

Groupes Hyperboliques

PAR CLOVIS GALIEZ

(clovis.galiez@epfl.ch)

Professeur Nicolas Monod

2009, semestre d'automne.

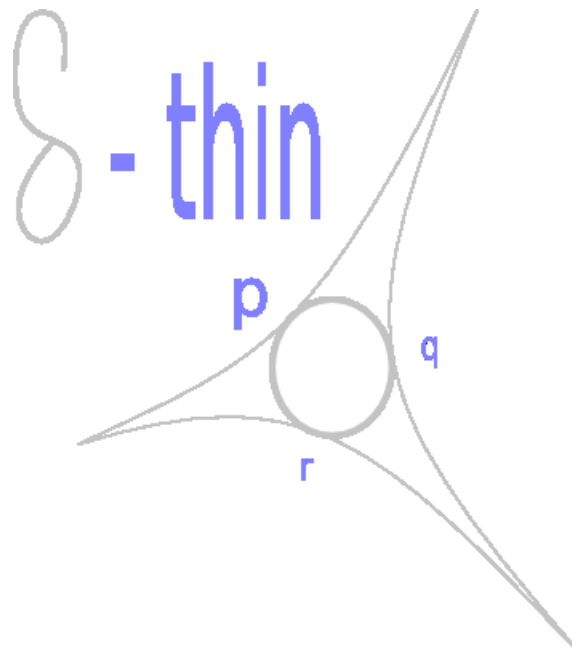


Table des matières

1 Introduction	4
1.1 Pourquoi étudier les groupes hyperboliques ?	4
1.2 Propriétés étudiées	4
1.2.1 Présentation d'un groupe hyperbolique	4
1.2.2 Sous groupe produit dans un groupe hyperbolique	4
1.2.3 Bord d'un groupe hyperbolique	4
2 Généralités	5
2.1 Groupe, graphe de Cayley et distance.	5
2.2 Complexe de Rips	6
2.3 Action d'un groupe sur son complexe de Rips	7
2.4 Subdivision barycentrique	8
3 Groupes hyperboliques	11
3.1 Hyperbolicité	11
3.1.1 Hyperbolicité d'un espace métrique	11
3.1.2 Hyperbolicité d'un groupe	13
3.2 Tout groupe hyperbolique est de présentation finie	16
3.3 Sous-groupe produit dans un groupe hyperbolique	20
3.3.1 Bord d'un groupe hyperbolique	22
4 Conclusion, Remerciements	24
Bibliographie	25

1 Introduction

1.1 Pourquoi étudier les groupes hyperboliques ?

Les groupes hyperboliques font l'objet de recherches actives depuis que M. Gromov a développé le sujet. En effet, ils semblent former une famille de groupes ayant un bon rapport généralité/résultats intéressants : beaucoup de groupes sont en fait hyperboliques (par exemple les groupes libres ou le groupe fondamental d'une variété à courbure négative) ; un théorème assure même que si une suite de groupes $(\Gamma_i)_i$ ayant tous une présentation finie à q relations, et dont la longueur des relations tend vers l'infini lorsque $i \rightarrow \infty$, alors la probabilité que Γ_i soit hyperbolique tend vers 1, lorsque $i \rightarrow \infty$. On peut en déduire qu'un groupe de présentation finie pris au hasard a une grande chance d'être hyperbolique.

Pour ce qui est de l'intérêt des résultats, les groupes hyperboliques ont permis de répondre à des questions de géométrie sur les variétés à courbure négative, mais aussi à des questions purement algébriques (par exemple *il existe des groupes de type fini non moyennables et qui ne contiennent aucun sous-groupe libre non abélien*, bien qu'historiquement d'autres contre-exemples avaient été donnés auparavant, mais de nature combinatoire, et donc pas très « parlants »).

Parmi les propriétés « de base », on peut citer la compacité de $\Gamma \cup \partial\Gamma$ si Γ est hyperbolique, la finitude de la présentation d'un groupe hyperbolique, et l'impossibilité pour un groupe hyperbolique de contenir un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Ce sont ces trois propriétés qui seront ici étudiées.

1.2 Propriétés étudiées

1.2.1 Présentation d'un groupe hyperbolique

La première que nous allons voir est que tout groupe hyperbolique Γ admet une présentation finie ([3], Ch. 4). Pour cela, nous allons construire un complexe simplicial (le complexe de Rips, cf. ?) sur lequel nous allons faire agir Γ . On fera en sorte que ce complexe soit contractile si Γ est hyperbolique et que Γ agisse de manière simpliciale. On en déduira qu'il existe un sous-ensemble fini du groupe libre $L(S)$ - où S est un ensemble fini de générateurs de Γ - qui est une présentation de Γ (cf. ?).

1.2.2 Sous groupe produit dans un groupe hyperbolique

On montrera que si Γ est un groupe hyperbolique, alors il ne peut pas contenir de sous-groupe isomorphe \mathbb{Z}^2 , c'est-à-dire que si Γ contient un sous-groupe de la forme $H \times H'$ alors l'un des deux ne contient que des éléments d'ordre fini (théorème 44).

1.2.3 Bord d'un groupe hyperbolique

Le bord $\partial\Gamma$ d'un groupe Γ peut être défini comme l'ensemble des classes d'équivalence des géodésiques (de son graph de Cayley) pour la relation « être à distance de Hausdorff finie ». On peut montrer que pour un groupe hyperbolique Γ , l'espace $\Gamma \cup \partial\Gamma$ est séquentiellement compact (proposition 51).

2 Généralités

2.1 Groupe, graphe de Cayley et distance.

Dans tout le texte, on supposera que Γ est un groupe de type fini, et S un ensemble fini de générateurs. De plus, on supposera que l'élément neutre $e_\Gamma \notin S$ et que si $s \in S$, alors $s^{-1} \in S$.

On notera alors Γ, S .

A chaque groupe, on va associer un graphe le caractérisant, appelé graphe de Cayley. Ce graphe va jouer un rôle central car il va nous permettre d'associer une structure géométrique à un groupe quelconque.

Définition 1. *Grpahe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S)$.*

Le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ de Γ muni d'un système de générateurs S est le graphe défini par :

- Les sommets de $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ sont les éléments de Γ
- Deux sommets s_1 et s_2 sont reliés par une arrête dans $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ si et seulement si $s_1^{-1}s_2 \in S$

On va ensuite définir une distance sur ce graphe et donc sur les groupes :

Définition 2. *Distance d sur un groupe Γ, S .*

Soit $g_1, g_2 \in \Gamma$, $d(g_1, g_2)$ est le nombre minimal d'éléments de S nécessaires pour obtenir $g_1^{-1}g_2$.

On vérifie qu'il s'agit bien d'une distance :

- $d(g_1, g_2) = d(g_2, g_1)$ car $S = S^{-1}$
- $d(g_1, g_2) = 0 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 = e_\Gamma$
- $\forall g_1, g_2, g_3, d(g_1, g_3) \leq d(g_1, g_2) + d(g_2, g_3)$ car $g_1^{-1}g_3 = (g_2^{-1}g_1)^{-1}g_2^{-1}g_3$



Figure 1. Graph de Cayley $\mathcal{G}(\mathbb{Z}, \{-1, 1\})$. La longueur en violet vaut 2.

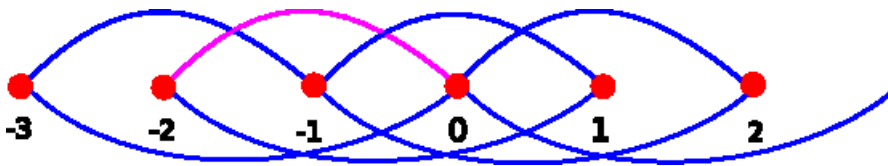


Figure 2. Graph de Cayley $\mathcal{G}(\mathbb{Z}, \{-3, -2, 2, 3\})$. La longueur en violet vaut 1.

Remarque 3. Une telle distance induit une distance sur le graphe de Cayley associé. Une arrête correspond à une « longueur » 1. La distance entre deux points est le la longueur minimale reliant ces deux points.

Remarque 4. d est invariant par translation à gauche car $\forall g, g_1, g_2$, on a $g_1^{-1}g_2 = (gg_1)^{-1}gg_2$.

2.2 Complexe de Rips

Définition 5. *Simplexe.*

Un n -simplexe σ est un $(n + 1)$ -ensemble d'éléments (deux à deux distincts) d'un espace géométrique.

- n est appelé la dimension du simplexe. Lorsque la dimension n'importe pas, on parle de simplexe.
- un élément du $(n + 1)$ -ensemble est appelé un sommet. On note $Som(\sigma)$ l'ensemble des sommets de σ .

Remarque 6. Un simplexe peut-être regardé simplement comme un segment en dimension 1, comme un triangle en dimension 2, comme un tétraèdre en dimension 3, etc.

La notion suivante de face en découle intuitivement.

Définition 7. *Face d'un simplexe.*

Un sous-ensemble strict d'un n -simplexe σ est appelé une face de σ . L'ensemble des faces de σ est noté $Faces(\sigma)$.

On va ensuite définir une structure permettant de décrire basiquement une structure géométrique discrète.

Définition 8. *Complexe simplicial.*

K est un complexe simplicial si K est un ensemble de simplexes tel que :

$$\forall \sigma \in K, Faces(\sigma) \subset K$$

La dimension d'un complexe simplicial est la plus grande dimension des simplexes le composant. Les sommets d'un complexe simplicial sont les sommets de ses simplexes.

Exemple 9.

- On définit par exemple le cercle simplicial S_n^1 par $\{p_1, \dots, p_n, \{p_1, p_2\}, \dots, \{p_{n-1}, p_n\}, \{p_n, p_1\}\}$
- Un disque simplicial est un cercle simplicial « triangulé », c'est-à-dire qu'on rajoute des sommets, des 1-simplexes et des 2 simplexes à S^1 afin de paver S^1 en dimension 2.

Un complexe particulier jouera un rôle fondamental dans la suite, puisqu'il va nous permettre de caractériser la structure du graphe de Cayley.

Définition 10. *Complexe de Rips $P_n(\Gamma, S)$.*

Le complexe de Rips $P_n(\Gamma, S)$ est le complexe simplicial dont les simplexes sont :

$$\{\{g_1, \dots, g_k\} \subset \Gamma \mid \max_{i,j} (d(g_i, g_j)) \leq n\}$$

Moins formellement, il s'agit du complexe formé par des simplexes dont le diamètre est plus petit que n . On peut donc « enfermer » chaque simplexe dans une boule de rayon n .

Remarque 11. Le 1-squelette (c'est à dire le sous-complexe formé des simplexes de dimension 1) de $P_n(\Gamma, S)$ est le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S^{(n)})$ où $S^{(n)}$ est l'ensemble des mots de longueur inférieure à n sur l'alphabet S . Donc le 1-squelette de $P_1(\Gamma, S)$ est $\mathcal{G}(\Gamma, S)$.

Remarque 12. La dimension de $P_n(\Gamma, S)$ est globalement bornée, car le nombre de sommets composant chaque simplexe est majoré par le cardinal de $B(e_\Gamma, n)$, la boule centré sur l'élément neutre et de rayon n . En effet, d'une part la distance est invariante par translation et d'autre part ce cardinal est fini (car la distance entre deux éléments de Γ est au moins 1).

Généralement, cette dimension est plus grande que n .

2.3 Action d'un groupe sur son complexe de Rips

Définition 13. *Application et action simpliciale.*

- Soit K et K' deux complexes simpliciaux. Une application simpliciale $f: K \rightarrow K'$ est une application $\text{Som}(K) \rightarrow \text{Som}(K')$ telle que : $\forall \sigma \in \text{Faces}(K), f(\sigma) \in \text{Faces}(K')$.
- Une action d'un groupe Γ sur un complexe simplicial est dite simpliciale si $\forall g \in \Gamma$ l'action de g est une application simpliciale.

Nous allons maintenant faire agir le groupe Γ simplicialement sur son complexe de Rips par translation à gauche :

Définition 14. *Tout groupe Γ , S agit sur son complexe de Rips $P_n(\Gamma, S)$ par translation à gauche :*

$$\forall g \in \Gamma, \forall \sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \in P_n(\Gamma, S), \\ g\sigma = \{g\sigma_1, \dots, g\sigma_k\}$$

Proposition 15. *L'action définie ci-dessus d'un groupe sur son complexe de Rips est simpliciale.*

Démonstration.

- i. $\forall g \in \Gamma, \forall \sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \in P_n(\Gamma, S),$
 $d(g\sigma_i, g\sigma_j) = d(\sigma_i, \sigma_j),$
 et donc $g\sigma = \{g\sigma_1, \dots, g\sigma_k\} \subset \Gamma$ est un simplexe de $P_n(\Gamma, S)$.

□

2.4 Subdivision barycentrique

Afin de faire émerger certaines propriétés, nous voudrions faire agir un groupe sur son complexe de Rips. Le problème étant qu'en général, cette action n'est pas régulière (cf. définition plus loin). On va alors faire agir notre groupe non pas sur son complexe de Rips directement, mais sur la subdivision barycentrique du second ordre de son complexe de Rips. Il s'agit d'un complexe simplicial plus « fin » qui va rendre l'action, cette fois-ci, régulière.

Dans ce paragraphe, on suivra [2].

La définition de la subdivision barycentrique d'un complexe simplicial est un peu formelle, nous verrons son interprétation intuitive juste après.

Définition 16. *Subdivision barycentrique d'un complexe simplicial.*

Soit K un complexe simplicial. On définit un nouveau complexe simplicial K' , appelé subdivision barycentrique de K , tel que les simplexes de K' sont les k -ensembles $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ où chaque $\sigma_i \in K$ et tels que (à l'ordre de numérotation près):

$$\forall i \leq k-1, \sigma_i \subset \sigma_{i+1}$$

Remarque 17. Il s'agit bien d'un complexe simplicial car :

- Si $\sigma' = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ est un simplexe de K' , alors, tout sous-ensemble $\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_l\} \subset \sigma'$ vérifie encore à l'ordre de numérotation près:

$$\forall i \leq l-1, \sigma'_i \subset \sigma'_{i+1}$$

- Si ${}_1\sigma' = \{{}_1\sigma_1, \dots, {}_1\sigma_k\}$ et ${}_2\sigma' = \{{}_2\sigma_1, \dots, {}_2\sigma_l\}$ sont deux simplexes de K' , alors :

${}_1\sigma' \cap {}_2\sigma' = \{{}_3\sigma_1, \dots, {}_3\sigma_m\}$ vérifie encore à l'ordre de numérotation près:

$$\forall i \leq m-1, {}_3\sigma'_i \subset {}_3\sigma'_{i+1}$$

Exemple 18. Soit K le complexe simplicial formé par le triangle (a,b,c) à bord bleu. Formellement,

$$K = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, a, b, c\}$$

On pose $A = \{b, c\}$, $B = \{a, c\}$, et $C = \{a, b\}$.

La subdivision barycentrique K' de K est le complexe simplicial formé des sommets :

$$\{A, B, C, a, b, c\}$$

et dont les simplexes sont :

$$\{\{A, b\}, \{A, c\}, \{B, a\}, \{B, c\}, \{C, a\}, \{C, b\}, A, B, C, a, b, c\}$$

On peut « visualiser » par exemple $\{C, a\}$ comme étant la zone jaune sur la figure ci-dessous.

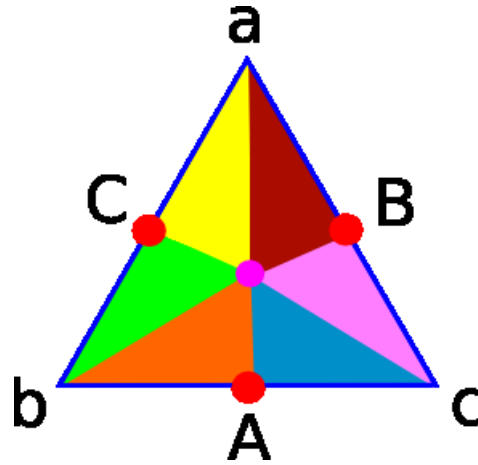


Figure 3.

Proposition 19. *Si Γ est un groupe agissant simplicialement sur un complexe K , alors Γ induit une action simpliciale sur K' .*

Démonstration. En effet, $\forall \sigma' \in K'$, $\sigma' = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ avec

$$\forall i \leq k-1, \sigma_i \subset \sigma_{i+1}$$

Alors $\forall g \in \Gamma$,

$$\forall i \leq k-1, g\sigma_i \subset g\sigma_{i+1}$$

et donc $g\sigma'$ est un simplexe de K' . □

Raffinons encore notre complexe simplicial :

Définition 20. *Subdivision barycentrique du second ordre.*

Soit K un complexe simplicial. Soit K' sa division barycentrique. Alors la subdivision barycentrique du second ordre de K est la subdivision barycentrique de K' . On la note K'' .

On va maintenant montrer que la subdivision barycentrique du second ordre permet de faire agir un groupe régulièrement :

Proposition 21.

Soit Γ un groupe agissant simplicialement sur un complexe simplicial K .

Soient $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \in K''$ et $\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_n\} \in K''$ deux simplexes de K'' . Si $\exists g_1, \dots, g_n \in \Gamma$ tels que :

$$\forall i, \sigma'_i = g_i \sigma_i$$

Alors $\exists g \in \Gamma$ tel que $\forall i, \sigma'_i = g\sigma_i$.

On dit que l'action de Γ sur K'' est régulière.

Démonstration.

Soit $\sigma' \in K'$, $g \in \Gamma$.

Si σ' et $g\sigma'$ sont dans un même simplexe de K' , alors ou bien $\sigma' \subset g\sigma'$, ou bien $g\sigma' \subset \sigma'$. Comme l'action de Γ préserve la dimension de chaque simplexe, on a que $g\sigma' = \sigma'$.

Soit $\sigma' \in K'$, $\forall s \in g\sigma' \cap \sigma'$, on a $\begin{cases} s \in g\sigma' \\ gs \in g\sigma' \end{cases}$.

Comme l'action de Γ sur K' est simpliciale, $g\sigma'$ est un simplexe de K' . De ce qui précède, $gs = s$.

On a montré que

$$\forall \sigma' \in K', \forall s \in g\sigma' \cap \sigma', gs = s. \quad (1)$$

Nous allons maintenant montrer le résultat par induction sur n . Supposons qu'on ait la proposition pour un simplexe de dimension $n - 1$.

Soit $\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_n\} \in K''$ (un simplexe de K''). Alors

$$\forall i \leq n - 1, \sigma'_i \subset \sigma'_{i+1}.$$

Si de plus, $\exists g_1, \dots, g_n \in \Gamma$ tels que $\{g_1\sigma'_1, \dots, g_n\sigma'_n\} \in K''$. Alors $\{g_1\sigma'_1, \dots, g_{n-1}\sigma'_{n-1}\} \in K''$ par définition d'un complexe simplicial, et par hypothèse de récurrence, il existe $g \in \Gamma$ tel que :

$$\forall i \leq n - 1, g\sigma'_i = g_i\sigma'_i.$$

Alors $\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_{n-1}, g^{-1}g_n\sigma'_n\} \in K''$. L'action par $g^{-1}g_n$ conserve la dimension des simplexes. Donc nécessairement $\sigma'_{n-1} \subset g^{-1}g_n\sigma'_n$. Comme de plus, $\sigma'_{n-1} \subset \sigma'_n$ alors $\sigma'_{n-1} \subset \sigma'_n \cap g^{-1}g_n\sigma'_n$.

D'après (1), $\forall s \in \sigma'_{n-1}, g^{-1}g_ns = s$. En particulier,

$$\forall i \leq n - 1, g^{-1}g_n\sigma'_i = \sigma'_i$$

et donc,

$$\forall i \leq n - 1, g_n\sigma'_i = g\sigma'_i = g_i\sigma'_i$$

Finalement,

$$\forall i \leq n, g_n\sigma'_i = g_i\sigma'_i.$$

Par induction sur n , on a la résultat cherché (pour $n = 1$, le résultat étant trivial). □

Quel est l'intérêt que cette action soit régulière ? Tout simplement, on va montrer que le complexe $\Gamma \backslash P_n(\Gamma, S)''$ est simplicial.

Proposition 22. *Soit Γ, S un groupe. Alors le quotient $\Gamma \backslash P_n(\Gamma, S)''$ est un complexe simplicial.*

Démonstration. On sait que $P_n(\Gamma, S)''$ est simplicial. Il suffit alors de montrer que pour tout simplexe $\{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_k\} \in \Gamma \backslash P_n(\Gamma, S)''$, si σ_i et σ'_i sont deux représentants de $\bar{\sigma}_i$ dans $P_n(\Gamma, S)''$, alors $\{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_k\} = \Gamma\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} = \Gamma\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_k\}$.

Si σ_i et σ'_i sont deux représentants de $\bar{\sigma}_i$ dans $P_n(\Gamma, S)''$, alors $\forall i, \bar{\sigma}_i = \Gamma\sigma_i = \Gamma\sigma'_i$. En particulier, $\forall i, \exists g_i \in \Gamma$ tel que $\sigma_i = g_i\sigma'_i$. Donc $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} = \{g_1\sigma'_1, \dots, g_k\sigma'_k\}$. Par la proposition précédente, on a que $\exists g \in \Gamma$ tel que $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} = g\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_k\}$. Et donc $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ et $\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_k\}$ définissent la même orbite (c'est-à-dire le même complexe simplicial dans $\Gamma \backslash P_n(\Gamma, S)''$).

Il s'en suit que $\Gamma \backslash P_n(\Gamma, S)''$ est un complexe simplicial. □

3 Groupes hyperboliques

3.1 Hyperbolicité

3.1.1 Hyperbolicité d'un espace métrique

Il existe plusieurs définitions équivalentes (bien sûr !) de l'hyperbolicité d'un espace métrique. Voyons-en une qui a l'avantage d'être à la fois visuellement parlante, et pratique pour l'utilisation que nous en ferons.

Définition 23. *Espace métrique δ -hyperbolique.*

On dit d'un espace métrique (E, d) qu'il est δ -hyperbolique si $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $w, x, y, z \in E$, on a :

$$d(x, z) + d(y, w) \leq \max(d(x, y) + d(z, w), d(x, w) + d(z, y)) + 2\delta$$

Une quantité intéressante pour manipuler la notion d'hyperbolicité est le produit de Gromov :

Définition 24. *Produit de Gromov.*

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $w \in E$, appelé point base, alors étant donné $x, y \in E$ le produit de Gromov de x et de y est la quantité :

$$(x|y)_w = \frac{1}{2}(d(w, x) + d(w, y) - d(x, y))$$

L'idée intuitive du produit de Gromov $(x|y)_w$ est qu'il quantifie la distance de w aux géodésiques reliant x à y . Plus le produit de Gromov est grand, plus cette géodésique est loin du point-base.

Proposition 25. *Reformulation de la δ -hyperbolicité.*

Un espace métrique (E, d) est δ -hyperbolique, $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, si et seulement si pour tout $w, x, y, z \in E$, on a :

$$(x|z)_w \geq \min((x|y)_w, (y|z)_w) - \delta$$

Démonstration. Si (E, d) est δ -hyperbolique, alors pour tout $w, x, y, z \in E$, on a :

$$d(x, z) + d(y, w) \leq \max(d(x, y) + d(z, w), d(x, w) + d(z, y)) + 2\delta$$

Il ne reste plus qu'à calculer :

$$d(x, z) + d(y, w) - (d(x, w) + d(z, w)) \leq \max(d(x, y) - d(x, w), d(z, y) - d(z, w)) + 2\delta$$

On multiplie par -1 :

$$-d(x, z) - d(y, w) + d(x, w) + d(z, w) \geq \min(-d(x, y) + d(x, w), -d(z, y) + d(z, w)) - 2\delta$$

On change $d(y, w)$ de côté :

$$d(x, w) + d(z, w) - d(x, z) \geq d(y, w) + \min(-d(x, y) + d(x, w), -d(z, y) + d(z, w)) - 2\delta$$

En rentrant $d(y, w)$ dans le « min », on a le résultat voulu :

$$(x|z)_w \geq \min((x|y)_w, (y|z)_w) - \delta$$

La réciproque s'obtient en faisant les opérations inverses. □

Définition 26. *Géodésiques.*

Soit (E, d) un espace métrique.

On appellera :

- géodésique de E une isométrie $f: \mathbb{Z} \rightarrow E$.
- segment géodésique de E une isométrie $f: \mathbb{Z} \cap [0, k] \rightarrow E$.

- *rayon géodésique de E une isométrie $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow E$*

Par exemple, un segment géodésique noté $[a, b]$ reliant un point a à un point b est une isométrie $f: \mathbb{Z} \cap [0, k] \longrightarrow E$ telle que $f(0) = a$ et $f(k) = b$.

On identifiera une géodésique et son image dans l'espace métrique.

Définition 27. *Espace géodésique.*

On dira d'un espace métrique (E, d) qu'il est géodésique si pour toute paire de point $x, y \in E$ il existe un segment géodésique reliant x à y .

Proposition 28. *Tout groupe est géodésique.*

Démonstration. Soit Γ, S un groupe. Soit $x \in G$. Alors $\exists s_1, \dots, s_n \in S$ tels que $x = \prod s_i$ et $d(x, e_\Gamma) = n$.

De manière évidente : $\forall i, j \leq n, d(s_1 \dots s_i, s_1 \dots s_j) \leq |j - i|$.

Supposons $i < j$. Si $d(s_1 \dots s_i, s_1 \dots s_j) < |j - i|$, par isométrie de la translation à gauche, $d(e_\Gamma, s_i \dots s_j) < |j - i|$, et il existerait alors $s'_i, \dots, s'_k \in S$ avec $i \leq k < j$ tels que $s_i \dots s_j = s'_i \dots s'_k$. On aurait alors $x = s_1 \dots s_{i-1} s'_i \dots s'_k s_{j+1} \dots s_n$ et on aurait $d(x, e_\Gamma) < n$. D'où une contradiction.

Donc $\forall i, j \leq n, d(s_1 \dots s_i, s_1 \dots s_j) = |j - i|$, et donc $\forall i \leq j \leq n, d(e_\Gamma, s_i \dots s_j) = j - i$. On a donc défini une isométrie $f: \mathbb{Z} \cap [0, n] \longrightarrow \Gamma$ et $f(0) = e_\Gamma$. Et donc il existe une isométrie reliant e_Γ à tout point $x \in \Gamma$. Par isométrie de la translation à gauche, on voit qu'il existe une isométrie reliant deux points quelconques. \square

Voici maintenant une notion de géodésique plus « souple » :

Définition 29. *Quasi-isométrie, quasi-géodésiques.*

Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques.

Une (λ, c) -quasi-isométrie de E vers E' est une application $f: E \longrightarrow E'$ telle que : $\forall x, y \in E$,

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - c \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + c$$

On appellera :

- (λ, c) -quasi-géodésique de E une (λ, c) -quasi-isométrie $f: \mathbb{Z} \longrightarrow E$.
- (λ, c) -quasi-segment géodésique de E une (λ, c) -quasi-isométrie $f: \mathbb{Z} \cap [0, k] \longrightarrow E$.
- (λ, c) -quasi-rayon géodésique de E une (λ, c) -quasi-isométrie $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow E$

La notion de quasi-isométrie est primordiale dans la théorie des groupes hyperboliques. En effet, d'une part, on verra que les orbites de certains éléments d'un groupe hyperbolique décrivent des quasi-géodésiques, et que d'autre part, dans un groupe hyperbolique, à distance finie près (on verra quel sens donner à cette expression), une quasi-géodésique est une géodésique.

Remarque 30. Pour illustrer le fait que la quasi-isométrie reflète une similitude concrète, montrons que si S et S' sont deux ensembles générateurs de Γ , alors Γ, S et Γ, S' sont isométriques :

Soit $\mu = \max_{x \in S} d_{S'}(e_\Gamma, x)$ et soit $\mu' = \max_{x \in S'} d_S(e_\Gamma, x)$.

Alors $\forall x, y \in \Gamma, d_S(x, y) \leq \mu' d_{S'}(x, y)$ et $d_{S'}(x, y) \leq \mu d_S(x, y)$.

Et donc en prenant $\lambda = \max(\mu, \mu')$ et $c = 0$, on a que $\text{id}: \Gamma, S \longrightarrow \Gamma, S'$ est une (λ, c) -quasi-isométrie.

Voici une proposition de géométrie assez utile pour les démonstrations techniques...

Proposition 31. *Si (E, d) est un espace métrique δ -hyperbolique, alors ses triangles géodésiques sont δ -fins. C'est-à-dire si (a, b, c) est un triangle de (E, d) , alors tout point d'un segment géodésique $[a, b]$ est à une distance inférieure à 4δ de la réunion des segments géodésiques $[a, c]$ et $[b, c]$.*

Démonstration. Soit (a, b, c) un triangle de (E, d) . Soit $u \in [a, b]$.

Si $d(a, u) \leq (b|c)_a$, on choisit $v \in [a, c]$ tel que $d(a, u) = d(a, v)$.

Sinon, on choisit $v \in [b, c]$ tel que $d(c, v) = d(a, u) - d(a, c)$.

Dans les deux cas, on a $(u|b)_a = (c|v)_a := t$ et $(b|c)_a \geq t$.

Par hyperbolicité,

$$(u|v)_a \geq \min((u|b)_a, (b|v)_a) - \delta \geq \min((u|b)_a, (b|c)_a, (c|v)_a) - 2\delta = t - 2\delta$$

Donc

$$d(u, v) = 2t - 2(u|v)_a \leq 2t - 2(t - 2\delta) = 4\delta$$

□

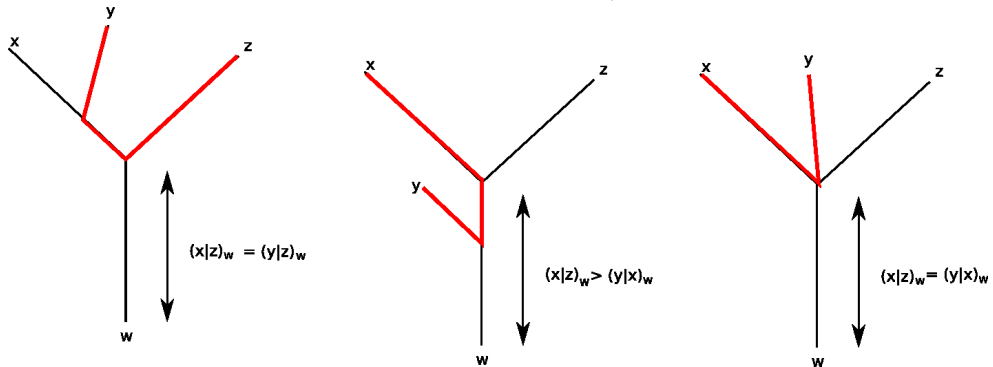
3.1.2 Hyperbolicité d'un groupe

Définition 32. *Un groupe Γ, S est dit δ -hyperbolique si son graphe de Cayley est δ -hyperbolique.*

On dira simplement qu'un groupe est hyperbolique s'il existe un tel δ .

Exemple 33. • Un groupe fini Γ est trivialement δ -hyperbolique (en prenant $\delta = \max_{x, y \in \Gamma} d(x, y)$).

- Tout groupe libre est hyperbolique. En effet, le graph de Cayley d'un groupe hyperbolique est un arbre (car s'il existe un cycle alors on aurait un produit d'éléments de l'ensemble générateur qui serait égal à l'élément neutre). On a donc 3 cas possibles :



Dans chacun de ces 3 cas, on vérifie bien l'inégalité de Gromov définissant un espace hyperbolique (proposition 25).

Cet exemple est important, car en regardant de plus près la définition de l'hyperbolicité au sens de Gromov, on voit que « de loin » les géodésiques minimisantes d'un groupe hyperbolique se comportent comme dans un groupe libre.

Comme annoncé, voici deux propositions justifiant en partie l'intérêt porté aux quasi-géodésiques dans le cadre de groupes hyperboliques.

Proposition 34. *Soit Γ un groupe δ -hyperbolique. Si $f: [0, k] \rightarrow \Gamma$ est un (λ, c) -quasi-segment, alors il existe une constante D ne dépendant que de δ, λ, c et il existe un segment géodésique $g: [0, d(f(0), f(k))] \rightarrow \Gamma$ tel que :*

- $\mathcal{H}(f, g) \leq D$
- et f et g ayant les mêmes extrémités

Démonstration. La démonstration de cette proposition est longue et technique. On pourra se référer à [3], Chap. 5, §4. Le principe est de d'abord montrer l'existence d'une constante M majorant la distance d'un quasi-segment particulier à un segment géodésique, puis de montrer l'existence d'une constante M' majorant la distance entre ce quasi-segment particulier et notre quasi-segment f . Enfin, en ajoutant les deux majorations, on obtient la constante D de l'énoncé. \square

On va maintenant prouver que pour tout quasi-rayon, il existe en fait un rayon géodésique qui est à distance de Hausdorff finie. Cette distance étant déterminée uniquement par l'hyperbolicité et les constantes du quasi-rayon. Ceci justifie plus fortement encore l'appellation de quasi-rayon.

Proposition 35. *Soit Γ un groupe δ -hyperbolique. Si f est un (λ, c) -quasi-rayon, alors il existe une constante D ne dépendant que de δ, λ, c et il existe un rayon géodésique g tel que :*

- $\mathcal{H}(f, g) \leq D$
- et $f(0) = g(0)$

Démonstration. Soit \mathcal{G}_g^k l'ensemble des géodésiques d'origine g , et de longueur plus petite que k . Un élément h de \mathcal{G}_g^k est donc une isométrie de $\mathbb{Z} \cap [1, k]$ vers Γ . En particulier, $\forall x \in \mathbb{Z} \cap [1, k]$, $\{x\}$ est un voisinage de x , et donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\{x\}$ est un voisinage de x tel que $d(h(x), h(x)) = 0 < \varepsilon$. Donc \mathcal{G}_g^k est une famille de fonctions équicontinue. De plus, l'image dans Γ de cette famille est contenue dans $B(g, k)$, et \mathcal{G}_g^k est uniformément borné. D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, \mathcal{G}_g^k muni de la distance uniforme est compact.

Soit f un (λ, c) -quasi-rayon.

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit g_n comme étant un segment géodésique reliant $f(0)$ à $f(n)$.

D'après la proposition 34, il existe une constante D ne dépendant que de δ, λ, c (en particulier indépendante de n) telle qu'on peut choisir g_n tel que $\mathcal{H}(f|_{[0, n]}, g_n) \leq D$.

On a alors que la suite $(g_n^k)_n := (g_n|_{[0, k]})_n$ est une suite $\mathcal{G}_{f(0)}^k$ qui est compact et possède donc une sous-suite uniformément convergente. On a donc une sous-suite $(g_{\varphi_k(n)})_n$ convergeant uniformément sur $B(f(0), k)$.

Pour $l \geq k$, $(g_n^l)_n$ est une suite de $\mathcal{G}_{f(0)}^l$ et donc *a fortiori* de $\mathcal{G}_{f(0)}^k$. Par extraction diagonale, on peut définir une géodésique g coïncidant avec les $\lim_{n \rightarrow \infty} (g_{\varphi_k(n)})_n$ sur les boules $B(f(0), k)$.

De plus, comme $\forall n \geq 0, \mathcal{H}(f|_{[0, n]}, g|_{[0, n]}) \leq D$, avec D ne dépendant que de δ, λ, c , alors, $\mathcal{H}(f, g) \leq D$. \square

Remarque 36. Ces propositions donnent un critère parfois pratique pour savoir si un groupe n'est pas hyperbolique. Prenons l'exemple de $(\mathbb{Z}^2, \{a, b\})$, le groupe libre à deux éléments.

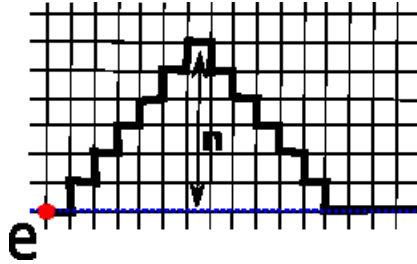


Figure 4. Graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}^2, \{a, b\})$

Soit $f_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ le chemin en noir dans le graphe de Cayley ci-dessus.

En particulier, f_0 est le rayon géodésique engendrée par a , représentée en pointillés bleu sur le graphe de Cayley.

On a de plus : $\forall n, \forall x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \frac{1}{2}d(x, y) \leq d(x, y) \leq d(f_n(x), f_n(y)) \leq 2d(x, y)$.

Donc f_n est un quasi-rayon pour tout n .

Si $(\mathbb{Z}^2, \{a, b\})$ était un groupe hyperbolique, on aurait qu'il existe une géodésique f et une constante D telle que pour tout n , $\mathcal{H}(f_n, f) \leq D$. On aurait alors : $\mathcal{H}(f_0, f_n) \leq D$ pour tout n , ce qui est clairement faux. Donc $(\mathbb{Z}^2, \{a, b\})$ n'est pas hyperbolique.

3.2 Tout groupe hyperbolique est de présentation finie

Avant de rentrer dans la démonstration proprement dite, démontrons un lemme technique :

Lemme 37. *Si Γ, S est un groupe δ -hyperbolique, alors pour $n \geq 4\delta + 2$ tout sous-complexe K fini de $P_n(\Gamma, S)$ peut être pavé 2-simplicialement dans $P_n(\Gamma, S)$. En d'autres termes :*

$\exists K'$ sous-complexe fini de $P_n(\Gamma, S)$ tel que :

- $K \subset K'$
- Si $\{g_1, g_2\}$ est un 1-simplexe de K' alors $\exists g_3 \in K'$ tel que $\{g_1, g_2, g_3\}$ soit un 2-simplexe de K' .

Démonstration. Soit $d = \max \{d(g_1, g_2) \mid g_1, g_2 \in \text{Som}(K)\} \in \mathbb{N}$ (car K est fini).

Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur d . Pour $d \leq n$, tout sous-ensemble de sommet forme un simplexe de $P_n(\Gamma, S)$ et c'est trivial en prenant $K' = K$.

Supposons $d > n$.

Soit $g_1, g_2 \in \text{Som}(K)$ réalisant cette distance.

Soit $[g_1, g_2]$ un segment géodésique reliant g_1 à g_2 . Soit $g \in [g_1, g_2]$ tel que :

$$d = d(g_1, g_2) = d(g_1, g) + d(g, g_2) = E(n/2) + d(g, g_2)$$

Par définition de l'hyperbolicité, on a : $\forall g' \in K$

$$d(g, g') + d(g_1, g_2) \leq \max(d(g, g_2) + d(g_1, g'); d(g_1, g) + d(g', g_2)) + 2\delta$$

En remplaçant les valeurs connues des distances :

$$d(g, g') \leq \max(d(g, g_2) + d(g_1, g'); E(n/2) + d(g', g_2)) + 2\delta - d$$

Il suit que :

$$d(g, g') \leq \max(-E(n/2) + d(g_1, g'); E(n/2) - d + d(g', g_2)) + 2\delta$$

Par hypothèse, $n \geq 4\delta + 2$, c'est à dire $2\delta \leq n/2 - 1$:

$$d(g, g') \leq \max(-E(n/2) + d(g_1, g'); E(n/2) - d + d(g', g_2)) + n/2 - 1$$

En simplifiant :

$$d(g, g') \leq \max(d(g_1, g') - 1; n + d(g', g_2) - d) \quad (*)$$

Par maximalité de d :

$$d(g, g') \leq \max(d - 1; n)$$

Et par hypothèse $d > n$:

$$d(g, g') \leq d - 1$$

$\forall g' \in K$, si $\{g', g_1\}$ est un 1-simplexe alors $d(g_1, g') \leq n$.

Par (*) :

$$d(g, g') \leq \max(n - 1; n + d(g', g_2) - d) \leq \max(n - 1; n) \leq n$$

Donc si $\{g', g_1\}$ est un 1-simplexe alors $\{g', g\}$ en est un aussi. (**)

D'autre part $d(g_1, g) = E(n/2) \leq n$, et alors $\{g', g_1, g\}$ est un 2-simplexe. On note $\mathfrak{s}^{(0)}$ l'ensemble des 2-simplexes ainsi formés.

On considère le complexe $K^{(1)}$ obtenu depuis K en remplaçant g_1 par g . Cela reste bien un complexe d'après (**).

Il suffit de ré-itérer la méthode sur $K^{(1)}$, on obtient un $\mathfrak{s}^{(1)}$.

Et ceci jusqu'à ce que $\max \{d(g_1, g_2) \mid g_1, g_2 \in \text{Som}(K^{(s)})\} \leq n$.

En posant $K^{(0)} := K$, le complexe $K' = \bigcup_{0 \leq i \leq s} K^{(i)} \cup \mathfrak{s}^{(i)}$ convient. \square

Définition 38. Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$. On appelle $\gamma_1 \bullet \dots \bullet \gamma_k$ le chemin sur le 1-squelette du complexe de Rips $P_n(\Gamma, S)$ empruntant les géodésiques et passant par les éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Remarque 39. On identifiera un élément $w \in L(S)$, où $L(S)$ est le groupe libre sur S , à un chemin dans le 1-squelette du complexe de Rips $P_n(\Gamma, S)$: si $w = s_1 \dots s_n$ avec $s_1, \dots, s_n \in S$, alors on note abusivement : $s_1 \bullet \dots \bullet s_n = s_1 \dots s_n$

On notera \emptyset le mot vide dans $L(S)$.

Définition 40. *Présentation de groupe.*

Soit Γ, S un groupe. On dit que Γ est de présentation R si $L(S)/R \simeq \Gamma$.

Soit $\pi: L(S) \longrightarrow \Gamma$ la projection canonique.

On a donc que $\ker \pi$ est une présentation de Γ .

On va en fait expliciter un ensemble R_n qui engendre par conjugaisons $\ker \pi$. On note $\langle R_n \rangle_N := \{grg^{-1} | g \in \Gamma, r \in R_n\}$.

On peut déjà remarquer qu'un élément w de $\ker \pi$ est une boucle dans le 1-squelette d'un complexe de Rips $P_n(\Gamma, S)$. On va montrer que w peut s'écrire comme produit de conjugué de R_n .

Notation 41. Soit $E_n(\gamma_1, \gamma_2)$ l'ensemble des mots de $L(S)$ de longueur (dans $L(S)$) inférieure à n reliant γ_1 à γ_2 . Formellement : $E_n(\gamma_1, \gamma_2) = \{w \in L(S) | \pi(w) = \gamma_1^{-1}\gamma_2 \text{ et } l(w) \leq n\}$.

Comme S est fini, alors pour tout n , $\bigcup_{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma} E_n(\gamma_1, \gamma_2)$ est un ensemble fini.

Soit R_n l'ensemble des mots de $L(S)$ suivants :

- Si $\sigma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ est un 2-simplexe de $P_n(\Gamma, S)$, alors $w_1 w_2 w_3 \in R_n$ où $w_1 \in E_n(\gamma_1, \gamma_2)$, $w_2 \in E_n(\gamma_2, \gamma_3)$, $w_3 \in E_n(\gamma_3, \gamma_1)$.
- Si $\sigma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ est un 1-simplexe de $P_n(\Gamma, S)$, alors $w w^{-1} \in R_n$ où $w \in E_n(\gamma_1, \gamma_2)$.

Intuitivement, on met dans R_n tous les mots de $L(S)$ représentant des géodésiques de Γ faisant ou bien le tour d'un 2-simplexe, ou bien un aller-retour sur un 1-simplexe.

Proposition 42. $R_n \subset \ker \pi$.

Démonstration. Pour tout $x \in R_n$, soit x est de la forme $w w^{-1}$, et trivialement $\pi(x) = e$.

Soit $x = w_1 w_2 w_3$ avec $w_1 \in E_n(\gamma_1, \gamma_2)$, $w_2 \in E_n(\gamma_2, \gamma_3)$, $w_3 \in E_n(\gamma_3, \gamma_1)$. Et dans ce cas :

$$\pi(x) = \pi(w_1) \pi(w_2) \pi(w_3) = \gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_2^{-1} \gamma_3 \gamma_3^{-1} \gamma_1 = e. \quad \square$$

Définition 43. On dira que deux éléments de $L(S)$ w et w' sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre en remplaçant un nombre fini de ses lettres par des produits d'éléments de R_n . Formellement :

$$w \sim_a w' \Leftrightarrow \exists s_1, \dots, s_l \in S \cup \{\emptyset\} \text{ tel que } \begin{cases} w = s_1 \dots s_l \text{ est l'écriture réduite de } w \\ w' = s'_1 \dots s'_l \text{ avec } \forall i, \begin{cases} s'_i = s_i \\ \text{ou} \\ s'_i = r_1 \dots r_k \text{ avec } r_1, \dots, r_k \in R_n \end{cases} \end{cases}$$

Enfin, pour que définir une relation d'équivalence, on note $w \sim w' \Leftrightarrow \begin{cases} w \sim_a w' \\ \text{ou} \\ w' \sim_a w \end{cases}$

D'après la proposition précédente, on remarque que si $w \sim w'$ alors $\pi(w) = \pi(w')$.

Soit $w = s_1 \dots s_l \in \ker \pi$ avec $s_i \in S$ et $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$. Comme w réalise une boucle dans $P_n(\Gamma, S)$, alors on peut définir de manière naturelle une application simpliciale :

$$f: \begin{array}{l} S_l^1 \longrightarrow P_n(\Gamma, S) \\ p_i \longmapsto s_1 \dots s_{i-1} \end{array} \quad (\text{avec } f(p_1) = e).$$

Intuitivement, on « colle » S^1 sur notre boucle w .

On a vu par le lemme que si $n \geq 4\delta + 2$, alors $P_n(\Gamma, S)$ 2-simplicialement pavable. Donc il existe un disque simplicial $D^2(w)$ tel qu'on puisse prolonger f en une fonction $F: D^2(w) \rightarrow P_n(\Gamma, S)$ qui coïncide donc avec f sur S_l^1 (un tel disque existe car sinon, il existerait un « trou » et de manière évidente $f(S^1)$ ne serait pas contractile).

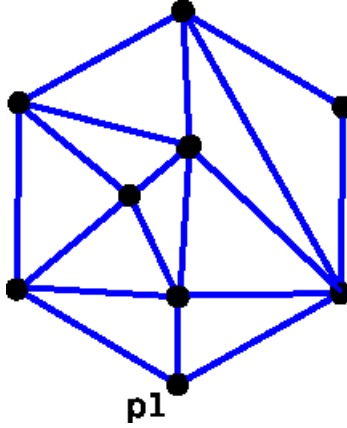


Figure 5. Exemple d'un disque simplicial

On notera abusivement $F(x_1 \bullet \dots \bullet x_i) = F(x_1) \bullet \dots \bullet F(x_i)$.

Soit N le nombre de 2-simplexes composant $D^2(w)$.

Nous allons prouver le résultat par induction sur N :

Soit P_i l'assertion : « Si $w \in \ker \pi$ est tel que $D^2(w)$ est composé de i 2-simplexes, alors $\emptyset \sim w$ ».

Pour $i = 0$, c'est trivial, puisque si $w \in L(S)$ est tel que $D^2(w)$ est composé d'aucun 2-simplexe, alors w est de la forme $w = s_1 \dots s_{l/2} s_{l/2}^{-1} \dots s_1^{-1}$. Comme $s_{l/2-1} s_{l/2-1}^{-1} \in R_n$, alors $w \sim s_1 \dots s_{l/2-1} s_{l/2-1}^{-1} \dots s_1^{-1}$. Et de la même manière $l/2$ fois, $w \sim \emptyset$.

Supposons P_{N-1} vraie.

Soit $w \in L(S)$ tel que $D^2(w)$ est composé de N 2-simplexes.

Soit σ un 2-simplexe de $P_n(\Gamma, S)$ contenant $\{p_i, p_{i+1}\}$ comme face.

Deux cas se présentent :

- σ contient une autre face du périmètre extérieur de $D^2(w)$. Par exemple $\{p_{i+1}, p_{i+2}\}$. Dans ce cas, $\sigma = \{p_i, p_{i+1}, p_{i+2}\}$. Alors :

$$w = F(p_1 \dots p_l) = F(p_1 \dots p_i p_{i+1} p_{i+2} \dots p_l) = F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet p_{i+1} \bullet p_{i+2} \bullet \dots \bullet p_l)$$

$$\begin{aligned}
&\sim F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet p_{i+1} \bullet p_{i+2} \bullet (p_i \bullet p_{i+2}) \bullet \dots \bullet p_l) \\
&\sim F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet p_{i+2} \bullet \dots \bullet p_l) \\
&\text{car } \{s_i, s_{i+1}, s_{i+2}\} \in R_n \text{ et donc } \emptyset \sim F(p_i \bullet p_{i+1} \bullet p_{i+2}).
\end{aligned}$$

On obtient alors que $D^2(F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet p_{i+2} \bullet \dots \bullet p_l)) = p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet p_{i+2} \bullet \dots \bullet p_l$. Par induction, comme on vient de « retirer » σ de $D^2(w)$, on déduit :

$$w \sim F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet p_{i+2} \bullet \dots \bullet p_l) \sim \emptyset$$

- σ ne contient pas d'autre face de S_l^1 . Alors $\sigma = \{p_i, p_{i+1}, \gamma\}$ et :
$$\begin{aligned}
w &= F(p_1 \dots p_l) = F(p_1 \dots p_i p_{i+1} \dots p_l) = F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet p_{i+1} \bullet \dots \bullet p_l) \\
&\sim F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet (p_{i+1} \bullet \gamma \bullet p_i) \bullet p_{i+1} \bullet \dots \bullet p_l)
\end{aligned}$$

Or, par réduction de l'écriture :

$$p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet (p_{i+1} \bullet \gamma \bullet p_i) \bullet p_{i+1} \bullet \dots \bullet p_l = p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet \gamma \bullet p_{i+1} \bullet \dots \bullet p_l.$$

Donc $w \sim F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet \gamma \bullet p_{i+1} \bullet \dots \bullet p_l)$. Par induction, comme on vient de « retirer » σ de $D^2(w)$, on déduit :

$$w \sim F(p_1 \bullet \dots \bullet p_i \bullet \gamma \bullet p_{i+1} \bullet \dots \bullet p_l) \sim \emptyset$$

On a bien notre résultat pour tout N . Ainsi $\forall w \in \ker \pi, w \sim \emptyset$. Et donc

$$\forall w \in \ker \pi, w = \prod r_i \in \langle R_n \rangle_N$$

On a alors que $\ker \pi = \langle R_n \rangle_N$, et donc $\Gamma \simeq L(S)/\ker \pi \simeq L(S)/\langle R_n \rangle_N$. C'est-à-dire R_n est une présentation (finie) de Γ .

3.3 Sous-groupe produit dans un groupe hyperbolique

Nous allons ici démontrer une propriété étonnante sur les géodésiques des groupes hyperboliques, pour en déduire le résultat suivant :

Théorème 44. *Si Γ , S un groupe hyperbolique alors Γ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 .*

Proposition 45. *Soit Γ , S un groupe δ -hyperbolique. Si deux rayons géodésiques f et g de Γ sont à distance de Hausdorff finie, alors $\exists s \geq 0$ tq $\mathcal{H}(f|_{\geq s}, g|_{\geq s}) \leq 8\delta$.*

Cette propriété est très étonnante, car si deux géodésiques ne sont pas infiniment éloignées, alors elles sont en fait vraiment très proches !

Démonstration. Cette preuve est due à [4].

Si f et g sont à distance de Hausdorff finie, c'est qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et une constante $M \in \mathbb{R}_{>0}$ telles que :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, d(f(i), g(\varphi(i))) \leq M$$

Posons $h = g \circ \varphi$

Prenons $i \leq j \leq k \in \mathbb{Z}$. Alors, par l'hyperbolicité de Γ , on a que le triangle $(f(i), f(k), h(i))$ est un triangle δ -fin. En particulier comme $f(j)$ est sur une géodésique de $f(i)$ à $f(k)$, alors $f(j)$ est à une distance inférieure à 4δ d'un point du segment géodésique de $f(i)$ à $h(i)$ ou d'un point du segment géodésique de $f(k)$ à $h(i)$.

Si $d(f(j), [f(i), h(i)]) \leq 4\delta$, alors par inégalité triangulaire, on a que $d(f(j), f(i)) \leq 4\delta + M$

Ainsi, en choisissant j tel que $j > i + M + 4\delta$, on nécessairement que $f(j)$ est à une distance inférieure à 4δ d'un point x du segment géodésique de $f(k)$ à $h(i)$.

On procède de même pour le triangle géodésique $(h(i), f(k), h(k))$, en prenant $k \geq j + M + 4\delta$. On en déduit que $d(x, [f(i), f(k)]) \leq 4\delta$.

Au final : $\forall i \in \mathbb{Z}$, en posant $j = E(i + M + 4\delta) + 1$, $d(f(j), g) \leq d(f(j), h) \leq 4\delta + 4\delta = 8\delta$.

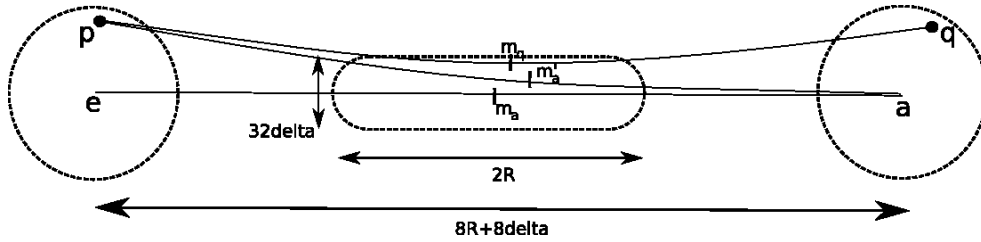
En renumérotant, on a bien $\forall i \in \mathbb{Z}, d(f(i), g) \leq 8\delta$.

En changeant les rôles de f et g , on a bien le résultat voulu. \square

Proposition 46. *Soit $g \in \Gamma$ un élément d'ordre infini d'un groupe hyperbolique. Si β est un segment géodésique reliant e à g , alors la suite $\alpha := (g^k \beta)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ forme un quasi-rayon.*

Démonstration. ([1] pp.33-35) On sait que les boules de rayon fini contiennent qu'un nombre fini de points. Ainsi, comme g est d'ordre fini, pour tout $R > 0$, on peut trouver $k > 0$ tel que $d(e, g^k) > 8R + 8\delta$. On pose $a := g^k$.

Soit β le segment géodésique reliant e à a . Soit y le milieu de β . Soit I la portion de β centrée en y et de diamètre $2R$.



On va montrer dans un premier temps que les milieux des géodésiques reliant les points de $B(e, R)$ à ceux de $B(a, R)$ sont à distance plus petite que 16δ de I .

Soit $p \in B(e, R)$ et $q \in B(a, R)$.

Soit m_q le milieu du segment géodésique $[p, q]$, et m_a celui de $[p, a]$.

Soit un point $m'_a \in [p, a]$ tel que $d(p, m'_a) = d(p, m_q)$ (A).

Comme $|d(p, q) - d(p, a)| \leq R$, alors $|d(p, m_a) - d(p, m_q)| = |d(p, m_a) - d(p, m'_a)| \leq R/2$ (B).

Comme le triangle (p, q, a) est δ -fin, et que $d(m'_a, [a, q]) \geq \frac{1}{2}(8R + 8\delta - R) - R > 4\delta$ pour R assez grand, alors nécessairement $d([p, m'_a], [p, q]) \leq 4\delta$. Comme de plus (A), alors $d(m'_a, m_q) \leq 8\delta$ (C).

De plus, $d(m'_a, e) \geq \frac{1}{2}(8R + 8\delta) - R \geq 3R + 4\delta$ (D).

On raisonne de même avec le triangle (a, e, p) . On trouve m' et $m'' \in [e, a]$ tels que :

$$(A') \quad d(m', a) = d(m_a, a)$$

$$(A'') \quad d(m'', a) = d(m'_a, a)$$

$$(B') \quad d(m', y) \leq R/2$$

$$(C') \quad d(m', m_a) \leq 8\delta$$

$$(C'') \quad d(m'', m'_a) \leq 8\delta$$

$$(E) \quad d(m'', m') = d(m'_a, m_a)$$

De (C'') et (C), on déduit que $d(m'', m_q) \leq 16\delta$.

Et de (B), (B') et (E) que $d(m'', y) \leq R$

On vient de montrer notre première assertion.

Soit N le nombre de points contenus dans la boule $B(e, 16\delta)$. On considère l'ensemble des points milieu des segments géodésiques $g^i\beta$ pour $i = 0, \dots, NR$. Ces $NR + 1$ points sont tous distincts (car sinon, $\exists j, j'$ tq $g^j y = g^{j'} y$ et g serait d'ordre fini).

Donc pour $i = 0, \dots, NR$, si $g^i \in B(e, R)$, alors les extrémités du segment géodésique $g^i\beta$ sont dans les boules $B(e, R)$ et $B(a, R)$. D'après l'assertion, on aurait que les $NR + 1$ points milieux seraient contenus dans $I_{16\delta}$ (le 16δ voisinage de I), de cardinal au plus NR . Ce qui amènerait une contradiction avec le fait qu'ils soient distincts.

Donc il existe une fonction $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que pour tout R assez grand, $p(R) \leq NR$ et $g^{p(R)} \notin B(e, R)$. De plus, nécessairement, $p(R) \geq R/d(e, g)$.

Montrons désormais le cas limite ($\forall R, p(R) = NR$) à savoir que pour tout R , $g^{NR} \notin \dot{B}(e, R)$

Supposons qu'il existe R tel que $g^{NR} \in \dot{B}(e, R)$.

Soit $\varepsilon = R - d(e, g^{NR})$, soit $s_n := nNR + R'$ où $n, R' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $0 \leq R' \leq NR$.

Alors,

$$\begin{aligned} d(e, g^{s_n}) &\leq d(e, g^{nNR}) + d(g^{nNR}, g^{s_n}) \leq d(e, g^{nNR}) + d(e, g^{R'}) \leq nd(e, g^{NR}) + d(e, g^{R'}) \\ &\leq n(R - \varepsilon) + d(e, g^{R'}) < nR \text{ pour } n \geq n_0 \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

On peut alors choisir R_0 tel que $p(R_0) \geq n_0 NR$ et R' tel que $s_n = p(R_0)$. On aurait donc $d(e, g^{p(R_0)}) < p(R_0)/N \leq R_0$. Or, par l'assertion précédente, on aurait que $g^{p(R_0)} \notin B(e, R_0)$, d'où une contradiction.

Donc $\forall R, d(e, g^{NR}) \geq R$.

On a réussi à maîtriser notre élément d'ordre infini. Reste à savoir si en recollant les morceaux, on obtient bien une quasi-géodésique.

On pose $l := d(e, g)$.

Soit $\alpha := (g^k\beta)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$. $\forall s, t \geq 0$, on définit $k_s := E(s/l)$, $k_t := E(t/l)$, de sorte que $\alpha(s) \in g^{k_s}\beta$ et $\alpha(t) \in g^{k_t}\beta$.

De plus, $d(g^{NR_1}, g^{NR_2}) \geq |R_1 - R_2|$ et donc :

$$d(\alpha(s), \alpha(t)) \geq \frac{|k_s - k_t|}{N} - 1 - 2l \geq \frac{1}{Nl}|s - t| - 1 - \frac{2}{l} - 2l$$

$$\text{et } d(\alpha(s), \alpha(t)) \leq Nl|s - t| + 2l + 1 + \frac{2}{l}.$$

C'est-à-dire α est une (λ, c) -quasi-géodésique, avec $\lambda := Nl$ et $c := 2l + 1 + \frac{2}{l}$. □

On peut maintenant montrer le théorème 44:

Démonstration. Si Γ, S est un groupe hyperbolique contenant un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 , alors, il existe deux éléments a et b de Γ , d'orbites disjointes, d'ordres infinis, et qui de plus commutent.

On suppose que $a \in S$.

D'après la proposition 46, a^k décrit une (λ, c) -quasi-géodésique f_0 . Par la démonstration de la proposition 46, on voit que qu'on peut construire un tel f_0 de sorte que si $a \in S$, alors nécessairement, $\forall k \geq 0, f_0(k) = a^r$ pour un certain r .

D'après la proposition 35, il existe un rayon f à distance de Hausdorff finie de f_0 .

De plus, comme a et b commutent, $\forall n \geq 0, f_n := b^n f_0$ est aussi une (λ, c) -quasi-géodésique (avec les mêmes constantes, indépendantes de n) à distance de Hausdorff finie de f . Cette distance ne dépendant que de λ, c et δ .

Donc f_n est à distance de Hausdorff finie de f_0 . Cette distance ne dépendant que de λ, c et δ .

Donc il existe une constante D telle que $\forall n \geq 0, \exists \mu, \nu \text{ tq } d(b^n a^\mu, a^\nu) \leq D$.

C'est-à-dire que $\forall n \geq 0, \exists \mu \text{ tq } b^n a^\mu \in B(e_\Gamma, D)$. Comme ces boules sont de cardinal fini, on aurait nécessairement que $b^i a^j = e_\Gamma$ pour un certain i et un certain j . On aurait alors une contradiction avec le fait que leurs orbites sont disjointes.

Si $a \notin S$, il existe λ', c' tels que $\varphi: \Gamma, S \rightarrow \Gamma, S \cup \{a, -a\}$ soit une (λ', c') -quasi-isométrie (remarque 30). Ainsi, toujours par la proposition 46, a^k décrirait une (λ'', c'') -quasi-géodésique f_0'' (où λ'' et c'' sont fonctions de λ, λ', c et c'). De plus, $\varphi(f_0'')$ serait à distance de Hausdorff finie de f_0 (décrite ci-dessus dans le cas $a \in S$). Puis, on peut réutiliser le même raisonnement sur $\Gamma, S \cup \{a, -a\}$. □

3.3.1 Bord d'un groupe hyperbolique

Définition 47. *Bord d'un groupe hyperbolique.*

Soit Γ un groupe hyperbolique. On appelle bord de Γ , noté $\partial\Gamma$ l'ensemble des classes d'équivalences des rayons géodésiques pour la relation :

$$f \sim g \Leftrightarrow \mathcal{H}(f, g) < \infty$$

Définition 48. *Convergence d'une suite vers le bord.*

Soit Γ un groupe hyperbolique. Soient $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de Γ et un point $g \in \partial\Gamma$. Soit f_i un rayon géodésique reliant x_i à g . On dira que la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers g si :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{H}(x_0, f_i) = +\infty$$

Remarque 49. Un tel rayon f_i existe puisque si $g \in \partial\Gamma$, alors il existe un rayon géodésique f représentant de g . D'après la proposition 28, Γ est géodésique, donc pour tout $k \geq 0$, il existe un segment géodésique f_i^k reliant x_i à $f(k)$. On a vu dans la démonstration de la proposition 35, qu'on peut extraire une suite convergente de $(f_i^k)_k$ vers un rayon f_i .

De plus, cette notion de convergence vers un point du bord est bien définie car si f'_i est une autre suite de rayons reliant les points de la suite $(x_i)_i$ à $g \in \partial\Gamma$, alors $\mathcal{H}(f'_i, f_i) < \infty$ par définition du bord, et donc si $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{H}(x_0, f_i) = +\infty$, nécessairement $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{H}(x_0, f'_i) = +\infty$.

Remarque 50. Cette notion de tendre vers un point du bord est en accord avec la topologie induite par une certaine métrique sur le bord (pour plus de détails voir [3] Ch.7, §3, Prop. 10 et Ch.7, §2). Intuitivement, deux point du bord sont proches si les géodésiques minimisantes qui les relient sont loin (au sens du produit de Gromov) d'un point base.

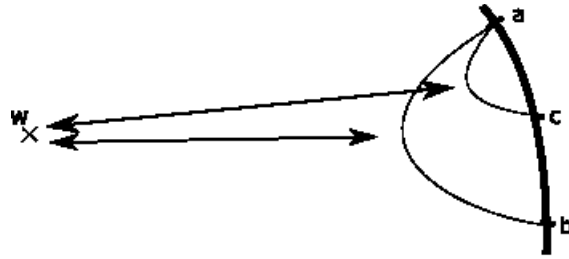


Figure 6. Sur cette figure le point « c » est plus proche de « a » que ne l'est « b ».

Proposition 51. *Soit Γ un groupe hyperbolique. Alors $\Gamma \cup \partial\Gamma$ est séquentiellement compact.*

Démonstration. Prenons une suite de points (x_i) de $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Si cette suite est bornée, elle est contenue dans une boule de rayon fini. D’après la remarque 12, cette boule ne contient qu’un nombre fini d’éléments. Par conséquent, on peut extraire une sous suite convergente de (x_i) .

Supposons cette suite non bornée. On peut donc extraire une sous-suite tendant vers l’infini (au sens de la distance sur le graphe de Cayley). Sans perte de généralité, on peut donc supposer que notre suite tend vers l’infini.

Soit f_i un segment géodésique reliant x_0 à x_i . Pour tout $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, comme $(x_i) \rightarrow \infty$, alors $f_i(s)$ est bien défini pour i assez grand. Pour un s fixé, la suite $(f_i(s))_i$ prend ses valeurs dans la sphère de centre w et de rayon s . Toujours d’après la remarque 12, cette sphère contient un nombre fini de points, et on peut donc supposer, quitte à extraire une sous suite que pour s fixé $(f_i(s))_i$ est constante à partir d’un certain rang ; en notant φ l’extraction et g_s la valeur limite, on obtient $\forall s, \exists N \text{ tq } \forall i \geq N, f_{\varphi(i)}(s) = g_s$.

En particulier, $(g_s)_s$ est une géodésique. Cette géodésique définit un point $g \in \partial\Gamma$.

Pour s fixé, et pour i assez grand, $f_{\varphi(i)}(s)$ existe et le triangle géodésique $(f_{\varphi(i)}(s), x_{\varphi(i)}, g)$ est δ -fin. Dans ce cas, la géodésique reliant $x_{\varphi(i)}$ à g est à distance de Hausdorff au moins $s - 4\delta$ de x_0 . On a donc que $(x_{\varphi(i)})_i \rightarrow g \in \partial\Gamma$ d’après la définition.

Donc $\Gamma \cup \partial\Gamma$ est séquentiellement compact. □

Remarque 52. De cette notion de bord d’un groupe, on peut trouver beaucoup de propriétés sur la structure du groupe lui même. On peut surtout déduire des propriétés relatives à des classifications infini/fini, comme par exemple, tout sous-groupe d’un groupe hyperbolique est soit fini, soit contient au moins un élément d’ordre infini. Mais pour cela, on a besoin de définir précisément une métrique, de définir l’action du groupe sur son bord, ... ce qui pourrait faire l’objet d’un projet de semestre à lui seul !

4 Conclusion, Remerciements

Nous avons exposé certaines propriétés d'une classe de groupe à la fois large mais aussi riche en résultats. Il est plaisant de travailler dans cette théorie, car nous sommes toujours entre algèbre et géométrie. L'intuition peut venir de la géométrie et donner les lignes de la preuve algébrique. Aussi certains résultats peuvent être purement géométriques et d'autres purement algébriques, mais cependant, toute propriété algébrique a son penchant géométrique et inversement. C'est à mon avis une grande richesse pour une théorie que de pouvoir naviguer entre ces deux types d'intuitions.

Certains comportements des groupes hyperboliques semblent contre-intuitifs (comme par exemple le rapprochement extrêmement mince de deux géodésiques à distance finie), lié à notre habitude de l'espace Euclidien. Mais ces surprises cultivent une part de mystère et rendent ce sujet d'autant plus attrayant !

Enfin, nous avons vu que beaucoup de notions introduites mériteraient d'être poussées plus loin (comme la notion de bord du groupe, ou d'action simpliciale) afin de pouvoir en extraire d'autres résultats intéressants.

Par ailleurs, je tiens à remercier mon encadrant, Nicolas Monod, qui d'une part m'a permis de découvrir ce sujet et qui a su se rendre disponible lorsque mes recherches se mordaient la queue.

Bibliographie

- [1] J. Alonso, T. Brady, D. Cooper, V. Ferlini, M. Lustig, M. Mihalik, M. Shapiro, and H. Short. *Notes on word hyperbolic groups*. Group Theory from a geometric viewpoint. World Scientific, Singapore, 1990.
- [2] G. Bredon. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, 1972.
- [3] E. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1990.
- [4] Frédéric Paulin. Points fixes des automorphismes de groupe hyperbolique. *Ann. Inst. Fourier*, 39(3):651–662, 1989.