

# ELÉCTRODO DE TERRA EM SERPENTINA

COPPER SERPENTINE GROUND ELECTRODE

**Bruno Rodrigues\*** ([bafrodrigues@hotmail.com](mailto:bafrodrigues@hotmail.com)) e

**António M. R. Martins\*\*** ([amrmartins@ipg.pt](mailto:amrmartins@ipg.pt))

## RESUMO

Este artigo tem como principal objectivo a divulgação de uma aplicação informática para calcular a resistência de difusão de eléctrodos de terra em serpentina, a qual é representada analiticamente por uma sinusóide. No cálculo da resistência utilizou-se o chamado método da matriz, desenvolvido por S. Meliopoulos. Como a distribuição de potencial no solo obedece à equação de Laplace, o eléctrodo de terra é previamente discretizado em pontos-fonte de corrente eléctrica, situados no eixo dos condutores. O modelo discreto é representável por um sistema de equações lineares que permite calcular as correntes dos pontos-fonte, arbitrando uma tensão no eléctrodo. A corrente deste é a soma das correntes pontuais, e a lei de Ohm permite calcular facilmente a resistência de terra. Os resultados permitem observar que a resistência da serpentina diminui com o aumento do número de máximos, com o aumento da profundidade de enterramento e com o aumento da largura da vala. Conclui-se da utilidade da serpentina, comparada com o simples cabo horizontal, já que possui resistência de terra menor.

Palavras-Chave: Resistência de terra, Método Matriz.

## ABSTRACT

The main goal of this article is the calculation of the ground resistance of a copper serpentine ground electrode, analytically represented by a sine curve. In this calculation, the so-called Matrix Method, developed by S. Meliopoulos, was used. Since the ground potential obeys, the ground electrode is previously distributed along point current sources in the center of the conductors. The discrete model is represented by a linear equations system, in order to calculate the point current sources, controlling the electrode's tension. This current is the sum of the pontual currents and Ohm's law enables the simple calculation of the ground resistance. The results show that the copper serpentine ground resistance is smaller with increasing depth or wide of the trench. It was concluded that this electrode, compared with a horizontal buried wire, has lower ground resistance.

Keywords: Land Resistance, Matrix Method.

\* Licenciado em Engenharia Informática pela Escola Superior de Tecnologia e Gestão da Guarda – Instituto Politécnico da Guarda.

\*\* Licenciado em Electrónica e Telecomunicações pela Universidade de Aveiro. Trabalhou 5 anos na Portugal Telecom, onde foi responsável pela instalação e manutenção de multiplexadores de primeira hierarquia, pelo Projecto de Redes Locais e Regionais. Mestre em Teoria dos Sistemas pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, sendo Professor-Adjunto da ESTG do IPG desde 1997.

## 1. INTRODUÇÃO

A importância atribuída à protecção de instalações, equipamentos e segurança de pessoas, perante a ocorrência de perturbações eléctricas, tem vindo a acentuar-se nas últimas duas décadas. A segurança e o desempenho de um sistema eléctrico devem-se em grande parte ao sistema de protecção, o qual permite à corrente fluir para a terra de protecção durante um curto-circuito, numa situação de desequilíbrio e também numa descarga atmosférica. A resistência do eléctrodo de terra terá de ser baixa, caso contrário a tensão nos condutores ligados ao referido eléctrodo terá um potencial demasiado elevado, podendo originar danos na estrutura a proteger, bem como aos seus utilizadores.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

“As dimensões de um sistema de terra são muito menores que a profundidade de penetração, à frequência da rede e para a resistividade dos solo comumente encontradas, pelo que uma análise em corrente contínua é suficiente para a generalidade das aplicações (Meliopoulos 1988)”. Esta aproximação resulta num modelo electroconduutivo estático, representado por uma equação de Laplace relativa ao potencial eléctrico.

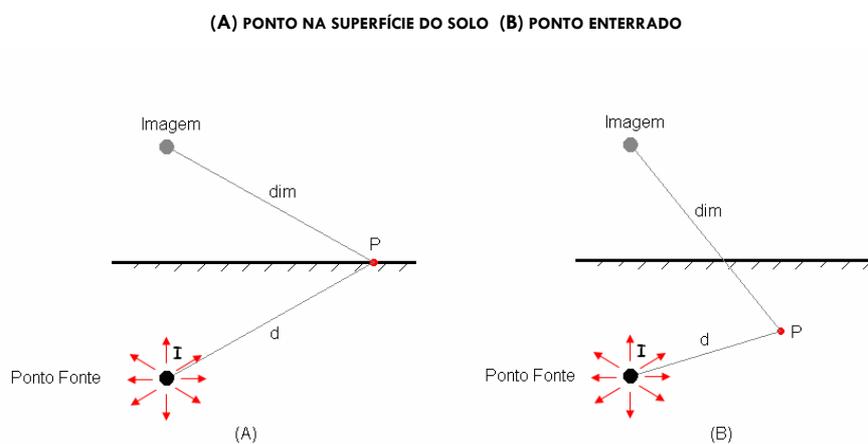


Figura 1: FONTE PONTUAL DE CORRENTE, SUA IMAGEM E PONTO DE INTERESSE

Sendo o solo um condutor semi-infinito, o eléctrodo mais simples a considerar é uma fonte pontual de corrente. Sendo um caso teórico, é, contudo, fundamental, pelo que se ilustra na figura 1. Usando coordenadas cilíndricas para o laplaciano, obtém-se (Meliopoulos 1988):

$$\nabla^2 v(R, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 V(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad 1)$$

O potencial no ponto P, solução de 1), é (Meliopoulos, 1988):

$$V = \frac{\rho I}{4\pi} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{\text{dim}} \right) \quad 2)$$

Onde:

V - potencial em P, criado pelo ponto-fonte;

$\rho$  - resistividade do terreno;

d - distância cartesiana do ponto-fonte ao ponto P;

dim - distância cartesiana da imagem do ponto-fonte ao ponto P.

I - corrente debitada pelo ponto-fonte.

No caso da figura 1 A, a distância do ponto P ao ponto-fonte é igual à distância ao ponto-imagem, o que não acontece no caso da figura 1 B, em que ambas as distâncias são claramente diferentes.

A equação 2) pode ser apresentada de outro modo:

$$V = k_{i,j} I \quad 3)$$

Em que:

$$k_{i,j} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{\text{dim}} \right) \quad 4)$$

O parâmetro  $k$  contém os índices  $i$  e  $j$  em que o primeiro representa o ponto onde se calcula o potencial e o segundo ponto-

fonte de corrente. Uma análise dimensional do referido parâmetro mostra que este tem as dimensões de uma resistência ( $\Omega m \cdot m^{-1} = \Omega$ ).

$K_{i,j}$  poderá, assim, ser designado por resistência entre o par de pontos  $i$  e  $j$ . A equação 3) será então a bem conhecida lei de Ohm  $V = k_{i,j} I$ .

Este modelo teórico pode ser utilizado para um eléctrodo real, tal como uma vareta de terra, desde que “o condutor seja dividido em pequenos segmentos (Meliopoulos 1988)”. Supõe-se então que “a corrente debitada pela superfície de qualquer segmento pode ser substituída por uma fonte pontual de corrente, localizada no seu ponto central (Meliopoulos, 1988)”. A figura 2 ilustra uma discretização, propositadamente com poucos pontos, a fim de facilitar a exposição.

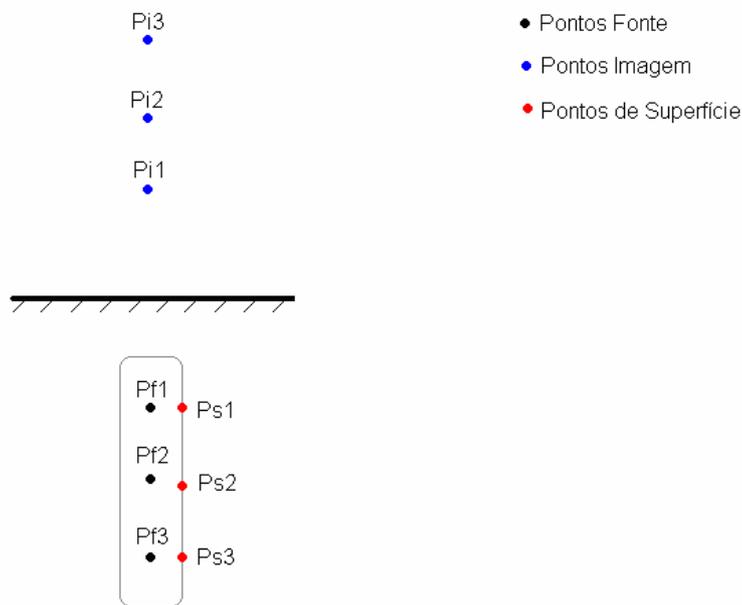


FIGURA 2: DISCRETIZAÇÃO DE UMA VARA EM 3 PONTOS FONTE

De seguida calcula-se o potencial  $V_1$  num ponto superficial usando o teorema da sobreposição, que afirma que o potencial num ponto é a soma das contribuições de todos os pontos-fonte. Assim, para o ponto superficial 'Ps1' tem-se:

$$V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + R_{13}I_3 \quad 5)$$

Sendo  $R_{11}$  a resistência entre o ponto de superfície Ps1 e o ponto fonte Pf1,  $R_{12}$  a resistência entre o ponto de superfície Ps1 e o ponto fonte Pf2 e analogamente para  $R_{13}$ . O percurso das três correntes, entre estes pontos, é feito dentro do eléctrodo, cuja resistividade é nula, o que não inibe Meliopoulos de usar o valor da resistividade do solo no cálculo da resistência.

Aplicando o mesmo princípio aos restantes pontos, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + R_{13}I_3 \\ V_2 &= R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + R_{23}I_3 \\ V_3 &= R_{31}I_1 + R_{32}I_2 + R_{33}I_3 \end{aligned} \quad 6)$$

Geralmente, os sistemas de terra são construídos com condutores de cobre. Devido à alta conductividade deste material, todo o sistema de terra está praticamente ao mesmo potencial. Então, a tensão em todos os segmentos é igual pelo que se tem  $V_1=V_2=V_3=V$  (Meliopoulos, 1988). Arbitrando um valor para estes potenciais, resolve-se o sistema obtendo-se o valor das três correntes. Note-se que as resistências entre pontos dependem da colocação destes para um mesmo solo, pelo que são parâmetros calculáveis usando a equação 4). O número de pontos à superfície é igual ao número de pontos-fonte garantindo um sistema de 3 equações às 3 correntes debitadas pelos pontos-fonte. A corrente total que sai do eléctrodo será a soma das três e a resistência de difusão do eléctrodo será, pela lei de Ohm:

$$R = \frac{V}{I_{Total}} \quad 7)$$

O método é generalizável a um número qualquer de pontos.

### 3. PROGRAMAMAÇÃO E AFERIÇÃO

#### 3.1 Programação

Para fazer o cálculo da resistência, foi desenvolvida uma aplicação informática, dividida em três fases: Pré-processamento, processamento e pós-processamento.

##### 3.1.1 Fase de pré-processamento

Consiste em construir três matrizes onde se guardam as coordenadas (abscissas, ordenadas e cotas) dos pontos-fonte, dos pontos de superfície e dos pontos-imagem.

Na matriz dos pontos-fonte guardam-se os valores das abscissas e das ordenadas na primeira e segunda coluna, respectivamente. As cotas são guardadas na terceira coluna da matriz.

A matriz dos pontos imagem é construída de forma semelhante à matriz dos pontos-fonte, mas com a diferença de que o valor das cotas é simétrico.

A matriz dos pontos de superfície é também construída de forma semelhante à matriz dos pontos-fonte, mas serão alteradas as ordenadas. Por exemplo, para eléctrodos verticais, as cotas correspondem ao raio da vara.

##### 3.1.2 Fase de Processamento

Nesta fase pretende-se efectuar o cálculo da intensidade total. A intensidade total é a soma de todas as intensidades debitadas pelos pontos fonte. Estas intensidades são as incógnitas do sistema de equações lineares que vão ser calculadas através do método de eliminação de Gauss, usando as matrizes anteriormente preenchidas.

O valor atribuído ao potencial à superfície foi de  $10^4$ volt.

##### 3.1.3 Fase de Pós-Processamento

Aqui calcula-se a resistência de difusão, pela lei de Ohm, dividindo o potencial arbitrado pela corrente total. O cálculo de potenciais em pontos à superfície do terreno é também executado neste bloco do programa.

#### 3.2 Aferição

Para aferir o modelo matemático e o programa, torna-se necessário definir o espaçamento conveniente entre pontos. Considerou-se uma vareta de terra com três metros de comprimento e

8 mm de raio, enterrada num solo de resistividade  $1000\Omega\text{m}$ . Os resultados foram comparados com a fórmula de Dwight (Dwight, 1936) para varas de terra:

$$R = \frac{\rho}{2\pi\ell} \ln \frac{2\ell}{a} \quad 8)$$

Em que:

$R$  - resistência da vara de terra

$\rho$  - resistividade do solo

$\ell$  - comprimento do eléctrodo

$a$  - raio do eléctrodo

Com as dimensões e resistividade referidas, esta fórmula fornece o valor de  $351\Omega$ . Pela simulação computacional e variando o número de pontos, obtivemos a Tabela 1.

Tabela 1

Distância entre pontos fonte (m)	Número de pontos	Resistência calculada pela aplicação ( $\Omega$ )	Erro para 351 $\Omega$ (%)
0,1	30	525	+50
0,01	300	332	-5
0,001	3000	331	-6

Uma separação entre pontos fonte de um decímetro está, obviamente, fora de hipótese. Com os pontos fonte separados por um centímetro ou um milímetro, o resultado é quase igual, mas o tempo de cálculo aumenta consideravelmente no último caso, pelo que se escolheu uma distância de um centímetro entre pontos-fonte.

#### 4. ELÉCTRODO EM SERPENTINA

O cálculo da resistência de terra de um eléctrodo em serpentina (figura 3) é obtido pelo método anteriormente descrito. A serpentina, colocada horizontalmente numa vala, é aproximada a uma sinusóide.

A diferença no cálculo da resistência de terra, em relação à vara vertical, reside na fase de pré-processamento. A discretização para obter os pontos-fonte obedeceu às seguintes regras:

- o As abcissas dos pontos-fonte foram espaçadas de um centímetro até preencherem o comprimento da vala;
- o As ordenadas foram obtidas usando a função:  
 $y = A \sin(\omega x)$ ;
- o  $A$  – metade da largura da vala;
- o  $\omega$  – frequência angular;

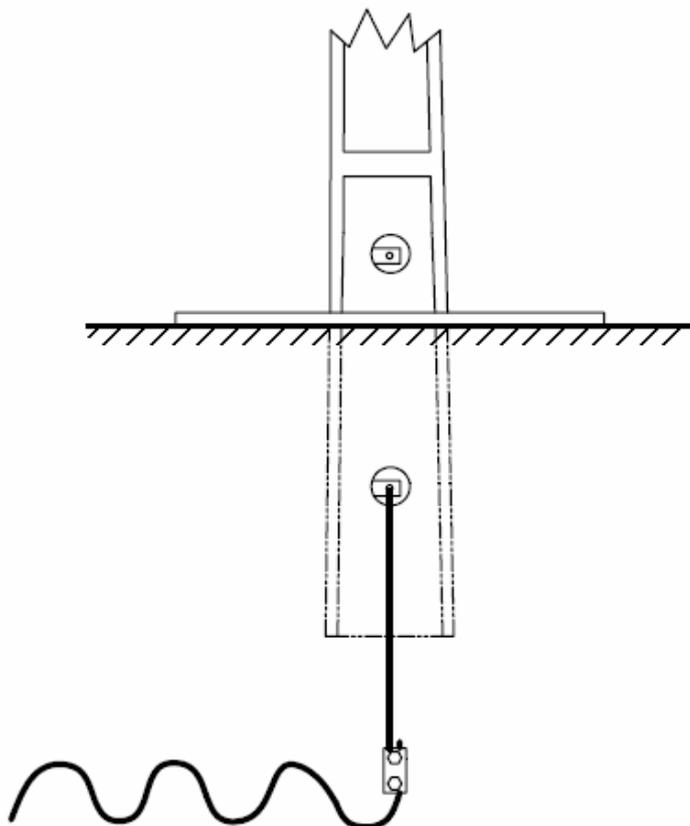


Figura 3: Eléctrodo em serpentina (EDP 2005)

O cálculo da frequência angular exige o conhecimento do período. Este obtém-se dividindo o comprimento da vala pelo número de máximos que o utilizador define.

As cotas dos pontos-fonte são constantes, visto que a serpentina está enterrada horizontalmente, e iguais à profundidade de enterramento.

Quanto à matriz dos pontos de superfície, é de referir que para uma geração mais fácil se considerou convenientemente colocar estes pontos na superfície superior do cabo, como se mostra na figura 4.

Desta forma, a matriz é semelhante à anterior, embora as cotas sejam alteradas somando o valor do raio do cabo à cota do ponto-fonte.

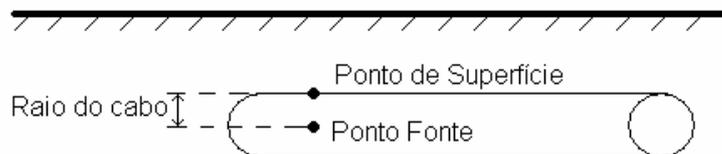


Figura 4: ponto fonte e respectivo ponto de superfície do eléctrodo em serpentina

A matriz dos pontos-imagem é igual à matriz dos pontos-fonte, exceptuando o valor das cotas, que é simétrico.

## 5. RESULTADOS

Realizaram-se várias simulações, cujos resultados estão sumarizados nas tabelas seguintes:

- a) Parâmetros: resistividade do solo -  $1000 \Omega m$ ; diâmetro do condutor - 35mm; comprimento da vala - 10m; largura da vala - 0,4m; profundidade da vala - 0,5m.

A resistência diminui com o aumento do número de máximos para as mesmas dimensões da vala, como se verifica na tabela 2:

Tabela 2

Nº de Máximos	Resistência ( $\Omega$ )
10	116
20	107
30	103

- b) Parâmetros: resistividade do solo -  $1000 \Omega m$ ; diâmetro do condutor - 35mm; comprimento da vala - 10m; largura da vala - 0,4m; número de máximos – 10.

Tabela 3

Profundidade da vala (m)	Resistência ( $\Omega$ )
0,5	116
0,8	110
1,2	105

A resistência diminui com o aumento de profundidade do enterramento como se verifica na tabela 3.

c) Parâmetros: resistividade do solo -  $1000\Omega m$ ; diâmetro do condutor - 35mm; comprimento da vala - 3m; profundidade da vala - 0,5m; número de máximos - 10.

Tabela 4

Largura da vala (m)	Resistência ( $\Omega$ )
0,4	229
1	182
2	147

A resistência diminui com o aumento da largura da vala, como se verifica na tabela 4.

Na procura de uma validação para o algoritmo usado para a serpentina, e dada a dificuldade em encontrar solos homogêneos na região da Guarda, comparou-se este eléctrodo com uma chapa horizontal e com um cabo enterrado horizontalmente. Considerou-se uma vala com 10m de comprimento, 0,4m de largura e 0,5m de profundidade num terreno com resistividade de  $1000\Omega m$ . Discretizou-se uma serpentina com vinte máximos e diâmetro do cabo de 35mm. A simulação computacional obteve um valor para a resistência de  $107\Omega$ . Se na mesma vala se enterrasse um cabo horizontal com 10 m de comprimento e com o mesmo calibre, a resistência deste, pela fórmula de Dwight relativa a cabos horizontais (Dwight, 1936), seria de  $130\Omega$ , um valor mais elevado do que aquele obtido com a serpentina, como seria de esperar. A serpentina reduziu a resistência do cabo horizontal em 17,7 %. No outro extremo, se enterrarmos uma chapa de cobre com as dimensões da vala -  $10 \times 0,4 m^2$  - e uma espessura igual ao calibre do cabo usado na serpentina, obtinha-se pela fórmula de Rudenberg (Rudenberg, 1945), uma resistência de  $93\Omega$ , mais baixa do que o valor da serpentina.

Como o valor da resistência da vara horizontal é um majorante e o valor da resistência da chapa é um minorante, podemos observar que

o valor da resistência da serpentina se encontra dentro do intervalo  $93 < 107 < 130 \Omega$ , como seria de esperar.

## 6. CONCLUSÕES

Na discretização de eléctrodos de terra, os pontos-fonte devem estar espaçados de um centímetro, aproximadamente.

A resistência da serpentina diminui com:

O aumento do número de máximos para as mesmas dimensões da vala;

O aumento de profundidade de enterramento;

O aumento da largura da vala;

O uso de uma serpentina, no lugar de um cabo horizontal, permite baixar a resistência deste em 18 %, aproximadamente, notando-se, assim, a sua utilidade.

## BIBLIOGRAFIA

Meliopoulos, Sakis (1998), *Power System Grounding and Transients*, Marcell Dekker Inc, Nova York.

EDP (2005), *Guia técnico de terras*, edição própria, Lisboa.

Dwight, H. (1936), "Calculation of Resistances to Ground", *Electrical Engineering*, December, p.1319.

Rüdenberg, Reinhold (1945), "Grounding Principles and Practice", *Electrical Engineering*, vol.64, nº 1, Janeiro, p.1.