurcación 4.13, correspondiente a una onda superficial de tipo estático.

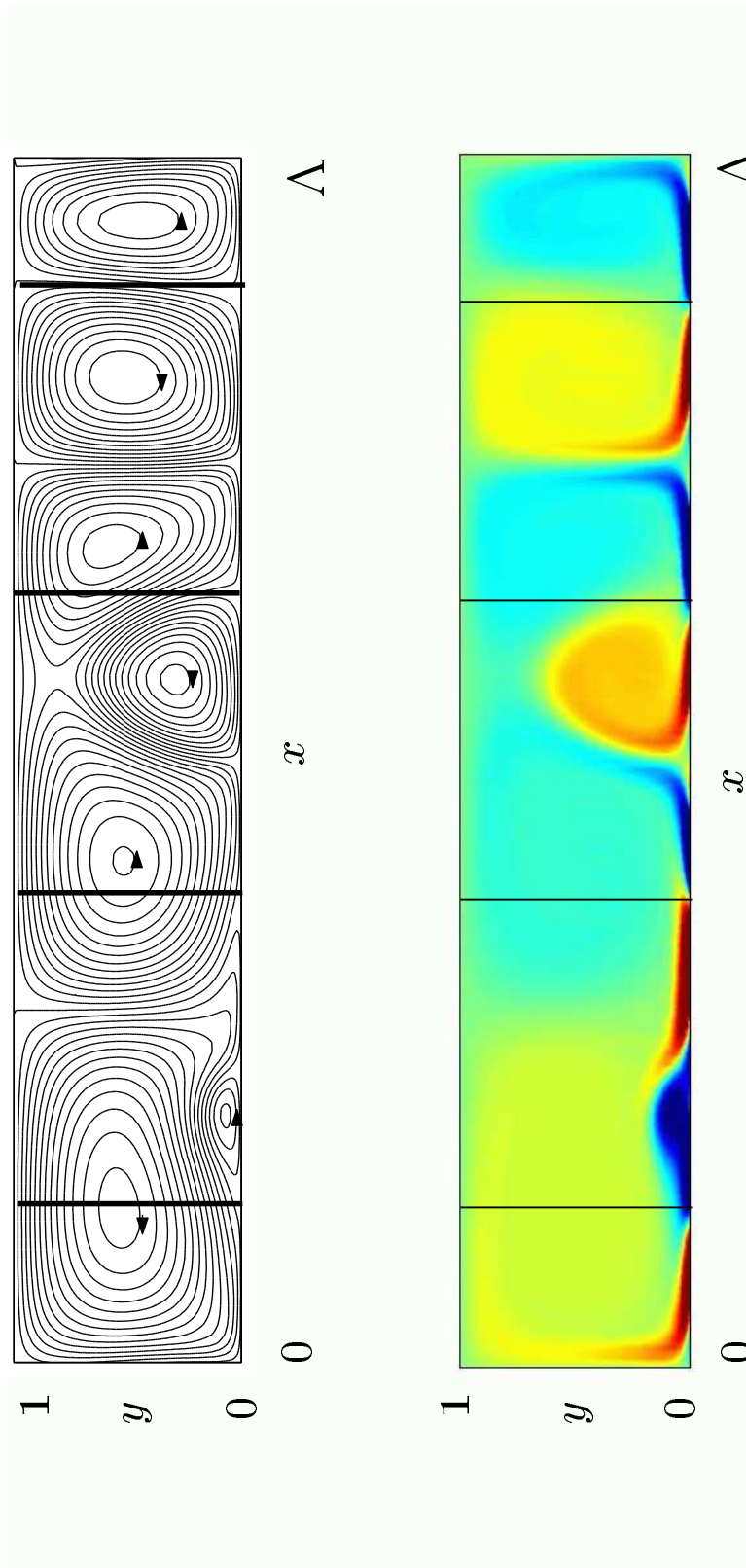


Figura 4.16: Líneas de corriente y mapa de vorticidad de la solución estacionaria respecto a unos ejes móviles con velocidad $\frac{d\psi}{dt} = \text{cte.}$ correspondiente a una onda viajera de tipo casi-estático, con $Re = 640$.

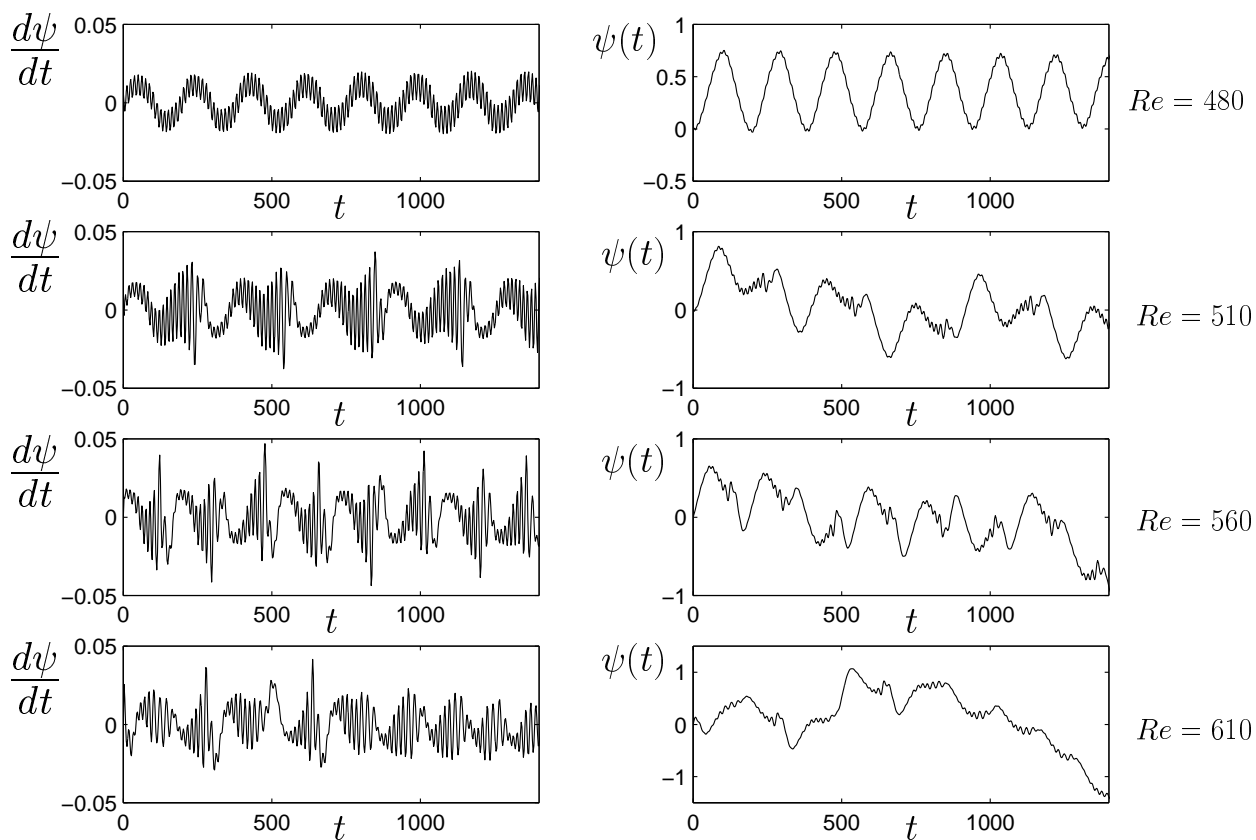


Figura 4.17: ψ' y ψ en función de t de atractores más complejos para $K = 2.37$, $r = 2$ en los valores indicados de Re .

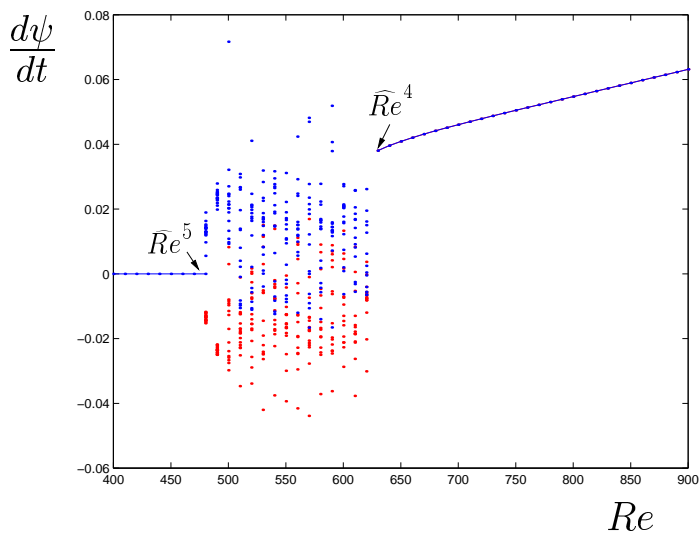


Figura 4.18: Máximos y mínimos de ψ' en función del Re para los atractores más complejos, con $K = 2.37$, $r = 2$.

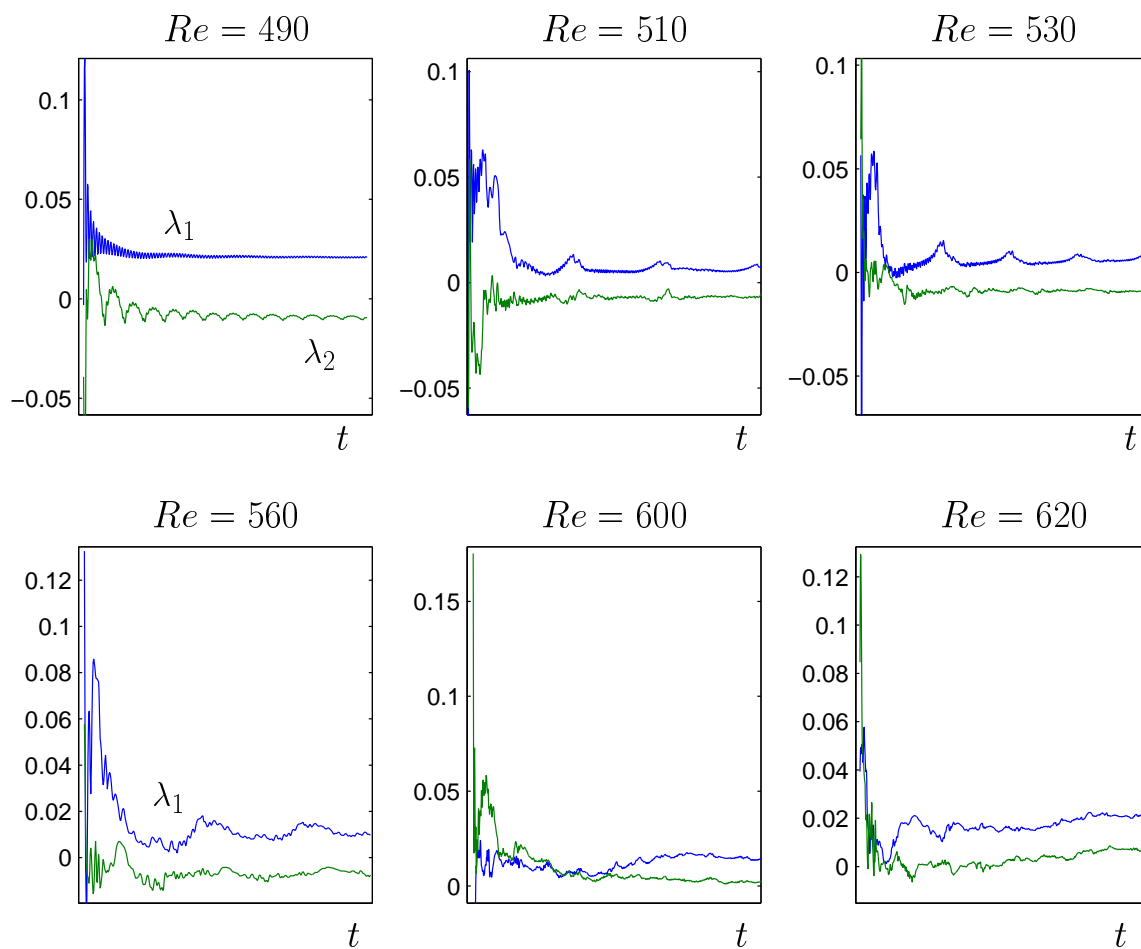


Figura 4.19: Exponentes de Lyapunov para algunos atractores caóticos, con $K = 2.37$, $r = 2$.

Capítulo 5

Conclusiones y extensiones previsibles

5.1. Conclusiones

El objetivo general de esta tesis ha sido el de abordar el análisis débilmente no lineal del movimiento de un líquido en recipientes anulares bidimensionales sometidos a una excitación paramétrica monocromática, de frecuencia cercana al doble de una frecuencia natural del sistema en el límite doble de pequeña viscosidad y pequeño forzamiento, sin tener en cuenta efectos de modulación espacial de las ondas (efectos de velocidad de grupo y dispersión de las ondas). A continuación se exponen las conclusiones más importantes que se deducen del trabajo realizado.

1. Como hemos visto, en el análisis de la dinámica lineal se tuvieron en cuenta dos tipos de modos: (i) Los *modos no viscosos*, de carácter oscilatorio, dependientes en primera aproximación del número de onda de las ondas superficiales y del inverso del número de Bond y (ii) infinitos *modos viscosos* no oscilatorios, del orden del inverso del número de Reynolds basado en la altura del líquido en el contenedor, presentes en el fluido por pequeña que sea la viscosidad. Estos modos viscosos son los causantes de la presencia de un flujo no oscilatorio de evolución lenta que se denomina *flujo medio*. Por tanto, las partículas fluidas oscilan en la escala corta de tiempo (asociada a la vibración externa), y además se trasladan en una escala de tiempo lenta (del orden de $\frac{1}{C}$). El límite de baja viscosidad nos conduce a un problema de perturbaciones singulares, en el que las soluciones del problema no viscoso no cumplen todas las condiciones de contorno simultáneamente, ni en el fondo del depósito ni en la superficie libre. Esto indica la presencia de dos capas límite de pequeño

espesor, \sqrt{C} . Un intento de resolver numéricamente el problema completo formulado en §2.2 exigiría, por un lado, describir bien el problema en la escala temporal del orden del periodo de excitación (podría hacerse con un número de pasos en el tiempo del orden de 100), y por otro lado, integrar hasta tiempos característicos de la evolución del flujo medio. Para depósitos anulares bidimensionales llenos de agua hasta alturas del orden de centímetros, C es del orden de 10^{-5} , lo que conduce a tiempos característicos del orden de 10^5 y a un número aproximado de pasos temporales del orden de 10^9 o superior. Además, debido a la presencia de las dos capas límite, la discretización espacial debe ser capaz de resolver bien zonas de espesores del orden de 10^{-3} , lo que obligaría a un mallado muy fino en esas zonas. Otra dificultad añadida a las anteriores es la presencia de una superficie libre que cambia con el tiempo (que conduce a un problema de frontera libre) y que requeriría utilizar un mallado variable. Se hace por tanto *necesario separar la evolución del flujo en cada una de las escalas temporales* a través de un método de perturbaciones de múltiples escalas y analizar por separado el flujo en las capas límite del flujo en la zona central del fluido.

2. El amortiguamiento de los modos no viscosos es, en primera aproximación, la parte real de $\sqrt{C}i\Omega_1 + Ci\Omega_2$. El primer término procede de la disipación viscosa en la capa límite oscilatoria del fondo del depósito, mientras que el segundo procede de la disipación viscosa que tiene lugar en la zona casi-potencial. Para obtener una buena aproximación de los modos no viscosos es necesario, en el límite de baja viscosidad, retener la segunda aproximación del amortiguamiento, ya que, para un número de onda moderadamente grande $CRe(i\Omega_2) \geq \sqrt{C}Re(i\Omega_1)$, como se vió en la figura 2.5 del apartado 2.3.1. Por tanto, en este límite de baja viscosidad, los modos no viscosos y los viscosos decaen a la misma velocidad. Consecuentemente, a la hora de obtener las ecuaciones que determinan la evolución débilmente no lineal del problema, *no deben ignorarse ni los infinitos modos viscosos ni el amortiguamiento de los modos no viscosos hasta orden C* .
3. *El acoplamiento del flujo medio con el desfase espacial de las ondas no puede ser ignorado.* Efectivamente, como se vió en §1.1 la integración numérica del problema formado por las ecuaciones (3.2.1)-(3.2.2) con las condiciones de contorno (3.2.4), ignorando la evolución temporal del desfase espacial de las dos ondas superficiales contrapropagatorias (es decir, ignorando la ecuación (3.2.3) que depende del término integral del flujo medio), posee como

primera solución para Reynolds efectivos bajos una solución estacionaria y con simetría de reflexión, cuyas líneas de corriente se muestran en la figura 4.1(a). Esta solución pierde estabilidad para los Reynolds críticos representados por la línea discontinua de la figura 4.3, bifurcando a otro tipo de soluciones estacionarias no simétricas que poseen un flujo neto en la superficie libre (ver figura 4.1(b)). Este flujo neto producirá por convección una variación en el desfase de las ondas superficiales (por lo que las ecuaciones de amplitud (1.1.1)-(1.1.2) son incompletas), y, por tanto, es una contradicción suponer que el desfase espacial de las ondas no varía con el tiempo; por lo que el acoplamiento entre el flujo medio y el desfase espacial de la onda no puede ser ignorado.

4. El acoplamiento del flujo medio con el desfase espacial de las ondas superficiales alarga el dominio de estabilidad de la solución estacionaria con simetría de reflexión para problemas con un número de onda del orden de la unidad. La línea discontinua de la figura 4.3 muestra el valor del Reynolds crítico en el que la solución con simetría de reflexión pierde estabilidad para el problema en el que se ignora el acoplamiento entre el flujo medio y las ondas superficiales. La línea continua muestra el Reynolds crítico para el problema real en el que el flujo medio está acoplado con la evolución temporal del desfase de las ondas, produciéndose esta desestabilización (a través de una bifurcación de Hopf) para Reynolds más grandes que en el caso anterior. Al aumentar el alargamiento del depósito (sin modificar el número de onda), la bifurcación de Hopf tiene lugar para el mismo Reynolds crítico.
5. Como se vió tras la deducción de las ecuaciones de evolución de las amplitudes complejas (2.4.73)-(2.4.74), el término dependiente del flujo medio y los términos cúbicos no lineales son del mismo orden. Por tanto, es incongruente ignorar unos y retener los otros a la hora de analizar la dinámica débilmente no lineal del problema. Además, los modos viscosos, causantes del flujo medio están “forzados” por el propio flujo oscilatorio a través de la capa límite oscilatoria de Stokes.
6. El acoplamiento del flujo medio con las ondas superficiales es el causante de la aparición de soluciones oscilatorias simétricas, no simétricas, ondas de tipo casi-estático y atractores oscilatorios más complejos e incluso soluciones caóticas. La aparición de todas ellas dependen del número de onda y del alargamiento del contenedor.

7. Las soluciones de tipo oscilatorio encontradas tienen, en general, como tiempo característico el tiempo convectivo del flujo medio, aunque en algún caso se encontraron soluciones oscilatorias moduladas en la escala de tiempos viscosa.
8. Dado el carácter bidimensional de esta teoría, la comparación de los resultados obtenidos a través de la integración numérica del modelo de la tesis, con resultados experimentales, sólo pudo ser cualitativa. A pesar de ello, éste modelo bidimensional predice comportamientos observados en 3D en contenedores anulares (ver Douady *et al.* [11]), tales como la presencia de ondas viajeras de tipo casi-estático (ondas que son de tipo estático respecto a un sistema que gira lentamente). Otros comportamientos, como son ondas superficiales de tipo casi-estático que oscilan lentamente en torno a una posición, caos temporal y presencia de histéresis, no pueden ser contrastados con resultados experimentales debido a la simplicidad del modelo (sin modulación espacial, ondas monocromáticas, bidimensional, ...). Todos estos comportamientos obtenidos en el modelo de la tesis, son inducidos por el acoplamiento de las ondas superficiales con el flujo medio (asociado a los modos viscosos), y aparecen a pesar de ignorar el efecto de las paredes laterales del recipiente.

5.2. Extensiones previsibles

Se indican aquí las posibles extensiones de este trabajo.

1. La primera extensión inmediata al trabajo realizado en esta tesis es la *búsqueda de nuevas soluciones* al problema del acoplamiento del flujo medio con la evolución del desfase de las ondas superficiales *para Reynolds efectivos y alargamientos moderadamente grandes*, en previsión de que aparezcan comportamientos más complicados. Para llevarlo a cabo es necesaria una mayor potencia de cálculo debido al aumento del campo fluido.
2. Las configuraciones más importantes de ondas de Faraday tienen lugar en depósitos de alargamiento grande ($L \gg 1$), en los que la longitud de onda es pequeña comparada con la dimensión horizontal del recipiente. Un primer análisis bidimensional de este problema requiere *incluir la modulación espacial* de las ondas superficiales (es decir, incluir los efectos de la velocidad de grupo y la dispersión de las ondas), que conducirán a nuevos términos en las ecuaciones de amplitud y que afectarán al flujo medio (ver Vega, Knobloch & Martel

[57] y Knobloch, Martel & Vega [27]). En el trabajo desarrollado en la tesis, el flujo medio es puramente viscoso, sin embargo, si se tiene en cuenta la modulación espacial, el flujo medio contiene una contribución no viscosa importante. Este flujo no viscoso es forzado a través de las condiciones de contorno en la superficie libre (compatibilidad cinemática y balance de esfuerzos normales). Otro mecanismo de forzamiento no viscoso es la fuerza (en dirección vertical) generada por la velocidad de deriva de Stokes (ver (2.4.89)). El problema para el flujo medio viscoso, (en primera aproximación Ψ_0^v , W_0^v), queda de nuevo acoplado con la evolución del desfase espacial de las ondas superficiales ψ y con el valor de las amplitudes complejas de las ondas superficiales \tilde{A}_0 y \tilde{B}_0

$$W_{0T}^v = \frac{1}{Re} \Delta W_0^v + \frac{\partial}{\partial y} (W_0^v \Psi_{0x}^v) - \frac{\partial}{\partial x} (W_0^v \Psi_{0y}^v), \quad (5.2.1)$$

$$W_0^v = \Delta \Psi_0^v, \quad (5.2.2)$$

$$\frac{d\psi}{dT} = -\alpha_5 \int_0^1 G(y) \langle \langle \Psi_{0y}^v \rangle^x \rangle^\tau dy, \quad (5.2.3)$$

$$\langle \langle W_{0y}^v \rangle^x \rangle^\tau = \Psi_0^v = 0, \Psi_{0y}^v = -\beta_4 [i \langle \tilde{A}_0 \tilde{B}_0 \rangle^\tau e^{2i(kx-\psi)} + \text{c.c.}] \quad \text{en } y = 0 \quad (5.2.4)$$

$$\Psi_{0x}^v = \Psi_{0yy}^v = 0 \quad \text{en } y = 1 \quad (5.2.5)$$

$$\Psi_0^v(x + L, X + 1, y, T) \equiv \Psi_0^v(x, X, y, T) \quad (5.2.6)$$

en las que $X = x/L$, $\tau = t/L$, $T = t/L^2$, $Re = 1/(CL^2)$ y $\langle \ \rangle^\tau$ indica el valor medio de la función en la variable τ . La evolución de las amplitudes complejas está de nuevo desacoplada del flujo medio

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{0T} = i\alpha \tilde{A}_{0\xi\xi} - (\Delta + iD)\tilde{A}_0 + i[(\alpha_3 + \alpha_8)|\tilde{A}_0|^2 - (\alpha_4 + \alpha_8)\langle |\tilde{B}_0|^2 \rangle^\eta] \tilde{A}_0 + \\ + i\alpha_6 M \langle \tilde{B}_0 \rangle^\eta, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{0T} = i\alpha \tilde{B}_{0\xi\xi} - (\Delta + iD)\tilde{B}_0 + i[(\alpha_3 + \alpha_8)|\tilde{B}_0|^2 - (\alpha_4 + \alpha_8)\langle |\tilde{A}_0|^2 \rangle^\eta] \tilde{B}_0 + \\ + i\alpha_6 M \langle \tilde{A}_0 \rangle^\eta, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\tilde{A}_0(\xi + 1, T) \equiv \tilde{A}_0(\xi, T), \tilde{B}_0(\eta + 1, T) \equiv \tilde{B}_0(\eta, T), \quad (5.2.9)$$

donde $\xi = X + v_g\tau$, $\eta = X - v_g\tau$. Tal y como se indica en Knobloch *et al.* [27], este último problema (5.2.7)-(5.2.9) da lugar a soluciones de tipo estático $|\tilde{A}_0| = |\tilde{B}_0|$ espacialmente uniformes y no uniformes, ondas de tipo casi-estático oscilatorias, soluciones $|\tilde{A}_0| \neq |\tilde{B}_0|$ con una rotación asociada a la oscilación del desfase temporal de las ondas y soluciones caóticas. Las rotaciones asociadas al desfase espacial se obtendrán de la integración numérica del problema (5.2.1)-(5.2.6).

3. En este trabajo, y con objeto de tener un modelo lo más simplificado posible, únicamente se han tenido en cuenta ondas de Faraday monocromáticas. Sin embargo, es de prever que una *excitación paramétrica combinación lineal de distintas frecuencias* excite distintos números de onda y dé lugar a comportamientos más complejos (sobre todo si se tienen en cuenta fenómenos de resonancia).
4. La presencia de algunos efectos físicos omitidos en las hipótesis generales pueden favorecer la inestabilidad del desfase de las ondas gravitatorias en 2D. Uno de estos efectos es el llamado efecto Marangoni, que es el asociado a cambios en la tensión superficial debido a la presencia de gradientes superficiales de temperatura o de concentración de surfactantes (causados por ejemplo por la presencia de contaminantes en la superficie libre). La *contaminación superficial* aparece en depósitos de agua por mucho cuidado que se tenga. Ésta, cambia por completo la estructura de la capa límite superficial (Henderson & Miles [20], Nicolas & Vega [45]), transformándose en una capa límite similar a la de Stokes, y produciendo una velocidad tangencial en el flujo medio. La variación de la tensión superficial con la temperatura, da lugar a un salto de esfuerzos tangenciales en la superficie

$$\nabla_s \sigma = \frac{d\sigma}{dT} \nabla_s T = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\eta}), \quad (5.2.10)$$

que favorece el movimiento del fluido en la superficie libre.

5. *Extensión a 3D y otras geometrías.* La continuación natural del trabajo realizado en la tesis es extender el problema a tres dimensiones. Los resultados obtenidos en la tesis, a pesar de la simplificación bidimensional, explican y predicen comportamientos experimentales observados en 3D. Por tanto, es de esperar que aparezcan también en el modelo tridimensional. De hecho, la principal aportación en 3D es la presencia de paredes laterales, cuyas capas límite asociadas generarán una velocidad tangencial en el flujo medio, que favorece el acoplamiento entre las ondas superficiales y el flujo medio.

Apéndice A

Solución en las capas límite

En este apéndice se calculan las soluciones en ambas capas límite. Una vez obtenidas, el acoplamiento con la zona potencial permitirá determinar por completo la solución en esta última región. Se procede de la siguiente forma:

(a) Usando variables apropiadas de capa límite se obtienen las ecuaciones y condiciones de contorno del flujo en las capas límite del fondo y de la superficie libre.

(b) Se desarrolla la solución en ambas capas límite en función de los parámetros pequeños del problema, hasta orden ε^2 en la capa del fondo, y hasta orden $\varepsilon^2\sqrt{C}$ en la capa superficial, obteniendo para cada orden un sistema de ecuaciones y condiciones de contorno a resolver, tanto para los términos que son solución del problema estrictamente lineal como para el resto.

(c) Una vez obtenidas las soluciones, se acoplan con la solución en la región casi-potencial en una región intermedia de solapamiento. De dicho acoplamiento se obtienen las condiciones de contorno de la solución lineal, (2.4.39),(2.4.43) y las del flujo medio (2.4.100)-(2.4.103).

A.1. Capa límite de Stokes en el fondo del depósito

Para el estudio de esta capa límite se utiliza la variable

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{C}}, \quad (\text{A.1.1})$$

de forma que cuando $y \sim \sqrt{C}$, entonces $\xi \sim 1$, y los términos viscosos de las ecuaciones, $Cu_{yy} = u_{\xi\xi}$, son del mismo orden que los términos inerciales, u_t . Las ecuaciones que cumplen las variables en esta capa límite, u^* , v^* y q^* se obtienen introduciendo la variable ξ en las ecuaciones (2.2.12)-(2.2.14) y en las condiciones de contorno (2.2.15) del fondo del depósito $y = 0$ ($\xi = 0$).

La solución en esta capa se puede desarrollar de la forma:

$$u^* = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(u_0^*(x, \xi) + \sqrt{C} u_1^*(x, \xi) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 u^{*s}(x, \xi, \tau) + \dots, \quad (\text{A.1.2})$$

$$v^* = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(v_0^*(x, \xi) + \sqrt{C} v_1^*(x, \xi) + C v_2^*(x, \xi) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \left(v^{*s}(x, \xi, \tau) + \sqrt{C} v_1^{*s}(x, \xi, \tau) \right) + \dots, \quad (\text{A.1.3})$$

$$q^* = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(q_0^*(x, \xi) + \sqrt{C} q_1^*(x, \xi) \right) + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 q^{*s}(x, \xi, \tau) + \dots, \quad (\text{A.1.4})$$

donde los términos proporcionales a ε , $\varepsilon\sqrt{C}$ y εC son solución del problema linealizado en la capa límite, mientras que el superíndice s indica términos no oscilatorios (de orden ε^2 y $\varepsilon^2\sqrt{C}$), solución del problema no linealizado. La frecuencia no viscosa desarrollada en función del espesor de la capa límite es $\Omega \simeq \Omega_0 + \sqrt{C}\Omega_1 + C\Omega_2$, donde Ω_0 , Ω_1 y Ω_2 son valores conocidos (ver §2.3.1), función del número de onda k y del inverso del número de Bond T .

A.1.1. Solución del problema lineal

Introduciendo los desarrollos (A.1.2)-(A.1.4) en el problema linealizado de la capa límite, se obtienen, para cada orden de magnitud, los siguientes problemas:

$$0 \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{C}} \right) \rightarrow \begin{cases} v_{0\xi}^* = 0, \\ q_{0\xi}^* = 0, \\ v_0^*(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1.5})$$

$$0(\varepsilon) \rightarrow \begin{cases} u_{0x}^* + v_{1\xi}^* = 0, \\ i\Omega_0 u_0^* + q_{0x}^* - u_{0\xi\xi}^* = 0, \\ i\Omega_0 v_0^* - v_{0\xi\xi}^* + q_{1\xi}^* = 0, \\ v_1^*(x, 0) = 0, \\ u_0^*(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

$$0(\varepsilon\sqrt{C}) \rightarrow \begin{cases} u_{1x}^* + v_{2\xi}^* = 0, \\ i\Omega_0 u_1^* + i\Omega_1 u_0^* + q_{1x}^* - u_{1\xi\xi}^* = 0, \\ v_2^*(x, 0) = 0, \\ u_1^*(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.7})$$

Esto proporciona un sistema recurrente de ecuaciones, con condiciones de contorno en $\xi = 0$ del que se obtienen los primeros términos de los desarrollos (A.1.2)-(A.1.4) de la capa límite de Stokes, que deben acoplar con la solución del problema en la región potencial. Teniendo en cuenta como se comporta la solución en el interior de la capa límite del fondo cuando $\xi \rightarrow \infty$, se establecen las condiciones de acoplamiento entre la zona casi-potencial y la *capa límite del fondo*, que vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \delta} u(x, y, t, \tau) &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{C}}} u^*(x, \xi, t, \tau), \\ \lim_{y \rightarrow \delta} v_y(x, y, t, \tau) &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{C}}} \frac{v_\xi^*}{\sqrt{C}}(x, \xi, t, \tau), \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

donde δ es el tamaño de la zona intermedia de acoplamiento entre ambas soluciones, y cumple

$$\sqrt{C} \ll \delta \ll 1. \quad (\text{A.1.9})$$

Introduciendo los desarrollos de Taylor centrados en $y = 0$ de las soluciones de la zona casi-potencial (2.4.44)-(2.4.45) y los valores de solución de la capa límite del fondo en las ecuaciones (A.1.8), se resuelve el acoplamiento con la capa límite del fondo identificando en (A.1.8) términos del mismo orden. De este acoplamiento se obtiene que la solución lineal de la capa límite del fondo debe ser de la forma

$$u^*(x, \xi) = \left(A e^{ikx} - B e^{-ikx} \right) \left(U_0^*(\xi) + \sqrt{C} U_1^*(\xi) + \dots \right), \quad (\text{A.1.10})$$

$$v^*(x, \xi) = \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) \left(V_0^*(\xi) + \sqrt{C} V_1^*(\xi) + C V_2^*(\xi) + \dots \right), \quad (\text{A.1.11})$$

$$q^*(x, \xi) = \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) \left(Q_0^*(\xi) + \sqrt{C} Q_1^*(\xi) + \dots \right). \quad (\text{A.1.12})$$

Las soluciones de los problemas (A.1.5)-(A.1.7) son las siguientes:

$$0(\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} Q_0^*(\xi) = Q_0(0) = \frac{\Omega_0^2 F_0}{k \sinh k}, \\ V_0^*(\xi) = 0, \\ U_0^*(\xi) = -\frac{k}{\Omega_0} Q_0(0) \left(1 - e^{-\sqrt{2i\Omega_0} \xi} \right), \end{array} \right. \quad (\text{A.1.13})$$

$$0(\varepsilon\sqrt{C}) \left\{ \begin{array}{l} Q_1^*(\xi) = Q_1(0) = \frac{(1 + Tk^2)F_1}{\cosh k} + \frac{\Omega_0^2 F_0}{\sqrt{i\Omega_0} \cosh k}, \\ V_1^*(\xi) = \frac{ik^2}{\Omega_0} Q_0(0) \left(\xi - \frac{1 - e^{-\sqrt{i\Omega_0} \xi}}{\sqrt{i\Omega_0}} \right), \\ U_1^*(\xi) = -\frac{i\Omega_1 k}{2\Omega_0 \sqrt{i\Omega_0}} Q_0(0) \cdot \xi e^{-\sqrt{i\Omega_0} \xi} + \frac{k}{\Omega_0} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} Q_0(0) - Q_1(0) \right) \left(1 - e^{-\sqrt{i\Omega_0} \xi} \right), \end{array} \right. \quad (\text{A.1.14})$$

$$0(\varepsilon C) \left\{ \begin{array}{l} V_2^*(\xi) = \frac{ik^2}{\Omega_0} \left(Q_1(0) - \frac{\Omega_1}{\Omega_0} Q_0(0) \right) \left(\xi - \frac{1 - e^{-\sqrt{i\Omega_0} \xi}}{\sqrt{i\Omega_0}} \right) - \\ - \frac{\Omega_1 k^2}{2\Omega_0 \sqrt{i\Omega_0}} Q_0(0) \left(\frac{1 - e^{-\sqrt{i\Omega_0} \xi}}{i\Omega_0} - \frac{\xi}{\sqrt{i\Omega_0}} e^{-\sqrt{i\Omega_0} \xi} \right), \end{array} \right. \quad (\text{A.1.15})$$

A.1.2. Términos no oscilatorios de orden ε^2

Introduciendo los desarrollos (A.1.2-A.1.4) en las ecuaciones completas de la capa límite, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para los términos no oscilatorios

$$0\left(\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{C}}\right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_\xi^{*s} = 0, \\ q_\xi^{*s} - \left(u_0^* \bar{u}_{0\xi}^* + \text{c.c.} \right) = 0, \\ v^{*s}(x, 0, \tau) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.1.16})$$

$$0(\varepsilon^2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_x^{*s} + v_{1\xi}^{*s} = 0, \\ q_x^{*s} - u_{\xi\xi}^{*s} + \left(v_1^* \bar{u}_{0\xi}^* + \text{c.c.} \right) = 0, \\ u^{*s}(x, 0, \tau) = 0, \\ v_1^{*s}(x, 0, \tau) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{A.1.17})$$

Derivando la segunda ecuación de (A.1.17) respecto a ξ , la segunda de (A.1.16) respecto a x , y sumando las expresiones resultantes, se obtiene una ecuación para la variable u^{*s} ,

$$u_{\xi\xi\xi}^{*s} = \frac{\partial(v_1^* \bar{u}_{0\xi}^*)}{\partial\xi} + \frac{\partial(u_0^* \bar{u}_{0\xi}^*)}{\partial x} + \text{c.c.}, \quad (\text{A.1.18})$$

con su condición de contorno

$$u^{*s}(x, \xi = 0, \tau) = 0. \quad (\text{A.1.19})$$

Esta velocidad tangencial se acopla con la solución $u^s(x, y, \tau)$ de la zona casi-potencial

$$\lim_{\xi \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{C}}} u^{*s}(x, \xi, \tau) = \lim_{y \rightarrow \delta} u^s(x, y, \tau), \quad (\text{A.1.20})$$

en una zona intermedia de acoplamiento en la que $\sqrt{C} \ll \delta \ll 1$. Por tanto, a la hora de integrar la expresión (A.1.18) se deben imponer las condiciones adicionales que permiten el acoplamiento con la solución de la zona casi-potencial

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} u_{\xi\xi}^{*s}(x, \xi, \tau) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} u_{\xi}^{*s}(x, \xi, \tau) = 0. \quad (\text{A.1.21})$$

Conociendo los términos lineales de la velocidad en la capa límite, teniendo en cuenta (A.1.16) e integrando tres veces (A.1.18) con las condiciones (A.1.19) y (A.1.21), se obtienen los términos no oscilatorios de orden ε^2

$$\begin{aligned} u^{*s}(x, \xi, \tau) = & \frac{k^3 Q_0^2(0)}{\Omega_0^3} \left\{ 3(|B|^2 - |A|^2) + 3i(A\bar{B}e^{2ikx} - B\bar{A}e^{-2ikx}) \right\} + \\ & + \frac{k^3 Q_0^2(0)}{\Omega_0^2} \left\{ (|A|^2 - |B|^2 + A\bar{B}e^{2ikx} - B\bar{A}e^{-2ikx}) \left(\Omega_0 e^{-\sqrt{i\Omega_0} \xi} \left(\frac{\xi}{(-\sqrt{i\Omega_0})^3} - \frac{3}{(-\sqrt{i\Omega_0})^4} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{2\sqrt{i\Omega_0}}{(-\sqrt{2\Omega_0})^3} e^{-\sqrt{2\Omega_0} \xi} - \frac{\sqrt{i\Omega_0}}{(i\sqrt{i\Omega_0})^3} e^{i\sqrt{i\Omega_0} \xi} - \frac{\sqrt{i\Omega_0}}{(-i\sqrt{i\Omega_0})^3} e^{-\sqrt{i\Omega_0} \xi} \right) \right) + \text{c.c.} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

$$v^{*s}(x, \xi, \tau) = 0, \quad (\text{A.1.23})$$

$$q^{*s}(x, \xi, \tau) = q^{*s}|_{\xi=0} + \left[(|A|^2 + |B|^2 - \bar{A}B e^{-2ikx} - A\bar{B} e^{2ikx}) \int_0^\xi U_0^* \bar{U}_{0\xi}^* d\xi + \text{c.c.} \right]. \quad (\text{A.1.24})$$

Por tanto, *la velocidad tangencial no oscilatoria que se genera en la capa límite de Stokes (causada por el flujo oscilatorio de la capa) genera fuera de la capa límite un flujo no oscilatorio llamado flujo medio secundario u^s , que cumple*

$$\lim_{y \rightarrow 0} u^s(x, y, \tau) = \frac{3k^3 Q_0^2|_{y=0}}{\Omega_0^3} \left[(|B|^2 - |A|^2) + i(A\bar{B}e^{2ikx} - B\bar{A}e^{-2ikx}) \right]. \quad (\text{A.1.25})$$

A.2. Capa límite superficial

Para el estudio de la capa límite superficial se utiliza la variable

$$\eta = \frac{y - f(x, t)}{\sqrt{C}}. \quad (\text{A.2.1})$$

Nótese que para el problema completo (no lineal) no es posible utilizar la variable $\eta = (y-1)/\sqrt{C}$ ya que, teniendo en cuenta (3.0.1), $f(x, t) - 1 \sim \varepsilon$ es mucho mayor que \sqrt{C} cuando $C \rightarrow 0$.

Realizando el cambio de variables de (x, y, t) a (x, η, t) , las ecuaciones (2.2.12)-(2.2.14) se convierten para el análisis de la capa límite superficial en

$$\tilde{u}_x - \frac{f_x}{\sqrt{C}} \tilde{u}_\eta + \frac{1}{\sqrt{C}} \tilde{v}_\eta = 0, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t + \tilde{q}_x - \tilde{u}_{\eta\eta} - C \tilde{u}_{xx} = \\ = \frac{f_x}{\sqrt{C}} \tilde{q}_\eta + \frac{f_t}{\sqrt{C}} \tilde{u}_\eta - v \left(\frac{\tilde{u}_\eta}{\sqrt{C}} - \tilde{v}_x + \frac{f_x}{\sqrt{C}} \tilde{v}_\eta \right) - 2\sqrt{C} f_x \tilde{u}_{x\eta} + f_x^2 \tilde{u}_{\eta\eta}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t + \tilde{q}_\eta - \tilde{v}_{\eta\eta} - C \tilde{v}_{xx} = \\ = \frac{f_t}{\sqrt{C}} \tilde{v}_\eta + u \left(\frac{\tilde{u}_\eta}{\sqrt{C}} - \tilde{v}_x + \frac{f_x}{\sqrt{C}} \tilde{v}_\eta \right) - 2\sqrt{C} f_x \tilde{v}_{x\eta} + f_x^2 \tilde{v}_{\eta\eta}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

mientras que las condiciones de contorno en $y = f(x, t)$ ($\eta = 0$) son

$$\tilde{v} = f_t + \tilde{u} f_x, \quad (\text{A.2.5})$$

$$(1 - f_x^2) \left(\frac{\tilde{u}_\eta}{\sqrt{C}} - \tilde{v}_x + \frac{f_x}{\sqrt{C}} \tilde{v}_\eta \right) + 2f_x \left(\frac{1}{\sqrt{C}} \tilde{v}_\eta - \tilde{u}_x + \frac{f_x}{\sqrt{C}} \tilde{u}_\eta \right) = 0 \quad (\text{A.2.6})$$

$$\begin{aligned} \tilde{q} - \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} - (f - 1) + \frac{T f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{\frac{3}{2}}} + (f - 1) \mu \cos(\omega_{ex} t) = \\ = \frac{2C}{1 + f_x^2} \left\{ \frac{\tilde{v}_\eta}{\sqrt{C}} - f_x \left(\frac{\tilde{u}_\eta}{\sqrt{C}} - \tilde{v}_x + \frac{f_x}{\sqrt{C}} \tilde{v}_\eta \right) + f_x^2 \left(\tilde{u}_x - \frac{f_x}{\sqrt{C}} \tilde{v}_\eta \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

La solución en esta capa, \tilde{u} , \tilde{v} y \tilde{q} , se desarrollará de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(\tilde{u}_0(x, \eta) + \sqrt{C}\tilde{u}_1(x, \eta) + C\tilde{u}_2(x, \eta) + c.c. \right) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left(\tilde{u}_0^s(x, \eta, \tau) + \sqrt{C}\tilde{u}_1^s(x, \eta, \tau) \right) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

$$\begin{aligned} \tilde{v} = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(\tilde{v}_0(x, \eta) + \sqrt{C}\tilde{v}_1(x, \eta) + c.c. \right) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left(\tilde{v}_0^s(x, \eta, \tau) + \sqrt{C}\tilde{v}_1^s(x, \eta, \tau) \right) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

$$\begin{aligned} \tilde{q} = \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \left(\tilde{q}_0(x, \eta) + \sqrt{C}\tilde{q}_1(x, \eta) + c.c. \right) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left(\tilde{q}_0^s(x, \eta, \tau) + \sqrt{C}\tilde{q}_1^s(x, \eta, \tau) \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

A.2.1. Solución del problema estrictamente lineal

Linealizando el problema (A.2.2)-(A.2.7), y la variable de capa límite (A.2.1), $\eta = (y - 1)/\sqrt{C}$, se obtienen las mismas ecuaciones que para la capa límite del fondo, con las condiciones de contorno

$$\text{en } \eta = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\tilde{u}_\eta(x, 0)}{\sqrt{C}} + \tilde{v}_x(x, 0) = 0, \\ \tilde{v}(x, 0) - i\Omega f(x) = 0, \\ \tilde{q}(x, 0) - f + T f_{xx} + 2\sqrt{C}\tilde{v}_\eta(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.2.11})$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de la frecuencia no viscosa, $\Omega \simeq \Omega_0 + \sqrt{C}\Omega_1 + C\Omega_2$, y los términos lineales de los desarrollos de \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{q} , (A.2.8)-(A.2.10), y $f - 1$ (2.4.35), se obtiene un sistema recurrente de ecuaciones iguales a las obtenidas para la capa límite de Stokes, con diferentes condiciones de contorno

$$0 \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{C}} \right) \rightarrow \begin{cases} \tilde{v}_{0\xi} = 0, \\ \tilde{q}_{0\xi} = 0, \\ \tilde{v}_0(x, 0) - i\Omega_0 f_0(x, 0) = 0, \\ \tilde{q}_0(x, 0) - f_0 + T f_{0xx} = 0, \end{cases} \quad (\text{A.2.12})$$

$$0(\varepsilon) \rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_{0x} + \tilde{v}_{1\xi} = 0, \\ i\Omega_0 \tilde{u}_0 + \tilde{q}_{0x} - \tilde{u}_{0\xi\xi} = 0, \\ i\Omega_0 \tilde{v}_0 - \tilde{v}_{0\xi\xi} + \tilde{q}_{1\xi} = 0, \\ \tilde{u}_{0\eta}(x, 0) = 0, \\ \tilde{q}_1(x, 0) - f_1 + T f_{1xx} = 2\tilde{v}_{0\eta}(x, 0), \\ \tilde{v}_1(x, 0) - i\Omega_0 f_1(x) = i\Omega_1 f_0(x), \end{cases} \quad (\text{A.2.13})$$

$$0(\varepsilon\sqrt{C}) \rightarrow \begin{cases} i\Omega_0\tilde{u}_1 + i\Omega_1\tilde{u}_0 + \tilde{q}_{1x} - \tilde{u}_{1\xi\xi} = 0, \\ i\Omega_0\tilde{v}_1 + i\Omega_1\tilde{v}_0 - \tilde{v}_{1\xi\xi} + \tilde{q}_{2\xi} = 0, \\ \tilde{u}_{1\eta}(x, 0) = -\tilde{v}_{0x}(x, 0), \\ \tilde{q}_2(x, 0) - f_2 + T f_{2xx} = 2\tilde{v}_{1\eta}(x, 0), \end{cases} \quad (\text{A.2.14})$$

$$0(\varepsilon C) \rightarrow \begin{cases} i\Omega_0\tilde{u}_2 + i\Omega_1\tilde{u}_1 + i\Omega_2\tilde{u}_0 + \tilde{q}_{2x} - \tilde{u}_{2\xi\xi} = 0, \\ \tilde{u}_{2\eta}(x, 0) = -\tilde{v}_{1x}(x, 0). \end{cases} \quad (\text{A.2.15})$$

Una vez resueltas las ecuaciones con sus condiciones de contorno, se tendrá que imponer el acoplamiento con la solución en la región potencial en una zona intermedia de solape. Procediendo de forma análoga con la *capa límite superficial*, se obtienen las siguientes condiciones de acoplamiento:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow f - \delta} u_y(x, y, t, \tau) &= \lim_{\eta \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{C}}} \frac{\tilde{u}_\eta}{\sqrt{C}}(x, \eta, t, \tau), \\ \lim_{y \rightarrow f - \delta} v(x, y, t, \tau) &= \lim_{\eta \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{C}}} \tilde{v}(x, \eta, t, \tau), \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

donde δ cumple la relación (A.1.9). De dicho acoplamiento se deduce que la solución del problema estrictamente lineal de la capa límite superficial debe ser de la forma

$$\tilde{u}(x, \xi) = \left(A e^{ikx} - B e^{-ikx} \right) \left(\tilde{U}_0(\xi) + \sqrt{C} \tilde{U}_1(\xi) + C \tilde{U}_2(\xi) + \dots \right), \quad (\text{A.2.17})$$

$$\tilde{v}(x, \xi) = \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) \left(\tilde{V}_0(\xi) + \sqrt{C} \tilde{V}_1(\xi) + \dots \right), \quad (\text{A.2.18})$$

$$\tilde{q}(x, \xi) = \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right) \left(\tilde{Q}_0(\xi) + \sqrt{C} \tilde{Q}_1(\xi) + \dots \right). \quad (\text{A.2.19})$$

Con todo ello, las soluciones de los problemas lineales (A.2.12)-(A.2.15) son las siguientes:

$$0(\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{Q}_0(\eta) = (1 + Tk^2)F_0 = Q_0|_{y=1}, \\ \tilde{V}_0(\eta) = i\Omega_0 F_0, \\ \tilde{U}_0(\eta) = -\frac{k}{\Omega_0}(1 + Tk^2)F_0, \end{array} \right. \quad (\text{A.2.20})$$

$$0(\varepsilon\sqrt{C}) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{Q}_1(\eta) = (1 + Tk^2)F_1 + \Omega_0^2 F_0 \eta, \\ \tilde{V}_1(\eta) = i(\Omega_0 F_1 + \Omega_1 F_0) + \frac{ik^2}{\Omega_0}(1 + Tk^2)F_0 \eta, \\ \tilde{U}_1(\eta) = \frac{k}{\Omega_0}(1 + Tk^2) \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} F_0 - F_1 \right) - k\Omega_0 F_0 \eta + \frac{2k\Omega_0 F_0}{\sqrt{i\Omega_0}} e^{\sqrt{i\Omega_0} \eta}, \end{array} \right. \quad (\text{A.2.21})$$

$$0(\varepsilon C) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_2(\eta) = -\frac{k}{\Omega_0}(1 + Tk^2)F_2 + \frac{k^3}{i\Omega_0^2}(1 + Tk^2)F_0 - \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0^2}F_0 - \frac{F_1}{\Omega_0} \right) k(1 + Tk^2) + \\ + \frac{k(1 + Tk^2)F_0}{i\Omega_0^2}(i\Omega_2 + k^2) - k(\Omega_1F_0 + \Omega_0F_1)\eta - \frac{k^2(1 + Tk^2)F_0}{2\Omega_0}\eta^2 + \\ + \frac{k(2\Omega_0F_1 + \Omega_1F_0)}{\sqrt{i\Omega_0}}e^{\sqrt{i\Omega_0}\eta} + \Omega_1kF_0\eta e^{\sqrt{i\Omega_0}\eta}, \end{array} \right. \quad (\text{A.2.22})$$

A.2.2. Términos no oscilatorios

Introduciendo los desarrollos (A.2.8)-(A.2.10) en las ecuaciones (A.2.2)-(A.2.7) se obtienen, tras algunas simplificaciones, los siguientes problemas:

$$0\left(\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{C}}\right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{0\eta}^s = 0, \\ \tilde{q}_{0\eta}^s = 0, \\ \tilde{v}_0^s(x, \eta = 0, \tau) = 0, \\ \left[\tilde{q}_0^s - (\tilde{u}_0\tilde{u}_0 + \tilde{v}_0\tilde{v}_0) - f_{20}^s + Tf_{20xx}^s \right]_{\eta=0} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.2.23})$$

$$0(\varepsilon^2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{0x}^s + \tilde{v}_{1\eta}^s = (f_{0x}\tilde{u}_{1\eta} + \text{c.c.}), \\ \tilde{u}_{0\eta\eta}^s - q_{0x}^s = - (f_{0x}\tilde{q}_{1\eta} + f_{0t}\tilde{u}_{1\eta} + \tilde{v}_0\tilde{v}_{0x} - \tilde{v}_0\tilde{u}_{1\eta} + \text{c.c.}), \\ q_{1\eta}^s = f_{0t}\tilde{v}_{1\eta} + \tilde{u}_0\tilde{u}_{1\eta} - \tilde{u}_0\tilde{v}_{0x} + \text{c.c.}, \\ \tilde{u}_{0\eta}^s(x, \eta = 0, \tau) = 0, \\ \left[\tilde{v}_1^s - (f_{0x}\tilde{u}_1 + f_{1x}\tilde{u}_0 + \text{c.c.}) \right]_{\eta=0} = 0, \\ \left[\tilde{q}_1^s - f_{21}^s + Tf_{21xx}^s - (\tilde{u}_0\tilde{u}_1 + \tilde{v}_0\tilde{v}_1 + \text{c.c.}) \right]_{\eta=0} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.2.24})$$

$$0(\varepsilon^2\sqrt{C}) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{1\eta\eta}^s - q_{1x}^s = -f_{0t}\tilde{u}_{2\eta} - f_{1t}\tilde{u}_{1\eta} - f_{0x}\tilde{q}_{2\eta} - \\ - \tilde{v}_1\tilde{v}_{0x} - \tilde{v}_0\tilde{v}_{1x} + \tilde{u}_{1\eta}\tilde{v}_1 + \tilde{u}_{2\eta}\tilde{v}_0 + \text{c.c.}, \\ \left[\tilde{u}_{1\eta}^s - 2 \left\{ f_{0x}(\tilde{v}_{1\eta} - \tilde{u}_{0x}) + \text{c.c.} \right\} + \tilde{v}_{0x}^s \right]_{\eta=0} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.2.25})$$

Resolviendo (A.2.23)-(A.2.25) se obtienen las soluciones no oscilatorias de la capa límite superficial

$$0(\varepsilon^2) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_0^s(x, \tau) = \lim_{y \rightarrow f} u^s(x, y, \tau), \\ \tilde{v}_0^s(x, \eta, \tau) = 0, \\ \tilde{q}_0^s(x, \eta, \tau) = f_{20}^s - Tf_{20xx}^s + \frac{\Omega_0^2 F_0^2}{\sinh^2 k} \left(|A|^2 + |B|^2 \cosh 2k - \overline{A}B e^{-2ikx} + A\overline{B} e^{2ikx} \right), \end{array} \right. \quad (\text{A.2.26})$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \tilde{u}_{1\eta}^s(x, \eta, \tau) = \frac{6k^2\Omega_0 F_0^2}{\tanh k} |A|^2 - |B|^2 + 0 \cdot \eta + \\
 & + \overline{AB}e^{2ikx} - \overline{AB}e^{-2ikx} \frac{1}{\sqrt{i\Omega_0}} \left(i \frac{e^{-i\sqrt{i\Omega_0}\eta} - 1}{-i\sqrt{i\Omega_0}} + \frac{e^{\sqrt{i\Omega_0}\eta} - 1}{\sqrt{i\Omega_0}} \right) - \\
 & - \overline{AB}e^{2ikx} - \overline{AB}e^{-2ikx} \frac{2ik^2\Omega_0^2 F_0^2}{\tanh k} \left(\frac{\eta e^{-i\sqrt{i\Omega_0}\eta}}{-i\sqrt{i\Omega_0}} + \frac{1 - e^{-i\sqrt{i\Omega_0}\eta}}{-i\Omega_0} + \frac{\eta e^{\sqrt{i\Omega_0}\eta}}{\sqrt{i\Omega_0}} + \frac{1 - e^{\sqrt{i\Omega_0}\eta}}{i\Omega_0} \right) + \\
 & + |A|^2 - |B|^2 \frac{2ik^2\Omega_0^2 F_0^2}{\tanh k} \left(\frac{\eta e^{-i\sqrt{i\Omega_0}\eta}}{-i\sqrt{i\Omega_0}} - \frac{1 - e^{-i\sqrt{i\Omega_0}\eta}}{i\Omega_0} - \frac{\eta e^{\sqrt{i\Omega_0}\eta}}{\sqrt{i\Omega_0}} + \frac{1 - e^{\sqrt{i\Omega_0}\eta}}{i\Omega_0} \right), \\
 & \text{tras el acoplamiento con la zona potencial se obtiene } f_{21}^s, \text{ tal que} \\
 & f_{21}^s - T f_{21xx}^s + \overline{AB}e^{2ikx} - \overline{AB}e^{-2ikx} 4ik\Omega_0 F_0 \frac{\Omega_1 F_0}{\tanh^2 k} - \frac{\Omega_0 F_1}{\tanh^2 k} = 0. \\
 & \tilde{q}_1^s(x, \eta, \tau) = \tilde{q}_1^s|_{\eta=0} + \frac{2k\Omega_0^2 F_0^2}{\tanh k} |A|^2 + |B|^2 + \overline{AB}e^{-2ikx} + \overline{AB}e^{2ikx} \eta - \\
 & - \frac{2k\Omega_0^2 F_0^2}{\tanh k} |A|^2 + |B|^2 - \overline{AB}e^{-2ikx} - \overline{AB}e^{2ikx} \left(\frac{i e^{-i\sqrt{i\Omega_0}\eta} - 1}{\sqrt{i\Omega_0}} + \frac{e^{\sqrt{i\Omega_0}\eta} - 1}{\sqrt{i\Omega_0}} \right), \\
 & \text{donde } \tilde{q}_1^s|_{\eta=0} = f_{21}^s - T f_{21xx}^s + \\
 & + (|A|^2 + |B|^2 - 2\Omega_0 F_0 \frac{\Omega_1 F_0}{\tanh^2 k} + \Omega_0 F_1 \frac{1}{\tanh^2 k} - \frac{2k\Omega_0^2 F_0^2}{\tanh k \sqrt{i\Omega_0}} (1+i) + \\
 & + \overline{AB}e^{-2ikx} + \overline{AB}e^{2ikx} \cdot \\
 & \cdot 2\Omega_0 F_0 \frac{\Omega_1 F_0}{\tanh^2 k} + \Omega_0 F_1 \frac{1}{\tanh^2 k} - \frac{2k\Omega_0^2 F_0^2}{\tanh k \sqrt{i\Omega_0}} (1+i)).
 \end{aligned} \right\} 0(\varepsilon^2\sqrt{C}) \tag{A.2.27}$$

Para el orden de magnitud $\varepsilon^2\sqrt{C}$ sólo se muestra la ecuación de cantidad de movimiento en dirección x , ya que es la única que se va a utilizar posteriormente cuando se realice el acoplamiento entre las distintas zonas del campo fluido.

Una vez resueltas las ecuaciones (A.2.23)-(A.2.25), con sus respectivas condiciones de contorno, es necesario acoplar estas soluciones con las de la región casi-potencial. Debido a que la solución en esta última región está definida en el dominio $0 \leq y \leq 1$, es necesario aproximar el valor de la solución en $y = f$ por el valor en $y = 1$ a través de un desarrollo de Taylor centrado en $y = 1$,

$$\begin{aligned}
 u_y|_{y=f} & \simeq u_y|_{y=1} + u_{yy}|_{y=1}(f-1) + 0(\varepsilon^3), \\
 v|_{y=f} & \simeq v|_{y=1} + v_y|_{y=1}(f-1) + 0(\varepsilon^3),
 \end{aligned} \tag{A.2.28}$$

Introduciendo (A.2.28) y los desarrollos de la solución de la zona casi-potencial y de la capa límite superficial, en las condiciones de acoplamiento (A.2.16), éstas se transforman en

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 1-\delta} \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \quad Ae^{ikx} - Be^{-ikx} \quad U_{0y} + \sqrt{C}U_{1y} + CU_{2y} \quad + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \{u^s + (\bar{u}_{0yy}f_0 + \text{c.c.})\} + \dots = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{C}}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{C}} \left\{ e^{i\Omega t} \quad Ae^{ikx} - Be^{-ikx} \quad \tilde{U}_{0\eta} + \sqrt{C}\tilde{U}_{1\eta} + C\tilde{U}_{2\eta} \quad + \text{c.c.} \right\} + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{C}} \left\{ \tilde{u}_{0\eta}^s + \sqrt{C}\tilde{u}_{1\eta}^s \right\} + \dots, \end{aligned} \tag{A.2.29}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 1-\delta} \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \quad Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad V_0 + \sqrt{C}V_1 + CV_2 \quad + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \{v^s + (\bar{v}_{0y}f_0 + \text{c.c.})\} + \dots = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{C}}} \varepsilon \left\{ e^{i\Omega t} \quad Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \tilde{V}_0 + \sqrt{C}\tilde{V}_1 + C\tilde{V}_2 \quad + \text{c.c.} \right\} + \varepsilon^2 \tilde{v}_0^s + \dots \end{aligned}$$

Identificando en (A.2.29) términos del mismo orden, se obtiene el acoplamiento con la capa límite superficial.

Con todo lo anterior, se determina por completo la solución en la región casi-potencial hasta orden $\varepsilon\sqrt{C}$ (2.4.44)-(2.4.46) con sus condiciones de contorno (2.4.39), (2.4.43), y también las condiciones de contorno para el flujo medio (2.4.100)-(2.4.103).

Apéndice B

Método numérico

En este apéndice se describe el método numérico empleado para calcular las soluciones de las ecuaciones asintóticas (3.2.1)-(3.2.4). Se analiza en primer lugar la discretización espacial empleada, que reduce las ecuaciones en derivadas parciales (3.2.1)-(3.2.4) a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias; a continuación, se estudia el esquema de integración temporal utilizado y se comprueba el orden de los errores del método completo. En el último apartado se describen las condiciones iniciales y las perturbaciones utilizadas para arrancar las simulaciones numéricas.

B.1. Discretización espacial de las ecuaciones (3.2.1)-(3.2.4).

Aprovechando la periodicidad en sentido horizontal x , la vorticidad $W(x, y, t)$ y la función de corriente $\Psi(x, y, t)$ se desarrollan en serie de Fourier como

$$W(x, y, t) = \sum_{k=-N}^N W^k(y, t) \cdot e^{ik\frac{2\pi}{\Lambda}x}, \quad (\text{B.1.1})$$

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{k=-N}^N \Psi^k(y, t) \cdot e^{ik\frac{2\pi}{\Lambda}x}, \quad (\text{B.1.2})$$

donde N es un número entero suficientemente grande y $W^k(y, t)$ y $\Psi^k(y, t)$ son funciones complejas que verifican las condiciones

$$W^{-k}(y, t) = \overline{W^k(y, t)}, \quad \Psi^{-k}(y, t) = \overline{\Psi^k(y, t)}, \quad (\text{B.1.3})$$

que aseguran que las sumas (B.1.1) y (B.1.2) son reales.

Trasladando estos desarrollos a (3.2.1)-(3.2.4), las ecuaciones de evolución que se obtienen

para los distintos modos W^k y Ψ^k , y el desfase espacial ψ , son

$$W_t^k = \frac{1}{Re^*} \Delta W^k + F^k = W_{yy}^k - \left(\frac{k2\pi}{\Lambda} \right)^2 W^k + \frac{\partial}{\partial y} [W\Psi_x]^k - ik \left(\frac{2\pi}{\Lambda} \right) [W\Psi_y]^k, \quad (\text{B.1.4})$$

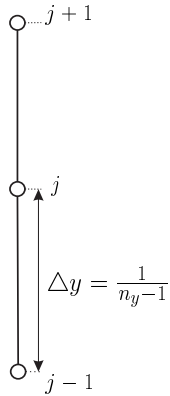
$$W^k = \Delta \Psi^k = \Psi_{yy}^k - \left(\frac{k2\pi}{\Lambda} \right)^2 \Psi^k, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{B.1.5})$$

$$\psi_t = -\frac{2K}{\tanh(2K)} \left\{ \left[G(y) \cdot \Psi^0(y, t) \right]_{y=0} + \int_0^1 G'(y) \cdot \Psi^0(y, t) \cdot dy \right\} \quad (\text{B.1.6})$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y=0 \left\{ \begin{array}{l} k=0 \left\{ \begin{array}{l} W_y^0 = 0, \\ \Psi_y^0 = 0, \end{array} \right. \\ k \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \Psi^k = 0, \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k \neq 2r \Rightarrow \Psi_y^k = 0, \\ k = 2r \Rightarrow \Psi_y^k = \frac{i}{2} e^{-i2K\psi} \quad \text{donde } r = \frac{K\Lambda}{2\pi}, \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{B.1.7}) \\ \\ y=1 \left\{ \begin{array}{l} \Psi^k = 0, \\ W^k = 0, \end{array} \right. \end{aligned}$$

Este sistema se discretiza en sentido vertical, y , utilizando una malla equiespaciada de n_y puntos (siendo n_y un número impar) y las derivadas se aproximan usando diferencias centradas de segundo orden de forma que, para una función $\Phi(y)$, se tiene que:



$$y(j) = \Delta y \cdot (j - 1) \quad j = 1, \dots, n_y \quad (\text{B.1.8})$$

$$\Delta y = \frac{1}{n_y - 1} \quad (\text{B.1.9})$$

$$\Phi(y(j)) \simeq \Phi_j \quad (\text{B.1.10})$$

$$\Phi_y(y(j)) \simeq \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}}{2\Delta y} \quad (\text{B.1.11})$$

$$\Phi_{yy}(y(j)) \simeq \frac{\Phi_{j+1} + \Phi_{j-1} - 2\Phi_j}{\Delta y^2} \quad (\text{B.1.12})$$

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones (B.1.4)-(B.1.5) se obtienen las ecuaciones de la evolución de la vorticidad y la función de corriente discretizadas espacialmente:

$$\frac{dW_j^k}{dt} = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{\Delta y^2} W_{j+1}^k + \frac{1}{\Delta y^2} W_{j-1}^k - \left(\frac{2}{\Delta y^2} + \left(\frac{k2\pi}{\Lambda} \right)^2 \right) W_j^k \right] + F_j^k, \quad (\text{B.1.13})$$

$$\text{siendo} \quad F_j^k = \left[\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_j^k,$$

$$W_j^k = \frac{1}{\Delta y^2} \Psi_{j+1}^k + \frac{1}{\Delta y^2} \Psi_{j-1}^k - \left(\frac{2}{\Delta y^2} + \left(\frac{k2\pi}{\Lambda} \right)^2 \right) \Psi_j^k, \quad (\text{B.1.14})$$

$$\text{con } k = 0, 1, \dots, N \quad \text{y} \quad j = 2, \dots, n_y - 1,$$

y las condiciones de contorno (B.1.7) se convierten en

$$y = 0 \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \left\{ \begin{array}{l} W_0^0 = W_2^0, \\ \Psi_0^0 = \Psi_2^0, \end{array} \right. \\ \\ k \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1^k = 0, \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k \neq 2r \Rightarrow \Psi_0^k = \Psi_2^k, \\ k = 2r \Rightarrow \Psi_0^k = \Psi_2^k - \frac{ie^{-i2K\psi}}{\Delta y} \end{array} \right. \text{ donde } r = \frac{K\Lambda}{2\pi}, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{B.1.15})$$

$$y = 1 \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{n_y}^k = 0, \\ W_{n_y}^k = 0, \end{array} \right.$$

Las condiciones de contorno discretizadas en $y = 0$ involucran a los modos W^k y Ψ^k en un punto auxiliar fuera del dominio, $j = 0$ ($y = -\Delta y$). Estas nuevas incógnitas se eliminan introduciendo las condiciones de contorno de $y = 0$ (B.1.15) en las ecuaciones (B.1.13)-(B.1.14) particularizadas en $j = 1$ ($y = 0$), obteniéndose las siguientes ecuaciones

$$k = 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dW_1^0}{dt} = \frac{1}{Re} \left[\frac{2}{\Delta y^2} W_2^0 - \frac{2}{\Delta y^2} W_1^0 \right] + F_1^0, \\ W_1^0 = \frac{2}{\Delta y^2} \Psi_2^0 - \frac{2}{\Delta y^2} \Psi_1^0, \end{array} \right. \quad (\text{B.1.16})$$

$$k \neq 0, \begin{cases} k \neq 2r \Rightarrow W_1^k = \frac{2}{\Delta y^2} \Psi_2^k, \\ k = 2r \Rightarrow W_1^k = \frac{2}{\Delta y^2} \Psi_2^k - \frac{i}{\Delta y^3} e^{-i2K\psi}, \end{cases} \quad (\text{B.1.17})$$

Por último, para discretizar la integral presente en la ecuación de evolución del desfase espacial (3.2.3) se utiliza un método de Simpson compuesto

$$\int_0^1 G'(y) \cdot \Psi^0(y, t) dy \simeq \frac{\Delta y}{3} \left[G'_1 \cdot \Psi_1^0 + \sum_{j=2,2}^{n_y-1} 4 \cdot G'_j \cdot \Psi_j^0 + \sum_{j=3,2}^{n_y-2} 2 \cdot G'_j \cdot \Psi_j^0 + G'_{n_y} \cdot \Psi_{n_y}^0 \right],$$

y, haciendo uso de la condición de contorno $\Psi_{n_y}^0 = 0$, la ecuación (3.2.3) discretizada resulta ser finalmente

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{-2K}{\tanh(2K)} \left\{ G_1 \cdot \Psi_1^0 + \frac{\Delta y}{3} \left[G'_1 \cdot \Psi_1^0 + \sum_{j=2,2}^{n_y-1} 4 \cdot G'_j \cdot \Psi_j^0 + \sum_{j=3,2}^{n_y-2} 2 \cdot G'_j \cdot \Psi_j^0 \right] \right\}. \quad (\text{B.1.18})$$

Las ecuaciones anteriores, una vez eliminados los puntos auxiliares ($j = 0$), se pueden escribir en forma matricial como:

Si $k \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{dW^k}{dt} \\ \frac{dW_2^k}{dt} \\ \frac{dW_3^k}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dW_{n_y-2}^k}{dt} \\ \frac{dW_{n_y-1}^k}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\beta'_k & \alpha' & & & & \\ \alpha' & -\beta'_k & \alpha' & & & \\ & \alpha' & -\beta'_k & \alpha' & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha' & -\beta'_k & \alpha' \\ [0] & & & \alpha' & -\beta'_k & \alpha' \\ & & & & \alpha' & -\beta'_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_k} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} W_2^k \\ W_3^k \\ \vdots \\ W_{n_y-2}^k \\ W_{n_y-1}^k \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}^k} + \underbrace{\begin{pmatrix} F_2^k \\ F_3^k \\ \vdots \\ F_{n_y-2}^k \\ F_{n_y-1}^k \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}^k} + \alpha' W_1^k \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}}, \quad (\text{B.1.20})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} W_2^k \\ W_3^k \\ \vdots \\ W_{n_y-2}^k \\ W_{n_y-1}^k \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}^k} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\beta_k & \alpha & & & & \\ \alpha & -\beta_k & \alpha & & & \\ & \alpha & -\beta_k & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & -\beta_k & \alpha \\ [0] & & & \alpha & -\beta_k & \alpha \\ & & & & \alpha & -\beta_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_k} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Psi_2^k \\ \Psi_3^k \\ \vdots \\ \Psi_{n_y-2}^k \\ \Psi_{n_y-1}^k \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Psi}^k},$$

$$W_1^k = 2\alpha\Psi_2^k + g^k.$$

donde las incógnitas son los modos de Fourier $W_j^k(t)$ y $\Psi_j^k(t)$, con $j = 1, \dots, n_y - 1$ para $k = 0$ y $j = 2, \dots, n_y - 1$ para $k = 1, \dots, N$, y el desfase espacial $\psi(t)$, y los parámetros α , α' , β_k , β'_k y g^k que aparecen en las ecuaciones vienen dados por

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\Delta y^2}, & \alpha' &= \frac{\alpha}{Re}, \\ \beta_k &= \frac{2}{\Delta y^2} + \left(\frac{2\pi k}{\Lambda}\right)^2, & \beta'_k &= \frac{\beta_k}{Re}, \\ g^k &= \begin{cases} k \neq 2r \Rightarrow 0, \\ k = 2r \Rightarrow -\frac{ie^{-i2K\psi}}{\Delta y^3}. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.1.21})$$

B.1.1. Cálculo numérico del término no lineal

Para completar el sistema de ecuaciones (B.1.19)-(B.1.20) hay que indicar como se calculan los términos no lineales,

$$F_j^k = \left[\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_j^k \quad (\text{B.1.22})$$

con $j = 1, \dots, n_y - 1$ para $k = 0$, y $j = 2, \dots, n_y - 1$ para $k = 1, \dots, N$,

a partir de la función de corriente y la vorticidad,

$$\begin{aligned} \Psi_j^k(t), \quad W_j^k(t), \\ \text{con } j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \text{ para } k = 0, \text{ y } j = 2, \dots, n_y - 1 \text{ para } k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (\text{B.1.23})$$

Para ello se utiliza primero la última expresión de (B.1.20), que permite calcular los valores de W_1^k para $k = 1, \dots, N$, y las condiciones de contorno (B.1.15), que proporcionan:

$$\begin{aligned} \Psi_1^k = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, N, \quad \text{y} \\ \Psi_{n_y}^k = 0, \quad W_{n_y}^k = 0, \quad \text{para } k = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (\text{B.1.24})$$

A continuación, se obtienen las derivadas

$$[\Psi_x]_j^k = \frac{ik2\pi}{\Lambda} \Psi_j^k, \quad [W_y]_j^k = \frac{W_{j+1}^k - W_{j-1}^k}{\Delta y}, \quad [\Psi_y]_j^k = \frac{\Psi_{j+1}^k - \Psi_{j-1}^k}{\Delta y}, \quad (\text{B.1.25})$$

$$\text{con } j = 2, \dots, n_y - 1 \quad \text{y} \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad \text{y} \quad (\text{B.1.26})$$

$$[W_x]_j^k = \frac{ik2\pi}{\Lambda} W_j^k(t), \quad (\text{B.1.27})$$

$$\text{con } j = 1, \dots, n_y - 1 \quad \text{y} \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{B.1.28})$$

que se pasan a físico usando la Transformada inversa de Fourier

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_j, \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_j, \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_j, \quad \text{con } j = 2, \dots, n_y - 1, \quad \text{y} \\ \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_j, \quad \text{con } j = 1, \dots, n_y - 1, \end{aligned} \quad (\text{B.1.29})$$

y que permiten calcular el término no lineal en físico:

$$F_j = \left[\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_j \quad \text{con } j = 2, \dots, n_y - 1. \quad (\text{B.1.30})$$

Para el cálculo del término no lineal en $j = 1$ ($y = 0$), se utilizan las condiciones de contorno (3.2.4) del fondo del contenedor

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{j=1} = -\sin(2K(x - \psi)), \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{j=1} = 0, \quad (\text{B.1.31})$$

que permiten escribir F_1 como

$$F_1 = \left[\frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_1 = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_1 \sin(2K(x - \psi(t))). \quad (\text{B.1.32})$$

Aplicando ahora la transformada discreta de Fourier a $F_j(x, t)$ se completa el cálculo del término no lineal buscado, $F_j^k(t)$.

A la hora de multiplicar las derivadas de la vorticidad y de la función de corriente se usa la regla $\frac{2}{3}$ para evitar el efecto del “aliasing” (Canuto *et al.* [2], Gottlieb & Orszag [19]) y el error cometido al truncar la serie de Fourier se estima usando la expresión siguiente:

$$\varepsilon_{trunc} = \max_{1 \leq j \leq n_y - 1} \left(\sqrt{\frac{\sum_{k=N+1}^{3N/2} (|F_j^k|)^2}{\sum_{k=0}^N (|F_j^k|)^2}} \right). \quad (\text{B.1.33})$$

B.1.2. Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante

El problema discretizado completo se puede escribir como un sistema de $(n_y - 2)(N + 1) + 1$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} W_j^k \\ \psi \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} W_j^k \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{cases} j = 1, \dots, n_y - 1 \text{ para } k = 0 \\ j = 2, \dots, n_y - 1 \text{ para } k = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (\text{B.1.34})$$

donde el segundo miembro $\mathbf{J} \begin{pmatrix} W_j^k \\ \psi \end{pmatrix}$ se calcula a partir de $\begin{pmatrix} W_j^k \\ \psi \end{pmatrix}$ del siguiente modo:

1. Se resuelven los sistemas lineales tridiagonales de (B.1.19) y (B.1.20) obteniéndose la función de corriente Ψ_j^k , con $j = 1, \dots, n_y - 1$ para $k = 0$ y $j = 2, \dots, n_y - 1$ para $k = 1, \dots, N$.
2. A partir de la última ecuación de (B.1.20) se calculan W_1^k , con $k = 1, \dots, N$, y se obtienen los términos no lineales F_j^k , con $j = 1, \dots, n_y - 1$ para $k = 0$ y $j = 2, \dots, n_y - 1$ para $k = 1, \dots, N$, tal y como se indicó en el apartado B.1.1.
3. Por último, se calcula \mathbf{J} multiplicando y sumando las matrices que aparecen en los términos de la derecha de las primeras ecuaciones de (B.1.19)-(B.1.20) y de la última de (B.1.19).

Una vez expresado el problema anterior como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias la aplicación de un determinado esquema de integración temporal es directa y se realiza en el apartado siguiente.

B.2. Integración temporal

Con el fin de evitar problemas de estabilidad, los esquemas numéricos que se van a utilizar para integrar en el tiempo las ecuaciones diferenciales ordinarias deducidas en el apartado anterior serán implícitos para la parte que proviene de los términos viscosos y explícitos para los términos no lineales.

- **Ecuaciones de un paso simple. Esquema de Euler de paso Δt**

El primer esquema de integración temporal que se considera consiste en aplicar un método de Euler explícito para los términos no lineales e implícito para los términos viscosos (Lambert [30]). Para ilustrar este esquema lo aplicamos a la siguiente ecuación diferencial ordinaria modelo

$$\frac{du}{dt} = f_i(u) + f_e(u), \quad (\text{B.2.1})$$

donde f_i y f_e representan, respectivamente, las partes del segundo miembro que se van a integrar de forma implícita y explícita. El esquema resultante es

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f_e(u^n) + \Delta t f_i(u^{n+1}), \quad (\text{B.2.2})$$

donde

$$u^n = u(t_n), \quad u^{n+1} = u(t_{n+1}) \quad \text{y} \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t. \quad (\text{B.2.3})$$

Las características de estabilidad lineal de este sistema se estudian usando el sistema linealizado (Lambert [30])

$$\frac{du}{dt} = \lambda_i u + i \lambda_e u, \quad (\text{B.2.4})$$

con λ_i y λ_e reales. El factor de amplificación para este esquema resulta ser

$$\left| \frac{u^{n+1}}{u^n} \right| = \left| \frac{1 + \Delta t i \lambda_e}{1 - \Delta t \lambda_i} \right|, \quad (\text{B.2.5})$$

que se representa en la figura B.1.

- **Esquema de dos etapas.**

El esquema anterior es de orden Δt . Para aumentar el orden de manera sencilla se dan dos subpasos en cada paso, el esquema utilizado, aplicado a la ecuación modelo (B.2.1), es el siguiente

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{\Delta t}{2} f_e(u^n) + \frac{\Delta t}{2} f_i(u^{n+\frac{1}{2}}), \quad (\text{B.2.6})$$

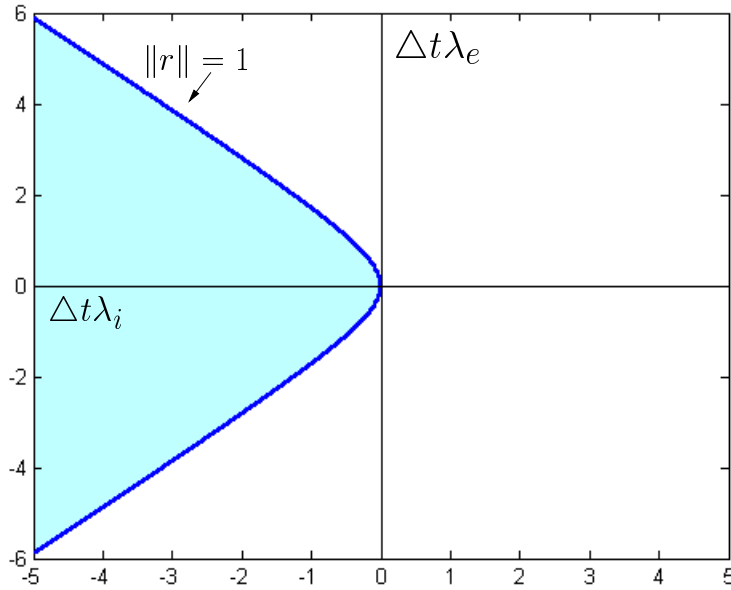


Figura B.1: Región de estabilidad del esquema de Euler de paso simple (B.2.2).

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f_e(u^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2} (f_i(u^n) + f_i(u^{n+1})). \quad (\text{B.2.7})$$

Este nuevo esquema es de orden (Δt^2) y sus características de estabilidad lineal vienen dadas por el factor de amplificación

$$|r| = \left| \frac{u^{n+1}}{u^n} \right| = \left| \frac{1 + \frac{\lambda_i \Delta t}{2}}{1 - \frac{\lambda_i \Delta t}{2}} + \frac{i \lambda_e \Delta t \left(1 + \frac{i \lambda_e \Delta t}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_i \Delta t}{2}\right)^2} \right|, \quad (\text{B.2.8})$$

que se representa en la figura B.2. Este es el esquema utilizado en la mayoría de los cálculos presentados en el capítulo 4.

B.3. Estimación de los errores.

En esta sección se comprueba numéricamente que el orden de los errores causados por la discretización temporal (Δt^2) y la espacial en y , (Δy^2) .

La diferencia entre la solución exacta del problema (3.2.1)-(3.2.4) y la solución numérica puede escribirse como

$$\text{Sol. exacta}(t(n+1)) - \text{Sol. numérica}^{n+1} \sim \Delta t^q + \dots,$$

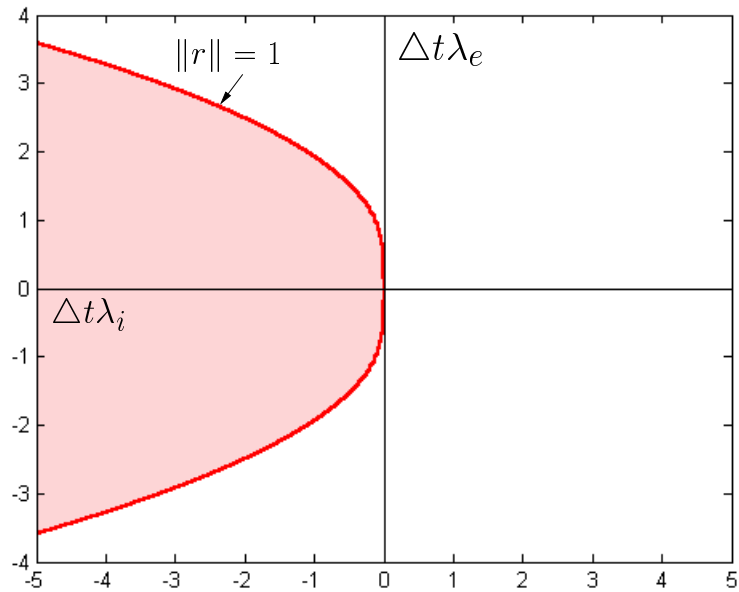


Figura B.2: Región de estabilidad del esquema de dos etapas.

Para hallar el valor de q , se integran las ecuaciones (B.1.19)-(B.1.20) hasta un tiempo final $t = 1$ con distintos pasos de tiempo $\frac{\Delta t}{2^0}, \frac{\Delta t}{2^1}, \dots, \frac{\Delta t}{2^p}, \dots$, etc, y se calculan los cocientes

$$\log_2 \frac{\|\text{Sol}_p - \text{Sol}_{p-1}\|}{\|\text{Sol}_{p+1} - \text{Sol}_p\|} \quad (\text{B.3.1})$$

que cumplen

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\log_2 \frac{\|\text{Sol}_p - \text{Sol}_{p-1}\|}{\|\text{Sol}_{p+1} - \text{Sol}_p\|} \right] = q \quad (\text{B.3.2})$$

Para un Δt_0 inicial igual a $4 \cdot 10^{-2}$, tomando $n_y = 501$ y $N = 32$, se obtiene una sucesión de valores q que, como se observa en la tabla B.3, tiende a 2 para el esquema de dos etapas.

p	Paso de tiempo= Δt	Nº pasos de programa	q
0	$\Delta t_0 = 4,10^{-2}$	25	
1	$\frac{\Delta t_0}{2} = 2 \cdot 10^{-2}$	50	2.0847
2	$\frac{\Delta t_0}{2^2} = 1 \cdot 10^{-2}$	100	1.9432
3	$\frac{\Delta t_0}{2^3} = 5 \cdot 10^{-3}$	200	1.9848
4	$\frac{\Delta t_0}{2^4} = 2,5 \cdot 10^{-3}$	400	1.9957
5	$\frac{\Delta t_0}{2^5} = 1,25 \cdot 10^{-3}$	800	1.9968
6	$\frac{\Delta t_0}{2^6} = 6,25 \cdot 10^{-4}$	1600	2.0034
7	$\frac{\Delta t_0}{2^7} = 3,125 \cdot 10^{-4}$	3200	1.9981
8	$\frac{\Delta t_0}{2^8} = 1,5625 \cdot 10^{-4}$	6400	1.9983
9	$\frac{\Delta t_0}{2^9} = 7,8125 \cdot 10^{-5}$	12800	

Tabla B.3.- Estimación del error de la discretización temporal

• **Estimación del error de la discretización en y .**

Para comprobar que el error global debido a la discretización en dirección y es del orden de Δy^2 , se repite la operación hecha en el apartado anterior, pero dividiendo ahora entre 2 el tamaño de la malla en dirección y .

$$\text{Solución exacta}(t(n+1)) - \text{Solución numérica}^{n+1} \sim \Delta y^s + \dots$$

p	Nº intervalos malla y	Nº pasos programa	s
0	30	1000	
1	60	”	1.9916
2	120	”	1.9979
3	240	”	1.9994
4	480	”	1.9999
5	960	”	1.9999
6	1920	”	

Tabla B.4.- Estimación del error de la discretización espacial vertical

Para esta comprobación se ha tomado

$$n_{y_0} = 31, \quad \Delta y_0 = \frac{1}{n_{y_0} - 1}, \quad \Delta t = 10^{-3}, \quad N = 32,$$

y el valor de s obtenido es 2 (ver tabla B.4).

Por tanto, el error global del método numérico utilizado se comporta como

$$\text{Sol. exacta} - \text{Sol. numérica} \sim O(\Delta t^2) + O(\Delta y^2) + \dots$$

B.4. Condiciones iniciales

Como primera condición inicial para iniciar las integraciones del sistema (3.2.1)-(3.2.4) se tomó una que cumple la relación entre vorticidad y función de corriente (3.2.2) y todas las condiciones de contorno (3.2.4):

$$\begin{aligned}
 Si \quad k = 0 & \left\{ \begin{array}{l} \Psi^0(y) = y^4 - 6y^2 + 5, \\ W^0(y) = 12(y^2 - 1), \end{array} \right. \\
 Si \quad k \neq 0 & \left\{ \begin{array}{l} Si \quad k \neq 2r \left\{ \begin{array}{l} \Psi^k(y) = e^{-k}(y^4 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{3}{2}y^2), \\ W^k(y) = e^{-k}(12y^2 - 15y + 3) - \left(\frac{k2\pi}{\Lambda}\right)^2 \Psi^k(y), \end{array} \right. \\ Si \quad k = 2r \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{2r}(y) = e^{-i2K\psi} \frac{i}{2}(y^4 - 2y^3 + y) + e^{-2r}(y^4 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{3}{2}y^2), \\ W^{2r}(y) = e^{-i2K\psi} \frac{i}{2}12y(y-1) - \left(\frac{2r2\pi}{\Lambda}\right)^2 e^{-i2K\psi} \frac{i}{2}(y^4 - 2y^3 + y), \\ + e^{-2r}(12y^2 - 15y + 3) - \left(\frac{2r2\pi}{\Lambda}\right)^2 e^{-2r}(y^4 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{3}{2}y^2). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (B.4.1)
 \end{aligned}$$

A la hora de continuar las soluciones del problema (3.2.1)-(3.2.4) para valores crecientes del parámetro Re , se toma como condición inicial el valor de la solución obtenida para un Re inmediatamente anterior más una pequeña perturbación aleatoria. Dicha perturbación se ha elegido de manera que cumpla la ecuación (3.2.2) y las condiciones de contorno homogéneas y es de la forma:

$$\begin{aligned}
 Si \quad k = 0 & \left\{ \begin{array}{l} \Psi^0(y)_{pert.} = \varepsilon\alpha_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right), \\ W^0(y)_{pert.} = \frac{\partial^2 \Psi^0(y)_{pert.}}{\partial y^2}, \end{array} \right. \\
 Si \quad k \neq 0 & \left\{ \begin{array}{l} \Psi^k(y)_{pert.} = \varepsilon\alpha_k e^{-\frac{k}{10}} \left\{ y^2(y-1)[1 - 2(y-1) + e^{i2\pi\beta_k y}(y-1)^2] \right\}, \\ W^k(y)_{pert.} = \frac{\partial^2 \Psi^k(y)_{pert.}}{\partial y^2} - \left(\frac{k2\pi}{\Lambda}\right)^2 \Psi^k(y)_{pert.}, \end{array} \right. \quad (B.4.2)
 \end{aligned}$$

donde α_k y β_k son números aleatorios en el intervalo $[0, 1]$.

Apéndice C

Cálculo de los exponentes de Lyapunov

Con objeto de determinar con mayor precisión el carácter de algunas de las bifurcaciones encontradas en las simulaciones numéricas del sistema (3.2.1)-(3.2.4) y para poder confirmar la aparición de comportamientos caóticos se han calculado los dos primeros exponentes de Lyapunov de algunas de sus soluciones.

El método numérico utilizado consiste en aplicar sucesivamente el proceso de reortonormalización de Gram-Schmidt a la solución del sistema linealizado en torno a la solución particular que se analiza, almacenar los factores de renormalización obtenidos y con ellos calcular los exponentes de Lyapunov (Wolf *et al.* [58]).

Si escribimos la solución del problema (3.2.1)-(3.2.4) en un instante t como

$$(\psi(t), \mathbf{x}(t)), \quad \text{con} \quad \mathbf{x} = \left(\Psi_1^0, W_1^0, \dots, \Psi_j^k, W_j^k, \dots, \Psi_{n_y-1}^N, W_{n_y-1}^N \right), \quad (\text{C.0.1})$$

los pasos que se siguen para obtener los dos primeros exponentes de Lyapunov son los siguientes:

1. Primero se integra el sistema (3.2.1)-(3.2.4) durante un tiempo suficientemente largo, t_0 , para eliminar posibles comportamientos transitorios.
2. A continuación se calcula $(\psi(T), \mathbf{x}(T))$ integrando (3.2.1)-(3.2.4) durante un periodo de tiempo T y usando como condición inicial la solución en t_0 , $(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0))$. Y, para obtener dos soluciones linealmente independientes del sistema linealizado sin tener que generar un nuevo código, lo que se hace es integrar (3.2.1)-(3.2.4) dos veces más, empezando en las

condiciones iniciales

$$(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0) + \epsilon_1 \mathbf{x}_{p_1}), \quad |\epsilon_1| \ll 1, \quad (\text{C.0.2})$$

$$(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0) + \epsilon_2 \mathbf{x}_{p_2}), \quad |\epsilon_2| \ll 1, \quad (\text{C.0.3})$$

(donde \mathbf{x}_{p_1} y \mathbf{x}_{p_2} son dos perturbaciones linealmente independientes) y durante un tiempo T , obteniendo como resultado

$$(\psi_1(T), \mathbf{x}_1(T)) \quad \text{y} \quad (\psi_2(T), \mathbf{x}_2(T)).$$

3. Para eliminar el exponente de Lyapunov nulo que se debe a la invarianza del sistema (3.2.1)-(3.2.4) frente a traslaciones en x , esto es, frente a transformaciones del tipo

$$x \rightarrow x + c, \quad \psi \rightarrow \psi + c, \quad (\text{C.0.4})$$

es necesario comparar las soluciones en el mismo valor de ψ ($\psi(T)$). Para ello se aplica a la solución $(\psi_1(T), \mathbf{x}_1(T))$ la traslación en x

$$\psi_1(T) \rightarrow \psi(T) \quad \text{y} \quad x \rightarrow x + (\psi(T) - \psi_1(T)), \quad (\text{C.0.5})$$

que se traduce en multiplicar los modos $k = 0, 1, \dots, N$ de Fourier de la función de corriente y de la vorticidad por los factores

$$e^{-i2\pi k \frac{\psi(T) - \psi_1(T)}{\Lambda}}. \quad (\text{C.0.6})$$

Y lo mismo para la segunda solución $(\psi_2(T), \mathbf{x}_2(T))$.

4. Una vez eliminada la invarianza frente a traslaciones, se aplica el proceso de reortonormalización de Gram-Schmidt a los vectores

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{x}_1(T) - \mathbf{x}(T) \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{x}_2(T) - \mathbf{x}(T),$$

y se obtiene

$$\mathbf{d}_1^* = \frac{\mathbf{d}_1}{m_1} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_2^* = \frac{\mathbf{d}_2 - \langle \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_1^* \rangle \mathbf{d}_1^*}{m_2},$$

donde $m_1 = \|\mathbf{d}_1\|$ y $m_2 = \|\mathbf{d}_2 - \langle \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_1^* \rangle \mathbf{d}_1^*\|$.

5. Se repite el proceso desde el punto 2 usando como perturbaciones \mathbf{d}_1^* y \mathbf{d}_2^* .

Una vez repetido este proceso un número de veces suficientemente grande, los dos primeros exponentes de Lyapunov se calculan como

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (m_1(T) m_1(2T) \cdots m_1(nT))}{nT}, \quad (\text{C.0.7})$$

$$\lambda_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (m_2(T) m_2(2T) \cdots m_2(nT))}{nT}. \quad (\text{C.0.8})$$

Para todo este proceso, ϵ_1 , ϵ_2 y T se deben escoger de modo que \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 se mantengan pequeños y así asegurar su similitud con la solución del sistema linealizado.

Nomenclatura

Mayúsculas

A Amplitud compleja adimensional de la onda superficial que se propaga hacia la izquierda con velocidad la velocidad de fase $\frac{\Omega}{k}$

B Amplitud compleja adimensional de la onda superficial que se propaga hacia la derecha con la velocidad de fase

$C = \frac{\nu}{\sqrt{gh^3}}$ Inverso del número de Reynolds basado en la altura del líquido

$F(y)$ Autofunción de la posición de la superficie libre del problema lineal

K Número de onda de la onda superficial excitada paraméricamente

N Número de modos de Fourier en dirección x que describen el esquema numérico

$Q(y)$ Autofunción de la presión total del problema lineal

R Radio del depósito

Re Número de Reynolds efectivo para el flujo medio no oscilatorio

$T = \frac{\sigma}{\rho gh^2}$ Inverso del número de Bond

$U(y)$ Autofunción de la velocidad horizontal del problema lineal

$V(y)$ Autofunción de la velocidad vertical del problema lineal

Minúsculas

$\mathbf{v}(x, y, t)$ Distribución euleriana de velocidades

c.c complejo conjugado

a Amplitud del forzamiento paramétrico

$f(x, t)$ Posición de la superficie libre del depósito

h	Altura del fluido en reposo
k	Número de onda de la onda superficial excitada paraméricamente
l	Anchura del depósito
n_y	Número de puntos del mallado vertical del esquema numérico
$q(x, y, t)$	Distribución de presiones totales
$r = \frac{k\Lambda}{2\pi}$	Relación entre el alargamiento del contenedor y la longitud de onda superficial
t	Variable temporal
$u(x, y, t)$	Componente horizontal de la velocidad
$v(x, y, t)$	Componente vertical de la velocidad
x	Coordenada horizontal del problema
y	Coordenada vertical del problema

Griegas

δ	Diferencia (adimensional) entre la mitad de la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del sistema
$\eta = \frac{y-f}{\sqrt{C}}$	Variable de la capa límite superficial
$\Lambda = \frac{2\pi R}{h}$	Alargamiento del depósito
μ	Amplitud adimensional del forzamiento paramérico
ν	Viscosidad cinemática del fluido
Ω	Frecuencia natural del sistema
$\omega = \frac{\omega_{ex}}{2}$	Mitad de la frecuencia de excitación del depósito
ω_{ex}	Frecuencia de excitación del depósito
ϕ	Desfase temporal de la onda superficial
Ψ	Función de corriente
ψ	Desfase espacial de la onda superficial
ρ	Densidad del fluido
σ	(1) Tensión superficial del fluido. (2) $\sigma = \tanh(k)$

ε Amplitud adimensional de las ondas superficiales

$\xi = \frac{y}{\sqrt{C}}$ Variable de la capa límite del fondo

W Vorticidad

Subíndices

0 Solución en primera aproximación

1 Primera corrección

2 Segunda corrección

η Derivada respecto a η

τ Derivada respecto a τ

ξ Derivada respecto a ξ

t Derivada respecto a t

x Derivada respecto a x

y Derivada respecto a y

Superíndices

*

Correspondiente a la capa límite del fondo

s Correspondiente al flujo medio no oscilatorio

Otras notaciones

\bar{U} Complejo conjugado de U

\tilde{U} Función U evaluada en la capa límite superficial

Índice de figuras

2.1. Depósito anular y simplificación bidimensional	10
2.2. Distintas regiones de análisis: (a) Capa límite de Stokes en el fondo del depósito. (b) Zona casi-potencial. (c) Capa límite de la superficie libre.	14
2.3. Esquemas de las capas límite: (a) Capa límite oscilatoria de Stokes en el fondo del depósito. (b) Capa límite de la superficie libre.	15
2.4. Parte imaginaria de los modos no viscosos para $C = 10^{-5}$ y $T = 7.27 \cdot 10^{-4}$. . .	19
2.5. Parte real de los modos no viscosos hasta orden C (—) y hasta orden \sqrt{C} (.....), para $C = 10^{-5}$ y $T = 7.27 \cdot 10^{-4}$	20
2.6. Parte real de los tres primeros modos viscosos, $n = 1, 2, 3$, para $C = 10^{-5}$	23
3.1. Valores de $\alpha_1\sqrt{C}$ (—) y α_2C (.....) en función del número de onda K , con $C = 10^{-5}$ y $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$	45
3.2. Valores de α_1 (—) y α_2 (.....) en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$	46
3.3. Valores del parámetro α_3 en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$.	46
3.4. Valores típicos del parámetro α_4 en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$	47
3.5. Valores típicos del parámetro α_5 en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$	47
3.6. Valores típicos del parámetro α_7 en función del número de onda K , con $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$	48
3.7. Bifurcación: (a) supercrítica y (b) subcrítica de las soluciones estacionarias, en función del cuadrado del parámetro de forzamiento reescalado, m^2 , para $K = 2$, $T = 7.3 \cdot 10^{-4}$, $C = 1 \cdot 10^{-5}$	52
3.8. Dominio Σ del problema	55
4.1. Líneas de corriente del estado estacionario estable con $\psi' = 0$ para $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$ ($K = 4$) para los valores indicados de Re . Las líneas verticales gruesas correspon- den a los nodos de las ondas superficiales.	70

4.2. Líneas de corriente y mapa de vorticidad (rojo= vorticidad > 0, azul= vorticidad < 0) del estado estacionario básico correspondiente a ondas superficiales de tipo estático, para $Re = 260$, $K = 2.37$ y $r = 1$ ($\Lambda = 2.65$). Líneas gruesas verticales indican lo mismo que en 4.1. 71

4.3. Diagramas de estabilidad de la solución básica. (——) indica la bifurcación de Hopf del sistema de ecuaciones completo y (.....) indica la bifurcación del sistema de ecuaciones del flujo medio desacoplado de las ondas superficiales (con $\psi' = 0$). 72

4.4. Diagrama de bifurcación del sistema para $K = 4$ y $r = 1$ ($\Lambda = \frac{\pi}{2}$). 72

4.5. Primeros exponentes de Lyapunov, λ_1 (negro), λ_2 (azul) en función de Re para la solución existente para bajos números de Re , con $K = 2.37$ y $r = 1$ 73

4.6. Primeros exponentes de Lyapunov, λ_1 (negro), λ_2 (azul) en función de Re para la solución existente a bajos números de Re , y para la solución oscilatoria ($Re^c < Re < Re^1$) que aparece tras la bifurcación de Hopf en Re^c , con $K = 2.37$ y $r = 1$. 73

4.7. Diagrama de bifurcación del sistema para $K = 2.37$ y $r = 1$ ($\Lambda = 2.65$). 74

4.8. Primeros exponentes de Lyapunov en función de Re (con $K = 2.37$, $r = 1$) para (i) las soluciones oscilatorias con $Re^c < Re < Re^1$ y $Re^1 < Re < Re^2$ (λ_1 en negro y λ_2 en azul) que aparecen tras la bifurcación de Hopf en Re^c , (ii) la solución para $Re > Re^3$ y la oscilatoria para $Re^5 < Re < Re^3$, (λ_1 en magenta y λ_2 en rojo). 75

4.9. Primer exponente de Lyapunov λ_1 en función de Re (con $K = 2.37$, $r = 1$) para las soluciones existentes a altos números de Re : Ondas viajeras de tipo casi-estático ($Re < Re^4$) y ondas de tipo estático ($Re > Re^4$) tras la bifurcación de rotura de paridad ($Re = Re^4$) 76

4.10. Mapas de vorticidad de las soluciones oscilatorias, para valores equiespaciados del tiempo, existentes para $K = 2.37$, $r = 1$ y (a) $Re = 290$ y (b) $Re = 400$ 77

4.11. Líneas de corriente y mapa de vorticidad del flujo medio, respecto a ejes móviles, producido por una onda viajera de tipo casi-estático con $Re = 325$ 78

4.12. Líneas de corriente y mapa de vorticidad de la solución estacionaria estable para $Re = 850$ que aparece en el diagrama de bifurcación 4.7, correspondiente a una onda superficial de tipo estático. 79

4.13. Diagrama de bifurcación del sistema para $K = 2.37$ y $r = 2$ 80

4.14. Primeros exponentes de Lyapunov en función de Re (con $K = 2.37$, $r = 2$) para: (i) las soluciones oscilatorias con $Re^c < Re < Re^1$ y $Re^1 < Re < \widehat{Re}^2$ (λ_1 en azul y λ_2 en verde) que aparecen tras la bifurcación de Hopf en Re^c , (ii) la solución estacionaria para $Re > \widehat{Re}^3$, (λ_1 en magenta y λ_2 en rojo). 81

4.15. Líneas de corriente y mapa de vorticidad de la solución estacionaria estable para $Re = 418$ que aparece en el diagrama de bifurcación 4.13, correspondiente a una onda superficial de tipo estático.	82
4.16. Líneas de corriente y mapa de vorticidad de la solución estacionaria respecto a unos ejes móviles con velocidad $\frac{d\psi}{dt} = \text{cte.}$ correspondiente a una onda viajera de tipo casi-estático, con $Re = 640$	83
4.17. ψ' y ψ en función de t de atractores más complejos para $K = 2.37$, $r = 2$ en los valores indicados de Re	84
4.18. Máximos y mínimos de ψ' en función del Re para los atractores más complejos, con $K = 2.37$, $r = 2$	84
4.19. Exponentes de Lyapunov para algunos atractores caóticos, con $K = 2.37$, $r = 2$	85
B.1. Región de estabilidad del esquema de Euler de paso simple (B.2.2).	112
B.2. Región de estabilidad del esquema de dos etapas.	113

Bibliografía

- [1] BATCHELOR G.K., *An introduction to fluid dynamics.*, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [2] CANUTO C., HUSSAINI M.Y., QUARTERONI A., and ZANG A.T., *Spectral methods in fluid dynamics.*, Springer-Verlag, 1988.
- [3] CHRISTODOULIDES P. and DIAS F., *Resonant gravity-capillary interfacial waves*, J. Fluid Mech. **265** (1994), 303–343.
- [4] CILIBERTO S., DOUADY S., and FAUVE S., *Investigating space-time chaos in faraday instability by means of the fluctuations of the driving acceleration.*, Europhys. Lett. **15** (1991), 23–28.
- [5] CILIBERTO S. and GOLLUB J., *Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves*, Journal of Fluids Mechanics **158** (1985), 381–398.
- [6] CRAIK A.D.D., *The drift velocity of water waves.*, Journal of Fluid Mechanics **116** (1982), 187–205.
- [7] CRAIK A.D.D. and ARMITAGE J.G., *Faraday excitation, hysteresis and mode competition in a narrow rectangular wave tank.*, Fluid Dynamics Research **15** (1995), 129–143.
- [8] CROSS M.C. and HOHENBERG P.C., *Pattern formation outside of equilibrium.*, Rev. Modern Phys. **65** (1993), 851–1112.
- [9] DAVEY A. and STEWARTSON S., *On three-dimensional packets of surface waves*, Proc. R. Soc. London A **338** (1974), 101–110.
- [10] DOUADY S., *Experimental study of the faraday instability*, J. Fluid Mech. **221** (1990), 383–409.
- [11] DOUADY S., FAUVE S., and THUAL O., *Oscillatory phase modulation of parametrically forced surface waves*, Europhys. Lett. **10** (1989), 309–315.
- [12] EZERSKII A.B., KOROTIN P.I., and RABINOVICH M.I., *Random self-modulation of two-dimensional structures on a liquid surface during parametric excitation*, Zh. Eksp. Theor. Fiz. **14** (1983), 129–131.
- [13] EZERSKII A.B., RABINOVICH M.I., REUTOV V.P., and STAROBINETS I.M., *Spatio temporal chaos in the parametric excitation of a capillary ripple*, Zh. Eksp. Theor. Fiz. **91** (1986), 2070–2083.

- [14] FARADAY M., *On the forms and the states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **121** (1831), 319–340.
- [15] FAUVE S., *Parametric instabilities*, Dynamics of Nonlinear and Disordered Systems. World Scien. Ser. on Nonlinear Scien. Series B **6** (1995), 67–115.
- [16] FAUVE S., DOUADY S., and THUAL O., *Drift instabilities in cellular patterns*, J. Phys. II **1** (1991), 311–322.
- [17] FENG Z.C. and SETHNA P.R., *Symmetry breaking bifurcations in resonant surface waves*, Journal of Fluids Mechanics **199** (1989), 495–518.
- [18] GOLLUB J.P. and MEYER C.W., *Symmetry-breaking instabilities on a fluid surface*, Physica D **6** (1983), 337–346.
- [19] GOTTLIEB D., ORSZAG S.A., *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, Mac Graw-Hill, 1978.
- [20] HENDERSON D.M. and MILES J.W., *Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line*, J. Fluid Mech. **275** (1994), 285–299.
- [21] HIGUERA M., VEGA J.M., and KNOBLOCH E.K., *Interaction of nearly-inviscid, multi-mode Faraday waves and mean flows*, Coherent Structures in Complex Systems. Springer-Verlag (2001), 328–337.
- [22] HIGUERA M., VEGA J.M., and KNOBLOCH E.K., *Coupled amplitude-streaming flow equations for nearly inviscid Faraday waves in small aspect ratio containers*, J. Nonlinear Sci., en imprenta (2002).
- [23] ISKANDARANI M. and LIU P.L.F., *Mass transport in three-dimensional water waves*, J. Fluid Mech. **231** (1991), 417–437.
- [24] KEOLIAN R., TURKEVICH L.A., PUTTERMAN S.J., RUDNICK I., and RUDNICK J.A., *Subharmonic sequences in the Faraday experiment: departures from period doubling*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), 1133–1136.
- [25] KEVORKIAN J., COLE J.D., *Perturbation methods in applied mathematics*, Springer-Verlag, 1981.
- [26] KIYASHKO S.V., KORZINOV L.N., RAVINOVICH M.I., and TSIMRING L.S., *Rotating spirals in a Faraday experiment*, Phys. Rev E **54** (1996), 5037–5040.
- [27] KNOBLOCH E.K., MARTEL C., and VEGA J.M., *Coupled amplitude-mean flow equations for nearly inviscid parametrically driven flows*, To appear in Ann. N.Y.Acad.Sci (2002).
- [28] KNOBLOCH E.K. and VEGA J.M., *Nearly-inviscid Faraday waves*, In press, in a volume in honor of Jerry Marsden (2002).
- [29] KUDROLLI A. and GOLLUB J.P., *Patterns and spatio-temporal chaos in parametrically forced surface waves: A systematic survey at large aspect ratio*, Physica D **97** (1997), 133–154.
- [30] LAMBERT J.D., *Numerical methods for ordinary differential systems*, Wiley & Sons, 1995.

- [31] LIU A.K. and DAVIS S.H., *Viscous attenuation of mean drift in water waves*, J. Fluid Mech. **81** (1977), 63–84.
- [32] LONGUET-HIGGINS M.S., *Mass transport in water waves*, Phil. Trans. Roy. Soc. A **245** (1953), 535–581.
- [33] MARTEL C. and KNOBLOCH E., *Damping of nearly-inviscid water waves*, Phys. Rev. E **56** (1997), 5544–5548.
- [34] MARTEL C., KNOBLOCH E., and VEGA J.M., *Dynamics of counterpropagating waves in parametrically forced systems*, Physica D **137** (2000), 94–123.
- [35] MARTEL C. and VEGA J.M., *Finite size effects near the onset of the oscillatory instability*, Nonlinearity **9** (1996), 1129–1171.
- [36] MASHAYEK F. and ASHGRIZ N., *Nonlinear oscillations of drops with internal circulation*, Phys. Fluids **10** (1998), 1071–1082.
- [37] MCGOLDRICK L.F., *On Wilton ripples: a special case of resonant interactions*, J. Fluid Mech. **42** (1970), 193–200.
- [38] MILES J.W., *Nonlinear Faraday resonance*, J. Fluid Mech. **146** (1984), 285–302.
- [39] MILES J.W., *On Faraday waves*, J. Fluid Mech. **248** (1993), 671–683.
- [40] MILES J.W. and HENDERSON D., *Parametrically forced surface waves*, Annual Review Fluid Mechanics **22** (1990), 143–165.
- [41] MILEWSKI P.A. and BENNEY D.J., *Resonant interactions between vortical flows and water waves. Part I: Deep water*, Studies Appl Math. **94** (1995), 131–167.
- [42] NEWELL A.C., *Solitons in mathematics and physics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- [43] NICOLÁS J.A., RIVAS D., and VEGA J.M., *On the steady streaming flow due to high-frequency vibration in nearly inviscid liquid bridges*, J. Fluid Mech. **354** (1998), 147–174.
- [44] NICOLÁS J.A. and VEGA J.M., *Weakly nonlinear oscillations of axisymmetric liquid bridges*, J. Fluid Mech. **328** (1996), 95–128.
- [45] NICOLÁS J.A. and VEGA J.M., *A note on the effect of surface contamination in water wave damping*, J. Fluid Mech. **410** (2000), 367–373.
- [46] PERKO L., *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [47] PHILLIPS O.M., *The dynamics of the upper ocean*, Cambridge Univ. Press., 1977.
- [48] PIERCE R.D. and KNOBLOCH E., *On the modulational stability of traveling and standing waterwaves*, Phys. Fluids **6** (1994), 1177–1190.
- [49] RAYLEIGH J.W.S., *On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **175** (1883), 1–21.
- [50] RILEY M., *Steady streaming*, Annu. Rev. Fluid Mech. **33** (2001), 43–65.

- [51] SCHLICHTING H., *Berechnung ebener periodischer grenzschichtströmungen*, Phys. Z. **33** (1932), 327–335.
- [52] SIMONELLI F. and GOLLUB J.P., *Surface wave mode interactions: effects of symmetry and degeneracy*, Journal of Fluids Mechanics **199** (1989), 471–494.
- [53] THUAL O., DOUADY S., and FAUVE S., *Parametric instabilities. In Instabilities and Nonequilibrium Structures II*, E. Tirapegui and Villaroel Eds. Kluwer (1989), 227–237.
- [54] TRUFILLARO N., RAMSHANKAR R., and GOLLUB J.P., *Order-disorder transition in capillary ripples*, Phys. Rev. Lett. **62** (1989), 422–425.
- [55] TRULSEN K. and MEI C.C., *Modulation of three resonating gravity-capillary waves by a long gravity wave*, J. Fluid Mech. **290** (1995), 345–376.
- [56] TRULSEN K. and MEI C.C., *Effect of weak wind and damping on Wilton’s ripples*, J. Fluid Mech. **335** (1997), 141–163.
- [57] VEGA J.M., KNOBLOCH E., and MARTEL C., *Nearly inviscid Faraday waves in annular containers of moderately large aspect ratio*, Physica D **154** (2001), 313–336.
- [58] WOLF A., SWIFT J.B., SWINNEY H.L., and VASTANO J.A., *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica D **16** (1985), 285–317.
- [59] YAN B., INGHAM D.B., and MORTON B.R., *Streaming flow induced by an oscillating cascade of circular cylinders*, J. Fluid Mech. **252** (1993), 147–171.