二個の中性 K-粒子系の 一般化された Bell の不等式

内山富美代*

筑波大学、物理工学系

３０５　茨城県つくば市

目次

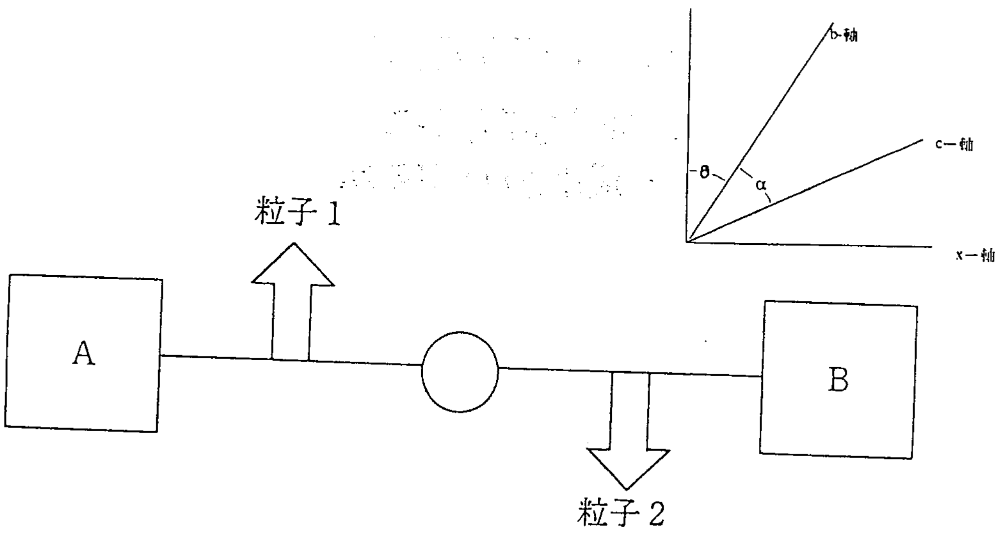
*電話 0298-53-4993, ファクス　0298-53-5205

1　序

量子力学の結果には少々人間の日常の体験にピッタリとはあわない面（直感的にではあるが）がある。その一つが Bell の不等式である。次の章を読むと解るように Bell の不等式は我々の日常的体験からは当然みたされなければならない不等式だと思われるが量子の世界はこの不等式を無視してしまうのである。

2　Bell の不等式とは？

Bell という人が考えついた不等式であって次のような考察をすることから導き出された。2 個の電子がスピン 0 の状態から放出されたとしよう。（例えばπ^0 が 2 個の電子に崩壊した場合等）角運動量の保存則によりこの 2 個の電子のスピンはお互いに逆向きである。角運動量の保存則は空間の基本的な性質から導かれるもので破れた例はない。



図

図の左に出る電子（粒子 1 ）のスピンの向きをを a 方向, b 方向, c 方向 と三回にわたり測定し、a 方向は + の向きに観測され, b 方向は - の向き, c 方向は + の向きに観測された場合を (a +, b -, c +) と書く。この時右側に出る電子（粒子 2 ） は観測をしなくとも (a -, b +, c -) であることは角運動量の保存則によりわかる。実験から予測されるすべての

観測結果は$8(=2^3)$通りあって、リストにすると表のようになる。

粒子1	粒子2	対の分布数
(a+、b+、c+)	(a−、b−、c−)	N_1
(a+、b+、c−)	(a−、b−、c+)	N_2
(a+、b−、c+)	(a−、b+、c−)	N_3
(a+、b−、c−)	(a−、b+、c+)	N_4
(a−、b+、c+)	(a+、b−、c−)	N_5
(a−、b+、c−)	(a+、b−、c+)	N_6
(a−、b−、c+)	(a+、b+、c−)	N_7
(a−、b−、c−)	(a+、b+、c+)	N_8

表　観測されるスピンの向きの組み合わせ

多くの電子対について何回もこの観測を行った時、8 通りの結果の各々が観測された回数をそれぞれ$N_1, N_2, N_3, \cdots$とする（表の 3 列目）。

観測者 A が $\hat{a}$ 方向のスピンを計って +、観測者 B が $\hat{c}$ 方向のスピンを計って + を得た回数は表より (N_2+N_4) である。従ってその確率を $P(a+;c+)$ とすると、

$$P(a+;c+) = \frac{N_2+N_4}{\sum_i N_i}$$

同様に、観測者 A が $\hat{a}$ 方向のスピンを計って +、観測者 B が $\hat{c}$ 方向のスピンを計って + を得る確率 P(a + ; b +) 及び観測者 A が $\hat{c}$ 方向のスピンを計って +、観測者 B が $\hat{b}$ 方向のスピンを計って + を得る確率 P(b + ; c +) は

$$P(a+;b+) = \frac{N_3+N_4}{\sum_i N_i}$$
$$P(b+;c+) = \frac{N_2+N_6}{\sum_i N_i} \tag{1}$$

$N_i \geq 0$ より、

$$N_2+N_4 \leq (N_3+N_4)+(N_2+N_6)$$

という不等式が当然成り立つ。両辺を$\sum_i N_i$で割って確率に関する不等式

$$P(a+;c+) \leq P(a+;b+) + P(b+;c+) \tag{2}$$

を得る。このような式を Bell の不等式と呼ぶ。

同じロジックを使って同じような不等式を他にも得ることが出来る。この不等式を導くに当たって使用ったことは角運動量の保存則 (2 個の電子のスピンが互いに常に逆向き) と測定回数 N_i が正であるということだけである。

注意を要する点は表のリストは $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ の 3 方向を全部測定した場合についてであるが、Bell の不等式は観測者 A と観測者 B が一回ずつ計 2 回しか測定をしていない場合についてであるということである。

3 量子力学と Bell の不等式

次に (2) 式の中に出てくる確率を量子力学に従って計算してみる。

理解をしやすくするために、z-軸を $\hat{a}$ 方向に取り x-軸方向に角 θ だけ回転して作った軸を $\hat{b}$ の方向とする。$(\hat{b}\cdot\vec{\sigma})$ の固有値 +1 及び −1 に属する固有状態をそれぞれ $|\hat{b}+>$ 及び $|\hat{b}->$ と書き、$\hat{b}$ の + 状態、− 状態と呼ぶ事にする。

$$\hat{b}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから、

$$|\hat{b}+> = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

及び

$$|\hat{b}-> = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

であるので、$\hat{a}$-軸方向の ± 状態を $\hat{b}$ の固有状態で表すと、

$$|\hat{a}+> = \cos\frac{\theta}{2}|\hat{b}+> - \sin\frac{\theta}{2}|\hat{b}-> \tag{3}$$

$$|\hat{a}-> = -sin\frac{\theta}{2}|\hat{b}+> + \cos\frac{\theta}{2}|\hat{b}-> \tag{4}$$

同様に $\hat{b}$ から更に X-軸方向に角 α 回転した$\hat{c}$ 方向での固有状態で表すと、

$$
\begin{aligned}
|\,\hat{b}+>&=\cos\frac{\alpha}{2}\,|\,\hat{c}+>-\sin\frac{\alpha}{2}\,|\,\hat{c}->\\
|\,\hat{b}->&=-\sin\frac{\alpha}{2}\,|\,\hat{c}+>+\cos\frac{\alpha}{2}\,|\,\hat{c}->\\
|\,\hat{a}+>&=\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\,|\,\hat{c}+>-\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\,|\,\hat{c}->\\
|\,\hat{a}->&=-\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\,|\,\hat{c}+>+\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\,|\,\hat{c}->
\end{aligned}
$$

これらの関係式を使って、量子力学で $P(a+;c+)$ を計算する。簡単化のため、角 $\alpha=\theta$ の場合を考える。$\hat{a}$ の方向にスピンを観測者 A が + 方向に観測する確率は$\frac{1}{2}$、その時粒子 2 のスピンは $\hat{a}$ のマイナスの方向を向いている。従って観測者 B が $\hat{c}$ の + 方向に観測する確率は式 (4) より $\hat{a}-$ の中の$\hat{c}+$ の成分の二乗であるので

$$P(a+;c+)=\frac{\sin^2\theta}{2}$$

同様に、

$$
\begin{aligned}
P(a+;b+)&=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{2}\\
P(c+;b+)&=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{2}
\end{aligned}
$$

上式を Bell の不等式 (2) に代入して、

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta\le\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\\
(\sin\theta)^2\le 2(\sin\frac{\theta}{2})^2
\end{aligned}
$$

となる。つまり、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ に対して、Bell の不等式は成り立たない。言い替えると、量子力学的予測は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ に対して Bell の不等式とは両立しないということである。

4 一般化された Bell の不等式

上記の Bell の不等式は 2 電子系についてスピンの相関を使って導いた。スピン量子数を使うかわりに他の保存する量子数を作って同じような Bell の不等式を導くことが出来る。そ

れが一般化された Bell の不等式である。それには中性 K 粒子が都合よい。中性 K 粒子は強い相互作用 (電磁相互作用でなく) をする系が量子力学に従うということを示すために最初に使われた粒子である。質量や内部空間の自由度であるストレンジネス、CP 量子数を前節の $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ の 3 つの異なる量子軸に対応させて導くのである (此処に C は荷電共役、P はパリティー演算子である): ストレンジネス 0 、$CP = 0$ の状態から , (例えば ϕ 粒子の崩壊から) 図 1 の左側に放出された粒子がストレンジネスがプラスの K^0 であれば右側はストレンジネスが マイナスの $\bar{K}^0$ であることが観測せずともストレンジネス保存則よりわかる。又、左側に $CP = +1$ の K 粒子が出れば右側は $CP = -1$ の粒子が出ていることがわかるし、質量を計った場合、片方が m_S ならばもう一方は m_L であることが観測せずともわかるからである。この事を使って前節に示したのと全く同じ思考実験を、量子軸 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ と, 異なる内部量子軸の向きを対応させて行うと中性K粒子についての Bell の不等式を導くことが出来る。具体的には$\hat{a}$ に質量、$\hat{b}$ に CP 、そして $\hat{c}$ にストレンジネスを対応させればBell の不等式は

$$P(m_s, +1) \leq P(m_s, CP+) + P(CP+, +1) \tag{5}$$

となる。$P(m_s, +1)$ は左側の観測者 A が質量を測り m_s を得、右側の観測者 B がストレンジネスを測って、+1 を得る確率である。$P(m_s, CP+)$, $P(CP+, +1)$ についての解釈も同様である。

量子力学で中性K粒子の状態は (K_S, K_L), $(K_0, \bar{K}_0)$ and (K_+, K_-) の 3 通りの固有状態を使っての表し方がある。K_0 and $\bar{K}_0$ は荷電共役でもっとも自然な基底である。

$$C|K_0> = |\bar{K}_0>, \qquad C|\bar{K}_0> = |K_0> \tag{6}$$

K's は擬スカラーで, CP 変換で

$$CP|K_0> = -|\bar{K}_0>, \qquad CP|\bar{K}_0> = -|K_0> \tag{7}$$

従って CP の ± の固有状態は

$$
\begin{aligned}
|K_+> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0> - |\bar{K_0}>) \\
|K_-> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0> + |\bar{K_0}>)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

と書くことが出来る。2 つの質量の固有状態も 1 個のパラメータを使って K_0 と $\bar{K_0}$ の 1 次結合で書ける。

$$
\begin{aligned}
|K_S> &= \eta\{(1+\varepsilon)|K_0> - (1-\varepsilon)|\bar{K_0}>\} \\
|K_L> &= \eta\{(1+\varepsilon)|K_0> + (1-\varepsilon)|\bar{K_0}>\} \\
\eta &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
|K_0> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_+> + |K_->) \\
|\bar{K_0}> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|K_+> + |K->) \\
|K_S> &= \frac{\sqrt{2}}{\eta}[|K_+> \varepsilon|K_->] \\
|K_L> &= \frac{\sqrt{2}}{\eta}[\varepsilon|K_+> + |K_->]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

とも書くことが出来る。2 個の中性 K 粒子のストレンジネス 0 、$CP = -1$ の状態は

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0>_1 |\bar{K_0}>_2 - |\bar{K_0}>_1 |K_0>_2) \tag{11}
$$

である。インデクス　1 と 2 は粒子 1, 粒子 2 を意味する。

又異なる量子固有状態を使って同様に、

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}(|K_L>_1 |K_S>_2 - |K_S>_1 |K_L>_2) \tag{12}
$$

とも、

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}(|K_+>_1 |K_->_2 - |K_->_1 |K_+>_2) \tag{13}
$$

とも書ける。

我々の思考実験では、K_0 と $\bar{K_0}$ の混合する効果を出来るだけ無視出来るくらい小さくする

ために、K_0 と $\bar{K}_0$ が生成された直後にすべての観測を行うものとする。

量子力学の計算法に従って確率を計算すると、上の不等式 (5) は

$$\frac{\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon^*)-|\varepsilon|^2}{1+|\varepsilon|^2}\leq 0$$

これは、現時点での値　$\varepsilon\sim 10^{-3}e^{-i45^\circ}$ であるとすると成立しない。

実際実験をするに当たっては、スピン相関を使う時の電子や陽子の場合と違う点は、中性 K 粒子が安定粒子でなく時間がたつとπ 中間子などに崩壊してしまうということである。そういう事もあって思考実験は簡単であるが実際の実験は困難であることが予想される。