View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Institute of Philosophy of Saint-Petersburg State University

П. И. Быстров

ORGANICA LOGICA: ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА (ШТРИХИ К ИСТОРИИ ТЕОРЕТИКО-ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕННЫХ МЕТОДОВ В ЛОГИКЕ)

Резюме: В статье осуществляется концептуальный анализ понятий, связанных с логическим выводом и логическим доказательством, с привлечением исторического материала. Предлагается набросок способов определения понятия доказательства. Обосновывается, что удовлетворительное понятие общезначимого вывода нельзя получить из понятия логического следования, определенного Тарским. Право утверждать заключение дает только выдержавшее любую проверку доказательство без пробелов. Полученные выводы используются для критики популярного последнее время мнения о кризисе современной логики.

Ключевые слова: теория доказательства, формальная система, правила вывода, вывод и следование, кризис современной логики.

Peter Bystrov

ORGANICA LOGICA: LOGICAL INFERENCES AND PROOFS (SOME DETAILS TO THE HISTORY OF PROOF-THEORETIC METHODS IN LOGIC)

Resume: The conceptual analysis of the notions connected to the logical inference and logical demonstration, with the references to historical stuff is drawn in the paper. The outlines of some ways of defining of the concept of proof is proposed. It is also grounded that the appropriate concept of the valid inference cannot be drawn from the concept of logical consequence as defined by Tarski. The proof without gaps, which is able to stand any test only provides the foundation to state the coclusion. The results obtained are used in criticising thepoplar nowadays opinion of the alleged crisis of current logic.

Key words: proof theory, formal system, rules of inference, inference and consequence, crisis of current logic.

© *Быстров Петр Иванович*, кандидат философских наук.
Peter Bystrov, PhD.

Посвящается Ярославу Анатольевичу Слинину

Юбилей — вещь не такая уж и простая, и отношение к ней как самого юбиляра, так и всех других участников события кардинально изменяется с течением времени. Обозначим юбилей термином «*n*-летие», где *n* — число, которое обозначает результат деления любого трехзначного натурального числа на 10 без остатка. Ясно, что если *n* равно 100 или 200, или даже 400, — это одна песня, а если *n* >50 — это уже совсем другой мотив. Впрочем, к Ярославу Анатольевичу Слинину такое нелепое рассуждение если и относится, то косвенно, ибо коварное число *n* мало влияет на его сущность.

В юбилей принято славословить юбиляра, анализировать его труды и достижения, а также восхищаться его человеческими качествами. Ни первого, ни второго, ни третьего я здесь делать не буду. Приведу простой пример из жизни. В конце весны 1982 г. в Ленинграде, на защите одной дипломной работы по модальной логике (которая была еще и с «Приложением»), Ярослав Анатольевич сказал примерно так: «А о “Приложении” я говорить ничего не буду, так как я в нем ничего не понял». Это сказал мудрый человек. Я это помню, и до сих пор мне часто хочется сказать о каком-нибудь современном человеке или очередном «великом логическом труде» (особенно своем собственном) теми давними словами юбиляра: «Я в нем ничего не понял». Короче говоря, общение с Ярославом Анатольевичем в течение ряда лет оказалось для меня (уверен, что не только для меня) весьма важным. Я очень рад возможности участвовать в этом юбилейном сборнике и поделиться с питерскими коллегами некоторыми своими соображениями по поводу логики и ее истории. При этом отдаю дань любви Ярослава Анатольевича к вопросам философическим и умышленно избегаю сложной символики, характерной для современной теории доказательств.

Итак, в честь глубокоуважаемого юбиляра Ярослава Анатольевича, начнем, так сказать, с конца (да простит мне просвещенный читатель эту вольность, отсутствие глубины и серьезности в тексте, а также обилие эпиграфов и цитат!). И…

«В это мгновение громадный страж преградил ему путь.

— Вход разрешен только элите! — сказал он грозно. — Ты принадлежишь к элите?

— Это зависит от определения слова «элита». Что вы называете элитой?

— Не важно, как *я* ее определяю, важно, как определяет ее [Я. А. Слинин]. Именно *его* определение имеет значение!

— Какое же это определение?

— Ну, — смягчился страж, — его определение весьма либерально. Он считает относящимся к элите любого человека, желающего войти в [логический] лес. *Ты* желаешь войти?

— Конечно!

— Тогда, согласно определению, ты принадлежишь к элите и можешь войти. Я уверен, что профессор [Я. А. Слинин] будет рад видеть тебя»[1].

[1] [Smullian 1985: 167] за исключением слов, взятых в квадратные скобки.

Обязательно ли противоречивая система является совсем бесполезной? Даже если для некоторого высказывания есть доказательство, что оно истинно, и есть доказательство, что оно ложно, может случиться, что одно из любой такой пары доказательств более убедительно, чем другое; значит, просто нужно выбрать доказательство, которому ты доверяешь!

Рэймонд М. Смаллиан. «Эпистемологический кошмар».

То, что есть, не требует доказательств. Все доказательства суть попытки чем-то стать. Доказательство истинно только для самого себя; оно не свидетельствует ни о чем, кроме наличия доказательств, а это ничего не доказывает.

Роберт Шекли. «Обмен разумов». Из книги «О неумолимости правдоподобного» Зе Крагаша (библиотека имени Марвина Флинна).

Можно успешно доказать истинность лишь того, что действительно истинно, равно как можно доказать ложность только того, что действительно ложно.

Учебник логики.

— Браво! — вскричал иностранец, — браво! Вы полностью повторили мысль беспокойного старика Иммануила по этому поводу. Но вот курьез: он начисто разрушил все пять доказательств, а затем, как бы в насмешку над самим собою, соорудил собственное шестое доказательство!

…

— Взять бы этого Канта, да за такие доказательства года на три в Соловки! — совершенно неожиданно бухнул Иван Николаевич.

М. А. Булгаков. «Мастер и Маргарита».

В этом рассуждении есть логическая дырка… Вероятно, Евклид чувствовал наличие здесь дырки, но не нашел, чем ее заткнуть.

В. Ф. Турчин. «Античная наука: от Фалеса до Евклида». Из сборника «Платон-математик».

1. *Проблема «логического Апокалипсиса»*

В последнее время некоторые логики-профессионалы (что вызывает удивление) все чаще утверждают, что на рубеже тысячелетий произошел «великий кризис логики» — потерялись ее основания. Отсюда, якобы, вытекает, что необходимо срочно выяснять, является ли логика наукой, что изучает и на каких, собственно, основаниях она зиждется. Оказывается, люди, именуемые нынче логиками, на протяжении тысяч лет занимались неизвестно чем, и только сейчас, впав в кризис, поняли, что главный вопрос на повестке дня: «Что есть логика?».

Споры на этот счет разгораются (вернее, искусственно раздуваются по неопределенным причинам). По этому поводу хочется заметить вот что. Во-первых, это вопрос «детский», «плохой» или «вечный» — как читателю будет угодно. Окончательного ответа на него не существует, равно как и на вопросы: «Куда идет человечество?», «Что есть Бог?», «Что есть любовь?» и т. п. Во-вторых, мучаясь в поисках ответа, по мнению Лейбница, «мы будем *в бесконечности приближаться* к искомому…никогда не кончатся споры и не установится мир в борьбе *школ*, пока от путаных рассуждений, неясных слов и неопределенных значений мы не перейдем к простым исчислениям и определенным *характерам*» [Лейбниц 1984: 496–497]. В-третьих, давайте, воскликнем вместе: «Бедный Аристотель!». Видимо, он ничего не объяснил про логику, начиная свою «Первую Аналитику» фразой: «Прежде всего, следует сказать, о чем исследование и дело какой оно [науки]: оно о доказательстве, и это дело доказывающей науки» [Аристотель 1978б: 119]. Если же Стагирит тем самым что-то и объяснил, то он ошибался, и его нужно, если не опровергать, то, по крайней мере, исправлять. Ведь сказано, что классическая логика окончательно подавлена: «1994 год стал критической точкой, когда под неимоверным давлением окончательно рухнула конструкция под названием “классическая логика”» [Карпенко 1999: 148–158]. От кого или от чего исходило такое «неимоверное давление» и в чем его причина — для меня остается загадкой.

Допустим, классическая логика «окончательно рухнула». Появилось огромное число неклассических логик. Допустим, что «логика не является теорией рассуждений, а теория рассуждений не является логикой»[2] (хотя, честно говоря, эта фраза кажется мне крайне нелепой, похожей на утверждение: «дом не является жилищем, а жилище не является домом»). Даже допустим, что (как я услышал от одного из своих уважаемых коллег) «логика *не имеет вообще никакого отношения к рассуждениям*»! Вот тогда уж точно беда! Что дальше? Есть ли выход из этого «ужасного кризиса»? Есть, конечно. Варианты такого выхода можно увидеть в том, как оценивают современную логику и тенденции ее развития нынешние специалисты в области философской логики. Приведу в пример мнения логиков, если можно так выразиться, московской школы.

По мнению Е. Д. Смирновой, сейчас актуальна «разработка логики не только как теории рассуждений, но и как «строительных лесов» мира … Это то, что будет новым в логике нового века» [Смирнова 2000: 231]. Если бы заменить вносящее неопределенность слово «мира», скажем, на слова «научного познания», с этим мнением

[2] См. [Harman 2002]. По мнению Д. В. Зайцева, включение такой работы в «Hanbook…» является аргументом в пользу изменений представлений о логике. Трудно с этим согласиться. Мало ли какие глупости включаются в различные справочники!

можно было бы, в основном, согласиться. По крайней мере, здесь не отрицается, что логика хотя бы была какой-то теорией рассуждений.

Другой автор более конкретен и категоричен. «Можно с уверенностью утверждать, — пишет он, — что современное развитие логики идет по пути структуризации истинностного значения» [Логическая семантика 2011: 109]. У меня нет даже тени такой уверенности, и я не понимаю, куда можно уйти по этому пути дальше, чем, например, континуум-значная логика или логика с мнимым числом истинностных значений, или логика, в которой оценками являются, скажем, абстрактные алгебры или ситусы, или топосы, или различные неевклидовы геометрии и космогонические теории целиком. Кроме того, термин «истинностное значение» относится только к одному аспекту современной логики, называемому логической семантикой, и уж никак не к логике в целом. Впрочем, я не считаю себя в праве оценивать «путь современной логики» и тем более делать по данному поводу основные или окончательные выводы. Однако с одним из таких выводов я знаком: законы логики есть не что иное, как законы алгебры… развитие логики показывает, что нет больше законов мышления, отличных от законов алгебры [Карпенко 2003]. Остается только удивляться, куда подевались другие законы мышления, если, конечно, они были. Если все на самом деле именно так, то остается надеяться, что к такой катастрофической ситуации привело не только развитие логики.

Однако есть мнение, что безвыходных положений не бывает вообще; значит, их не бывает и в логике. «Один из выходов из создавшегося положения предложен В. И. Шалаком (2010), который выделяет некоторое *протологическое* ядро, которое **априорно лежит в основе человеческих рассуждений и не основывается ни на каких допущениях** … строится *протологика* … Вычислимость — главное свойство протологики. В итоге получаем реализацию программы Лейбница: *рассуждения заменяются вычислениями*» [Александр Беловежский 2011: 219–220][3]. Это уже очень серьезно.

Вполне возможно, что я усвоил идеи Лейбница недостаточно хорошо, не увидев в них *программы* «замены рассуждений вычислениями». Да и была ли такая программа? По-видимому, статус «программы» почему-то получила следующая, высказанная образно, мысль Лейбница о возможном результате применения исчислений с точными характеристиками. «В результате, когда возникали бы споры, нужда в дискуссии между двумя философами была бы не большей, чем между двумя вычислителями. Ибо достаточно было бы им взять в руки перья, сесть за свои счетные доски и сказать друг другу (как бы дружески приглашая): *давайте посчитаем!*» [Лейбниц 1984: 497]. Но ведь буквально в следующем абзаце Лейбниц предупреждает, что это возможно только при наличии «*беспредельно сильного ума*», да еще и «с приложением соответствующих условий»! Почему-то забывается, что в той же своей работе, двумя страницами выше, Лейбниц пишет: «Если бы существовал какой-то точный *язык* (называемый *Адамовым* языком) или хотя бы *истинно философский род описания*, при

[3] Фрагмент выделен мной.

котором понятия сводились к некоему *алфавиту человеческих мыслей*, тогда все, что выводится разумом из данных, могло бы открываться посредством *некоторого рода исчисления*, наподобие того, как разрешают арифметические или геометрические задачи» [Лейбниц 1984: 494–495]. Разве это не описание «соответствующего условия», при котором можно было бы «как бы дружески пригласить» оппонента не рассуждать, а посчитать?

Таким образом, если «программа» Лейбница реализована, значит, Адамов язык найден (как и беспредельно сильный ум). Выделено *протологическое ядро* — априорный базис всех человеческих рассуждений! Введено понятие *протологического следования*! Избавление от кризиса — *протологика*! Картина получается просто радужная. Правда, я сомневаюсь, что сам автор упомянутой протологики В. И. Шалак полностью согласился бы с тем, что он так много всего натворил. Полагаю, что его идеи ценны только в том плане, что при таком «протологическом» подходе отчетливее проявляется соответствие между доказательствами и вычислениями, а это представляет особый интерес для открытия новой перспективы дедуктивного подхода, например, к верификации компьютерных программ[4]. Однако при этом недостаточно показать на семантическом уровне взаимопогружаемость «протологики» в системы комбинаторной логики и λ-исчисления. Необходимо показать, что именно и при каких условиях приводит к тому, что логические доказательства[5] становятся похожими на вычисления, а для этого недостаточно предлагаемого определения «протологического следования»: «Из посылок $S = \{B_1, ..., B_n\}$ проотологически следует выражение A, если и только если существует правило R, позволяющее на основании значений посылок S определить значение выражения A» [Александр Беловежский 2011: 220]. Некоторые доводы «за» и «против» подобных определений следования будут изложены в последних разделах данной статьи.

Последний пример. Логик-математик Н. Н. Непейвода (считающийся учеником А. А. Маркова), будучи на логической конференции, утверждал следующее: молодым людям (будущим логикам) надо внушать: «Ничего не нужно доказывать! Не доказывайте! Нужно проверять! Проверяйте!». Это тоже очень серьезный логический лозунг на будущее. Правда, его автор не уточнял, *что именно* не надо доказывать, а нужно только проверять. Всё? Компьютерные программы? Как проверять? Какие критерии проверки нужно применять и с какой целью? Как, например, человеку проверять услышанное в свой адрес простое утверждение: «Ты абстрактной алгебры не знаешь,

[4] В наше время взаимосвязь логических доказательств и компьютерных программ — это отдельная важная тема концептуального анализа. Она будет только кратко затронута в последнем разделе этой статьи.

[5] Здесь и далее я принимаю точку зрения, согласно которой можно делить доказательства на дедуктивные (демонстративные) и индуктивные (вероятностные), даже абдуктивные, но чисто *нелогических* доказательств (с помощью фактов, молниеносных озарений, физических действий, авторитетов и т. д.) не бывает. Поэтому в данной статье «доказательство» и «логическое доказательство» — синонимы, так же как «вывод» и «логический вывод» (если в конкретном случае не оговорено противное).

следовательно, ты дурак»? О проверке обоснованности более сложных выводов, по-видимому, и речи нет. Однако если доказывать не нужно, то и предъявлять для проверки будет нечего.

Удивительно, что в ряды тех, кто возвестил «кризис логики», зачислен даже классик философской логики Г. фон Вригт, сказавший, что «с логикой случилось то, что она расплавилась в разнообразных исследованиях математики», и выразивший сомнение в том, что «логика будет продолжать играть ту решающую роль в целостной философской картине эпохи, которую она играла в нашем столетии» [фон Вригт 1992: 80–91]. По моему мнению, это скорее похвала логике, а не констатация ее кризиса. Во-первых, логика с самого, так сказать, своего зарождения «расплавлялась» в разнообразных философских, математических, физических, химических, биологических и других научных исследованиях. Это неотъемлемое свойство логики, и от такого перманентного «кризиса» выигрывали и научные исследования, и сама логика. Во-вторых, «развиваться, выполняя нормативную функцию» — это одно, а «играть решающую роль» в чем-то — это совсем другое. Не думаю, что математика или какая-то другая наука играет решающую роль в целостной философской картине любой эпохи. В свое время решающую роль в целостной картине духовной жизни Западной Европы играла инквизиция.

Следует отметить, что далеко не все отечественные (и не только отечественные) логики-философы и логики-математики активно рассуждают или рассуждали о кризисе современной логики. Например, В. А. Смирнов, по праву считающийся одним из создателей «московской логической школы», насколько мне известно, никогда ни о чем подобном просто не говорил, а «ортодоксальный» логик О. Ф. Серебрянников называл любителей таких разговоров «рассуждателями обо всем», или «культурологами». Возможно, ни тот, ни другой не заметили надвигающейся «беды» или просто не дожили до «настоящего» кризиса логики. Живущих ныне Я. Хинтикку, М. Данна, Р. Смаллиана, Й. Ван Бентема, П. Мартина-Лефа, С. Крипке и многих других авторитетных исследователей тоже вряд ли можно поставить в ряды борцов с кризисом логики.

Впрочем, в данной статье я не намерен ввязываться в спор о возможном кризисе современной логики и тем более обсуждать вопрос «Что есть логика?» Пусть для логики грянули критические, т. е. кризисные годы и даже столетия. Ведь не видно ученых масштаба Больцано, Фреге, Рассела, Гильберта, Генцена, Геделя, Черча, Клини, не говоря уже об ошибавшимся на счет логики Аристотеле… — это ли не «кризис»! Пусть логика теперь является не наукой, а нагромождением алгебраических структур или комбинаторикой функций, вычислимых на множестве символов, или игрой с размытыми множествами и объектами потусторонних миров. Тем хуже не для логики, а для ученых мужей, которые представляют ее в таком виде.

Я убежден в следующем. Отбросив в сторону понятия «рассуждение», «допущение», «заключение», «вывод», «доказательство» и т. п., вообще бессмысленно говорить и спорить о логике. Сама наша естественная речь, и наши споры, и научные теории невозможны без «расплавленной» в них логической компоненты. На мой взгляд, именно она является связующим и регулирующим фактором для обыденных и научных умопостроений, которые, будучи выражены в естественном языке, суть не что иное, как рассуждения. Вряд ли стоит отказываться от банальной мысли: отсутствие логики, чем бы мы ее ни считали, означает интеллектуальный хаос, и даже рафинированные, бесконечно сложные, многомерные символьные структуры, в которых отсутствует «простое» логическое «если *A*, то *B*», не спасают от безумия. Именно поэтому далее пойдет речь о рассуждениях, выводах и доказательствах. Их анализ, равно как и результат этого анализа в виде теоретических правил, принципов и норм, я считаю «ядром» или, по меньшей мере, важной и неотъемлемой частью ядра логики. По выражению Г. Крайзеля, «благочестивые разговоры о возможности разрушения математики, если будут исключены теоретико-множественные или даже все неконструктивные методы, оказались пустыми» [Kreisel 1977: 111][6]. По моему мнению, благочестивые разговоры о «второсортности» и даже исключении теоретико-доказательственных методов, действительно, могут привести если не к кризису, то к существенному оскудению логики как одной из областей нашего знания о Вселенной и собственном мышлении.

Данная статья не претендует на статус работы непосредственно по истории логики. Ее цель — привлечь внимание к так называемому теоретико-доказательственному аспекту «квазинауки» логики, который почему-то игнорируется рядом современных логиков (особенно отечественных), в отличие от так называемого семантического, или теоретико-модельного подхода, а также алгебраического. Поэтому я перехожу от общих слов к «точечному» (как нынче почему-то модно говорить о бомбовом ударе) экскурсу в историю вопроса о причастности или непричастности логики к таким элементам наших ментальных процедур, как допущения, следствия, выводы и доказательства. Повторяю, это не изложение фрагментов истории логики, а концептуальный анализ понятий, связанных с логическим выводом и логическим доказательством, с привлечением исторического материала. Везде далее, если не оговорено противное, «рассуждение», «умозаключение», «вывод» и «доказательство» считаются различными терминами, а «высказывание» и « предложение» — синонимами. Под рассуждением, в общем смысле этого слова, я буду понимать выраженную в естественном или специальном символическом языке ментальную процедуру, интеллектуальное действие (в отличие от «инсайта», «озарения», «подсознательного проникновения», «мгновенного интуитивного охвата всего континуума и т. п.), представленное в форме *последовательности* [логически] взаимосвязанных мыслей. Разумеется, вопросы, связанные с построением умозаключения, вывода или доказательства — это, так сказать, объектный уровень, а «рассуждения о рассуждениях, выводах и доказательствах», различные оценки их свойств (в том числе философские и семантические) — это уровень метаанализа. Взаимосвязь между этими уровнями в области логики — отдельная интересная тема.

[6] Кстати, в своем переводе этой статьи Г. Е. Минц почему-то изменил ее название и «Theory of proofs» оказалась «Структурной теорией локазательств», что далеко не одно и то же. См.: [Крайзель 1981б: 258].

2. *От античной аргументации к теории вывода в символической логике*

Задолго до того, как Аристотель систематически изложил формы и принципы человеческих рассуждений, выраженных в естественном языке, и фактически начал систематическое исследование выводов, в древнегреческой культуре уже были явно выражены два феномена. На первый взгляд они не связаны между собой, но я рискну утверждать, что, по крайней мере, одно связующее звено между ними было, а именно необходимость строить логические выводы. О каких же культурных явлениях идет речь?

Первое. Довольно высокого уровня достигли математические изыскания, которые можно условно назвать «практической математикой», поскольку в ней преобладали геометрические построения и сравнительный анализ реальных величин. Многие или почти все известные нам философы доаристотелевского периода прекрасно знали и развивали эту математику. Невозможно отрицать, что в этой математике существенную роль играли логические умозаключения и доказательства. Вряд ли Фалес Милетский (585 г. до н. э.)[7] на радостях принес бы в жертву быка (что, согласно легенде, он сделал), если, случайно описав окружность вокруг конкретного прямоугольника, он не пришел бы к *доказательству* того, что это возможно в общем случае и не смог бы описать алгоритм построения. Фалесу приписываются первые доказательства некоторых общих положений (теорем), например: «Диаметр делит круг на две равных части». Физическое или воображаемое перегибание круга по диаметру не есть доказательство этого интуитивно очевидного утверждения.

По-видимому, Фалес и другие его современники-философы уже полностью осознавали значение доказательства как ментальной процедуры. Визуальная или интуитивная «очевидность» геометрических и числовых построений не могла удовлетворить мыслителей того времени, и они успешно (или безуспешно) строили выводы и доказательства, оправдывающие полученные конструкции и их свойства. По-видимому, уже во времена Фалеса математические утверждения общего характера доказывались вовсе не для того, чтобы развеять сомнения в их истинности: начинались систематический поиск доказательств и разработка методов построения не только

[7] Считается, что это единственная точно установленная дата из времени его жизни, поскольку в этом году Фалес предсказал солнечное затмение. Возможно, это «будущее затмение» заранее приснилось философу, так сказать, в готовом виде (как, якобы, приснилась Менделееву таблица химических элементов). Но, по моему мнению, разумнее и полезнее представить предсказание Зенона (и любое подобное сбывшееся предсказание древнеегипетского жреца или вавилонского мудреца) как результат построенного им рассуждения, «теоремы», в форме утверждения о еще не существующем событии. Истинность посылок в шагах выводов, составляющих такое доказательство, могла быть основана, в частности, на эмпирических данных наблюдения и знаниях из области астрономии. Верификация этого доказательства — физическое явление затмения, а свидетельство его ошибочности — то, что затмение фактически не произошло. Набросок идеи о соотношении предсказания и доказательства будет дан в последнем разделе статьи.

геометрических фигур, но и самих доказательств. Теоремы Евклида, появившиеся более двух тысяч лет назад, и по сей день включаются в школьные учебники, и геометрия Лобачевского-Больяи никоим образом не опровергает их. Они построены не в результате «мгновенных озарений», а в виде шагов корректных логических выводов на основе определенных исходных понятий и доступны для теоретической проверки. Пусть Евклид, как сказано В. Ф. Турчиным, не знал, «чем заткнуть дырку» в некоторых своих доказательствах (см. один из эпиграфов), но он продемонстрировал, как можно строить доказательства.

Здесь я не говорю о методологической мощности логических построений Зенона в форме знаменитых апорий лишь потому, что это отдельная тема, которой посвящено (и еще будет посвящено) огромное число логических и философских работ. Один из секретов такой «живучести» дошедших до нас логических конструкций учеников Парменида заключается, по-видимому, в том, что они порождают вопросы о неизвестных нам до сих пор «глубинных» законах наших рассуждений и логических доказательств.

Второе. Процветала практика споров и, значит, аргументации[8]. Целью аргументации было подкрепление или обоснование одних утверждений и разрушение или дискредитация других. Здесь уже существовало свое понятие доказательства, которое, возможно, переместилось в область математики, где получило мощный стимул своего развития. Естественно, что практика аргументации породила вопросы о *надежном* и *решающем* аргументе. Первый из них реально подтверждает свое заключение. «Реально» в данном случае означает, что полученное заключение невозможно опровергнуть никаким образом, и поэтому, наша убежденность в его истинности полностью оправдана. Второй, грубо говоря, «закрывает тему», т. е. делает излишними дальнейшие споры и аргументы на данную тему.

Надежный и решающий аргумент (и доказательство) обладает, так сказать, «принуждающей» силой, т. е. порождает некий вид модальности. Другими словами, в античной практике аргументации возникла замечательная идея о том, что существуют дедуктивные аргументы, или доказательства, которые окончательно устанавливают истинность их заключений. Например, в начале «Первой Аналитики» Аристотель пишет: «…Силлогизм есть речь, в которой если нечто предположено, то с необходимостью вытекает нечто отличное от положенного в силу того, что положенное есть»; и далее: «…Для возникновения необходимости не требуется постороннего термина»

---

[8] Нынче стало модным не только критиковать современную логику, но и превозносить аргументацию. Специальные курсы по аргументации включаются (иногда вместо логики) в учебные планы гуманитарных факультетов высших учебных заведений. Мне совершенно не понятно, в чем заключается прогрессивная роль «теории аргументации» по сравнению с логикой или даже с «теорией доказательства». Пусть аргумент — это нечто более широкое или глубокое, чем доказательство (или опровержение). Однако как можно выдвинуть и использовать хотя бы что-нибудь, как решающий аргумент, не имея никакого представления о том, что такое корректный логический вывод? Что касается данной статьи, то в ней «аргумент» и «доказательство» — это синонимы.

[Аристотель 1978: 120]. Таким образом, уже в самом начале систематического изучения рассуждений рассматривались два свойства выводов: *общезначимость* и *модальность* (в смысле принуждающей силы)[9]. Что касается утверждений, составляющих выводы, то их можно делать на различных основаниях различной силы. Соответственно утверждения, играющее роль заключений в конкретных выводах, и сами выводы в целом должны обеспечивать истинность (обоснованность, необходимость) каких-то других положений, выраженных в форме утверждений.

* * *

По меньшей мере со времен Аристотеля построение выводов рассматривается как один из путей нахождения оснований для чего-либо (или подтверждений чего-либо). Разумно допустить, что существуют виды вывода, обеспечивающие окончательные основания, т. е. основания максимальной силы. Предположим, что таковы дедуктивные выводы. Кроме того, вывод не только подтверждает какое-то категорическое высказывание или что-то другое (например, мнение, гипотезу), он может *вынудить нас безоговорочно принять истинность сделанного заключения*. Идея о том, что вывод каким-то образом вынуждает нас безоговорочно его принимать, присутствовала уже у Парменида и Платона[10]. До сих пор это отражено в обычной практике введения слов «должен…», «должна…», «должно быть…» в изложении доказательств. Можно сказать, что вынуждающая сила общезначимого вывода выражается в том, что всякий должен принять его заключения, если принял посылки. Однако здесь не все так просто. Прежде всего, нужно рассмотреть вопрос о том, какой вид необходимости применяется в связи с анализом выводов. По-видимому, эта необходимость связана с принуждающей силой вывода, которая и является характерным свойством общезначимого вывода. Как же описать эту силу?

Возьмем, например, историю Л. Кэрролла об Ахиллесе и черепахе [Caroll 1985: 278–280] (к которой мы еще вернемся позже). По словам Кэрролла, Ахиллес хотел «логически заставить черепаху» принять за истинное определенное предложение *B*, которое очевидным образом следует из предложения *A*, которое черепаха уже приняла. Попытки Ахиллеса оказались безуспешными. Ему удалось только заставить черепаху принять ряд дополнительных посылок в форме импликаций, начиная с того, что «если *A* истинно, то и *B* истинно». Равным образом здесь бесполезно применять понятие вывода высказывания *B* из высказывания *A* (даже в смысле протологики). Черепаха могла бы согласиться с его общезначимостью, но при этом остался бы ряд дополнительных посылок, которые ни к чему не ведут. Возможно, было бы полезнее попросить черепаху построить вывод высказывания *B* из высказывания *A*, и если

[9] Р. Смаллиан даже ввел специальный термин *принуждающая логика (coercive logic)*, обозначающий «раздел» логики, в котором изучаются такие выводы, что человек, принявший посылки вывода, при определенных условиях, вынужден действовать согласно заключению этого вывода, а не так, как ему заблагорассудится [Smullyan 1997: 85].

[10] Интересный анализ высказываний Платона по этому поводу см.: [Cozzo 2005].

она сумеет это сделать, сказать ей: «Посмотрим, что получилось. Вывод корректен. Он и есть основание для принятия *B,* и не принимать его означает просто капризничать или быть нечестным».

Логическое действие, в данном случае построение вывода, — это первый шаг в любой аргументации. Если результат такого действия логически общезначим, то *сам акт вывода* является обоснованием его заключения, которое нельзя не принять. Можно отрицать, что этот акт обладает «принуждающей силой», но, получив логически обоснованное заключение, по меньшей мере, неразумно его не принимать. Именно в таком смысле мы *должны*, или вынуждены, что-то сделать в соответствии с заключением вывода. Очевидно, что это не онтологическая необходимость, здесь нет ссылки на «реальный мир» и на возможные миры. Она не связана также с изменением значений нелогических терминов в предложениях, составляющих вывод. Эта необходимость не связана даже с логически общезначимыми выводами. Однако общезначимые выводы обладают принуждающей силой в смысле этой необходимости[11]. По мнению Правица, выражение «следовательно, *B* должно быть истинным» означает не то, что должно быть так, что *B* истинно, а скорее то, что некто *должен* считать *B* истинным [Prawitz 2005]. Этот вид необходимости можно назвать *необходимость мысли* — он относится к тому, как некто обязан или должен рассуждать. Он выражает *нормативную функцию логики*.

То, что есть «принуждающие выводы», дедуктивные (или какие-либо другие), порождающие окончательные и даже обязательные основания или доказательства, не значит, что существуют безошибочные пути к знанию. Естественно, мы можем ошибаться, принимая нечто за вывод или доказательство некоторого утверждения. Д. Юм, например, говорил по этому поводу. «Правила всех демонстративных наук *достоверны и непогрешимы* (курсив мой. — *П. Б.*), но когда мы применяем эти правила на практике, наши подверженные погрешностям и ненадежные способности легко могут отступить от них и ввести нас в заблуждение. В силу этого при каждом заключении мы должны составлять новое суждение, чтобы проверять или контролировать свое первоначальное суждение…». И далее: «Нет такого алгебраиста или математика, который был бы настолько сведущ в своей науке, чтобы вполне доверять любой истине тотчас же после ее открытия или же смотреть на нее иначе, чем на простую вероятность. С каждым новым обозрением доказательств его доверие увеличивается…» [Юм 1966: 289–290].

Иногда то, что при построении доказательства возможна ошибка, использовалось в качестве довода против того, что доказательство гарантирует истинность того, что доказано. В частности, приведенный только что фрагмент из трактата Юма иногда истолковывается как такой довод. С этой интерпретацией трудно согласиться. При

---

[11] Не только дедуктивный вывод может обладать принуждающей силой. Если, например, неопровержимое свидетельство подтверждает истинность предложения, то не считать это предложение истинным, по меньшей мере, неразумно, независимо от того, является свидетельство решающим или нет.

некотором уточнении мысль Юма вполне совместима с идеей, что доказательство гарантирует то, что доказано. Ведь Юм утверждает, что сами дедуктивные правила «достоверны и непогрешимы», а ошибочными могут быть только наши *применения* этих правил. Если в доказательстве некоторого утверждения допущена ошибка, и в действительности это утверждение может оказаться ложным, то можно сказать, что на самом деле доказательства как такового нет. Используя при этом понятие доказательства, мы просто принимаем за концептуальную истину то, что доказанное *дедуктивно* истинно.

Вряд ли достаточно просто принять, что доказательство гарантирует истинность того, что доказано. Необходимо объяснить, как возможны доказательства, гарантирующие получение истин[12]. Допустим, доказательство применяется каким-то особым образом. Где гарантия того, что имеется понятие доказательства, соответствующее именно такому применению? В любом случае необходим анализ понятия доказательства, или, скорее, формирование, создание такого понятия. В данном случае одним из приемлемых вариантов может быть идея *формального доказательства*. Она состоит в том, что *вся структура доказательства представляет собой цепь выводов*[13]. Так ли это «на самом деле»? По моему мнению, ответ на вопрос о том, действительно ли выводы (скажем, в какой-то интерпретированной формальной системе) формируют доказательства, зависит от *сущности правил вывода*, раскрытой в соответствующих определениях. Конечно, при построении формальной системы предполагается, что применение правил вывода будет обеспечивать получение общезначимых выводов. Однако в самой формальной системе обычно нет никаких гарантий на этот счет. Значит, необходим отдельный анализ того, какими свойствами должен обладать вывод, чтобы порождать доказательства.

Обычно считается, что для того, чтобы формальные выводы представляли доказательства и была гарантирована истинность того, что доказано, вполне достаточно выполнять следующее условие: правила вывода [используемой формальной системы] должны «сохранять истину» на каждом шаге перехода от посылок к заключению. В этом смысле и весь вывод должен «сохранять истину». Однако при этом не принимается во внимание, по меньшей мере, два обстоятельства. Во-первых, в выводе,

---

[12] Для ярых противников применения в логике слов «истинность», «истина», «ложно», «ложь» замечу, что в этой статье они не несут никакой философской нагрузки. Если желательно, их можно заменить на термины «эффективно вычислимо» — «проблематично», «алгебраично» — «синтаксично», «полезно» — «вредно», «приятно» — «гадко», и т. д.

[13] Слово «цепь» здесь не обязательно означает «последовательность сцепленных между собой звеньев». Формальное доказательство можно представить в виде «дерева» и даже «леса деревьев» (термин В. А. Смирнова). По-видимому, любое «дерево» и «лес деревьев» можно преобразовать в последовательность, или цепь. Однако вопрос о том, можно ли представить *любое* доказательство в виде цепи выводов, по моему мнению, остается открытым. Поэтому здесь и далее «доказательство» понимается, скорее, как «формальное доказательство», выразимое в точно определенном специальном языке. Доказательства с помощью интуитивных аналогий, кулаков, религиозных и оккультных откровений — совсем другая тема.

сохраняющем истину, «дистанция» между исходными посылками и финальным заключением может быть такой большой, что этот вывод будет совершенно бесполезен (если не вреден) для доказательства, в которое он включен. Во-вторых, убедительность доказательства должна заключаться в нем самом или, по крайней мере, обнаруживаться на уровне этого доказательства. Если же то, что примененные правила вывода сохраняют истинность, доказывается на метауровне (скажем, на моделях) и тем самым демонстрируется надежность всего вывода, тогда возникает вопрос: чем обоснована убедительность метадоказательства? По-видимому, на этот вопрос нельзя ответить, постоянно апеллируя к каким-то другим доказательствам.

Для развития понятия доказательства процесс построения выводов более полезно рассматривать как процесс кодирования доказательств, а не поиск ответа на вопрос о том, что такое доказательство[14]. Если сосредоточиться на самой ценной функции дедуктивных выводов и доказательств — обеспечения окончательных оснований для утверждения заключения — остается вопрос о том, как можно описать эти окончательные основания.

Забегая немного вперед, возьмем в качестве примера конструктивистское направление современной логики. С точки зрения его представителей основание любого утверждения тесно связано с его значением[15]. Мы не будем рассматривать вопрос, о том, в чем состоят значения (или основания) простых суждений типа «Земля круглая». Грубо говоря, пока ограничимся значениями «да» и «нет» (1 и 0) и критикуемым многими современными логиками тезисом: «Если “да”, то да; если “нет”, то нет, а все остальное — от лукавого». В чем же тогда состоит, например, значение простой двухэлементной конъюнкции? Ее значение определяется путем формирования пары, состоящей из значений конъюнктов. Можно сказать, например, что v есть значение конъюнкции $A\&B$, если и только если v имеет вид $<v_1, v_2>$, где v_1 и v_2 есть значения A и B соответственно.

Если определено, что является основанием утверждений различной логической формы, есть возможность понимать вывод не как утверждение [истинности] заключения на основе [истинности] ранее утвержденных посылок, а как *преобразование оснований* этих посылок. Тогда вывод индивидуализируется не только его посылками и заключением, но и *операцией преобразования* посылок в заключения. Возьмем простейшие примеры процедур введения и удаления конъюнкции, скажем, в такой форме:

$$\frac{A \quad B}{A \,\&\, B} \qquad \frac{A\&B}{A} \qquad \frac{A\&B}{B}$$

[14] Вопрос «Что есть доказательство?», на мой взгляд, ничуть не лучше вопроса «Что есть логика?».

[15] Идеи по этому поводу явным образом сформулированы Гейтингом в 1956 г. Фактически они были предложены Генценом в 1934 г. Известное его замечание гласит, что правило введения логической константы в системе натурального вывода «дает, так сказать, определение рассматриваемой константы». Таким образом уточняется значение высказываний, построенных с помощью этой константы.

Принимая за основание для утверждения $A\&B$ пару $<g_1, g_2>$, где g_i есть основание для утверждения A_i $[B_i]$ (i = 1 или 2), мы применяем операцию, преобразующую посылки введения конъюнкции в его заключение, представленного в виде своеобразной «информационной пары». Также применяется операция φ_i (i = 1 или 2) преобразования посылки одной из форм удаления конъюнкции в ее заключение, а именно: согласно равенству $\varphi_i(<g_1, g_2>) = g_i$, которое можно считать определением φ[16].

В предыдущем абзаце очень часто фигурируют термины «основание» и «операция», поэтому необходимо хотя бы кратко пояснить, в каком смысле и зачем они применяются. Основания посылок (или даже их «окончательные основания») можно понимать по-разному (но в данном случае не философски), в зависимости от задачи и специфики анализа вывода. Это могут быть аксиомы, факты, свидетельства, убеждения, логические значения или произвольные допущения. Тогда основание заключения есть результат применения некоторой логической *операции* к основаниям посылок. Сама такая операция, грубо говоря, есть акт преобразования одних предложений в другие. Это подводит нас к ключевому, на мой взгляд, понятию *правило вывода*, без которого анализ логических выводов может оказаться неэффективным. Собственно говоря, в данном случае конкретная «операция» означает просто *применение правила вывода*, а оно, в свою очередь, может рассматриваться как «атомарный подвывод» или «единичный шаг вывода»[17]. Само правило вывода — это форма, схема перехода от «исходного материала» к результату его [логической] обработки. Интереснее всего, конечно, случай, в котором этот исходный материал уже содержит логические константы. В таком случае я предлагаю считать его основаниями корректные *вспомогательные* выводы (точнее, их конечные предложения). Соответственно в этом случае фигурируют обобщенные схемы правил вывода. Например, приведенная выше схема одного из правил удаления конъюнкции приобретает следующий вид:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathrm{S} \\ \cdot \\ \cdot \quad n \text{ шагов} \\ \cdot \\ A\&B \end{array}}{A}$$

(где S может быть пустым знаком, а $n = 0$, если, скажем, $A\&B$ — аксиома или любой факт). Замечу, что регресс в бесконечность (бесконечное повторение «вывода посылки

[16] Редукции, определенные для применений правил удаления, являются начальным пунктом нормализации натуральных выводов, проведенной Д. Правицем в его известной работе «Natural Deduction» [Prawitz 1965]. Аналоги этих редукций можно представить как процедуры индивидуализации выводов.

[17] Г. Такеути [Takeuti 1975] называет всякую фигуру правила вывода *непосредственным выводом*, и в данном случае подобная терминология вполне приемлема.

вывода») здесь не возникает по той простой причине, что число посылок и их логическая длина всегда конечны[18].

Итак, логический вывод индивидуализируется не двумя параметрами (посылками и заключением), а тремя: [логическими] основаниями посылок, [логическим] основанием заключения и операцией преобразования первых во второе. Основная моя мысль здесь проста: *логический вывод следует понимать как конструкцию, правильно построенную путем последовательного применения определенных операций, т. е. правил вывода, к основаниям исходных предложений* (где основания понимаются так, как было сказано выше). Тогда доказательство есть не что иное, как упорядоченное множество выводов, порождающее некоторое предложение, необходимо истинное в силу самого этого доказательства. Вообще говоря, доказательство лучше рассматривать как *процесс*, а не результат упомянутого «порождения».

Если же предложение, как результат конкретного доказательства, окажется ложным (неприемлемым), то как уже было сказано выше в связи с идеей Юма, по сути дела, доказательства нет, а то, что считалось доказательством, в действительности таковым не является. Значит, возможность ошибки не имеет никакого отношения к существованию окончательных доказательств. Она не умаляет значения того факта, что общезначимый дедуктивный вывод действительно обеспечивает окончательное основание заключения, если есть окончательные основания посылок, которые могут быть фактами произвольного рода, допущениями или предложениями, обоснованными с помощью корректных вспомогательных выводов, и определено правило их преобразования.

Это лишь очень краткий набросок одного из способов определения понятия доказательства[19]. Я полагаю, что доказательство некоторого утверждения *A* окончательно обосновывает *A* в силу в силу двух вещей: (i) что значит само утверждение *A* и (ii) как определены правила вывода, с помощью которых построено это доказательство. Анализ понятия доказательства необходим в каждом случае, когда нужно показать, что его заключение истинно (в любом смысле), неопровержимо контрпримером и не подлежит отмене. Кроме того, по моему мнению, такой анализ невозможен, если начинать его с понятия логического следствия и следования в теоретико-модельном смысле. По крайней мере, насколько мне известно, никто еще не показал, что это можно сделать.

Итак, один из основных тезисов этой статьи состоит в том, что *логика начиналась как метод анализа выводов, из которых строятся максимально надежные доказа-*

[18] В контексте данной статьи рассматривать выводы с посылками бесконечной длины и / или бесконечным числом посылок считаю бессмысленным (если такие выводы вообще имеют какой-то смысл).

[19] Надо заметить, что при таком подходе теряет смысл выражение, зачастую вставляемое в учебники по логике на правах определения: «Вывод из пустого множества посылок называется доказательством». Выводом из пустого множества посылок еще можно назвать аксиому (хотя и это может скорее запутать человека, начинающего изучать логику, а не помочь ему), но уж никак не доказательство.

тельства. По моему мнению, необходимость развития этого метода в наше время не только не исчезла, но даже стала более актуальной.

Поскольку анализ эволюции идей современной теории доказательств не входит в задачи данной статьи, здесь мы пропускаем так называемый период Средневековья, который сам по себе интересен в этом плане. Однако хочется заметить, что, не в XX в., а еще в XIV в. Псевдо-Скотт (Johannes de Cornubia) явным образом сформулировал принцип, активно критикуемый до сих пор «разрушителями» классической логики: «Ad quamlibet propositionem contradictionem de forma sequitur quaelibet alia proposito in consequential formali» [Kneale & Kneale 1962] — «Из какого-либо предложения, являющегося формальным противоречием, согласно формальной импликации, вытекает любое предложение». По моему мнению, появившуюся много позже так называемую паранепротиворечивую логику можно считать попыткой модификации, но никак не «орудием разрушения» этого принципа. Для подкрепления этого мнения необходим детальный анализ не только понятия логического вывода, но и понятия логического противоречия.

3. «*Эра Тарского*». *Проблема общезначимости выводов и доказательств*

В логике долгое время доминировала (и в различных модификациях остается ведущей до сих пор) следующая точка зрения на логическое следствие и общезначимый вывод: (1) основные вопросы, касающиеся понятия логического следствия, якобы, были окончательно решены Альфредом Тарским в его работе «О понятии логического следствия»[20]; (2) вывод считается общезначимым тогда и только тогда, когда его заключение является логическим следствием из его посылок в смысле, определенном Тарским.

Основная идея Тарского заключена в изменении содержания нелогических терминов, составляющих конкретное высказывание. *A* называется следствием из множества предложений G, если и только если каждое изменение содержания входящих в эти предложения нелогических терминов, делающее предложения из G истинными, делает истинным и *A*. По мнению последователей Тарского, это определение адекватно выражает утверждение о том, что одно предложение логически следует из других предложений. Сам Тарский специально подчеркивал и модальный элемент своего определения: «В частности, на основе [моего] определения можно *доказать*, что следствие из истинных предложений должно быть истинным» [Tarski 1956: 417]. Однако именно при попытке это доказать возникает так называемый регресс в бесконечность, который еще будет упоминаться ниже.

[20] Работа опубликована в 1936 г. сначала в Польше, а затем в Германии под названием «Über den Begrriff der logischen Folgerung» в *Actes du Congres International de Philosophie Scientifiques* 7*, p.* 1–11. В английском переводе она появилась лишь 20 лет спустя, в сборнике статей Альфреда Тарского: *Tarski A*. Logic, Semantics ant Metamathematics. Oxford, 1956.

Автор данной статьи осмеливается утверждать, что удовлетворительное понятие общезначимого вывода нельзя получить из понятия логического следствия, определенного Тарским. Это утверждение не оригинально. Критические замечания в адрес данного определения высказывались, например, Дж. Эшеменди, Г. Сандхольмом, П. Мартином-Лефом, Д. Правицем и многими другими (см., например: [Ethemendy 1990; Sundholm 1998; Martin-Löf 1996; Prawitz 2005]). Дело в том, что концепция логического следования, основанная на определении следствия по Тарскому, имеет существенный недостаток. Само *raison d'être* выводов невозможно описать и объяснить, если их общезначимость отождествляется с отношением между посылками и заключением, определенным Тарским.

Здесь нужно отметить, что идея изменения содержания нелогических терминов, применяемая при рассмотрении выводов, восходит к Аристотелю. Именно изменение содержания рассматриваемых предложений с целью получения *контрпримера* (т. е. такого конкретного примера данного вывода, в котором посылки истинны, а заключение ложно) было у Аристотеля стандартным методом демонстрации необщезначимости выводов. Бернард Больцано применил этот метод в своем определении логического следствия[21]. Это определение не многим отличается от определения Тарского: из обоих определений вытекает, что отсутствие контрпримера является не только необходимым, но и достаточным условием для принятия логического следствия. Опять же остается неясным, каким образом можно *обосновать отсутствие* контрпримера. Если это делать путем нахождения контрпримера контрпримеру, то снова возникает регресс в бесконечность.

Отметим, что здесь и далее речь идет не об «общезначимости вообще», а о *логической общезначимости* выводов. Только если принимается точка зрения, согласно которой определения Больцано и Тарского решают вопрос о корректности вывода, слово «логической» становится лишним. Однако существуют выводы, которые интуитивно трактуются как общезначимые, не будучи логически общезначимыми. Таким, например, является следующий вывод, построенный в естественном языке: «Петр глупее, чем Павел», «Павел глупее, чем Владимир» — значит, «Петр глупее, чем Владимир». В математике таким примером можно считать вывод с помощью математической индукции по натуральным числам в той форме, в которой он обычно применяется в логике предикатов первого порядка, где понятие натурального числа не определяется предикативно, а принимается за элементарное (исходное) понятие.

Так что же значит утверждение о том, что вывод логически общезначим? Можно считать, например, что вывод логически общезначим, если его корректность зависит только от логических терминов, входящих в предложения данного вывода. В контексте определения логического следствия Больцано-Тарского это значит, что логически

[21] Больцано использует термин «Ableitbarkeit». Это определение дано в его книге *Wissenschaftslehre,* I–IV [Bolzano 1837], опубликованной без малого за век до появления определения Тарского. Оно явным образом связано с понятием корректности вывода. По мнению Больцано, отношение логического следования — это «замечательная вещь», так как оно позволяет выводить истинность сукцедента непосредственно из истинности антецедента.

общезначимы те выводы, которые не зависят от любых изменений содержания нелогических терминов. Следуя Больцано, можно понимать изменение содержания нелогических терминов просто как замещение этих терминов в предложении другими терминами той же самой синтаксической категории. Обозначим символом φ функцию подстановки, т. е. замены нелогических терминов в предложениях A_1, A_2, … A_n, и B на другие нелогические термины той же самой синтаксической категории, а результат такой подстановки φ в A_i и B — как A_i^{φ} и B^{φ}. Теперь сформулируем следующее явное определение.

Df 1. Вывод B из A_1, A_2, … A_n *логически обоснован*, если и только если для любой φ вывод B^{φ} из A_1^{φ}, A_2^{φ}, … A_n^{φ} *обоснован*.

Следуя Тарскому, можно обозначить символом φ функцию оценки, т. е. приписывания произвольных оценок нелогическим терминам. Тогда определение Df 1 примет следующий вид:

Df 2. Вывод B из A_1, A_2, … A_n *логически обоснован*, если и только если для любой f вывод B из A_1, A_2, … A_n *обоснован относительно* φ.

Значит, при подходе Больцано–Тарского понятия логической общезначимости и общезначимости становятся неразличимыми. В этом случае главной задачей становится определение общезначимости вывода относительно некоторого приписывания значений. Аналогичным образом, если проведено различие между *следствием* и *логическим следствием*, можно свести второе к первому, сказав, что A есть логическое следствие множества предложений G, если и только если A остается следствием G при любых изменениях оценок нелогических терминов, входящих в B и во все предложения G [Prawitz 2005].

В рамках концепции Больцано и Тарского бессмысленно проводить различие между следствием и логическим следствием, и понятие логического следования сводится к понятию истинности соответствующей материальной импликации. То же самое происходит, если проведено различие между общезначимым и логически общезначимым выводом. В этом случае вполне можно сказать, что *вывод обоснован, если одна из посылок ложна или заключение истинно.* Однако отождествление свойства общезначимости вывода с таким отношением между истинностными значениями входящих в него предложений ничего не дает. Невозможность отличить удовлетворительным образом следствие от логического следствия делает ненадежным анализ понятия логически общезначимого вывода с помощью понятия логического следствия Тарского.

Недостатки такого анализа проявляются, когда мы спрашиваем, почему вывод, в котором заключение является логически следствием из посылок в смысле Больцано–Тарского, можно считать обоснованием заключения. Дать удовлетворительный ответ на этот вопрос не позволяют следующие факты. Утверждение, что заключение данного вывода есть логическое следствие из его посылок в смысле Тарского, означает: (1) этот вывод *сохраняет истинность* (в том смысле, что если посылки истинны, то и заключение истинно); (2) все выводы такой же логической формы сохраняют истинность.

Очевидно, что свойство (1) уместно относительно вопроса о том, может ли вывод обосновывать [неизбежность, безоговорочную приемлемость, истинность] заключения и является ли он для этого необходимым условием. Однако этого свойства недостаточно для того, чтобы вывод обладал такой силой. Утверждение (2) вообще относится не к данному вопросу, а к выводам той же логической формы, что и рассматриваемый вывод, и к вопросу о том, могут ли они обосновывать свои заключения. Можно считать, что (2) является необходимым условием логической общезначимости вывода. Однако его недостаточно по той простой причине, что оно означает только требование, чтобы все выводы одной и той же логической формы обладали свойством (1). В то же время свойства (1) недостаточно для того, чтобы вывод обладал «оправдательной силой» для заключения или мог бы считаться логически общезначимым. Тогда не совсем понятно, почему точка зрения, согласно которой вывод логически общезначим, если и только если его заключение — это логическое следствие из посылок в смысле Тарского, остается доминирующей[22].

Я полагаю, что с такой точки зрения невозможно описать применение выводов для оправдания, обоснования теорем, в доказательства которых они входят в качестве составных частей. Сразу не ясно, из чего должно состоять это описание. Если считать справедливым требование, чтобы оно вытекало из анализа понятия логически общезначимого вывода, нужно точно сформулировать содержание этого понятия.

4. *Проблема регресса при определении понятия логической общезначимости*

Какие условия должны выполняться для того, чтобы заключение некоторого вывода было окончательно обоснованным? Почему, в частности, не принять к действию первый эпиграф, помещенный в начале статьи? Ответить на этот вопрос труднее, чем порой считается. Можно сказать просто: если *B* есть логическое следствие *A*, то без дальнейшего анализа необходимо заключить, что *B* истинно, если только истинно *A*. Однако этого отнюдь не достаточно.

[22] Даже упомянутое в разделе 1 данной статьи определение «протологического следования» (претендующее, по-видимому, на максимальную степень абстрактности, поскольку оно, по выражению автора работы [Александр Беловежский 2011], «не основывается ни на каких допущениях» (т. е. вообще лишено оснований), никак не упрощает дела. Его ведь вполне можно считать и определением «протологического вывода» некоторого предложения A из множества посылок **Γ** с помощью правила R преобразования значений элементов **Γ** в значение предложения A. На R не накладывается никаких ограничений. Пусть R — такая операция на множестве значений $\{1, 0\}$, что $R: i \rightarrow i$ ($i = 1$ или 0); т. е. R превращает каждый элемент множества значений в самого себя. Тогда простая конструкция $A \vee B \,/\, B;\ B \,/\, A \supset B;\ \Rightarrow (A \vee B) \supset (A \supset B)$ подпадает под данное определение и становится протологическим выводом утверждения $(A \vee B) \supset (A \supset B)$. Возможно, в протологике и протовыводимо такое утверждение, но принять подобную «логику», при любом разумном различии между дизъюнкцией и импликацией, я не в силах.

Рассмотрим вывод, в котором посылки и заключение разделены большим числом шагов (применений правил вывода). Пусть *B* — теорема, например, теорема Уркварта о неразрешимости известной пропозициональной релевантной системы **R**, а *A* — конъюнкция утверждений, составляющая начальный пункт доказательства этой теоремы. Не подлежит сомнению, что необходимо считать (1) обоснованными все утверждения, с которых начинается доказательство, и (2) что одношаговый вывод из начальной точки является общезначимым. Однако допущений (1) и (2) недостаточно для того, чтобы оправданно считать эту теорему доказанной; возможно, она имела место задолго до того, как Уркварт предъявил свое доказательство. Возьмем не выдуманный пример, а факт из истории логики. В 1930 г. Ж. Эрбран предъявил доказательство своей знаменитой и очень важной теоремы, носящей название «теорема Эрбрана». Тридцать три года спустя, в 1963 г., было выяснено, что в доказательстве Эрбрана имеется существенный пробел (ошибка) в виде неправильных лемм! Хорошо, что (в отличие от упомянутого в эпиграфе случая с неудачником Евклидом) «дыру в доказательстве удалось заткнуть». Однако спрашивается, существовало ли доказательство Эрбрана в 1930 г., если только долгое время спустя оказалось, что его тезис является логической истиной? Это было «неправильное доказательство»? Тогда что означает этот не совсем ясный термин?

Теперь допустим, что пришлось «отозвать» и пересмотреть предложенное доказательство по причине обнаружившегося в нем пробела. Допустим, что позже, при заполнении этого пробела, исходные пункты не изменяются, поскольку они были истинными, когда строилось первое, неполное доказательство. При таких допущениях упомянутый выше «одношаговый вывод», т. е. получение данной теоремы из конъюнкции исходных пунктов пересматриваемого доказательства, был общезначимым, однако общезначимость доказательства в целом, фактически, была иллюзорной, пока существовал пробел. Значит, Уркварт и Эрбран (и кто угодно) еще оправданно утверждали истинность теоремы, предъявив неполное ее доказательство, в противоположность тому, что в действительности было не исключено, что придется «отозвать» это доказательство по причине обнаруженного в нем пробела[23]. Все это позволяет сказать, что вовсе не *общезначимость* выводов в доказательстве *per se* дает право утверждать его заключение. Такое право дает только выдержавшее любую проверку, достаточно подробное доказательство, другими словами — доказательство без пробелов. Однако что такое доказательство без пробелов? Можно сказать, что таковым является доказательство, которое образовано только из логически общезначимых выводов. Это возвращает нас к вопросу о логической общезначимости вывода. Нетривиальность этого понятия становится очевидной, если задаться очень важным, на мой взгляд, вопросом о том, *как получать новое знание с помощью выводов*. Оказывается, что вряд ли можно использовать выводы для получения знаний, если необходимо предварительно установить их общезначимость.

[23] Моя гипотеза в данном случае состоит в том, что пробел в доказательстве Уркварта все-таки есть.

Существует ряд аргументов, показывающих, что невозможно обосновать что-либо с помощью вывода, если сначала должна быть установлена общезначимость этого вывода. Один из них содержится во второй части этой статьи в рассказе Л. Кэрролла об Ахиллесе и черепахе. Аргумент такой же структуры описан и у Б. Больцано [Bolzano 1837]. Он исходит из того, что обосновать вывод *I* предложения *B* из предложения *A* — значит утверждать, что *B* истинно потому, что *A* истинно и *I* общезначим. В результате исходный вывод заменяется выводом истинности *B* из двух посылок: (1) *A* истинно, и (2) если *A* истинно, то и *B* истинно. Далее нужно сказать, что для получения полного основания для *B* необходимо учесть и общезначимость нового вывода *B* из (1) и (2). Получается еще один новый вывод с тремя посылками — к (1) и (2) прибавляется посылка (3): если (1) и (2), то *B* истинно. В таком рассуждении regressus in infinum очевиден.

У Л. Кэрролла регресс порождается вопросом о том, почему необходимо принять заключение общезначимого вывода, посылки которого приняты. Напомним, что черепаха принимает не только то, что *A* истинно, но и то, что если *A* истинно, то должно быть истинным и *B*, но все равно не понимает, почему при этом она должна принять и *B*. Ахиллес утверждает, что *B* логически следует из того, что черепаха уже приняла, следовательно, верно (3). Черепаха не возражает и против этой импликации, по-прежнему не понимая, почему нужно принять и *B*. Чтобы «логически заставить» черепаху принять *B*, Ахиллес опять предлагает, импликацию: если все посылки (1)–(3) истинны, то *B* должно быть истинным. Регресс продолжается так же, как у Больцано. Как же выйти из такой ситуации[24]? По крайней мере, не ясно, может ли здесь помочь какой-нибудь вид необходимости. Ведь у Кэрролла, предполагается, что черепаха принимает не только «если *A* истинно, то *B* истинно», но и «если *A* истинно, то *B должно* быть истинным», ничего не ведая о том, что эта более сильная посылка дает информацию, относящуюся к вопросу об оправданности убеждения в истинности *B*. Кроме того, regressus in infinum имплицитно содержится даже в менее строгом условии, чем знание об общезначимости вывода, если оставаться в рамках понятия общезначимости Тарского. Ситуация регресса возникает всегда, когда предполагается, что понятие общезначимости вывода нужно уточнять и выяснять, откуда нам о ней известно. Если общезначимость не очевидна, то ее нужно сделать таковой с помощью выводов, общезначимость которых, в свою очередь, должна быть установлена. Эти выводы должны быть или того же сорта, как и вывод, общезначимость которого мы пытаемся показать, или другого сорта… и так далее.

Здесь хочу заметить, что и эта «сказка» далеко не нова. Аристотель следующим образом высказывался об этой трудной для любой системы дедукции методологи-

---

[24] По мнению Больцано, на первоначальный вопрос, порождающий регресс, нужно ответить негативно. Общезначимость вывода нельзя описать как часть основания его заключения; общезначимость вывода — это предпосылка (предварительное условие) для того, чтобы посылка была основанием заключения. Кэрролл вообще оставляет в качестве загадки вопрос о том, почему черепаха обязана принять заключение вывода, посылки и общезначимость которого она приняла.

ческой проблеме источника, или окончательного основания доказательств: «…Это невежество не знать, для чего следует искать доказательства и для чего не следует. На самом же деле для всего без исключения доказательства быть не может (ведь иначе приходилось бы идти в бесконечность, так что и в этом случае доказательства не было бы); а если для чего-то не следует искать доказательства, то они, надо полагать, не будут в состоянии сказать, какое же начало считают они таким [не требующим доказательства] в большей мере» [Аристотель 1978а: 126][25].

Вряд ли такого цикла, или регресса, можно избежать, сказав, что для достаточного числа выводов их общезначимость *непосредственно очевидна.* Напротив, в общем случае, ее необходимо показывать с помощью определенных шагов вывода, основанных на каком-то определении или экспликации. Возможно, убедительное и окончательное доказательство базовых дедуктивных принципов, в конечном счете, обречено на прагматический цикл[26]. Однако в логической практике обычно никто не доказывает общезначимость вывода перед тем, как его построить и использовать; к тому же требование, согласно которому это нужно делать, чтобы вывод окончательно обосновывал заключение и вынуждал их принимать, делает мизерной возможность получения знания с помощью выводов.

Чтобы показать, что общезначимый вывод безоговорочно оправдывает свое заключение, конечно, недостаточно взять произвольный вывод, о котором вообще ничего не известно. Возможно, более полезно и *достаточно* то, что некто строит вывод, выводит заключение из посылок, которые принимаются [как истинные]. Разумен ли такой путь, зависит от того, что значит *строить вывод.* Вывод *B* из *A* обычно описывается в форме «*B* потому, что *A*» или « *A*, значит, *B*». Если под построением вывода понимать только то, что заключение утверждается или принимается на основании посылок, или в силу посылок, то *недостаточно* «построить общезначимый вывод» для того, чтобы обосновать истинность заключения. Нет никакой гарантии, что пробел в доказательстве не обнаружится именно в выводе, понимаемом в том смысле, что предложение *B* утверждается на основе уже установленной посылки *A*. Тогда все доказательство придется пересматривать. Это значит, что для предложения *B* не было достаточных оснований, и оно не может считаться окончательно оправданным.

По-видимому, для окончательного обоснования [истинности] предложения, необходимо нечто большее, чем выполнение условия, согласно которому данное предложение является заключением общезначимого вывода из посылок, которые принимаются [как истинные]. В чем будет заключатся это более строгое требование?

[25] В этой цитате слово «они» обозначает противников закона противоречия; оно в полной мере относится и к современным «ниспровергателям» классической логики, борющимся не только с законом исключенного третьего, но и с законом противоречия.

[26] Рассматривая неизбежную цикличность при любой попытке оправдать дедуктивные принципы, Майкл Дамметт использует понятие *прагматическая цикличность*, подчеркивая тем самым, что проблема не в том, чтобы установить корректность дедуктивного принципа, допустив то, что нужно доказать (ибо это было бы грубой цикличностью), а только в применении того же самого дедуктивного принципа при доказательстве его корректности. См., напр.: [Dummett 1991, Part 9].

Возможно ли ментальное действие, подобное *распознаванию* свойства логической общезначимости вывода, которого достаточно для окончательного обоснования [истинности] заключения? Анализ этих вопросов выходит за рамки данной статьи. Это же относится и к очень важному методу анализа выводов, оформленному независимо Генценом и Яськовским в виде систем натурального вывода и появившихся позднее родственных им так называемых табличных конструкций. Здесь мы ограничимся краткими замечаниями.

Не подлежит сомнению, что процесс построения вывода может быть очень сложным. Например, посылка A не обязательно всегда утверждается категорически, она может утверждаться условным образом при каких-то допущениях, и тогда заключение утверждается при этих же допущениях. Классический пример — reduction ad absurdum: придя к противоречию при допущении A, мы заключаем, что это допущение ложно и делаем заключение «в силу редукции к не-A». В таком случае заключение вывода утверждается категорически или, по крайней мере, уже не зависит от допущения A, которое было отброшено. В таком случае утверждение заключения должно сопровождаться указанием на некоторую *операцию*, которая оправдывает его. Это соответствует интуитивному пониманию вывода как объекта, состоящего из чего-то большего, чем просто заключение и какие-то посылки. Вполне возможны случаи, в которых можно явно указать только заключение и посылки, однако всегда существует некий вид включенной в вывод операции, благодаря которой заключение принимается на основе посылок. Иногда такая операция указывается явно, как в случае натурального вывода, но чаще всего (как, например, при аксиоматическом подходе) она остается скрытой. По моему мнению, при анализе общезначимости выводов полезно и даже необходимо явно указывать такие операции и рассматривать *вывод как действие*, с помощью которого мы получаем оправдание или обоснование, заключения, оперируя каким-то образом уже зафиксированными основаниями посылок. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать вывод как нечто заданное не только его посылками и заключением (или принятыми и отброшенными допущениями, если таковые есть), но и операцией, определенной на любого рода основаниях посылок. При анализе вывода как интеллектуального действия, исходным пунктом остается, конечно, *непосредственный вывод*[27], или *единичный шаг вывода*.

В обычной логической практике мы абстрагируемся от субъекта, выполняющего операцию, и времени, в которое она выполняется. Можно также абстрагироваться от конкретных посылок, их оснований и заключения, оставив только операцию и отношение, которое должно иметь место между посылками и заключением. Тогда речь пойдет о *форме вывода*. Примером может служить modus ponens, ассоциированный с подходящей операцией. Наконец, можно абстрагироваться даже от операции, оставив одну форму вывода, и тогда речь пойдет уже о *фигуре вывода* или *схеме*.

[27] В простом, упомянутом выше смысле этого термина. Соотношение «вывода как действия» и «вывода как результата» — это опять же отдельная интересная тема.

Соответственно при такой конвенции высказывания об общезначимости вывода будут формулироваться следующим образом:

• Непосредственный вывод общезначим, если и только если имеются основания его посылок и результат применения к ним некоторой операции является основанием для заключения.

• Форма вывода общезначима, если и только если все ее подстановочные примеры общезначимы.

• Схема вывода общезначима, если и только если ее можно ассоциировать с некоторой операцией так, чтобы получить общезначимую форму вывода.

Итак, построить (или сделать) вывод — это значит просто применить конкретную операцию к аргументам, играющим роль посылок. Другими словами, построение вывода означает то, что к данному исходному материалу (в виде посылок) применяется конкретная операция. Что значит применение некоторой операции к аргументам, довольно хорошо известно из других научных областей. В таком случае *сделать общезначимый вывод — значит применить конкретную операцию к установленным (любым приемлемым способом) аргументам и оценить результат*, а не показывать предварительно, что вывод общезначим. Грубо говоря, проверяя то, что сделано, можно установить, имеется ли в данном случае окончательное обоснование заключения и не нужно отдельно размышлять над вопросом «Что такое общезначимый вывод?». Знание об общезначимости вывода не следует делать предпосылкой использования этого вывода для построения доказательства. Такое знание можно получить за счет процесса рефлексии над актом вывода. Возможно, что экспликация такого процесса будет состоять из, так сказать, вспомогательных выводов, и среди них найдется вывод именно того типа, который рассматривается. Однако порочный круг, или регресс, в данном случае не возникает в силу уже высказанных ранее соображений.

• Всегда важно учитывать разницу между доказательствами и верификацией доказательств. Доказательство — это то, что устанавливает теорему, и традиционно, со времен древних греков, установление теоремы означает обладание ее доказательством. Верификация того, что некий объект является доказательством, служит предпосылкой утверждения о том, что данный синтаксический объект есть доказательство. Во избежание скрытого регресса необходимо определить границы того, что оправдывает (подтверждает, обосновывает) утверждение. Если χ есть — это, то, что требуется для обоснования утверждения A, нельзя требовать, чтобы было верифицировано и то, что χ есть основание утверждения A. Обоснование, как и утверждал Аристотель, должно где-то заканчиваться[28]. Верификация того, что доказательство есть доказательство или что сделанное в доказательстве вычисление правильно, не является частью самого доказательства.

[28] Аналогичный довод для требования разрешимости свойства быть доказательством в логическом исчислении приводит Черч [Church 1956].

• Важнее ответить на вопрос не о том, что есть доказательство вообще, а о том, что значит доказать конкретное утверждение, т. е. стать обладателем доказательства этого утверждения. Это именно *обладание* доказательством утверждения, а не просто *существование* доказательства утверждения. Возможно, некоторых метатеоретических фактов, относящихся к системе, в которой сформулировано утверждение *A*, достаточно для обладания *дедуктивным* доказательством *существования доказательства A*. Например, установив непротиворечивость системы, содержащей только закон тождества и рекурсивные определения операций возведения в степень, умножения и сложения, можно дедуктивно доказать существование сложного формального вывода уравнения $2^2 \times 2^2 = 2^4$ в этой системе. Не ссылаясь на формальные доказательства, можно просто сказать, что мы обладаем дедуктивным доказательством, если создана цепочка выводов, и очевидно, что на каждом шаге заключение действительно следует из посылок.

• Нет фундаментального различия между ссылкой на результат дедуктивного вывода и ссылкой на результат человеческого (или машинного) вычисления — в обоих случаях мы ссылаемся на событие в форме *акта построения*. Эпистемологическим следствием из этого можно считать то, что любая теорема известна только *a posteriori*.

5. *Выводы, вычисления и предсказания*

В процессе интенсивного внедрения в логику математических методов основные результаты в области анализа логических выводов были получены в рамках так называемой *теории доказательств* и той ее части, которую можно именовать математической теорией логического вывода[29]. Теория доказательств, основы которой заложены в трудах Гильберта, была задумана как основной инструмент анализа математического рассуждения. Она быстро достигла пика своего развития в работах Геделя и особенно (на мой взгляд) Генцена[30], а сейчас считается разделом математики или, в крайнем случае, математической логики. После короткого периода бурного

[29] Нужно с сожалением отметить тот факт, что единственной серьезной книгой на русском языке, в которой достаточно систематически изложены, так сказать, основы математической теории логического вывода, до сих пор остается сборник «Математическая теория логического вывода» [Математическая теория 1967]. Это сборник переводов (за исключением статьи Г. Е. Минца) работ различных авторов, ставших классическими уже полвека тому назад. Впрочем, эта книга, особенно если к ней добавить переводы на русский язык монографий Д. Правица, Г. Такеути и сборник работ А. Г. Драгалина, дает возможность русскоязычному читателю ознакомиться с этой увлекательной темой.

[30] По некоторым, возможно, не вполне достоверным свидетельствам, Генцен, погибший, как известно, в Праге в мае 1945 г., незадолго до своей смерти говорил одному из своих знакомых, что ему удалось получить доказательство непротиворечивости математического анализа. По-видимому, в тюрьме ничего не удалось записать. Лучшее оправдание теории доказательств, пожалуй, и придумать невозможно.

развития в середине и конце прошлого века наступил период спада. Согласно скоропалительным и голословным утверждениям некоторых логиков-философов, вслед за классической логикой, программа Гильберта «рухнула», якобы, под давлением знаменитых теорем Геделя (но тогда Генцена, если бы он успел обнародовать свой последний результат (см. сн. 29), следовало бы вообще объявить сумасшедшим). Попытки построить систематическую Общую теорию доказательств (в работах Правица, Крайзеля и др.) пока не увенчались успехом[31]. В силу неизвестных пока причин внимание математиков и логиков-философов переключилось на другие аспекты исследований по логике и основаниям математики. Тем не менее, как бы в продолжение первого раздела этой статьи, я придерживаюсь того мнения, что никакого кризиса логики в действительности нет. Если же логика в целом все же «впала в кризис», то вовсе не потому, что теория дедукции является «максимальным упрощением и сильным огрублением некоторых умственных операций человека» [Александр Беловежский 2011: 213], безудержно расплодились логические системы, не стала общепринятой «логика как алгебра», не удалось создать зачатки искусственного интеллекта, характер вычислительных устройств оказался дискретным, а преподавание логики — крайне малоэффективным. Желаемый кризис логики лучше было бы объяснять в первую очередь стагнацией исследований в области теории доказательств.

Анализ теории доказательств — неисчерпаемая тема и, конечно, ее не удастся обсудить в данной статье. Вместо этого в заключение я кратко коснусь прикладного, если можно так выразиться, аспекта затронутых в ней вопросов, надеясь на то, что они хотя бы как-то подкрепят «пропаганду» ценности и эффективности теоретико-доказательственных методов как неотъемлемой (если не основной) части логических исследований. Речь идет прежде всего о вопросах взаимосвязи между доказательствами и вычислениями, которые, с легкой руки Лейбница, сохраняют свою актуальность и по сей день. (В отличие от потерпевшей крах программы Гильберта «программа Лейбница», как уже упоминалось, была реализована в виде «протологики».) Оказывается, между доказательствами (выводами) и вычислениями действительно есть соответствие. Это соответствие представляет особый интерес и может быть развито для открытия новой перспективы дедуктивного подхода, например, к верификации компьютерных программ.

---

[31] По мнению Крайзеля, недостатком программы Гильберта было то, что слово «доказательство» в теории доказательств означало формальный вывод, а для обеспечения своей жизнеспособности она якобы *должна* заниматься *интуитивными доказательствами*. Я не думаю, что выполнение это требования облегчит дело, да и обнаружить удовлетворительного раскрытия содержания понятия «интуитивное доказательство» мне не удалось. (В связи с проблемами, затронутыми в данной статье, см. также параграфы 1 и 2 работы Крайзеля [Крайзель 1981: 117–138], хотя перевод названия параграфа 1 кажется мне крайне неудачным.) Вообще говоря, борьба против формализма Гильберта часто напоминает мне борьбу с формализмом в советской науке периода 30-х — 80-х годов прошлого века, когда «формальную логику» предлагалось заменить различными «содержательными логиками» и даже некой диалектической логикой с «диалектическими понятиями».

Карри первым отметил изоморфизм между доказательствами в импликативном фрагменте минимальной пропозициональной логики и определенными вычислительными системами (комбинаторной логики и лямбда-исчисления) [Curry & Feys 1958]. Этот изоморфизм был расширен Говардом [Howard 1980] до изоморфизма между выводами в системе интуиционистской предикатной логики Генцена и обогащенным лямбда-исчислением. Этот результат иногда называется соответствием Карри-Говарда.

Такое формальное соответствие приобретает более глубокое значение, когда оно комбинируется с вопросами, рассмотренными в двух предыдущих разделах данной статьи. Здесь нельзя не упомянуть наблюдение, впервые сделанное Колмогоровым [Kolmogoroff 1932]. Суть его в том, что высказывания в интуиционистской системе можно интерпретировать как задачи, интуиционистские доказательства — как методы, или программы, их решения. Эта интерпретация интуиционистских доказательств была систематически разработана Мартином-Лефом [Martin-Löf 1982]. В его теории типов выражения вида $a \in A$ можно понимать любым из трех способов: a есть доказательство высказывания A, a есть объект типа A или a есть программа (алгоритм) решения задачи A.

В данном случае верификация корректности программы, показывающая, что программа делает то, что она должна делать, по своей сути, совпадает с проверкой корректности *предполагаемого доказательства некоторого высказывания*. Другими словами, в случае положительного результата проверки подтверждается, что рассматриваемое доказательство «действительно доказывает», т. е. окончательно обосновывает это высказывание. Кроме того, при прочтении $a \in A$ как «a есть доказательство A» разрешим вопрос о том, верно ли $a \in A$ в этой системе. Таким образом, задача верификации корректности программы сводится к механически разрешимой задаче. Конечно, отдельная попытка проверить, верно ли то, что $a \in A$, может оказаться неудачной, но если выражение $a \in A$, доказуемо в данной системе, то в силу ее полноты программа, обозначенная a, действительно решает задачу A.

Одной из характерных черт любой теории типов является то, что в ней рассматриваются не объекты вообще, а объекты определенных типов. Аналогично, если теория типов используется при создании языка программирования, то рассматривается не программа вообще, а программа для решения конкретной проблемы. Когда программа строится в теории типов, она неразрывно соединена с задачей, которую она решает. Если программа создана в языке, в котором задача, решаемая этой программой, не включена в процесс построения самой программы, утверждение о том, что такая программа P решает задачу t, формулируется отдельно (например, в форме выражения *Execute(P, t)*). В таком случае нет возможности механически верифицировать *Execute(P, t)*; остается надеяться на то, что это выражение можно доказать дедуктивно.

В последнее время большое значение в «прикладном» аспекте приобрела комбинаторная логика. Не вдаваясь в подробности того, как и почему она возникла, отметим, что изучение логических комбинаторов началось в начале 1920-х годов в работах Шенфинкеля (Shönfinkel). Далее эту область логических исследований развивали Карри, Фитч, Черч, Клини, Россер и Тьюринг, а в последнее время — Скотт, Селдин, Хиндли, Барендрегт и др. Их интересы были чисто теоретическими; они разрабатывали глубочайшие проблемы логики и математики. Возможно, никто из них даже не представлял себе, какое влияние окажет этот предмет на компьютерную науку. Он обрел достаточно твердую основу, большей частью благодаря усилиям логика Дана Скотта, который построил интересные модели для теории комбинаторов, и в наши дни комбинаторная логика играет важную роль в области компьютерной науки и искусственного интеллекта. В частности, она применяется в компьютерных программах.

Суть компьютера в том, что он выполняет программы, а в наши дни все компьютерные программы можно написать в терминах комбинаторов. Особый интерес представляет идея о том, что для двух программ X и Y можно получить новую программу, используя Y в качестве ввода в компьютер с программой X; на выходе получится программа XY. Оказывается, что *все* компьютерные программы выразимы в терминах базовых комбинаторов S и K, которые для произвольных программ x, y и z определяются равенствами $\mathrm{S}xyz = xz(yz)$ и $\mathrm{K}xy = x$ соответственно. Такая ситуация в математической терминологии называется *изоморфизмом*. Из изоморфизма между множеством предложений, которые предполагаются логически доказуемыми, и множеством компьютерных программ следовало бы, что любую информацию, которую способен получить человек с помощью интеллекта, компьютерщик может получить выполняя программу. Как уже было отмечено, Лейбниц считал это возможным только при наличии беспредельно сильного ума и «с приложением соответствующих условий».

Мне кажется, что существенный «пробел» в идеалах людей, работающих в области искусственного интеллекта, состоит в том, что они пытаются моделировать мышление людей как логических организмов, основательно не разобравшись даже в дедуктивных принципах такого мышления. В то же время вычисляют компьютеры намного быстрее человека, обыгрывают лучшего среди людей шахматиста, намного лучше человека направляют смертоносные ракеты в цель и даже работают «оракулами». Конечно, до Дельфийского Оракула, Кассандры, Иоанна Богослова, Нострадамуса или Ванги им еще далеко, но, наверное, они уже могут хотя бы посрамить Фалеса Милетского с его элементарным предсказанием лунного затмения. Почему бы современным логикам-философам, имея системы эпистемической логики и принцип математической индукции, не разработать «логику предсказаний»?

Ведь предсказания таких не существующих «в момент речи» событий, как извержение вулкана, революция и даже «второе пришествие», всегда базируются на определенном рассуждении (которое предсказатель обычно скрывает). Это рассуждение, как и любое другое, не может быть лишено логической составляющей, и, значит, вполне может быть подвергнуто логическому анализу. Мое предположение о возможности построения такой «логики» состоит в том, чтобы представить предсказание (как процесс с конкретным результатом) в виде *предполагаемого доказательства некоторого высказывания*. Тогда, проверив на корректность все выводы, входящие в это доказательство, можно было бы не только формулировать предсказание, но и утверждать неизбежность результата, т. е. то, что предсказание *сбудется*. При этом совершенно не обязательно отказываться от закона противоречия, вводить множество w значений терминов и т. п. Для формулировки определений базовых операций (правил вывода) можно воспользоваться, например, материалом протологики. Тогда (в честь Лейбница) можно было бы сказать: «Прекратите спорить о том, что грянет раньше — Вознесение праведников, или Апокалипсис. Давайте вычислять!». Разумеется, сказанное относится к рациональным и прежде всего к научным предсказаниям.

«А как же озарения, как от удара молнии, вспышки сознания, гениальные выводы, противоречащие всему, что было сделано до этого?». Как быть с логическими процессами, которые «основаны на восприятии *бесконечности*, которая схватывается мгновенно, что в пошаговом рассуждении недоступно» [Александр Беловежский 2011: 220]? А никак! Поскольку, согласно Кантору, бесконечностей много, лучше схватить их все сразу или вообще не хватать ни одной. Еще лучше скромно согласиться с Аристотелем в том, что «это невежество не знать, для чего следует искать доказательство, а для чего не следует» [Аристотель 1978б: 126].

Литература

Александр Беловежский etc. 2011 — *Александр Беловежсский*, *Александр Карпенко*, *Александр Чаха*, *Шура Белочкин*, *Alex Zero & Б. К.* Псевдонимы. М.; СПб.: ЦГИ, 2011.

Аристотель 1978а — *Аристотель*. Соч.: в 4 т. Т. 1. М.: Мысль, 1978.

Аристотель 1978б — *Аристотель*. Соч.: в 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1978.

Вригт 1992 — *Вригт Г. Х.*, фон. Логика и философия в XX веке // Вопросы философии. 1992. № 8. С. 80–91.

Драгалин 2003 — *Драгалин А. Г.* Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ. М.: УРСС, 2003.

Карпенко 1999 — *Карпенко А. С.* Логика в России. Вторая половина XX века // Вопросы философии. 1999. № 9. С. 148–158.

Карпенко 2003 — *Карпенко А. С.* Современное состояние исследований в философской логике // Логические исследования. Вып. 10. М.: Наука, 2003. С. 61–93.

Крайзель 1981 — *Крайзель Г.* Исследования по теории доказательств. (Сборник статей в переводе с английского.) М.: Мир, 1981.

Лейбниц 1984 — *Лейбниц Г.* Собр. соч.: в 4 т. Т. 3. М.: Мысль, 1984.

Логическая семантика 2011 — Логическая семантика: перспективы для философии языка и эпистемологии. М.: Креативная экономика, 2011.

Математическая теория 1967 — Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967.

Серебрянников 1970 — *Серебрянников О. Ф.* Эвристические принципы и логические исчисления. М.: Наука, 1970.

Смирнов 1999 — *Смирнов В. А.* Теория логического вывода. М.: РОССПЭН, 1999.

Смирнова 2000 — *Смирнова Е. Д.* Логика в философии и философия логики // Логические исследования. Вып. 7. М.: Наука. С. 217–231.

Юм 1966 — *Юм Д.* Собр. соч.: в 2 т. Т. 1. М.: Мысль, 1966.

Bolzano 1837 — *Bolzano B.* Wissenschaftslehre. I–IV. Sulzbach: J. Seidel, 1837.

Caroll 1985 — *Carroll L.* What the Tortoise said to Achilles // Mind. IV. 1985. P. 278–280.

Cozzo 2005 — *Cozzo C.* Can a Proof Compel us? // Mathematical Reasoning and Heuristic / ed. by C. Cellucci, D. Gillies. Lonon: King's College Publications, 2005. P. 191–211.

Church 1956 — *Church A.* Introduction to mathematical Logic. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1956 (перевод: *Черч А.* Введение в математическую логику. М.: Иностранная лит-ра, 1960).

Curry & Feys 1958 — *Curry H., Feys R.* Combinatory Logic. Vol. 1. Amsterdam: North Holland, 1958.

Dummett 1991 — *Dummett M.* The Logical Basis of Metaphysics. London: Duckworth, 1991.

Ethemendy 1990 — *Ethemendy J.* The Concept of Logical Consequence. Cambridge, Masschusetts: Harvard University Press, 1990.

Gentzen 1967 — *Gentzen G.* Untersuchungen uber das logische Schliessen // Mathematische Zeitschrift. 1935. Vol. 39. S. 176–210, 405–431 (перевод: *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. С. 9–74).

Harman 2002 — *Harman G.* Internal Critique: A Logic is not a theory of reasoning and a theory of reasoning is not a logic // Handbook of the Logic of Argument and Inference (Studies in Logic and Practical Reasoning) / ed. by D. M. Gabbay. Amsterdam: North Holland, 2002.

Heiting 1956 — Heiting, Arend. Intuitionism, An Introduction. Amsterdam: North Holland, 1956.

Howard 1980 — *Howard W. A*. The formulae-as-types notion of constructions // To H. B. Curry: essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism / eds. by J. P. Seldin, J. R. Hindley. London, New York: Academic Press, 1980. P. 479–490.

Kneale & Kneale 1962 — *Kneale W., Kneale M.* The development of logic. Oxford: Oxford University Press, 1962.

Kolmogoroff 1932 — *Kolmogoroff A. N.* Zur Deutung der intuitionishchisen Logic // Mathematische Zeitschrift. Vol. 35. 1932. S. 58–65.

Martin-Löf 1966 — *Martin-Löf Per*. On the meanings of the logical constants and justification of the logical laws // Nordic Journal of Philosophical Logic. Vol. 1. 1996. S. 11–60.

Martin-Löf 1982 — *Martin-Löf Per*. Intuitionistic Type Theory. Napoli: Bibliopolis 1982.

Prawitz 1971 — *Prawitz D.* Ideas and results in proof theory // Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium. P. 237–309 / ed. by J. Fenstad. Amsterdam: North-Holland, 1971.

Prawitz 2005 — *Prawitz D.* Logical Consequence from a Constructivist Point of View // The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematical Logic. Oxford: Oxford University Press, 2005.

Prawitz 2006 — *Prawitz D.* Natural Deduction. Proof-theoretical Study. New-York: Dover Publications 2006 (перевод: *Правиц Д.* Натуральный вывод. Теоретико-доказательственное исследование. М.: Лори, 1997).

Smullyan 1985 — *Smullyan R.* To Mock a Mockingbird. New York: Alfred A. Knopf Inc., 1985.

Smullyan 1997 — *Smullyan R.* The Riddle of Scheherazade. New York: Alfred A. Knopf Inc., 1997.

Sundholm 1998 — *Sundholm G.* Inference versus Consequence. Prague: Czech Acad. Sc., 1998.

Takeuti 1975 — *Takeuti G*. Proof Theory, Studies in Logic and Foundations of Mathematics. Vol. 81. Amsterdam; London; New York, 1975 (перевод: *Такеути Г.* Теория доказательств. М.: Мир, 1978).

Tarski 1956 — *Tarski A*. Logic, Semantics ant Metamathematics. Oxford: Oxford University Press, 1956.