

Approximation numérique des écoulements turbulents dans des cuves d'électrolyse de l'aluminium

THÈSE N° 7113 (2016)

PRÉSENTÉE LE 22 SEPTEMBRE 2016
À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BASE
GROUPE PICASSO
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Jonathan ROCHAT

acceptée sur proposition du jury:

Prof. J. Krieger, président du jury
Prof. M. Picasso, Prof. J. Rappaz, directeurs de thèse
Dr B. Bardet, rapporteur
Prof. R. Touzani, rapporteur
Prof. F. Gallaire, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2016

Résumé

L'aluminium est un métal produit par un procédé d'électrolyse à partir d'alumine dans des cuves de grandes dimensions. Un courant électrique de plusieurs centaines de milliers d'Am-pères parcourt la cuve à travers un bain électrolytique et de l'aluminium liquide. Ces forts courants génèrent des forces électromagnétiques qui mettent le bain et l'aluminium en mouvement. Une bonne connaissance de cet écoulement turbulent est d'importance capitale pour améliorer l'efficacité du procédé.

L'objet de cette thèse est l'étude et la simulation d'écoulements turbulents lors du procédé d'électrolyse de l'aluminium. Ces écoulements sont résolus numériquement en utilisant une méthode d'éléments finis. En particulier, les équations de Navier-Stokes pour le calcul d'un écoulement bifluide avec interface libre sont résolues numériquement.

Dans la première partie de ce travail, on développe des modèles de turbulence de longueur de mélange qui prennent en compte les effets de paroi. En particulier, une étude théorique permet de démontrer mathématiquement le bien-fondé de nos modèles et de donner des recommandations sur le choix des paramètres du calcul.

Dans la deuxième partie nous étudions la résolution des équations de Navier-Stokes. L'étude porte sur des algorithmes qui découplent le calcul de la vitesse et de la pression, couramment appelés méthode de projection ou algorithme de Chorin-Temam.

La dernière partie apporte des réponses sur la pertinence des modèles pariétaux et des méthodes de projection dans le cadre de la simulation numérique des écoulements turbulents dans l'électrolyse de l'aluminium. En particulier, nous obtenons un modèle numérique produisant un écoulement réaliste avec un temps CPU raisonnable, tout en discutant du choix de certains paramètres qui interviennent dans les différents modèles.

Mots clefs Écoulements turbulents, modèles de longueur de mélange, méthode de projection, couplage MHD avec interface libre, simulations numériques, méthode des éléments finis, espace de Sobolev avec poids, calcul des variations.

Abstract

Aluminium is a metal extracted from bauxite ore using electrolysis process in cells of big size. A huge electric current goes in the cell through an electrolytic bath and aluminium liquid. These currents generate strong magnetic forces that allow the bath and the aluminium to move. A good knowledge of these turbulent flows is very important to optimize the process.

The purpose of this thesis is to study and simulate turbulent flows in the aluminium smelting process. These flows are solved numerically with a finite element method. In particular, the Navier-Stokes equations for bifluid flows with free moving interface are solved numerically.

In the first part of this work, we develop some mixing-length models that take into account the effects of the wall. A theoretical mathematical study shows the validity of these models and we give recommendations on the choice of the parameters involved in the computation.

In the second part we study the resolution of the Navier-Stokes equations. The study focuses on algorithms that decouple the computation of the speed and pressure, commonly called projection method or Chorin-Temam algorithm.

The final section provides answers on the relevance of wall modelling and projection methods in numerical simulations of turbulent flows in the aluminium smelting process. In particular, we obtain a numerical model that produces a realistic flow with a reasonable CPU time and we discuss the choice of certain parameters involved in the different models.

Keywords Turbulent flows, mixing-length models, projection methods, MHD equations with free moving interface, numerical simulations, finite element method, weighted sobolev spaces, calculus of variations.

Remerciements

Je vais commencer par remercier Jacques Rappaz, mon directeur de thèse, qui m'a proposé ce travail de doctorat. Je remercie Jacques pour sa disponibilité, son investissement, nos nombreuses discussions, pour ses remarques constructives et pour avoir toujours su me laisser essayer les choses par moi-même. C'était un réel plaisir de pouvoir travailler avec lui.

Je remercie ensuite Marco Picasso, mon deuxième directeur de thèse, qui m'a fait découvrir le monde de l'aluminium grâce à sa proposition de stage durant mes études. Je remercie Marco pour ses conseils, son écoute, sa bonne humeur et pour avoir toujours laissé sa porte ouverte.

Je tiens à remercier les membres de mon jury de thèse, les professeurs François Gallaire et Rachid Touzani ainsi que Benoît Bardet pour avoir pris le temps de lire mon document et pour leurs remarques constructives. Je remercie aussi Joachim Krieger, président du jury.

Je remercie l'entreprise Rio Tinto Alcan pour avoir financé ce travail, et plus particulièrement les membres du LRF à Saint-Jean de Maurienne : Olivier Martin, Yves Caratini, Benoît Bardet, Steeve Renaudier, Steve Langlois et Bertrand Allano pour la très bonne collaboration durant ces quatre ans. Un grand merci à l'équipe d'YCOOR SYSTEM, Alexandre, Gilles et Julien pour les nombreuses aides et discussions. Merci à Agnieszka pour son aide et son accueil lors de mon séjour en Pologne ce qui m'a permis d'avancer dans la partie théorique de ce travail.

Il serait difficile d'oublier Michel Flück, qui a presque réussi à me convaincre qu'ALUCCELL n'était finalement pas si mystérieux... Je remercie Michel pour ses nombreuses aides informatiques et pour toutes les discussions constructives que nous avons eues.

Un immense merci à Pierre, Natalia, Estelle, Julie, Dimitri, Diane, Laurianne ainsi que Marie-Hélène Descary (MHD!) pour leurs nombreuses corrections et relectures du présent manuscrit.

Je remercie ensuite mes collègues de l'EPFL, tout d'abord mes deux courageux collègues de bureau, Stéphane et Thomas, avec qui l'ambiance au bureau était excellente ainsi qu'à Dimitri, MM et Sylvain. Un grand merci à Diane pour sa présence, son aide et pour nos discussions mathématiques ou gymniques. Je remercie aussi les spécimens étranges du bureau du fond du couloir : Vil le Viking, Sam Minion et LM pour leur bonne humeur et leur humour intrigant.

Un grand merci aussi à toutes les personnes avec qui j'ai collaboré durant ces quatre années de thèse, que ce soit les doctorants, les professeurs et les secrétaires de la section de mathématiques, les étudiants, les membres des comités de QED et CQFD et toute l'équipe des assistants et des étudiants des séminaires Burlet pour ces bons moments.

Je remercie tous mes amis de la Vallée, notamment les fous de la gym ainsi que la fine équipe des TWO OLD BOYS (Laure, Fabio et Dylan!). Je remercie aussi toute l'équipe des gros foireux de Sat' ainsi que mes amis du gymnase et de l'EPFL qui m'ont toujours fait passer des moments inoubliables : concours de gym, soirées autour du feu, noces dans les copeaux, binchs, sorties de sport et j'en passe...

Merci à l'équipe des anciens de l'EPFL avec qui j'ai commencé mes études et qui m'ont aidé à tenir le coup jusque là : Dimitri, Diane, Monica, Nicolas, Younes, Rafael, Marine, Valentin et Thierry. Un grand merci à Pauline, Joanna, Julie et Marie de m'avoir fait confiance pour les sessions de rock acrobatique et un merci particulier à Beber' la scandale que j'ai rencontré en analyse pour nos quelques périples incroyables.

Finalement, je remercie mes parents et ma famille qui m'ont toujours soutenu et encouragé dans mon choix de faire des études et sur qui j'ai toujours pu compter.

Encore un grand merci à tout le monde !

Lausanne, Juillet 2016

Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	v
Liste des symboles	ix
1 Introduction	1
2 Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange	11
2.1 Modélisation de l'écoulement entre deux plaques	12
2.1.1 Description de l'écoulement	12
2.1.2 Statistiques et moyennes de Reynolds	12
2.1.3 Description de la couche limite turbulente	13
2.1.4 Détermination de la longueur de mélange	15
2.1.5 Résumé de la modélisation	17
2.2 Analyse Mathématique	18
2.2.1 Espace fonctionnel	19
2.2.2 Sur l'étude du champ de vitesse du problème de Stokes	24
2.2.3 Sur l'étude de la pression du problème de Stokes	28
2.2.4 Le modèle de von Karman	32
2.2.5 Quelques remarques sur le problème discret	33
2.3 Résultats numériques	35
2.3.1 Discrétisation en espace	35
2.3.2 Linéarisation	36
2.3.3 Résolutions	39
2.3.4 Tests numériques 2D	40
2.3.5 Tests numériques 3D	43
3 Sur la résolution des équations de Navier-Stokes	47
3.1 Revue des méthodes de projection	48
3.1.1 Introduction	48
3.1.2 Discrétisation en temps : stabilité et convergence	51
3.1.3 Discrétisation en espace	55

Table des matières

3.2	Résolution du problème de Poisson	56
3.2.1	Formulation faible	56
3.2.2	Discrétisation des différents problèmes	57
3.2.3	Tests numériques	59
3.3	Résultats numériques correspondant aux méthodes de projection	67
3.3.1	Notations utilisées	67
3.3.2	Tests Numériques	68
3.3.3	Conclusion	70
4	Applications à l'électrolyse de l'aluminium	73
4.1	Modélisation des écoulements dans le procédé d'électrolyse de l'aluminium . .	74
4.1.1	Notations et domaines	74
4.1.2	Équations Hydrodynamiques	75
4.1.3	Interface libre	76
4.1.4	Effets électromagnétiques	77
4.1.5	Résumé	79
4.2	Applications sur une cuve industrielle : approche évolutive	81
4.2.1	Notations	81
4.2.2	Calcul du Potentiel électrique	83
4.2.3	Détermination du champ de vitesse avec les équations de Stokes	83
4.2.4	Détermination de l'interface	87
4.2.5	Résultats numérique sur une cuve industrielle simplifiée	90
4.3	Applications sur une cuve industrielle : approche stationnaire	95
4.3.1	Modélisation du Problème MHD Stationnaire	95
4.3.2	Approximation par éléments-finis	99
4.3.3	Résultats Numériques	101
4.3.4	Effet du lissage	112
5	Conclusion	115
	Bibliographie	119
	Curriculum Vitae	127

Liste des symboles

∇	Opérateur gradient
Δ	Opérateur laplacien
div	Opérateur divergence
rot	Opérateur rotationnel
∂, ∂_x	Dérivée partielle
\wedge	Produit vectoriel
T	Opérateur de transposition
$[\cdot]$	Opérateur de saut sur l'interface bain/métal
:	Produit scalaire matriciel $A : B = Trace(A^T B)$
ρ	Densité volumique [kg/m ³]
ρ_{el}	Densité du bain électrolytique : 2130 [kg/m ³]
ρ_{al}	Densité de l'aluminium : 2300 [kg/m ³]
μ, μ_L	Viscosité dynamique [kg/m·s]
μ_T	Viscosité turbulente [kg/m·s]
ν, ν_L	Viscosité cinématique [m ² /s]
μ_{el}	Viscosité dynamique du bain électrolytique : $2e^{-3}$ [kg/m·s]
μ_{al}	Viscosité dynamique de l'aluminium : $2e^{-3}$ [kg/m·s]
μ_0	Perméabilité magnétique du vide : $4\pi e^{-7}$ [kgm/A ² s ²]
μ_r	Perméabilité magnétique relative des matériaux [kgm/A ² s ²]
σ	Conductivité électrique [S/m]
g	Champ d'accélération gravifique terrestre [m/s ²]
I	Intensité de courant total [A]
ε	Permittivité magnétique

Liste des symboles

d	Dimension d'espace, en général $d = 2, 3$
x	Point dans \mathbb{R}^d . $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$
$ x $	Norme euclidienne d'un point $x \in \mathbb{R}^d$
$ \varphi $	Valeur absolue d'une fonction scalaire φ
δ_{ij}	Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon
Ω	Domaine lipschitzien dans \mathbb{R}^d
$\partial\Omega$	Bord du domaine Ω
M	Sous ensemble de $\partial\Omega$ de dimension au plus $d - 1$
\mathbf{n}	Normale unitaire
$\mathbf{t}_k, k = 1, \dots, d$	Vecteurs unitaires tangents à $\partial\Omega$
$\Omega_{P,Q,R}$	Cube à rapport d'aspect variable
Λ	Domaine occupé par la cuve d'électrolyse
$\Omega_{el}(t)$	Domaine occupé par le bain électrolytique au temps t
$\Omega_{al}(t)$	Domaine occupé par l'aluminium au temps t
Γ	Interface bain/métal
Π	Domaine de définition de l'interface
$\Gamma_{in}, \Gamma_{out}$	Surface d'entrée et de sortie du courant
\mathbf{n}_Γ	Normale à l'interface dans la direction Ω_{el}
$\partial f / \partial \mathbf{n}$	Gradient d'une fonction f au bord ; $\partial f / \partial \mathbf{n} := \nabla f \cdot \mathbf{n}$.
w	Fonction poids
\mathcal{B}	Boule dans \mathbb{R}^d
α	Paramètre de puissance général
\mathcal{P}	Classe des poids
\mathcal{A}_r	Classe des poids Muckenhoupt de degré r
$d_M(x)$	Distance d'un point $x \in \Omega$ à M
$d_{\partial\Omega}(x)$	Distance d'un point $x \in \Omega$ au bord du domaine
(r, s)	Couple de nombre conjugué : $1/r + 1/s = 1$
$[d_{\partial\Omega}(x)]^\alpha$	Poids puissance α de la distance
$L^1_{loc}(\Omega)$	Espace de Lebesgue des fonctions localement intégrables
$L^r(\Omega)$	Espace de Lebesgue de degré r
$L^r_0(\Omega)$	Espace de Lebesgue de degré r des fonctions à moyenne nulle
$H^1(\Omega)$	Espace de Sobolev des fonctions L^2 avec dérivée faible dans L^2
$H^{-1}(\Omega)$	Espace de Sobolev dual
$\langle \cdot, \cdot \rangle_d$	Crochet de dualité
$W^{1,r}(\Omega)$	Espace de Sobolev des fonctions L^r avec dérivée faible dans L^r
$H^1_0(\Omega)$	Espace de Sobolev des fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace est nulle sur $\partial\Omega$
$L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$	Espace de Lebesgue de degré r avec poids distance de puissance α
$W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$	Espace de Sobolev des fonctions $L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ avec dérivée faible dans $L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$

$Tr :$	Opérateur de trace dans les espaces de Sobolev
$X \hookrightarrow Y$	Injection continue de l'espace X dans l'espace Y
$u_n \rightharpoonup u$	Convergence faible d'une suite u_n vers u
$H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$	Espace $H^1(\Omega)$ quotienté par \mathbb{R} .
V_N	Espaces de Neumann
$\ \cdot\ _X$	Norme dans un espace de Banach X
$ \cdot _X$	Semi-norme dans un espace de Banach X
$C_c^\infty(\Omega)$	Fonction infiniment continument dérivable à support compact
$X_\alpha, \mathbf{X}_\alpha$	Espace fonctionnel pour les vitesses
$\mathbf{X}_{\alpha, div}$	Espace fonctionnel pour les vitesses à divergence nulle
Y_α	Espace fonctionnel pour la pression
J	Fonctionnel de minimisation
$\langle DF(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle$	Dérivée de Gâteau d'une fonctionnelle F au point \mathbf{u} dans la direction \mathbf{w}
u	Vitesse dans les fluides
f	Champ de force agissant sur les fluides
p	Pression dans les fluides
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	Tenseur de cisaillement
v	Fonction test des espaces de vitesse
q	Fonction test des espaces de pression
\mathbf{u}^*	Champ de vitesse à divergence non nulle
Φ	Champ de pression intermédiaire
B	Champ d'induction
$\mathbf{B}_{int}, \mathbf{B}_{ext}, \mathbf{B}_{fil}, \mathbf{B}_{ferro}$	Différents champs d'induction de la cuve
\mathbf{B}_{hor}	Champ d'induction émanant d'une interface horizontale
j	Densité de courant
$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)$	Tenseur des contraintes
φ	Distance signée à l'interface
$\mathfrak{h} := \mathfrak{h}(x_1, x_2, t)$	Paramétrisation d'une interface $\Gamma(t)$
E	Déplacement électrique
V	Potentiel électrique
$\delta\mathbf{B}$	Perturbation magnétique
ψ	Saut des tractions normales à l'interface
U_δ	Vitesse au centre du canal référence
\bar{U}	Moyenne de la vitesse dans le canal
$\langle \mathbf{u}(x, t) \rangle_m$	Moyenne de Reynolds
$\mathbf{u}'(x, t)$	Fluctuations turbulentes
τ_t	Tenseur de Reynolds
τ_w	Frottement pariétal
u_{τ_w}	Vitesse de friction

Liste des symboles

K, K_i	Élément d'une triangulation
φ_j	Fonction de base linéaire
$\mathbb{P}_1(K)$	Espace des polynômes de degré 1 sur K .
$\mathbb{P}(K)$	Espace des méthodes de projection
B_K, B_{K_i}	Fonction bulle sur un élément K d'une triangulation
$\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h$	Éléments de \mathcal{V}_h
p_h, q_h	Éléments de \mathcal{Q}_h
P_i	Nœuds d'un maillage \mathcal{T}_h
P_{po}	Point fixé dans le domaine \mathcal{T}_h
P_{pr}	Point fixé dans le domaine \mathcal{T}_h
M_1	Nombre de nœuds d'une triangulation \mathcal{T}_h qui sont à l'intérieur de Ω
M_2	Nombre total de nœuds d'une triangulation \mathcal{T}_h
\mathcal{U}_h	Triangulation du domaine de la cuve Λ
\mathcal{T}_h	Triangulation du domaine fluide Ω
\mathcal{S}_h	Triangulation du maillage surfacique de l'interface Γ
K_h^Λ, K_h^Ω	Nombre d'éléments des triangulations de Λ, Ω
M_h^Λ, M_h^Ω	Nombre de nœuds des triangulations de Λ, Ω
\mathcal{V}_h	Espace éléments finis $\mathbb{P}_1/Bulle - \mathbb{P}_1$ pour les vitesses sur le domaine Ω
\mathcal{P}_h	Espace éléments finis \mathbb{P} pour les vitesses sur le domaine Ω
\mathcal{Q}_h	Espace éléments finis \mathbb{P}_1 pour la pression sur le domaine Ω
\mathcal{L}_h	Espace éléments finis \mathbb{P}_1 pour le potentiel sur le domaine Λ
\mathcal{I}_h	Espace éléments finis \mathbb{P}_1 pour la fonction ψ sur le domaine de l'interface Γ
λ	Lagrangien du problème de la moyenne nulle avec contrainte
$\lambda_{h,j}$	Valeur propre d'une matrice de Galerkin
A	Matrice de Galerkin
b	Membre de droite d'une discrétisation éléments-finis
M	Matrice de la moyenne nulle
\mathbf{I}	Matrice identité
\mathcal{D}	Imposer des conditions de Dirichlet
\mathcal{F}	Imposer la valeur en un point
\mathcal{M}	Imposer la moyenne nulle
\mathcal{N}	Imposer la suppression du noyau de la matrice
P	Préconditionneur
\mathbb{L}, \mathbb{U}	Matrices de factorisation LU d'une matrice de Galerkin A
\mathbf{C}^T	Vecteurs des intégrales de fonctions de base $\mathcal{T}_h : C_i = \int_{\Omega} \varphi_i dx$

l_m	Longueur de mélange
L_a, L_o	Largeur et longueur d'un canal
$\tilde{\Delta}$	Filtre de maillage
δ	Épaisseur d'une couche limite entre deux plaques
y	Distance minimale à la paroi pour l'écoulement entre deux plans
y^+	Distance adimensionnelle
Re_τ	Nombre de friction global
u^+	Vitesse de friction adimensionnelle
κ	Constante de von Karman, $\kappa = 0.41$
l	Longueur caractéristique d'un domaine fluide
Re	Nombre de Reynolds
\mathcal{C}	Constante de la condition inf-sup
I	Intervalle de temps
T	Temps Final
Δt	Pas de temps
n	Indice de temps
N	Nombre total de pas de temps : $T = N\Delta t$
t_n	Temps $t_n = n\Delta t$
\mathbf{u}^n, p^n	$\mathbf{u}(x, t_n), p(x, t_n)$
γ_μ	Paramètre de linéarisation de la viscosité
γ_{ns}	Paramètre de Navier-Stokes
L	Nombre de nœuds sur une arête d'un parallélépipède discrétisé
η	Paramètre d'incrémentement des méthodes de projection
n	Itérations de temps
k	Itération de non-linéarité
j	Itération de systèmes linéaires
ε	Tolérance des systèmes linéaires
K_{NL}	Nombre d'itération de l'algorithme de non-linéarité
TOL_{NL}	Tolérance de l'algorithme de non-linéarité
ζ_{turb}	Paramètre numérique des modèles de longueurs de mélanges
x_3^0	Position d'équilibre de l'interface sans forces électromagnétiques

1 Introduction

Afin de motiver ce travail de recherche, nous débutons cette introduction par une présentation du procédé d'électrolyse de l'aluminium à partir de la bauxite [44, 87].

L'aluminium est un élément chimique de faible densité et résistant à la corrosion. Ce métal est ainsi devenu au cours du dernier siècle un matériau essentiel dans l'industrie, notamment dans la construction, les transports, l'aéronautique et les emballages. L'aluminium étant souvent utilisé sous forme d'alliage avec d'autres matériaux comme le cuivre ou le magnésium, la production d'aluminium primaire est importante et constitue un défi industriel, énergétique et environnemental.

L'aluminium est le métal le plus abondant de l'écorce terrestre. La surface solide de la planète en est composé d'environ 8%. Il n'est pas présent sous forme pure mais se retrouve au contraire dans plusieurs centaines de minéraux qui contiennent différents oxydes d'aluminium, comme l'alumine Al_2O_3 . Cette dernière se compose d'environ 50% de bauxite, l'une des principales formes minérales de l'aluminium. Située en général à moins d'un mètre sous terre, la bauxite, une fois extraite, ressemble à de petits cailloux de couleur rouge d'un diamètre de quelques millimètres. Majoritairement présente en Australie, Amérique du Sud et Asie, plusieurs millions de tonnes de bauxite peuvent être extraites à la fois selon le site d'extraction. Une fois criblée et lavée pour être débarrassée des particules fines, la bauxite est transformée pour extraire l'alumine par une méthode d'affinage. Finalement, l'aluminium est extrait de l'alumine par un procédé d'électrolyse [44] qui sera détaillé dans ce document. Il faut en général quatre tonnes de bauxite pour produire une tonne d'aluminium.

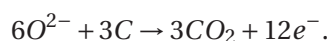
Friedrich Wöhler (1824) est le premier à mettre en évidence les propriétés physiques et chimiques de l'aluminium. L'industrie de ce métal connaît ensuite une progression rapide grâce aux travaux du chimiste autrichien Kart Josef Bayer qui met au point une technique d'affinage pour obtenir l'alumine (Al_2O_3) à partir de la bauxite (procédure Bayer). En 1886, Paul Héroult et Charles Hall découvrent de manière indépendante et simultanée la production d'aluminium par électrolyse. Ce procédé, dit de Hall-Héroult, est celui encore utilisé pour la production d'aluminium et n'a pratiquement pas changé depuis plus d'un siècle.

Électrolyse de l'aluminium

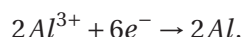
Le procédé d'électrolyse de Hall-Héroult permet d'obtenir de l'aluminium liquide à partir de l'alumine. Ce procédé chimique est réalisé dans des cuves de grandes tailles (en moyenne plus de dix mètres de long sur trois mètres de large), schématisées sur les figures 1.1 et 1.2. La première étape consiste à injecter l'alumine Al_2O_3 dans un bain électrolytique composé de cryolithe et de sels fluorides. L'alumine se dissout et est ensuite transformée en ions d'aluminium par la réaction



La seconde étape consiste à faire réagir les ions d'oxygène avec des anodes en carbone pour former du gaz carbonique selon la transformation



Afin de permettre cette réaction, un fort courant électrique traverse des anodes en carbone partiellement immergées dans le bain aux blocs cathodiques en carbone situés sous l'aluminium liquide. Finalement, la dernière étape transforme les ions d'aluminium en aluminium liquide par la réaction de réduction



La gravité entraîne l'aluminium liquide au fond de la cuve d'où il est retiré en moyenne une fois par jour par une zone de pompage nommée le trou de coulée. Une cuve d'électrolyse produit de l'aluminium en continu durant en général plusieurs années.

Afin d'optimiser la réaction globale, le bain électrolytique et l'aluminium doivent se trouver à l'état liquide. La cryolithe et les sels fondus du bain permettent à l'alumine injectée de se dissoudre à environ 950°C. Pour protéger le reste de la cuve, la température du système est réglée de manière à laisser une couche de bain solide contre la paroi, appelée "talus" et qui permet l'isolation thermique du bain et d'éviter la corrosion de la cuve. Par ailleurs, la formation de gaz carbonique durant le procédé d'électrolyse consomme progressivement les blocs de carbone qui composent les anodes, ce qui nécessite leur remplacement fréquent (figure 1.4).

La quantité d'énergie électrique nécessaire à ce procédé est très importante. Elle représente un courant de plusieurs centaines de milliers d'ampères pour les cuves les plus récentes. Environ 3 % de toute l'électricité produite dans le monde est utilisé pour l'électrolyse de l'aluminium et ce procédé génère environ 1.7 % de tout le CO_2 produit par l'homme [97]. Dans la figure 1.2, nous pouvons voir schématiquement le parcours du courant qui est amené à la cuve à travers de lourds conducteurs. Le courant électrique entre à travers les anodes, traverse le bain et l'aluminium liquide jusqu'à la cathode, ressort par les conducteurs et poursuit son chemin vers la cuve suivante. Dans une production d'aluminium, il y a en général plusieurs centaines de cuves connectées en série dans des halles d'une longueur conséquente (figure 1.2).

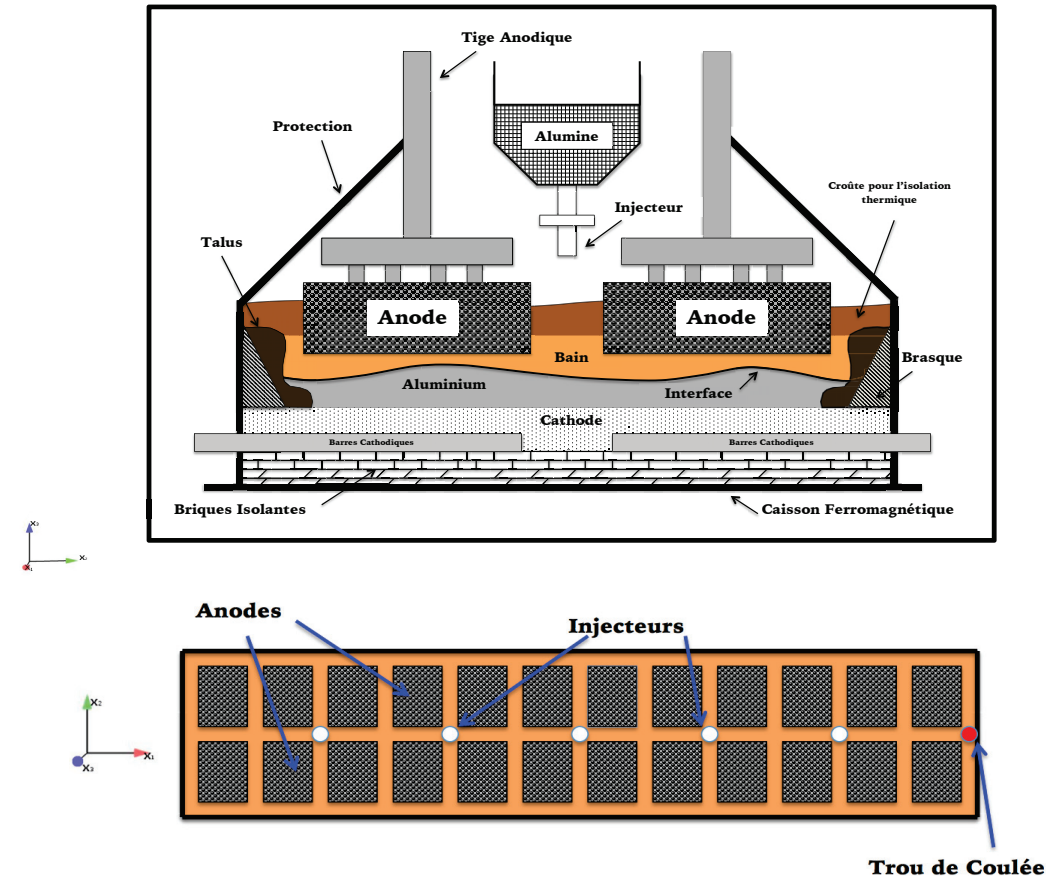


Figure 1.1 – Représentation schématique d’une cuve (haut : coupe transversale, bas : coupe horizontale)

Écoulements turbulents

Lorsque le courant électrique traverse la cuve, il génère un champ magnétique d’induction dans les liquides et autour de la cuve. L’interaction entre la densité du courant et ce champ magnétique engendre une force de Lorentz dont la distribution n’est pas homogène. En effet, la géométrie complexe des cuves provoque une densité de courant variable dans les fluides, ce qui entraîne des variations de l’intensité de la force. Ces zones de variations provoquent des déséquilibres qui mettent en mouvement les fluides et qui sont à l’origine de structures tourbillonnaires apparaissant dans les cuves. En effet, les écoulements engendrés par cette force de Lorentz sont en général turbulents et ont des structures complexes (figure 1.3). Le nombre et l’emplacement de ces structures turbulentes peuvent varier selon l’intensité du courant.

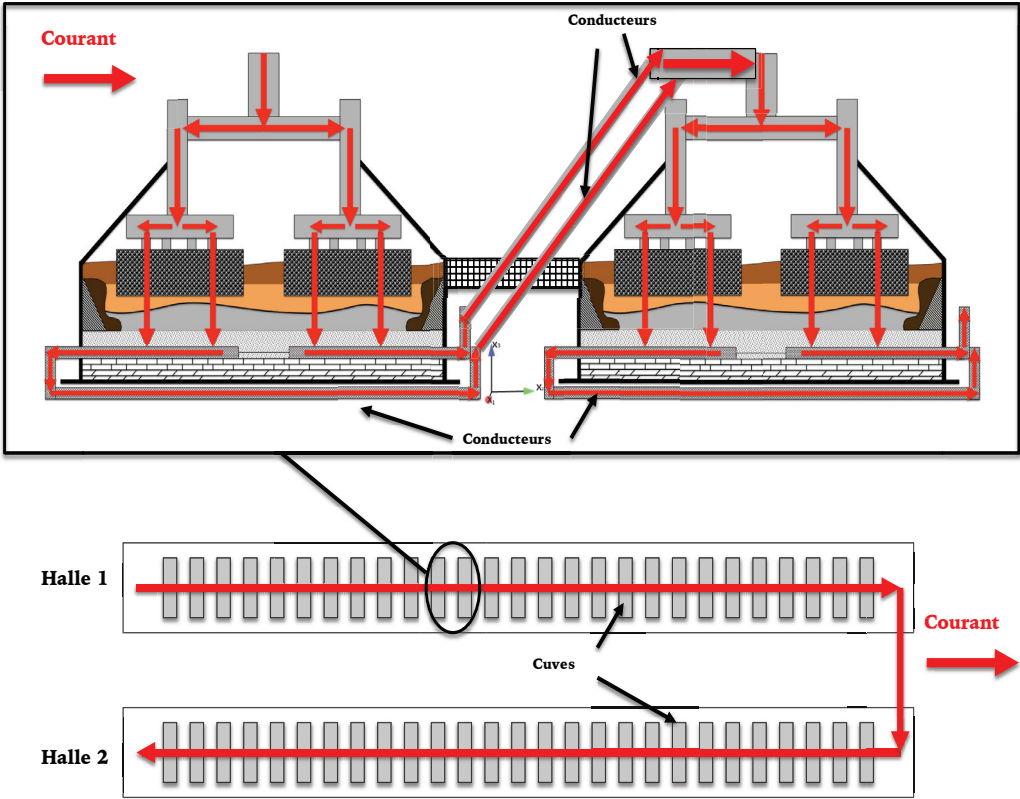


Figure 1.2 – Haut : Les conducteurs et le parcours du courant. Bas : Halle de plusieurs cuves d'électrolyse (source : agal.fr)

Une bonne connaissance de ces écoulements turbulents est cruciale pour l'efficacité du procédé dans l'industrie. En effet l'interaction entre l'écoulement et les forces de Lorentz peut parfois conduire à une instabilité du procédé [87] :

- **Instabilité de l'interface bain/métal**

Durant l'électrolyse de l'aluminium, l'interface entre le bain cryolithique et l'aluminium liquide est en mouvement. Si ces mouvements deviennent trop importants, cela peut conduire à des débordements du bain électrolytique. Pour contrôler ce risque, il faut s'assurer que la distance entre les anodes et l'aluminium liquide reste constante et de l'ordre de quelques centimètres. L'ajout de boucles de courant autour de la cuve rectifie le champ magnétique et donc l'écoulement, ce qui permet de contrôler cette distance.

- **Dissolution de l'alumine**

L'écoulement permet principalement que l'alumine injectée dans le bain électrolytique puisse se dissoudre. Le mélange doit être homogène afin de garantir une bonne stabilité de production. En effet, si sa concentration devient trop forte, l'alumine injectée ne peut plus se dissoudre correctement et coule au fond de la cuve en formant de la boue sur la cathode, ce qui perturbe le courant électrique et provoque des instabilités. A l'inverse, si la concentration est trop faible, le manque d'alumine dans le bain électrolytique provoque une interruption de la réaction d'électrolyse, appelée l'effet d'anode. D'autres réactions prennent alors place en créant des gaz qui adhèrent sous les anodes et qui polluent l'atmosphère.

- **Équilibre thermique**

Puisque la cuve est en contact avec l'air extérieur, la température de l'aluminium fondu et du bain peut passer en-dessous du point de fusion de sorte que l'aluminium devienne solide. Ces zones solides sont des éléments essentiels pour la protection thermique de la cuve. L'écoulement a donc un effet important sur l'équilibre thermique de la cuve puisque les zones de pics de vitesse près des bords permettent de réguler l'épaisseur de la zone solidifiée.

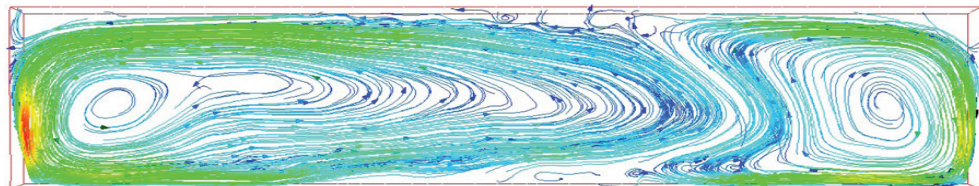


Figure 1.3 – Structure de l'écoulement dans une cuve d'électrolyse. Le courant électrique est de 300k[A] (coupe horizontale de la cuve dans l'aluminium fondu)

Mesures expérimentales

Les mesures du mouvement des fluides dans les cuves d'électrolyse de l'aluminium sont très difficiles. En effet, la forte température du bain (950°C), les champs magnétiques élevés ainsi que la corrosion importante de la cryolithe détériorent rapidement les instruments de mesure.

Quelques moyens ont néanmoins été développés afin d'obtenir des mesures significatives. Une façon de procéder consiste à insérer des tiges en fer dans le bain électrolytique durant quelques minutes. La cryolithe contenue dans le bain attaque ces barreaux. Grâce à une recirculation du fluide autour de la tige, l'intensité et le sens des zones attaquées permettent d'estimer la direction et l'amplitude des vecteurs de vitesses [98]. Par ailleurs, des mesures indirectes de température ont estimé le temps parcouru depuis l'injection d'agrégats d'alumine jusqu'à leurs passages au point de mesure, ce qui a permis d'obtenir des approximations des vitesses. Ces différentes méthodes de mesure ont montré que les vitesses maximales et minimales sont atteintes près des bords et sont de l'ordre de quelques centimètres par secondes. Cependant, ces mesures restent imprécises et les incertitudes sont de l'ordre de 30%.



Figure 1.4 – Changement d'anode dans une cuve d'électrolyse. Le bain cryolithique à très forte température est visible sous l'anode (RIO TINTO ALCAN)

Simulation numérique magnétohydrodynamique (MHD)

Au vu des difficultés de mesures dans l'électrolyse de l'aluminium, la simulation numérique permet d'avoir accès à moindre coût à des informations généralement inaccessibles par l'observation. La résolution numérique est complémentaire aux expériences ; elle permet parfois de les valider ou de les orienter.

La simulation de l'électrolyse de l'aluminium est basée sur les équations magnétohydrodynamiques (MHD) qui régissent le procédé de Hall-Héroult. La résolution de ces équations est difficile car les différentes interactions entre les phénomènes fluides et électromagnétiques en font un problème couplé complexe. De plus, les écoulements sont turbulents et le nombre de Reynolds est très élevé, ce qui rend plus difficile la simulation numérique [61]. Un grand nombre de modèles de turbulence sont disponibles dans la littérature : longueur de mélange, modèle de paroi, RANS, LES ou DNS. Dans cette thèse, quelques modèles de turbulence sont étudiés et appliqués à l'électrolyse de l'aluminium.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre l'EPFL et les entreprises Alu Suisse, Péchiney, Alcan et aujourd'hui Rio Tinto Alcan. Depuis le début des années 1980, le logiciel ALUCCELL [96] permet de calculer l'état stationnaire d'une cuve à partir des équations MHD. Depuis, de nombreuses fonctionnalités ont été ajoutées, permettant de modéliser les effets ferromagnétiques [26], le mouvement de l'interface [75, 96], les effets thermiques [35, 91] et la dissolution de l'alumine [52].

En ce qui concerne la modélisation des écoulements turbulents, le premier modèle dans ALUCCELL remonte au milieu des années 80 [27]. Une méthode pour calculer l'écoulement stationnaire et l'interface d'un écoulement bifluide est proposée avec un tenseur de viscosité qui tient compte de la géométrie des cuves. Dans [96] un modèle de turbulence de longueur de mélange indépendant des parois a été ajouté, permettant d'obtenir des écoulements avec des tourbillons plus réalistes. Cependant, les expériences numériques montrent que les vitesses proches des parois anodiques sont sous-estimées et que la vitesse du fluide est trop faible dans le bain électrolytique. La répartition de l'alumine résultant de ces modèles n'est ainsi pas complètement représentative de la réalité [52]. Un des objectifs de la présente thèse consiste à étudier et à introduire différents modèles de parois [79, 102, 38] dans les simulations numériques magnétohydrodynamiques afin de mieux approcher les écoulements turbulents dans le bain électrolytique proche des anodes. En particulier, nous nous concentrons sur l'étude de modèle de longueur de mélange dont la viscosité turbulente dépend de la distance à la paroi. Nous pourrions ainsi discuter de l'influence et de la pertinence de ces modèles dans le cadre de l'électrolyse de l'aluminium.

Chapitre 1. Introduction

Les écoulements turbulents sont obtenus en résolvant des équations de Navier-Stokes bi-fluides dont la force dépend de la gravité, de la densité de courant électrique et du champ d'induction magnétique. Actuellement, la résolution numérique par éléments finis de ces équations utilise une méthode monolithique qui nécessite la résolution d'un grand système linéaire qui contient la vitesse et la pression, ce qui est très coûteux en terme de temps CPU. Une autre partie de ce travail consiste donc à introduire et à étudier des méthodes numériques qui permettent de résoudre plus efficacement les équations de Navier-Stokes. L'étude est portée sur des algorithmes de découplage vitesse-pression, couramment appelées méthodes de projection ou méthodes de type Chorin-Temam [99]. En particulier, ces algorithmes sont appliqués ici à des domaines de calculs ayant des rapports d'aspects élevés ; l'utilisation de ces méthodes dans le cadre de l'électrolyse de l'aluminium sera discutée.

Organisation du document

L'objectif de cette thèse consiste à étudier et à introduire différents modèles de parois [38] dans les simulations numériques magnétohydrodynamiques, afin de mieux approcher les écoulements turbulents dans les cuves d'électrolyse de l'aluminium. Il s'agit en particulier d'introduire dans ALUCELL des modèles de longueurs de mélange qui prennent en compte l'effet des parois ainsi que des méthodes de projection pour la résolution des équations de Navier-Stokes évolutives. Ce présent document est structuré de la manière suivante :

Dans le chapitre 2, nous étudions mathématiquement et numériquement différents modèles de longueurs de mélange. Après une brève introduction sur la description de la couche limite pour des écoulements dans des domaines aplatis, une étude mathématiques d'existence et d'unicité utilisant les espaces de Sobolev avec poids est présentée pour une équation de Stokes stationnaire non-linéaire. Les résultats théoriques obtenus permettent de donner des recommandations sur le choix des paramètres ; des essais numériques appuient le bien-fondé de nos conclusions.

Dans le chapitre 3, des méthodes de découplage pour les équations de Navier-Stokes évolutives sont présentées. Différents algorithmes sont introduits et les questions de stabilité et de convergence sont discutées. Une étude numérique du problème concernant la pression permet de proposer des méthodes de résolution efficaces. Un accent particulier est porté sur l'étude de la convergence de ces méthodes sur des domaines numériques aplatis. Finalement, ces méthodes sont comparées à la méthode monolithique.

Finally, in chapter 4, the methods studied in chapters 2 and 3 are applied to the electrolysis of aluminium. The magnetohydrodynamic equations are presented. A comparison between stationary and evolutionary approaches [96] and stationary [27] is performed using the different methods considered in this work. The results obtained allow to answer questions about the relevance of wall models and projection methods in the context of numerical simulation of turbulent flows in the electrolysis of aluminium.

2 Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange

Les écoulements turbulents ont une grande influence dans de nombreux domaines tels que la technologie et l'industrie. Avec des mesures parfois difficiles à mettre en place, l'utilisation de la simulation numérique de ces écoulements peut permettre d'optimiser le processus industriel, de façon à réduire les coûts de production et afin d'obtenir une meilleure compréhension du phénomène. Les équations de Navier-Stokes donnent une description précise de ces écoulements turbulents qui sont caractérisés par un nombre de Reynolds très élevé. La résolution numérique de ces équations (DNS) est extrêmement coûteuse du point de vue informatique. En effet, d'après les échelles de turbulence de Kolmogorov [61, 62], le nombre de degrés de liberté nécessaire à la simulation est de l'ordre du nombre de Reynolds au cube (en dimension trois). Ainsi, le temps CPU requis pour de telles simulations serait de l'ordre de plusieurs années !

Afin de contourner ces difficultés, de nombreux modèles de turbulence ont été proposés de sorte à obtenir des résultats suffisamment précis en un temps raisonnable. Dans la LES (Large Eddy Simulation, [79]), on tient compte des échelles fines en utilisant un modèle de filtrage adéquat. Dans la méthode RANS (Reynold Averaged Navier-Stokes, [79]), on suppose que la période des solutions moyennes des équations de Navier-Stokes est d'un ordre bien plus important que les fluctuations turbulentes. Les modèles RANS les plus simples et souvent utilisés dans un contexte industriel sont les modèles dits de longueur de mélange. Ces modèles consistent à modifier la viscosité physique du fluide en une viscosité turbulente qui dépend de la vitesse et de la longueur de mélange. Ceci a pour effet de transformer le terme elliptique linéaire dans les équations de Navier-Stokes par un terme non-linéaire. Dans la suite de ce document, nous désignerons le modèle dit de "Smagorinsky" comme étant un modèle RANS dont la longueur de mélange ne dépend pas des parois [79],[38]. Ce modèle ne doit pas être confondu avec le modèle de "Smagorinsky" de la modélisation LES [79].

Nous commençons dans ce chapitre par présenter la modélisation de l'écoulement entre deux plaques proches en décrivant les longueurs de mélanges dans les couches limites pariétales. A partir de ces lois, nous effectuons ensuite une analyse mathématique détaillée des équations de Stokes non-linéaires avec une viscosité dépendant de la distance aux parois. Nous termi-

nons avec la résolution numérique des équations de Navier-Stokes munies de tels modèles de turbulence. Des tests de convergence lorsque la longueur de mélange dépend linéairement de la distance à la paroi sont proposés.

2.1 Modélisation de l'écoulement entre deux plaques

Cette section décrit la modélisation RANS des couches limites turbulentes d'un fluide s'écoulant entre deux plaques proches (ou canal). Cette description est basée sur les ouvrages [79, 38, 102] et se concentre principalement sur la décomposition de Reynolds de l'écoulement, sur la modélisation du tenseur de Reynolds résultant ainsi que sur la caractérisation des différentes longueurs de mélange des tourbillons proches de la paroi. Ces modélisations s'appuient sur des lois vérifiées expérimentalement et numériquement [79, 57, 60, 95].

2.1.1 Description de l'écoulement

Soit Ω le canal schématisé par la figure 2.1 de demi-hauteur $\delta > 0$, de longueur L_o et de largeur L_a . Les plans sont longs ($L_o/\delta \gg 1$) et larges ($L_a/\delta \gg 1$). On dénotera un point de Ω par $x = (x_1, x_2 = y, x_3)$. Les parois se trouvent en $y = 0$ et $y = 2\delta$, le plan milieu à $y = \delta$. Le champ de vitesse du canal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ s'écoule dans la direction x_1 avec une variation de la norme de la vitesse qui varie principalement selon la direction orthogonale $y = x_2$. La vitesse est supposée nulle en $y = 0$ et $y = 2\delta$ et vaut U_δ au centre du canal. Le fluide est de densité ρ et de viscosité μ .

2.1.2 Statistiques et moyennes de Reynolds

Considérons les équations de Navier-Stokes incompressibles pour l'écoulement $\mathbf{u} := \mathbf{u}(x, t)$:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ici $p := p(x, t)$ est la pression qui agit sur le fluide dans le canal et

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

est le tenseur de cisaillement. Le nombre de Reynolds est défini par

$$Re = \frac{2\delta \bar{U}}{\nu} \quad (2.2)$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du fluide et \bar{U} est une moyenne spatiale de la vitesse sur $0 < y < \delta$. On supposera que le nombre de Reynolds (2.2) est grand, signifiant que l'écoulement

2.1. Modélisation de l'écoulement entre deux plaques

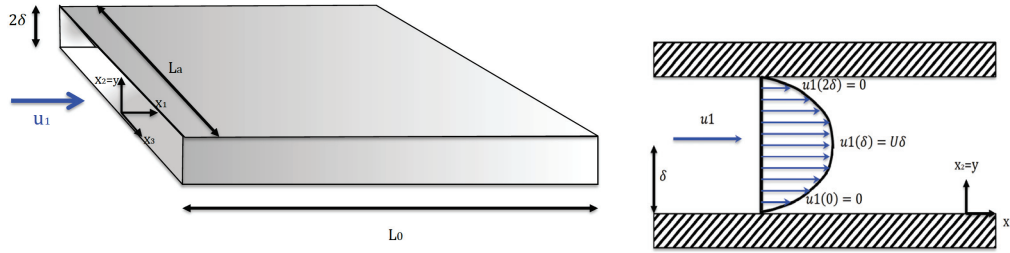


Figure 2.1 – A gauche, schéma d'un écoulement entre deux plaques. A droite, coupe verticale et profil du champ de vitesse qui varie principalement selon la direction orthogonale.

est turbulent et donc que les petites fluctuations locales sont non nulles. Les faibles périodes de ces fluctuations rendent la description instantanée de l'écoulement difficile. Néanmoins la répétition relativement fréquente des observations de l'écoulement permet, d'un point de vue statistique en temps, d'obtenir un champ de vitesse moyen. On adopte ainsi la décomposition suivante du champ de vitesse \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(x, t) = \langle \mathbf{u}(x, t) \rangle + \mathbf{u}'(x, t), \quad \text{avec } \langle \mathbf{u}(x, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u}_1(x, r) dr. \quad (2.3)$$

Ici $\langle \mathbf{u}(x, t) \rangle$ est une moyenne temporelle de période T et $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ sont les fluctuations turbulentes de courtes fréquences. L'écoulement sera supposé statistiquement indépendant selon x_3 et symétrique par rapport au plan milieu $x_3 = \delta$. En introduisant la décomposition (2.3) de \mathbf{u} et p dans l'équation (2.1), en prenant en compte les symétries de l'écoulement puis par extraction de la moyenne du système obtenu, on obtient l'équation dite de Reynolds :

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} - \rho \langle u'_1 u'_2 \rangle \right) - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x}. \quad (2.4)$$

On y définit les fluctuations turbulentes $\tau_t := -\rho \langle u'_1 u'_2 \rangle$, plus couramment désignées sous le nom de tenseur de Reynolds. La modélisation RANS permet de fermer l'équation (2.4) en décrivant ces fluctuations par un terme de viscosité supplémentaire, appelé viscosité turbulente, et s'ajoutant à la viscosité du fluide μ . Ici, nous nous intéresserons aux modèles de fermeture dits à 0-équation où la forme de la viscosité turbulente dépend des effets visqueux à la paroi.

2.1.3 Description de la couche limite turbulente

La vitesse étant nulle aux abords des plaques, les effets turbulents y sont donc absents et ce sont les effets visqueux qui dominent. Le frottement pariétal τ_w est ainsi dû entièrement aux contributions visqueuses :

$$\tau_w = \rho \nu \left(\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Chapitre 2. Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange

La viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ du fluide et le frottement τ_w sont d'importants paramètres qui permettent de caractériser les différentes échelles visqueuses dans la couche limite. En notant $u_{\tau_w} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ la vitesse de friction, nous définissons trois grandeurs adimensionnelles. Il s'agit du nombre de friction local y^+ , de la friction maximale Re_{τ_w} et de la vitesse de friction adimensionnée u^+ :

$$y^+ = \frac{yu_{\tau_w}}{\nu}, \quad Re_{\tau_w} = \max y^+, \quad u^+ = \frac{u}{u_{\tau_w}}. \quad (2.5)$$

De nombreuses expériences et simulations numériques DNS ont été produites pour les écoulements entre deux plaques ([57], voir figure 2.3) et ont permis de corréler la distance y^+ et la vitesse u^+ . En particulier, ces expériences ont montré que pour un nombre de Reynolds local y^+ compris entre 40 et 200, la vitesse de friction adimensionnelle dépend du logarithme du nombre y^+ :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + B \quad (2.6)$$

où $\kappa \approx 0.41$ et $B \approx 5.3$ sont des constantes validées par les expériences. Le nombre κ sera dénoté dans la suite comme la constante de von Karman. Ces données ont permis de caractériser les zones de la couche limite turbulente en fonction des variables (2.5) (voir la figure 2.2) :

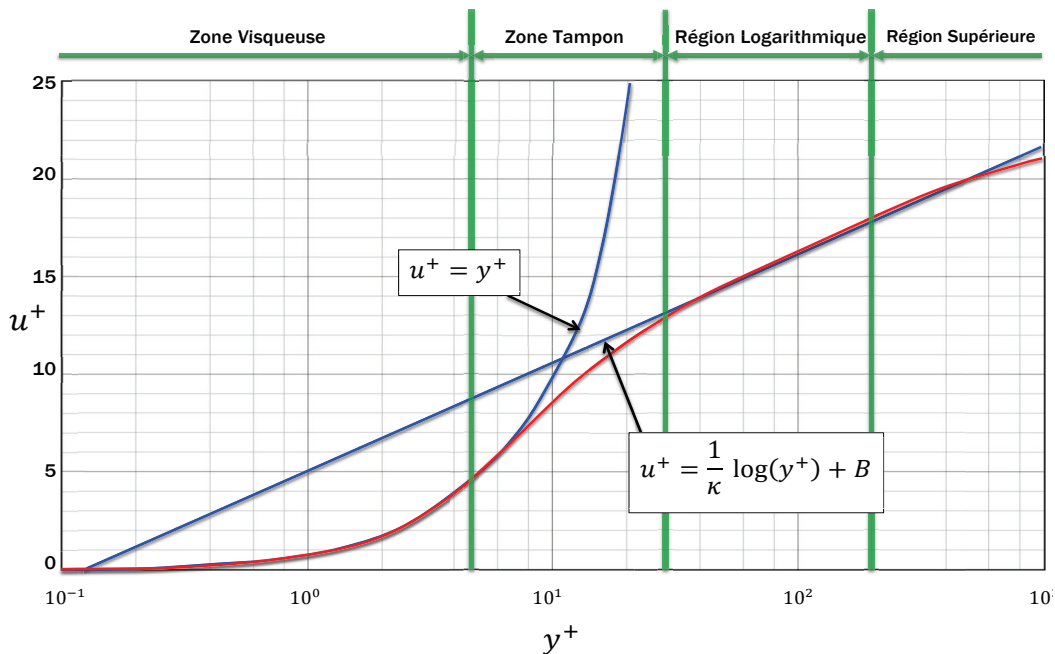


Figure 2.2 – Les différentes zones de la couche limite turbulente.

2.1.4 Détermination de la longueur de mélange

Une modélisation de la longueur de mélange s'appuie sur le fait que la taille des tourbillons est limitée par la présence des parois et que, loin de celles-ci, leur taille tend à se stabiliser. En pratique, la modélisation consiste à remplacer le tenseur des fluctuations de Reynolds τ_t issus de (2.4) par une fermeture adéquate. En 1877, Boussinesq postule que ces fluctuations peuvent être modélisées par le biais d'une viscosité et du gradient des vitesses longitudinales à la paroi. En 1945, Prandtl introduit le concept de longueur de mélange, noté l_m , qui mesure la taille des tourbillons de proches parois et qui permet de relier la viscosité turbulente aux gradients de vitesse moyenne. Ainsi, le tenseur de Reynolds prend la forme suivante :

$$-\rho \langle u'_1 u'_2 \rangle = \mu_T \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y}, \text{ avec } \mu_T = \rho u_m l_m, \quad (2.7)$$

où u_m est une vitesse de mélange. En 1964, Smagorinsky caractérise cette vitesse par $u_m = |\langle u'_1 u'_2 \rangle|^{1/2}$ et en la remplaçant dans (2.7) on obtient $u_m = l_m |\partial_y \langle u_1 \rangle|$. On obtient alors une caractérisation de la viscosité turbulente

$$\mu_T = \rho l_m^2 \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y},$$

où l_m est la longueur de mélange qui doit être déterminée et spécifiée dans les zones de la couche limite turbulente.

Pour la couche logarithmique, la loi (2.6) permet d'écrire le gradient des vitesses longitudinales à la paroi comme

$$\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} = \frac{u_m}{\kappa y}. \quad (2.8)$$

En comparant (2.7) et (2.8), on obtient

$$\rho u_m^2 = \rho u_m l_m \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} = \rho u_m l_m \frac{u_m}{\kappa y}.$$

Ainsi, on a une longueur de mélange dans cette couche qui dépend linéairement de la distance à la paroi :

$$l_m = \kappa y$$

avec $\kappa = 0.41$ la constante de von Karman. Cette longueur dans la zone logarithmique donne une bonne correspondance avec les données expérimentales et numériques à différents nombres de Reynolds (voir figure 2.3). Proche de la paroi, les données ont montré que les fluctuations τ_t sont proportionnelles à y^3 . Si on gardait la spécification linéaire $l_m = \kappa y$, le tenseur τ_t varierait comme y^2 et ainsi la longueur l_m devrait être modifiée lorsque $y^+ < 50$. Dans ce sens, Van Driest propose en 1956 une longueur qui spécifie la diminution des structures tourbillonnaires dans la zone tampon par la relation :

$$l_m = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{26}} \right).$$

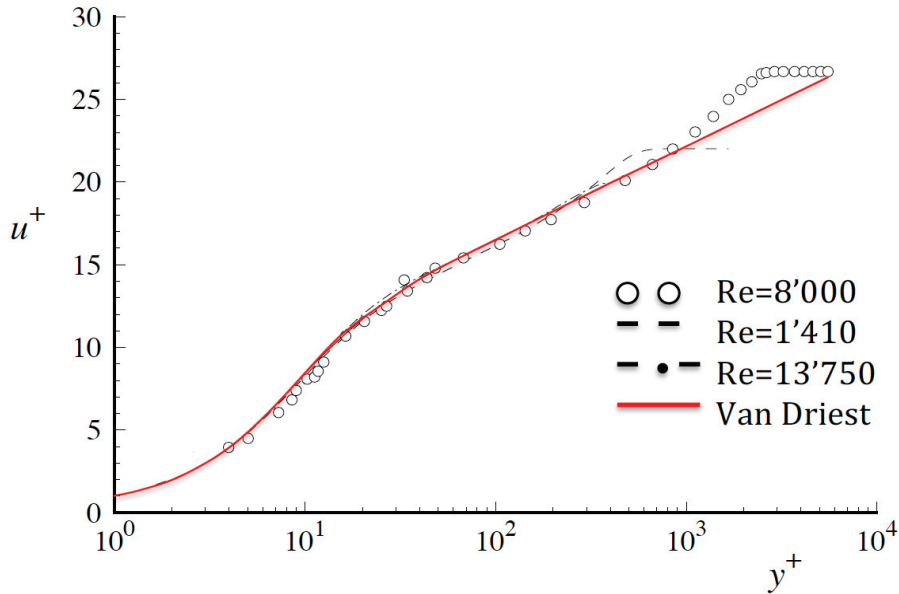


Figure 2.3 – Relation entre la distance adimensionnelle et la vitesse de friction dans des expériences pratiques et numériques à différents nombres de Reynolds. Les données en cercle correspondent aux expériences de couche limite de Klebanoff (1954) [60]. La courbe en traitillé provient de la DNS de Spalart (1988) [95] et les données en traitillé-pointé sont issues de la DNS de Kim et al. (1987), [57]. La courbe rouge est la loi de Van Driest qui spécifie la diminution des structures tourbillonnaires proche de la paroi.

À partir de ces descriptions plusieurs modélisations sont possibles en définissant la longueur de mélange dans toute la couche limite. Voici quelques possibilités :

- **Modèle de von Karman** La longueur de mélange de la couche logarithmique est étendue dans toute la couche limite turbulente :

$$l_m = \kappa y; \tag{2.9}$$

- **Modèle de "Smagorinsky"** Ici on ne tient pas compte de la paroi et la fonction longueur est choisie comme la longueur caractéristique du domaine :

$$l_m = l := 2\delta; \tag{2.10}$$

- **Modèle de Nikuradse-Schlichting (1947)**

$$l_m = 0.14 - 0.08(1 - y)^2 - 0.06(1 - y)^4; \tag{2.11}$$

- **Modèle de Van Driest (1956)**

$$l_m = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{26}} \right); \tag{2.12}$$

- **Modèle Couplé** Une longueur différente en fonction de la région de la couche limite :

$$l_m = \begin{cases} \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{26}}\right) & \text{si } 0 \leq y^+ < 70; \\ \kappa y & \text{si } 70 \leq y^+ < 200; \\ \min\{\kappa y, 0.09\delta\} & \text{si } 200 \leq y^+. \end{cases} \quad (2.13)$$

2.1.5 Résumé de la modélisation

Les modèles de longueur de mélange pour des écoulements entre deux plaques parallèles et proches ont été présentés (2.9)-(2.13). En utilisant respectivement les hypothèses de Bousinesq, Prandtl et Smagorinsky, les fluctuations turbulentes issues de la décomposition de Reynolds (RANS) sont modélisées par le biais d'une viscosité turbulente

$$\mu_T = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \right| \quad (2.14)$$

où l_m est la longueur de mélange des tourbillons dont la taille dépend de la distance à la paroi et $\left| \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \right|$ est le cisaillement moyen, que nous écrirons par la suite de façon plus générale comme le tenseur de cisaillement moyen : $\sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})}$. Les modèles les plus courants et que nous utiliserons seront ceux de la forme de von Karman qui sont spécifiques pour la couche limite logarithmique et dont la longueur de mélange varie linéairement depuis la paroi :

$$l_m = \kappa y.$$

Cette approche ne permet pas de décrire les nombreuses structures turbulentes présentes dans les couches limites turbulentes (voir [79, 28] pour les compléments). Cependant, bien que ces modèles restent simples, la prise en compte de l'effet des parois est suffisante pour obtenir au moins les structures les plus importantes de l'écoulement.

Notons que nous laisserons de côté les modélisations RANS dites à plusieurs équations et aussi utilisées dans l'industrie. Citons par exemple les modèles à deux équations $k - \varepsilon$ ou $k - \omega$. La viscosité turbulente dans ce cas dépend de l'énergie cinétique et du taux de dissipation qui détermine l'échelle de la turbulence. Décrits dans [102], ces modèles ont comme inconvénients d'être imprécis à proximité des parois et ne sont pas adaptés aux écoulements à fort gradient de pression [38]. La modélisation plus raffinée du type Large Eddy Simulation (LES, [79]) ou Detached Eddy Simulation (DES, [102]) ne sera pas non plus envisagée. Dans ces modèles les échelles d'inertie du fluide sont calculées jusqu'à une limite qui dépend du maillage, appelé filtre et noté $\tilde{\Delta}$. Le reste de l'écoulement est modélisé en choisissant des modèles de "Smagorinsky" locaux et dont la viscosité turbulente prend la forme

$$\mu_T = \rho \tilde{\Delta}^2 \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})}.$$

Les maillages nécessaires à l'obtention d'une bonne précision doivent être extrêmement fins, ce qui induit un temps de résolution trop coûteux pour qu'ils soient considérés ici.

2.2 Analyse Mathématique

Nous allons modéliser des écoulements turbulents entre deux plaques proches à l'aide de modèles de longueur de mélange, ce qui consiste concrètement à résoudre les équations de Navier-Stokes avec une viscosité du type (2.14). Nous proposons dans cette partie une étude mathématique afin de pouvoir donner des recommandations sur la résolution numériques de ces équations dans le cadre de l'électrolyse de l'aluminium.

Bien que la modélisation de la turbulence par des modèles de longueur de mélange n'ait du sens que pour des équations de Navier-Stokes, nous allons mener dans ce paragraphe une étude sur l'existence de solutions faibles pour l'équation de Stokes stationnaire avec une viscosité du type (2.14) dépendant d'une longueur de mélange et du cisaillement moyen.

Le choix d'étudier ici un problème de Stokes permet d'obtenir de premiers résultats pour de tels problèmes non-linéaires dont la viscosité s'annule sur le bord du domaine lorsque la longueur de mélange dépend de la distance à la paroi. Notons que ces résultats prolongent ceux déjà obtenus pour une équation de Stokes stationnaire avec des viscosités du type "loi de Carreaux" [8] et qui correspondent dans notre situation à une longueur de mélange qui ne dépend pas de la distance à la paroi. L'idée est de pouvoir utiliser ces résultats afin de donner des recommandations lors de la résolution des équations de Navier-Stokes avec de tels viscosités.

Dans le modèle de von Karman (2.9), la longueur de mélange dépend linéairement de la distance à la paroi. Cependant, nous allons voir qu'il n'est pas trivial de donner un sens à une équation de Stokes stationnaire avec une telle longueur de mélange. Par conséquent, nous choisissons dans ce qui suit la longueur de mélange "hybride"

$$l_m = l^{1-\frac{\alpha}{2}} (\kappa y)^{\frac{\alpha}{2}}$$

où $0 \leq \alpha \leq 2$ et $l := 2\delta$ est la longueur caractéristique du domaine. Cette hypothèse donne une dépendance sous-linéaire des effets pariétaux pour $0 < \alpha < 2$. Notons que lorsque $\alpha = 0$ nous obtenons la longueur de mélange de Smagorinsky (2.10) qui ne dépend pas des parois et pour $\alpha = 2$ nous retrouvons le modèle de von Karman (2.9).

Les résultats de ce paragraphe 2.2 font l'objet d'articles publiés dans [85] et soumis dans [86] en collaboration avec Jacques Rappaz.

Description du problème

Si $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement la vitesse et la pression d'un fluide incompressible de densité ρ , soumis à une force \mathbf{f} , s'écoulant dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. avec un bord de régularité Lipschitzien $\partial\Omega$, les équations de Navier-Stokes stationnaires dans Ω prennent la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{F}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.15)$$

avec $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$, où $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ et $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. La viscosité est donnée ici par

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) = \mu_L + \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| \quad (2.16)$$

où $\mu_L > 0$ correspond à la viscosité laminaire, et où $d_{\partial\Omega}(x)$ est la distance du point $x \in \Omega$ au bord $\partial\Omega$ et $|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| = (\sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})^2)^{\frac{1}{2}}$. Le cas $\alpha = 0$ peut être traité dans les espaces de Sobolev usuels et l'analyse se trouve dans de nombreux papiers [8, 92]. Par opposition, les cas avec $\alpha > 0$ doivent être traités dans les espaces de Sobolev avec poids et présentent des difficultés. En particulier, nous ferons quelques commentaires sur le modèle de von Karman.

Nous procédons dans ce chapitre à une analyse détaillée du problème (2.15) avec la viscosité (2.16) et $\alpha < 2$. Pour cela, nous commençons par considérer le problème de Stokes avec une fonction \mathbf{F} donnée. En utilisant plusieurs résultats connus des espaces de Sobolev avec poids [64, 13, 55, 72], nous établissons des résultats théoriques sur l'existence et sur l'unicité d'un champ de vitesse de l'équation (2.15). Nous montrons l'importance du rôle de la viscosité laminaire μ_L pour le modèle de von Karman. L'unicité de la pression reste dans certains cas une question ouverte.

2.2.1 Espace fonctionnel

Dans cette partie, nous introduisons les outils nécessaires à l'étude du problème (2.15)-(2.16). Nous commençons par définir différentes classes de fonctions appelées poids et leurs propriétés. Nous nous intéresserons plus particulièrement au poids distance qui permettra l'analyse du problème (2.15)-(2.16). Ensuite nous caractériserons des espaces de Sobolev engendrés par de tels poids. Une inégalité de Korn spécifique à ces espaces est démontrée.

Les fonctions poids

Soit Ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, à frontière Lipschitzienne.

Définition 2.2.1 (Poids). *Une fonction $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un poids et on dit que w appartient à la classe \mathcal{P} si pour tout $1 < r < \infty$:*

- $w \in L^1_{loc}(\Omega)$;
- $w^{-\frac{1}{r-1}} \in L^1_{loc}(\Omega)$;
- $w(x) > 0$ presque partout dans Ω .

Définition 2.2.2 (Poids Muckenhoupt). *On dit qu'un poids w appartient à la classe \mathcal{A}_r si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} w dx \right) \left(\frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} w^{-\frac{1}{r-1}} dx \right)^{r-1} \leq C \quad (2.17)$$

pour toute boule $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$.

Les poids correspondant à la définition 2.2.1 donnent un ensemble de fonctions assez générales, mais la classe correspondant à (2.2.2) introduite par Muckenhoupt [68] est plus régulière et sera nécessaire à notre étude. Cette régularité permettra notamment d'obtenir des propriétés importantes sur les espaces fonctionnels considérés.

Exemple 2.2.3.

- Soit $w(x) = |x - x_0|^\alpha$, avec $x_0 \in \partial\Omega$. Alors $w \in \mathcal{P}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (voir [18]) ;
- Soit $w(x) = |x - x_0|^\alpha$, avec $x_0 \in \partial\Omega$. Alors $w \in \mathcal{A}_r$ si et seulement si $-d < \alpha < d(r - 1)$ (corollaire 4.4 dans [100]) ;
- Soit $w(x) = e^{\lambda\psi(x)} \in \mathcal{A}_2$ si $\psi \in W^{1,d}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ est suffisamment petit (corollaire 2.18 dans [39]).

Les poids "distance"

Les poids générés par la distance entre un point et un sous-ensemble de $\partial\Omega$ seront les fonctions admissibles à l'étude du problème (2.15) avec une viscosité de type (2.16).

Définition 2.2.4 (Distance). *Soit M un sous-ensemble de $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. On définit la distance entre un point $x \in \Omega$ et M par*

$$d_M(x) = \text{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} |x - y|. \quad (2.18)$$

Remarque 2.2.5. Dans notre étude, nous considérerons $M = \partial\Omega$ et dans ce cas (2.18) sera notée $d_{\partial\Omega}(x)$. Cependant, nous verrons parfois que certaines propriétés seront plus faciles à obtenir en prenant $M = \{x_0\}$, où x_0 est un point de $\overline{\Omega}$.

Dans la suite, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ nous prendrons le poids distance $w(x) = [d_{\partial\Omega}(x)]^\alpha$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- $w \in \mathcal{P}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ ([17]) ;
- $w \in A_r$ si et seulement si $2 - r < \alpha < r - 1$ ([64]).

Les espaces de Sobolev avec poids distance

Pour $1 \leq r < \infty$ et $\alpha > 0$, nous définissons l'espace de Sobolev avec poids distance par

$$W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) = \left\{ v \in L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha), \quad \forall i = 1, \dots, d \right\} \quad (2.19)$$

où $L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |v|^r d_{\partial\Omega}^\alpha dx < \infty\}$ est l'espace de Lebesgue avec poids muni de la norme $\|v\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} := \left(\int_{\Omega} |v|^r d_{\partial\Omega}^\alpha dx\right)^{\frac{1}{r}}$. On munit $W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ de la norme

$$\|v\|_{W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} := \left(\int_{\Omega} |v|^r d_{\partial\Omega}^\alpha dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^r d_{\partial\Omega}^\alpha dx \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (2.20)$$

Dans le cas particulier $\alpha = 0$, $W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ redevient l'espace de Sobolev usuel $W^{1,r}(\Omega)$ ([3]).

Lemme 2.2.6. $W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ muni de la norme (2.20) est un espace de Banach réflexif pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $1 < r < \infty$.

Démonstration. Les propriétés des espaces $W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ sont déduites de celles de $L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ (voir le théorème 1.3 dans [29]). La réflexivité vient du fait que ces espaces sont uniformément convexes puisque le poids est localement intégrable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (théorème III.29 dans [10]). ■

Ces espaces sont principalement décrits dans les ouvrages [64, 29]. Ils trouvent de nombreuses applications dans des problèmes tels que le r -Laplacian [18] ou les équations elliptiques dégénérées [16] pour des poids dans A_r (voir [4, 17]). Les références sur les espaces engendrés par les poids distance sont moins nombreuses mais certaines études [5, 13, 16, 64, 72] traitent plusieurs propriétés de ces espaces. L'une de leurs caractéristiques essentielles est que l'injection de Sobolev

$$W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \hookrightarrow L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \quad (2.21)$$

est continue et compacte (théorème 3.8 de [72]).

Chapitre 2. Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange

Une autre propriété importante est le fait que l'on peut définir un opérateur de trace continu et borné $Tr : W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \rightarrow L^r(\partial\Omega)$ si $1 < r < \infty$ et $0 \leq \alpha < r - 1$ (théorème 9.15 dans [64]). Dans ce cas, l'espace $W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ (la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ muni de la norme (2.20) peut être identifié avec l'espace des fonctions de $W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ qui ont une trace nulle sur le bord :

$$W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) = \{v \in W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) : Tr(v) = 0\}. \quad (2.22)$$

De plus, comme le problème (2.15) est défini par des fonctions vectorielles $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ de composantes u_1, \dots, u_d , on spécifie les normes suivantes pour les champs $\mathbf{u} \in [W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} &:= \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}^r \right)^{\frac{1}{r}}, \\ \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} &:= \left(\sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} := \left(\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Ces définitions et caractérisations permettent de prouver le résultat suivant :

Proposition 2.2.7 (Inégalité de Korn). *Soit $0 \leq \alpha < r - 1$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} \leq C \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}, \quad \forall \mathbf{u} \in [W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d.$$

Démonstration. La structure de la preuve est similaire à la procédure décrite dans [63]. Premièrement, le théorème 6 dans [55] affirme que pour $0 \leq \alpha < r - 1$ il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} \leq C \left\{ \|\mathbf{u}\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} \right\}, \quad \forall \mathbf{u} \in [W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d. \quad (2.23)$$

Par conséquent, il reste à prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} \leq C \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}, \quad \forall \mathbf{u} \in [W^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d.$$

Par contradiction, on peut supposer qu'il existe une suite $(\mathbf{u}_l)_{l=1}^\infty \in [W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$ qui satisfait

$$\|\mathbf{u}_l\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_l)\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} = 0. \quad (2.24)$$

En utilisant (2.23) et (2.24), la suite $\{\mathbf{u}_l\}_l^\infty$ est bornée dans $[W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$ et par compacité de l'injection (2.21), il n'est pas restrictif de supposer qu'il existe $\mathbf{u} \in [W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$ avec

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_l \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faiblement dans } [W_0^{1,r}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d. \quad (2.25)$$

Les relations (2.24) et (2.25) impliquent alors $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0$. En utilisant [63], la fonction \mathbf{u} peut s'écrire comme un polynôme de degré un. Puisque \mathbf{u} s'annule sur le bord du domaine qui est borné, alors $\mathbf{u} \equiv 0$. Cela contredit le fait que $\|\mathbf{u}\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} = 1$ (Conséquence de (2.24) et (2.25)). ■

Remarque 2.2.8. Afin d'étudier le problème de Stokes (2.15) avec la viscosité (2.16), nous verrons plus loin que nous avons besoin de travailler avec des espaces de Sobolev avec $r = 3$. Dans ce cas particulier, la proposition 2.2.7 prend la forme suivante : pour $0 \leq \alpha < 2$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} \leq C \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}, \quad \forall \mathbf{u} \in [W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d. \quad (2.26)$$

Dans ce qui suit nous prenons $0 \leq \alpha < 2$. Le problème (2.15) est donné avec des conditions de Dirichlet homogènes et prend en compte dans (2.16) deux termes de viscosités $\operatorname{div}(2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ et $\operatorname{div}(2\kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$. Par conséquent, il nous sera nécessaire de travailler dans les deux espaces de Banach $H_0^1(\Omega)$ et $W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$. Remarquons qu'il existe α_0 avec $0 \leq \alpha_0 < 2$ tels que $W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \subset H_0^1(\Omega)$ lorsque $0 \leq \alpha < \alpha_0$ (voir [64]) mais ce n'est pas le cas lorsque α est proche de deux. Par conséquent, si nous voulons analyser le modèle de von Karman correspondant à $\alpha = 2$, nous devons définir l'espace

$$X_\alpha = H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \quad (2.27)$$

muni de la norme

$$\|v\|_{X_\alpha} := \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}. \quad (2.28)$$

Lemme 2.2.9. Soit $0 \leq \alpha < 2$. L'espace normé $(X_\alpha, \|\cdot\|_{X_\alpha})$ est un espace de Banach réflexif.

Démonstration. Remarquons déjà que $L^3(\Omega) \subset L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ avec injection continue. Puisque l'inclusion $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$ est compacte (Théorème 6.3 dans [3]), il s'ensuit que l'inclusion $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ est aussi compacte. Prenons $(f_l)_{l=1}^\infty \in H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ une suite bornée. Il existe alors une sous-suite encore dénotée $(f_l)_{l=1}^\infty$ et $f_H \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant

$$f_l \rightharpoonup f_H \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega) \text{ lorsque } l \rightarrow \infty$$

avec

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_l - f_H\|_{L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} = 0.$$

D'une manière similaire, puisque $(f_l)_{l=1}^\infty$ est bornée dans $W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ et en utilisant l'inclusion compacte (2.21), il existe une sous-suite $(f_l)_{l=1}^\infty$ encore dénotée par $(f_l)_{l=1}^\infty$ et $f_W \in W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ satisfaisant

$$f_l \rightharpoonup f_W \text{ faiblement dans } W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \text{ lorsque } l \rightarrow \infty$$

avec

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_l - f_W\|_{L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} = 0.$$

L'unicité de la limite dans $L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ implique que $f_H = f_W$ qui est alors dans X_α . Nous avons ainsi prouvé que toute suite bornée dans X_α admet une sous-suite faiblement convergente dans X_α . Ceci prouve que X_α est réflexif. ■

Lemme 2.2.10. *L'espace X_α muni de la semi-norme*

$$|v|_{X_\alpha} := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} \quad (2.29)$$

est un espace de Banach réflexif.

Démonstration. Ce résultat est directement déduit de l'équivalence entre la norme $\|\cdot\|_{X_\alpha}$ et la semi-norme $|\cdot|_{X_\alpha}$, conséquence évidente de l'inégalité de Poincaré et de l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$. ■

2.2.2 Sur l'étude du champ de vitesse du problème de Stokes

Dans cette section nous considérons le problème de Stokes non-linéaire (2.15) avec la viscosité (2.16) pour lequel $\mathbf{F} \in [L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^d$ ne dépend pas de \mathbf{u} et α vérifie $0 \leq \alpha < 2$. Puisque dans (2.15) nous recherchons une vitesse à divergence nulle, nous choisissons l'espace suivant :

$$\mathbf{X}_{\alpha, div} = \{\mathbf{v} \in X_\alpha^d, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$$

muni de la norme $|\mathbf{v}|_{X_{\alpha, div}} = \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}$. En multipliant l'équation de Stokes (2.15) par une fonction test $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\alpha, div}$ et intégrant par partie, nous obtenons une formulation faible du problème (2.15)-(2.16) pour la vitesse : trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\alpha, div}$ tel que

$$\int_{\Omega} (2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) dx = \int_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\alpha, div}. \quad (2.30)$$

Nous utilisons des arguments d'analyse convexe pour montrer que le problème (2.30) est bien posé. Pour cela, définissons la fonctionnelle $J : \mathbf{X}_{\alpha, div} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [2A(x, |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x))|) - \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{u}(x)] dx, \quad (2.31)$$

où $A : (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow A(x, s) \in \mathbb{R}$ est donné par

$$A(x, s) = \frac{\mu_L}{2} s^2 + \frac{1}{3} \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha(x) s^3.$$

Lemme 2.2.11. *La fonctionnelle J est Gâteaux-différentiable et sa dérivée en \mathbf{u} dans la direction \mathbf{v} est donnée par*

$$\langle DJ(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} (2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) dx - \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx. \quad (2.32)$$

Démonstration. Il est aisé de vérifier que pour $\beta \geq 2$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + t\mathbf{v})|^\beta - |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^\beta}{t} = \beta |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^{\beta-2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}).$$

Prenant en compte que

$$\frac{\partial}{\partial s} A(x, s) = \mu_L s + \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha s^2,$$

nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) - J(\mathbf{u})}{t} = \int_{\Omega} [2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + 2\kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})] dx - \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx.$$

■

Dans ce qui suit nous allons prouver que la fonctionnelle J est continue, strictement convexe et coercive. L'existence et l'unicité d'une vitesse au problème (2.30) seront déduites de résultats de calculs des variations issus de [24].

Lemme 2.2.12. *Soit $f, g \in L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ avec $1 \leq r < \infty$. Alors*

$$\int_{\Omega} |d_{\partial\Omega}^\alpha (|f|^r - |g|^r)| dx \leq r \| |f| + |g| \|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}^{r-1} \|f - g\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}. \quad (2.33)$$

Démonstration. La preuve est similaire au Lemme 4 de [22]. La généralisation dans les espaces de Sobolev avec poids se fait aisément en utilisant l'inégalité d'Hölder : si r, s sont tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ et si $h \in L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$, $l \in L^s(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$, alors nous avons

$$\int_{\Omega} d_{\partial\Omega}^\alpha h l dx \leq \|h\|_{L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} \|l\|_{L^s(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}.$$

■

Lemme 2.2.13. *La fonctionnelle J est continue pour la norme $|\cdot|_{X_{\alpha, div}}$.*

Démonstration. En prenant $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\alpha, div}$ dans un voisinage d'un élément $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\alpha, div}$ fixé et en utilisant le lemme (2.2.12) avec respectivement $r = 2, \alpha = 0$ et $r = 3, \alpha > 0$, nous avons l'existence d'une constante $C > 0$ (dépendante de \mathbf{u}) telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2|A(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) - A(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|)| dx &= \int_{\Omega} 2 \left| \frac{\mu_L}{2} (|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 - |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|^2) + \frac{\kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha}{3} (|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^3 - |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|^3) \right| dx \\ &\leq C |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_{X_\alpha}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{F} \in [L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^d$ et par l'inégalité de Poincaré, nous avons l'existence d'une constante $C_f > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} 2|A(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) - A(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|)| dx - \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) dx \right| \\ &\leq C |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_{X_\alpha} + \|\mathbf{F}\|_{L^2} C_p \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{L^2} \leq C_f |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_{X_\alpha}, \end{aligned}$$

Chapitre 2. Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange

où $C_f = (C + \|\mathbf{F}\|_{L^2} C_p)$. Si $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\alpha,div}$, alors nous obtenons

$$\lim_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\alpha,div}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}} J(\mathbf{v}) = J(\mathbf{u}),$$

ce qui termine la preuve. ■

Lemme 2.2.14. *La fonctionnelle J est strictement convexe sur $\mathbf{X}_{\alpha,div}$.*

Démonstration. Pour un point $x \in \Omega$, la fonction $A(x, s)$ est strictement convexe sur \mathbb{R}^+ pour la variable s puisque

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} A(x, s) \geq \mu_L > 0 \text{ lorsque } s > 0.$$

Pour $0 < \eta < 1$ and $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, nous avons en utilisant l'inégalité du triangle

$$|\eta \boldsymbol{\xi} + (1 - \eta) \mathbf{v}| \leq \eta |\boldsymbol{\xi}| + (1 - \eta) |\mathbf{v}|.$$

Comme $A(x, s)$ est strictement convexe et monotone en s ,

$$A(x, |\eta \boldsymbol{\xi} + (1 - \eta) \mathbf{v}|) \leq A(x, \eta |\boldsymbol{\xi}| + (1 - \eta) |\mathbf{v}|) < \eta A(x, |\boldsymbol{\xi}|) + (1 - \eta) A(x, |\mathbf{v}|),$$

ce qui prouve que $A(x, |\cdot|)$ est strictement convexe. Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\alpha}$ telle que $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ et $0 < \eta < 1$. En vertu de la proposition 2.2.7, nous avons $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \neq \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$. De plus,

$$\int_{\Omega} A(x, \eta |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| + (1 - \eta) |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|) dx < \eta \int_{\Omega} A(x, |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) dx + (1 - \eta) \int_{\Omega} A(x, |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|) dx.$$

Nous déduisons alors facilement que J est strictement convexe sur $\mathbf{X}_{\alpha,div}$. ■

Lemme 2.2.15. *Pour $0 \leq \alpha < 2$, la fonctionnelle J est coercive sur $\mathbf{X}_{\alpha,div}$ dans le sens suivant :*

$$\lim_{\mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\alpha,div}; \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}_{\alpha,div}} \rightarrow \infty} \frac{J(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}_{\alpha,div}}} \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

Démonstration. Par définition de la fonction A et par la remarque 2.2.8, il existe des constantes $C, D > 0$ telles que

$$\int_{\Omega} A(x, |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\mu_L}{2} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 + \frac{\rho \kappa^{\alpha} l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^{\alpha}(x)}{3} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^3 \right) dx \geq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + D \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^{\alpha})}^3.$$

Comme $\mathbf{F} \in [L^{\frac{4}{3}}(\Omega)]^d$, nous avons par l'inégalité d'Hölder, l'injection compacte $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré :

$$\int_{\Omega} |\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}| dx \leq \|\mathbf{F}\|_{L^{\frac{4}{3}}} \|\mathbf{u}\|_{L^4} \leq D_1 \|\mathbf{F}\|_{L^{\frac{4}{3}}} \|\mathbf{u}\|_{H^1} \leq D_2 \|\mathbf{F}\|_{L^{\frac{4}{3}}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}$$

où D_1 et D_2 sont deux constantes qui ne dépendent que de Ω . Nous obtenons ainsi

$$J(\mathbf{u}) := \int_{\Omega} 2A(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) dx - \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dx \geq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + D \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^3(\Omega, d_{\partial\Omega}^{\alpha})}^3 - \|\mathbf{F}\|_{L^{\frac{4}{3}}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}$$

où C et D ont des constantes indépendantes de \mathbf{u} . On obtient alors facilement

$$\lim_{\mathbf{u} \in X_{\alpha, div}; |\mathbf{u}|_{X_{\alpha, div}} \rightarrow \infty} \frac{J(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|_{X_{\alpha, div}}} \rightarrow \infty.$$

■

Lemme 2.2.16. Soit $(\mathbf{u}_l)_{l=1}^{\infty}$ une suite dans $X_{\alpha, div}$. La fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement et

$$\mathbf{u}_l \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faiblement dans } X_{\alpha, div} \Rightarrow \liminf_{l \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}_l) \geq J(\mathbf{u}).$$

Démonstration. Voir le corollaire III.8 dans [10].

■

Proposition 2.2.17. Il existe un unique $\mathbf{u} \in X_{\alpha, div}$ tel que

$$J(\mathbf{u}) = \inf\{J(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in X_{\alpha, div}\}.$$

De plus, \mathbf{u} est l'unique solution du problème (2.30).

Démonstration. Par le lemme 2.2.15, nous avons l'existence de $m = \inf\{J(\mathbf{u}); \mathbf{u} \in X_{\alpha, div}\}$. Soit $(\mathbf{u}_n)_{n=1}^{\infty} \in X_{\alpha, div}$ une suite minimisante :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}_n) = \inf\{J(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in X_{\alpha, div}\} := m.$$

Alors, pour un indice n suffisamment large et avec le lemme 2.2.15, il existe une constante positive C telle que

$$|\mathbf{u}_n|_{X_{0, \alpha}} \leq C$$

et donc la suite \mathbf{u}_n est bornée dans $X_{\alpha, div}$. Puisque $X_{\alpha, div}$ est un sous-espace fermé de l'espace réflexif X_{α} , il est aussi réflexif (Proposition III.17 dans [10]). Ceci garantit l'existence d'une sous-suite encore dénotée $(\mathbf{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ et d'une limite $\mathbf{u} \in X_{\alpha, div}$ telle que

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faiblement dans } X_{\alpha, div} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

La fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement (proposition 2.2.16) et donc, puisque $(\mathbf{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite minimisante,

$$m = \liminf_{n \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}_n) \geq J(\mathbf{u}) \geq m.$$

Donc \mathbf{u} est un minimum de J . L'unicité de \mathbf{u} provient directement de la stricte convexité de J (Lemme 2.2.14).

■

2.2.3 Sur l'étude de la pression du problème de Stokes

Dans la partie précédente, nous nous sommes concentrés sur l'existence d'un champ de vitesse \mathbf{u} à divergence nulle de l'équation de Stokes (2.15). Puisque ce problème dépend aussi d'un champ de pression, nous étudions maintenant l'existence d'une solution du problème couplé : si $\mathbf{X}_\alpha = [H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$ trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{X}_\alpha \times Y_\alpha$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} 2(\mu_L + \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dx, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) dx = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_\alpha, \\ \forall q \in Y_\alpha, \end{array} \quad (2.35)$$

avec $0 \leq \alpha < 2$ et Y_α est un espace qui doit être défini. En particulier, nous étudions l'existence d'un champ de pression $p \in Y_\alpha$ avec Y_α un espace fonctionnel adéquat en lien avec l'espace pour le champ de vitesse \mathbf{X}_α et qui donne un sens à l'intégrale

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_\alpha.$$

Nous débutons par quelques résultats intermédiaires utiles :

Proposition 2.2.18. *Le dual de l'espace $L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ peut être identifié à $L^s(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha s/r})$, avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.*

Démonstration. Prenons une fonction $g \in L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ et définissons $\tilde{g}(x) = g(x) d_{\partial\Omega}^{\frac{\alpha}{r}}(x)$. Alors \tilde{g} est dans $L^r(\Omega)$. Nous considérons

$$B : L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \rightarrow L^r(\Omega) \text{ given by } : B(g) = \tilde{g}.$$

L'opérateur B est linéaire et inversible, avec

$$B^{-1}(\tilde{g}) = \tilde{g} d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{r}}.$$

Si K est dans $L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)'$, nous considérons $\tilde{K} : L^r(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ donné par $\tilde{K}(\tilde{g}) = K(g)$ pour tout $g \in L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$. Nous voyons facilement que \tilde{K} est un opérateur linéaire et continu et donc il existe un unique $\tilde{u} \in L^s(\Omega)$ avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ tel que

$$\int_{\Omega} \tilde{u} v dx = \tilde{K}(v), \quad \forall v \in L^r(\Omega).$$

Si nous définissons $u = \tilde{u} d_{\partial\Omega}^{\frac{\alpha}{r}}$, cela signifie que $u \in L^s(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha s/r})$ et nous avons

$$K(g) = \tilde{K}(\tilde{g}) = \int_{\Omega} \tilde{u} \tilde{g} dx = \int_{\Omega} u g dx, \quad \forall g \in L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha).$$

Nous avons montré que pour tout K dans $L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)'$, il existe un unique $u \in L^s(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha s/r})$ tel que

$$\int_{\Omega} u g dx = K(g), \quad \forall g \in L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha).$$

Par conséquent $\mathcal{K} : L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)' \rightarrow L^s(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha s/r})$ donné par $\mathcal{K}(K) = u$ est un isomorphisme et $L^r(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)'$ peut être identifié avec $L^s(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha s/r})$ en utilisant le produit scalaire " L^2 ". ■

Définition 2.2.19. Pour tout $\alpha \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$, on note

$$L_0^q(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha q/p}) := \left\{ q \in L^q(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha q/p}) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\}.$$

Lemme 2.2.20. Les espaces $[W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$ et $L_0^p(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)' := L_0^q(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha q/p})$ satisfont la condition inf-sup : il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que

$$\inf_{q \in L_0^q(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha q/p})} \sup_{\mathbf{v} \in [W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx}{\|q\|_{L_{d_{\partial\Omega}^{-\alpha q/p}}^q} \| \mathbf{v} \|_{W_{d_{\partial\Omega}^\alpha}^{1,p}}} > \tilde{C}.$$

Démonstration. Du théorème 3.1 dans [31], pour une fonction $f \in L_0^p(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$, il existe un champ vectoriel $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \in [W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = f, \\ \| \mathbf{v} \|_{W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)} \leq c \| f \|_{L_0^p(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)}. \end{array} \right.$$

En d'autres mots, cela montre que l'opérateur $\operatorname{div} : [W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d \rightarrow L_0^p(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ est surjectif. Ceci permet d'utiliser le Lemme A.42 dans [33] qui donne l'existence d'une constante $\tilde{C} > 0$ telle que

$$\inf_{q \in (L_0^p(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha))'} \sup_{\mathbf{v} \in [W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx}{\|q\|_{(L_{d_{\partial\Omega}^\alpha}^p)'} \| \mathbf{v} \|_{W_{d_{\partial\Omega}^\alpha}^{1,p}}} > \tilde{C}.$$

Finalement, la proposition 2.2.18 permet d'identifier l'espace dual $L_0^p(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)'$ avec l'espace $L_0^q(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\alpha q/p})$, ce qui conclut la preuve. ■

Chapitre 2. Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange

Considérons maintenant l'unique champ de vitesse \mathbf{u}

$$\mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\alpha, \text{div}} := \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d \mid \text{div} \mathbf{u} = 0\}$$

qui résout

$$\int_{\Omega} (2\mu_L + \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\alpha, \text{div}},$$

(voir la proposition 2.2.17). Puisque la condition inf-sup est satisfaite pour le couple d'espace $[H_0^1(\Omega)]^d, L_0^2(\Omega)$ [33], il existe une unique fonction $p_1 \in L_0^2(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} p_1 \text{div}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} 2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dx, \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d.$$

Par ailleurs en utilisant le lemme 2.2.20 avec $p = 3$ et $q = \frac{3}{2}$, on peut aussi obtenir une unique fonction $p_2 \in L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}})$ telle que

$$\int_{\Omega} p_2 \text{div}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} 2\kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx, \quad \forall \mathbf{v} \in [W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d.$$

En définissant $\mathbf{X}_\alpha = [H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$ et $Y_\alpha := L_0^2(\Omega) \oplus L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}})$, on en déduit immédiatement le résultat suivant pour le problème (2.35) :

Théorème 2.2.21. *Il existe $(\mathbf{u}, p = p_1 + p_2) \in \mathbf{X}_\alpha \times Y_\alpha$ tel que les relations (2.35) sont satisfaites.*

Démonstration. ■

Remarque 2.2.22. *Dans le théorème 2.2.21, la pression $p \in Y_\alpha$ n'est pas nécessairement unique. En fait, la seconde équation dans (2.35) peut être réécrite comme*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \text{div}(\mathbf{u}) dx &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ \int_{\Omega} q \text{div}(\mathbf{u}) dx &= 0 \quad \forall q \in L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}}). \end{aligned}$$

Ces deux relations impliquent que $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ p.p. dans Ω et sont redondantes. Ainsi, puisque nous cherchons p sous la forme $p_1 + p_2 \in Y_\alpha$, la décomposition peut ne pas être unique puisque qu'en général l'espace $L_0^2(\Omega)$ n'est pas inclus dans $L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}})$.

Néanmoins, l'unicité de la pression est parfois possible. Commençons avec une remarque :

Remarque 2.2.23. Soit $\Lambda = [0, 1]$ et le poids $dist(x, \{0\}) = x$. Si on choisit $g \in L^3(\Lambda, d_{\{0\}}^\alpha)$ alors nous avons :

$$\int_0^1 |g|^2 dx = \int_0^1 (|g|^2 x^{\frac{2\alpha}{3}}) x^{-\frac{2\alpha}{3}} dx \leq \left(\int_0^1 |g|^3 x^\alpha dx \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 x^{-2\alpha} dx \right)^{\frac{1}{3}}.$$

La seconde intégrale $\left(\int_0^1 x^{-2\alpha} dx \right)^{\frac{1}{3}}$ est bornée si $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Lorsque $\alpha \geq \frac{1}{2}$, cette intégrale diverge. Ainsi on a $\|g\|_{L^2(\Lambda)} \leq C \|g\|_{L_{d_{\{0\}}^\alpha}^3}$ si $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

La précédente remarque montre que si $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, on a alors $L^3(\Lambda, d_{\{0\}}^\alpha) \subset L^2(\Lambda)$. Plus généralement et en utilisant la proposition 6.5 dans [64], on peut montrer qu'il existe un nombre $\alpha_0 \leq \frac{1}{2}$ tel que

$$W^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \subset W^{1,p}(\Omega)$$

avec injection continue pour $0 \leq \alpha < \alpha_0$. Cela signifie en particulier que $L^2(\Omega) \subset L^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}})$ et ainsi $Y_\alpha := L_0^2(\Omega) \oplus L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}})$ devient $Y_\alpha := L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}})$. Par conséquent, on peut obtenir le résultat suivant lorsque \mathbf{F} appartient au dual topologique de l'espace $[W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$:

Théorème 2.2.24. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine à bord Lipschitziens, il existe $0 < \alpha_0 \leq \frac{1}{2}$ tel que pour tout $0 \leq \alpha < \alpha_0$, le problème de trouver $\mathbf{u} \in [W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$ et $p \in L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}})$ qui satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (2\mu_L + \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{v} \in [W_0^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) dx = 0 \quad \forall q \in L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega, d_{\partial\Omega}^{-\frac{\alpha}{2}}), \end{array} \right. \quad (2.36)$$

admet une unique solution.

Remarque 2.2.25. Pour une question d'homogénéité, nous avons considéré dans cette analyse $M = \partial\Omega$. Les preuves de ce chapitre peuvent être adaptées pour $M \subset \partial\Omega$ puisque l'inclusion compacte (2.21) est aussi valable dans ce cas là.

2.2.4 Le modèle de von Karman

La viscosité turbulente du modèle de von Karman ($\alpha = 2$) pour un écoulement entre deux plaques proches [79] est donnée par :

$$\mu = \mu_L + \kappa^2 d_{\partial\Omega}^2 |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|.$$

Le poids $d_{\partial\Omega}^\alpha$ n'appartient pas à la classe de Muckenhoupt A_3 lorsque $\alpha = 2$ [4, 17]. Ceci a deux conséquences majeures :

1. L'espace $W^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^2)$ n'a en fait pas de trace sur le bord du domaine. En effet, rappelons que dans [64], nous avons l'existence d'un opérateur de trace continu et borné $\text{Tr} : W^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ qui est défini seulement si $1 < p < \infty$ et $0 \leq \alpha < p - 1$. Dans ce cas, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ (la fermeture des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ pour la norme (2.20)) peut être identifiée avec l'espace des fonctions de $W^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ dont la trace $\text{Tr}(u)$ s'annule sur le bord. Pour $\alpha \geq p - 1$, l'opérateur de trace ne peut pas être défini si $\alpha > p - 1$: la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)$ est l'espace lui-même. Néanmoins, l'espace $W^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^2)$ ne correspond à aucun de ces cas et sa caractérisation est plus compliquée (voir la section 8 dans [64]).

Exemple 2.2.26. Soit $\Omega = (0, \frac{1}{2})$ avec $M = \{0\}$. La fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \ln(|\ln(x)|)$ appartient à $W^{1,3}(\Omega, d_M^2)$ puisque

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 u'(x)^3 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln(x)|^3} dx = -\frac{1}{2\ln(2)}.$$

Cependant $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ n'est pas défini.

2. La seconde inégalité de Korn[55] n'est valide que pour $\mathbf{u} \in [W^{1,3}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha)]^d$ avec $-1 \leq \alpha < 2$. Ceci est une question ouverte lorsque $\alpha = 2$ et ainsi nous ne pouvons pas prouver la première inégalité de Korn.

La conséquence directe de ces remarques sont que lorsque $\mu_L = 0$, le problème de von Karman est mal posé. Dans ce cas, la condition de bord $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$ n'a pas de sens.

Ainsi donc, lorsqu'une méthode numérique est utilisée pour obtenir une approximation du modèle de von Karman avec μ_L petit (relativement à la viscosité numérique), les résultats obtenus dépendent fortement du maillage de la méthode comme nous le verrons dans les tests numériques de la section suivante.

2.2.5 Quelques remarques sur le problème discret

Existence de solutions au problème discret

Dans cette partie, on suppose que $0 \leq \alpha < \alpha_0$ avec $W^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}^\alpha) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Ceci nous permet d'assurer l'existence et l'unicité d'une vitesse et d'une pression au problème (2.36) par le théorème 2.2.24. De plus, on considère $\mathbf{X}_{\alpha,h} \subset \mathbf{X}_\alpha$ et $Y_{\alpha,h} \subset Y_\alpha$ des espaces d'approximation de dimension finie des espaces \mathbf{X}_α et Y_α et qui vérifient la condition inf-sup discrète : il existe $\mathcal{C} > 0$ tel que, pour tout $h > 0$, on a :

$$\inf_{q_h \in Y_{\alpha,h}} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{\alpha,h}} \frac{\int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) dx}{\|q_h\|_{Y_\alpha} \|\mathbf{v}_h\|_{X_\alpha}} > \mathcal{C}. \quad (2.37)$$

On s'intéresse au problème discret analogue au problème continu : on cherche $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{\alpha,h} \times Y_{\alpha,h}$ satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} 2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) dx + \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h dx \\ - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_h dx, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{\alpha,h} \times Y_{\alpha,h} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

avec

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = \mu_L + \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|. \quad (2.39)$$

On applique la même démarche que pour le problème continu en éliminant la pression et en définissant l'espace :

$$\mathbf{X}_{\alpha,div,h} = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{\alpha,h}; \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) dx = 0; \forall q_h \in Y_{\alpha,h} \right\}. \quad (2.40)$$

On obtient alors un problème discret réduit pour la vitesse \mathbf{u}_h , analogue au problème (2.2.3) : trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_{\alpha,h}$ tel que

$$\int_{\Omega} 2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) dx = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_h dx, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{\alpha,h}. \quad (2.41)$$

Or, puisque $\mathbf{X}_{\alpha,div,h}$ est un sous-espace de dimension finie de $\mathbf{X}_{\alpha,h}$, il est fermé et donc le théorème 2.2.17 et sa preuve peuvent être adaptés en remplaçant $\mathbf{X}_{\alpha,div}$ par $\mathbf{X}_{\alpha,div,h}$. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.27. *Il existe un unique $\mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_{\alpha,div,h}$ tel que*

$$J(\mathbf{u}_h) = \inf\{J(\mathbf{v}_h); \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{\alpha,div,h}\}$$

et \mathbf{u}_h est l'unique champ de vitesse de (2.41).

Chapitre 2. Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange

En utilisant ce résultat et la condition inf-sup (2.37), le théorème 2.1 de [53] permet de montrer le résultat discret suivant :

Théorème 2.2.28. *Si $0 \leq \alpha < \alpha_0$ et si le couple d'espace $\mathbf{X}_{\alpha,h} - Y_{\alpha,h}$ vérifient la condition inf-sup (2.37), alors il existe un unique couple $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{\alpha,h} \times Y_{\alpha,h}$ satisfaisant (2.38)-(2.39).*

Quelques mots sur les estimations d'erreur a priori

L'analyse d'erreur pour les équations de Stokes avec une loi de type puissance a déjà été effectuée dans [8, 92] pour des couples d'espaces éléments-finis vérifiant la condition inf-sup. Dans notre situation, cela correspond à $\alpha = 0$ et les espaces fonctionnels correspondants sont donnés dans ce cas par

$$\mathbf{X}_0 = [W_0^{1,3}(\Omega)]^d, \quad Y_0 = L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega).$$

Proposition 2.2.29 (Estimation à priori pour $\alpha = 0$ [8, 92]).

On suppose que les solutions (\mathbf{u}, p) vérifient les hypothèses de régularité suivantes

$$\mathbf{u} \in [W^{2,3}(\Omega) \cap W_0^{1,3}(\Omega)]^d, \quad p \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega) \cap L_0^{\frac{3}{2}}(\Omega).$$

Si de plus les espaces $\mathbf{X}_{0,h} \subset \mathbf{X}_0$ et $Y_{0,h} \subset Y_0$ vérifient la condition inf-sup et que les estimations suivantes sont satisfaites :

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{W^{1,3}} \leq Ch \|\mathbf{u}\|_{W^{2,3}}, \quad \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{W^{1,\frac{3}{2}}} \leq Ch \|p\|_{W^{1,\frac{3}{2}}} \quad (2.42)$$

alors sous ces hypothèses de régularité nous avons les estimations d'erreur à priori suivantes pour la vitesse et la pression :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{W^{1,3}} \leq Ch^{\frac{1}{2}}; \quad (2.43)$$

$$\|p - p_h\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq Ch^{\frac{3}{4}}. \quad (2.44)$$

Démonstration. Voir [92]. ■

Dans le cas $0 < \alpha < \alpha_0$, l'ordre de ces estimations reste à déterminer en adaptant les arguments de [92] pour les espaces fonctionnels avec poids. D'un point de vue numérique cependant, nous verrons dans la partie suivante que des tests de convergence montrent aussi des ordres sous-linéaires lorsque $\alpha \in]0, 2[$.

2.3 Résultats numériques

Dans cette partie nous présentons la résolution numérique des équations de Stokes et de Navier-Stokes (2.15) avec la viscosité de longueur de mélange précédemment établie et étudiée (2.16). Nous expliquons la discrétisation en espace de ce problème par une méthode d'éléments-finis et décrivons la résolution des non-linéarités qui apparaissent lorsqu'on résout les équations de Navier-Stokes avec la viscosité (2.16). Deux résultats numériques sont présentés mettant en évidence la convergence des méthodes numériques et la dépendance au maillage dans le cas du modèle de von Karman.

2.3.1 Discrétisation en espace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine polyédral et \mathcal{T}_h une discrétisation régulière de Ω . On note $\{P_i\}_{i=1,\dots,M_1}$ les nœuds de \mathcal{T}_h qui sont à l'intérieur de Ω et $\{P_i\}_{i=M_1+1,\dots,M_2}$ les nœuds sur le bord de Ω . L'espacement maximal entre ces nœuds est noté h . On définit par φ_i la fonction de base continue, linéaire par morceaux, et qui vérifie $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ pour tout $j = 1, \dots, M_2$, où δ_{ij} dénote le symbole de Kronecker.

On s'intéresse à la discrétisation du problème (2.15) par une méthode d'éléments-finis. Le couple d'élément $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ est bien connu pour son instabilité puisqu'il ne satisfait pas la condition inf-sup [33]. Plusieurs alternatives sont usuellement utilisées pour contourner le problème. L'une d'elle consiste à enrichir l'espace des vitesses de sorte que la combinaison d'espace vérifie la condition inf-sup. On définit pour cela la fonction bulle (décrite dans [82]) sur chaque élément K de \mathcal{T}_h par

$$B_K = (d+1) \prod_{l=1}^{d+1} \varphi_l. \quad (2.45)$$

Ici φ_l sont les fonctions de bases associées aux nœuds de l'élément K notés P_l , $l = 1, \dots, d+1$. On définit alors :

$$\mathcal{V}_h = \{\mathbf{v} \in (C^0(\bar{\Omega}))^d : \mathbf{v}|_K \in (\mathbb{P}^1(K) \oplus B_K)^d, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{Q}_h = \{q \in C^0(\bar{\Omega}) : q|_K \in \mathbb{P}^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.47)$$

Les espaces \mathcal{V}_h et \mathcal{Q}_h ainsi définis vérifient la condition inf-sup [33]. Cette discrétisation en espace sera notée par la suite comme les éléments-finis $\mathbb{P}_{1b} - \mathbb{P}_1$. En introduisant $\gamma_{ns} \in [0, 1]$, le problème discret de (2.15) s'écrit alors : trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ tels que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) dx + \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h dx + \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h dx \\ + \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx, \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \end{cases} \quad (2.48)$$

avec

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = \mu_L + \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|. \quad (2.49)$$

Si $\gamma_{ns} = 0$ on obtient le problème de Stokes et si $\gamma_{ns} = 1$ on a le problème de Navier-Stokes.

2.3.2 Linéarisation

Si on résout l'équation de Navier-Stokes ($\gamma_{ns} = 1$), le problème (2.48) possède deux non-linéarités dues à la viscosité turbulente (2.50) ainsi qu'au terme de convection $\gamma_{ns}\rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h$. Ces non-linéarités sont traitées par des méthodes de type points fixes. Pour ce faire, on considère les notations du paragraphe 2.2.3 avec la formulation faible du problème continu (2.35) ainsi que la viscosité et sa dérivée données par

$$\mu(s) = \mu_L + \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha s, \quad \mu'(s) = \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha. \quad (2.50)$$

Pour un paramètre $\theta \in [0, 1]$ fixé, on définit l'opérateur $\mathcal{F}_{\gamma_{ns}}^\theta : [\mathbf{X}_\alpha \times Y_\alpha] \rightarrow [\mathbf{X}_\alpha \times Y_\alpha]'$ par

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_{\gamma_{ns}}^\theta(\mathbf{u}, p), (v, q) \rangle &= \int_{\Omega} 2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx - \theta \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Proposition 2.3.1. *La dérivée de Gâteaux de $\mathcal{F}_{\gamma_{ns}}^\theta$ en (\mathbf{u}, p) dans la direction (\mathbf{w}, r) existe et vaut pour tout $(v, q) \in \mathbf{X}_\alpha \times Y_\alpha$*

$$\begin{aligned} \langle D\mathcal{F}_{\gamma_{ns}}^\theta(\mathbf{u}, p)(\mathbf{w}, r); v, q \rangle &= \int_{\Omega} \frac{4\mu'(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})) (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))}{|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} 2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \\ &\quad + \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{w} dx + \int_{\Omega} r \operatorname{div} \mathbf{v} dx. \end{aligned}$$

Démonstration. L'assertion est immédiate pour les termes linéaires. Pour la partie convective, si $C : \mathbf{X}_\alpha \rightarrow (\mathbf{X}_\alpha)'$ est donnée par $\langle C(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ alors on obtient aisément

$$\langle DC(\mathbf{u})\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(\mathbf{u} + t\mathbf{w}; \mathbf{v}) - C(\mathbf{u}; \mathbf{v})}{t} = \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dx.$$

L'application $T : \mathbf{X}_\alpha \rightarrow \mathbf{X}'_\alpha$ donnée par $\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} 2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ admet une dérivée de Gâteaux en \mathbf{u} dans la direction \mathbf{w} . En effet, par le théorème de la convergence dominée, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle DT(\mathbf{u})\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} 2 \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + t\mathbf{w})|) - \mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)}{t} \right) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} 2\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx. \end{aligned}$$

En définissant $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $k(t) = |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + t\mathbf{w})| - |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|$, on a de manière évidente $\lim_{t \rightarrow 0} k(t) = 0$ et ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + t\mathbf{w})|) - \mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| + k) - \mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)}{k} \frac{k}{t}.$$

D'une part, par définition, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| + k) - \mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)}{k} = \mu'(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)$. D'autre part,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{k(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + t\mathbf{w})|^2 - |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2}{t(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + t\mathbf{w})| + |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|)} = \frac{2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})}{|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|}.$$

La preuve se termine en utilisant le fait que la dérivée de Gâteaux est une application linéaire. ■

Résolution de la non-linéarité

Nous allons maintenant appliquer la proposition 2.3.1 au problème discret (2.48). Soit $(\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$ le couple d'espaces défini par (2.46)-(2.47) ; on a $(\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h) \subset (\mathbf{X}_{\alpha,h}, Y_{\alpha,h})$. Différentes méthodes basées sur l'algorithme de Newton sont étudiées pour approcher un couple $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$ solution de

$$\langle \mathcal{F}_{\gamma_{ns}}^\theta(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h) \rangle = 0, \quad (2.52)$$

pour tout $(\mathbf{v}_h, q_h) \in (\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$.

L'idée de ces méthodes de point fixe consiste à construire une suite $\{\mathbf{u}_h^k, p_h^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ telle que

$$\langle \mathcal{F}_{\gamma_{ns}}^\theta(\mathbf{u}_h^k, p_h^k), (\mathbf{v}_h, q_h) \rangle + \langle D\mathcal{F}_{\gamma_{ns}}^\theta(\mathbf{u}_h^k, p_h^k)(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k, p_h^{k+1} - p_h^k), (\mathbf{v}_h, q_h) \rangle = 0.$$

Soit (\mathbf{u}_h^0, p_h^0) un couple de solution suffisamment proche d'une solution du problème (2.48), K un entier positif et $\gamma_\mu \in [0, 1]$ un paramètre. L'algorithme complet pour résoudre la non-linéarité du problème (2.48) peut alors s'écrire : pour $k = 0, \dots, K_{NL}$, étant donné $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$, trouver $(\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k)|) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^{k+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) dx - \int_{\Omega} p_h^{k+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx + \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u}_h^{k+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^k \cdot \mathbf{v}_h dx \\ + \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u}_h^{k+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^k \cdot \mathbf{v}_h dx + \gamma_\mu \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k)|) (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^{k+1})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h))}{|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k)|} dx \\ = \theta \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx + \gamma_{ns} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u}_h^k \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^k \cdot \mathbf{v}_h dx \\ + \gamma_\mu \int_{\Omega} \frac{\mu'(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k)|) (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h))}{|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^k)|} dx \\ \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{k+1} dx = 0 \end{array} \right. \quad (2.53)$$

pour tout $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$.

Viscosité	Convection	γ_μ	γ_{ns}
Point Fixe	Stokes	0	0
Point Fixe	Navier-Stokes	0	1
Newton	Stokes	1	0
Newton	Navier-Stokes	1	1

Table 2.1 – Différentes possibilités de linéariser le problème de Navier-Stokes avec une viscosité de longueur de mélange (2.50).

Le paramètre γ_μ permet de choisir le traitement de la non-linéarité due à la viscosité turbulente : si $\gamma_\mu = \gamma_{ns} = 0$ on obtient un schéma de point fixe pour le problème de Stokes non-linéaire et si $\gamma_\mu = \gamma_{ns} = 1$ un schéma de Newton pour le problème de Navier-Stokes (voir le tableau 2.1).

L'algorithme complet s'écrit de la manière suivante : on construit la suite de fonction $\{\mathbf{u}_h^k, p_h^k\}_k$ itérativement :

Algorithme 2.3.2.

- Soit $(\mathbf{u}_h^0, p_h^0) = (\mathbf{0}, 0)$.
- Pour $TOL_{NL} > 0$ et $k = 1, 2, 3, \dots$ jusqu'à ce que $\|\mathbf{u}_h^{k-1} - \mathbf{u}_h^k\|_{L^\infty} < TOL_{NL}$: nous cherchons $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ solution de (2.53) pour tout couple $(\mathbf{v}, q_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ avec $\theta = 1$. On dénote par K_{NL} le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la tolérance TOL_{NL} .
- Soit $\mathbf{u}_h^{K_{NL}} = \mathbf{u}_h, p_h^{K_{NL}} = p_h$.

Méthode de continuation

Dans le cas où l'on résout les équations de Navier-Stokes ($\gamma_{ns} = 1$), l'algorithme 2.3.2 ne converge pas toujours si le couple (\mathbf{u}_h^0, p_h^0) initial est trop éloigné de la solution. Une première possibilité est de choisir (\mathbf{u}_h^0, p_h^0) comme solution du problème de Stokes (2.48). Lorsque que cela n'est pas suffisant, nous utilisons une méthode de continuation. Ceci consiste à résoudre le problème

$$\langle \mathcal{F}_{\gamma_{ns}}^\theta(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h) \rangle = 0, \tag{2.54}$$

pour tout $(\mathbf{v}_h, q_h) \in (\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$, où $\theta \in [0, 1]$ est le paramètre qui multiplie le champ de force \mathbf{f} . L'idée est de résoudre le problème (2.54) avec l'algorithme 2.3.2 pour une valeur admissible $\theta = \theta_1 < 1$. On utilise le résultat obtenu comme solution initiale de l'algorithme 2.3.2 pour un $\theta_1 < \theta_2 \leq 1$. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on atteigne $\theta = 1$.

Remarque 2.3.3. On suppose que la viscosité μ est constante et que $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^d$. On considère l'équation de Navier-Stokes stationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\Delta\mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Si on écrit

$$\|\mathbf{f}\| = \sup_{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)} \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{H^1}}, \quad \zeta = \sup_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx}{\|\mathbf{u}\|_{H^1} \|\mathbf{v}\|_{H^1} \|\mathbf{w}\|_{H^1}},$$

alors il est montré dans [40] qu'il existe une unique solution à l'équation de Navier-Stokes stationnaire (2.55) pour autant que la relation suivante soit satisfaite

$$\frac{\rho^2 \zeta \|\mathbf{f}\|}{\mu^2} < 1.$$

Bien que ce résultat soit établi pour une viscosité constante, cela signifie que l'on peut s'attendre à des limitations de résolution numérique du problème stationnaire (2.48)-(2.50). La recherche d'une solution stationnaire n'est ainsi possible que si le nombre de Reynolds n'est pas trop grand. Si ce nombre devient trop élevé (viscosité μ petite ou force \mathbf{f} élevée), une solution stationnaire n'a pas forcément lieu d'exister et la résolution numérique du problème (2.48)-(2.50) peut aboutir à une divergence de l'algorithme de point fixe, même par continuation.

2.3.3 Résolutions

Chaque élément $(\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}) \in (\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$ peut s'écrire (sans les indices k) comme

$$u_{i,h} = \sum_{j=1, \dots, M_1} u_{ij} \varphi_j, \quad p_h = \sum_{k=1, \dots, M_2} p_k \varphi_k,$$

(où la fonction bulle a été éliminée selon la procédure décrite dans [65]). Le problème (2.53) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire. Notons que l'assemblage des matrices élémentaires est décrit dans [88]. Puisque les espaces \mathcal{V}_h et \mathcal{Q}_h satisfont la condition inf-sup, ce système est inversible et est résolu par différentes méthodes linéaires (2D : méthode directe UMFPACK [50], 3D méthode GMRES [89] avec le préconditionneur ILU(2) [90]).

2.3.4 Tests numériques 2D

Dans cette section, nous résolvons le problème de Stokes (2.53) avec $\gamma_{ns} = 0$ sur le domaine $\Omega = [0, 1]^2$. Nous prenons $M = \{(0, x_2) | 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Plus précisément, cherchons (\mathbf{u}, p) tels que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2(\mu_L + d_M^\alpha(x_1, x_2)|\varepsilon(\mathbf{u})|))\varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega; \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.56)$$

où \mathbf{f} est le champ vectoriel calculé de manière à ce que la solution exacte soit donnée par

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (x_1(1-x_1))^{\vartheta+1}(x_2(1-x_2))^{\vartheta}(1-2x_2) \\ -(x_1(1-x_1))^{\vartheta}(x_2(1-x_2))^{\vartheta+1}(1-2x_1) \end{pmatrix} \text{ et } p(x_1, x_2) = x_1x_2 - \frac{1}{4}, \quad (2.57)$$

avec ϑ un paramètre de régularité de la solution.

L'approximation numérique de ce problème a été implémentée avec le code élément fini FreeFem++ [50]. La triangulation choisie de Ω est composée de L nœuds sur chaque arête pour un total de $2L^2$ triangles. L'algorithme (2.53) est itéré afin d'atteindre un champ de vitesse avec une précision de $\operatorname{Tol}_{NL} = 1e^{-8}$. Nous définissons les écarts suivants par rapport à la solution exacte :

$$EU_W = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{W_{d_M^\alpha}^{1,3}}}{\|\mathbf{u}\|_{W_{d_M^\alpha}^{1,3}}}, \quad EU_L = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L_{d_M^\alpha}^3}}{\|\mathbf{u}\|_{L_{d_M^\alpha}^3}}, \quad EP_L = \frac{\|p - p_h\|_{L_{d_M^\alpha}^{\frac{3}{2}}}}{\|p\|_{L_{d_M^\alpha}^{\frac{3}{2}}}}.$$

La table 2.2 et la figure 2.4 présentent les résultats. Selon la valeur de ϑ , on peut s'attendre à des ordres de convergence sous-linéaire pour la vitesse. Si $\vartheta = 2$, alors les solutions sont C^∞ . Si $\vartheta = 1.34$, les solutions sont moins régulières que dans la remarque 2.2.29. Cependant, nous obtenons numériquement un ordre de convergence supérieur aux estimations de 2.2.29. Notons aussi que les ordres de convergence en prenant $\alpha = 2$ sont supérieurs à ceux obtenus avec $\alpha = 0$. On observe aussi que la méthode du point fixe ($\gamma_\mu = 0$) converge beaucoup plus lentement que la méthode de Newton ($\gamma_\mu = 1$), et que le nombre d'itérations dépend de la régularité des solutions, ce qui est en accord avec les résultats obtenus dans [54].

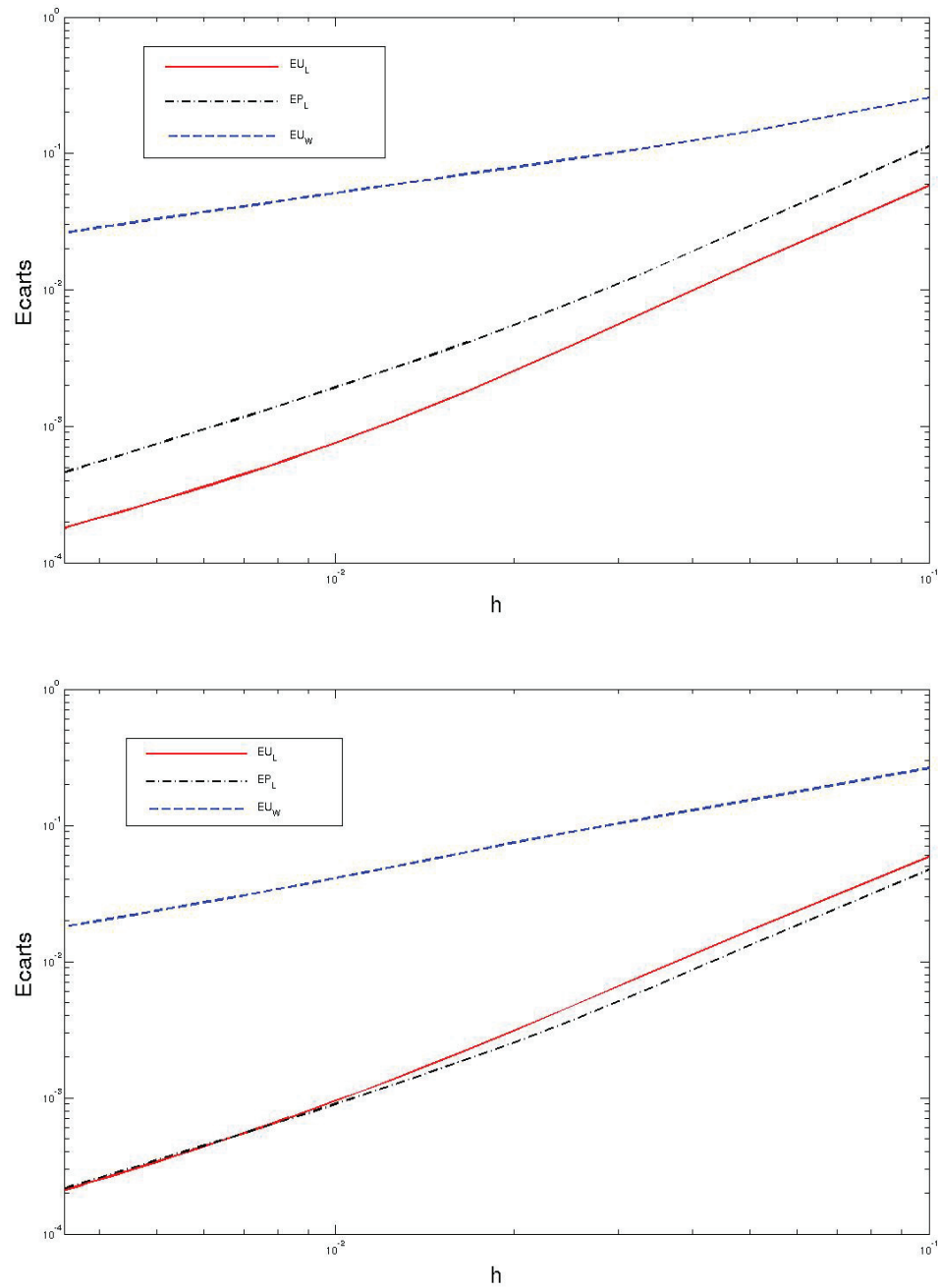


Figure 2.4 – Graphique en échelle logarithmique pour les écarts entre les solutions exactes (2.57) et numériques EU_W , EU_L et EP_L du problème de Stokes non-linéaire (2.56) avec une viscosité de la forme $\mu = \mu_L + x_1^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|$ avec $\mu_L = 0.02$ et $\vartheta = 1.34$. En haut, $\alpha = 0$, en bas $\alpha = 2$.

Chapitre 2. Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange

		Point Fixe ($\gamma_\mu = 0$)	Hybride ($\gamma_\mu = 0.5$)	Newton ($\gamma_\mu = 1$)
$\vartheta = 2$	$\alpha = 0$	37	9	6
	$\alpha = 2$	37	9	6
$\vartheta = 1.34$	$\alpha = 0$	56	13	8
	$\alpha = 2$	57	13	9

		EH	PL	EL
$\vartheta = 2$	$\alpha = 0$	$\mathcal{O}(h^{1.01})$	$\mathcal{O}(h^{1.76})$	$\mathcal{O}(h^{2.01})$
	$\alpha = 2$	$\mathcal{O}(h^{1.00})$	$\mathcal{O}(h^{1.76})$	$\mathcal{O}(h^{1.99})$
$\vartheta = 1.34$	$\alpha = 0$	$\mathcal{O}(h^{0.64})$	$\mathcal{O}(h^{1.25})$	$\mathcal{O}(h^{1.33})$
	$\alpha = 2$	$\mathcal{O}(h^{0.76})$	$\mathcal{O}(h^{1.33})$	$\mathcal{O}(h^{1.34})$

Table 2.2 – Nombre d'itérations des méthodes de linéarisation et ordre de convergence pour le problème de Stokes non-linéaire avec une viscosité de la forme $\mu = \mu_L + x_1^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|$, avec $\mu_L = 0.02$ et différentes valeurs de α et ϑ .

2.3.5 Tests numériques 3D

Nous présentons dans cette partie des résultats numériques en trois dimensions d'espace du problème (2.48) avec la viscosité donnée par (2.50). Le domaine Ω considéré est un parallélépipède rectangle de longueur caractéristique $l = 0.1$ donné par

$$\Omega = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 0.1].$$

L'implémentation de ce problème a été effectuée avec le code élément fini ALUCCELL [96]. Pour $L \in \mathbb{N}$ nous discrétisons Ω en découpant chaque arête de ce parallélépipède rectangle avec L nœuds. Cela nous donne L^3 hexaèdres, qui sont chacun divisé en 5 tétraèdres. Nous obtenons une triangulation \mathcal{T}_h de Ω composée de $5L^3$ tétraèdres K avec $h = \frac{1}{L}$ étant le maillage de référence. La particularité de ce domaine sont les parois horizontales proches ainsi qu'un maillage relativement écrasé qui est similaire au canal étudié dans la section 2.1. Nous notons $v = \frac{\mu}{\rho}$, avec une pression et une force normalisée par ρ ($p := p/\rho, \mathbf{f} := \mathbf{f}/\rho$). Dans ce cas, la viscosité turbulente cinématique est donnée par

$$v = v_L + \kappa^\alpha l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|.$$

Le problème (2.48)-(2.50) renormalisé est discrétisé pour obtenir une approximation $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ comme décrit dans la partie 2.1. La non-linéarité est traitée par la méthode de Newton (2.53) et itérée pour atteindre un champ de vitesse \mathbf{u}_h avec une précision de $Tol_{NL} = 1e^{-8}$. Dans tous les calculs suivants, nous considérons le champ de force \mathbf{f} qui génère un champ de vitesse composé de deux tourbillons antisymétriques (voir figure 2.5) :

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0.3 * (x_2 - 0.5)^2 \\ 0.3 * (-x_1 + 0.5)^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le tableau 2.3 rassemble les résultats avec plusieurs combinaisons possibles des paramètres v_L et α . Nous présentons la norme maximum de \mathbf{u}_h appelée u_{max} et définie par

$$u_{max} = \max_{P_i \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{u}_h(P_i)|.$$

Nous mettons en évidence de plus la viscosité cinématique numérique v_L (la valeur approximée de $l^{2-\alpha} \kappa^\alpha d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{max})|$), le nombre de Reynolds résultant $Re_T = \frac{u_{max} l}{v_T}$ et le nombre d'itération de l'algorithme de Newton K_{NL} . Lorsque $\gamma_{ns} = 1$, nous utilisons la méthode de continuation pour trouver une solution. Nos constatations sont les suivantes :

- Pour $\alpha = 0$ et différentes valeurs de v_L , la valeur maximale de la vitesse converge lorsque la taille de maille décroît et ne dépend pas de v_L . La valeur limite ne dépend pas de v_L .
- Lorsque $\alpha \in \{1, 2\}$ la convergence est plus lente, surtout dans le cas où $\alpha = 2$. Nous observons que lorsque N augmente, la valeur maximale de la vitesse augmente aussi.

Chapitre 2. Analyse des modèles de turbulence de longueur de mélange

Par conséquent, lorsque la viscosité laminaire ν_L est petite par rapport à la viscosité numérique ν_T , les résultats obtenus dépendent fortement du maillage. Un comportement similaire est observé pour la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires.

- Le nombre d'itérations de l'algorithme de Newton ($\gamma_\mu = 1, \gamma_{ns} = 1$) ne dépend pas du maillage et relativement peu de α et μ_L .
- Les nombres de Reynolds numériques résultant de ces simulations sont faibles comparativement aux nombres de Reynolds des équations de Navier-Stokes qui sont compris entre 100'000 et 10'000'000 dans ce cas là. Cela indique que la diffusion numérique est importante.

		STOKES ($\gamma = 0$)							
		$\nu_L = 1e^{-5}$				$\nu_L = 1e^{-7}$			
	N	ν_T	u_{max}	Re_T	$Iter_{NL}$	ν_T	u_{max}	Re_T	K_{NL}
$\alpha = 0$	20	4.05e-4	4.84e-2	12	27	4.08e-4	4.86e-2	12	42
	40	4.22e-4	5.21e-2	12	27	4.29e-4	5.28e-2	12	42
	80	4.32e-4	5.32e-2	12	27	4.36e-4	5.38e-2	12	42
$\alpha = 1$	20	2.54e-4	1.59e-1	62	26	2.57e-4	1.61e-1	63	42
	40	2.55e-4	1.84e-1	72	26	2.58e-4	1.88e-1	73	41
	80	2.55e-4	1.99e-1	78	26	2.58e-4	2.04e-1	79	39
$\alpha = 2$	20	1.79e-4	2.01e-1	112	26	1.85e-4	2.07e-1	112	39
	40	1.88e-4	2.68e-1	142	26	1.95e-4	2.81e-1	144	39
	80	1.97e-4	3.20e-1	162	26	2.10e-4	3.45e-1	173	39

		NAVIER-STOKES ($\gamma = 1$)							
		$\nu_L = 1e^{-5}$				$\nu_L = 1e^{-7}$			
	N	ν_T	u_{max}	Re_T	$Iter_{NL}$	ν_T	u_{max}	Re_T	K_{NL}
$\alpha = 0$	20	4.01e-4	4.83e-2	12	27	4.06e-4	4.85e-2	12	42
	40	4.21e-4	5.20e-2	12	27	4.27e-4	5.26e-2	12	42
	80	4.30e-4	5.30e-2	12	27	4.34e-4	5.33e-2	12	42
$\alpha = 1$	20	2.46e-4	1.54e-1	63	26	2.48e-4	1.56e-1	63	41
	40	2.47e-4	1.83e-1	73	26	2.50e-4	1.86e-1	74	41
	80	2.49e-4	1.95e-1	78	26	2.51e-4	2.01e-1	80	41
$\alpha = 2$	20	1.61e-4	1.95e-1	121	26	1.68e-4	2.01e-1	121	39
	40	1.64e-4	2.45e-1	149	26	1.66e-4	2.55e-1	152	39
	80	1.62e-4	2.79e-1	172	26	1.69e-4	2.98e-1	177	39

Table 2.3 – Résolution numérique du problème de Stokes et Navier-Stokes avec une viscosité de longueur de mélange et différents paramètres α et ν_L .

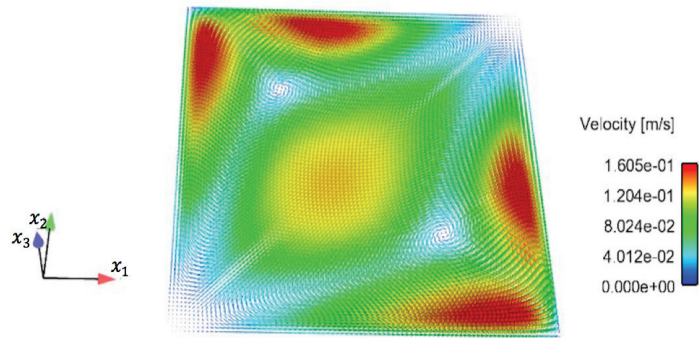


Figure 2.5 – Solution \mathbf{u}_h du problème de Stokes avec une viscosité de longueur de mélange, $\alpha = 1$ et $\nu_L = 1e^{-5}$.

3 Sur la résolution des équations de Navier-Stokes

Les méthodes de projection sont des algorithmes pour les équations de Navier-Stokes évolutives dont la particularité est de découpler les calculs de la vitesse et du champ de pression. Ces algorithmes sont basés sur la décomposition de Helmholtz-Hodge, qui assure que le champ de vitesse peut se décomposer en une partie irrotationnelle et une partie solénoïdale. Généralement, ces méthodes sont basées sur deux étapes : la première consiste à calculer un champ de vitesse qui ne satisfait pas la contrainte d'incompressibilité et la seconde une pression qui permet de projeter le champ de vitesse intermédiaire dans un espace de fonction à divergence nulle.

D'abord introduites par Chorin et Temam en 1967 [99], de très nombreuses variantes de ces méthodes ont vu le jour. Il n'existe à notre connaissance pas de méthode qui fasse l'unanimité mais plutôt plusieurs familles [45]. En effet, le choix des différentes méthodes peut dépendre par exemple des conditions de bords imposées, de la viscosité, du maillage et de la précision recherchée [45, 47]. Le but de ce chapitre est de comparer les méthodes de projection et les méthodes standard, dites monolithiques, pour lesquelles le système vitesse-pression est résolu en une seule fois.

Nous commençons ce chapitre par présenter les méthodes de projection d'un point de vue général, en rappelant quelques résultats de convergence et de stabilité sur la discrétisation en temps. Pour la discrétisation spatiale, la question de la condition inf-sup sur les espaces éléments finis est discutée. Nous présentons ensuite le calcul intermédiaire du champ de pression, solution d'une équation de Poisson avec conditions de bord de Neumann homogène. Plusieurs manières de déterminer numériquement la constante de la solution sont présentées. Finalement, différents tests numériques en deux et trois dimensions d'espace permettent de comparer les méthodes de projection à la méthode monolithique.

3.1 Revue des méthodes de projection

Nous présentons dans cette partie différentes méthodes dites de "splitting" en temps pour le problème de Navier-Stokes évolutif et leurs principales caractérisations. Des schémas de projection de la forme "Chorin-Temam" [99] avec une pression solution d'une équation de Poisson seront notamment retenus [12, 45]. La discrétisation spatiale et l'utilisation des espaces d'approximations qui vérifient la condition inf-sup sont discutées [47].

3.1.1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine polyédral, $d = 2$ ou 3 , et $I = [0, T]$ un intervalle de temps avec $T > 0$. Soit encore ρ la densité et μ la viscosité dynamique du fluide supposées constantes et soit une fonction donnée $\mathbf{f}: (x, t) \in \Omega \times I \rightarrow \mathbf{f}(x, t) \in \mathbb{R}^d$. Nous notons comme précédemment $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité cinématique du fluide; le champ de pression et la force sont ainsi normalisés par ρ ($p := p/\rho, \mathbf{f} := \mathbf{f}/\rho$). Si $\gamma_{ns} \in [0, 1]$ est un paramètre, le problème de Stokes évolutif (si $\gamma_{ns} = 0$) ou Navier-Stokes évolutif (si $\gamma_{ns} = 1$) s'écrit donc : trouver $\mathbf{u} := \mathbf{u}(x, t)$ et $p := p(x, t)$ qui satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - \gamma_{ns} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega \times I, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{pour tout } t \in I. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Afin de simplifier l'argumentation, on considère dans un premier temps le problème de Stokes et prendrons donc $\gamma_{ns} = 0$ dans (3.1).

Discrétisation en temps

L'intervalle de temps $[0, T]$ est partitionné en N sous intervalles de longueur uniforme $\Delta t = T/N$ et le temps discret est noté $t_n = n\Delta t$ pour $n = 0, 1, \dots, N$. Soit \mathbf{u}^n (respectivement p^n, \mathbf{f}^n) une approximation de $\mathbf{u}(x, t_n)$ (respectivement $p(x, t_n), \mathbf{f}(x, t_n)$). Le schéma d'Euler rétrograde avec $\gamma_{NS} = 0$ consiste à calculer des suites d'approximation de la vitesse $\{\mathbf{u}^{n+1}\}_{n=0, \dots, N}$ et de la pression $\{p^{n+1}\}_{n=0, \dots, N}$ de la manière suivante : si \mathbf{u}^0 et p^0 sont des fonctions connues avec \mathbf{u}^0 s'annulant sur $\partial\Omega$, pour tout $n = 1 \dots, N$, $t_0 = 0$, trouver \mathbf{u}^{n+1} et p^{n+1} tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

La suite p^{n+1} est définie à une constante près.

Nous allons maintenant écrire un schéma de projection pour le problème (3.2). On se donne des paramètres réels $\eta, \zeta \in [0, 1]$ et on suppose que les champs de vitesse et de pression sont connus au temps t_n . L'idée d'un schéma de splitting en temps pour donner une approximation du problème (3.2) consiste à calculer des approximations de $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ à partir de (\mathbf{u}^n, p^n) en utilisant des variables intermédiaires obtenues par des problèmes plus simples à résoudre. Dans ce qui suit nous noterons les approximations de $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ encore $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ pour ne pas compliquer les notations.

La première étape consiste à calculer une prédiction du champ de vitesse $\mathbf{u}^{*,n+1}$ solution de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{*,n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{*,n+1} + \eta \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{*,n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

La seconde étape consiste à introduire une variable intermédiaire Φ^{n+1} solution de l'équation de Poisson suivante :

$$\begin{cases} \Delta \Phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{u}^{*,n+1} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

La dernière étape permet d'obtenir les approximations de la vitesse et de la pression au temps t_{n+1} en posant

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{*,n+1} - \Delta t \nabla \Phi^{n+1}, \quad (3.5)$$

$$p^{n+1} = \eta p^n + \Phi^{n+1} - \zeta \nu \operatorname{div} \mathbf{u}^{*,n+1}. \quad (3.6)$$

Consistance de cette méthode

Éliminons $\mathbf{u}^{*,n+1}$ de l'équation (3.3) en utilisant (3.5) :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \eta \nabla p^n + \nabla \Phi^{n+1} - \nu \Delta t \Delta \nabla \Phi^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1}. \quad (3.7)$$

On a en utilisant (3.4),

$$-\nu \Delta t \Delta \nabla \Phi^{n+1} = -\nu \Delta t \nabla \Delta \Phi^{n+1} = -\nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{*,n+1} \quad (3.8)$$

et par (3.6) on obtient

$$\nabla p^{n+1} = \nabla(\eta p^n + \Phi^{n+1} - \zeta \nu \operatorname{div} \mathbf{u}^{*,n+1}) = \eta \nabla p^n + \nabla \Phi^{n+1} - \zeta \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{*,n+1}. \quad (3.9)$$

Combinant (3.8) et (3.9), (3.7) devient

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} + (\zeta - 1) \nu \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{*,n+1} = \mathbf{f}^{n+1}. \quad (3.10)$$

Les équations (3.4) et (3.5) impliquent alors

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = \operatorname{div} \mathbf{u}^{*,n+1} - \Delta t \Delta \Phi^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.11)$$

En choisissant $\zeta = 1$, on constate avec (3.10) et (3.11) que les relations (3.3)-(3.6) sont consistantes avec les deux premières équations du problème (3.2). Si $\zeta \neq 1$, on aura une différence de l'ordre du pas de temps Δt puisque par l'équation (3.4)

$$(\zeta - 1) \operatorname{div} \mathbf{u}^{*,n+1} = (\zeta - 1) \Delta t \Delta \Phi^{n+1}.$$

Quant à la condition de bord, si \mathbf{n} est la normale sur $\partial\Omega$ extérieure à Ω et \mathbf{t}_k sont les vecteurs directeurs du plan tangent à $\partial\Omega$ pour $k = 1, \dots, d-1$, alors la relation (3.5) implique :

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^{*,n+1} \cdot \mathbf{n} - \Delta t \nabla \Phi^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{t}_k = \mathbf{u}^{*,n+1} \cdot \mathbf{t}_k - \Delta t \nabla \Phi^{n+1} \cdot \mathbf{t}_k = -\Delta t \nabla \Phi^{n+1} \cdot \mathbf{t}_k, \quad \text{pour } k = 1, \dots, d-1.$$

Dans des cas non triviaux, la deuxième relation de (3.12) est en générale non nulle et ceci montre que les équations (3.3)-(3.6) ne sont pas consistantes avec la condition de bord $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0}$ du problème (3.2) mais que la différence est de l'ordre de Δt .

Remarque 3.1.1. En considérant l'équation (3.4), la relation (3.5) peut être interprétée comme la projection de $\mathbf{u}^{*,n+1}$ dans l'espace de Hilbert

$$\mathbf{HI} = \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

En effet, (3.5) est semblable à une décomposition de Helmholtz pour la variable \mathbf{u}^{n+1} . Ceci est la raison pour laquelle un splitting comme (3.3)-(3.6) est appelé un algorithme de projection pour l'équation de Stokes.

Remarque 3.1.2. La variable \mathbf{u}^n peut être supprimée des équations (3.3) et (3.5) [48]. En effet, on remplace \mathbf{u}^n par $\mathbf{u}^{*,n} - \Delta t \nabla \Phi^n$ dans (3.3) qui devient

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{*,n+1} - \mathbf{u}^{*,n}}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{*,n+1} + \eta \nabla p^n + \nabla \Phi^n = \mathbf{f}^{n+1} \text{ dans } \Omega; \\ \mathbf{u}^{*,n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.13)$$

La suite des quatre équations (3.3)-(3.6) peut donc être réduite aux trois équations (3.13), (3.4) et (3.6) en itérant seulement les variables $(\mathbf{u}^{*,n+1}, \Phi^{n+1}, p^{n+1})$.

Remarque 3.1.3. Lorsque $\zeta > 0$, la dérivation de l'équation (3.9) n'est possible que si la viscosité ν est constante. Ceci est restrictif pour l'utilisation de viscosité variable comme celle considérée dans le premier chapitre de ce document.

3.1.2 Discrétisation en temps : stabilité et convergence

En prenant en compte les précédentes remarques, nous optons pour une méthode de projection du type Chorin-Temam décrite dans [46] avec dorénavant $\zeta = 0$. Afin de simplifier les notations, nous omettons le symbole * de la variable $\mathbf{u}^{*,n+1}$ qui sera par la suite notée simplement \mathbf{u}^{n+1} .

Algorithme 3.1.4. (Chorin-Temam)

Soit $\gamma_{ns}, \eta \in [0, 1]$ ainsi que \mathbf{u}^0, Φ^0 et p^0 des fonctions initiales connues avec \mathbf{u}^0 nulle sur $\partial\Omega$.

On considère l'algorithme suivant pour le problème (3.2) : pour tout $n = 0, 1, \dots, N$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, trouver $(\mathbf{u}^{n+1}, \Phi^{n+1}, p^{n+1})$ tels que

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla(\eta p^n + \Phi^n) = \mathbf{f}^{n+1} - \gamma_{ns}(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n & \text{dans } \Omega; \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega; \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \Delta \Phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} & \text{dans } \Omega; \\ \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega; \end{cases} \quad (3.15)$$

et

$$p^{n+1} = \eta p^n + \Phi^{n+1}. \quad (3.16)$$

Si $\eta = 1$, l'algorithme 3.1.4 est la méthode de Chorin-Temam incrémentée [99] et si $\eta = 0$ il s'agit de la méthode de Chorin-Temam non-incrémentée [47]. On peut par exemple montrer [48] que l'algorithme 3.1.4 correspond à une discrétisation en temps du problème perturbé de Navier-Stokes suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - \gamma_{ns}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} & \text{dans } \Omega \times I, \quad \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times I, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta t \Delta p & \text{dans } \Omega \times I, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times I, \end{cases} \quad (3.17)$$

L'algorithme 3.1.4 avec $\eta = 0$ est ainsi une version discrète d'un problème de Navier-Stokes dont la divergence du champ de vitesse est pénalisée.

Formulation faible de l'algorithme 3.1.4

En reprenant les mêmes notations que celles qui précèdent, pour tout $n = 0, 1, \dots, N$, la formulation faible de l'algorithme 3.1.4 s'écrit : pour $\mathbf{f}^{n+1} \in [L^2(\Omega)]^d$, $\mathbf{u}^n \in [H_0^1(\Omega)]^d$, $\Phi^n \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$ et $p^n \in L^2(\Omega)$,

trouver $\mathbf{u}^{n+1} \in [H_0^1(\Omega)]^d$, $\Phi^{n+1} \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$ et $p^{n+1} \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \mathbf{v} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} (\eta p^n + \Phi^n) \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} (\mathbf{f}^{n+1} - \gamma_{ns}(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v} dx \quad (3.18)$$

pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi^{n+1} \cdot \nabla \varphi dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \varphi dx \quad (3.19)$$

pour tout $\varphi \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$ et

$$\int_{\Omega} p^{n+1} q dx = \int_{\Omega} (\eta p^n + \Phi^{n+1}) q dx \quad (3.20)$$

pour tout $q \in L^2(\Omega)$.

Stabilité en temps

La discrétisation temporelle utilisée dans le schéma de projection 3.1.4 est implicite. En ce sens, nous allons vérifier que cette discrétisation est stable au sens où les normes L^2 des solutions et de leurs dérivées sont contrôlées pour chaque pas de temps si $\gamma_{ns} = 0$ et $\mathbf{f}^n = \mathbf{0}$ pour tout n . Ce résultat généralise celui obtenu dans [48] en utilisant des arguments semblables.

Proposition 3.1.5 (Stabilité). *Supposons $\gamma_{ns} = 0$ et $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ et que les solutions \mathbf{u} et p du problème (3.2) sont suffisamment régulière (en général $\mathbf{u} \in L^\infty$ à divergence bornée pour tout temps). Si $\Delta t > 0$ est donné, les suites de solutions (\mathbf{u}^n, p^n) de l'algorithme 3.1.4 satisfont pour tout $\eta \in [0, 1]$ et tout $N > 1$:*

$$\|\mathbf{u}^N\|_{L^2}^2 + 2\nu \sum_{k=1}^N \|\nabla \mathbf{u}^k\|_{L^2}^2 + \Delta t^2 \left(\|\nabla p^N\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \|\nabla(p^k - \eta p^{k-1})\|_{L^2}^2 \right) \leq \|\mathbf{u}^0\|_{L^2}^2 + \eta \|\nabla p^0\|_{L^2}^2. \quad (3.21)$$

Démonstration. L'idée de la preuve consiste essentiellement à judicieusement choisir les fonctions tests dans les équations (3.18)-(3.19)-(3.20) de manière à exhiber les normes L^2 des solutions. En particulier, nous utiliserons de nombreuses fois la relation courante

$$2(a - b)a = a^2 - b^2 + (a - b)^2. \quad (3.22)$$

On commence par utiliser l'équation (3.15) au temps t^{n+1} et t^n :

$$\Delta(\Phi^{n+1} - \Phi^n) = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n). \quad (3.23)$$

En multipliant (3.23) par $\Phi^{n+1} - \Phi^n$ et en intégrant par partie on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz une estimation de la norme de $\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)$

$$\|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}$$

qui s'écrit aussi de la manière suivante :

$$(\Delta t)^2 \|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}^2 \leq \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2. \quad (3.24)$$

Par ailleurs, en choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1}$ dans (3.18) et avec la relation (3.22) on a :

$$(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2}^2) + 2\Delta t \nu \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - 2\Delta t \int_{\Omega} (\eta p^n + \Phi^n) \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} dx = 0. \quad (3.25)$$

En additionnant les équations (3.24) et (3.25) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + 2\Delta t \nu \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 & - \underbrace{2\Delta t \int_{\Omega} (\eta p^n + \Phi^n) \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} dx}_{=A} \\ & + (\Delta t)^2 \|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le reste de la preuve consiste principalement à développer le terme A , que l'on peut intégrer par partie puisque la pression p^n est supposée régulière pour tout $n = 1, \dots, N$:

$$A := 2\Delta t \int_{\Omega} (\eta p^n + \Phi^n) \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} dx = -2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla(\eta p^n + \Phi^n) dx. \quad (3.27)$$

En ajoutant de part et d'autre p^{n+1} et en utilisant la relation (3.16) on a :

$$\begin{aligned} & -2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla(\eta p^n + \Phi^n) dx \\ = & 2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla(p^{n+1} - \eta p^n - \Phi^n) dx - 2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla p^{n+1} dx \\ = & \underbrace{2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n) dx}_{=B} - \underbrace{2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla p^{n+1} dx}_{=C}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

L'étape suivante consiste à développer les deux termes B et C . Pour le premier, en prenant $\varphi = 2(\Delta t)^2(\Phi^{n+1} - \Phi^n)$ dans (3.19) et en utilisant à nouveau la relation (3.22), on obtient

$$\begin{aligned} 2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n) dx & = 2(\Delta t)^2 \int_{\Omega} \nabla \Phi^{n+1} \cdot \nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n) dx \\ & = (\Delta t)^2 [\|\nabla \Phi^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\nabla \Phi^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}^2]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pour le second, par (3.16) et en choisissant cette fois-ci $\varphi = 2(\Delta t)^2 p^{n+1}$ dans (3.19), on a

$$2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla p^{n+1} dx = 2(\Delta t)^2 \int_{\Omega} \nabla \Phi^{n+1} \cdot \nabla p^{n+1} = 2(\Delta t)^2 \int_{\Omega} \nabla(p^{n+1} - \eta p^n) \cdot \nabla p^{n+1}.$$

Chapitre 3. Sur la résolution des équations de Navier-Stokes

En utilisant à nouveau la relation (3.22) et (3.16), le terme C devient

$$\begin{aligned} 2(\Delta t)^2 \int_{\Omega} \nabla(p^{n+1} - \eta p^n) \cdot \nabla p^{n+1} &= (\Delta t)^2 (\|\nabla p^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\eta \nabla p^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla(p^{n+1} - \eta p^n)\|_{L^2}^2) \\ &= (\Delta t)^2 (\|\nabla p^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\eta \nabla p^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Phi^{n+1}\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

En soustrayant (3.30) de (3.29) on constate que :

$$\begin{aligned} B - C &= 2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n) dx - 2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla p^{n+1} dx \\ &= (\Delta t)^2 (-\|\nabla \Phi^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}^2 - \|\nabla p^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\eta \nabla p^n\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ainsi, en combinant (3.27), (3.28) et (3.31) on obtient le développement du terme A :

$$\begin{aligned} -A &= 2\Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla(\eta p^n + \Phi^n) dx \\ &= -(\Delta t)^2 (-\|\nabla \Phi^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}^2 - \|\nabla p^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\eta \nabla p^n\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (3.32)$$

En remplaçant (3.32) dans (3.26), on a finalement l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + 2\Delta t \nu \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + (\Delta t)^2 \|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}^2 \\ &- (\Delta t)^2 (-\|\nabla \Phi^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\Phi^{n+1} - \Phi^n)\|_{L^2}^2 - \|\nabla p^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\eta \nabla p^n\|_{L^2}^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la relation

$$(\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2) + 2\Delta t \nu \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + (\Delta t)^2 (\|\nabla p^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\eta \nabla p^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla(p^n - \eta p^{n-1})\|_{L^2}^2) \leq 0. \quad (3.33)$$

La démonstration se termine aisément en sommant (3.33) pour $n = 0, \dots, N-1$ et en observant que

$$\sum_{k=1}^{N-1} (\|\nabla p^k\|_{L^2}^2 - \|\eta \nabla p^{k-1}\|_{L^2}^2) \leq \|\nabla p^N\|_{L^2}^2 - \|\eta \nabla p^0\|_{L^2}^2$$

pour tout $\eta \in [0, 1]$. ■

3.1.3 Discrétisation en espace

Soit $h > 0$ et soit \mathcal{T}_h un maillage conforme de Ω en tétraèdres K de diamètre $h_k < h$. Soit $\eta \in [0, 1]$ la variable introduite dans l'algorithme 3.1.4. Considérons l'espace

$$\mathbb{P}(K) = \begin{cases} \mathbb{P}_1(K) & \text{si } \eta = 0, \\ \mathbb{P}_1(K) \oplus B_K & \text{si } \eta > 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Ici $\mathbb{P}_1(K)$ dénote l'ensemble des polynômes de degré 1 sur K et B_K est la fonction bulle (2.45). La discrétisation en espace des problèmes (3.18), (3.19) et (3.20) correspond au choix des espaces de dimension finie suivants :

$$\mathcal{V}_h = \{\mathbf{v} \in (C^0(\bar{\Omega}))^d : \mathbf{v}|_K \in \mathbb{P}(K)^d, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{Q}_h = \{q \in C^0(\bar{\Omega}) : q|_K \in \mathbb{P}^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.36)$$

Étant donné une approximation de la vitesse et de la pression au temps t_n , si on a $\mathbf{f}_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h$, $\mathbf{u}_h^n \in \mathcal{V}_h$, $\Phi_h^n \in \mathcal{Q}_h \setminus \mathbb{R}$ et $p_h^n \in \mathcal{Q}_h$, la discrétisation spatiale de l'algorithme 3.1.4 s'écrit : trouver $\mathbf{u}_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h$, $\Phi_h^{n+1} \in \mathcal{Q}_h \setminus \mathbb{R}$ et $p_h^{n+1} \in \mathcal{Q}_h$ tels que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \mathbf{v}_h dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h dx - \int_{\Omega} (\eta p_h^n + \Phi_h^n) \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx = \int_{\Omega} (\mathbf{f}_h^{n+1} - \gamma_{ns}(\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h dx \quad (3.37)$$

pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$,

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi_h^{n+1} \cdot \nabla \varphi_h dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \varphi_h dx \quad (3.38)$$

pour tout $\varphi_h \in \mathcal{Q}_h \setminus \mathbb{R}$ et

$$\int_{\Omega} p_h^{n+1} q_h dx = \int_{\Omega} (\eta p_h^n + \Phi_h^{n+1}) q_h dx, \quad (3.39)$$

pour tout $q_h \in \mathcal{Q}_h$.

Bien que chacun de ces problèmes puissent être résolus avec des espaces éléments-finis \mathbb{P}_1 , la vitesse \mathbf{u} et la pression p restent liées par la condition inf-sup du problème (3.2). Dans [45, 47], il est montré numériquement qu'une discrétisation de l'algorithme 3.1.4 par des éléments finis $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ ne permet pas d'assurer la stabilité du schéma en espace si $\eta = 1$. Une condition suffisante est de choisir des espaces $\mathcal{V}_h - \mathcal{Q}_h$ qui satisfont la condition inf-sup.

Néanmoins, dans le cas du schéma de Chorin-Temam 3.1.4 non-incrémenté ($\eta = 0$), l'utilisation du couple d'espace $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ est possible pour autant que la condition suivante sur les pas de temps et d'espace vérifient (voir [45, 47]) :

il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telle que

$$C_1 h^2 \leq \Delta t \leq C h^2. \quad (3.40)$$

3.2 Résolution du problème de Poisson

Dans ce paragraphe nous étudions la résolution numérique du problème de Poisson avec des conditions de bord de Neumann homogènes qui intervient lors du calcul intermédiaire de la pression dans l'algorithme 3.1.4. Différentes méthodes de résolution sont testées et l'influence du maillage sur les résultats numériques est présentée.

3.2.1 Formulation faible

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine polyédral et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application donnée avec $f \in L^2(\Omega)$. On considère les deux problèmes suivants : trouver $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\text{(DIRICHLET)} \quad \begin{cases} -\Delta\Phi = f & \text{dans } \Omega; \\ \Phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.41)$$

ou bien

$$\text{(NEUMANN)} \quad \begin{cases} -\Delta\Phi = f & \text{dans } \Omega; \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.42)$$

Dans le problème (3.42), on ajoute une condition de comptabilité sur f :

$$\int_{\Omega} f dx = 0. \quad (3.43)$$

Si on choisit l'espace $H_0^1(\Omega)$, il est bien connu que la formulation faible suivante : trouver $\Phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla\Phi \cdot \nabla\varphi = \int_{\Omega} f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (3.44)$$

admet une unique solution Φ qui est la solution du problème (3.41). D'autre part la fonction Φ du problème (3.42) est définie à une constante près. En choisissant $V_N = H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$ on montre que le problème de trouver $\Phi \in V_N$ satisfaisant

$$\int_{\Omega} \nabla\Phi \cdot \nabla\varphi = \int_{\Omega} f\varphi, \quad \forall \varphi \in V_N \quad (3.45)$$

admet une unique solution.

3.2.2 Discrétisation des différents problèmes

Nous traitons dans ce qui suit la discrétisation spatiale des problèmes (3.44) et (3.45). Puisque la solution du problème (3.42) n'est définie qu'à une constante près, plusieurs procédures numériques sont présentées pour fixer cette constante. On supposera que Ω est un domaine polyédral et \mathcal{T}_h un maillage conforme de Ω en tétraèdres K de diamètre $h_k < h$. Soit $\{P_i\}_{i=1,\dots,M_1}$ les sommets du maillage \mathcal{T}_h situés à l'intérieur de Ω et $\{P_i\}_{i=M_1+1,\dots,M_2}$ les sommets du maillage \mathcal{T}_h situés sur le bord $\partial\Omega$.

Discrétisation du problème (3.44) (Condition de Dirichlet \mathcal{D})

Considérons l'espace

$$\mathcal{Q}_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathbb{P}_1, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.46)$$

L'approximation en éléments-finis \mathbb{P}_1 du problème (3.44) s'écrit : trouver $\Phi_h \in \mathcal{Q}_h \cap H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi_h \cdot \nabla \varphi_h = \int_{\Omega} f \varphi_h, \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{Q}_h \cap H_0^1(\Omega). \quad (3.47)$$

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_{M_1})$ une base de type "éléments finis" de l'espace $\mathcal{Q}_h \cap H_0^1(\Omega)$. Cette base de fonctions vérifie $\varphi_j(P_i) = \delta_{ij}$ pour tout $i = 1, \dots, M_1$. On pose $\Phi_h = \sum_{j=1}^{M_1} \Phi_j \varphi_j$. Le problème (3.47) est alors équivalent au système algébrique suivant :

$$\sum_{j=1}^{M_1} \Phi_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i = \int_{\Omega} f \varphi_i, \quad i = 1, \dots, M_1. \quad (3.48)$$

En écrivant $(A_{\mathcal{D}})_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i$ et $b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i$ pour $1 \leq i, j \leq M_1$, le système (3.48) est équivalent au problème matriciel

$$A_{\mathcal{D}} \Phi = \mathbf{b} \quad (3.49)$$

avec $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{M_1})$. On montre aisément que la matrice creuse $A_{\mathcal{D}}$ de dimensions $M_1 \times M_1$ est symétrique et définie positive, assurant que le système (3.49) admet une unique solution. En particulier, toutes les valeurs propres de $A_{\mathcal{D}}$, notées $\{\lambda_{h,i}\}_{i=1,\dots,M_1}$, sont réelles et positives. En utilisant l'inégalité de Poincaré et l'inégalité inverse [33], on peut montrer que le rapport entre les valeurs propres extrêmes de $A_{\mathcal{D}}$ dépend de la taille de maille h . Le conditionnement spectral de la matrice $A_{\mathcal{D}}$ peut être estimé dans ce cas par :

$$\text{cond}(A_{\mathcal{D}}) := \frac{\max_{i=1,\dots,M_1} \{\lambda_{h,i}\}}{\min_{i=1,\dots,M_1} \{\lambda_{h,i}\}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

Discrétisation du problème (3.45) (Condition de Neumann)

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_{M_2})$ une base de l'espace \mathcal{Q}_h et posons $\Phi_h = \sum_{j=1}^{M_2} \Phi_j \varphi_j$. On considère le problème suivant :

$$\sum_{j=0}^{M_2} \Phi_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i = \int_{\Omega} f \varphi_i, \quad i = 1, \dots, M_2. \quad (3.50)$$

En écrivant $(A_{\mathcal{N}})_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i$ et $b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i$ pour $1 \leq i, j \leq M_2$, le système (3.50) est à nouveau équivalent au problème matriciel

$$A_{\mathcal{N}} \Phi = \mathbf{b} \quad (3.51)$$

avec $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{M_2})$. La matrice $A_{\mathcal{N}}$ de dimensions $M_2 \times M_2$ n'est pas inversible puisque $\text{Ker} A_{\mathcal{N}} = \mathbb{1}$ et donc $A_{\mathcal{N}}$ possède une valeur propre nulle. Ainsi le problème (3.42) admet une infinité de solutions dans $H^1(\Omega)$ définies à une constante près. Numériquement, plusieurs possibilités peuvent être envisagées afin de rendre ce problème bien posé.

1. Condition de Neumann en fixant l'inconnue en un nœud (\mathcal{F})

Si P_0 est un nœud de \mathcal{T}_h , on peut fixer l'inconnue Φ_h du problème (3.50) en P_0 puisque la fonction Φ_h est continue. Ceci revient à éliminer une inconnue du système (3.51) rendant la matrice résultante $A_{\mathcal{F}}$ de taille $(M_2 - 1) \times (M_2 - 1)$ définie positive. Cette façon de procéder n'est cependant pas consistante avec le problème (3.45). Une fonction de $H^1(\Omega)$ n'est en général pas continue en dimension supérieure à un, et donc cela n'a pas de sens de parler de la valeur de la fonction en un point si $d = 2, 3$. Le conditionnement de la matrice $A_{\mathcal{F}}$ peut alors être très élevé et la précision numérique moins bonne. Pour donner un exemple, prenons un cube unitaire Ω discrétisé par un maillage \mathcal{T}_h régulier et soit $\varphi_h \in \mathcal{Q}_h$ une fonction telle que $\varphi_h(P_j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, M_2 - 1$ et $\varphi_h(P_{M_2}) = 0$. Alors en trois dimensions d'espace

$$\|\varphi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \|\nabla \varphi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathcal{O}(h).$$

Si l'ensemble des valeurs propres positives de $A_{\mathcal{F}}$ est noté $\{\lambda_{h,i}\}_{i=1, \dots, M_2-1}$, on peut montrer en suivant la procédure décrite dans [33] que l'écart entre les valeurs propres extrêmes est donné dans ce cas par

$$\text{cond}(A_{\mathcal{F}}) = \frac{\max_{i=1, \dots, M_2-1} \{\lambda_{h,i}\}}{\min_{i=1, \dots, M_2-1} \{\lambda_{h,i}\}} \approx \frac{D}{Ch^3} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^3}\right).$$

2. Condition de Neumann avec la moyenne nulle (\mathcal{M})

Une autre possibilité est de modifier le système linéaire (3.51) de manière à ce que l'inconnue Φ_h soit à moyenne nulle :

$$\int_{\Omega} \Phi_h dx = 0.$$

Cette contrainte est imposée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange λ et d'une équation

supplémentaire forçant la moyenne de Φ_h à être nulle :

$$\int_{\Omega} \Phi_h dx = \sum_{i=1}^{M_2} \int_{\Omega} \varphi_i \Phi_i dx = 0. \quad (3.52)$$

Soit $\mathbf{C}^T = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi} = (\int_{\Omega} \varphi_1 dx, \dots, \int_{\Omega} \varphi_{M_2} dx)$ le vecteur des intégrales des fonctions de base de l'espace \mathcal{Q}_h . Le système sous contrainte s'écrit sous la forme matricielle suivante : trouver $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{M_2}$ et λ tels que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{\mathcal{N}} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & 0 \end{pmatrix}}_{=D_{\mathcal{M}}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

La matrice $D_{\mathcal{M}}$ résultant de ce système de taille $(M_2 + 1) \times (M_2 + 1)$ est symétrique régulière mais non définie positive.

3. Condition de Neumann avec la suppression du noyau (\mathcal{N})

Le solveur PETSc [76] possède une fonctionnalité qui permet de résoudre les systèmes linéaires singuliers avec des méthodes de types GMRES ou gradient conjugué. En choisissant cette option, la matrice $A_{\mathcal{N}}$ de taille $M_2 \times M_2$ n'est pas modifiée artificiellement et aucune condition de bord essentielle n'est ajoutée au problème initial.

3.2.3 Tests numériques

Afin de tester les différentes méthodes introduites précédemment pour résoudre numériquement le problème (3.42), on introduit trois nombres réels positifs P, Q, R et le parallélépipède rectangle

$$\Omega_{P,Q,R} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < \frac{1}{P}, 0 < x_2 < \frac{1}{Q}, 0 < x_3 < \frac{1}{R} \right\}.$$

Les fonctions Φ et f qui interviennent dans le problème (3.42) seront définies au moyen d'une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(r) = r^2 * (1 - r)^2$ dont les différentes dérivées sont :

$$g'(r) = 4r^3 - 6r^2 + 2r \quad (3.54)$$

$$g''(s) = 12r^2 - 12r + 2. \quad (3.55)$$

Si $\Phi : (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_{P,Q,R} \rightarrow \Phi(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$ est définie par

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = g(Px_1) * g(Qx_2) * g(Rx_3) + C \quad (3.56)$$

où C est une constante réelle, on vérifie que

$$-\Delta\Phi = f$$

avec

$$f(x_1, x_2, x_3) = -P^2 * g''(Px_1) * g(Qx_2) * g(Rx_3) - Q^2 * g(Px_1) * g''(Qx_2) * g(Rx_3) - g(Px_1) * g(Qx_2) * R^2 * g''(Rx_3).$$

Puisque

$$\int_0^1 g''(r) dr = g'(1) - g'(0) = 0, \quad \text{alors} \quad \int_{\Omega_{P,Q,R}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

On utilise encore une fois la relation (3.54) pour constater que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \partial \Omega_{P,Q,R}.$$

Les fonctions Φ et f répondent alors au problème (3.42). C'est donc sur ce problème spécifique que nous allons établir des résultats numériques en fixant la constante C qui intervient dans (3.56) pour obtenir les quatre cas suivants :

1. **Fixer au nœud central (notation par la suite \mathcal{F})** La fonction Φ_h , approximation numérique de Φ et définie à une constante près, sera déterminée univoquement en la fixant au nœud central $(\frac{1}{2P}, \frac{1}{2Q}, \frac{1}{2R})$, i.e $\Phi_h(\frac{1}{2P}, \frac{1}{2Q}, \frac{1}{2R})$ la valeur étant $C = -g(0.5)^3$;
2. **Moyenne Nulle (notation \mathcal{M})** La fonction Φ_h est déterminée univoquement de façon à ce que sa moyenne dans $\Omega_{P,Q,R}$ soit nulle. Puisque

$$\int_{\Omega_{P,Q,R}} g(Px_1) * g(Qx_2) * g(Rx_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{P * Q * R}{30 * 30 * 30}$$

alors le choix de $C = -\frac{1}{30*30*30}$ dans (3.56) impose que $\int_{\Omega_{P,Q,R}} \Phi(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$;

3. **Suppression du Noyau (notation \mathcal{N})** : La fonction Φ_h est déterminée univoquement en posant $C = \Phi(0, 0, 0) = 0$;
4. **Condition de Dirichlet (notation \mathcal{D})** On vérifie que la fonction Φ donnée par (3.56) avec $C = 0$ répond aussi au problème (4.57).

Maillage en tétraèdres

Pour $L \in \mathbb{N}$ nous discrétisons le domaine $\Omega_{P,Q,R}$ en découpant chaque direction avec L nœuds. Chacun des L^3 hexaèdres est divisé en 5 tétraèdres. Nous obtenons alors une discrétisation \mathcal{T}_h de $\Omega_{P,Q,R}$ composée de $5L^3$ tétraèdres, avec $M_2 = L^3$ nœuds et la taille de maille de référence est $h = \max\left(\frac{1}{PL}, \frac{1}{QL}, \frac{1}{RL}\right)$.

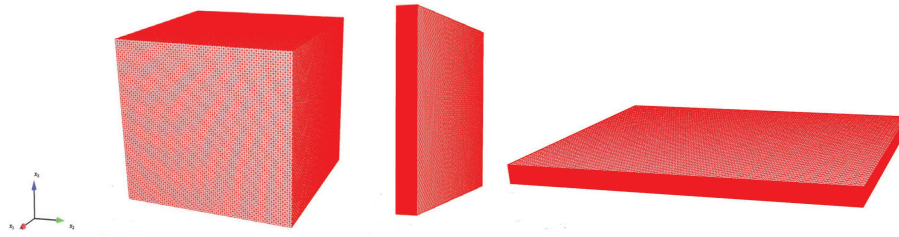


Figure 3.1 – Gauche : $\Omega_{1,1,1}$, Milieu : $\Omega_{1,10,1}$, Droite : $\Omega_{1,1,10}$.

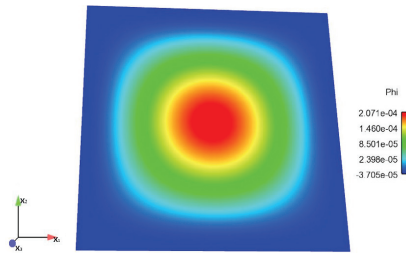


Figure 3.2 – Solution Φ de (3.42) avec $P = Q = R = 1$ vérifiant $\int \Phi dx = 0$ (coupe de $\Omega_{1,1,1}$ à $x_3 = 0.5$).

Résolution du système linéaire

Les matrices et les seconds membres des systèmes linéaires (3.49), (3.51) et (3.53) sont construits à l'aide du logiciel éléments-finis ALUCELL décrit dans [96]. Différentes méthodes sont utilisées pour la résolution de ces systèmes en utilisant le solveur PETSc [76] :

- Méthode du gradient conjugué (CG, [51]) : adaptée pour les matrices symétriques et définies positives : $\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{N}$
- Méthode de minimisation du résidu (GMRES, [89]) : adaptée pour les matrices inversibles : $\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$
- Méthode du résidu conjugué (CR, [67]) : semblable à la méthode du gradient conjugué mais adaptée pour des matrices symétriques mais non définies positives : \mathcal{M} .

Les préconditionneurs P suivants sont testés pour accélérer la convergence des précédentes méthodes de résolution (sans perte de généralité on notera A une matrice de Galerkin issue des approximation $\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$).

1. Pas de préconditionneur (IDENT) : $P=I$;
2. Préconditionneur diagonal (JACOBI) : $P=\text{Diag}(A)$;

3. Préconditionneur ILU avec degré de remplissage k (ILU(k), [90]) :

Ce preconditionneur est obtenu en effectuant l'algorithme de décomposition LU, les matrices L_k et U_k ayant la même structure creuse que la matrice A . On pose alors $P = L_k U_k$ qui correspond à la factorisation de A par la méthode ILU avec le degré de remplissage k . On a donc

$$A = P + R_k$$

où la matrice R_k est le reste en fonction de k .

4. Préconditionneur ICC de degré de remplissage k (ICC(k), [90]) :

Factorisation incomplète de Cholesky pour les matrices symétriques et définies positives : $P = L_k L_k^T$.

5. Préconditionneur pour la moyenne nulle \mathcal{M} (LUFLECHE) :

La discrétisation \mathcal{M} demande à résoudre un système linéaire de dimension $(M_2 + 1) \times (M_2 + 1)$ avec la matrice (voir (3.53))

$$D_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{N}} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Un preconditionneur simple et adapté à la matrice D serait de choisir

$$P = \begin{pmatrix} \text{diag}(A_{\mathcal{N}}) & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & 0 \end{pmatrix}$$

qui est la décomposition de D en matrice flèche. La matrice P est facilement inversible : la décomposition LU de P

$$P = \mathbb{L} \mathbb{U}$$

s'obtient avec

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{C_1}{A_{11}} & \dots & \frac{C_{M_2}}{A_{M_2 M_2}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & C_1 \\ 0 & A_{22} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_{M_2 M_2} & C_{M_2} \\ 0 & \dots & 0 & -\sum_{i=1}^{M_2} \frac{C_i^2}{A_{ii}} \end{pmatrix}.$$

Si on écrit $S = \sum_{i=1}^{M_2} \frac{C_i^2}{A_{ii}}$. On obtient alors

$$P^{-1} = \mathbb{U}^{-1} \mathbb{L}^{-1}$$

avec

$$\mathbb{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{C_1}{A_{11}} & \dots & -\frac{C_{M_2}}{A_{M_2 M_2}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_{11}} & 0 & \dots & \frac{C_1}{S} \\ 0 & \frac{1}{A_{22}} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{1}{A_{M_2 M_2}} & \frac{C_{M_2}}{S} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{S} \end{pmatrix}.$$

Tolérance

Le critère d'arrêt utilisé pour définir la convergence des méthodes itératives lors de la résolution des systèmes linéaires est réalisé lorsque le résidu relatif se trouve inférieur à une tolérance ε choisie :

$$\frac{\|Ax^K - b\|}{\|Ax^0 - b\|} \leq \varepsilon.$$

Nous prendrons dorénavant $\varepsilon = 1e^{-10}$ et $x^0 = 0$. Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre cette tolérance sera noté ITER.

Calculs des erreurs

Soit Φ la fonction donnée par (3.56) avec la constante fixée par l'un des problèmes ($\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$) et Φ_h la solution approchée correspondante donnée par la discrétisation en éléments-finis. L'erreur relative en norme $L^2(\Omega)$ considérée s'écrit

$$E_{L^2} = \frac{\|\Phi - \Phi_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}}.$$

	Profil	Matrice	RHS
L=10	2.000e-2	1.600e-2	0.000
L=20	1.040e-1	6.400e-2	8.000e-3
L=40	7.040e-1	3.840e-1	4.400e-2
L=80	6.604e+0	3.112e+0	4.000e-1
L=160	5.719e+1	2.511e+1	3.220e+0

Table 3.1 – Temps CPU en seconde de construction moyen du profil de la matrice, du remplissage de la matrice et du second membre RHS issus de \mathcal{D}, \mathcal{F} et \mathcal{N} .

	Profil	Matrice	RHS
L=10	1.600e-2	2.000e-2	4.000e-3
L=20	1.120e-1	8.000e-2	1.000e-2
L=40	7.280e-1	4.630e-1	4.600e-2
L=80	6.785e+0	3.640e+0	4.300e-1
L=160	5.793e+1	2.831e+1	3.420e+0

Table 3.2 – Temps CPU en seconde de construction moyen du profil de la matrice, du remplissage de la matrice et du second membre RHS issu de \mathcal{M} .

Résultats

Les tables 3.3, 3.4 et 3.5 contiennent des résultats numériques correspondant aux différentes méthodes de résolution des problèmes (3.41) et (3.42) sur $\Omega_{P,Q,R}$. Nous faisons les constatations suivantes :

- Le conditionnement de la matrice est sensible au rapport d'aspect du domaine $\Omega_{P,Q,R}$ (voir la table 3.3). Le conditionnement de la matrice augmente lorsque le paramètre R du rapport d'aspect devient grand, en particulier le conditionnement correspondant au cas où l'on fixe la solution Φ_h au nœud central (\mathcal{F}).
- La méthode du gradient conjugué avec le préconditionneur ILU(0) est la plus rapide pour résoudre les systèmes linéaires issus des discrétisations \mathcal{D} , \mathcal{F} et \mathcal{N} . Le système issu de la discrétisation \mathcal{M} se résout par contre plus efficacement avec la méthode du résidu conjugué et le préconditionneur ILU(0).
- La méthode de suppression du noyau de la matrice \mathcal{N} est la méthode la plus rapide pour résoudre le problème de Poisson avec des conditions de bord de Neumann homogènes (3.42). la méthode \mathcal{F} est la moins rapide.

Conditionnement					
$\Omega_{1,1,R}$	L	\mathcal{D}	\mathcal{F}	\mathcal{M}	\mathcal{N}
R=1	10	2.723e+1	3.305e+3	3.828e+1	3.436e+1
	20	1.082e+2	1.707e+4	1.038e+2	1.021e+2
	40	4.325e+2	1.302e+5	3.623e+2	3.610e+2
	80	1.729e+3	1.016e+6	1.367e+3	1.366e+3
R=10	10	4.413e+1	2.043e+4	1.906e+3	1.689e+3
	20	1.800e+2	1.079e+5	5.704e+3	5.639e+3
	40	7.235e+2	7.308e+5	2.049e+4	2.044e+4
	80	2.897e+3	-	9.409e+4	8.725e+4
R=50	10	4.488e+1	3.037e+5	4.722e+4	4.166e+4
	20	1.831e+2	1.106e+6	1.413e+5	1.397e+5
	40	7.362e+2	-	5.089e+5	5.046e+5
	80	2.950e+3	-	-	-

Table 3.3 – Conditionnement de la matrice des systèmes linéaires obtenus des quatre discrétisations \mathcal{D} , \mathcal{F} , \mathcal{M} , \mathcal{N} .

3.2. Résolution du problème de Poisson

Problème de Dirichlet \mathcal{D}

Méthode	Préc	L	R=1			R=10		
			E_{L^2}	ITER	CPU	E_{L^2}	ITER	CPU
CG	JACOBI	20	1.629e-2	45	1.200e-2	1.967e-2	117	3.200e-2
		40	4.091e-3	90	1.720e-1	5.063e-3	239	4.240e-1
		80	1.024e-3	177	4.612e+0	1.279e-3	499	8.060e+0
		160	2.561e-4	354	7.771e+1	-	-	-
CG	ILU0	20	1.629e-2	25	2.000e-2	1.967e-2	18	1.200e-2
		40	4.091e-3	47	1.880e-1	5.063e-3	29	1.320e-1
		80	1.024e-3	84	2.692e+0	1.279e-3	55	1.916e+0
		160	2.561e-4	159	4.015e+1	3.208e-4	109	2.842e+1
CG	ILU2	20	1.629e-2	13	5.200e-2	1.967e-2	12	5.200e-2
		40	4.091e-3	23	5.360e-1	5.063e-3	20	5.120e-1
		80	1.024e-3	44	6.068e+0	1.279e-3	37	4.664e+0
		160	2.561e-4	78	6.926e+1	3.208e-4	72	7.002e+1
CG	ICCO	20	1.629e-2	25	2.400e-2	1.967e-2	18	1.600e-2
		40	4.091e-3	47	1.800e-1	5.063e-3	29	1.240e-1
		80	1.024e-3	84	2.800e+0	1.279e-3	55	1.944e+0
		160	2.561e-4	159	4.883e+1	3.208e-4	109	3.431e+1

Moyenne Nulle \mathcal{M}

Méthode	Préc	L	R=1			R=10		
			E_{L^2}	ITER	CPU	E_{L^2}	ITER	CPU
CR	JACOBI	20	9.257e-3	52	2.800e-2	2.873e-1	234	8.000e-2
		40	2.335e-3	102	2.600e-1	7.694e-2	503	1.234e+0
		80	5.852e-4	205	5.964e+0	1.972e-2	1070	2.342e+1
		160	1.463e-4	412	1.045e+2	-	-	-
CR	ILU0	20	9.257e-3	45	3.200e-2	2.873e-1	86	7.000e-2
		40	2.335e-3	85	4.180e-1	7.694e-2	155	6.920e-1
		80	5.852e-4	158	6.340e+0	1.972e-2	268	9.345e+0
		160	1.463e-4	305	9.981e+1	4.964e-3	560	1.845e+2
CR	ILU2	20	9.257e-3	24	8.400e-2	2.873e-1	51	1.456e-1
		40	2.335e-3	42	8.456e-1	7.694e-2	101	1.345e+0
		80	5.852e-4	76	9.345e+0	1.972e-2	191	1.924e+1
		160	1.463e-4	147	1.453e+2	4.964e-3	340	2.567e+2
CR	LUFLECHE	20	9.257e-3	49	3.000e-2	2.873e-1	230	1.000e-1
		40	2.335e-3	98	2.800e-1	7.694e-2	489	1.324e+0
		80	5.852e-4	192	6.123e+0	1.972e-2	998	2.564e+1
		160	1.463e-4	387	1.123e+2	-	-	-

Table 3.4 – Résolution numérique du problème (3.41) (haut) et du problème (3.42) en imposant la moyenne nulle (bas). Le domaine est donné par $\Omega_{1,1,R}$ et les colonnes E_{L^2} , ITER et CPU signifient respectivement l'erreur en norme $L^2(\Omega)$, le nombre d'itérations et le temps CPU en seconde.

Fixer au noeud central \mathcal{F}

Méthode	Préc	L	R=1		R=10	
			ITER	CPU	ITER	CPU
CG	JACOBI	20	52	2.800e-2	234	8.000e-2
		40	202	2.600e-1	502	1.172e+0
		80	204	5.029e+0	1068	2.091e+1
		160	409	8.461e+1	-	-
CG	ILU0	20	56	3.600e-2	97	6.400e-2
		40	108	4.480e-1	184	7.280e-1
		80	202	6.404e+0	353	1.090e+1
		160	392	1.068e+2	698	1.926e+2
CG	ILU2	20	28	8.400e-2	58	1.120e-1
		40	55	9.121e-1	118	1.456e+0
		80	108	1.094e+1	236	2.195e+1
		160	205	1.627e+2	468	2.998e+2
CG	ICC0	20	56	3.200e-2	97	6.800e-2
		40	108	4.400e-1	184	7.120e-1
		80	202	6.656e+0	353	6.524e+0
		160	392	1.103e+2	698	5.954e+1

NULLSPACE \mathcal{N}

Méthode	Préc	L	R=1		R=10	
			ITER	CPU	ITER	CPU
CG	JACOBI	20	952	2.800e-2	234	8.000e-2
		40	102	2.600e-1	502	1.172e+0
		80	204	5.028e+0	1068	2.091e+1
		160	409	8.461e+1	-	-
CG	ILU0	20	45	3.200e-2	86	6.800e-2
		40	85	3.960e-1	154	6.720e-1
		80	158	6.412e+0	267	9.033e+0
		160	304	9.784e+1	558	1.721e+2
CG	ILU2	20	24	8.400e-2	50	1.360e-1
		40	42	8.121e-1	99	1.328e+0
		80	76	8.973e+0	189	1.692e+1
		160	146	1.178e+2	337	2.360e+2
CG	ICC0	20	45	3.200e-2	86	5.200e-2
		40	85	3.720e-1	154	6.440e-2
		80	158	5.664e+0	267	9.317e+0
		160	304	1.009e+2	558	1.664e+2

Table 3.5 – Résolution numérique du problème (3.42) en fixant la valeur au nœud central (haut) et en supprimant le noyau (bas). Le domaine est donné par $\Omega_{1,1,R}$ et les colonnes ITER et CPU signifient respectivement le nombre d'itérations et le temps CPU en seconde.

3.3 Résultats numériques correspondant aux méthodes de projection

Afin d'observer les performances de l'algorithme 3.1.4, nous présentons dans cette partie des tests numériques sur des problèmes de Stokes évolutifs avec des solutions exactes qui sont asymptotiquement stationnaires. En utilisant les logiciels ALUCELL [96] et FreeFem++ [50], la méthode de projection 3.1.4 est comparée à la méthode dite "monolithique".

3.3.1 Notations utilisées

Dans cette partie nous conservons les notations de la section 3.1 et nous supposons que $\gamma_{ns} = 0$. Considérons le problème (3.2) : si \mathbf{u}^0 et p^0 sont des fonctions connues avec \mathbf{u}^0 s'annulant sur $\partial\Omega$, pour tout $n = 1 \dots, N$, $t_0 = 0$, trouver \mathbf{u}^{n+1} et p^{n+1} tels que

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} & \text{dans } \Omega; \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.57)$$

Nous définissons les notations suivantes pour caractériser les algorithmes utilisés pour résoudre le problème (3.57) :

- Méthode Monolithique : $M(\mathbf{h}, \Delta t, FEM)$

Utilisation des éléments finis $FEM = \mathbb{P}_{1b} - \mathbb{P}_1$ (voir le paragraphe 2.3.1 pour la discrétisation stationnaire). Le système linéaire issu du problème (3.57) se résout par la méthode GMRES avec le préconditionneur ILU(2). La tolérance relative de résolution du système linéaire est $\varepsilon = 1e^{-10}$.

- Méthode de Projection : $P(\mathbf{h}, \Delta t, \eta, FEM)$

Algorithme de projection 3.1.4 résolu avec les éléments-finis $FEM = \mathbb{P}_{1b} - \mathbb{P}_1$ si $\eta > 0$ ou $FEM = \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ si $\eta = 0$ (avec contrainte sur le pas de temps).

Les systèmes linéaires issus des problèmes (3.37) et (3.39) sont résolus par la méthode du gradient conjugué avec le préconditionneur diagonal. Afin de fixer la constante de l'inconnue Φ_h^{n+1} de (3.38), nous utilisons les méthodes présentées dans la section précédente. En deux dimensions d'espace, nous appliquons la moyenne nulle (\mathcal{M}). En trois dimensions, nous utilisons la suppression du noyau de la matrice (\mathcal{N}). Pour chaque système linéaire, la tolérance est fixée à $\varepsilon = 1e^{-10}$.

En deux dimensions d'espace, les matrices sont construites à l'aide du logiciel FreeFem++ [50] et en trois dimensions avec le logiciel ALUCELL [96].

3.3.2 Tests Numériques

Les essais numériques de ce paragraphe ont pour but d'observer la performance de l'algorithme 3.1.4 pour résoudre des problèmes évolutifs qui convergent asymptotiquement vers une solution stationnaire. A ce propos, nous considérons des solutions exactes pour l'équation de Stokes de type polynomiale (condition de bord de Dirichlet) ou sinusoïdale (condition de bord de glissement).

Pour chaque simulation, nous observons le temps CPU utilisé par chaque méthode et nous allons comparer la précision des schémas en calculant les erreurs relatives. Ce sont ici les écarts entre les solutions exactes et les solutions approchées au temps $T = N\Delta t$

$$ERU = \frac{\|\mathbf{u}(T) - \mathbf{u}_h(T)\|_{H^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}(T)\|_{H^1(\Omega)}}, \quad ERP = \frac{\|p(T) - p_h(T)\|_{L^2(\Omega)}}{\|p(T)\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Cas-Test 2D

En deux dimensions d'espace, nous prenons $\Omega \in \mathbb{R}^2$ le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$ avec le champ de vitesse

$$\mathbf{u}_{2D}(x_1, x_2, t) = e^{\frac{-1}{t^6}} \begin{pmatrix} [x_1^2(1-x_1)^2]'[(x_2)^2(1-x_2)^2] \\ -[x_1^2(1-x_1)^2][x_2^2(1-x_2)^2]' \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

et la pression à moyenne nulle

$$p_{2D}(x_1, x_2, t) = e^{\frac{-1}{t^6}} \left(x_1 x_2 - \frac{1}{4} \right). \quad (3.59)$$

On vérifie aisément que $\text{div } \mathbf{u}_{2D} = 0$ et que $\mathbf{u}_{2D} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$ pour tout $t \in [0, \infty[$. La force \mathbf{f}_D est calculée de façon à ce que $(\mathbf{u}_{2D}, p_{2D})$ soient des solutions de l'équation (3.1) avec $\gamma_{ns} = 0$ et $\nu = 1$. Notons de plus que ces solutions tendent asymptotiquement vers une solution stationnaire puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{-1}{t^6}} = 1.$$

Des résultats correspondant à la résolution du problème (3.57) avec la force \mathbf{f}_D sont donnés dans les tables 3.6 et 3.7.

Nous remarquons que la méthode de projection incrémentée ($\eta = 1$) est plus précise que la méthode non incrémentée ($\eta = 0$) pour le même pas de temps. De plus, ces méthodes sont plus efficaces en temps de calculs lorsque le maillage devient fin. En particulier, la méthode de Chorin-Temam non-incrémentée est jusqu'à trois fois plus rapide que la méthode monolithique.

3.3. Résultats numériques correspondant aux méthodes de projection

h	M(h,0.1, $\mathbb{P}_{1b} - \mathbb{P}_1$)		P(h,0.1,1, $\mathbb{P}_{1b} - \mathbb{P}_1$)		P(h,0.1,0, $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$)	
	ERU	ERP	ERU	ERP	ERU	ERP
1/20	1.231e-1	1.374e-2	1.238e-1	3.218e-2	1.238e-1	3.345e-1
1/40	5.952e-2	2.824e-3	6.132e-2	1.532e-2	6.132e-2	1.874e-1
1/80	2.950e-2	8.927e-4	3.067e-2	7.456e-2	3.068e-2	1.245e-1
1/160	1.472e-2	4.417e-4	1.522e-2	3.756e-2	1.523.e-2	9.934e-2

Table 3.6 – Écart relatif entre les solutions numériques du problème (3.57) avec différentes méthodes de résolution et les solutions exactes. On a $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $T = 10$ et des conditions de bord de Dirichlet. Les solutions exactes sont \mathbf{u}_{2D} (3.58) et p_{2D} (3.59).

h	M(h,0.1, $\mathbb{P}_{1b} - \mathbb{P}_1$)	P(h,0.1,1, $\mathbb{P}_{1b} - \mathbb{P}_1$)	P(h,0.1,0, $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$)
1/20	4.781e-2	3.425e-2	2.456e-2
1/40	2.688e-1	2.356e-1	1.945e-1
1/80	2.409e+0	1.945e+0	1.102e+0
1/160	2.914e+1	2.114e+1	1.124e+1

Table 3.7 – CPU[s] moyen par itération de temps lors de la résolution du problème (3.57) avec différentes méthodes. On a $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $T = 10$ et des conditions de bord de Dirichlet. Les solutions exactes sont \mathbf{u}_{2D} (3.58) et p_{2D} (3.59).

Cas-Test 3D

En trois dimensions d'espace, on considère le domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$ donné par $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1/R]$ avec $R > 0$ et les champs suivants :

$$\mathbf{u}_{3D,G}(x_1, x_2, x_3, t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{1+t}\right)\right) \begin{pmatrix} R \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \cos(\pi R x_3) \\ R \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi R x_3) \\ -2 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\pi R x_3) \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{u}_{3D,D}(x_1, x_2, x_3, t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{1+t}\right)\right) \begin{pmatrix} R^4 [x_1^2(1-x_1)^2]' [x_2^2(1-x_2)^2] [R x_3^2(1-R x_3)^2] \\ R^4 [x_1^2(1-x_1)^2] [x_2^2(1-x_2)^2]' [R x_3^2(1-R x_3)^2] \\ -2 [x_1^2(1-x_1)^2] [x_2^2(1-x_2)^2] [R x_3^2(1-R x_3)^2]' \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

avec la pression à moyenne nulle

$$p_{3D}(x_1, x_2, x_3, t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{1+t}\right)\right) \left(x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{8R}\right). \quad (3.62)$$

On vérifie que $\text{div } \mathbf{u}_{3D,G} = \text{div } \mathbf{u}_{3D,D} = 0$ et de plus

$$\mathbf{u}_{3D,G} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u}_{3D,D} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

La force $\mathbf{f}_{3D,D}$ (respectivement $\mathbf{f}_{3D,G}$) est calculée de façon à ce que $(\mathbf{u}_{3D,D}, p_{3D,D})$ (respectivement $(\mathbf{u}_{3D,G}, p_{3D,Gd})$) soient des solutions de l'équation (3.1) avec $\nu = 1$ et des conditions de Dirichlet (respectivement des conditions de glissement).

Des essais numériques qui correspondent à la résolution du problème (3.57) avec la force $\mathbf{f}_{3D,D}$ sont donnés dans la table 3.8. Nous montrons la précision de la méthode de Chorin-Temam non-incrémentée en observant notamment que les écarts sur la pression dépendent du pas de temps.

ERU			
h	$P(h,1,0,\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1)$	$P(h,0.1,0,\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1)$	$P(h,0.01,0,\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1)$
1/10	8.079e-2	8.079e-2	8.079e-1
1/20	4.036e-2	4.036e-2	4.036e-1
1/40	1.988e-2	1.988e-2	1.988e-1
1/80	9.923e-3	9.923e-3	9.923e-2

ERP			
h	$P(h,1,0,\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1)$	$P(h,0.1,0,\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1)$	$P(h,0.01,0,\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1)$
1/10	4.243e-2	2.845e-2	2.454e-1
1/20	2.435e-2	1.683e-2	1.324e-1
1/40	1.923e-2	1.234e-2	7.535e-2
1/80	1.734e-2	1.123e-2	6.143e-2

Table 3.8 – Convergence avec différents maillages et pas de temps. On a $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0.2]$, $T = 100$ et des conditions de bord de Dirichlet. Les solutions exactes sont $\mathbf{u}_{3D,D}$ (3.60) et p_{3D} (3.62).

D'autres résultats numériques qui correspondent à la résolution du problème (3.57) avec la force $\mathbf{f}_{3D,G}$ sont donnés dans la table 3.9, en faisant varier le paramètre du domaine R . Nous observons que le gain de temps CPU entre la méthode de Chorin-Temam non incrémentée et la méthode monolithique est important. Pour un maillage fortement aplati ($R=10$), nous ne pouvons cependant pas obtenir de solution stationnaire avec la méthode de Chorin-Temam.

3.3.3 Conclusion

- La convergence des méthodes de projection dépend du rapport d'aspect. Si le rapport d'aspect est trop élevé, il est difficile d'obtenir une solution stationnaire.
- La précision est influencée par le choix des espaces éléments-finis. Les écarts sur la pression sont moindres avec la méthode incrémentée ($\eta = 1$) qu'avec la méthode non-incrémentée ($\eta = 0$).
- Le fait d'utiliser la méthode de Chorin-Temam non-incrémentée permet d'être jusqu'à cinq fois plus rapide en trois dimensions avec un maillage fin, ce qui rend cette méthode attractive.

3.3. Résultats numériques correspondant aux méthodes de projection

	h	M(h,0.1, $\mathbb{P}_{1b} - \mathbb{P}_1$)			P(h,0.1,0, $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$)		
		ERU	ERP	CPU	ERU	ERP	CPU
R=1	1/10	7.934e-2	2.834e-2	2.321e-1	6.845e-2	4.124e-2	2.684e-1
	1/20	3.987e-2	7.312e-3	2.651e+0	4.153e-2	1.678e-2	2.142e+0
	1/40	1.921e-2	2.445e-3	3.316e+1	2.014e-2	1.242e-2	1.737e+1
	1/80	9.543e-3	1.714e-3	5.741e+2	9.955e-3	1.146e-2	2.104e+2
R=5	1/10	6.935e-2	1.567e-1	2.224e-1	7.275e-2	6.435e-1	7.356e-1
	1/20	3.465e-2	3.843e-2	2.813e+0	3.783e-2	2.163e-1	2.191e+0
	1/40	1.724e-2	9.524e-3	4.658e+1	1.924e-2	7.512e-2	2.551e+1
	1/80	8.635e-3	3.524e-3	2.137e+3	9.635e-3	4.335e-2	4.344e+2
R=10	1/10	6.553e-2	1.714e-1	2.378e-1	-	-	-
	1/20	3.262e-2	4.361e-2	3.291e+0	-	-	-
	1/40	1.624e-2	1.414e-2	5.887e+1	-	-	-
	1/80	8.213e-3	6.446e-3	3.503e+3	-	-	-

Table 3.9 – Écart relatif entre les solutions numériques du problème (3.57) avec différentes méthodes de résolution et les solutions exactes et temps de calculs CPU. On a $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1/R]$, $T = 100$ et des conditions de bord de glissement. Les solutions exactes sont $\mathbf{u}_{3D,G}$ (3.60) et p_{3D} (3.62).

4 Applications à l'électrolyse de l'aluminium

Dans cette section nous appliquons les sujets présentés et étudiés dans les chapitres précédents à la modélisation des écoulements de fluides dans des cuves de fabrication de l'aluminium.

La première partie décrit brièvement les équations évolutives qui modélisent la magnétohydrodynamique (abrégé MHD), le phénomène physique qui a lieu dans des cuves d'électrolyse de l'aluminium. Nous expliquons les couplages entre les différents problèmes fluides, magnétiques et d'interface.

Dans les deuxièmes et troisièmes parties de ce chapitre, des essais numériques sont présentés sur une cuve d'électrolyse industrielle simplifiée en utilisant le logiciel ALUCELL [96].

Dans la deuxième partie, un modèle évolutif basé sur [96] permet de calculer le mouvement stationnaire du bain électrolytique et de l'aluminium liquide. Nous allons à partir des équations de la magnétohydrodynamique simuler une approche évolutive basée sur [96] pour calculer de manière instationnaire le mouvement des fluides et de l'interface dans une cuve d'électrolyse. Plus précisément, les équations de Stokes évolutives sont résolues avec les méthodes présentées dans le chapitre trois et les temps de calculs sont comparés. Le but de ce chapitre est de discuter l'efficacité des méthodes de projection : gain de temps, précision, convergence vers une solution stationnaire.

Dans la troisième partie, nous étudions l'écoulement stationnaire avec les modèles de longueurs de mélange présentés dans le deuxième chapitre. L'impact de ces modèles sur l'écoulement et l'interface est présenté. En particulier, le modèle de von Karman est notamment confronté au modèle de "Smagorinsky". L'étude de convergence en maillage permet de faire des recommandations. Enfin, une étude de l'effet du lissage de l'interface sur les résultats numériques est effectuée dans la dernière partie de ce document.

4.1 Modélisation des écoulements dans le procédé d'électrolyse de l'aluminium

Dans cette section nous présentons les équations de la magnétohydrodynamique pour le procédé d'électrolyse de l'aluminium. Nous décrivons les couplages qui interviennent entre les problèmes fluides, magnétiques et d'interface. Le modèle utilisé est issu de [75, 96] et ne prend pas en compte les effets thermiques (voir [35] pour une étude de cette question).

4.1.1 Notations et domaines

Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné représentant une cuve d'électrolyse d'aluminium dont une coupe transverse est détaillée sur la figure 4.1. En particulier, Λ contient le domaine fluide Ω , les conducteurs, les anodes, les cathodes et le caisson ferromagnétique. Le domaine fluide $\Omega \subset \Lambda$ est composé de la partie bain électrolytique noté $\Omega_{el}(t)$, de la région aluminium liquide $\Omega_{al}(t)$ et de l'interface bain/métal $\Gamma(t) = \overline{\Omega_{el}(t)} \cap \overline{\Omega_{al}(t)}$, où t représente le temps. Ainsi, $\Omega = \text{int}(\overline{\Omega_{el}(t)} \cup \overline{\Omega_{al}(t)})$. On suppose que l'interface $\Gamma(t)$ peut être représentée comme le graphe d'une fonction continue $h(x_1, x_2, t)$: il existe un domaine $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ tel que

$$\Gamma(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_3 = h(x_1, x_2, t), (x_1, x_2) \in \Pi\} \quad t \in [0, \infty). \quad (4.1)$$

La densité et la viscosité de l'aluminium liquide seront notées respectivement ρ_{al} et μ_{al} et supposées constantes en espace et en temps. Il en est de même pour la densité et la viscosité du bain électrolytique désignées ρ_{el} et μ_{el} .

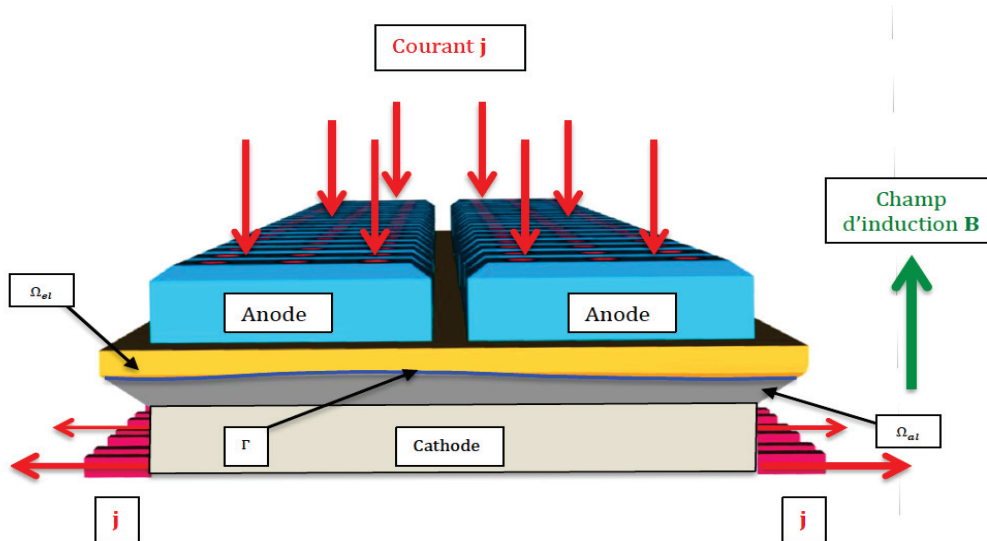


Figure 4.1 – Schéma d'une cuve d'électrolyse de l'aluminium Λ comprenant notamment le domaine fluide, les conducteurs, les anodes et la cathode.

4.1.2 Équations Hydrodynamiques

Dans ce paragraphe, nous allons écrire les équations de Navier-Stokes qui permettent de déterminer la vitesse $\mathbf{u} : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ et la pression $p : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dans la cuve. On suppose pour cela que les domaines $\Omega_{el}(t)$, $\Omega_{al}(t)$ et $\Gamma(t)$ sont connus pour tout temps t . De plus, la densité de courant électrique \mathbf{j} et le champ d'induction magnétique \mathbf{B} sont donnés en tout point de Λ et pour tout t .

Pour cela on commence par définir les fonctions densité ρ et viscosité μ par

$$\rho = \rho(x, t) = \begin{cases} \rho_{al} & \text{si } x \in \Omega_{al}(t); \\ \rho_{el} & \text{si } x \in \Omega_{el}(t), \end{cases} \quad \mu = \mu(x, t) = \begin{cases} \mu_{al} & \text{si } x \in \Omega_{al}(t); \\ \mu_{el} & \text{si } x \in \Omega_{el}(t), \end{cases}$$

ainsi que le tenseur $\boldsymbol{\tau}$:

$$\tau_{ij}(\mathbf{u}, p) = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

où nous rappelons que le tenseur de cisaillement local est défini par

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Par ailleurs, les forces qui agissent sur le fluide sont dues à la gravité et aux forces de Lorentz et s'écrivent $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$.

Le problème de Navier-Stokes s'écrit : trouver $\mathbf{u} : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $p : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \rho\mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_{el} \cup \Omega_{al} \times (0, \infty). \quad (4.2)$$

Le problème (4.2) est complété avec une condition initiale \mathbf{u}_0 sur la vitesse avec $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0$ et $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$. Généralement, on suppose que l'écoulement adhère à la paroi et donc :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (4.3)$$

Dans certains cas, des conditions de friction [83] seront cependant utilisées (voir le paragraphe 4.3). Notons de plus que lorsqu'un modèle de turbulence de longueur de mélange est considéré, la viscosité μ dépend du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ (voir le chapitre deux). Sur l'interface Γ , il est judicieux de supposer la continuité de la vitesse :

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (4.4)$$

où $[\cdot]$ est l'opérateur de saut au travers de l'interface Γ .

On complète encore le problème (4.2) en imposant que le saut des forces au travers de l'interface est nul, c'est-à-dire que

$$[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}_\Gamma] = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

avec $\mathbf{n}_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ la normale unitaire sur Γ qui pointe en direction de Ω_{el} .

4.1.3 Interface libre

Lorsque nous résolvons les équations de Navier-Stokes (4.2) avec les conditions (4.3)-(4.5), il est nécessaire de connaître les domaines $\Omega_{el}(t)$, $\Omega_{al}(t)$ et donc $\Gamma(t)$ pour tout t . Dans ce paragraphe, en supposant que le champ de vitesse \mathbf{u} est connu pour tout t , nous allons expliquer comment déterminer l'interface $\Gamma(t)$. A cet effet, nous choisissons de nous baser sur la technique level-set [69, 73, 74, 93]. Le principe de cette méthode est de déterminer l'interface $\Gamma(t)$ qui est engendrée par une surface de niveau d'une fonction continue $\varphi : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in \Omega_{el}(t); \\ < 0 & \text{si } x \in \Omega_{al}(t); \\ = 0 & \text{si } x \in \Gamma(t). \end{cases} \quad (4.6)$$

Si la fonction φ est connue, alors l'interface Γ est donnée implicitement par l'équation

$$\varphi(x(t), t) = 0 \quad (4.7)$$

où $x(t)$ est la trajectoire d'une particule de fluide qui est supposée rester sur l'interface. En dérivant l'équation (4.7) par rapport au temps on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{=\mathbf{u}} \cdot \nabla \varphi = 0. \quad (4.8)$$

L'évolution temporelle de $\varphi : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est ainsi donnée par le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ \varphi(0, x) = \varphi_0(x) & \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

En général, on choisit la condition initiale φ_0 du problème (4.9) de façon à ce que l'interface soit horizontale :

$$\varphi_0(x) = x_3 - x_3^0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.10)$$

où x_3^0 correspond à la position d'équilibre de l'interface bain/métal lorsque les forces électromagnétiques sont négligées.

4.1.4 Effets électromagnétiques

Cette section décrit les effets électromagnétiques durant le procédé d'électrolyse de l'aluminium. Le but de ce paragraphe est d'établir à partir des équations de Maxwell un modèle qui permette de calculer la densité de courant \mathbf{j} et le champ d'induction magnétique \mathbf{B} dans la cuve. On suppose que le champ de vitesse \mathbf{u} , l'interface Γ et les domaines Ω_{el} et Ω_{al} sont connus.

Dans ce qui suit, on considère le domaine de la cuve d'électrolyse Λ , comprenant notamment le domaine fluide, les anodes, la cathode et l'ensemble des conducteurs (voir la figure 4.1). De plus, on admet que le courant entre par une surface $\Gamma_{in} \subset \partial\Lambda$ située sous les anodes, traverse la partie fluide des anodes vers la cathode et sort de la cuve à travers une surface $\Gamma_{out} \subset \partial\Lambda$ qui se trouve sur les barres cathodiques, avec $\Gamma_{in} \cap \Gamma_{out} = \emptyset$ (voir figure 1.2).

Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont des équations mathématiques qui lient le champ d'induction magnétique \mathbf{B} , le champ magnétique \mathbf{H} , la densité de courant \mathbf{j} et le champ électrique \mathbf{E} . Ces équations sont rappelées ici par souci de clarté.

La première équation est la loi d'induction de Faraday, qui lie le champ d'induction magnétique \mathbf{B} et le champ électrique \mathbf{E} par la relation

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

La seconde équation est la loi d'Ampère, qui met en relation la densité de courant \mathbf{j} , les courants de déplacement $\frac{\partial(\epsilon\mathbf{E})}{\partial t}$ et le champ magnétique $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\mathbf{B}$:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial(\epsilon\mathbf{E})}{\partial t} + \mathbf{j}. \quad (4.12)$$

Ici, μ_0 est la permittivité électrique, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et μ_r la perméabilité relative des matériaux qui composent la cuve. En suivant les arguments de [70], les courants de déplacement dans le cadre de l'électrolyse de l'aluminium peuvent être négligé et ainsi $\frac{\partial(\epsilon\mathbf{E})}{\partial t} = 0$. De plus, pour le moment nous ne prenons pas en compte les effets ferromagnétiques ($\mu_r = 1$). Avec ces suppositions, la loi d'Ampère se simplifie comme :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}. \quad (4.13)$$

La troisième équation est la loi d'Ohm qui lie la densité de courant \mathbf{j} , le champ d'induction \mathbf{B} , le champ de vitesse \mathbf{u} et le champ électrique \mathbf{E} par la relation

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}). \quad (4.14)$$

Chapitre 4. Applications à l'électrolyse de l'aluminium

Notons que σ est la conductivité électrique des matériaux qui constituent la cuve. Dans l'équation (4.14), la vitesse \mathbf{u} est donnée par les équations (4.2)-(4.5) dans le domaine fluide Ω et est prolongée par 0 dans $\Lambda \setminus \bar{\Omega}$. Par ailleurs, la loi (4.13) implique l'équation de continuité $\text{div } \mathbf{j} = 0$ pour la densité de courant \mathbf{j} . Notons enfin que la loi de Faraday (4.11) peut être simplifiée. En effet, dans [96], il a été montré numériquement que les variations temporelles du champ d'induction magnétique \mathbf{B} sont faibles et qu'elles n'ont que peu d'impact sur l'écoulement. On obtient alors

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (4.15)$$

Potentiel électrique et densité de courant

Dans ce paragraphe, on suppose qu'en plus du champ de vitesse \mathbf{u} , l'induction magnétique \mathbf{B} est connue pour tout temps t . Par l'équation simplifiée de Faraday (4.15), nous avons l'existence d'un potentiel électrique scalaire V tel que

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

Ainsi la loi d'Ohm (4.14) s'écrit

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla V + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}).$$

En utilisant la relation $\text{div } \mathbf{j} = 0$ et la loi d'Ampère (4.13), on obtient une équation pour V qui est elliptique :

$$-\text{div}(\sigma \nabla V) = -\text{div}(\sigma(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B})) \quad \text{dans } \Lambda. \quad (4.16)$$

On impose à l'équation (4.16) les conditions limites suivantes sur le bord de Λ :

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \frac{I}{|\Gamma_{in}|} = \sigma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}, \quad \text{sur } \Gamma_{in}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \frac{I}{|\Gamma_{out}|} = -\sigma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}, \quad \text{sur } \Gamma_{out}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0 = -\sigma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}, \quad \text{sur } \partial\Lambda \setminus (\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}). \quad (4.19)$$

Ici \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à $\partial\Lambda$, I est l'intensité du courant total fourni et $|\Gamma_{in}|$, $|\Gamma_{out}|$ sont les aires des surfaces d'entrée et de sortie de courant.

Le problème (4.16) avec les conditions (4.17)-(4.19) est une équation elliptique avec des conditions de Neumann sur le bord. C'est donc un problème de la même famille que celui étudié dans la section 3.2 de ce document. Par conséquent, puisque le potentiel est défini à une constante près, il est nécessaire de chercher V dans $H^1(\Lambda) \setminus \mathbb{R}$ pour que le problème soit bien posé. La forme faible s'écrit donc : trouver $V \in H^1(\Lambda) \setminus \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{\Lambda} \sigma \nabla V \cdot \nabla W dx = \int_{\Lambda} \sigma(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \cdot \nabla W dx + \frac{I}{|\Gamma_{in}|} \int_{\Gamma_{in}} W dx - \frac{I}{|\Gamma_{out}|} \int_{\Gamma_{out}} W dx \quad (4.20)$$

4.1. Modélisation des écoulements dans le procédé d'électrolyse de l'aluminium

pour tout $W \in H^1(\Lambda) \setminus \mathbb{R}$. Dès que les fonctions V , \mathbf{u} et \mathbf{B} sont connues, on trouve la densité de courant électrique \mathbf{j} directement par la loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma(-\nabla V + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}). \quad (4.21)$$

Induction

Le champ d'induction magnétique \mathbf{B} dans une cuve d'électrolyse est en général composé d'un champ \mathbf{B}_{hor} correspondant à une interface bain/métal horizontale et d'une perturbation magnétique $\delta\mathbf{B}$ due aux oscillations de l'interface au cours du temps.

En principe, la perturbation magnétique est faible (voir [96]) et nous pouvons supposer dans ce paragraphe que le champ d'induction \mathbf{B} est constant au cours du temps et s'écrit $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{hor}$. Si les effets ferromagnétiques sont négligés ($\mu_r = 1$), la formule de Biot-Savart permet de calculer \mathbf{B}_{hor} pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{B}_{hor}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}_{hor}(y) \wedge \frac{x-y}{|x-y|^3} dy. \quad (4.22)$$

Dans la formule (4.23), \mathbf{j}_{hor} désigne la densité de courant correspondant à une interface bain/métal horizontale. Numériquement, si \mathbf{j}_{hor} est connu, l'intégrale (4.23) est obtenue avec un algorithme parallèle afin de diminuer le temps de calcul.

En pratique, le champ magnétique d'induction \mathbf{B}_{hor} étant indépendant du temps, il s'écrit en fait comme la superposition de plusieurs champs d'induction :

$$\mathbf{B}_{hor}(x) = \mathbf{B}_{int}(x) + \mathbf{B}_{ext}(x) + \mathbf{B}_{fil}(x) + \mathbf{B}_{ferro}(x). \quad (4.23)$$

Ici, \mathbf{B}_{int} est le champ d'induction magnétique induit par les conducteurs de la cuve et \mathbf{B}_{ext} est le champ induit par les éléments extérieurs à la cuve (principalement les cuves voisines). Ces deux champs sont calculés à partir de la formule (4.23). Le champ \mathbf{B}_{fil} est induit par des boucles de courant supplémentaires autour de la cuve afin d'atténuer le champ \mathbf{B}_{int} (voir le paragraphe 1.4). Enfin, lorsque les effets ferromagnétiques sont pris en compte, la cuve est entourée d'un caisson contenant des matériaux ferromagnétiques qui atténue l'action du champ d'induction des cuves voisines par un effet d'écran. Cet effet d'écran, noté \mathbf{B}_{ferro} , peut être calculé en résolvant un problème non-linéaire. Nous n'allons néanmoins pas présenter sa modélisation ni sa résolution numérique. Le lecteur intéressé peut consulter [96].

4.1.5 Résumé

Les équations de la MHD régissant l'électrolyse de l'aluminium ont été présentées et décrire ce phénomène demande un modèle couplant les équations de Navier-Stokes (4.2), les équations de Maxwell (4.11)-(4.14) et le mouvement de l'interface libre (4.9).

Couplage

Le couplage intervient principalement dans le champ de vitesse qui est lié au courant \mathbf{j} par la force \mathbf{f} agissant sur les fluides, qui est la somme de la force de gravité et des forces de Lorentz

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}. \quad (4.24)$$

Le courant \mathbf{j} est par ailleurs lié au champ de vitesse \mathbf{u} par la loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}). \quad (4.25)$$

Lorsque nous ajoutons les effets de l'interface bain/métal dans notre modèle, les mouvements de l'interface implique un changement de topologie du domaine, ce qui a une conséquence sur le champ de vitesse et sur la densité du courant.

La résolution globale du problème MHD est ainsi difficile due aux différentes interactions entre les problèmes. Pour simplifier, nous choisissons dans la suite de ce chapitre de résoudre chaque aspect du problème (hydrodynamique, interface libre, électrique) en connaissant une solution numérique des autres parties et d'actualiser ces variables avec le champ qui vient d'être calculé. Par exemple, pour le calcul du champ de vitesse \mathbf{u} , on suppose connue la densité de courant électrique et la topologie du domaine en admettant que l'interface libre est fixée.

Calcul de l'interface bain/métal stationnaire

Afin de calculer des solutions stationnaires du problème MHD avec interface libre, nous utilisons une méthode de marche temporelle. Soit t_n avec $n \in \mathbb{N}$ une discrétisation de l'intervalle $(0, \infty)$. La méthode évolutive consiste à calculer les inconnues $V, \mathbf{j}, \mathbf{u}, p, \Gamma$ au temps t_{n+1} à partir de leur valeur au temps t_n . On se donne \mathbf{u}^0 un champ de vitesse à divergence nul, Γ^0 une interface initiale et un champ d'induction \mathbf{B} correspondant à une interface bain/métal horizontale. L'algorithme est le suivant :

A) **Initialisation** On pose $\Gamma(0) = \Gamma^0$ et $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0$.

B) **Itérations** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

- la densité de courant $\mathbf{j}(t_{n+1})$ en résolvant le problème du potentiel (4.20) puis en appliquant l'équation (4.21). Chacune de ces variables sont obtenues à partir du champ de vitesse $\mathbf{u}(t_n)$.
- le champ de vitesse $\mathbf{u}(t_{n+1})$ en résolvant les équations de Navier-Stokes (4.2) sur l'intervalle (t_n, t_{n+1}) en utilisant la densité de courant $\mathbf{j}(t_{n+1})$ pour le calcul des forces $\mathbf{f}(t_{n+1} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j}(t_{n+1}) \wedge \mathbf{B}$ agissant sur les fluides.
- l'interface $\Gamma(t_{n+1})$ en résolvant l'équation (4.9) sur l'intervalle (t_n, t_{n+1}) avec $\mathbf{u}(t_{n+1})$ comme champ de vitesse.

4.2 Applications sur une cuve industrielle : approche évolutive

Dans ce paragraphe nous allons déterminer l'écoulement et l'interface bain/métal stationnaire d'une cuve d'électrolyse d'aluminium en utilisant l'approche transitoire présentée dans la section précédente. L'objectif de ce paragraphe est de résoudre les équations hydrodynamiques qui interviennent dans les équations MHD évolutives avec les méthodes de projection introduites dans le chapitre trois. Le but est d'observer la performance de calcul et de précision de ces méthodes par rapport aux méthodes monolithiques utilisées jusqu'à maintenant. À cet effet nous précisons que nous nous concentrons dans ce paragraphe sur la résolution des équations de Stokes afin d'éviter des contraintes trop importantes sur le choix du pas de temps.

4.2.1 Notations

Marche Temporelle

L'approche utilisée dans cette partie pour calculer une solution stationnaire du problème MHD avec interface libre consiste en une méthode évolutive. Afin de construire une discrétisation temporelle, nous choisissons un pas de temps fixé qui sera noté $\Delta t > 0$.

Tout au long de ce paragraphe, nous supposons que la discrétisation temporelle de $(0, \infty)$ est uniforme et ainsi $t_n = n\Delta t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A chaque pas de temps nous allons calculer les valeurs des inconnues au temps t_{n+1} à partir de leur valeur au temps t_n et comme précédemment la position de l'interface au temps t_n se notera Γ^n .

Discrétisation Spatiale

Dans le but de décrire le mouvement de l'interface bain/métal, la discrétisation spatiale en éléments finis du domaine de la cuve d'électrolyse Λ et du domaine fluide Ω doit être compatible avec la position de l'interface au cours du temps. Il est ainsi nécessaire de déformer une partie du maillage proche de l'interface pour qu'il suive la position de cette dernière.

Soit $h > 0$. On introduit \mathcal{U}_h^n une discrétisation de la cuve d'électrolyse Λ . Le nombre total d'éléments est dénoté par K_h^Λ avec $\text{diam}(K_i) < h$ pour tout $i = 1, \dots, K_h^\Lambda$, où $K_i \in \mathcal{U}_h^n$ est un tétraèdre de la discrétisation. On note l'ensemble des sommets de \mathcal{U}_h^n par $S(\mathcal{U}_h^n)$ et le nombre total des nœuds est donné par M_h^Λ . De la même manière, la discrétisation de la partie fluide Ω en tétraèdres est notée \mathcal{T}_h^n , le nombre total d'éléments étant K_h^Ω . On dénote l'ensemble des sommets de \mathcal{T}_h^n par $S(\mathcal{T}_h^n)$ et le nombre total des nœuds est donné par M_h^Ω .

Chapitre 4. Applications à l'électrolyse de l'aluminium

Ainsi défini, les maillages \mathcal{U}_h^n et \mathcal{T}_h^n satisfont les propriétés suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Les maillages \mathcal{U}_h^n et \mathcal{T}_h^n sont conformes signifiant que deux éléments adjacents partagent exactement une face commune.
- Le maillage \mathcal{U}_h^n est un prolongement du maillage \mathcal{T}_h^n , dans le sens où $\mathcal{T}_h^n \subset \mathcal{U}_h^n$ et $S(\mathcal{T}_h^n) \subset S(\mathcal{U}_h^n)$ avec $K_h^\Omega < K_h^\Lambda$.
- Les nœuds de \mathcal{T}_h^n peuvent se déplacer au cours du temps et les nœuds de $S(\mathcal{U}_h^n) \setminus S(\mathcal{T}_h^n)$ (nœuds hors de Ω) restent fixé au cours du temps.
- La structure topologique (liste des sommets, liste des tétraèdres) des maillages \mathcal{U}_h^n et \mathcal{T}_h^n est invariante au cours du temps.
- Le maillage \mathcal{T}_h^n est compatible avec l'interface $\Gamma(t_n)$ dans le sens qu'un élément de \mathcal{T}_h^n est considéré soit entièrement dans le bain électrolytique $\tilde{\Omega}_{el}(t_n)$ soit entièrement dans l'aluminium liquide $\tilde{\Omega}_{al}(t_n)$. Avec ces propriétés, l'interface est approchée par un maillage surfacique \mathcal{S}_h^n composé de faces triangulaires d'éléments de \mathcal{T}_h^n .

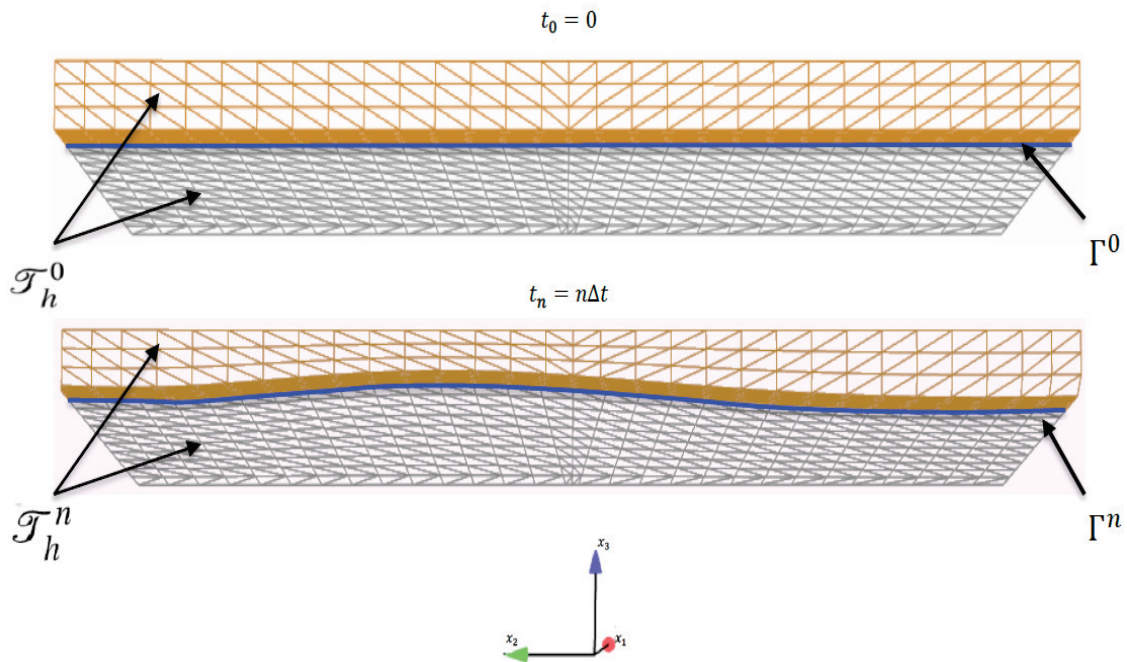


Figure 4.2 – Déformation du maillage \mathcal{T}_h^n au voisinage de l'interface

Dans ce qui suit, nous allons décrire la résolution des différents problèmes présentés dans la section 4.1. On supposera que le champ magnétique d'induction \mathbf{B} est connu pour tout temps t et correspond à une interface bain/métal horizontale.

4.2.2 Calcul du Potentiel électrique

Afin de déterminer la force $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ à chaque pas de temps, nous présentons la méthode utilisée pour calculer la densité de courant \mathbf{j} . À ce propos, nous rappelons la forme faible de la section 4.1.3 qui s'écrit : trouver $V(t_n) := V^n \in H^1(\Lambda) \setminus \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{\Lambda} \sigma \nabla V^n \cdot \nabla W dx = \int_{\Lambda} \sigma (\mathbf{u}^n \wedge \mathbf{B}) \cdot \nabla W dx + \frac{I}{|\Gamma_{in}|} \int_{\Gamma_{in}} W ds - \frac{I}{|\Gamma_{out}|} \int_{\Gamma_{out}} W ds \quad (4.26)$$

pour tout $W \in H^1(\Lambda) \setminus \mathbb{R}$, où Γ_{in} et Γ_{out} sont les surfaces d'entrée et de sortie du courant. En notant P_{po} un point fixé de $S(\mathcal{U}_h^n)$, on introduit l'espace élément-fini :

$$\mathcal{L}_h^n = \{W \in C^0(\Lambda) : W|_{K_j} \in \mathbb{P}^1(K), K_j \in \mathcal{U}_h^n, \quad \forall j = 1, \dots, K_h^\Lambda\}. \quad (4.27)$$

Le problème discret issu de (4.26) s'écrit alors : trouver $V_h^{n+1} \in \mathcal{L}_h^n$ tel que

$$\int_{\Lambda} \sigma \nabla V_h^{n+1} \cdot \nabla W_h dx = \int_{\Lambda} \sigma (\mathbf{u}_h^n \times \mathbf{B}_h) \cdot \nabla W_h dx + \frac{I}{|\Gamma_{in}|} \int_{\Gamma_{in}} W_h dx - \frac{I}{|\Gamma_{out}|} \int_{\Gamma_{out}} W_h dx \quad (4.28)$$

pour tout $W_h \in \mathcal{L}_h^n$. En utilisant une base de Lagrange de l'espace (4.27), le problème (4.28) peut être réécrit sous forme de système d'équations linéaires de façon semblable à ce qui a déjà été fait dans la section 3.2. Nous résolvons ce système avec la méthode du gradient conjugué et fixons la constante avec la méthode \mathcal{N} . En connaissant le potentiel électrique V_h^{n+1} , on peut déterminer ensuite le courant \mathbf{j}_h^{n+1} et la force \mathbf{f}_h^{n+1} par les relations :

$$\mathbf{j}_h^{n+1} = \sigma (-\nabla V_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n \times \mathbf{B}_h), \quad \mathbf{f}_h^{n+1} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j}_h^{n+1} \times \mathbf{B}_h; \quad (4.29)$$

4.2.3 Détermination du champ de vitesse avec les équations de Stokes

Dans ce paragraphe nous allons résoudre les équations de Stokes pour déterminer la vitesse \mathbf{u} et la pression p , connaissant les domaines Ω_{el} et Ω_{al} , l'interface Γ et la force \mathbf{f} . Si \mathbf{u}_0 est une fonction connue qui vérifie $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ et $\text{div } \mathbf{u}_0 = 0$, le problème de Stokes s'écrit : trouver $\mathbf{u} : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $p : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \text{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)) = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad \text{dans } (0, \infty) \times \Omega_{el} \cup \Omega_{al}, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } (0, \infty) \times \Omega_{el} \cup \Omega_{al}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma, \\ [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}_\Gamma] = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

Ici nous rappelons que $[\cdot]$ est l'opérateur de saut au travers de l'interface Γ , $\mathbf{n}_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ la normale unitaire sur Γ qui pointe en direction de Ω_{el} et que le tenseur $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)$ est donné par $\tau_{ij}(\mathbf{u}, p) = -p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{u})$, $i, j = 1, 2, 3$.

Méthode Monolithique

Nous présentons dans cette section la résolution du problème (4.30) par la méthode monolithique. En utilisant les conditions de bord et d'interface et en intégrant par partie respectivement sur Ω_{el} et Ω_{al} , la formulation faible du problème de Stokes (4.30) s'écrit : trouver $\mathbf{u}(t) \in H_0^1(\Omega)$ et $p(t) \in L_0^2(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} 2\tau(\mathbf{u}(t), p(t)) : \varepsilon(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dx, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}(t) dx = 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$ et $q \in L_0^2(\Omega)$. Pour augmenter la précision de la résolution, nous allons utiliser le résultat démontré dans [40] (Théorème de Helmholtz), qui dit que tout champ de force peut être décomposé en une partie rotationnelle (qui engendre le mouvement des fluides) et une partie gradient (qui influe uniquement sur la pression). Plus précisément, si $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^3$ est un champ de force, alors il existe $\Theta \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$ et $\varpi \in [H^1(\Omega)]^3$ telles que

$$\mathbf{f} = \operatorname{rot} \varpi + \nabla \Theta \quad (4.32)$$

où ϖ vérifie $\operatorname{div} \varpi = 0$ et Θ est l'unique solution du problème : trouver $\Theta \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{\Omega} \nabla \Theta \cdot \nabla Y dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla Y dx \quad (4.33)$$

pour tout $Y \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$. Lors de la résolution des équations de Stokes, l'idée est d'ôter la partie gradient de la force $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ et de garder seulement la partie rotationnelle qui met les fluides en mouvement.

Si P_{pr} est un point fixé de $S(\mathcal{T}_h^n)$ dans Ω , nous définissons les espaces

$$\mathcal{V}_h^n = \{\mathbf{v} \in (C^0(\Omega))^3 : \mathbf{v}|_{K_i} \in (\mathbb{P}^1(K_i) \oplus B_{K_i})^3, K_i \in \mathcal{T}_h^n, \forall i = 1, \dots, K_h^\Omega, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

et

$$\mathcal{Q}_h^n = \{q \in C^0(\Omega) : q|_{K_i} \in \mathbb{P}^1(K_i), K_i \in \mathcal{T}_h^n, \forall i = 1, \dots, K_h^\Omega \text{ et } q(P_{pr}) = 0\}.$$

Ainsi, pour chaque temps t_n , nous pouvons calculer le champ

$$\mathbf{F}_h^{n+1} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j}_h^{n+1} \wedge \mathbf{B}_h - \nabla \Theta_h^{n+1}$$

en trouvant l'approximation $\Theta_h^{n+1} \in \mathcal{Q}_h^n$ qui vérifie

$$\int_{\Omega^n} \nabla \Theta_h^{n+1} \cdot \nabla Y_h dx = \int_{\Omega^n} (\rho \mathbf{g} + \mathbf{j}_h^{n+1} \wedge \mathbf{B}_h) \cdot \nabla Y_h dx \quad (4.34)$$

pour tout $Y_h \in \mathcal{Q}_h^n$. A partir de cette force, en discrétisant l'équation (4.30) par une méthode d'Euler implicite en temps et par une méthode d'éléments-finis sur l'espace \mathcal{V}_h^n , l'approximation numérique du problème de Stokes (4.31) s'écrit :

trouver $\mathbf{u}_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h^n$ et $\tilde{p}_h^{n+1} \in \mathcal{Q}_h^n$ tels que

$$\begin{cases} \rho \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_h dx + \int_{\Omega} 2\tau(\mathbf{u}_h^{n+1}, \tilde{p}_h^{n+1}) : \varepsilon(\mathbf{v}_h) dx = \int_{\Omega} \mathbf{F}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h dx, \\ \int_{\Omega} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1} dx = 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^n$ et $q_h \in \mathcal{Q}_h^n$. Notons que la pression \tilde{p}_h^{n+1} obtenue ne correspond pas à la véritable pression p_h^{n+1} mais ces deux variables sont liées par la relation

$$p_h^{n+1} = \tilde{p}_h^{n+1} + \Theta_h^{n+1} + Cste. \quad (4.36)$$

Le système linéaire issu du problème (4.35) est résolu par la méthode GMRES et le préconditionneur ILU(2).

Méthodes de projection

Nous décrivons ici la résolution du problème de Stokes (4.31) par les méthodes de projection présentées dans la section 3.1. En discrétisant temporellement le problème (4.31) par une méthode d'Euler implicite, l'algorithme 3.1.4 décrit dans le paragraphe 3.1.3 se réécrit au temps t_n dans le cadre présent de la manière suivante :

Problème 4.2.1. (Chorin-Temam MHD)

Soit $\eta \in [0, 1]$ ainsi que \mathbf{u}^n, Φ^n et p^n, \mathbf{j}^{n+1} des fonctions connues avec \mathbf{u}^n nulle sur $\partial\Omega$:
trouver $(\mathbf{u}^{n+1}, \Phi^{n+1}, p^{n+1})$ tels que

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right) - \operatorname{div} (2\mu\varepsilon(\mathbf{u}^{n+1})) + \nabla(\eta p^n + \rho\Phi^n) = \rho\mathbf{g} + \mathbf{j}^{n+1} \wedge \mathbf{B} & \text{dans } \Omega_{el} \cup \Omega_{al}; \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega; \\ [\mathbf{u}^{n+1}] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma; \\ [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1}, p^n)\mathbf{n}_{\Gamma}] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} \Delta\Phi^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial\Phi^{n+1}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega; \end{cases} \quad (4.38)$$

et

$$p^{n+1} = \eta p^n + \rho\Phi^{n+1}. \quad (4.39)$$

Chapitre 4. Applications à l'électrolyse de l'aluminium

En suivant une approche éléments finis classique, la discrétisation en éléments-finis des problèmes (4.37), (4.38) et (4.39) est effectuée en choisissant les espaces de dimension finie suivants :

$$\mathcal{P}_h^n = \{\mathbf{v} \in (C^0(\bar{\Omega}))^d : \mathbf{v}|_{K_i} \in \mathbb{P}(K_i)^d, \forall K_i \in \mathcal{T}_h^n, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}, \quad (4.40)$$

$$\mathcal{Y}_h^n = \{q \in C^0(\bar{\Omega}) : q|_{K_i} \in \mathbb{P}^1(K_i) \quad \forall K_i \in \mathcal{T}_h^n\}, \quad (4.41)$$

ou nous rappelons que l'espace $\mathbb{P}(K_i)$ est défini par

$$\mathbb{P}(K_i) = \begin{cases} \mathbb{P}_1(K_i) & \text{si } \eta = 0, \\ \mathbb{P}_1(K_i) \oplus B_{K_i} & \text{si } \eta > 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

avec $\mathbb{P}_1(K_i)$ l'ensemble des polynômes de degré 1 sur K_i et B_{K_i} la fonction bulle (2.45) sur le tétraèdre K_i . Étant donné une approximation de la vitesse et de la pression au temps t_n , si on a $\mathbf{u}_h^n \in \mathcal{P}_h^n$, $\Phi_h^n \in \mathcal{Y}_h^n \setminus \mathbb{R}$ et $p_h^n \in \mathcal{Y}_h^n$, la discrétisation spatiale du problème 4.2.1 s'écrit : trouver $\mathbf{u}_h^{n+1} \in \mathcal{P}_h^n$, $\Phi_h^{n+1} \in \mathcal{Y}_h^n \setminus \mathbb{R}$ et $p_h^{n+1} \in \mathcal{Y}_h^n$ tels que

$$\frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \mathbf{v}_h dx + \int_{\Omega} \mu \varepsilon(\mathbf{u}_h^{n+1}) : \varepsilon(\mathbf{v}_h) dx - \int_{\Omega} (\eta p_h^n + \rho \Phi_h^n) \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{g} + \mathbf{j}_h^{n+1} \wedge \mathbf{B}_h) \cdot \mathbf{v}_h dx \quad (4.43)$$

pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathcal{P}_h^n$,

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi_h^{n+1} \cdot \nabla \varphi_h dx = \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \varphi_h dx \quad (4.44)$$

pour tout $\varphi_h \in \mathcal{Q}_h^n \setminus \mathbb{R}$ et

$$\int_{\Omega} p_h^{n+1} q_h dx = \int_{\Omega} (\eta p_h^n + \rho \Phi_h^{n+1}) q_h dx, \quad (4.45)$$

pour tout $q_h \in \mathcal{Q}_h^n$.

La résolution des systèmes linéaires issus des problèmes (4.43) et (4.45) s'effectue avec la méthode du gradient conjugué et le préconditionneur diagonal. Le problème (4.44) se résout avec la méthode du gradient conjugué et le préconditionneur ILU(0). La constante de la solution Φ_h^{n+1} est fixée en utilisant l'option \mathcal{N} qui supprime le noyau de la matrice de Galerkin issu du problème (4.44) (voir la section 3.2).

Remarque 4.2.2. Lors de la résolution des équations de Stokes par des méthodes numériques, \mathbf{u}_h^n et \mathbf{u}_h^{n+1} ne sont pas calculés sur la même grille puisque le maillage est déformé entre deux itérations temporelles. En principe on pourrait utiliser une méthode de type ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), voir par exemple [75] pour une utilisation de cette méthode dans un cadre simplifié.

4.2.4 Détermination de l'interface

Nous avons vu dans le paragraphe 4.1.3 que la connaissance du champ de vitesse permet de déterminer l'interface par le problème de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0, & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega, \\ \varphi(0, x) = \varphi_0(x) & \forall x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.46)$$

où la condition initiale φ_0 du problème (4.9) est donnée. La forme faible du problème (4.46) s'écrit : pour presque tout $t \in (0, \infty)$, trouver φ telle que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi \psi dx + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \psi dx = 0, \text{ pour tout } \psi. \quad (4.47)$$

On discrétise temporellement le problème (4.47) par une méthode d'Euler implicite. Pour la discrétisation en espace, on définit de plus l'espace d'éléments-finis

$$\mathcal{O}_h^n = \{W \in C^0(\Lambda) : W|_{K_j} \in \mathbb{P}^1(K), K_j \in \mathcal{T}_h^n, \forall j = 1, \dots, K_h^\Omega\}.$$

En stabilisant le problème par une méthode de type SUPG [11, 36], la discrétisation de (4.47) s'écrit : trouver $\varphi_h \in \mathcal{O}_h^n$ telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^n}{\Delta t} \psi_h dx &+ \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \varphi_h^{n+1}) \psi_h dx \\ &+ \sum_{j=1}^{M_h^\Omega} \frac{\beta h_{K_j}}{2 \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2(K_j)}} \int_{K_j} (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \varphi_h^{n+1}) (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \psi_h) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ici $\beta > 0$ est un paramètre de stabilisation et φ_h^{n+1} s'obtient à partir du champ φ_h^n qui est connu. Le problème (4.48) est résolu avec la méthode GMRES et le préconditionneur ILU(0).

L'interface Γ_h^n s'obtient ensuite implicitement à partir de φ_h^{n+1} par la surface de niveau

$$\Gamma_h^{n+1} = \{x \in \Omega | \varphi_h^{n+1}(x) = 0\}.$$

Cependant, la recherche des zéros de φ_h^{n+1} est un problème mal-conditionné si $\|\nabla \varphi_h^{n+1}\|$ est proche de zéro, car dans ce cas de petites variations sur φ_h^{n+1} induisent de grandes variations sur la 0-surface de niveau de φ . Afin de remédier à ce problème, on reconstruit φ_h^{n+1} comme distance signée à l'interface à chaque pas de temps, selon la description donnée dans [96]. La détermination des zéros de la distance signée permet ensuite de construire le maillage fluide \mathcal{T}_h^{n+1} à partir de \mathcal{T}_h^n en déplaçant les nœuds de l'interface en suivant des trajectoires prédéterminées, ce qui permet de définir ensuite le nouveau maillage de la cuve \mathcal{U}_h^{n+1} ainsi que la surface de l'interface Γ_h^{n+1} .

Lissage de l'interface

La détermination de la fonction φ_h^{n+1} permet d'obtenir l'interface Γ_h^{n+1} . Cependant, durant l'évolution de l'interface dans le temps, des pics et des creux non physiques peuvent apparaître sur la surface Γ_h^{n+1} (voir la figure 4.3), ce qui peut provoquer de fortes perturbations de la distribution du courant électrique, qui sera surestimé au voisinage des pics et sous-estimé au voisinage des creux. Nous utilisons une technique de lissage introduite dans [96] qui permet d'éviter ces problèmes.

Nous rappelons que l'interface Γ_h^{n+1} est approchée par un maillage surfacique \mathcal{S}_h^{n+1} composé de faces triangulaires d'éléments de \mathcal{T}_h^{n+1} et composé de $N_\Gamma := N_h^\Gamma$ nœuds. Soit $x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}$, $k = 1, \dots, N_\Gamma$ les sommets du maillage \mathcal{S}_h^{n+1} situés sur l'interface Γ_h^{n+1} . L'idée est de construire à partir de Γ_h^{n+1} une surface lisse :

$$S^{m_1, m_2} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = g_h^{m_1, m_2}(x_1, x_2)\}.$$

avec

- $g_h^{m_1, m_2}$ est un polynôme de degré m_1 dans la direction x_1 et de degré m_2 dans la direction x_2 ;
- Ce polynôme minimise la distance à Γ_h^{n+1} au sens ou

$$g_h^{m_1, m_2} = \operatorname{argmin}_{g \in \mathbb{Q}_{m_1, m_2}(\mathbb{R}^2)} \sum_{k=1}^{N_\Gamma} ((x_{3,k} - g(x_{1,k}, x_{2,k}))^2$$

avec

$$\mathbb{Q}_{m_1, m_2}(\mathbb{R}^2) = \operatorname{span} \left\{ x_1^i x_2^j \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq i \leq m_1, \quad 0 \leq j \leq m_2, \quad i, j \in \mathbb{N} \right\}.$$

En pratique, on choisit pour base p_{ij} de $\mathbb{Q}_{m_1, m_2}(\mathbb{R}^2)$ des polynômes orthogonaux construit par tensorisation de polynômes de Jacobi 1D (voir [96]). La détermination de la surface lisse S^{m_1, m_2} se fait en résolvant un système linéaire qui est bien conditionné pour autant que $m_1 m_2$ reste petit par rapport à N_Γ . Cette étape de lissage est effectuée à chaque pas de temps de l'algorithme évolutif.

Dans nos simulations, nous utiliserons un lissage composé de polynômes de Legendre avec $m_1 = 10$ et $m_2 = 8$. L'effet du lissage sur les résultats numériques sera présenté à la fin du document.

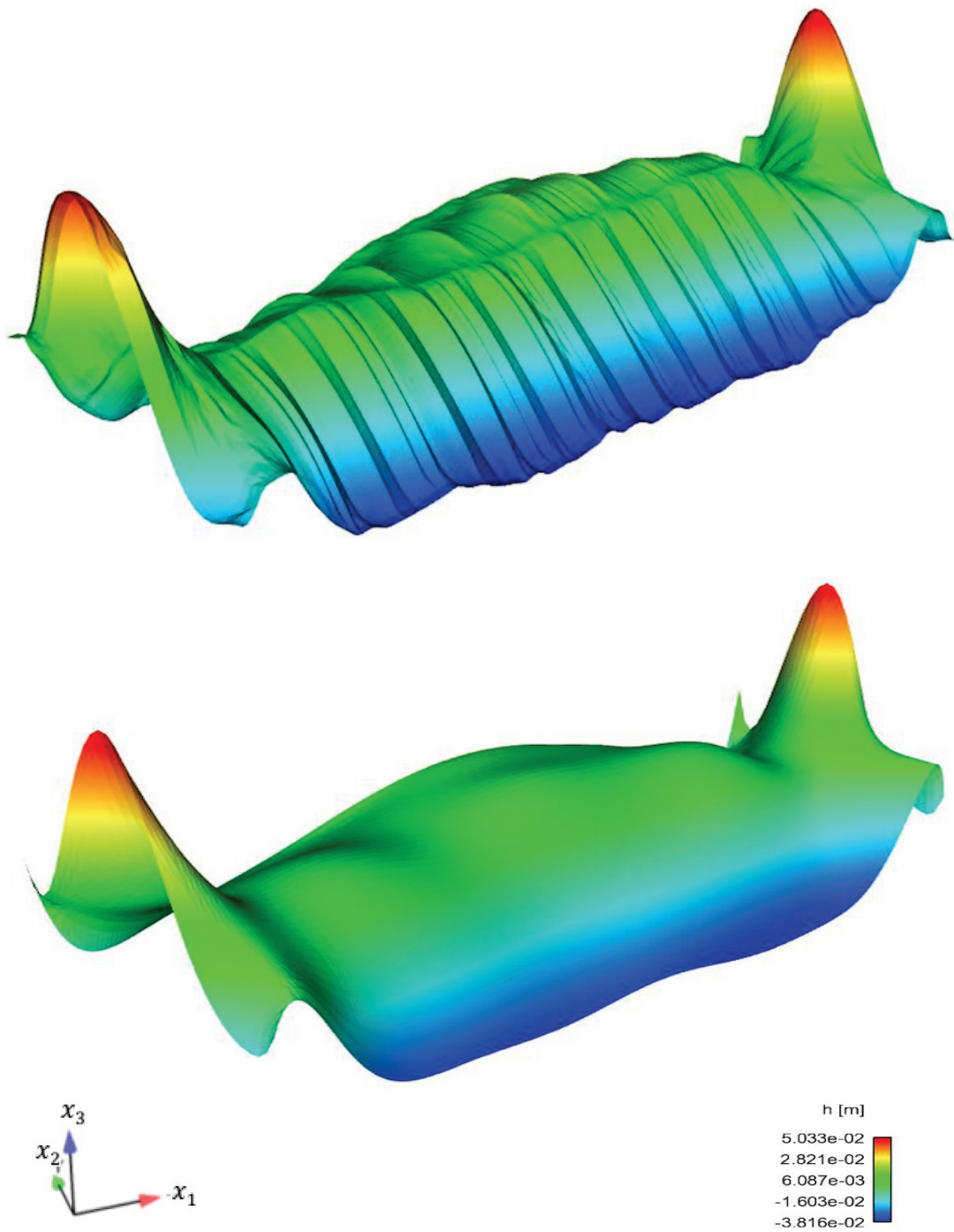


Figure 4.3 – haut : une interface non-lissée, bas : la même interface mais lissée avec des polynômes de Legendre de degrés $m_1 = 10$ et $m_2 = 8$.

4.2.5 Résultats numérique sur une cuve industrielle simplifiée

Dans ce paragraphe nous présentons la modélisation d'un écoulement fluide et de l'interface dans une cuve d'électrolyse industrielle simplifiée avec les différentes méthodes de résolution des équations de Stokes. Le but est de calculer des solutions stationnaires en utilisant l'approche évolutive que nous venons de décrire.

La cuve considérée est constituée de vingt anodes et mesure 14 mètres de longueur et 3 mètres de largeur. L'épaisseur de l'aluminium liquide est de 20 centimètres et celle du bain est de 3 centimètres. Sur la figure 4.4 est représenté un exemple de maillage de la cuve et de la partie fluide.

Nous supposons que le champ d'induction \mathbf{B} est connu et qu'il correspond à une interface bain/métal horizontale. Nous faisons également l'hypothèse que \mathbf{B} est la superposition des champs d'induction \mathbf{B}_{int} , \mathbf{B}_{ext} , \mathbf{B}_{fil} et \mathbf{B}_{ferro} qui sont différents champs d'induction générés par la cuve et par les cuves voisines. Nous prenons un courant total à travers la cuve de $I = 320[kA]$.

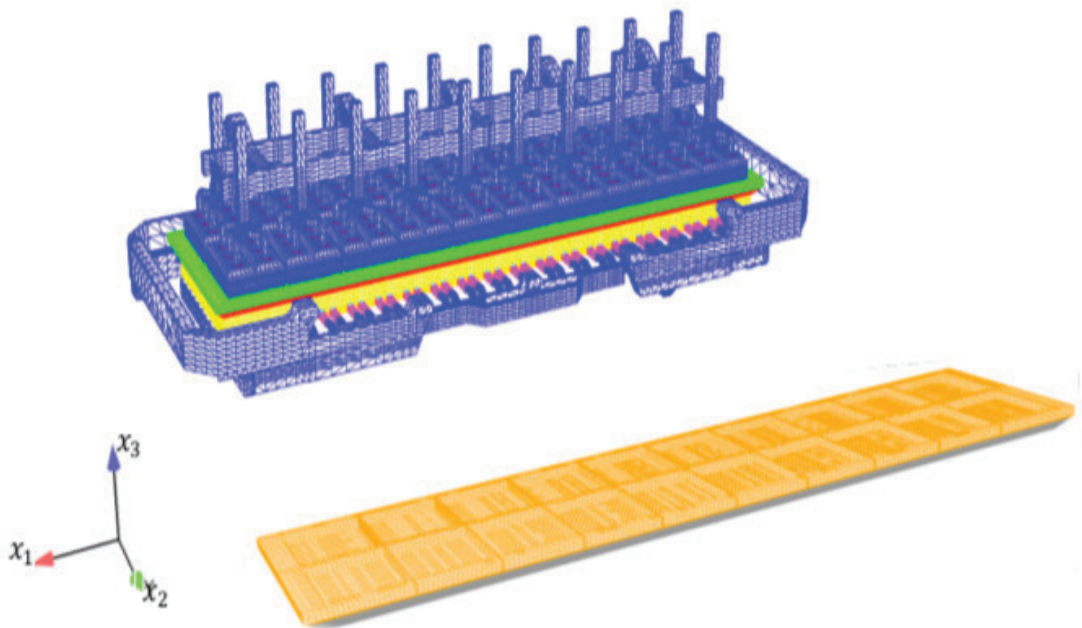


Figure 4.4 – Cuve industrielle simplifiée

4.2. Applications sur une cuve industrielle : approche évolutive

Pour chaque pas de temps, nous résolvons successivement les problèmes du potentiel (4.28), le problème fluide (4.30) et l'interface (4.48). Le maillage est ensuite déformé de façon à ce qu'il soit conforme à la nouvelle position de l'interface et les champs sont interpolés sur le nouveau maillage en utilisant la procédure dans [96].

Pour la résolution du problème de Stokes (4.30), nous choisissons une viscosité de Smagorinsky :

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = \mu_L + \zeta_{turb} \rho l^2 |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|. \quad (4.49)$$

Notons que puisque l'équation (4.30) est évolutive, nous prenons la viscosité (4.49) au temps précédent. Ceci évite de devoir résoudre une non-linéarité similaire au paragraphe 2.3 . Nous prenons ici $l := 0.1$ comme longueur caractéristique de la cuve et $\zeta_{turb} = 5e^{-2}$ comme paramètre numérique.

La résolution de l'équation de Stokes (4.30) par la méthode monolithique (4.35) avec un pas de temps Δt sera noté $MONO_{\Delta t}$. La résolution de (4.30) par la méthode de projection 4.2.1 avec un pas de temps Δt et un paramètre d'incrémentation η sera notée $PROJ_{\Delta t, \eta}$. L'ensemble des problèmes (potentiel, stokes, interface) sont résolus sur l'intervalle de temps $[0, T]$, avec $T = 400[s]$.

Les tables 4.1, 4.2 et les figures 4.5 et 4.6 contiennent des résultats numériques correspondant aux différents écoulements et interfaces stationnaires obtenus par l'approche évolutive. Nous observons avec la table 4.1 que l'utilisation de la méthode de projection permet de gagner environ 40 % du temps de calculs par rapport à la méthode monolithique.

	$PROJ_{0.2,0}$	$MONO_{0.2}$
Potentiel (4.28)	33 [s]	33 [s]
Stokes	98 [s]	220 [s]
Level Set (4.48)	8 [s]	8[s]
h + Interpolation	15 [s]	15 [s]
Autres	6 [s]	6[s]
Total	160 [s]	282 [s]

Table 4.1 – Répartition du temps de résolution CPU[s] moyen pour les différentes problèmes intervenant dans l'approche évolutive. Comparaison entre la méthode monolithique et la méthode de projection, avec $\Delta t = 0.2$, $T = 400$, $\zeta_{turb} = 0.05$.

Chapitre 4. Applications à l'électrolyse de l'aluminium

Soit a une des méthodes de résolution ($PROJ_{\Delta t, \eta}$, $MONO_{\Delta t}$) et b est une méthode distincte de a . Soit \mathbf{u}^i le champ de vitesse obtenu de la méthode i , où $i = a$ ou b . Soit \mathfrak{h}^a et \mathfrak{h}^b les fonctions définissant les interfaces stationnaires Γ^a et Γ^b selon la paramétrisation $\Gamma = \{x \in \Omega : x_3 = \mathfrak{h}(x_1, x_2)\}$. Afin de comparer les solutions stationnaires, on utilise les estimateurs suivants :

$$ECU = \frac{\|\mathbf{u}^a - \mathbf{u}^b\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}^a\|_{L^2}}, \quad ECI = \frac{\|\mathfrak{h}^a - \mathfrak{h}^b\|_{L^\infty}}{\|\mathfrak{h}^a\|_{L^\infty}}$$

qui permettent de comparer les écoulements et les interfaces stationnaires dans la table 4.2.

	PROJ _{0.2,0} vs. MONO ₀₁	PROJ _{0.2,0} vs. MONO ₀₂	MONO ₀₁ vs. MONO ₀₂
<i>ECU</i> (en %)	25.2	21.4	13.3
<i>ECI</i> (en %)	57.6	42.3	19.5

Table 4.2 – Écarts en norme L^2 sur les vitesses et en norme L^∞ sur l'interface

Notons que la méthode monolithique a été testée avec les pas de temps $\Delta t = 0.1$ et $\Delta t = 0.2$. La méthode de projection n'a cependant pas convergé vers une solution stationnaire pour $\Delta t = 0.1$. Ainsi, les figures 4.5 et 4.6 montrent des écoulements et des interfaces obtenus par la méthode monolithique avec les pas de temps $\Delta t = 0.1$ et $\Delta t = 0.2$ et par la méthode de projection avec le pas de temps $\Delta t = 0.2$.

Les écoulements sont assez similaires mais les interfaces sont localement différentes, majoritairement sur la partie centrale.

Par ailleurs, nous observons que l'interface est sensible au pas de temps. En effet, les interfaces correspondant à la méthode monolithique avec les pas de temps $\Delta t = 0.1$ et $\Delta t = 0.2$ ont des écarts de l'ordre de 20% localement.

4.2. Applications sur une cuve industrielle : approche évolutive

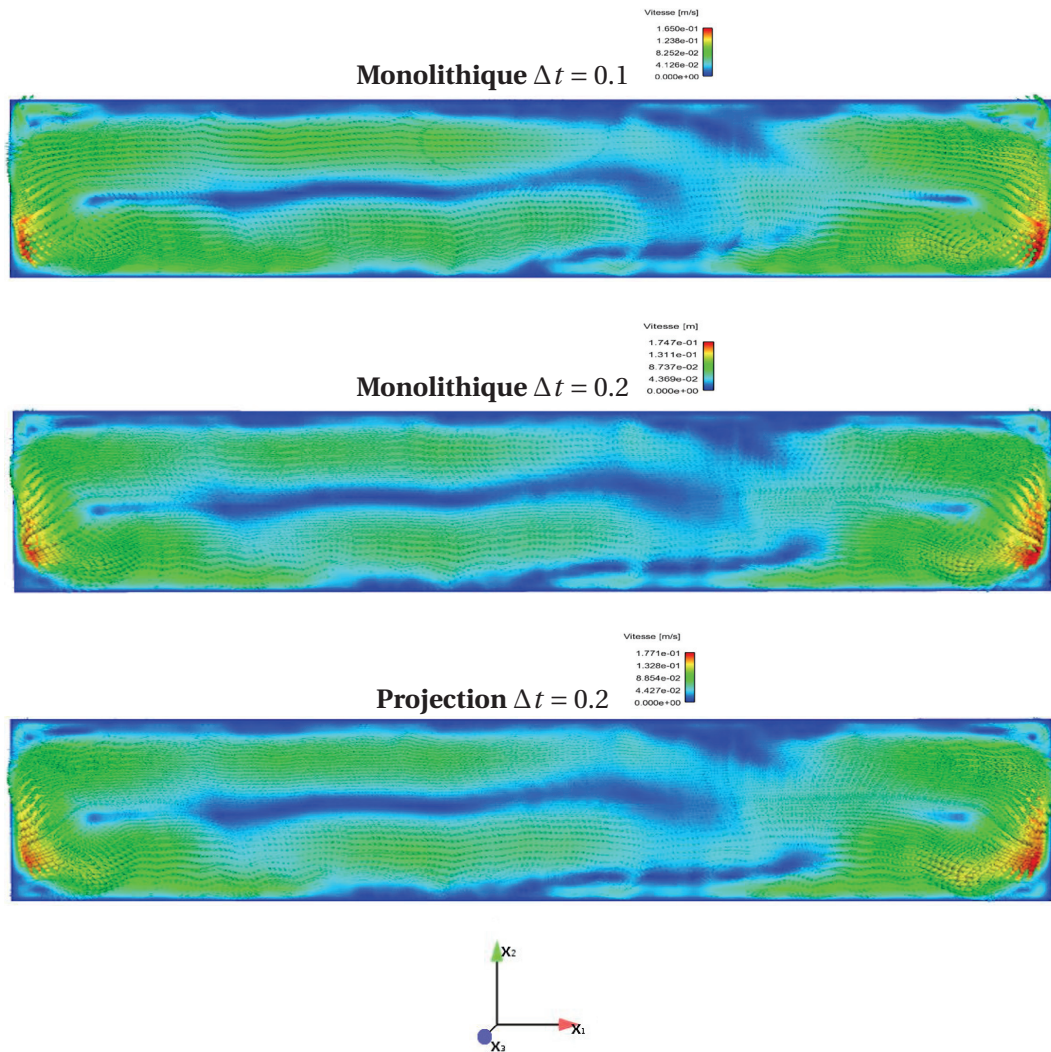


Figure 4.5 – Écoulements asymptotiquement stationnaires obtenus par l’algorithme évolutif avec différentes méthodes et différents pas de temps. Nous avons utilisé la viscosité de Smagorinsky avec $l=0.1$ et $\zeta_{turb} = 0.05$. Nous avons fixé $T = 400$.

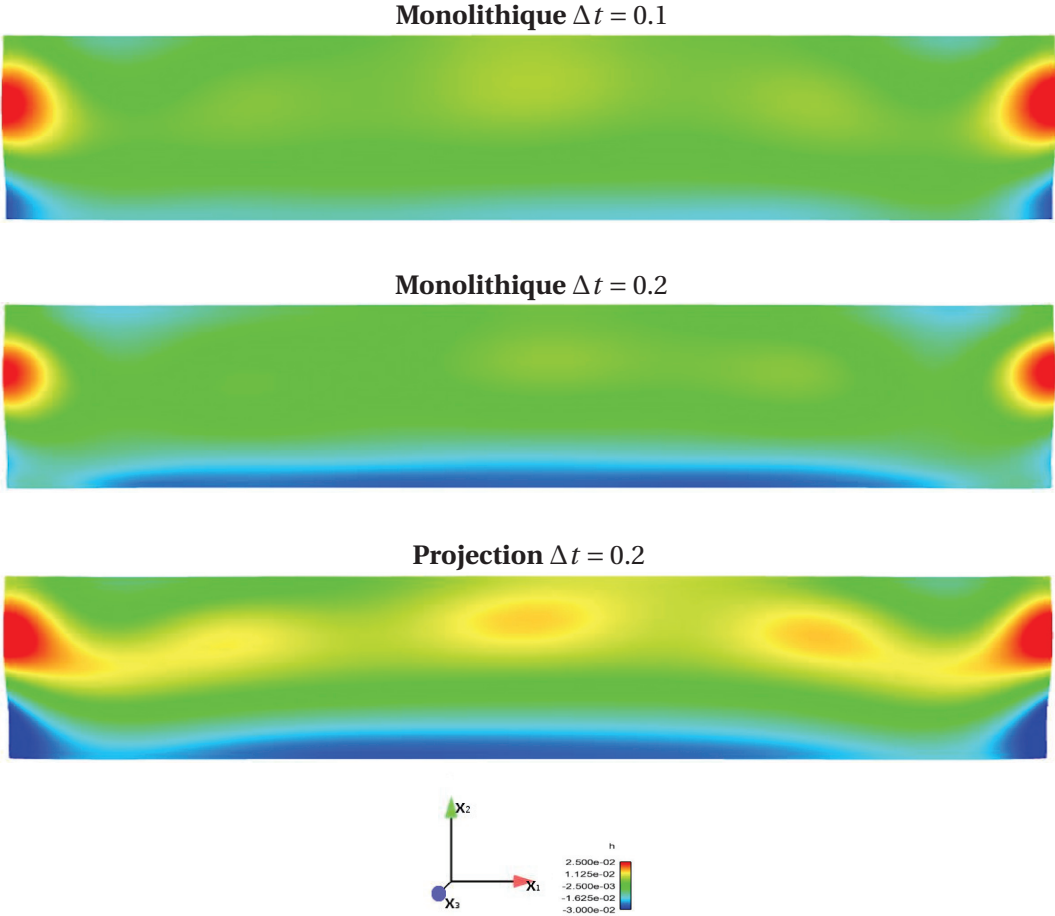


Figure 4.6 – Interfaces asymptotiquement stationnaires obtenues par l'approche évolutive avec différentes méthodes et différents pas de temps. Nous avons utilisé la viscosité de Smagorinsky avec $l=0.1$ et $\zeta_{turb} = 0.05$. Nous avons fixé $T = 400$.

4.3 Applications sur une cuve industrielle : approche stationnaire

Dans ce paragraphe, nous présentons la modélisation d'un écoulement fluide stationnaire dont l'algorithme est basé sur [27] dans une cuve d'électrolyse industrielle simplifiée, en utilisant pour la résolution du problème fluide stationnaire différents modèles de longueur de mélange présentés dans la première partie de ce document. Au contraire du paragraphe précédent, cette approche nécessite de résoudre seulement des problèmes stationnaires.

4.3.1 Modélisation du Problème MHD Stationnaire

Nous allons écrire une version stationnaire des équations de la magnétohydrodynamique présentée dans la partie 4.1 pour le potentiel, la vitesse et l'interface. Afin de ne pas surcharger le présent document avec trop de notations différentes, nous écrirons dans ce qui suit les variables qui ne dépendent pas du temps par $\mathbf{u} := \mathbf{u}(x)$, $V := V(x)$, $h := h(x_1, x_2)$, $p := p(x)$, $\mathbf{j} := \mathbf{j}(x)$. Commençons par quelques remarques.

Remarque 4.3.1. *Supposons que l'interface $\Gamma(t)$ est paramétrée par l'équation $x_3 = h(x_1, x_2, t)$ avec $h : \Pi \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ étant une fonction régulière. La fonction level set φ correspondante est donnée par*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = x_3 - h(x_1, x_2, t), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad \text{et } t \geq 0.$$

Ainsi l'équation de transport correspondant à φ peut être écrite comme

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla (x_3 - h) = 0.$$

Si l'interface est stationnaire, cela signifie que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0. \tag{4.50}$$

Cette équation devient alors

$$\mathbf{u} \cdot \nabla (x_3 - h) = 0.$$

Remarque 4.3.2. *On supposera que le champ d'induction \mathbf{B} est connu et qu'il correspond à un champ magnétique issu d'une interface bain/métal horizontale.*

Problème Stationnaire MHD

En considérant les précédentes remarques, le problème stationnaire associé aux équations évolutives du paragraphe 4.1 s'écrit : trouver la vitesse $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, la pression $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $h : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, le potentiel électrique $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et la densité de courant $\mathbf{j} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ indépendants du temps et qui vérifient

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \rho\mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad \text{dans } \Omega_{el} \cup \Omega_{al}; \quad (4.51)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{el} \cup \Omega_{al}; \quad (4.52)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla(x_3 - h) = 0 \quad \text{dans } \Omega; \quad (4.53)$$

$$\Omega_{el} = \{x \in \Omega \mid x_3 > h(x_1, x_2)\}, \quad \Omega_{al} = \{x \in \Omega \mid x_3 < h(x_1, x_2)\}; \quad (4.54)$$

$$-\operatorname{div}(\sigma \nabla V) = -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B})) \quad \text{dans } \Lambda; \quad (4.55)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(-\nabla V + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad \text{dans } \Lambda, \quad (4.56)$$

avec les conditions d'interface et de bord suivantes pour le problème hydrodynamique

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega; \quad (4.57)$$

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma; \quad (4.58)$$

$$[\mathbf{n}_\Gamma^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{t}_\Gamma] = 0 \quad \text{sur } \Gamma; \quad (4.59)$$

$$[\mathbf{n}_\Gamma^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}_\Gamma] = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (4.60)$$

et les conditions limites et d'interfaces suivantes pour le problème du courant électrique

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = -\frac{I}{|\Gamma_{in}|} \quad \text{sur } \Gamma_{in}; \quad (4.61)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = -\frac{I}{|\Gamma_{out}|} \quad \text{sur } \Gamma_{out}; \quad (4.62)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma \setminus \overline{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}}; \quad (4.63)$$

$$[V] = 0, \quad \left[\sigma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right] = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4.64)$$

Notons que la relation (4.60) impose l'équilibre stationnaire. De plus, la relation (4.53) assure l'immiscibilité entre les deux fluides. En effet, la fonction $h(x_1, x_2)$ est en particulier une surface de niveau de la fonction $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_3 - h(x_1, x_2)$. Le gradient de φ est alors perpendiculaire à h et donc la normale \mathbf{n}_Γ à l'interface Γ peut s'écrire

$$\mathbf{n}_\Gamma = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} = \frac{\nabla(x_3 - h(x_1, x_2))}{|\nabla(x_3 - h(x_1, x_2))|} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0.$$

Problème Stationnaire HD

Afin de résoudre le problème stationnaire (4.51)-(4.64), nous allons suivre l'algorithme décrit dans [27] que nous présentons ici de manière la plus concise possible. Soit $r \in \mathbb{N}$ un paramètre d'itération. L'idée est de calculer des suites de fonctions $\mathbf{u}^r, p^r, \mathfrak{h}^r, V^r, \mathbf{j}^r$ qui convergent vers les solutions stationnaires $\mathbf{u}, p, \mathfrak{h}, V$ et \mathbf{j} du problème (4.51)-(4.64) pour r suffisamment grand. Supposons que les domaines Ω_{el}^r et Ω_{al}^r soient connus. Supposons aussi que la fonction $\mathfrak{h}^r : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée ce qui permet de déterminer la position de l'interface à l'itération r :

$$\Gamma^r = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = \mathfrak{h}^r(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Pi\}.$$

Supposons enfin que V^r, \mathbf{j}^r et donc \mathbf{f}^{r+1} soient donnés. On s'intéresse alors au problème hydrodynamique : trouver $(\mathbf{u}^{r+1}, p^{r+1})$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{r+1}, p^{r+1})) + \rho(\mathbf{u}^{r+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{r+1} = \mathbf{f}^{r+1} & \text{dans } \Omega_{el}^r \cup \Omega_{al}^r; \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{r+1} = 0 & \text{dans } \Omega; \\ \mathbf{u}^{r+1} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega; \\ [\mathbf{u}^{r+1}] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma^r; \\ \mathbf{u}^{r+1} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^r} = 0 & \text{sur } \Gamma^r; \\ [\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{t}_{\Gamma^r}] = 0 & \text{sur } \Gamma^r. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Ici \mathbf{n}_{Γ^r} est la normale à l'interface Γ^r qui pointe en direction de Ω_{el}^r et $(\mathbf{t}_{\Gamma^r})_{i=1,2}$ sont les deux tangentes à Γ^r . Notons de plus que $\boldsymbol{\tau}^r := \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^r, p^r)$. La différence entre ce problème et la résolution hydrodynamique du problème stationnaire MHD (4.51)-(4.64) est que dans (4.65) la continuité des tractions normales (4.60) à l'interface est relaxée. La résolution répétée du problème (4.65) est le point de base de l'algorithme stationnaire présenté ici, qui consiste à faire converger \mathbf{u}^r et \mathfrak{h}^r de manière à ce que la condition (4.60) soit satisfaite.

Formulation faible du problème (4.65)

En supposant que la viscosité μ du problème (4.51) est du type de celle étudiée dans le deuxième chapitre de ce document, nous introduisons pour un paramètre $\alpha \in [0, 2]$ fixé les espaces \mathbf{X}_α et Y_α défini dans le paragraphe 2.2 ainsi que l'espace $\mathcal{Z} = L^2(\Gamma^r)$.

En multipliant la première équation du problème (4.65) par une fonction test $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_\alpha$, en intégrant par partie respectivement sur Ω_{al}^r et Ω_{el}^r , en utilisant la condition d'adhérence $\mathbf{u}^{r+1} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$ et que le saut de l'équilibre stationnaire tangentielle $[\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{t}_{\Gamma^r}]$ est nul, on

obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{r+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx &+ \int_{\Gamma} [\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{n}_{\Gamma^r}] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^r} ds + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u}^{r+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{r+1} \cdot \mathbf{v} dx \\ &- \int_{\Omega} p^{r+1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{r+1} \cdot \mathbf{v} dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Notons que la traction normale peut avoir un saut sur l'interface. On introduit ainsi la fonction $\psi^{r+1} : \Gamma^r \rightarrow \mathbb{R}$ défini par le saut des tractions normales à l'interface :

$$\psi^{r+1} = [\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{n}_{\Gamma^r}]. \quad (4.67)$$

En multipliant ensuite la deuxième et respectivement la cinquième équation de (4.65) par des fonctions tests $q \in Y_{\alpha}$ et $\xi \in \mathcal{Z}$ et en regroupant (4.66) et (4.67), la formulation faible du problème (4.65) s'écrit :

Problème 4.3.3.

Trouver $\mathbf{u}^{r+1} \in \mathbf{X}_{\alpha}$, $p^{r+1} \in Y_{\alpha}$ et $\psi^{r+1} \in \mathcal{Z}$ tels que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{r+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx &+ \int_{\Gamma^r} \psi^{r+1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^r} ds + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u}^{r+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{r+1} \cdot \mathbf{v} dx \\ - \int_{\Omega} p^{r+1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}^{r+1} \cdot \mathbf{v} dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{\alpha}; \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^{r+1} q dx = 0, \quad \forall q \in Y_{\alpha}; \quad (4.69)$$

$$\int_{\Gamma^r} \mathbf{u}^{r+1} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^r} \xi ds = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{Z}. \quad (4.70)$$

Une fois que la vitesse \mathbf{u}^{r+1} et le saut des tractions ψ^{r+1} sont connus, nous allons voir comment itérer la nouvelle interface.

Détermination de l'interface

Connaissant Γ^r , nous voulons trouver une meilleure approximation de Γ , notée Γ^{r+1} . Dans ce qui suit nous donnons quelques précisions sur la démarche choisie pour obtenir une nouvelle interface Γ^{r+1} à partir de Γ^r . Le lecteur intéressé peut consulter [27] pour davantage de détails sur les calculs qui vont suivre.

4.3. Applications sur une cuve industrielle : approche stationnaire

Soit $(\mathbf{u}^{r+1}, p^{r+1})$ une solution de (4.65) relative à Γ^r et \mathbf{f}^r . On considère les perturbations suivantes des variables $\mathbf{u}^{r+1}, p^{r+1}, \mathfrak{h}^r, \mathbf{n}_{\Gamma^r}$:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^{r+1}(x) + \delta\mathbf{u}(x) \quad x \in \Omega \quad (4.71)$$

$$p(x) = p^{r+1}(x) + \delta p(x) \quad x \in \Omega \quad (4.72)$$

$$\mathbf{n}_{\Gamma}(x) = \mathbf{n}_{\Gamma^r}(x) + \delta\mathbf{n}_{\Gamma}(x) \quad x \in \Omega \quad (4.73)$$

$$\mathfrak{h}(x_1, x_2) = \mathfrak{h}^r(x_1, x_2) + \delta\mathfrak{h}(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in \Pi. \quad (4.74)$$

On remplace ensuite toute ces perturbations dans la condition (4.60). Le développement de $[\mathbf{n}_{\Gamma}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}_{\Gamma}] = 0$ avec les relations (4.71)-(4.73) est un calcul de linéarisation au premier ordre avec les termes $\delta\mathbf{u}, \delta p, \delta\mathfrak{h}$ et $\delta\mathbf{n}$. Les termes non-linéaires sont linéarisés en utilisant notamment différents outils de géométrie différentielle. La condition (4.60) devient alors

$$[\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{n}_{\Gamma^r}] + [\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \partial_{x_3} \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{n}_{\Gamma^r}] \delta\mathfrak{h} = 0. \quad (4.75)$$

En utilisant (4.51), on peut montrer que le terme $[\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \partial_{x_3} \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{n}_{\Gamma^r}]$ est proportionnel au saut des forces verticales à l'interface :

$$[\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \partial_{x_3} \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{n}_{\Gamma^r}] = [-\partial_{x_3} p^{r+1}] = [-f_3^{r+1}]. \quad (4.76)$$

Finalement, comme la pression est définie à une constante près, les précédentes relations permettent d'explicitier la perturbation $\delta\mathfrak{h}$ de l'interface :

$$\delta\mathfrak{h} = \frac{[\mathbf{n}_{\Gamma^r}^T \boldsymbol{\tau}^{r+1} \mathbf{n}_{\Gamma^r}] + C}{[f_3^{r+1}]}, \quad (4.77)$$

ou $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

4.3.2 Approximation par éléments-finis

Similairement à la section 4.2, la discrétisation en espace du problème MHD stationnaire implique que les maillages sont modifiés au cours des itérations de l'approche stationnaire. À cet effet, soit donc $h > 0$ et considérons comme dans le paragraphe 4.2.1 \mathcal{U}_h^r et \mathcal{T}_h^r des maillages respectivement de Λ et Ω à l'itération r . L'interface Γ^r est approchée par un maillage surfacique \mathcal{S}_h^r composé de faces triangulaires d'éléments de \mathcal{T}_h^r . Les maillages $\mathcal{U}_h^r, \mathcal{T}_h^r$ et \mathcal{S}_h^r sont supposés conformes et jouissent des mêmes propriétés que ceux de la section 4.2.1.

Chapitre 4. Applications à l'électrolyse de l'aluminium

Soit P_{pr} un point dans \mathcal{T}_h^r et P_{po} un point dans \mathcal{U}_h^r . On introduit les espaces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h^r &= \{W \in C^0(\Lambda). W|_K \in \mathbb{P}^1(K), \quad \forall K \in \mathcal{U}_h \text{ et } W(P_{po}) = 0\}; \\ \mathcal{V}_h^r &= \{\mathbf{v} \in (C^0(\Omega))^3 : \mathbf{v}|_K \in (\mathbb{P}^1(K) \oplus B_K)^3, \forall K \in \mathcal{T}_h^r, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}; \\ \mathcal{Q}_h^r &= \{q \in C^0(\Omega) : q|_K \in \mathbb{P}^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^r \text{ et } q(P_{pr}) = 0\}; \\ \mathcal{Z}_h^r &= \{\xi \in C^0(\Gamma) : \xi|_L \in \mathbb{P}^1(L) \quad \forall L \in \mathcal{S}_h^r\}.\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'algorithme complet de résolution du problème (4.51)-(4.64) :

Algorithme 4.3.4. On se donne un champ de vitesse $\mathbf{u}_h^0 \in \mathcal{V}_h^0$ et une pression $p_h^0 \in \mathcal{Q}_h^0$. Soit Γ_h^0 une surface paramétrée par $x_3 = \mathfrak{h}^0(x_1, x_2)$. Soit aussi un champ magnétique d'induction \mathbf{B}_h donné. Pour $r = 0, 1, 2, \dots$ on calcule successivement :

1. résoudre le problème du potentiel électrique : trouver $V_h^{r+1} \in \mathcal{L}_h^r$ tel que

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda} \sigma \nabla V_h^{r+1} \cdot \nabla W_h dx &= - \int_{\Lambda} \sigma (\mathbf{u}^r \times \mathbf{B}) \cdot \nabla W_h dx \\ &+ \frac{I}{|\Gamma_{in}^r|} \int_{\Gamma_{in}^r} W_h dx - \frac{I}{|\Gamma_{out}^r|} \int_{\Gamma_{out}^r} W_h dx\end{aligned}$$

pour tout $W_h \in \mathcal{L}_h^r$. On calcule ensuite le courant \mathbf{j}_h^{r+1} et la force \mathbf{f}_h^{r+1} par les relations :

$$\mathbf{j}_h^{r+1} = \sigma (-\nabla V_h^{r+1} + \mathbf{u}_h^r \times \mathbf{B}_h), \quad \mathbf{f}_h^{r+1} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j}_h^{r+1} \times \mathbf{B}_h;$$

2. sur les domaines

$$\Omega_{al}^r = \{x \in \Omega \mid x_3 < \mathfrak{h}^r(x_1, x_2)\}, \quad \Omega_{el}^r = \{x \in \Omega \mid x_3 > \mathfrak{h}^r(x_1, x_2)\} \quad (4.78)$$

trouver $(\mathbf{u}_h^{r+1}, p_h^{r+1}, \psi_h^{r+1}) \in \mathcal{V}_h^r \times \mathcal{Q}_h^r \times \mathcal{Z}_h^r$ tels que :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^{r+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) dx &+ \int_{\Gamma^r} \psi_h^{r+1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^r} ds + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u}_h^{r+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{r+1} \cdot \mathbf{v}_h dx \\ - \int_{\Omega} p_h^{r+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_h^{r+1} \cdot \mathbf{v}_h dx, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^r;\end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{r+1} q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h^r; \quad (4.80)$$

$$\int_{\Gamma^r} \mathbf{u}_h^{r+1} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^r} \xi_h ds = 0, \quad \forall \xi_h \in \mathcal{Z}_h^r. \quad (4.81)$$

4.3. Applications sur une cuve industrielle : approche stationnaire

3. corriger la position de l'interface en remplaçant sa paramétrisation par

$$\mathfrak{h}^{r+1} = \mathfrak{h}^r + \frac{\psi^{r+1} + C}{[f_3]} \quad (4.82)$$

où la constante C est déterminée de telle manière à ce que le volume d'aluminium soit conservé :

$$\int_{\Pi} \mathfrak{h}^r(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Pi} \mathfrak{h}^{r+1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \text{Vol}(\Omega_{al}), \quad (x_1, x_2) \in \Pi \quad (4.83)$$

Ces trois étapes sont itérées jusqu'à ce que la différence $\mathfrak{h}^{r+1} - \mathfrak{h}^r$ soit inférieure à une tolérance fixée. Ceci est équivalent à observer que la fonction ψ_h^{r+1} tend vers une constante.

Remarque 4.3.5. A chaque itération de cet algorithme, la forme des anodes est modifiée en fonction de la déformation de l'interface, afin de garder une distance constante entre les anodes et le métal.

Remarque 4.3.6. La fonction \mathfrak{h}^{r+1} obtenue par cet algorithme permet de définir l'interface

$$\Gamma_h^{r+1} = \{x \in \Omega^{r+1} : x_3 = \mathfrak{h}^{r+1}(x_1, x_2)\}. \quad (4.84)$$

Comme dans l'approche évolutive, l'interface peut présenter des oscillations non physiques, ce qui est problématique pour le calcul du potentiel et du courant. Afin d'éviter ces problèmes, une technique de lissage similaire à celle présentée dans le paragraphe 4.2 et basée sur des polynômes de Legendre est appliquée.

4.3.3 Résultats Numériques

Dans ce paragraphe nous présentons la modélisation d'un écoulement fluide stationnaire dans une cuve d'électrolyse industrielle simplifiée avec différents modèles de longueur de mélange présentés dans la première partie de ce document.

La cuve considérée est semblable à celle décrite au paragraphe 4.2.6, dont un exemple de maillage est visible sur la figure 4.4.

Nous supposons à nouveau que le champ d'induction \mathbf{B} est connu et qu'il correspond à une interface bain/métal horizontale. Nous faisons également l'hypothèse que \mathbf{B} est la superposition des champs d'induction \mathbf{B}_{int} , \mathbf{B}_{ext} , \mathbf{B}_{ferro} et \mathbf{B}_{fil} qui sont différents champs d'induction générés par la cuve et par les cuves voisines. Nous prenons un courant total à travers la cuve de $I = 320[kA]$.

Choix des modèles de turbulence

Nous présentons dans ce paragraphe différents modèles de longueur de mélange utilisés pour le calcul d'un champ de vitesse stationnaire avec l'algorithme 4.3.4.

Nous rappelons la viscosité turbulente introduite dans le second chapitre que nous écrivons ici sous forme tensorielle

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) := \mu_{ij}(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = (\mu_L)_{ij} + \zeta_{turb} \kappa^\alpha \rho l^{2-\alpha} d_{\partial\Omega}^\alpha |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Ici $(\mu_L)_{ij}$ est un tenseur constant, $l := 0.1$ est la longueur caractéristique du domaine, $\kappa = 0.41$ la constante de von Karman et ζ_{turb} est un paramètre numérique à calibrer selon le modèle. En général, le tenseur $(\mu_L)_{ij}$ correspond à la viscosité de l'aluminium ou du bain électrolytique.

Nous considérons maintenant les modèles suivants :

- **Modèle Laminaire (LAM)**

La viscosité turbulente s'écrit comme un tenseur de viscosité constante, dont les valeurs ont été calibrées en fonction du rapport d'aspect de la géométrie des cuves selon une étude dans [26] :

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = (\mu_L)_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0.5 \\ 10 & 10 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque le modèle est laminaire, la viscosité turbulente est nulle et nous choisissons ainsi $\zeta_{turb} = 0$.

- **Modèle de Smagorinsky (SMAG, $\alpha = 0$)**

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = (\mu_L)_{ij} + \zeta_{turb} \rho l^2 |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|.$$

Pour ce modèle nous prenons $\zeta_{turb} = 5e^{-4}$.

- **Modèle Hybride (HYB, $\alpha = 1$)**

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = (\mu_L)_{ij} + \zeta_{turb} \rho l \kappa d_{\partial\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|.$$

Pour ce modèle nous prenons $\zeta_{turb} = 2e^{-2}$.

- **Modèle de von Karman (VK, $\alpha = 2$)**

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = (\mu_L)_{ij} + \zeta_{turb} \rho \kappa^2 d_{\partial\Omega}^2 |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|.$$

Pour ce modèle nous prenons $\zeta_{turb} = 9e^{-1}$.

- **Modèle de Navier (NAV, $\alpha = 0$)**

Le modèle de Navier consiste à prendre la viscosité turbulente de Smagorinsky :

$$\mu(|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|) = (\mu_L)_{ij} + \zeta_{turb} \rho l^2 |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)|.$$

4.3. Applications sur une cuve industrielle : approche stationnaire

Contrairement à tous les autres modèles, nous n'imposons pas des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord mais nous les relaxons avec un paramètre de friction

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) \mathbf{t}_k = \alpha_f (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_k), \quad k = 1, 2 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.85)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ sont les deux vecteurs directeurs du plan tangent à $\partial\Omega$ et α_f est le paramètre numérique de friction. Notons que si $\alpha_f = 0$ alors (4.85) correspond à des conditions de glissement, et que si le paramètre α_f tend vers l'infini, la condition (4.85) tend vers des conditions d'adhérence à la paroi.

Ainsi, la forme faible du problème fluide de l'algorithme 4.3.4 avec un tel modèle s'écrit : trouver $(\mathbf{u}_h^{r+1}, p_h^{r+1}, \psi_h^{r+1}) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{Z}_h$ tels que pour tout $(\mathbf{v}_h, q_h, \xi_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{Z}_h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h^{r+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) dx + \int_{\Gamma^r} \psi_h^{r+1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^r} ds \\ & + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u}_h^{r+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{r+1} \cdot \mathbf{v}_h dx - \int_{\Omega} p_h^{r+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx \\ & + \alpha_f \int_{\partial\Omega} [(\mathbf{u}_h^{r+1} \cdot \mathbf{t}_1)(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}_1) + (\mathbf{u}_h^{r+1} \cdot \mathbf{t}_2)(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}_2)] ds = \int_{\Omega} \mathbf{f}_h^{r+1} \cdot \mathbf{v}_h dx, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h; \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{r+1} q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h; \quad (4.87)$$

$$\int_{\Gamma^r} \mathbf{u}_h^{r+1} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma^r} \xi_h ds = 0, \quad \forall \xi_h \in \mathcal{Z}_h. \quad (4.88)$$

En pratique, le paramètre numérique α_f n'est pas constant. En fait, nous imposons des conditions de Navier modérées sous les anodes en choisissant $\alpha_f = 1000$. Ailleurs sur le bord de Ω , on impose des conditions proches de l'adhérence avec $\alpha_f = 1e^6$.

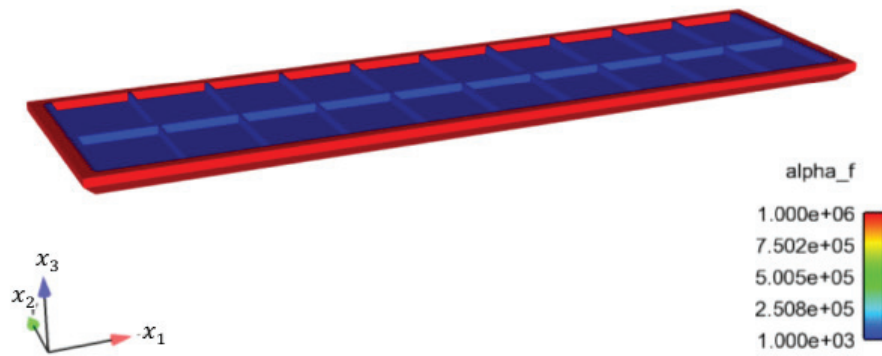


Figure 4.7 – Valeurs du paramètre de friction α_f sur le bord de la partie fluide lors de l'utilisation d'un modèle de turbulence de longueur de mélange de Smagorinsky avec des conditions de bord de Navier. Les valeurs de α_f sont différentes sur le plan anodique que sur le reste du bord.

Mise en donnée

Avec l'utilisation de modèles de longueur de mélange, le problème stationnaire (4.79) se résout avec l'algorithme de Newton présenté dans la section 2.3 de ce document. En général, le champ de vitesse utilisé comme condition initiale du problème (4.79) est nul. Pour le premier pas de la méthode de Newton 2.3.2, nous prenons un champ de vitesse calculé avec le tenseur de viscosité

$$\mu = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0.5 \\ 10 & 10 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

De plus, par les résultats théoriques obtenus dans le chapitre 2, nous avons montré mathématiquement que si la viscosité laminaire $\mu_L = 0$ est nulle, alors le problème de von Karman est mal posé. Une conséquence directe est que lorsqu'une méthode numérique est utilisée pour obtenir une approximation du modèle de von Karman avec μ_L petit (relativement à la viscosité numérique), les résultats obtenus dépendent fortement du maillage. Afin d'assurer la convergence en maillage de ce modèle, nous prenons pour le modèle de von Karman une viscosité laminaire amplifiée d'un facteur 10 :

$$(\mu_L)_{ij} = 2e^{-2} \quad \text{pour tout } i, j = 1, 2, 3.$$

Résultats

Les figures 4.8, 4.9, 4.13 et 4.11 et les tables 4.3, 4.5 contiennent des résultats numériques correspondant aux différents écoulements et interfaces stationnaires.

- **Écoulements dans l'aluminium**

La figure 4.8 présente les écoulements stationnaires au milieu de l'aluminium liquide. Pour chaque modèle testé, on obtient un gros tourbillon à chaque extrémité de la cuve. L'utilisation de modèles de longueurs de mélange fait apparaître des structures plus complexes, avec notamment des recirculations proches des coins de la cuve. Avec les modèles de parois ($\alpha = 1$ et $\alpha = 2$), les vitesses sont plus fortes le long des bords latéraux.

- **Écoulements sous les anodes**

Les écoulements obtenus selon une coupe transversale sont présentés sur la figure 4.9. On observe bien les différences d'épaisseur de la couche limite sous les anodes entre le modèle de Smagorinsky ($\delta_L = 0.1[m]$) et le modèle de von Karman ($\delta_L = 0.04[m]$) (voir aussi la figure 4.11). L'utilisation de modèle de paroi permet donc de diminuer les couches limites et d'obtenir des vitesses plus fortes dans le bain électrolytique.

Par ailleurs, l'utilisation de conditions de bord de Navier permet de manière plus artificielle d'obtenir des vitesses élevées au voisinage du bain électrolytique.

- **Interface**

La figure 4.13 présente les interfaces stationnaires obtenues pour les différents modèles. La table 4.3 permet d'observer la convergence de l'algorithme 4.3.4. Nous concluons que l'utilisation des différents modèles de longueur de mélange avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes n'ont que peu d'impact sur la déformation de l'interface stationnaire. En revanche imposer des conditions de Navier a une influence sur la déformation de l'interface et la convergence de l'algorithme 4.3.4 est plus difficile. Les valeurs des écarts sur les interfaces entre les modèles appuient ces constatations.

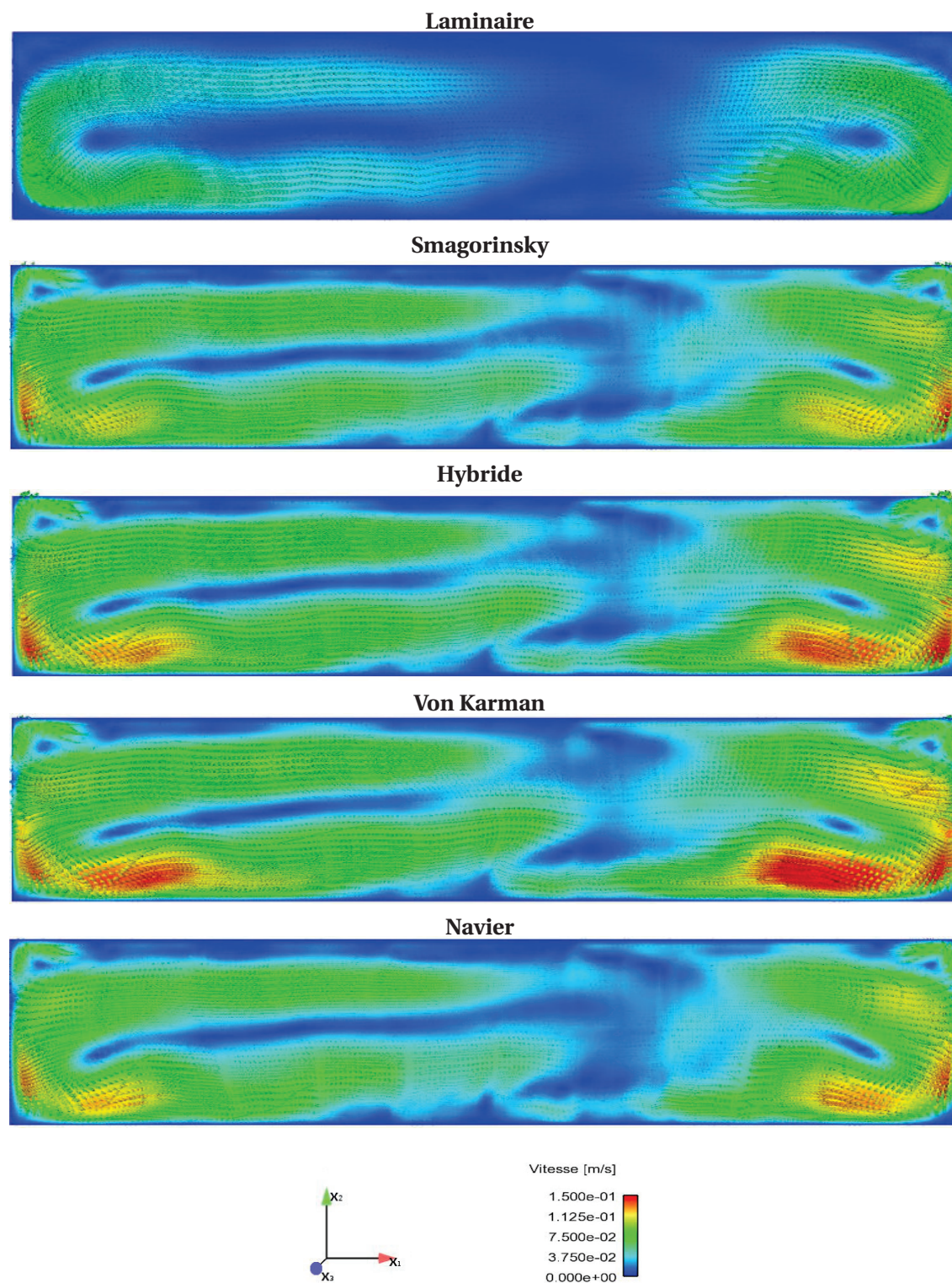


Figure 4.8 – Écoulements stationnaires au milieu de l'aluminium liquide obtenus par l'algorithme 4.3.4 avec différents modèles de turbulence.

4.3. Applications sur une cuve industrielle : approche stationnaire

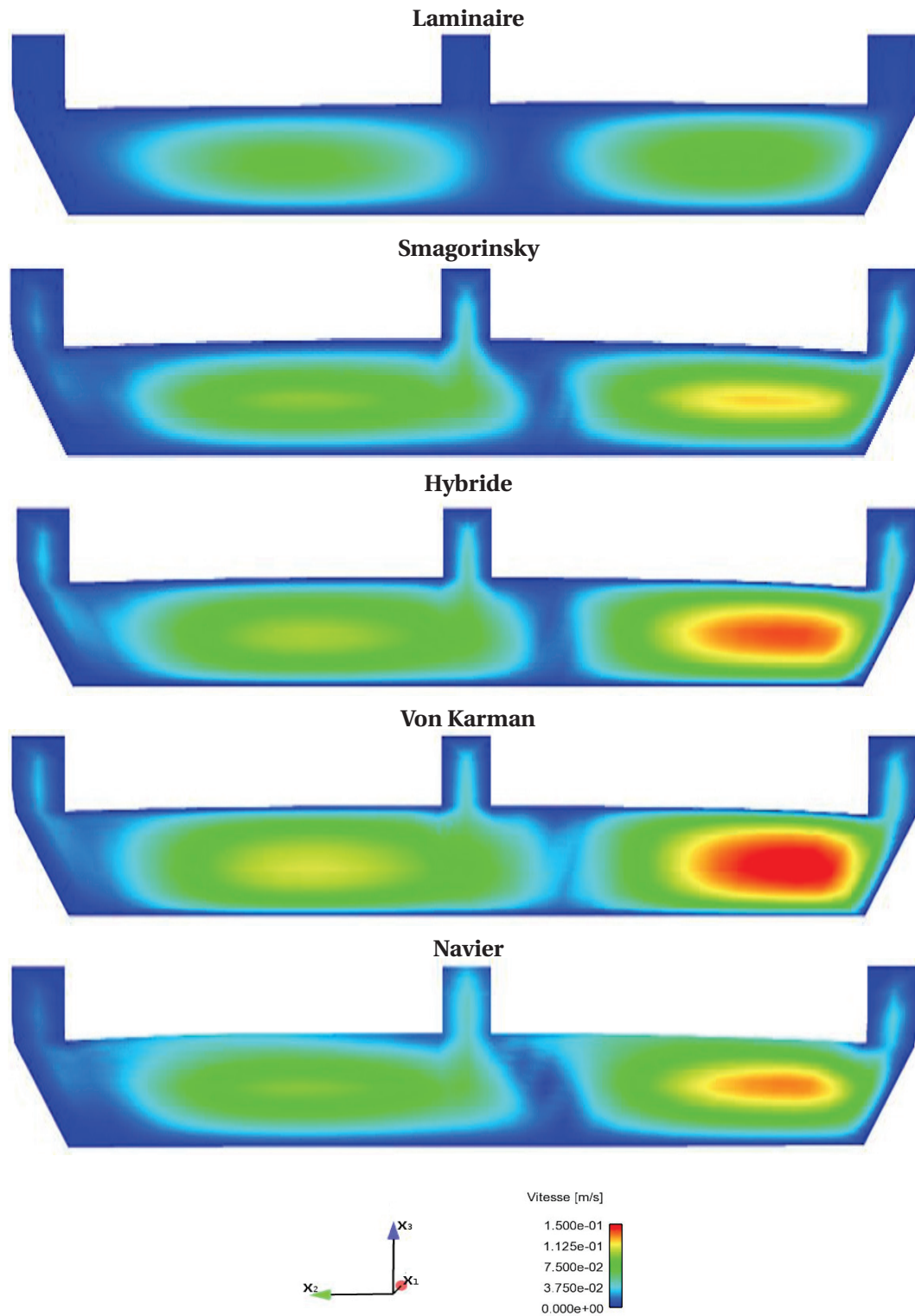


Figure 4.9 – Écoulements stationnaires de profil obtenus par l’algorithme 4.3.4 avec différents modèles de turbulence.

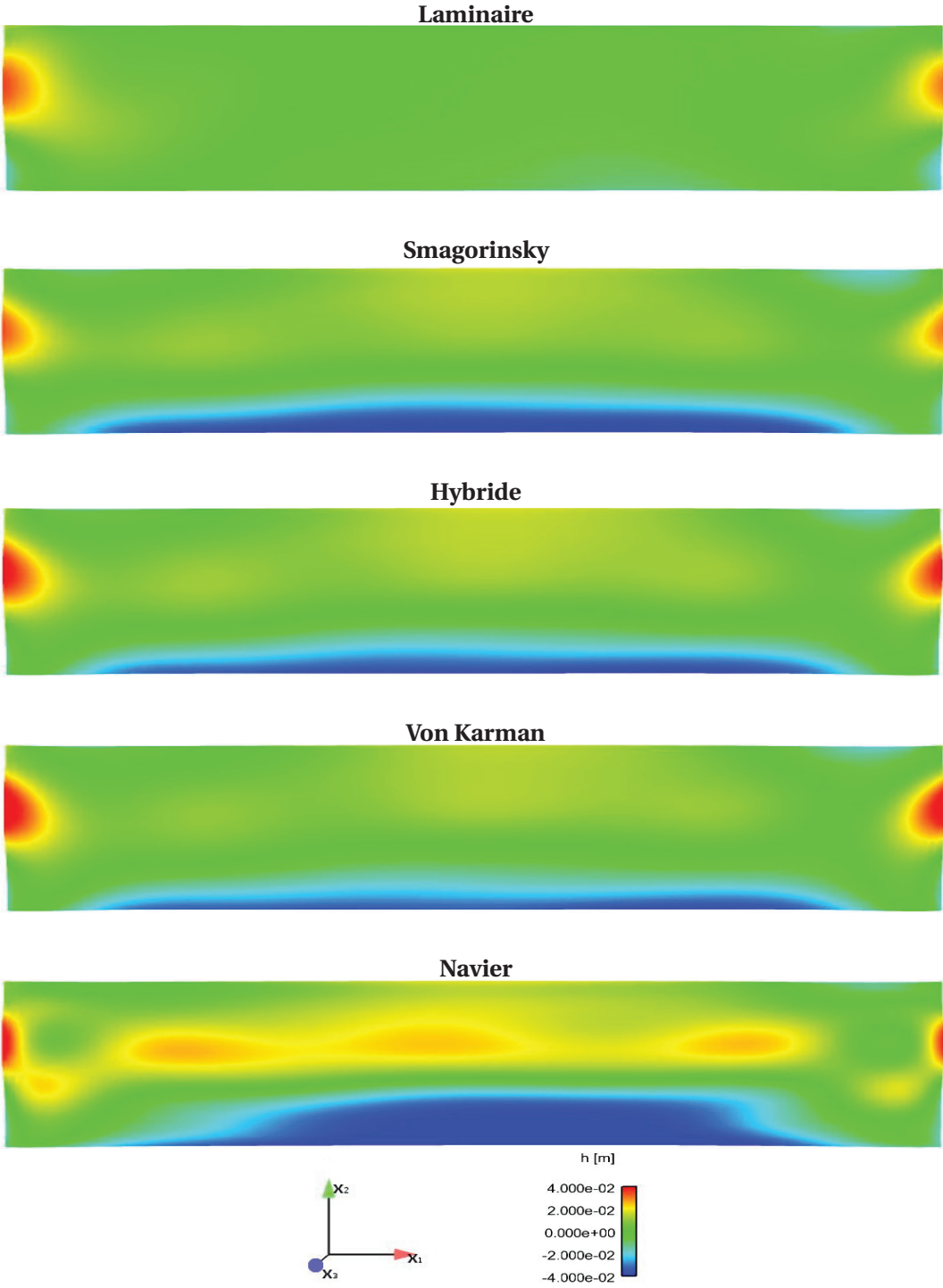


Figure 4.10 – Interfaces stationnaires obtenues par l’algorithme 4.3.4 avec différents modèles.

4.3. Applications sur une cuve industrielle : approche stationnaire

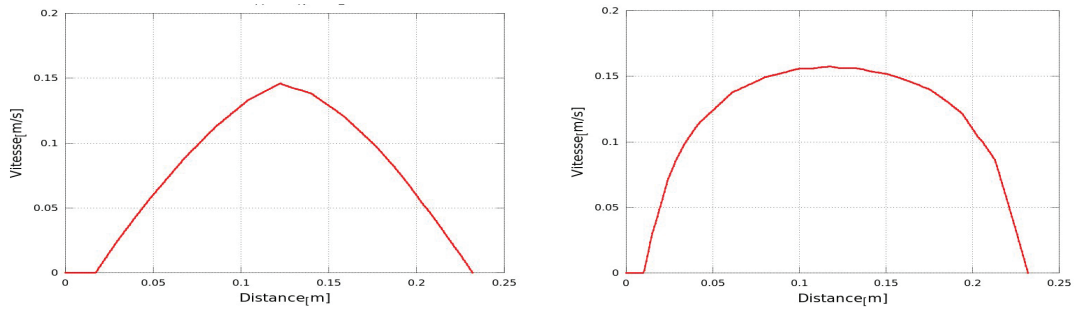


Figure 4.11 – Profil de la norme du champ de vitesse entre les parois anodiques et cathodiques. A gauche, modèle de Smagorinsky. A droite, modèle de von Karman.

r	LAM	SMAG	HYBRID	VK	NAVIER
1	66.17	94.56	94.04	98.57	74.16
2	9.81	25.83	24.60	24.64	67.46
3	6.09	8.29	8.77	9.73	53.87
4	5.97	8.00	9.57	10.35	39.36
5	5.91	7.60	9.18	9.92	39.00
6	5.88	7.48	9.13	9.81	41.75
7	5.86	7.53	9.09	9.83	40.88
8	5.85	7.55	9.18	9.84	39.35
9	5.85	7.57	9.10	9.84	39.00
10	5.84	7.58	9.16	9.83	39.57

Table 4.3 – Evolution de $\psi_{diff} := \max(\psi^{r+1} - \psi^r)$ au cours des itérations r de l'algorithme stationnaire 4.3.4. La convergence de cet algorithme se caractérise par un ψ_{diff} : petit.

Soit a un des modèles de turbulence (SMAG, Von KARMAN ou NAVIER) et si b est un modèle distinct de a . Soit \mathbf{u}^i le champ de vitesse obtenu du modèle i , où $i = a$ ou b . Soit h^a et h^b les fonctions définissant les interfaces stationnaires Γ^a et Γ^b selon la paramétrisation $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega : x_3 = h(x_1, x_2)\}$. Afin de comparer les solutions stationnaires, on utilise les estimateurs suivants :

$$ECU = \frac{\|\mathbf{u}^a - \mathbf{u}^b\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}^a\|_{L^2}}, \quad ECI = \frac{\|h^a - h^b\|_{L^\infty}}{\|h^a\|_{L^\infty}}$$

	SMAG vs. Von KARMAN	SMAG vs. NAVIER	Von KARMAN vs. NAVIER
ECU (en %)	50.1	35.5	37.3
ECI (en %)	24.5	68.4	56.2

Table 4.4 – Écarts en norme L^2 sur les vitesses

Convergence en maillage

Nous terminons ce paragraphe en testant l'influence du maillage sur les écoulements et les interfaces obtenus par les modèles précédents. La figure 4.12 présente les trois maillages considérés. En particulier, le nombre de mailles est important dans le bain électrolytique.

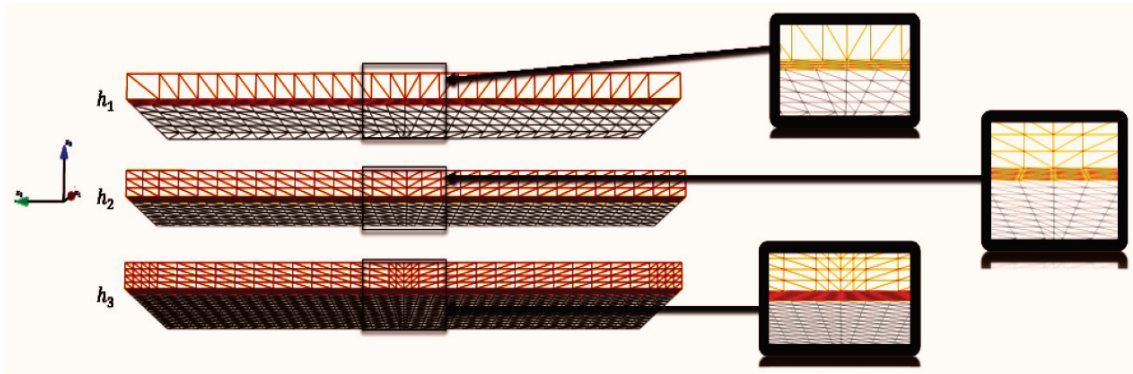


Figure 4.12 – Différents Maillages du domaine fluide Ω de la cuve Λ . La partie du bain électrolytique Ω_{el} contient beaucoup de mailles comparativement à la partie de l'aluminium Ω_{al} .

$v_{max}[m/s]$	LAM	SMAG	HYBRID	VK	NAVIER
h_1	0.088	0.146	0.141	0.137	0.138
h_2	0.090	0.150	0.150	0.150	0.150
h_3	0.091	0.153	0.156	0.161	0.162

Table 4.5 – Maximum de la norme du vecteur vitesse avec différents modèles et différents maillages

Conclusion

A la suite de ces essais numériques, nos principales constatations sont les suivantes :

- Les modèles de parois donnent un profil de vitesse non linéaire proche des parois. En particulier, ceci permet d'obtenir des vitesses plus grandes dans le bain électrolytique.
- Imposer des conditions de Navier augmente artificiellement les vitesses dans le bain mais donne une forme d'interface différente
- Le modèle de von Karman avec une viscosité laminaire amplifiée dépend peu du maillage.

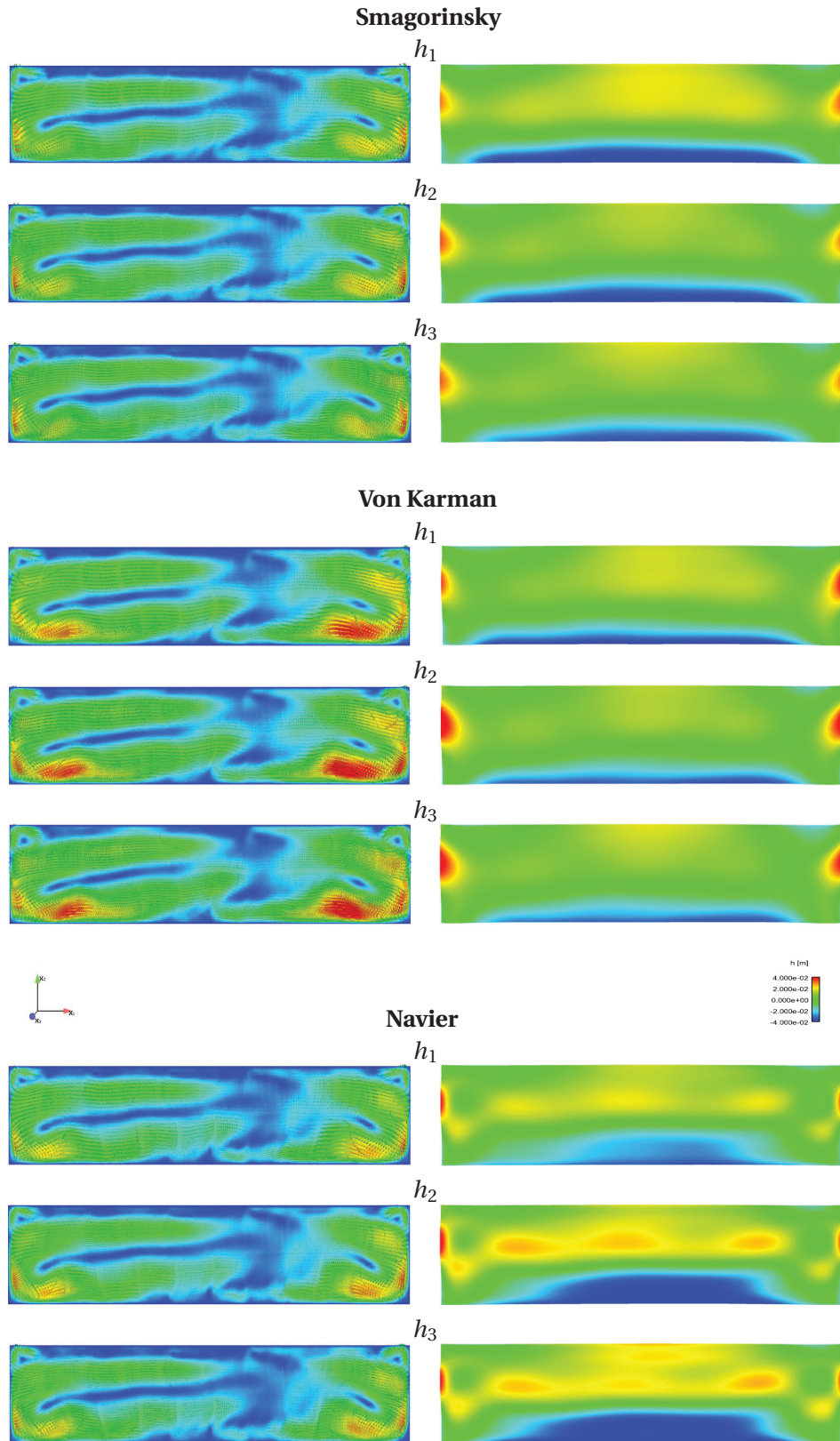


Figure 4.13 – Écoulements et interfaces stationnaires obtenus par l’algorithme 4.3.4 avec différents modèles et différents maillages

4.3.4 Effet du lissage

Nous avons vu dans les paragraphes précédents qu'il est nécessaire de lisser l'interface afin de ne pas perturber la distribution du courant dans la cuve. Cependant, cette étape supplémentaire n'est initialement pas prise en compte dans l'algorithme 4.3.4.

Ainsi, la figure 4.14 montre que le lissage a un fort impact sur la convergence de l'algorithme 4.3.4. On y observe notamment que si l'on impose des conditions de bord de type Dirichlet au problème hydrodynamique et que l'on ne lisse pas l'interface, alors la convergence de ψ de l'algorithme 4.3.4 est d'ordre un, indépendamment du modèle de turbulence. Lors de l'utilisation de conditions de glissement partiel, la convergence reste difficile même sans les effets de lissage. En conclusion le lissage a un impact seulement sur la convergence de l'algorithme 4.3.4 mais l'effet des modèles de turbulence et des conditions de bords sur l'interface reste le même avec ou sans lissage.

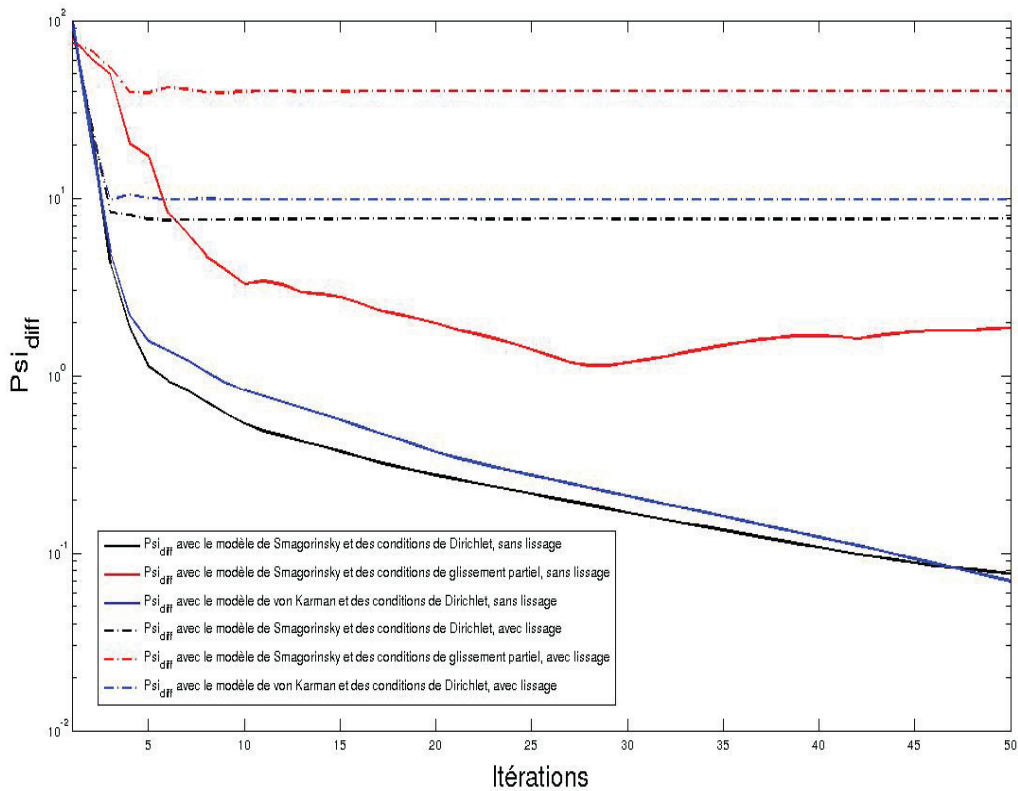


Figure 4.14 – Effet du lissage sur la convergence de l'interface stationnaire en itérant 50 fois l'algorithme (4.3.4) avec différents modèles de turbulence. Lorsque le lissage est activé, les degrés des polynômes de Legendre sont donnés par $m_1 = 10$, $m_2 = 8$.

4.3. Applications sur une cuve industrielle : approche stationnaire

La figure 4.15 montre que le lissage n'a pas d'impact sur la forme de l'interface. On y observe notamment que si l'on impose des conditions de bord de type Dirichlet au problème hydrodynamique, la forme de l'interface reste la même avec ou sans lissage. Le choix d'utiliser des conditions de glissement partiel montre des oscillations non physiques ce qui confirme le fait que ce choix de conditions de bord n'est pas adapté à ce problème.

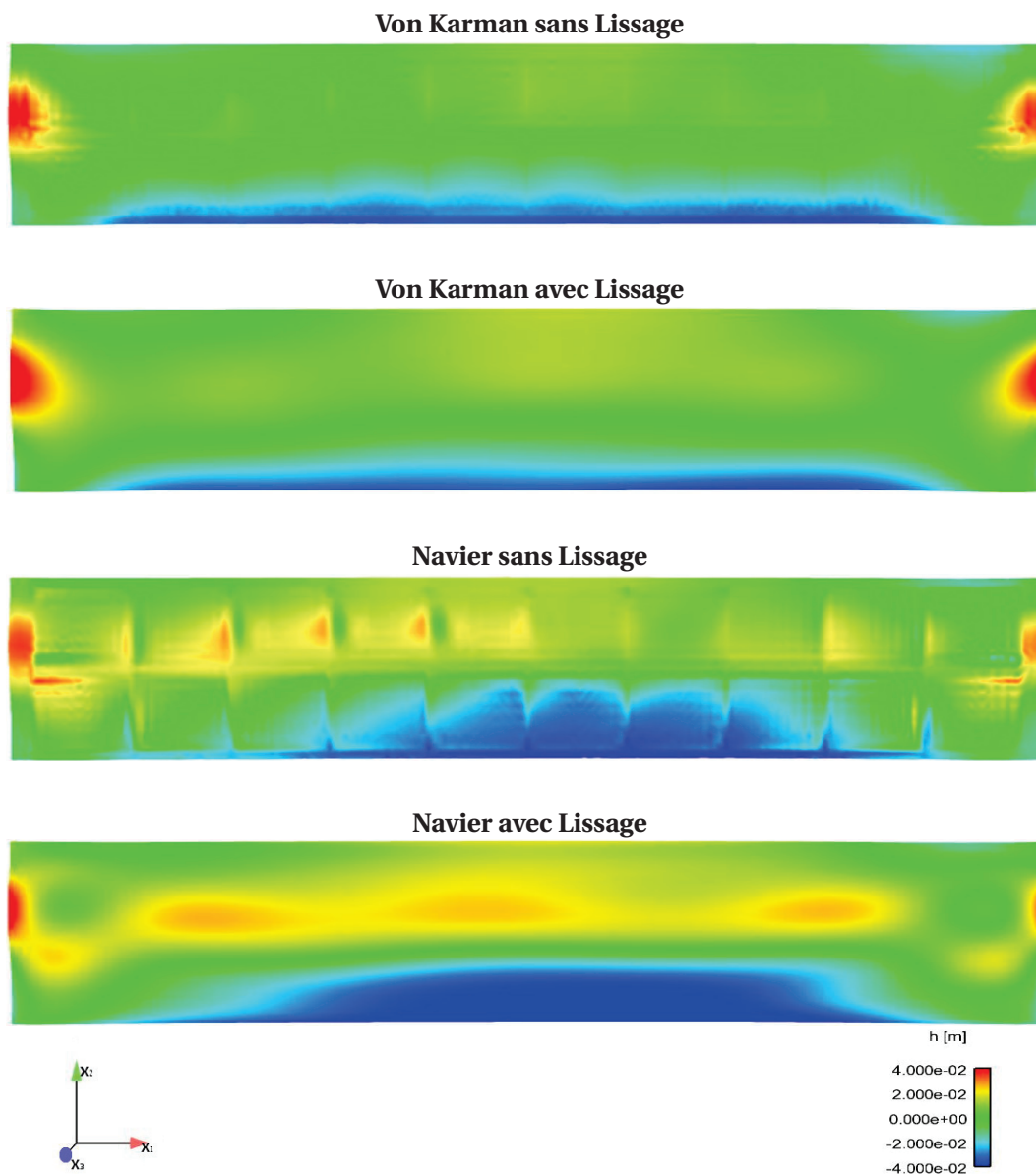


Figure 4.15 – Effet du lissage sur les interfaces stationnaires obtenues par l'algorithme 4.3.4 avec différents modèles de turbulence. Lorsque le lissage est activé, les degrés des polynômes de Legendre sont donnés par $m_1 = 10$, $m_2 = 8$.

5 Conclusion

L'objet de cette thèse est l'étude des écoulements turbulents qui apparaissent lors de l'électrolyse de l'aluminium. En particulier, il s'agit de discuter la pertinence de modèles pariétaux et de méthodes de projection dans le cadre de la simulation numérique des écoulements dans les cuves. Les principales conclusions qui ressortent de cette étude sont les suivantes

- Notre étude théorique sur les équations de Stokes non-linéaires avec une viscosité qui dépend de la distance à la paroi démontre mathématiquement le bien-fondé de ces modèles. En particulier, les modèles de parois sont bien posés si la longueur de mélange est sous-linéaire. Dans le cas de von Karman, le modèle est mal posé si la viscosité laminaire est nulle. Les résultats numériques ont montré que l'utilisation du modèle de von Karman avec une viscosité laminaire petite relativement à la viscosité numérique conduit à des résultats qui dépendent fortement du maillage utilisé. La convergence en maillage est observée si la viscosité laminaire est suffisamment grande, de l'ordre de la viscosité numérique.
- L'étude sur les méthodes de projection a montré un gain de temps CPU pour autant que le pas de temps soit suffisamment grand par rapport à la taille de maille. Malheureusement, plus le domaine de calcul est aplati, plus la taille de maillage devient petite et plus ces méthodes sont difficiles à appliquer, ce qui prêterite leur utilisation pour des cuves d'électrolyse. Par ailleurs, notre étude sur l'équation de la pression a montré que la manière de résolution la plus appropriée est de supprimer le noyau de la matrice.

Essais numériques sur des cuves d'électrolyse de l'aluminium simplifiées

- Les écoulements et les interfaces obtenus par les approches évolutives et stationnaires ont été comparées. L'interface stationnaire dépend du pas de temps utilisé, mais pas le champ de vitesse.
- La méthode de projection non-incrémentée permet de gagner un facteur deux sur le temps de calcul de la méthode évolutive monolithique. Le choix du pas de temps est délicat.
- Les modèles de longueur de mélange ont été comparés sur l'approche stationnaire. Les modèles de parois permettent d'obtenir un champ de vitesse plus réaliste.

Dans le cadre de l'électrolyse de l'aluminium, nous recommandons à la suite de ce travail d'utiliser le modèle de von Karman, qui permet d'obtenir des vitesses supérieures dans le bain électrolytique qui dépendent peu de la taille de maille pour autant que sa viscosité laminaire ne soit pas trop petite.

En ce qui concerne les équations de Navier-Stokes évolutives, nous recommandons la méthode monolithique. Les méthodes de projection peuvent être utilisées dans des cas plus simples, comme le fait de résoudre des équations de Stokes à la place de Navier-Stokes.

De plus, nous avons observé que le lissage de l'interface a un impact sur la convergence des solutions vers une interface stationnaire mais que les effets des modèles de turbulence et des conditions de bords sur l'interface restent les mêmes avec ou sans lissage.

Finalement, nous suggérons de ne pas développer des modèles de turbulence plus complexes pour le moment. En effet, au vu des contraintes dues au maillages, il ne nous semble pas réaliste de considérer des modèles RANS à plusieurs équations ou des calculs de type LES. Par ailleurs, il ne serait pas raisonnable de continuer une étude plus sophistiquée tant que des mesures expérimentales plus précises n'auront pas pu être effectuées.

De plus, nous avons observé dans ce travail que l'interface stationnaire est sensible à la méthode de résolution, au maillage, au pas de temps et aux conditions de bord imposées sur le problème hydrodynamique. Au vu de cette sensibilité, la forme de l'interface stationnaire pour des cuves industrielles reste encore entièrement à valider et à cet effet, les aspects thermiques développés dans [35] doivent être pris en compte.

Bibliographie

- [1] ACOSTA, G., DURAN, R.G., FERNANDO L.G., *Korn inequality and divergence operator : counterexamples and optimality of weighted estimates*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 217-232.
- [2] ACOSTA, G., DURAN, R.G., LOMBARDI, A.L., *Weighted Poincaré and Korn inequalities for Holder α domains*, Math. Methods Appl. Sci. 29 (2006), 387-400.
- [3] ADAMS, R., *Sobolev Spaces*, Vol. 65, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New-York, 1975.
- [4] AIMAR, H., CARENA, M., DURÀN, R. and TOSCHI, M. *Powers of distance to lower dimensional sets as Muckenoupt weights*, Acta Math. Hungar. (2014), <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-014-0389-1>, in press.
- [5] AMBRIOSO, L., PINAMONTI, A., SPEIGHT, G. *Weighted sobolev spaces on metric measure spaces*, preprint, arXiv :1406.3000, 2014.
- [6] ANTOCI, F. *Some Necessary and some sufficient conditions for the compactness of the embedding of weighted Sobolev spaces*, Ricerche Mat. 52 (2003) 55-71.
- [7] BALAY, S and AL. PETSc Web page, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, year = 2015.
BARANGER, J., EL AMRI, H. *Estimateurs a posteriori d'erreur pour le calcul adaptatif d'écoulements quasi-Newtoniens*, RAIRO Anal. Numér. 25 (1991), 31-48.
- [8] BARANGER, J., NAJIB, K. *Analyse numérique des écoulements quasi-Newtoniens dont la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de carreau*, Numer. Math. 58 (1990) 35-49.
- [9] BOCHEV, P. and LEHOUCQ, R.B. *On finite element of the pure Neumann problem*. SIAM Rev. 47, 50-66.
- [10] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [11] BROOKS, A.N., and HUGUES, T.J. *Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32, 1-3 (1982), 199-259.

Bibliographie

- [12] BROWN, D.L., CORTEZ, R., MINION, M.L. *Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations*. J. Comput. Ph. 168(2) (2001) 464-499.
- [13] BROWN, R.C. *Some embeddings of weighted Sobolev spaces on finite measure and quasi-bounded domains*. J. Inequalities. Appl. 2 (1998) 325-356.
- [14] CANNONE, M. *Nombres de Reynolds, stabilité et Navier-Stokes*. Banach Center Publication, (1999).
- [15] CANTON, J. and TUGNOLI, M. *Solution of the steady Navier-Stokes equations by a Newton FEM*. Preprint to Elsevier, 2015.
- [16] CAVALHEIRO, A.C *An approximation theorem for solutions of degenerate elliptic equations*. Cambridge Univ. Press (2002).
- [17] CAVALHEIRO, A.C. *Existence of solutions for Dirichlet problem of some degenerate quasi-linear elliptic equations*. Appl. Math. Lett. 17 (2004) 387-391.
- [18] CAVALHEIRO, A.C *Existence results for Dirichlet Problems with degenerated p -Laplacian*. Opuscula Math. 33, (2013), no 3, 439-453.
- [19] CAVALHEIRO, A.C. *Weighted Sobolev spaces and degenerate elliptic equations*. Bol. Soc. Paran. Mat. (2008), 117-132.
- [20] CAVALHEIRO, A.C. *The solvability of Dirichlet problem for a class a degenerate elliptic equations with L^1 data*. Applicable Analysis, Vol.85, No.8, August 2006, 941-961.
- [21] CIARLET, P. *On Korn's Inequality*. Chinese. Ann. Math. 31B(5) (2010) 607-618.
- [22] COLINGE, J. and RAPPAZ, J. *A strongly nonlinear problem arising in glaciology*. M2AN Math. Model Numer. Anal., 33(2) :395-406, 1999.
- [23] CONTI, S., FARACO, D. and FRANCESCO, M. *A new approach to counterexample to L^1 estimate : Korn's Inequality, geometric rigidity and regularity for gradients of separately convex functions*. Arch. Rational Mech. Anal., 175 (2005) 287-300.
- [24] DACOROGNA, B. *Introduction to the calculus of variations*. Imperial College Press, London, 2004.
- [25] DACOROGNA, B. *Direct methods in the calculus of variations*. Berlin : Springer-Verlag, Second Edition, 2008.
- [26] DESCLOUX, J., FLUECK, M., ROMERIO, M.V. *A modelling of the stability of aluminium electrolysis cells*. In Non Linear Partial Differential Equations and their approximations . Collège de France Seminar, Vol XIII (Paris , 1994/1996), volume 391, of Pitman Res. Notes Math Ser., pages 117-133. Longman, Harlow, 1998.
- [27] DESCLOUX, J., FROSIO, R., FLUECK, M. *A two fluids stationary free boundary problem*. Computer methods in applied mechanics and engineering 77 (1989), 215-226.

-
- [28] DEVESA, A. Modélisation de paroi pour la simulation d'écoulements instationnaires non-isothermes . Thèse, Montpellier, 2006.
- [29] DRABEK, P., KUFNER, A., NICOLOSI, F. *Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities*. Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol.5, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1997.
- [30] DURAN, R.G. and GARCIA F.L. *Solutions of the divergence and analysis of the Stokes problem in planar Hölder- α domains*. Math Models Methods Applie. Sci. 20(1) (2010), pp. 95-120.
- [31] DURAN, R.G. and GARCIA F.L. *Solutions of the divergence operator and Korn inequalities on domains with an external cusp*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 35(2) :421-438, 2010.
- [32] DUVAUT, G., LIONS, J.L. *Inequalities in Mecanics and Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [33] ERN, A., GUERMOND J-L. *Theory and practice of finite elements*. Applied Mathematical Sciences, vol. 159. Springer : New York, 2004.
- [34] EVANS, L.C. *A new Proof of Local $C^{1+\alpha}$ regularity for Solutions of certain degenerate elliptic PDE*. J. diff. Eqns 45, 356-373 (1982).
- [35] FLOTRON, S. *Simulations numériques de phénomènes MHD-thermiques avec interface libre dans l'électrolyse de l'aluminium*. Thèse, EPFL, No 5738, 2013.
- [36] FRANCA, L.P., FREY, S.L., and HUGUES, T.J. *Stabilized Finite Element Methods : I. application to the advective-diffusive model*. . Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 95, 2 (1992), 253-276.
- [37] GALDI, P. *An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes equations*. Springer, New-York, 1994.
- [38] GALLAIRE, F. *Communication Interne*. EPFL, 2012.
- [39] GARCIA-CUERVA, J. RUBIO de FRANCIA, J.L. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*. Elsevier, North-Holland Mathematics Studies 116, Amsterdam (1985).
- [40] GIRAULT, V., RAVIART, P. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer, Berlin, 1986.
- [41] GOLDSHTEIN, V., UKHLOV, A. *Weighted Sobolev Spaces and Embedding theorems*. Trans. Amer. Math. Soc.,361(7) :3829-3850, 2009.
- [42] GRISVARD, P. *Elliptic Problems in Non-Smooth Domains*. Pitman Publishing, Inc : Boston, 1985.
- [43] GRISVARD, P. *Espaces intermédiaires entre espace de Sobolev avec poids*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17, 255-296, 1963.

Bibliographie

- [44] GRJOTHEIM, K. *Aluminium electrolysis : the chemistry of the Hall-Héroult process*. Aluminium-Verlag, Dusseldorf, 1977.
- [45] GUERMOND, J-L., MINET, P, SHEN, J. *An overview of projection methods for incompressible flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(44-47), 2006, 6011-6045.
- [46] GUERMOND, J.L. *Some practical implementations of projection methods for Navier-Stokes equations*. RAIRO Modél Math. Anal. Numér. 30 (1996) 637-667.
- [47] GUERMOND, J.L., QUARTAPELLE, L. *On stability and convergence of projection methods based on pressure Poisson equation*. Int. J. Number. Methods Fluids 26(9) (1998) 1039-1053.
- [48] GUERMOND, J.L., SALGADO,A. *A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure Poisson equation*. J. Comput. Phys., 228(8), 2009, 2834-2846.
- [49] GUTIERREZ, P. AUMAITRE, S. *Experimental study of the clustering of floaters on the free surface of a turbulent flow*. submitted, 2014.
- [50] HECHT, F. *FREEFEM++* . 2015.
- [51] HESTENES, M. and STIEFEL, E. *Methods of conjugate gradients for solving linear system*. J. Res. N.B.S, vol.49, p.409 (1952).
- [52] HOFER, T. *Numerical simulation and optimization of the alumina distribution in an aluminium electrolysis pot* . Thèse, EPFL, No 5023, 2011.
- [53] HOWELL, J.S. and WALKINGTON, N.J. *Inf-Sup conditions for twofold saddle point problems*. Numerische Mathematik, 118 :663.693, 2011.
JIANG, R., KAURANEN, A. *Korn inequality on irregular domains*. Submitted, 2011, 1307-1338.
- [54] JOUVET, G. *Modélisation, analyse mathématique et simulation numérique de la dynamique des glaciers*. Thèse, EPFL, No 4677, 2010.
- [55] KALAMAJSKA, A. *Coercive inequalities on weighted sobolev spaces*. Colloq. Math. 66, 309-318 (1994)
- [56] KALAMAJSKA, A. *Pointwise multiplicative inequalities and Nirenberg type estimates in weighted Sobolev spaces*. Studia Math. 108 (1994), no.3, 275-290.
- [57] KIM, J., MOIN, P. and MOSER, R. *Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number*.. J. Fluid Mech. 177, (1987), 133-166.
- [58] KIM, S. SHIN, B. *Newton's method for the Navier-Stokes equations with finite-element initial guess of Stokes equations*. Comp. Math. Appl. 2006.

-
- [59] KLEIN, R., POTHERAT, A., ALFERENOK, A. *Experiment on a confined electrically driven vortex pair*. Phys. Rev. E 79, (2009) 016394
- [60] KLEBANOFF, P. *Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient*. Nut. Adv. Comm. Aero., Wash., Tech. Note no. 3178, 1954.
- [61] KOLMOGOROV, A.N. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large Reynolds number*. C : R. Acad. Sci. , U.S.S.R., **30** :9-13, 1941.
- [62] KOLMOGOROV, A.N. *On degeneration decay of isotropic turbulence in a incompressible viscous liquid*. C : R. Acad. Sci. , U.S.S.R., **31** :538-540, 1941.
- [63] KONDRAT'EV, V.A. and OLEINKI, O.A. *Boundary value problems for systems of elasticity theory in unbounded domains and Korn's inequalities*. Russian Math. Survey, 43(1988), pp.65-119.
- [64] KUFNER, A. *Weighted Sobolev Spaces*. Wiley, New-York, 1985.
- [65] LEBORGNE, G. *Stokes et éléments finis \mathbb{P}_1 -Bulle $-\mathbb{P}_1$: présentation détaillée de l'élimination locale des bulles*. Note, Septembre 2008.
- [66] LEDRIAN, A. *Etude de méthodes numériques efficaces pour le calcul de l'induction magnétique dans une cuve d'électrolyse de l'aluminium*. . Msc. in Physics, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2006.
- [67] LUENBERGER, D.G. *The conjugate residual method for constrained minimization problems*. SIAM J. Number ANAL. Vol.7 (1970), pp. 390-398.
- [68] MUCKENHOUPT, B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions*. Trans. Amer. Math. Soc., 165 (1972), 207-226.
- [69] MIN, C. *On reinitializing level set functions*. J. Comput. Phys. 225(1) :300-321.
- [70] MUNGER, D. *Simulation numérique des instabilités magnétohydrodynamiques dans les cuves de production de l'aluminium*. Msc. in physics, Université de Montréal, 2004.
- [71] NEFF, P. POMPE, W : *Counterexamples in the theory of coerciveness for linear elliptic systems related to generalization of Korn's second inequality*. ZAMM, Math. Mech. 94 No.9 784-790, 2014.
- [72] OPIC, B. and GURKA, P. *Continuous and Compact embeddings of weighted Sobolev spaces*. Czechoslovak Mathematical Journal, Vol.39 (1989), No. 1 78-94.
- [73] OSHER, S. and FEDKIW, R.P. *Front propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations*. Journal of Computational Physics 79, 1 (1988), 12-49.
- [74] OSHER, S. and SETHIAN, J.A. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. 1 ed. Springer, Oct. 2002.

Bibliographie

- [75] PAIN, S. *Simulation Numérique du mouvement des fluides dans une cellule de Hall-Héroult*. Thèse, EPFL, No 3497, 2006.
- [76] PETSC. *PETSc, Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation*. 2015.
- [77] PICASSO, M. RAPPAZ, J. *Stability of time-splitting schemes for the stokes problem with stabilized finite elements*. Numerical Methods for Partial Differential Equations 2001 ; 17(6) :632-656.
- [78] PIRONNEAU, O. *Finite Element Methods for Fluids*. Wiley, New-York, 1983.
- [79] POPE, S.B. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [80] POMPE, W. *Korn's first inequality with variable coefficients and its generalizations*. Comment.Math.Univ.Carolin. 44(1) (2003) pp.57-70.
- [81] QUARTERONI, A. and Valli, A. *Numerical Models for Differential Problems*. Second Edition, Springer, Italia, 2014.
- [82] QUARTERONI, A. and Valli, A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Ser. Comput. Math. 23, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [83] RAPPAZ, J. *Evalutation des frottements sur les anodes et barres cathodiques*. Communication Interne, EPFL, 2011.
- [84] RAPPAZ, J. *Méthodes de projection pour l'approximation numérique des équations de Stokes et Navier-Stokes incompressibles*. Communication Interne, EPFL, 2013.
- [85] RAPPAZ, J., ROCHAT, J. *On non-linear Stokes problems with viscosity depending on the distance to the wall*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser, I, 499-502, (2016).
- [86] RAPPAZ, J., ROCHAT, J. *On some Weighted Stokes Problems. Applications on Smagorinsky Models*. Submitted to Proceeding, 2016. <https://infoscience.epfl.ch/record/217038>
- [87] RENAUDIÉ, S. *Modélisation de l'écoulement dans les cuves d'électrolyse*. Rapport Interne, LRF, 2015.
- [88] ROCHAT J., FLUECK, M. *Détails sur l'implémentation de l'Élément fini \mathbb{P}_1 dans ALUCCELL*. Communication Interne, EPFL, 2014.
- [89] SAAD, Y. and SCHMULTZ, M. *GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*. SIAM, J. Sci. Stat. Comput. 7, 856.
- [90] SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company, Boston, 1996.
- [91] SAFA, Y. *Simulation numérique des phénomènes thermiques et magnétohydrodynamique dans une cellule de Hall-Héroult*. PhD Thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005. Thèse EPFL n° 3185.

-
- [92] SANDRI, D. *Sur l'approximation numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité suit la loi puissance ou la loi de Carreau*. Math. Modell. Numer. Anal. 27(2) (1993) 131-155.
- [93] SETHIAN, J.A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science on Applied and Computational Mathematics*). 2 ed. Cambridge University Press, June 1999.
- [94] SHAPIRA, Y. *Matrix-Based Multigrid : Theory and Applications*. 2nd ed. Berlin, Springer, 2008.
- [95] SPALART, P.R. *Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $R_\theta = 1410$* . J. Fluid Mech. 187, 61, 1988.
- [96] STEINER, G. *Simulation numérique de phénomène MHD : Application à l'électrolyse de l'aluminium*. Thèse, EPFL, No 4469, 2009.
- [97] SUBODH, D. *Achieving Carbon Neutrality in the Global Aluminum Industry*. JOM, DOI : 10.1007/s11837-012-0237-0, 2012.
- [98] TABEREAUX, A.T. and HESTWE, R.B. *Metal Pad Velocity Measurement in Prebake and Soderberg Reduction Cells*. AIME 1984, pp 519-539.
- [99] TEMAM, R. *Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes*. Bull. Soc. Math. France 98 (1968) 115-152.
- [100] TORCHINSKY, A. *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, San Diego, Calif. (1986)
- [101] VREMAN, A.W. *The projection method for the incompressible Navier-Stokes equations : the pressure near a no-slip wall*. J. Comput. Phys. 263, 353-374 (2014).
- [102] WILCOX, D.C. *Turbulence Modeling for CFD*. Second Edition, Anaheim : DCW Industries, 1998.
- [103] ZHIKOV, V.V. *Weighted Sobolev Spaces*. Sbornik : Matematiks 189 :8 1139-1170, 1998.

Jonathan ROCHAT
Petit-Corniche 32
1342 Le Pont
+4178 858 08 69
jonathan.rochat@epfl.ch

01.07.1987
Célibataire
Suisse



Formation

	Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)
09/2012-2016	Doctorat en mathématiques en collaboration avec Rio Tinto Alcan <i>Approximation numérique des écoulements dans des cuves d'électrolyse</i>
09/2007-07/2012	Master de Sciences en Mathématiques, moyenne : 5.43/6 <ul style="list-style-type: none">Spécialisation en ingénierie mathématiqueProjet de Master en Ecosse à l'université d'Heriot-Watt <i>Modélisation numérique des ferromagnétiques</i>
08/2003-07/2006	Gymnase d'Yverdon Maturité Fédérale

Expérience Professionnelle

07/2011-01/2012	Rio Tinto Alcan , Saint-Jean de Maurienne (FR) Stage sur la modélisation et l'optimisation de la dissolution de l'alumine dans le procédé d'électrolyse de l'aluminium.
2010-2016 05/2011	EPFL Assistant enseignant en algèbre linéaire, analyse et géométrie Responsable informatique, <i>Finale Suisse des Jeux Mathématiques et Logiques</i>
11/2006-09/2007	Armée Suisse , Mels Gestion de la comptabilité de la compagnie militaire
2006-2008	Dubois-Dépraz SA , Le Lieu Mesure, polissage et développement de pièces pour montres de prestige

Expérience Associative

2008-2016	EPFL Comité de l'association des étudiants en mathématiques (CQFD) <ul style="list-style-type: none">Représentants: PHD (2014-2015), Master (2010-2011), Coach (2008)Organisateur d'une semaine de séminaire d'enseignement pour les étudiants en deuxième année de mathématiques (2013-2016)
2014-2016	Comité de l'école doctorale (EDMA) <ul style="list-style-type: none">Représentant des doctorants au comité de l'EPFL
2004-2016	Fédération Suisse de Gymnastique , Le Lieu <ul style="list-style-type: none">Président du comité depuis 2014Moniteur de gymnastique aux agrès (depuis 2004)Organisateur d'une compétition d'importance cantonale (2016)

Compétences informatiques et linguistiques

Logiciel Technique	Matlab, Latex, FreeFem++, C++, R, Fortran
Logiciel d'Office	Word, Excel, Powerpoint
Français	Langue Maternelle
Anglais	Equivalent B2, Cours de master et conférences en anglais
Allemand	Connaissance du baccalauréat

Centre d'intérêt

Sport	Gymnastique, Rock'n'Roll acrobatique, course à pieds (Marathon), VTT
Musique	Musique de Films, Musique Classique, Métal Symphonique
Composition Musicale	Prix du meilleur travail de maturité en 2005
