実現測度モーメントGMMによる日経平均株価の連続時間確率ボラティリティ・モデルの推定

著者	石田 功
雑誌名	甲南経済学論集
巻	56
号	3・4
ページ	79-86
発行年	2016-03-30
URL	http://doi.org/10.14990/00001745

甲南経済学論集第56巻第3・4号　2016年3月

〔研究ノート〕

実現測度モーメント GMM による日経平均株価の連続時間確率ボラティリティ・モデルの推定

石　田　　　　功

要旨

本稿は，実現測度モーメント・ベースの GMM 推定により日経平均株価が従う確率仮定のモデルを推定した結果について報告するものである。具体的には，ボラティリティ変動モデルとして Heston モデルを用い，その３つのパラメータと株価ショックとボラティリティ・ショックの負の相関を捉えるレバレッジ・パラメータの推定を行った。結果として，ミーン・リバーティングなボラティリティ変動モデルが得られ，レバレッジ・パラメータも事前の予想通り負の値となったが，特定化検定は Heston モデルを棄却するものであった。

キーワード：確率ボラティリティ，実現測度，高頻度データ，GMM 推定，日経平均株価

JEL Classifications：C22，C58，G17

目次

はじめに

資産価格のボラティリティは，アセット・プライシング，派生資産のプライシングとヘッジ，アセット・アロケーション，金融リスク管理といったファイナンス意思決定においてキーとなる変数である。しかしながら，ボラティリティは直接観測できない潜在変数であるため，その値の推定及び予測がファイナンス理論実装上の課題となる。ボラティリティが従う確率過程のモデルを過去データから推定する統計的方法としてはパラメトリック／ノンパラメトリック，クラシカル／ベイジアン，離散時間／連続時間，さまざまなアプローチが提唱されてきた（例えば，Andersen et al. 2009 参照）。一方で，デリバティブの市場価格から原資産価格のボラティリティを算出するインプライド・ボラティリティの理論も近年大きく発展し，米国 VIX 等のボラティリティ指数の開発やそれら指数をアンダーライングとするボラティリティ・デリバティブの取引所上場につながっている（CBOE 2015）。日本でも日経平均 VI 先物が大阪取引所に上場されている。また，資産価格とインプライド・ボラティリティの両方の時系列データからボラティリティ・モデルを推定する方法も多くの論文で提唱されている（例えば，Aït-Sahalia and Kimmel 2007, Garcia et al. 2011, Ishida et al. 2011）。

本研究は，石田（2014）による，日経平均株価の Heston 型の連続時間確率ボラティリティ・モデル推定の実証分析を若干発展させるものである。具体的には，Corradi and Distaso（2006）（以下 CD）のボラティリティ実現測度ベース GMM 推定に，モーメント条件として実現測度と日次リターンのクロス・モーメントを加え，石田（2014）では推定しなかったレバレッジ・パラメータの推定を行った。この推定手続は Ishida and Nagata（2016）が提案しＳ＆Ｐ 500 データの実証分析に適用したものである。

以下，本稿では，Ⅰで推定対象となる連続時間ボラティリティ変動モデル

とその実現測度ベース GMM による推定について説明し，Ⅱで日経平均株価データへの適用結果を報告し，おわりにで結論を述べる。

I　連続時間ボラティリティ変動モデルとその実現測度モーメント GMM による推定

以下，次の確率微分方程式を満たすジャンプ拡散過程を仮定する：

$$dX_t = mdt + \sqrt{V_t}\,dW_t + dZ_t \tag{1}$$

$$Z_t = \textstyle\sum_{i=1}^{J_t} c_i \tag{2}$$

$$dV_t = \kappa(\varphi - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}\,dB_t \tag{3}$$

$$dZ_t dB_t = \rho dt \tag{4}$$

ここで，単位時間は 1 日，X_t は資産価格（もしくは日経平均株価のような指数）の自然対数，資産価格過程のドリフト m は実数（以下では，0 に等しいものとする），V_t は瞬間分散，W_t, B_t はそれぞれブラウン運動，ρ は両ブラウン運動の相関（レバレッジ），J_t は時間 0 から t までの資産価格のジャンプの回数，c_i は i 番目のジャンプの大きさ（J_t とは独立な，ゼロではない値をとる *i.i.d.* 確率変数）とする。瞬間分散 V_t（潜在変数）が従う式(3)は Heston (1993) モデルで，速さ κ で長期平均 φ に戻る傾向を持ち，ボラティリティのボラティリティは σ により決まる。石田 (2014) ではボラティリティ変動式(3)のパラメータ $\theta \equiv (\kappa, \varphi, \sigma)'$ に焦点を当て，他のパラメータは推定しなかったが，本稿ではレバレッジ・パラメータ ρ も推定対象に加え，$\theta \equiv (\kappa, \varphi, \sigma, \rho)'$ を推定する。

CD に従い，GMM 推定では瞬間分散の 1 日間の累積値（累積分散，integrated variance, IV）

$$IV_t(\theta) \equiv \int_t^{t+\Delta} V_s ds \tag{5}$$

の母集団のモーメント（平均，分散，及び k 次の自己共分散）を用いる。ここで，Δ は 1 日に占める市場の取引時間の比率を表す。式(3)の下では

これらはパラメータ θ の明示的な関数として次のように表すことができる：

$$E[IV_t]=\varphi\varDelta \tag{6}$$

$$Var[IV_t]=\frac{\varphi\sigma^2}{\kappa^3}(e^{-\kappa\varDelta}+\kappa\varDelta-1) \tag{7}$$

$$AC[IV_t,\ k]=\frac{\sigma^2\varphi}{2\kappa^3}(1-e^{-\kappa\varDelta})^2e^{-\kappa(k-\varDelta)},\ k=1,\ \ldots,\ K \tag{8}$$

$$E[r_{t-1,t}IV_t]=\frac{\rho\sigma\varphi}{\kappa^2}(1-e^{-\kappa\varDelta})(1-e^{-\kappa}) \tag{9}$$

式(6)-(8)は CD が用いたモーメントを非取引時間の存在を考慮して修正したもの，式(9)はレバレッジ推定のためのクロス・モーメント（$r_{t-1,t}$ は $t-1$ 時点から t 時点までの資産価格対数リターン）である（式(6)-(9)の導出は Ishida and Nagata (2016) 参照)。

式(6)-(8)の母モーメントにマッチさせる標本モーメントとしては，次式(10)-(13)により定義されるものをあてる：

$$\overline{RM}\equiv\widehat{E[RM_t]}\equiv T^{-1}\textstyle\sum_{t=1}^{T}RM_t \tag{10}$$

$$\widehat{Var[RM_t]}\equiv T^{-1}\textstyle\sum_{t=1}^{T}(RM_t-\overline{RM})^2 \tag{11}$$

$$\widehat{AC(RM_t,\ k)}\equiv T^{-1}\textstyle\sum_{t=1}^{T}(RM_t-\overline{RM})(RM_{t-k}-\overline{RM}) \tag{12}$$

$$\widehat{C(r_{t-1,t},\ RM_t)}\equiv T^{-1}\textstyle\sum_{t=1}^{T}r_{t-1,t}RM_t \tag{13}$$

ここで，T は標本サイズ（観測日数)。RM_t は後述のボラティリティ実現測度（観測可能）で，一定の条件の下で $RM_t\approx IV_t$ となるものである。

$$g(\theta)\equiv\begin{pmatrix} E[IV_t]-\overline{RM} \\ Var[IV_t]-\widehat{Var[RM_t,\ k]} \\ AC[IV_t,\ 1]-\widehat{AC[RM_t,\ 1]} \\ \vdots \\ AC[IV_t,\ K]-\widehat{AC[RM_t,\ K]} \\ E[r_{t-1,t}IV_t]-\widehat{C[r_{t-1,t}IV_t]} \end{pmatrix} \tag{14}$$

と置けば，GMM 推定量は

$$\hat{\theta} \equiv \arg\min_{\theta} g(\theta)' W g(\theta) \tag{15}$$

となる。ただし，ウェイト行列 W は通常の 2 ステップ GMM の場合とは若干異なる（詳細については CD 参照）。

実現測度（realized measures, RM）は，最も単純なものは実現分散，もしくは，実現ボラティリティ（realized variance/volatility。以下，略して RV）と呼ばれる数量で，数分間の短期間の価格変化率の 1 日間の二乗和で定義される。価格ジャンプや価格観測誤差（ノイズ）がない理想的な状況では，個々の短期間変化率の計測期間をゼロに近づけていけば RV は IV に確率収束する。本稿の実証分析では，石田（2014）と同様に，日経平均株価の IV の推定量としてノイズに対してロバストな実現カーネル（realized kernel, RK）とジャンプに対してロバストな実現バイパワーバリエーション（realized bipower variation, RBV）を用いた。各種の RM の定義と性質ついては A·t-Sahalia and Jacod (2014) が詳しくサーベイしているので，そちらを参照されたい。

II　日経平均株価データへの適用結果

日経平均株価のボラティリティ変動モデル式（3）及びレバレッジ・パラメータ ρ を上記の方法により推定した結果を表にまとめた。実現測度 RM のデータとしては，オックスフォード大学 Man Institute の Realized Library サイトからダウンロードした，2000年 1 月 4 日から2015年12月16日までの日次 RV, RBV，RK を用いた（RV，RBV は 5 分変化率ベースのもの。平方根をとった時に％表示になるようにオリジナルのデータを10,000倍した。データの詳細については Heber et al. (2009) を参照）。自己共分散は 2 次まで用いた（$K=2$）。推定値の下段括弧内の値は標準誤差。各列は，RM として RV，RK, RBV それぞれを用いた場合)。石田（2014）と同様に，非取引時間の調整においては，１日の取引時間を５時間とし，昼休みの存在は無視，また，土日・祝日の特別な調整は行わなかった。

ボラティリティ変動モデル（式(３)）のパラメータ κ, φ, σ の推定結果は RV，RK，RBV どれを用いた場合も石田（2014）の結果と大きな差はなかった。本稿の焦点であるレバレッジ・パラメータ ρ については事前の予想通り，負の値が得られた（RV を用いた非取引時間調整なしのケース以外は５％水準で有意)。

表の最下行には J 検定統計量 $J \equiv Tg(\hat{\theta})'W^{-1}g(\hat{\theta})$（自由度１のカイ二乗検定）の値とその p 値を示した。５％水準の J 検定によっては，実現測度のタイプ，取引時間調整の有無にかかわらず，モデルは５％水準で棄却された。なお，すべてのケースで $2\hat{\kappa}\hat{\varphi}-\hat{\sigma}^2<0$ となっており，石田（2014）の結果と同様に，式(３)の瞬間分散がゼロに到達し張り付いてしまう可能性を排除する安定性条件は破られており，結果の解釈には注意が必要である。

表　日経平均株価ボラティティ変動モデル推定結果

	非取引時間調整なし（$\Delta=1$）			非取引時間調整あり		
	RV	RK	RBV	RV	RK	RBV
κ	.1792	.2382	.2672	.2500	.2677	.3214
	(.0975)	(.1037)	(.1277)	(.0829)	(.0793)	(.0935)
φ	1.0629	1.0959	.9283	5.2236	5.3972	4.5969
	(.0377)	(.0429)	(.0374)	(.1924)	(.2177)	(.1933)
σ	.8233	1.0841	1.1032	2.3248	2.7007	2.9084
	(.2864)	(.3111)	(.3630)	(.5035)	(.5179)	(.5839)
ρ	−.3211	−.3742	−.3793	−0.1624	−0.1817	−0.1790
	(.1762)	(.1533)	(.1657)	(.0602)	(.0545)	(.0563)
J	8.7928	8.1554	7.4562	5.6380	4.7002	3.909
（p 値）	(.0030)	(.0043)	(.0063)	(.0176)	(.0302)	(.0480)

おわりに

本稿では，日経平均株価の連続時間ボラティリティ変動モデルのレバレッジを含むパラメータの実現測度モーメント GMM による推定結果を報告した。ボラティリティ変動のモデルとしては Heston モデルを用いたが，*J* 検定はこのモデル棄却し，また，パラメータ推定値はボラティリティ過程の安定性条件を満たさないものであった。日経平均株価のジャンプ拡散過程モデルとしては GARCH 拡散過程モデルや２ファクター・モデル等のさまざまな候補があるが，これらの推定・検定は今後の課題とする。また，式(３)のボラティリティ変動モデルに焦点を当てるのであれば，最近いくつか開発されているジャンプとノイズの双方にロバストな実現測度（例えば小池 2015）を利用した推定・検定も試みるべきであろう。これも将来の課題とする。

謝　辞

本研究は，公益社団法人全国銀行学術研究振興財団の研究助成を受けたものです。ここに記して感謝します。

参　考　文　献

Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. 2014. *High-Frequency Financial Econometrics,* Princeton University Press.

Aït-Sahalia, Y. and Kimmel, R. 2007. “Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models.” *Journal of Financial Economics* 83 : 413-452.

Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiss, J.-P. and Mikosch, T. V. 2009. *Handbook of Financial Time Series,* New York : Springer.

CBOE, 2015. White paper : The CBOE Volatility Index − VIX.

Corradi, V. and Distaso, W. 2006. “Semi-Parametric Comparison of Stochastic Volatility Models Using Realized Measures.” *Review of Economic Studies* 73 : 635-667.

Garcia, R., Lewis, M.-A., Pastorello, S. and Renault, É. 2011. “Estimation of Objective and Risk-neutral Distributions based on Moments of Integrated Volatility.” *Journal of Econometrics* 160 : 22-32.

Heber, G., Lunde, A., Shephard, N. and Sheppard, K. 2009. “Oxford-Man Institute’s Realized Library.” Oxford-Man Institute, University of Oxford.　http://realized.oxford-man.ox.ac.uk/.

Heston, S. 1993. "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options." *Review of Financial Studies* 6: 327-343.

Ishida, I., McAleer, M. and Oya, K. 2011. "Estimating the Leverage Parameter of Continuous-Time Stochastic Volatility Models using High Frequency S&P 500 and VIX." *Managerial Finance* 37: 1048-1067.

Ishida, I. and Nagata, S. 2016. "GMM-RM estimation of the GARCH diffusion model." Working paper.

Koike, Y. 2015. "Estimation of Integrated Covariances in the Simultaneous Presence of Nonsynchronicity, Microstructure Noise and Jumps." Forthcoming in *Econometric Theory.*

石田 功. 2014. 実現測度データによるボラティリティ変動モデルの推定, 大阪取引所先物・オプションレポート26(8): 1-6.