А. С. Карпенко

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ VERSUS КЛАССИЧЕСКОЙ[*]

Введение

В 1993 г. вышла книга Д. М. Габбая «Классическая логика против неклассических. Универсальность классической логики»[1]. Мы же придерживаемся совершенно противоположной точки зрения, о чем и говорит название нашей работы.

Заметим, как справедливо указывает Габбай, вначале надо определить, что мы будем понимать под *логической системой*[2]. У Габбая это *многосортная* классическая логика, возможно, расширенная до *второпорядковой*, но редуцируемая к первопорядковой. Таким образом, на первый взгляд мы имеем дело с исключительно богатой логической системой, считаемой обычно классической. В эту классическую логику переводятся наиболее интересные, по Габбаю, неклассические логики, а именно модальные и временные логики, в силу чего она и называется универсальной, тем более что автоматизированная дедукция классической логики без труда распространяется на названные неклассические логики.

Цель данной статьи — дать характеристические свойства классической логики (как пропозициональной **CL**, так и первопорядковой **QCL**) и показать, что классическая логика выступает всего лишь тем ядром (а на самом деле наиболее простой конструкцией), которая естественным путем порождает различные и зачастую *континуальные* классы неклассических логик. Вторая задача — обозреть по возможности наиболее интересные направления в этой области.

---

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 04-03-00266) и РФФИ (проект № 05-06-80083).

[1] *Gabbay D. M.* Classical vs. Non-Classical Logics. The Universality of Classical Logic. Saarbrücken, 1993.

[2] Не случайно, что уже через год под редакцией Габбая выходит известный сборник статей: What is a Logical System? / Ed. by D. M. Gabbay. Oxford, 1994 (2-е изд.: New York, 1995).

1. Характеристические свойства CL

Первая аксиоматизация (гильбертовская) классической логики **CL** была предпринята Г. Фреге в 1879 г.[3] Однако в терминах современного символического языка аксиоматизация **CL** появилась в Principia Mathematica А. Уайтхеда и Б. Рассела[4]. Важным этапом в развитии **CL** стала работа Э. Л. Поста[5], где впервые была доказана дедуктивная и *функциональная* полнота **CL**.

Под *логикой* **L** (пропозициональной) в языке *L* понимается произвольное множество формул *Fm*, которое замкнуто относительно правил вывода modus ponens (*MP*) и подстановки (*Subst*). Если **L** — конечное множество, то **L** называется (гильбертовским) *исчислением*.

Теперь перейдем к основным характеристическим свойствам **CL**: как к строго формальным (I), так и к философским (II).

I (a). **CL** является *максимальной* в том смысле, что она не имеет непротиворечивых расширений: всякое добавление к ней в качестве аксиомы какой-либо формулы, не доказуемой в ней, делает ее противоречивой.

(b). **CL** имеет наиболее простую семантику, какую только можно изобрести, т. е. имеется двузначная модель, которая является *точной* (теорема адекватности), что и было доказано Э. Л. Постом. Однако последнее ничуть не означает, что **CL** является именно двузначной логикой. Необходимо и достаточно, чтобы множество истинностных значений образовывало *булеву алгебру*[6].

(c). Множество замкнутых классов функций **CL** является счетным[7].

II (a). **CL**-структура сохраняется, если ее высказывания говорят только о прошлых, настоящих и детерминированных событиях[8].

(b). **CL** — логика конкретного знания и веры[9].

---

[3] *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 65–142.

[4] *Whitehead A., Russell B.* Principia Mathematica. Cambridge, 1910–1913 (2-е изд.: Cambridge, 1962).

[5] *Post E. L.* Introduction to a General Theory of Elementary Propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol. 43. No. 3. P. 163–185.

[6] Handbook of Boolean Algebras. Vol. I–III / Ed. by J. D. Monk. Amsterdam, 1989.

[7] *Post E. L.* Two-valued Iterative Systems // Annals of Mathematical Studies. 1941. Vol. 5.

[8] *Prior A. N.* Formal Logic. Oxford, 1955. P. 250.

[9] *Непейвода Н. Н.* Прикладная логика. Новосибирск, 2000. С. 405.

Понятно, что все указанные свойства говорят о существенных границах **CL**.

2. Характеристические свойства QCL

В 1928 г. Д. Гильберт на международном конгрессе математиков в Болонье (а также в первом издании «Основ теоретической логики», написанных совместно с В. Аккерманом в 1928 г.) поставил проблему семантической (дедуктивной) полноты первопорядковой логики как одну из проблем оснований математики. Уже годом позже эта проблема была решена в диссертации К. Гёделем: в **QCL** доказуемы все первопорядковые тавтологии. Дедуктивная полнота и способность первопорядковой логики переводить рассуждения, проводимые в естественном языке и особенно в математике, на язык формальной логики оказались настолько плодотворными и впечатляющими, что она стала считаться наиболее подходящим и *достаточным* инструментом для проведения строгих математических доказательств. По существу, этот тезис Гильберта разделяется большинством специалистов. Правда, указанная логика в отличие от логики высказываний не является ни разрешимой, ни максимальной.

Характеризацию QCL можно дать в терминах фундаментальных теоретико-модельных свойств теории *T* в первопорядковом языке. Этими свойствами являются:

Теорема компактности (для счетных языков). *Если каждое конечное множество предложений в T имеет модель, то T имеет модель.*

Компактность имеет место, поскольку во всех выводах используется только конечное множество посылок. Это свойство уже было выявлено Гёделем в работе о полноте **QCL**. Ранее были доказаны еще два свойства первопорядковой логики.

Теорема Лёвенгейма — Скулема о спуске. *Если T имеет какую-нибудь модель, то T имеет и счетную модель.*

Теорема Лёвенгейма — Скулема о подъеме. *Если T имеет бесконечную модель, то T имеет и несчетную модель.*

Понадобилось довольно-таки продолжительное время, пока П. Линдстрём[10] установил, что эти свойства являются характеристическими для **QCL** в следующем смысле:

---

[10] *Lindstrom P.* On Extensions of Elementary Logic // Theoria. 1969. Vol. 35. P. 1–11.

Теорема Линдстрёма. *Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно* $\wedge$, $\neg$, $\exists$ *и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма — Скулема*[11].

Эта работа стала парадигмальной для важнейших исследований в логике последней четверти XX в. По существу, теорема Линдстрёма дает определение первопорядковой логики, на самом деле **QCL** с равенством, в терминах ее глобальных свойств. Но из этих свойств следует серьезное ограничение на выразительные средства первопорядковой логики. Наиболее простой бесконечной математической структурой являются натуральные числа, и наиболее фундаментальным математическим понятием является понятие *конечности*. Но из теоремы компактности следует, что такие центральные понятия, как «конечность», «счетность», «вполне-упорядоченность» и т. д., не могут быть определены в первопорядковой логике. На самом деле конечное не различимо с бесконечным. В свою очередь, из теоремы Лёвенгейма — Скулема следует, что первопорядковая логика не различает счетность и несчетность и — отсюда — никакая бесконечная структура не может быть охарактеризована с точностью до изоморфизма. Более того, многие лингвистические понятия, дистинкции и конструкции выходят далеко за сферу применения QCL[12].

Заметим, что характеризация **QCL** может быть дана и в других терминах. Особый интерес представляет обобщение теоремы о функциональной полноте для логики высказываний **CL** на предикатный случай **QCL**. Эта теорема была доказана Дж. Цукером[13], т. е. показано, что определенное множество логических операций адекватно для **QCL**. Автор исходит из основного допущения, что для того, чтобы считаться логической операцией, ее «значение» должно полностью

---

[11] Интересно, что первоначально результат Линдстрёма не привлек к себе особого внимания, о чем говорит издание в 1973 г. знаменитой книги Г. Кейслера и Ч. Ч. Чэна «Теория моделей», где эта теорема вообще не обсуждается. Только в 3-м издании уже в предисловии говорится, что полученный результат служит отправной точкой для развития *абстрактной теории моделей* (см.: *Chang C. C., Keisler H. J.* Model Theory. Amsterdam, 1990).

[12] *Muskens R.* Meaning and Partiality. Studies in Logic. Language, and Information. Stanford, 1995; *Lonning U.* Plurals and Collectivity // Handbook of Logic and Language / Ed. by J. van Benthem, A. ter Meulen. Amsterdam; Oxford; Shannon; Tokyo; Cambridge (Mass.), 1997.

[13] *Zucker J. I.* The Adequacy Problem for Classical Logic // Journal of Philosophical Logic. 1978. Vol. 7. P. 517–535.

содержаться в аксиомах и правилах вывода. Таким образом, для характеризации **QCL** использован теоретико-доказательный подход[14].

Имеется еще один подход (чисто семантический) характеризации **QCL**, инициированный А. Тарским в 60-е годы и ныне активно обсуждаемый[15]. Основная идея состоит в определении того, что есть логические операции. А уж определив логические операции, легко выяснить, какую логику они задают. Результат С. Фефермана[16] состоит в том, что логические операции **QCL** определимы в терминах гомоморфно инвариантных операций одноместного типа. При этом он ссылается на обзор[17], где показана центральная роль одноместных предикатов в человеческом мышлении на примере естественного языка.

Что касается философской характеризации **QCL**, то она хорошо выявлена Н. Н. Непейводой в следующем виде: «Чтобы применить классическую логику, необходимо быть уверенным как минимум в том, что имеющиеся ресурсы достаточно велики либо расходуемые достаточно малы, чтобы пренебречь их ограниченностью; что новое знание не может перечеркнуть старое, что мы можем пренебречь временем либо по крайней мере его необратимостью»[18].

Последнее свойство наводит на весьма глубокие размышления, поскольку тема обратимости или необратимости времени — одна из центральных в современной физике и содержит сложнейший вопрос о *феномене прошлого*[19].

3. Расширения классической логики предикатов

Если следовать тезису Гильберта, то любое расширение **QCL** можно считать неклассической логикой. С этим соглашаются не все логики, и на то есть веские основания.

---

[14] Отметим, что еще в 60-е годы А. В. Кузнецовым был получен аналогичный результат. К сожалению, это доказательство не опубликовано по сей день.

[15] См. об этом: *Карпенко А. С.* Современные исследования в философской логике // Вопросы философии. 2003. № 9. С. 69.

[16] *Feferman S.* Logic, Logics, and Logicism // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1999. Vol. 40. N 1. P. 31–54.

[17] *Keenan E. L., Westerståhl D.* Generalized Quantifiers in Linguistics and Logic // Handbook of Logic and Language. P. 837–893.

[18] *Непейвода Н. Н.* Прикладная логика. С. 198.

[19] См. обзор данной проблематики: *Карпенко А. С.* Логика, детерминизм и феномен прошлого // Вопросы философии. 1995. № 5. С. 72–81.

Имеется много интересных логик, которые богаче первопорядковой логики, такие, как: *слабая логика второго порядка*, которая пытается построить понятие *конечного* в логике некоторым естественным образом (разрешается квантификация по конечным множествам); логики с различными *экстракванторами* типа «существует конечно много», «существует бесконечно много», «большинство» и т. д.; логики с формулами бесконечной длины; и, главное, логики высших порядков[20], среди которых особый интерес представляет сама логика второго порядка. Последняя разрешает квантификацию по произвольным функциям, определенным на области рассуждения, — точно так же, как обычную квантификацию по элементам из этой области. Поскольку множества и отношения могут быть представлены их характеристическими функциями, второпорядковая логика охватывает также квантификацию по произвольным множествам и отношениям. Не только арифметика, но и теория множеств становится *частью* второпорядковой логики, а значит, и вся (или почти вся) теоретико-множественная проблематика, включая континуум-гипотезу и многие другие важные математические утверждения, включается в сферу второпорядковой логики[21]. Таким образом, *математика есть часть логики.* В зависимости от выразительных средств новой логики мы приходим к логике натуральных чисел, логике действительных чисел, логике топологических пространств и т. д.

Однако не имеет значения, как мы будем расширять первопорядковую логику, — в любом случае теряется или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма — Скулема, или оба вместе, а также интерполяционное свойство и в большинстве случаев дедуктивная полнота. Но вот Г. Булос[22], защищая второпорядковую логику, спрашивает: почему логика обязательно должна обладать свойством компактности? Интересно, что в 1994 г. на страницах The New Encyclopedia Britannica также был задан вопрос, почему свойство Лёвенгейма — Скулема должно соответствовать внутренней природе логики[23].

Построение различных расширений **QCL**, особенно логик с обобщенными кванторами, в последние десятилетия привлекло к себе

---

[20] См.: *Benthem J. A. F. K. van, Doets K.* Higher-order Logic // Handbook of Philosophical Logic. Vol. I / Ed. by D. Gabbay and F. Guenthner. Dordrecht, 1983. P. 275–329.

[21] *Manzano M.* Extensions of First Order Logic. Cambridge, 1996.

[22] *Boolos G.* On Second-order Logic // The Journal of Philosophy. 1975. Vol. 72. P. 509–526.

[23] The New Encyclopedia Britannica. 1994. Vol. 23. P. 250.

большое внимание лингвистов, математиков, философов, когнитологов. Некоторый итог развития этого направления — фундаментальный труд «Модельно-теоретические логики»[24], где Дж. Барвайс приходит к следующему выводу: «Нет обратной дороги к точке зрения, что логика является первопорядковой». Этого же мнения придерживаются и авторы следующих монографий[25].

Однако второпорядковая логика слишком сложна и порой с ней трудно справляться. Второпорядковые логики не являются рекурсивно перечислимыми дедуктивными системами. Основные проблемы возникают с логическими истинами. Например, появляются утверждения, которые логически истинны тогда и только тогда, когда имеет место обобщенная континуум-гипотеза. Все эти и многие другие трудности — неизбежное следствие огромной мощности выразительных средств второпорядковых языков. Поэтому неудивительно, что появились и появляются ослабления второпорядковой логики, а в новом Handbook опубликована статья «Системы между первопорядковой и второпорядковой логиками»[26]. Подобное ослабление может достигаться за счет ограничительных версий понимания схем (Σ^1_1-формулы и Π^1_1-формулы), ограничения на аксиому выбора и ограничения на принцип индукции для арифметики и т. д. — и, конечно, за счет создания монадической второпорядковой логики. Как правило, большинство из этих языков характеризует понятие «конечность» и разрешает категоричную характеризацию натуральных чисел. Таким образом, дедуктивная неполнота — характеристическое свойство этих систем.

Видимо, одна из наиболее интересных здесь работ — статья Я. Хинтикки[27], а также статья с вызывающим названием «Революция в логике?»[28] и вообще целый комплекс работ Хинтикки, связанный с применением созданной им IF-*логики* (Independence Friendly — «дружественной к независимости»). Основная идея Хинтикки состоит в осознании того, что кванторы обычной первопорядковой логики суть

---

[24] Model-theoretic Logics / Ed. by J. Barwise, S. Feferman. Berlin, 1985.

[25] *Shapiro S.* Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic. Oxford, 1991; *Sher G. Y.* The Bounds of Logic. A Generalized Viewpoint. Cambridge, 1991.

[26] *Shapiro S.* Systems between First-order and Second-order Logics // Handbook of Philosophical Logic. Vol. I. P. 127–179.

[27] *Hintikka J.* What is True Elementary Logic? // Physics, Philosophy, and the Scientific Community / Ed. by K. Gavroglu, J. Stachel and M. Wartofsky. Dordrecht, 1994. P. 301–326.

[28] *Hintikka J., Sandu G.* A Revolution in Logic? // Nordic Journal of Philosophical Logic. 1996. Vol. 1. N 2. P. 169–183.

зависимые. Последнее означает, что если мы имеем дело с выражениями типа «для всех x имеются некоторые y, такие, что $R(x, y)$», то выбор подобных y не независим, а детерминирован выбором x, иначе говоря, между x и y существует некоторая функциональная зависимость. Особенность **IF**-логики — ее неполнота, что означает невозможность дать список аксиом, из которых все значимые формулы первопорядковой **IF**-логики могут быть выведены по чисто формальным правилам. Но в то же время она удовлетворяет свойствам компактности и Лёвенгейма — Скулема[29]. Видимо, стоит согласиться с Й. ван Бентемом и К. Дэтсом[30], что никакая специфическая логическая теория не *священна*. Это можно считать ответом на статью А. Тарпа «Какая логика истинна?»[31].

Что касается расширения **QCL**, предложенного Д. Габбаем (см. наше введение), то многие логики (в том числе и в уже упоминаемой монографии М. Мандзано) отдают предпочтение *многосортной* первопорядковой логике, которая является переинтерпретацией второпорядковой логики или даже логики высших порядков в первопорядковую с различными видами объектов. Редукция к первопорядковой логике настолько сильна, что мы приходим к рекурсивно-аксиоматизируемому множеству истин. Еще ранее А. Мальцев, Хао Ван и С. Феферман (среди прочих) подчеркивали удобство работы с такой логикой, хотя на самом деле она только внешне выглядит более богатой. Хорошее введение можно найти у Фефермана[32]. В свою очередь, для второпорядковых кванторов Габбаем предлагается специально построенная редукция их к первопорядковым. Так что в итоге мы имеем не что иное, как **QCL**.

4. Содержательная критика основных законов и принципов классической логики высказываний

Критика основных законов и принципов классической логики **CL** уже была предпринята в начале XX в. Самое удивительное здесь то, что это происходило одновременно с построением А. Уайтхедом и

[29] О свойствах **IF**-логики, а также ее достоинствах и недостатках см.: *Eklund M., Kolak D.* Is Hintikka's Logic First-order? // Synthese. 2002. Vol. 131. N 3. P. 371–388.

[30] *Benthem J. A. F. K. van, Doets K.* Higher-order Logic. P. 326.

[31] *Tharp L.* Which Logic is the Right Logic? // Synthese. 1975. Vol. 31. P. 1–21.

[32] *Feferman S.* Application of Manysorted Interpolation Theorems // Proceedings of the Tarski Symposium. Providence. 1974. P. 205–224.

Б. Расселом грандиозного здания Principia Mathematica, с оформлением первых метатеорем классической логики высказываний **CL** Д. Гильбертом и П. Бернайсом[33] и — независимо от этого — с публикацией в то же время самих этих метатеорем Э. Постом (непротиворечивость, дедуктивная полнота, разрешимость, функциональная полнота)[34].

В первую очередь это критика Л. Э. Я. Брауэром в 1908 г.[35] закона исключенного третьего $A \vee \neg A$ и метода доказательства «от противного» (последнее приводит к отказу от закона снятия двойного отрицания $\neg\neg A \supset A$) и критика закона непротиворечия $\neg(A \wedge \neg A)$, начатая Я. Лукасевичем в 1910 г.[36] и одновременно с ним Н. А. Васильевым[37]. Главной идеей диссертации Брауэра было то, что законы классической логики не носят ни априорного, ни абсолютного характера, что в принципе расходилось с сокровенными установками Фреге. К тому же Брауэр считал, что закон исключенного третьего применим лишь к конечным областям и переносить сферу его действия на бесконечные области недопустимо. Так впервые появляется в логике дилемма *конечного — бесконечного*. Установки Брауэра в конечном счете привели в 1930 г. к созданию А. Гейтингом интуиционистской логики **H**[38].

В свою очередь, критика закона непротиворечия привела в итоге С. Яськовского в 1948 г.[39] и Н. да Косту в 1963 г.[40] к построению паранепротиворечивых логик, которые стали основой для построения нетривиальных, но противоречивых теорий. Однако гораздо ранее А. Н. Колмогоров[41] принимает предпринятую Брауэром критику классической логики, при этом обнаруживая в последней еще один уязви-

---

[33] См.: *Zach R.* Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of Propositional Logic // The Bulletin of Symbolic Logic. 1999. Vol. 5. N 3. P. 331–366.

[34] См.: *Post E. L.* Introduction to a General Theory of Elementary Propositions.

[35] См.: *Brouwer L. E. J.* The Unreliability of the Logical Principles // Brouwer L. E. J. The Collected Works. Vol. 1. Dordrecht, 1975. P. 107–111.

[36] См.: *Łukasiewicz J.* On the Principle of Contradiction in Aristotle // Review of Metaphysics. 1971. Vol. 24. P. 15–38.

[37] См.: *Васильев Н. А.* Воображаемая логика: Избранные труды. М., 1989.

[38] См. перевод работы Гейтинга на английский язык: *Mancosu P.* From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford, 1998.

[39] См.: *Jaskowski S.* Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

[40] См.: *Da Costa N. C. A.* On the Theory of Inconsistent Formal Systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1974. Vol. 15. P. 497–510.

[41] *Колмогоров А. Н.* О принципе tertium non datur // Математический сборник. 1925. Т. 32. № 4. С. 668–677.

мый, но обойденный критикой Брауэра логический принцип, а именно закон Дунса Скота $\neg A \supset (A \supset B)$. Понятно, что в системах с modus ponens при наличии данного закона и противоречия получаем произвольную формулу B. Как указывает Колмогоров, эта аксиома «не имеет и не может иметь интуитивных оснований как утверждающая нечто о последствиях невозможного». Таким образом, рождение первой паранепротиворечивой системы логики (импликативно-негативной) следует датировать 1925 г., а не 1948 г. Эти исследования вылились в одно из наиболее интересных направлений в области неклассических логик[42].

В 1912 г. К. И. Льюис[43] строит новую теорию *логического следования* взамен теории материальной (классической) импликации, изложенной в Principia Mathematica. Исходным мотивом Льюиса было стремление избавиться от так называемых парадоксов материальной импликации. Под последними в первую очередь рассматривались формулы

$$A \supset (B \supset A)^{44} \text{ и } \neg A \supset (A \supset B),$$

которые содержательно означали следующие принципы: «Истина имплицируется из чего угодно» и «Противоречие имплицирует все что угодно». В классической и интуиционистской логиках эти принципы общезначимы. В итоге материальная импликация была заменена Льюисом на *строгую* импликацию, определение которой в дальнейшем потребовало введения модальных операторов □ (необходимо) и ◊ (возможно). В другом трактате Льюис[45] строит первое модальное исчисление, которое получило в дальнейшем обозначение **S3**.

Особо обратим внимание на серьезную критику Я. Лукасевичем в начале 20-х годов (и даже ранее) принципа *двузначности* (бивалентности), утверждающего, что каждое высказывание является или истинным, или ложным. Поскольку принцип бивалентности лежит в самой основе логики, он не может быть доказан, считает Лукасевич: «...ему можно лишь доверять, а доверяет ему тот, кому он кажется очевидным. Поэтому мне ничто не препятствует этот принцип не признать и

---

[42] См.: Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent / Ed. by G. Priest, R. Routley and J. Norman. Munchen, 1989; Frontiers of Paraconsistent Logic / Ed. by D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.-P. Van Bendegen. Baldock, 2000.

[43] *Lewis C. I.* Implication and the Algebra of Logic // Mind. 1912. Vol. 21. P. 522–531.

[44] Этот закон обычно называется *законом утверждения антецедента*.

[45] *Lewis C. I.* A Survey of Symbolic Logic. Berkeley, 1918.

принять, что кроме истинности и ложности существуют еще другие логические значения, по крайней мере еще одно, *третье* логическое значение. [...] Вводя это третье значение в логику, мы изменяем ее до основания. Трехзначная система логики... отличается от обычной до сих пор известной двузначной логики в не меньшей степени, нежели системы неэвклидовой геометрии отличаются от эвклидовой геометрии...»[46] У Лукасевича третье истинностное значение приписывается высказываниям о будущих случайных событиях, в результате чего разрушается аристотелевский фаталистический аргумент. Следствия из этого — появление в 1920 г. трехзначной логики $Ł_3$[47], в которой не имеют места ни закон исключенного третьего, ни закон непротиворечия.

Мало того, что отбрасывается фундаментальная дихотомия Фреге, вводящая в логику только два абстрактных логических объекта в качестве истинностных значений: «истина» и «ложь», так еще и рассматривается временной параметр. И все это происходит при жизни Фреге, а главное, возникающие концепции первоначально складываются естественным образом, а не как реакция на *появление* классической логики.

В 1960 г. Хао Ван обратил внимание на то, что классическая логика предикатов без закона сокращения $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$ разрешима[48]. Это утверждение было реализовано В. А. Смирновым в 1971 г.[49] Так было положено начало исследованиям в области логик без сокращения[50]. Отметим, что $Ł_3$ — исторически первая логика без сокращения.

Подчеркнем: критика основных законов логики **CL** продолжалась целое столетие и успешно завершилась в его конце, когда, казалось, совсем незыблемые законы были отвергнуты. Так, был отвергнут импликативный закон идентичности $A \supset A$, поскольку, согласно Э. Шрёдингеру, этот закон в общем случае не имеет места для микрообъек-

---

[46] *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190–205 (перепечатано в: Вопросы философии. 1995. № 5. С. 60–71).

[47] См.: *Łukasiewicz J.* On Three-valued Logic // Łukasiewicz J. Selected Works. Warszawa, 1970. P. 87–88.

[48] *Хао Ван.* На пути к механической математике // Кибернетический сборник. 1962. Вып. 5. С. 114–165.

[49] См.: *Смирнов В. А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972 (гл. 5).

[50] См.: *Ono H., Komori Y.* Logics without the Contraction Rule // The Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. P. 169–201.

тов. Такие логики получили название «логик Шрёдингера»[51]. Также не выдержал испытания временем импликативный закон транзитивности $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$[52]. Подобное имеет место и относительно конъюнктивно-дизъюнктивных (или наоборот) законов, например, в квантовой логике не имеет места закон дистрибутивности[53].

Из всего этого следует, что если сделать теоретико-множественное пересечение логических систем относительно верификации законов классической логики, то в результате получим *пустое множество*. Отсюда можно сделать один очень важный вывод: не существует какой-либо *выделенной* системы логики, хотя время от времени появлялись и появляются все новые логики, каждая из которых представляет особый интерес в силу своих приложений или металогических свойств. В 1929 г. формулируется бесконечнозначная логика Лукасевича $\mathbf{L}_\omega$[54], алгебраические свойства которой оказались столь глубокими и интересными, что им посвящена целая монография[55]. В 1955 г. построена первая система временной логики как результат реконструкции А. Н. Прайором[56] «Главного аргумента» Диодора Кроноса[57]. В 1959 г. появляется одна из первых суперинтуиционистских логик (см. часть 7) — *цепная* логика Даммита **LC**[58], которая получается за счет добавления к интуиционистской логике **H** закона линейности $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$. Эта логика применяется для анализа выводов расширенной логики программирования[59]. Впервые первопорядковая логика, осно-

---

[51] *Da Costa N. C. A., Krause D.* Schrödinger Logics // Studia Logica. 1994. Vol. 53. P. 533–550.

[52] См.: *Tennant N.* The Transmission of Truth and the Transitivity of Deduction // What is a Logical System? 1996.

[53] См.: *Dalla Chiara M.-L.* Quantum Logic // Handbook of Philosophical Logic. Vol. III / Ed. by D. Gabbay and F. Guenthner. Dordrecht, 1985.

[54] *Łukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the Sentential Calculus // Łukasiewicz J. Selected Works. P. 131–152.

[55] *Cignoli R., D'Ottaviano J., Mundici D.* Algebraic Foundation of Many-valued Reasoning. Dordrecht, 2000.

[56] *Prior A. N.* Diodoran Modalities // The Philosophical Quarterly. 1955. Vol. 5. N 20. P. 205–213.

[57] Подробно о философских источниках возникновения многозначной, временной и модально-временной логик см.: *Карпенко А. С.* Фатализм и случайность будущего. Логический анализ. М., 1990.

[58] *Dummett M.* A propositional Calculus with Denumerable Matrix // The Journal of Symbolic Logic. 1959. Vol. 24. P. 97–106.

[59] *Pearce D.* Stable Inference as Intuitionistic Validity // Journal of Logic Programming. 1999. Vol. 38. P. 79–91.

ванная на **LC**, была аксиоматизирована в виде секвенциального исчисления Г. Такеути и С. Титани[60] (без ссылки на статью Даммита). Основной задачей было построение интуиционистской нечеткой теории множеств. Особый интерес вызвала модальная логика Гжегорчика **Grz**[61], выступающая наибольшим нормальным расширением модальной логики Льюиса **S4**, в которое вкладывается интуиционистская логика **H** посредством перевода Гёделя — Тарского — МакКинси. В середине 50-х годов в результате критики «парадоксов» уже строгой импликации Льюиса $A \to (B \to B)$, $(A \wedge \neg A) \to B$ (т. е. истина следует из чего угодно и из лжи следует все что угодно) оформляется релевантное направление в логике во главе с системой релевантной импликации **R** и ее подсистемой — логикой следования Аккермана **E** (1956)[62]; добавление к **R** «безобидной» аксиомы $A \supset (A \supset A)$ приводит к логике **RM** с весьма необычными характеристиками, одна из которых — нарушение свойства релевантности. В 1976 г. появляется доказуемостная логика Гёделя — Лёба **GL**[63], для которой показано, что она есть в точности пропозициональная логика доказуемости в формальной арифметике Пеано. В 1981 г. А. Виссер[64] ввел пропозициональную логику **BPL**, которую он назвал *базисной*, и доказал ее полноту относительно конечных *иррефлексивных* транзитивных моделей. Обратим внимание, что в формулировке Виссера **BPL** является логикой без такого незыблемого правила, как modus ponens. В последнее время эта логика привлекла к себе чрезвычайное внимание и положила начало новому направлению, именуемому *подинтуиционистскими логиками*[65]. В 1987 г. появилась логическая система под названием «линейная логика»[66], импликативный фрагмент которой представляет собой **BCI**-логику,

---

[60] *Takeuti G., Titani S.* Intuitionistic Fuzzy Logic and Intuitionistic Fuzzy Set Theory // The Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49. N 3. P. 851–866.

[61] *Grzegorczyk A.* Some Relational Systems and the Associated Topological Spaces // Fundamenta Mathematicae. 1967. Vol. 60. P. 223–231.

[62] См.: *Anderson A. R., Belnap Jr. N. D.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 1. Princeton, 1975.

[63] *Solovay R. M.* Provability Interpretations of Modal Logic // Israel Journal of Mathematics. 1967. Vol. 25. P. 287–304.

[64] *Visser A.* A Propositional Logic with Explicit Fixed Points // Studia Logica. 1981. Vol. 40. P. 155–175.

[65] *Restall G.* Subintuitionistic Logics // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1994. Vol. 35. P. 116–129; *Celani S., Jansana R.* A Closer Look at Some Subintuitionistic Logics // Notre Dame Journal of Formal Logic. 2001. Vol. 42. N 4. P. 225–255.

[66] *Girard J. Y.* Linear Logic // Theoretical Computer Science. 1987. Vol. 50. P. 1–102.

т. е. логику без законов утверждения антецедента и сокращения. Линейная логика снабжена дополнительными операциями, она нашла важное применение в компьютерных науках. За удивительно короткое время образовалось целое направление[67].

Вообще, открытие какой-либо интересной логики, как правило, ведет к созданию нового направления в области неклассических логик.

5. Три основных формальных источника появления неклассических логик

5.1. Аксиоматический метод

Очевидно, что сама гильбертовская аксиоматизация классической логики **CL** представляет собой на редкость удачный материал для получения неклассических исчислений посредством исключения, замены или ослабления некоторых (независимых) аксиом. Приведем только три весьма примечательных примера. Интуиционистская логика **H** получается из аксиоматизации **CL**, предложенной С. К. Клини[68] посредством замены закона снятия двойного отрицания на закон Дунса Скота. Заметим, что если мы этот закон отбросим, то получим минимальную логику Йохансcон **J**[69], которая является паранепротиворечивой. Самая известная паранепротиворечивая логика $\mathbf{C}_\omega$ получается из аксиоматизации **CL** Клини путем замены закона приведения к абсурду $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$ на закон исключенного третьего. Наконец, можно представить независимую импликативно-негативную аксиоматизацию **CL** в таком виде, что исключение закона сокращения приводит к аксиоматизации бесконечнозначной логики Лукасевича $\mathbf{Ł}_\omega$[70]. Стоит отметить, что представление **CL** в виде генценовского исчисле-

[67] *Troelstra A. S.* Lectures on Linear Logic. Stanford, 1992.

[68] *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М., 1957. С. 94.

[69] *Johansson I.* Der Minimalkalkalkul, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compositio Mathematicae. 1936. Bd 4. S. 119–136.

[70] Подробно об этом см.: *Карпенко А. С.* Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997. С. 107–133. — Здесь строятся различные конечные *булевы решетки* импликативно-негативных логик, элементами каковых решеток выступают различные неклассические логики, а вершиной — **CL**. См. также: *Karpenko A. S.* The Classification of Propositional Calculi // Studia Logica. 2000. Vol. 66. N 2. P. 253–271. — Здесь приводится решетка логик, включающая импликативный фрагмент логики следования **E**.

ния, хотя и не в такой степени, тоже дает возможность легко получать новые неклассические логики. Это делается за счет элиминации, ограничения и комбинирования различных структурных правил. В результате подобных процедур появилось даже новое направление под названием «подструктурные логики»[71].

Пока мы рассмотрели только *сужение* **CL** за счет отбрасывания тех или иных ее законов. Однако не менее распространено расширение **CL** за счет добавления к ней различных операторов. Наиболее известна модальная логика[72], которая первоначально называлась *философской логикой*. С развитием модальной логики в сферу логических исследований стали попадать все новые виды модальностей: временные, модально-временные, деонтические, эпистемические, физические или причинные и многие другие. В этом смысле характерен вышедший в 80-е годы «Справочник по философской логике» в 4 томах[73]. Так, во 2-м томе рассматриваются расширения классической логики **CL**, например, такие, как модальная, временная, деонтическая логики, и др., а в 3-м томе — альтернативы (сужение) **CL**, например, такие, как многозначная, интуиционистская, релевантная логики и др. Как мы увидим далее, такое деление неклассических логик неубедительно, и в новом издании «Справочника по философской логике»[74] от такого деления отказались.

5.2. Логическое следование

Зачастую под логикой понимается отнюдь не множество законов, из которых выводимы другие законы: сутью логики объявляется семантическое понятие *логического следования*, введенное Тарским в 1936 г.[75] Сейчас идет оживленная дискуссия относительно концепции логического следования, предложенной Тарским. Особый интерес

---

[71] Substructural Logics / Ed. by K. Dozen, P. Schroeder-Heister. Oxford, 1993; *Restall G.* An Introduction to Substructural Logics. London; New York, 2000.

[72] Из недавних работ по модальным логикам см. прекрасную монографию, написанную российскими логиками М. Захарьящевым и А. Чагровым: *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford, 1997.

[73] Handbook of Philosophical Logic. Vol. I–IV / Ed. by D. Gabbay and F. Guenthner. Dordrecht, 1983–1989.

[74] Handbook of Philosophical Logic. Vol. I–XVIII / Ed. by D. Gabbay and F. Guenthner. Dordrecht, 2001.

[75] См.: *Tarski A.* On the Concept of Logical Consequence // Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. 2nd ed. Indianapolis. 1983. P. 409–420.

представляет статья[76], где идеи Тарского анализируются в историческом логико-философском контексте, в котором они и были предложены. Понятие логического следования заняло центральное место в логике, и потому все больший смысл приобретает следующий вопрос: *что значит для заключения A следовать из посылок Σ?* Общепринятым считается следующий критерий: A следует из посылок Σ, если и только если *любой случай*, в котором каждая посылка в Σ истинна, есть *случай*, в котором A истинна. В итоге сутью логического следования является сохранение истины во *всех случаях*.

Интересно замечание Р. Джеффери в книге с интригующим названием «Формальная логика: ее сфера и ее границы»[77], что данное Тарским определение логического следования не позволяет нам выяснить, что такое логика, поскольку должны приниматься во внимание *случаи*, включенные в определение логического следования. Мы можем специфицировать случаи как «возможные миры», но тогда возникает сложнейший круг проблем, связанный с выяснением вопроса, что это за сущности такие — «возможные миры». Более того, наши *случаи* могут рассматриваться как ситуации в смысле Дж. Барвайса и Дж. Перри[78]. Ситуации могут рассматриваться не только как *неполные* части мира, но и как противоречивые, а также одновременно как неполные и противоречивые. И тогда в результате получаем совершенно новые логики, принципиально отличные от классической, такие, как интуиционистская, релевантная, паранепротиворечивая, параполная, паранормальная и т. д.

Если сутью логики является сохранение истины во всех случаях, то различные *логики* получаются различными экспликациями этих случаев. Отсюда появился подход в логике, названный «логическим плюрализмом»[79], который отчасти обосновывает многообразие логик.

Как аксиоматический (гильбертовский) подход, так и семантический подход к логике в духе Тарского обеспечивают широкое поле деятельности для создания новых логических систем. Классическое отношение логического следования $\models$ между подмножествами множе-

[76] *Gómez-Torrente M.* Tarski on Logical Consequence // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1996. Vol. 37. N 1. P. 125–151.

[77] *Jeffery R.* Formal Logic: its Scope and its Limits. 3rd ed. McGraw Hill, 1991.

[78] *Barwise J., Perry J.* Situations and Attitudes. Cambridge, 1983.

[79] *Beall J., Restall G.* Logical Pluralism // Australian Journal of Philosophy. 2000. Vol. 78. P. 475–493. — Создан интернет-проект «Логический плюрализм» с участием Г. Реcталла (http://pluralism.pitas.com).

ства формул Fm и элементами Fm выполняет следующие три условия для всех $\Gamma, \Delta \subset Fm$ и $A, B \in Fm$:

(1) $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \models A$ (рефлексивность),

(2) $\Gamma \models A$ и $\Gamma \subset \Delta \Rightarrow \Delta \models A$, (монотонность),

(3) $\Gamma \models A; \Gamma, A \models B, \Rightarrow \Gamma \models B$ (транзитивность или сечение).

Первое, что обращает на себя внимание, — вопрос, почему логика должна быть обязательно монотонной, т. е. «новое знание не может перечеркнуть старое». В свою очередь, немонотонные логики в отличие от классической, интуиционистской, классически-модальной, многозначной и т. д. позволяют адекватно оперировать неполной и изменяющейся информацией[80]. К этой области принадлежит целая серия работ Д. Бэйтенса и его учеников, где разработана логика, способная моделировать рассуждения, в ходе которых смысл логических терминов может изменяться. В итоге возникло новое направление исследований, названное «адаптивными логиками»[81].

Различные ограничения и обобщения понятия логического следования ведут к различным логическим системам и к новым неклассическим направлениям в логике. Приведем следующий пример. Пусть $\models$ есть отношение логического следования. Назовем его чрезмерным (explosive), если оно удовлетворяет условию, что для любых формул A и B из A и не-A следует B (символически: $\{A, \neg A\} \models B$). Классическая логика, интуиционистская логика, многозначные логики Лукасевича и большинство других логик являются чрезмерными. Логика называется *паранепротиворечивой* тогда и только тогда, когда ее отношение логического следования не является чрезмерным. Такое понятие логического следования отвергает закон Дунса Скота, но верифицирует формулу $\neg A \supset (A \supset \neg B)$, которая доказуема в логике Йохансcон J. Отсюда возникает проблема переопределения данного понятия логического следования[82].

---

[80] См. обстоятельный обзор: *Brewka G., Dix J., Konolige K.* Nonmonotonic Reasoning: An Overview. Stanford, 1995.

[81] *Batens D.* Inconsistency-adaptive Logics and the Foundation of Non-monotonic Logic // Logique et Analyse. 1994. An. 145. P. 57–94.

[82] См.: *Urbas I.* Paraconsistency // Studies in Soviet Thought. 1990.Vol. 39. P. 343–354.

5.3. Алгебраический подход

С появлением первых неклассических логик сразу возник вопрос об их алгебраизации — по аналогии с тем, как это было сделано с **CL**, и в первую очередь с построением *алгебры Линденбаума — Тарского*, сутью которой выступает определение отношения конгруэнтности на алгебре формул *Fm*. Это позволяет дать чисто алгебраическое доказательство теоремы о полноте. Классические работы здесь — монография Е. Расёвой[83], а также работа У. Дж. Блока и Д. Пигоцци[84], где были определены достаточные и необходимые условия для построения алгебры Линденбаума — Тарского. Оказалось, что не для всякого исчисления (например, **S3**, логика следования **E**) можно построить подобную алгебру. А логика **BPL** не является даже *протоалгебраизуемой*[85]. Так появляются различные классы алгебр. Отсюда — возможность классифицировать логики в зависимости от свойств отношения конгруэнтности (см. работу Дж. М. Фонга, Р. Джансаны и Д. Пигоцци, где в соответствии с этим принципом приведены 10 главных классов логик[86]). В один из этих классов входит ***всего лишь*** классическая логика **CL** наряду с интуиционистской логикой **H**, бесконечнозначной логикой Лукасевича Ł_ω, нормальными модальными логиками Льюиса и вообще бесконечным числом других логик.

6. Континуальная множественность логических систем

Прямым результатом критики основных законов и принципов классической логики стал феномен быстро растущей *множественности* логик (логических систем). Однако вскоре от исследования отдельных логик перешли к обозрению целых классов. Сначала появление различных классов конечнозначных логик в начале 20-х годов (*n*-значные логики Поста в 1921 г. и *n*-значные логики Лукасевича в

[83] *Rasiowa H.* An Algebraic Approach to Non-classical Logics. Warszawa, 1974.

[84] *Blok W. J., Pigozzi D.* Algebraizable Logics (monograph) // Memoirs of the American Mathematical Society (Providence). 1989. No. 396.

[85] См. понятие протоалгебраизуемости в: *Blok W. J., Pigozzi D.* Protoalgebraic Logics // Studia Logica. 1986. Vol. 45. P. 337–369.

[86] *Font J. M., Jansana R., Pigozzi D.* A Survey of Abstract Logic // Studia Logica. 2003. Vol. 74. N 1–2. P. 49.

1922 г.)[87] и шести льюисовских модальных систем **S1–S6**[88] не навело на особые размышления. Но тогда же Гёдель[89] показал, что существует счетное число логик между интуиционистской логикой **H** и классической **CL**, которые впоследствии получили название *суперинтуиционистских* логик (с.и.-логики). А это уже было событием в логическом мире. Исходя из этого факта, Т. Умезава в 1955 г.[90] начинает изучение целых классов логик. Параллельно С. Скрогс[91] описывает нормальные расширения модальной логики Льюиса **S5**, а М. Дамметт и Э. Леммон[92] рассматривают логики между **S4** и **S5**. В то же время, поскольку считается, что существует счетное число логик, господствует убеждение, что их все можно будет описать и изучить.

Поэтому открываются различные способы конструирования новых логик из данного класса с заданными свойствами. Так, например, Т. Хосои[93] вводит понятие «слой» (slice) для классификации с.и.-логик. В течение долгого времени оставалась надежда найти полное описание *решетки* модальных и с.и.-логик — тогда можно было бы «обозреть» любую логику и даже, вероятно, представить ее в виде исчисления.

Все эти надежды были разрушены открытием В. А. Янковым[94] *континуального* класса с.и.-логик и обнаружением способов конструирования модальных и с.и.-логик (опять же континуальной мощности) с весьма «нежелательными» свойствами: неразрешимость, неаксиоматизируемость и т. д., в то время как конечно-аксиоматизируемых логик

---

[87] С 1971 г. проводится ежегодный International Simposium on Multiple-valued Logic. Только в последнее десятилетие XX в. вышло более 10 книг по многозначным логикам (см.: *Карпенко А. С.* Многозначные логики. М., 1997 (Логика и компьютер. Вып. 4); *Gottwald S.* Treatise on Many-valued Logics. Baldock, 2000).

[88] *Lewis C. I., Langford C. H.* Symbolic Logic. New York, 1932 (2nd ed. with corrections: Dover, 1959).

[89] *Gödel K.* On the Intuitionistic Propositional Calculus // Gödel K. Collected Works. Vol. I. New York, 1986. P. 222–225.

[90] См.: *Umezawa T.* On Intermediate Propositional Logics // The Journal of Symbolic Logic. 1959. Vol. 24. P. 20–36.

[91] *Scroggs S. J.* Extensions of the Lewis System *S5* // The Journal of Symbolic Logic. 1951.Vol. 16. P. 112–120.

[92] *Dummett M. A. E., Lemmon E. J.* Modal Logics between S4 and S5 // Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1959. Bd 5. S. 250–264.

[93] *Hosoi T.* On Intermediate Logics I // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. 1967. Vol. 14. P. 293–312.

[94] *Янков В. А.* Построение последовательности сильно-независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Доклады АН СССР. 1968. Т. 181. № 1. С. 33–34.

может быть «всего лишь» счетное количество. Более того, А. В. Кузнецов[95] доказывает теорему о континуальности всякого интервала между **Н** и ее собственным расширением. *Так началась новая эра в развитии современной логики.* Различные континуальные классы пропозициональных с.и.-логик рассмотрены А. В. Чагровым и М. В. Захарьящевым[96]. Оказалось, по аналогии с пропозициональными с.и.-логиками, но в более слабой форме, что существует континуум с.и.-логик между некоторыми предикатными с.и.-логиками[97].

Феномен континуальности имеет место и для модальных логик. К. Файн[98] доказывает континуальность множества непротиворечивых расширений **S4**. Аналогичные результаты справедливы и для расширений других модальных логик. Так, континуален любой интервал между модальной логикой **L** и ее собственным расширением при **L** = **K**, **L** = **K4**, **L** = **S4**, **L** = **Grz**, **L** = **GL** и во многих других случаях. Для логики **GL** Л. Л. Максимова показала, что существует континуум нормальных расширений логики доказуемости **GL** с интерполяционным свойством[99].

Оказывается, континуальность классов неклассических логик — не исключение, а норма. Были обнаружены также континуальные классы релевантных логик: например, В. Дзёбяк[100] показал, что для промежутка между **R** и **RM** существует континуум релевантных логик, а Л. Л. Максимова высказала гипотезу (автору этих строк), что между **E** и **R** тоже существует континуум логик, и т. д.

Конечно, континуальные классы логик нельзя полностью описать или каким-либо способом классифицировать. Однако возникают более серьезные проблемы. Приведем пример, наводящий на весьма глубокие размышления. Как отмечено в обзоре М. В. Захарьящева и

---

[95] *Кузнецов А. В.* Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр // XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Кишинев, 1971. С. 225–256.

[96] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* The Undecidability of the Disjunction Property of Propositional Logics and Other Related Problems // The Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. N 3. P. 967–1001.

[97] *Skvortsov D.* On the Existence of Continua of Logic between Some Intermediate Predicate Logics // Studia Logica. 2000. Vol. 64. N 2. P. 257–270.

[98] *Fine K.* An Ascending Chain of S4 Logics // Theoria. 1974. Vol. 40. P. 110–116.

[99] *Максимова Л. Л.* Континуум нормальных расширений модальной логики доказуемости с интерполяционным свойством // Сибирский математический журнал. 1989. Т. 30. С. 122–131.

[100] *Dziobiak W.* There are $2^{\aleph_0}$ Logics with the Relevance Principle between R and RM // Studia Logica. 1983. Vol. XLII. N 1.

А. В. Чагрова[101], в любом интервале между **H** и собственным ее расширением имеются континуум логик с дизъюнктивным свойством[102] (этот результат принадлежит А. Вронскому[103]) и континуум логик без этого свойства, причем не существует алгоритма, по которому можно было бы определить, *к какому из двух континуальных классов данная логика принадлежит*. Понятно, что существует некоторая корреляция между неразрешимостью свойства и континуальностью множества логик с этим свойством, и факт неразрешимости, скорее всего, говорит о «бессмысленности» изучения некоторых свойств логик определенного класса. По существу, дизъюнктивное свойство — одно из характеристических для интуиционистской логики **H**, но для с.и.-логик оно «неуловимо».

7. Расширение классической логики как следствие ее сужения

Как уже говорилось в части 5, появление первых льюисовских модальных систем стало следствием критики так называемых парадоксов материальной импликации, т. е. модальные системы строились за счет отбрасывания некоторых законов классической логики высказываний **CL**. Поэтому несколько странным может показаться результат К. Гёделя (1933), который дал аксиоматизацию льюисовских модальных систем **S4** и **S5** в виде расширения **CL** за счет добавления характеристических аксиом для модальных операторов[104]. Такой метод аксиоматизации для широкого класса льюисовских систем был использован Э. Леммоном[105]. Этот метод аксиоматизации получил название «метод Гёделя — Леммона».

---

[101] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* The Disjunction Property of Intermediate Propositional Logics // Studia Logica. 1991. Vol. 50. P. 63–75.

[102] Если $A \vee B$ выводима, то хотя бы одна из формул A или B выводима, что, очевидно, не имеет места для классической логики.

[103] *Wronski A.* Intermediate Logics and the Disjunction Property // Report on Mathematical Logic. 1973. Vol. 1. P. 39–51.

[104] См.: *Gödel K.* An Interpretation of the Intuitionistic Propositional Calculus // Godel K. Collected Works. Vol. I. New York, 1986. P. 301–303.

[105] *Lemmon E. J.* New Foundations for Lewis Modal Systems // The Journal of Symbolic Logic. 1957. Vol. 22. P. 176–186.

Обратим внимание на вывод В. Гливенко (1929) о погружении **CL** в интуиционистскую логику **H**[106]. Отсюда следует, что интуиционистская логика даже «богаче» $\mathbf{C_2}$. Более того, Гёдель показал в 1933 г.[107], что классические законы, включающие только отрицание, конъюнкцию и квантор всеобщности, являются интуиционистскими законами. Поскольку импликация, дизъюнкция и квантор существования определяются через указанные «интуиционистские» логические связки, можно строго утверждать, что классическая логика предикатов есть подсистема интуиционистской[108], а значит, вторая есть расширение первой. Однако аксиоматизация **H** как расширение **CL** остается открытой проблемой.

Отметим также, что релевантная логика **R** может быть построена на основе **CL**[109] (отрицание де Моргана заменяется на булево отрицание).

Интересные результаты получены отечественными логиками в области аксиоматизации конечнозначных логик[110]. Рассмотрим класс n-значных логик $\mathbf{L_n}$ сигнатуры

$$\delta_1 = <\{J_i \mid i \in V_n\}, \neg, \vee, \wedge, \supset>,$$

где V_n есть множество истинностных значений $\{0, 1/n\text{-}1, \ldots, n\text{-}2/n\text{-}1, 1\}$ и

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } x \neq 1. \end{cases}$$

Эти логики задаются операциями на множестве истинностных значений V_n, причем выполняются следующие условия:

---

[106] См.: *Гливенко В.* О некоторых аспектах логики Брауэра // Труды Научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 1998. С. 19–23.

[107] См.: *Godel K.* On Intuitionistic Arithmetic and Number Theory // Godel K. Collected Works. Vol. 1. P. 287–295.

[108] На это обращает внимание Хао Ван в статье с весьма примечательным названием «Что такое логика?» (*Hao Wang*. What is Logic? // The Monist. 1994. Vol. 77. N 3. P. 273).

[109] *Meyer R. K.* New Axiomatics for Relevant Logics — I // Journal of Philosophical Logic. 1974. Vol. 3. P. 53–58.

[110] *Аншаков О. М., Рычков С. В.* 1) О многозначных логических исчислениях // Семиотика и информатика. 1982. Вып. 19. С. 90–117; 2) Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // Там же. 1984. Вып. 23. С. 78–106.

(1) алгебра $< V_n; \vee, \wedge >$ является квазирешеткой, т. е. не обязательно выполняется закон поглощения;

(2) ограничения операций $\neg, \vee, \wedge, \supset$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_n суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно;

(3) наличествуют все J_i-операторы.

Отметим, что все результаты будут иметь место для значительно более широкого класса логик, а именно для таких логик, в которых функционально выразима сигнатура

$$\delta_I = <\{J_i \mid i \in V_n\}, \neg, \vee, \wedge, \supset>,$$

удовлетворяющая указанным выше условиям (1), (2), (3).

Суть аксиоматизации состоит в том, что берутся аксиомы классической логики **CL** (в данном случае аксиомы Клини) и добавляются аксиомы связи с J_i-операторами. В итоге мы имеем несколько необычный взгляд на суть n-значных логик: *каждая конечнозначная логика, выполняющая приведенные выше условия, есть расширение классической двузначной логики.* Последнее как раз и позволяет дать единый метод (алгоритм) аксиоматизации конечнозначных логик.

Правда, предложенный метод аксиоматизации является слишком общим и поэтому трудноприменимым. Однако приведем два конкретных примера подобного рода аксиоматизаций. Это аксиоматизация трехзначной логики Лукасевича (но с двумя выделенными значениями)[111] и аксиоматизация трехзначной логики Бочвара $\mathbf{B_3}$[112]. Вопрос о том, что считать неклассической, или девиантной (deviant)[113], логикой и каково ее отношение к классической, давно стал предметом оживленного обсуждения[114], хотя и не в том аспекте, который предложен здесь нами. Поэтому неудивительно, что в последнее время стал употребляться более нейтральный термин, а именно *нестандартные логики*. Имеется сайт с кратким описанием 29 нестандартных логик и

---

[111] *Epstein R. L.* The Semantic Foundations of Logic. Vol. 1: Propositional Logic. Dordrecht, 1990 (ch. IX.E.2).

[112] *Finn V. K., Grigolia R.* Nonsense Logics and their Algebraic Properties // Theoria. 1993. Vol. LIX. Part 1–3. P. 207–273.

[113] Этот термин был введен У. ван Куайном для обозначения таких неклассических логик, как многозначная логика, интуиционистская логика, ветвящиеся кванторы (см.: *Quine W. van.* Philosophy of Logic. New York, 1970).

[114] *Haack S.* 1) Deviant Logic: Some Philosophical Issues. London, 1974; 2) Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism. Chicago, 1996.

краткой библиографией работ по каждой из них[115]. Конечно, феномен этот (расширение **CL** как следствие ее сужения) удивителен и требует своего философского осмысления и дальнейшего логико-алгебраического исследования.

Введение неклассичности в логику привело к тому, что homo-логический универсум не является *счетным* (континуальность классов замкнутых функций уже на уровне трехзначных логик[116], континуальность множества логических систем даже одного класса; к тому же процессы, в нем происходящие, не являются обязательно *истинностно-функциональными*). Но главное — в результате, казалось бы, совершенно элементарного сужения **CL** за счет отбрасывания тех или иных классических тавтологий или в результате примитивного обобщения **CL** за счет добавления новых истинностных значений мы получаем логические системы довольно-таки сложной природы, порой с труднообъяснимыми свойствами. Этому будет посвящена заключительная часть статьи.

Заключение

Расширение классической логики за счет введения небулевых операций, например модальных операторов, и введение новых истинностных значений приводят к расширению самого логического универсума, более богатого, чем исходный. Но и непосредственное сужение классической логики, как это происходит при создании интуиционистской логики **H**, приводит к необычайно богатой логической конструкции. Как уникальное явление **H** имеет два вида не сводимых друг к другу семантик: реляционную и реализуемостную.

Выяснилось, что языки модальных и с.и.-логик имеют довольно-таки богатые выразительные средства, в некоторых отношениях богаче, чем язык классической первопорядковой логики. Более того, С. К. Томасон[117] показал, что классическая второпорядковая логика может быть эффективно погружена в пропозициональную модальную логику, имеющую интерпретацию посредством крипковских шкал.

---

[115] См.: *Suber P.* A Bibliography of Non-standard Logics (http://www.earlham.edu).

[116] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. 1959. Т. 127. С. 44–46.

[117] *Thomason S. K.* Reduction of Second-order Logic to Modal Logic // Zeitschrift fur mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik. 1975. Bd 21. S. 107–114.

Последнее, заметим, говорит о «безнадежной» сложности модальных логик. Это же относится и к временным логикам. Поэтому неправомерно утверждать, что язык первопорядковой (многосортной) логики может заменить языки модальных и временных логик. Скорее всего, это имеет место для логик, для которых класс шкал первопорядково определим, точнее, имеется первопорядковая определимость формул.

Заметим, что определимость неклассических формул в первопорядковом языке с предикатами R и = — одна из центральных проблем неклассических логик, которая первоначально возникла в русле развития модальных логик. На этом пути маячила надежда найти некоторое общее доказательство полноты для широкого класса логик. В 1976 г. в диссертации Й. ван Бентема была высказана гипотеза, что все с.и.-аксиомы выражают первопорядковые ограничения на рост знания. Например, слабый закон исключенного третьего определяет *направленность*, а линейность определяет *связность*. Однако в диссертации П. Роденбурга (1982), посвященной интуиционистской теории соответствия, показано, что аксиома Скотта

$$((\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)) \to (\neg p \vee \neg\neg p)$$

не определяет первопорядковое условие на частичные порядки[118].

Труднообъяснимые свойства логических систем уже возникают при совершенно естественном обобщении классических связок отрицания $\neg p$ и импликации $p \supset q$, которые можно задать следующим образом:

$$\neg p = 1\text{-}v(p),$$
$$p \supset q = \min(1,\ 1\text{-}v(p) + v(q)),$$

где v есть функция оценки пропозиционального языка L на множестве истинностных значений $\{0, 1\}$.

Если же мы возьмем в качестве истинностных значений множество $V_n = \{0, 1/n\text{-}1, ..., n\text{-}2/n\text{-}1, 1\}$, то получим матричное определение конечнозначных логик Лукасевича $Ł_n$ с совершенно удивительными свойствами. Оказалось, что функциональные свойства $Ł_n$ напрямую связаны со свойствами простых чисел[119]. Дальнейшее развитие этого

[118] *Benthem J. A. F. K. van.* Correspondence Theory // Handbook of Philosophical Logic. Vol. II / Ed. by D. Gabbay and F. Guenthner. Dordrecht, 1984. P. 167–247.

[119] *Бочвар Д. А., Финн В. К.* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. I // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам. М., 1972. С. 238–295.

результата привело к представлению простых чисел в виде корневых деревьев, к построению логики, которая имеет класс тавтологий тогда и только тогда, когда n-1 есть простое число, и к открытию закона порождения *классов* простых чисел[120].

Современное развитие логики переживает небывалый интерес к неклассическим (нестандартным) системам, который давно перешел из плоскости метафизических рассуждений в сферу осмысления свершившегося факта и конкретного применения. Если раньше основанием для этого были различные философские, синтаксические, семантические и металогические проблемы, то в последнее время на первый план выходят практические интересы. Именно этим объясняется «помешательство» на ***нечетких логиках***, которые занимают чуть ли не ведущее положение в информационных технологиях[121]. Но главным источником такого интереса служит широкое их применение в компьютерных науках, искусственном интеллекте[122] и программировании. Получение, обработка, хранение, извлечение и использование информации требуют логических систем более богатых и гибких, чем классическая логика. И здесь все больше специалистов говорят о недостаточности классической первопорядковой логики **QCL**.

Остается добавить, что основная интенция издания нового 18-томного «Справочника по философской логике» состоит в том, чтобы в наиболее полной мере отразить исключительное значение логики в компьютерных науках, в разработке формализованных (вычислительных) языков типа комбинаторной логики и λ-исчислений и в искусственном интеллекте. В это издание включены как старые (дополненные), так и новые обзоры по основным направлениям неклассической логики[123].

---

[120] *Карпенко А. С.* Логики Лукасевича и простые числа. М., 2000 (книга написана при участии В. И. Шалака).

[121] См.: *Hajek P.* Fuzzy Logic // Stanford Encyclopedia of Philosophy (http://plato.stanford.edu/entries/logic-fuzzy).

[122] См.: *Turner R.* Logics for Artificial Intelligence. Chichester, 1984; Logics in Artificial Intelligence, Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1489 / Ed. by J. Dix, F. L. Del Cerro and U. Furbach. Berlin, 1998; *Финн В. К.* Интеллектуальные системы и общество. М., 2001.

[123] С 1982 г. издается международный The Journal of Non-Classical Logics, который с 1991 г. стал называться The Journal of Applied Non-Classical Logics. Библиографию по неклассическим логикам по 1985 г. включительно можно найти в: Ω-Bibliography of Mathematical Logic. Vol. II: Non-Classical Logics. Heidelberg, 1987.