

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale - Milano Bovisa



Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Orientamento Aerodinamica

**METODI A BASI RIDOTTE
PER PROBLEMI DI CONTROLLO
IN FLUIDODINAMICA AMBIENTALE**

Relatore: Prof. Alfio QUARTERONI
Correlatore: Dott. Ing. Gianluigi ROZZA

Tesi di Laurea di:
Annalisa QUAINI
Matr. 643881

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

A Giuseppe V.

Indice

1	Introduzione	7
2	Metodi a Basi Ridotte per Equazioni alle Derivate Parziali Parametrizzate	13
2.1	Introduzione	13
2.1.1	La relazione input-output	14
2.2	Definizione del Problema	14
2.2.1	Formulazione esatta	14
2.2.2	Approssimazione di Galerkin	15
2.3	Approssimazione a Basi Ridotte	17
2.3.1	Forma matriciale	18
2.3.2	Approccio “Black-Box”	19
2.3.3	Non-omogeneità del problema a basi ridotte	20
2.3.4	Sistema a basi ridotte e output	20
2.3.5	Decomposizione off-line / on-line	21
2.4	Limite Inferiore e Limite Superiore dell’Output a Basi Ridotte	22
2.4.1	Condizionatore dei valori limite	22
2.4.2	Errore e limiti inferiore e superiore dell’output	24
2.4.3	Proprietà di limitazione	24
2.5	Analisi della Convergenza: Stima A-Priori	26
2.5.1	La soluzione a basi ridotte come migliore approssimazione	27
2.5.2	L’output a basi ridotte come migliore approssimazione	27
2.6	Procedura Adattiva per la Costruzione della Base	28
2.7	Estensioni: Outputs “Non-compliant” e Operatori Non Simmetrici	29
2.7.1	Approssimazione a basi ridotte	30
2.8	Una Breve Rassegna Bibliografica sulla Riduzione delle Dimensioni del Modello	31
2.8.1	Proper Orthogonal Decomposition	31
2.8.2	Sui metodi a basi ridotte	33
3	Basi Ridotte per Problemi di Diffusione e Trasporto	35
3.1	Un Problema di Inquinamento Atmosferico	35
3.2	Il Modello Matematico per il Controllo dell’Inquinamento dell’Aria	36
3.2.1	Equazioni di trasporto e diffusione di una sostanza in aria	36
3.2.2	Influenza della situazione meteorologica	37
3.2.3	Il modello Gaussiano	38
3.2.4	Problema di controllo ottimo dell’inquinante	40
3.3	Approssimazione Numerica del Problema: Stabilizzazione	43

3.3.1	Stabilizzazione delle equazioni di diffusione e trasporto	43
3.3.2	Stabilizzazione del problema di stato: il metodo SUPG	45
3.4	Risoluzione del Problema di Stato con i Metodi a Basi Ridotte	46
3.4.1	Caso 1: emissioni variabili dei camini	46
3.4.2	Caso 2: direzione variabile del vento	54
3.4.3	Caso 3: viscosità variabile	61
3.4.4	Caso 4: emissioni variabili e direzione variabile del vento	64
3.5	Un Problema di Inquinamento di un Fluido Generico in una Cavità	71
3.6	Modello Matematico e Approssimazione Numerica del Problema della Cavità	73
3.6.1	Esempi di soluzione a elementi finiti	75
3.7	Risoluzione del Problema della Cavità con i Metodi a Basi Ridotte	79
3.7.1	Assemblaggio della base	82
3.7.2	Limiti dell'errore sulla soluzione	83
3.7.3	Limiti dell'errore sull'output "non-compliant" e "compliant"	83
3.7.4	Cenni alla stima a posteriori	84
3.7.5	Esempio di soluzione a basi ridotte	87
4	Richiami di Teoria del Controllo Ottimale per Problemi alle Derivate Parziali	89
4.1	Introduzione alla Teoria del Controllo Ottimale	89
4.1.1	Esistenza e unicità per i minimi dei funzionali	90
4.1.2	Spazi funzionali e definizione del problema aggiunto	92
4.2	Approccio ai Problemi di Controllo mediante Lagrangiana	94
4.2.1	Ottimizzazione vincolata	94
4.2.2	Formulazione astratta del problema di controllo ottimale	95
4.3	Metodo Iterativo per la Risoluzione del Problema di Controllo	97
4.4	Esempio di Problema di Controllo	99
5	Metodi a Basi Ridotte per Problemi di Controllo	101
5.1	Approssimazione Numerica Del Problema di Controllo: la Lagrangiana Stabi- lizzata	101
5.2	Risoluzione del Problema Aggiunto con i Metodi a Basi Ridotte	103
5.2.1	Caso a: emissioni variabili dei camini	104
5.2.2	Caso b: emissioni e velocità del vento variabili	106
5.3	Risoluzione del Problema di Controllo Completo con Metodi a Basi Ridotte	109
5.3.1	Caso a: errori per una scelta "casuale" dell'input	111
5.3.2	Caso a: esempi di soluzione	113
5.3.3	Caso b: errori per una scelta "casuale" dell'input	114
5.3.4	Caso b: esempi di soluzione	115
6	Basi Ridotte per Domini Parametrizzati e Sensitività Geometrica	119
6.1	Motivazione	119
6.2	I Modelli Geometrici	120
6.2.1	Modello 1	120
6.2.2	Modello 2	120
6.3	Il Problema di Stato Parametrizzato	121
6.3.1	Modello 1	123
6.3.2	Modello 2	124

6.4	Analisi di Sensitività	125
6.4.1	Modello 1: risultati	126
6.4.2	Modello 2: risultati	127
6.5	Analisi di Sensitività Applicata al Problema di Controllo	129
6.5.1	Problema aggiunto parametrizzato	130
6.5.2	Risoluzione del problema di controllo	133
6.5.3	Esempio di soluzione	134
6.6	Sviluppi	135
7	Conclusioni	137
	Ringraziamenti	143
	Bibliografia	144

Capitolo 1

Introduzione

La teoria del **controllo ottimale** dei sistemi governati da equazioni alle derivate parziali trova numerose applicazioni, in cui si esercita un controllo su parametri o funzioni che caratterizzano il problema, quali, ad esempio, coefficienti, termini forzanti, condizioni al contorno, ecc. Affinchè un problema di controllo ottimale sia ben definito, è necessario porre degli obiettivi da raggiungere e stabilire l'osservazione sul sistema, per poter esercitare il controllo stesso. La teoria del controllo ottimale di sistemi di equazioni alle derivate parziali si prefigge la minimizzazione di opportuni funzionali, detti *funzionali costo* o *funzioni obiettivo*. L'approccio a questo tipo di problemi si basa sulla teoria classica sviluppata da J.L. Lions [20] o sul formalismo della Lagrangiana [23], che consente di definire in maniera sistematica il problema.

Nell'ambito del controllo ci si trova a risolvere un problema matematico per un elevato numero di configurazioni differenti e ciò, se si vuole garantire una certa precisione, può essere estremamente oneroso dal punto di vista computazionale. È evidente allora la necessità di sviluppare metodi in grado di ridurre la complessità del problema, senza compromettere la precisione sui risultati. Innanzitutto occorre osservare che non si è interessati solo alla soluzione delle equazioni alle derivate parziali, si vuole piuttosto valutare ripetutamente una relazione di tipo “*input-output*”: il set di parametri in ingresso (o “input”) è dato dalle variabili di controllo ed eventualmente altri parametri fisici o geometrici, mentre le variabili in uscita (o “output”) sono delle quantità di interesse per il problema di controllo, dipendenti dalla soluzione delle equazioni alle derivate parziali. La relazione “input-output” è implicita e richiede la risoluzione di una o più equazioni alle derivate parziali. Uno strumento che consente di calco-

lare in modo *rapido, efficiente e affidabile* la relazione “input-output” indotta dalle equazioni alle derivate parziali è rappresentato dai metodi a basi ridotte.

I **metodi a basi ridotte**, introdotti a partire dagli anni '70 e ora in fase di grande sviluppo, sono impiegati per la risoluzione di equazioni parametrizzate. L'idea è di proiettare la soluzione in uno spazio di dimensioni contenute e specifico per il problema in questione, anzichè uno spazio con proprietà approssimanti generiche e di dimensioni considerevoli, come nel metodo Galerkin-Elementi Finiti. L'impiego di un modello che, senza perdere precisione, è in grado di rappresentare il problema fisico con un numero esiguo di gradi di libertà consente di ridurre notevolmente i costi e quindi i tempi computazionali.

La novità introdotta da questo lavoro di tesi è proprio quella di ricorrere all'approssimazione numerica delle equazioni parametrizzate, che governano il problema di controllo ottimale, mediante il metodo a basi ridotte. In letteratura lo studio dei problemi di controllo con metodi a basi ridotte è già stato affrontato in [26, 27, 28], ma senza considerare problemi parametrizzati e impiegando procedure risolutive diverse da quelle proposte di seguito.

Oltre a una presentazione teorica del metodo a basi ridotte e a richiami di teoria del controllo ottimale per problemi alle derivate parziali, proporrò un'applicazione di fluidodinamica ambientale, relativa al controllo delle emissioni di inquinanti atmosferici da parte di camini. Per studiare questo problema, molto attuale e di interesse pratico, si adotta un modello di diffusione-trasporto bidimensionale, che si presta ad essere parametrizzato in diversi modi.

Di seguito si descrive brevemente il contenuto della tesi.

Dopo questa introduzione, nel Capitolo 2 si illustrano gli aspetti teorici dei metodi a basi ridotte per equazioni alle derivate parziali parametrizzate; in particolare ci si sofferma su come calcolare l'approssimazione a basi ridotte della soluzione di tali equazioni e perché questo metodo offre considerevoli vantaggi computazionali. Si mostra come controllare l'errore tra la soluzione a basi ridotte e quella a elementi finiti e si fornisce la stima A-Priori nell'ambito dell'analisi di convergenza. Infine si spiega la procedura adattiva per la costruzione dello spazio di approssimazione a basi ridotte della soluzione.

Nel Capitolo 3 si introduce l'applicazione principale: un problema di controllo ottimale per regolare le emissioni di un impianto industriale in modo da minimizzare l'inquinamento su

un'area di osservazione, quale potrebbe essere una città. Si verifica l'applicabilità del metodo a basi ridotte per il solo *problema di stato* (equazione di diffusione e trasporto in due dimensioni) parametrizzato in quattro modi differenti. In questo capitolo si considerano solo parametri di tipo fisico: intensità delle sorgenti di inquinante, direzione del vento e viscosità del fluido. Per ciascuno dei quattro casi si presenta la formulazione matematica del metodo, si discutono gli aspetti algoritmici, si studia l'errore rispetto alla soluzione a elementi finiti e si mostra un esempio di soluzione. Si studia inoltre l'applicabilità del metodo ad un problema non stazionario, in cui si ha una sorgente di inquinante in una cavità rettangolare riempita di fluido mosso da convezione naturale.

Nel Capitolo 4 si richiamano i concetti fondamentali della teoria del controllo ottimale dei sistemi di equazioni alle derivate parziali: vengono presentati alcuni teoremi della teoria classica di J.L. Lions e si illustra l'approccio mediante il formalismo della Lagrangiana. Si mette in rilievo il ruolo fondamentale del *problema aggiunto* e si propone un algoritmo iterativo per la soluzione dei problemi di controllo. Infine si riportano i risultati di un problema esemplificativo.

Il Capitolo 5 è il capitolo di sintesi tra la teoria delle basi ridotte e i problemi di controllo: si estende l'applicabilità del metodo a basi ridotte anche al problema aggiunto e ad ogni passo del metodo iterativo per la ricerca dell'ottimo si risolvono entrambi i problemi (di stato e aggiunto) mediante le basi ridotte. Il problema di controllo completo si parametrizza solo in due casi significativi dei quattro analizzati nel Cap.3. Per ciascuno dei due casi si riporta l'errore del controllo ottimo rispetto alla soluzione a elementi finiti, il risparmio dei tempi computazionali e si mostra un esempio di soluzione.

Nel Capitolo 6 si studia la sensitività della soluzione del problema di stato rispetto alla variazione di alcune quantità geometriche di interesse che parametrizzano il dominio sempre mediante le basi ridotte. Si tratta ancora della valutazione di una relazione "input-output", con la differenza che i parametri in ingresso sono geometrici, anziché fisici. Infine si applica l'analisi di sensitività geometrica al problema di controllo ottimale dell'inquinante in modo che, apportando alcune modifiche alla geometria del dominio, si possa contemporaneamente minimizzare l'inquinamento sull'area di osservazione e massimizzare la produttività dell'impianto industriale.

Nel Capitolo 7 si formulano alcune conclusioni sul lavoro.

I riferimenti bibliografici sono in ordine di comparsa all'interno della tesi.

Per le applicazioni numeriche di questo lavoro di tesi si è fatto impiego del *PDE Toolbox* di *Matlab*®. Si tratta di un pacchetto appositamente dedicato alla risoluzione di problemi alle derivate parziali mediante il metodo di Galerkin-Elementi Finiti, con approssimanti polinomiali su domini bidimensionali. La costruzione della griglia avviene mediante la tecnica di Delaunay, con possibilità di regolarizzazione. Si può lavorare in modo interattivo tramite l'interfaccia grafica (*Graphical User Interface*), che permette la manipolazione della geometria, delle equazioni e il post-processing della soluzione. Il *PDE Toolbox* si appoggia sul codice *Matlab*®, di cui è possibile sfruttare tutte le funzioni per la stesura di un proprio codice. La programmazione dei codici a basi ridotte ha costituito una parte cospicua del lavoro. In particolare, per il problema di controllo dell'inquinamento atmosferico, sono stati sviluppati codici per la creazione e l'ottimizzazione delle basi per i problemi di stato e aggiunto, l'approssimazione a basi ridotte della soluzione e la parametrizzazione dei due problemi, la valutazione dell'errore al variare delle dimensioni della base ridotta, la stima dell'errore medio per una scelta casuale dei parametri in ingresso. Per il problema della convezione naturale in una cavità rettangolare, oltre ai codici per l'applicazione del metodo a basi ridotte, si è resa necessaria la programmazione dei codici a Elementi Finiti.

Questa tesi è stata sviluppata presso il gruppo di *Modellistica e Calcolo Scientifico* (**MOX**) del Politecnico di Milano e la cattedra di *Modélisation et Calcul Scientifique* (**CMCS**) dell'École Polytechnique Fédérale de Lausanne nell'ambito di uno stage di sei mesi all'interno del progetto di mobilità e scambio internazionale **Socrates** dell'*Unione Europea*, progetto a cui aderisce anche la Confederazione Elvetica.

Scritto con L^AT_EX.

Politecnico di Milano,
École Polytechnique Fédérale de Lausanne,
23 giugno 2005.

Capitolo 2

Metodi a Basi Ridotte per Equazioni alle Derivate Parziali Parametrizzate

In questo capitolo si focalizza l'attenzione sulla teoria dei metodi a basi ridotte. Innanzitutto si indica la categoria di problemi a cui tali metodi possono essere applicati e ci si sofferma su come calcolare l'approssimazione a basi ridotte della soluzione di una equazione alle derivate parziali, illustrando i vantaggi computazionali del metodo. Si passa poi alla stima degli errori, all'analisi di convergenza e alla descrizione della procedura per la costruzione della base ridotta. Infine si propone una breve rassegna bibliografica sui metodi di riduzione dell'ordine del modello, di cui i metodi a basi ridotte fanno parte.

2.1 Introduzione

Nell'ambito dell'ottimizzazione, del controllo e della progettazione, ci si trova spesso a risolvere un problema matematico per un numero elevato di configurazioni differenti (corrispondenti alle diverse scelte dei parametri di progettazione). Ciò può comportare un costo computazionale elevato, o addirittura proibitivo, anche nei casi più semplici. Per sfruttare in maniera più efficiente le risorse di calcolo disponibili, occorre sviluppare metodi in grado di ridurre la complessità del problema garantendo, al tempo stesso, tutte le informazioni utili e senza compromettere la precisione dei risultati.

2.1.1 La relazione input-output

Ogni problema di controllo, ottimizzazione o progettazione è basato sulla valutazione di una relazione “input-output”. Il set di parametri in ingresso o “input” μ identifica una particolare configurazione del sistema e tali parametri sono, per esempio, variabili di progetto o variabili di controllo. Le variabili in uscita o “output”, che indicheremo con $s(\mu)$, sono delle quantità di interesse per la valutazione della qualità del progetto, e sono tipicamente espresse come funzionali delle variabili di stato di un sistema di equazioni alle derivate parziali parametrizzate, che descrive il comportamento fisico del sistema. Siamo interessati, cioè, alla valutazione di una relazione che fornisca $s(\mu)$ per differenti parametri in ingresso μ , scelti in uno spazio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^P$, dove P indica il numero dei parametri.

La relazione “input-output” è implicita e richiede la soluzione di una o più equazioni; non essendo possibile farlo per via analitica, bisogna ricorrere ad una procedura di discretizzazione. Si passa quindi alla forma matriciale del problema, ossia da F a F_h , dove h è un parametro caratteristico di discretizzazione. Il metodo di discretizzazione deve essere tale che per $h \rightarrow 0$, $F_h \rightarrow F$ (consistenza) e di conseguenza $s_h(\mu) \rightarrow s(\mu)$, $\forall \mu \in \mathcal{D}$ (convergenza). Il progressivo raffinamento della discretizzazione ($h \rightarrow 0$) comporta l’inevitabile aumento del costo computazionale per valutare F_h : questo costituisce un grosso limite nel momento in cui si vuole calcolare l’output in tempo reale o è richiesta la valutazione ricorsiva di molte relazioni “input-output”. Risulta allora evidente la necessità di sviluppare un metodo che consenta di calcolare in modo *rapido*, *efficiente* e *affidabile* la relazione “input-output” indotta dal sistema di equazioni alle derivate parziali.

2.2 Definizione del Problema

2.2.1 Formulazione esatta

Consideriamo un dominio sufficientemente regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d = 1, 2$ o 3 e uno spazio di funzioni associate $X \subset H^1(\Omega)$. A X è associato il prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_X$ e la norma $\|\cdot\|_X = (\cdot, \cdot)_X^{1/2}$. Definiamo inoltre un insieme di parametri $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^P$, i cui elementi verranno indicati con μ . Introduciamo allora la forma bilineare parametrizzata $a : X \times X \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e le forme lineari $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $l : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Si richiede che a sia:

- continua: $a(w, v; \mu) \leq \gamma(\mu)\|w\|_X\|v\|_X \leq \gamma_0\|w\|_X\|v\|_X$, $\forall \mu \in \mathcal{D}$, per un'opportuna funzione $\gamma(\mu)$ superiormente limitata da γ_0 ;

- coerciva:

$$\exists \alpha_0 : 0 < \alpha_0 \leq \alpha(\mu) = \inf_{w \in X} \frac{a(w, w; \mu)}{\|w\|_X^2}, \quad \forall \mu \in \mathcal{D};$$

- simmetrica: $a(w, v; \mu) = a(v, w; \mu)$, $\forall v, w \in X$, $\forall \mu \in \mathcal{D}$;

Inoltre richiediamo che i funzionali f e l siano limitati.

Infine facciamo delle assunzioni sulla dipendenza di a , f e l dai parametri e in particolare si suppone che, dato un numero intero Q (preferibilmente piccolo), si possa esprimere $a(w, v; \mu)$ come:

$$a(w, v; \mu) = \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) a^q(w, v), \quad \forall w, v \in X, \quad \forall \mu \in \mathcal{D}, \quad (2.1)$$

con $\sigma^q : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a^q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $q = 1, \dots, Q$. Questa dipendenza *affine* dai parametri è cruciale per il risparmio computazionale. Allo stesso modo si può ammettere una dipendenza affine di f e l dal parametro, anche se al momento, per semplicità di trattazione, si assume che i due funzionali siano indipendenti da μ .

La formulazione astratta del problema che ci interessa considerare è : $\forall \mu \in \mathcal{D}$, calcolare $s(\mu) \in \mathbb{R}$ con:

$$s(\mu) = l(u(\mu)) \quad (2.2)$$

dove $u(\mu) \in X$ è la soluzione di

$$a(u(\mu), v; \mu) = f(v), \quad \forall v \in X. \quad (2.3)$$

Osserviamo che $a(w, v; \mu)$ è la forma associata all'operatore differenziale che descrive il problema fisico parametrizzato, $u(\mu)$ la variabile di stato; infine $s(\mu)$ indica l'output.

Si noti che le ipotesi richieste per la forma bilineare $a(w, v; \mu)$ implicano l'esistenza e unicità della soluzione di (2.3).

2.2.2 Approssimazione di Galerkin

Le soluzioni $u(\mu)$ di (2.3) in generale non sono calcolabili e quindi abbiamo bisogno di scegliere un metodo numerico per calcolare la soluzione discreta. Per costruire l'approssimazione a basi ridotte richiediamo innanzitutto un'approssimazione *finito*-dimensionale di X , che indichiamo

con X_h : X_h è un sottospazio \mathcal{N} -dimensionale di X . X_h sarà tipicamente lo spazio delle approssimazioni a elementi finiti [1], associato ad una triangolazione molto fine del dominio Ω e in generale \mathcal{N} sarà molto grande.

L'approssimazione di Galerkin è : $\forall \mu \in \mathcal{D}$, calcolare l'output:

$$s_h(\mu) = l(u_h(\mu))$$

dove $u_h \in X_h$ è l'unica soluzione di

$$a(u_h(\mu), v; \mu) = f(v), \quad \forall v \in X_h. \quad (2.4)$$

Sia $\{\varphi_i, i = 1, \dots, \mathcal{N}\}$ una base per X_h . Si può allora introdurre la matrice $\underline{A}_h(\mu) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$, definita come segue:

$$A_{h_{i,j}} = a(\varphi_i, \varphi_j; \mu), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}. \quad (2.5)$$

$\underline{A}_h(\mu)$ è simmetrica, definita positiva per ogni $\mu \in \mathcal{D}$. Analogamente introduciamo $\underline{F}_h \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ come:

$$F_{h_i} = f(\varphi_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}. \quad (2.6)$$

Si può ora riformulare l'approssimazione di Galerkin: per ogni $\mu \in \mathcal{D}$, calcolare l'output:

$$s_h(\mu) = \underline{L}_h^T \underline{u}_h(\mu) \quad (2.7)$$

dove $\underline{u}_h(\mu) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ è l'unica soluzione di

$$\underline{A}_h(\mu) \underline{u}_h(\mu) = \underline{F}_h. \quad (2.8)$$

Si noti che $u_h(\mu)$ e $\underline{u}_h(\mu) = (u_{h_1}, \dots, u_{h_n})$ sono legati nel seguente modo:

$$u_h(\mu) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} u_{h_j}(\mu) \varphi_j.$$

Per semplicità di trattazione, d'ora in avanti, salvo specificazione di altro genere, ci si riferirà al caso "compliant", per cui $l(u) = f(u)$. Sostituendo (2.8) in (2.7), si può esprimere l'output come un'energia:

$$s_h(\mu) = \underline{u}_h^T(\mu) \underline{A}_h(\mu) \underline{u}_h(\mu)$$

o equivalentemente:

$$s_h(\mu) = \underline{F}_h^T \underline{A}_h^{-1}(\mu) \underline{F}_h$$

Il problema della discretizzazione a elementi finiti è che, essendo fisicamente \mathcal{N} molto grande, la soluzione di (2.8) e di conseguenza la valutazione di $s_h(\mu)$ saranno molto costose dal punto di vista computazionale, se si considera un elevato numero di parametri. Questa è la principale ragione che motiva l'introduzione della basi ridotte che ci accingiamo a descrivere.

2.3 Approssimazione a Basi Ridotte

Introduciamo un insieme di parametri campioni $S_N = \{\mu^1, \dots, \mu^N\}$ dove $\mu^n \in \mathcal{D}$, $n = 1, \dots, N$. Per ciascun vettore in ingresso di S_N , calcoliamo tramite il metodo a elementi finiti (su una griglia opportunamente fine) una soluzione $u_h(\mu^n)$ nello spazio X_h , che si ipotizza essere molto prossimo allo spazio reale X in cui si trova la soluzione esatta. Definiamo lo spazio dell'approssimazione a basi ridotte:

$$W_N = \text{span}\{\zeta^n \equiv u_h(\mu^n), n = 1, \dots, N\}, \quad (2.9)$$

La (2.9) significa che W_N contiene tutte le funzioni di X_h che si possono esprimere come combinazione lineare delle ζ^n , sottintendendo che le ζ^n , per $n = 1, \dots, N$, siano tra loro linearmente indipendenti.

Nell'approccio a basi ridotte cerchiamo una approssimazione $u_N(\mu)$ di $u_h(\mu)$ in W_N , che si esprime come:

$$u_N(\mu) = \sum_{j=1}^N u_{Nj}(\mu) \zeta^j = (\underline{u}_N(\mu))^T \underline{\zeta}, \quad (2.10)$$

dove $\underline{u}_N(\mu) \in \mathbb{R}^N$ è il vettore colonna dei coefficienti u_{Nj} della combinazione lineare, con $j = 1, \dots, N$.

L'approssimazione a basi ridotte è pertanto: $\forall \mu \in \mathcal{D}$, calcolare $s_N(\mu) = l(u_N(\mu))$, dove $u_N(\mu) \in W_N$ è la soluzione di:

$$a(u_N(\mu), v; \mu) = f(v), \quad \forall v \in W_N. \quad (2.11)$$

L'idea centrale del metodo a basi ridotte è di usare per la discretizzazione del problema originale, invece di uno spazio di proiezione con proprietà approssimanti generiche (cioè valido per qualunque problema), uno spazio specifico (e quindi valido solo per il problema in questione). Questo consente di costruire un modello in grado di rappresentare il problema fisico di interesse con sufficiente precisione, impiegando un numero esiguo di gradi di libertà.

2.3.1 Forma matriciale

Scegliamo le funzioni test in modo che siano le stesse della base W_N , cioè $v = \zeta^i$, $i = 1, \dots, N$ e sostituiamo (2.10) in (2.11). Si ottiene l'equazione algebrica che permette di ricavare i coefficienti incogniti $\underline{u}_N(\mu) \in \mathbb{R}^N$:

$$\underline{A}_N(\mu)\underline{u}_N(\mu) = \underline{F}_N, \quad (2.12)$$

grazie ai quali è possibile calcolare l'output:

$$s_N(\mu) = \underline{F}_N^T \underline{u}_N(\mu), \quad (2.13)$$

Gli elementi della matrice $\underline{A}_N(\mu) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ si ottengono come:

$$A_{Ni,j}(\mu) = a(\zeta^j, \zeta^i; \mu), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.14)$$

Poiché ζ^i è la soluzione a elementi finiti per la particolare configurazione μ_i , si può scrivere ζ^i come combinazione lineare della funzioni nodali degli elementi finiti φ_j , $j = 1, \dots, \mathcal{N}$:

$$\zeta^i = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \zeta_j^i \varphi_j. \quad (2.15)$$

Sostituendo (2.15) in (2.14) si ha:

$$A_{Ni,m}(\mu) = a\left(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \zeta_j^i \varphi_j, \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \zeta_k^m \varphi_k; \mu\right), \quad \forall i, m \in \{1, \dots, N\},$$

e sfruttando la bilinearità di $a(\cdot, \cdot; \mu)$, $\forall \mu \in \mathcal{D}$, si ottiene:

$$A_{Ni,m}(\mu) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \zeta_j^i \zeta_k^m a(\varphi_j, \varphi_k; \mu), \quad \forall i, m \in \{1, \dots, N\}.$$

Definiamo $\underline{\zeta}^i$, il vettore colonna dei valori nodali della soluzione a elementi finiti per il set di parametri μ_i e chiamiamo $\underline{A}_h(\mu)$ la matrice a elementi finiti (2.5), in modo da poter passare alla scrittura matriciale:

$$A_{Ni,m}(\mu) = (\underline{\zeta}^i)^T \underline{A}_h(\mu) (\underline{\zeta}^m), \quad \forall i, m \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.16)$$

Indicando con \underline{Z} la matrice $\mathcal{N} \times N$ le cui colonne sono i vettori dei valori nodali delle soluzioni a elementi finiti $\underline{\zeta}^i$, $i = 1, \dots, N$, si può scrivere:

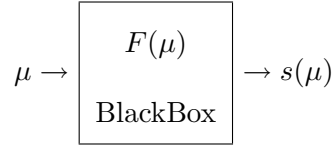
$$\underline{A}_N(\mu) = \underline{Z}^T \underline{A}_h(\mu) \underline{Z}. \quad (2.17)$$

2.3.2 Approccio “Black-Box”

Si vuole sfruttare la possibilità di scomporre la forma bilineare come

$$a(., .; \mu) = \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) a^q(., .) \quad (2.18)$$

per ottenere un grande vantaggio computazionale: individuare un set di forme bilineari in W_N indipendenti dai parametri che possano essere calcolate calcolati solo una volta e possano essere assemblate per ottenere la forma bilineare di partenza. È quello che si intende per approccio “black-box”, cioè i parametri in ingresso vengono immessi in una immaginaria “scatola nera” all’interno della quale vengono assemblati gli operatori e svolti i calcoli per ottenere l’output:



Scomponiamo la forma $a(., .; \mu)$ in

$$\sum_{j=1}^N a(\zeta^j, \zeta^i; \mu) u_{Nj} = f(\zeta^i), \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.19)$$

nella somma:

$$\sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^N \sigma^q a^q(\zeta^j, \zeta^i; \mu) u_{Nj} = f(\zeta^i), \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

Eseguiamo sulla (2.20) gli stessi passaggi che da (2.14) hanno portato a (2.16) per applicare l’approccio “black-box” alle entrate della matrice delle basi ridotte:

$$\begin{aligned} A_{Ni,j}(\mu) &= \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) a^q(\zeta^i, \zeta^m) \\ &= \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) a^q\left(\sum_{j=1}^N \zeta_j^i \varphi_j, \sum_{k=1}^N \zeta_k^m \varphi_k\right) \\ &= \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \zeta_j^i \zeta_k^m a^q(\varphi_j, \varphi_k) \\ &= \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) (\underline{\zeta}^i)^T \underline{A}_h^q (\underline{\zeta}^m)^T, \quad \forall i, m \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned}$$

dove la matrice \underline{A}_h^q ha i seguenti elementi:

$$\begin{aligned} A_{h_i,j}(\mu) &= a(\varphi_j, \varphi_i; \mu) \\ &= \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) a^q(\varphi_j, \varphi_i; \mu) \\ &= \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) A_{h_i,j}^q. \end{aligned}$$

Ora risulta evidente che dobbiamo calcolare una e una sola volta Q matrici $\underline{A}_N^q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ indipendenti dai parametri

$$\underline{A}_N^q = \underline{Z}^T \underline{A}_h^q \underline{Z} \quad q = 1, \dots, Q,$$

per poter ricostruire l'operatore delle basi ridotte per ogni nuovo set di parametri semplicemente calcolando:

$$\underline{A}_N(\mu) = \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) \underline{A}_N^q. \quad (2.21)$$

2.3.3 Non-omogeneità del problema a basi ridotte

Per il termine noto si segue lo stesso procedimento:

$$\begin{aligned} F_{Ni} &= f(\zeta^i) \\ &= f\left(\sum_{j=1}^N \zeta_j^i \varphi_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^N \zeta_j^i f(\varphi_j) \\ &= (\underline{\zeta}^i)^T \underline{F}_h, \quad i = \{1, \dots, N\} \end{aligned}$$

e si può anche riscrivere come:

$$\underline{F}_N = \underline{Z}^T \underline{F}_h, \quad i = \{1, \dots, N\}.$$

2.3.4 Sistema a basi ridotte e output

Possiamo riscrivere il problema (2.19) in forma matriciale:

$$\underline{A}_N(\mu) \underline{u}_N(\mu) = \underline{F}_N, \quad (2.22)$$

dove, come già visto, $\underline{A}_N(\mu) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e $\underline{F}_N \in \mathbb{R}^N$.

La differenza fondamentale tra le matrici $\underline{A}_N(\mu)$ e $\underline{A}_h(\mu)$, oltre alle dimensioni, è che $\underline{A}_h(\mu)$ è una matrice sparsa mentre $\underline{A}_N(\mu)$ è densa e quindi per risolvere (2.22) si impiegano metodi di soluzione diretti.

Nel nostro caso si ha $\underline{L}_N = \underline{F}_N$ e l'output del problema a basi ridotte si calcola come:

$$s_N(\mu) = \underline{F}_N^T \underline{u}_N(\mu).$$

2.3.5 Decomposizione off-line / on-line

Tutte le matrici e i vettori che consentono la riscrittura del problema in forma matriciale si dividono in due categorie: parametro-dipendenti e parametro-indipendenti. Fortunatamente quelli onerosi dal punto di vista computazionale sono i parametro-indipendenti, che possono essere quindi calcolati solamente una volta e usati in seguito qualsiasi siano i parametri in ingresso. Questa osservazione suggerisce la possibilità di impiegare un approccio computazionale suddiviso in due stadi:

- *off-line*: si calcolano N soluzioni a elementi finiti $u(\mu^n)$, una per ciascun parametro campione $\mu \in S_N$. Si costruiscono e si tengono in memoria le matrici parametro-indipendenti delle basi ridotte $\underline{A}_N^q = \underline{Z}^T \underline{A}_h^q \underline{Z}$ per $q = 1, \dots, Q$. Si costruisce e si memorizza $\underline{F}_N = \underline{Z}^T \underline{F}_h$.
- *on-line*: si calcolano i coefficienti parametro-dipendenti $\sigma^q(\mu)$. Si forma la matrice $\underline{A}_N(\mu) = \sum_{q=1}^Q \sigma^q(\mu) \underline{A}_N^q$ e si risolve il sistema $\underline{A}_N(\mu) \underline{u}_N(\mu) = \underline{F}_N$. Una volta nota la soluzione $\underline{u}_N(\mu)$ si calcola l'output di interesse $s_N(\mu) = \underline{F}_N^T \underline{u}_N(\mu)$.

Si osservi che i due stadi sono sequenziali e completamente disaccoppiati. I calcoli onerosi della parte off-line vengono svolti una e una sola volta. I calcoli efficienti della parte on-line si eseguono, invece, ogni volta che è richiesta la valutazione rapida dell'output per diversi punti dello spazio dei parametri. È molto importante notare che lo stadio on-line è indipendente dalle grandi dimensioni N dello spazio della soluzione X_h e poiché N è tipicamente molto piccolo l'output si ottiene in “tempo reale”.

Una volta terminato lo stadio off-line, il costo incrementale, o marginale, per valutare $s_N(\mu)$ per ogni nuovo $\mu \in \mathcal{D}$ (come richiesto dai problemi di controllo e progettazione) è molto

piccolo: in primo luogo perchè N è generalmente $\mathcal{O}(10)$, grazie alle buone proprietà di convergenza di W_N [2], e poi perché (2.22) può essere facilmente assemblato e invertito grazie alla scomposizione off-line/on-line. In sostanza è la procedura computazionale off-line/on-line che consente di sfruttare la riduzione delle dimensioni del problema da \mathcal{N} a N . Il fatto che si possa prendere N “piccolo” è motivato dalla convergenza esponenziale in N per una dipendenza da μ piuttosto regolare [3, 4].

I costi computazionali si dividono in *fissi*, dovuti alla parte off-line, e *variabili* per ciascuna valutazione, dovuti alla parte on-line. Per calcolarli servono tre numeri: la dimensione \mathcal{N} dello spazio della soluzione a elementi finiti, la dimensione N dello spazio delle soluzioni a basi ridotte e il numero Q degli operatori indipendenti dai parametri. I costi fissi richiedono N soluzioni a elementi finiti (le ζ^n , $n = 1, \dots, N$) e $\mathcal{O}(QN^2)$ prodotti interni di vettori a elementi finiti. I costi variabili richiedono $\mathcal{O}(QN^2)$ operazioni per assemblare le Q matrici parametri-indipendenti delle basi ridotte di dimensioni $N \times N$ e $\mathcal{O}(N^3)$ operazioni per invertire la matrice risultante e ottenere la soluzione a basi ridotte. La gestione in memoria dei dati della parte on-line è $\mathcal{O}(QN^2)$. Come si nota, il costo variabile totale per ciascuna nuova valutazione nello spazio dei parametri è molto contenuto.

2.4 Limite Inferiore e Limite Superiore dell’Output a Basi Ridotte

Una volta calcolato l’output desiderato $s_N(\mu)$ con la procedura a basi ridotte, si possono derivare i limiti: $s_N^-(\mu) \leq s_h(\mu) \leq s_N^+(\mu)$, dove gli estremi possono essere considerati come indici di una stima *a posteriori* per il valore dell’output $s_h(\mu)$ che avremmo ottenuto se avessimo risolto direttamente il problema con gli elementi finiti sulla griglia di partenza.

2.4.1 Condizionatore dei valori limite

Definiamo l’errore $e(\mu)$:

$$e(\mu) = u_h(\mu) - u_N(\mu) \quad (2.23)$$

e il residuo $r(v; \mu)$:

$$r(v; \mu) = f(v) - a(u_N(\mu), v; \mu), \quad \forall v \in X. \quad (2.24)$$

Si definisce poi la forma vettoriale $\underline{R}_h(\mu) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ come $R_{h_i}(\mu) = r(\varphi_i; \mu)$, $i = 1, \dots, \mathcal{N}$. Notiamo che

$$\underline{R}_h(\mu) = \underline{F}_h - \underline{A}_h u_N(\mu) \quad (2.25)$$

dove $u_N \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ è il vettore espresso da (2.10).

Poiché per un dato N non siamo in grado, per il momento, di calcolare in modo efficiente i limiti (superiore e inferiore) dell'errore sull'output $s(\mu) - s_N(\mu)$, e quindi non siamo in grado di determinare se N sia sufficiente per i nostri scopi, introduciamo un *Bound Conditioner*, cioè un condizionatore di limiti [5]. Richiediamo che il *Bound Conditioner* $c : X \times X \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una forma simmetrica, continua e coerciva e tale che gli autovalori minimo e massimo

$$\rho_{min}(\mu) := \min_{v \in X} \frac{a(v, v; \mu)}{c(v, v; \mu)}$$

$$\rho_{max}(\mu) := \max_{v \in X} \frac{a(v, v; \mu)}{c(v, v; \mu)}$$

soddisfino la seguente “condizione spettrale”: $\forall \mu \in \mathcal{D}$

$$1 \leq \rho_{min}(\mu), \quad \rho_{max}(\mu) \leq \rho \quad (2.26)$$

dove $\rho \in \mathbb{R}$ è una costante, preferibilmente piccola.

Osserviamo che: $\forall v \in X, \forall \mu \in \mathcal{D}$

$$\rho_{min}(\mu) \leq \frac{a(v, v; \mu)}{c(v, v; \mu)} \leq \rho_{max}(\mu) \quad (2.27)$$

e per ogni $e(\mu) \in X$ e $\hat{e}(\mu) \in X$ tali che:

$$a(e, v; \mu) = r(v; \mu), \quad \forall v \in X$$

e

$$c(\hat{e}, v; \mu) = r(v; \mu), \quad \forall v \in X$$

si può provare che:

$$\rho_{min}(\mu) \leq \frac{a(e, v; \mu)}{c(\hat{e}, v; \mu)} \leq \rho_{max}(\mu) \quad (2.28)$$

Oltre alla condizione spettrale (2.26), si fa una richiesta aggiuntiva, detta ipotesi di “invertibilità computazionale”:

$$c^{-1}(w, v; \mu) = \sum_{i \in \mathcal{I}(\mu)} \alpha_i(\mu) c_i^{-1}(w, v),$$

dove $\mathcal{I}(\mu) \subset \{1, \dots, I\}$ è un set di indici parametro-dipendente, essendo I un intero preferibilmente piccolo. Si richiede cioè che la forma inversa di c si possa vedere come la somma, pesata con coefficienti dipendenti da μ , di forme bilineari parametro-indipendenti, simmetriche e coercive. Un metodo per scegliere le $c_i(w, v)$ e i coefficienti corrispondenti α_i è il *Condizionatore di Limiti a Coefficienti Minimi* [6, 7, 8].

2.4.2 Errore e limiti inferiore e superiore dell'output

Calcoliamo ora $\hat{e}(\mu) \in \mathbb{R}^N$ da:

$$\underline{C}(\mu)\hat{e}(\mu) = \underline{R}_h(\mu). \quad (2.29)$$

L'esistenza e unicità della soluzione di questa equazione è garantita dal fatto che $c(w, v; \mu)$ sia, $\forall \mu \in \mathcal{D}$, una forma bilineare simmetrica e coerciva, che induce pertanto una matrice $\underline{C}(\mu)$ simmetrica e definita positiva.

Definiamo poi i limiti inferiore e superiore dell'output come

$$s_N^-(\mu) = s_N(\mu),$$

e

$$s_N^+(\mu) = s_N(\mu) + \Delta_N(\mu),$$

dove $\Delta_N(\mu)$ è la differenza tra i limiti data da

$$\begin{aligned} \Delta_N(\mu) &:= \hat{e}^T(\mu)\underline{C}(\mu)\hat{e}(\mu) \\ &= \underline{R}_h^T(\mu)\underline{C}^{-1}(\mu)\underline{R}_h(\mu) \\ &= \underline{R}_h^T(\mu)\hat{e}(\mu). \end{aligned}$$

2.4.3 Proprietà di limitazione

Occorre dimostrare che effettivamente $s_N^-(\mu) \leq s_h(\mu) \leq s_N^+(\mu)$ per ogni $N \geq 1$.

Si parte dal dimostrare che $\forall \mu \in \mathcal{D}$ e $\forall N \geq 1$: $s_N^-(\mu) \leq s_h(\mu)$. Si ha:

$$\begin{aligned} s_h(\mu) - s_N(\mu) &= f(u_h(\mu) - u_N(\mu)) \\ &= a(u_h(\mu), u_h(\mu) - u_N(\mu); \mu) \\ &= a(u_h(\mu) - u_N(\mu), u_h(\mu); \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a(u_h(\mu) - u_N(\mu), u_h(\mu) - u_N(\mu); \mu) & (2.30) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Ciò segue dalla definizione di $s(\mu)$, da (2.4), per simmetria di a , ortogonalità di Galerkin ($a(u - u_N, v; \mu) = 0, \forall v \in W_N$) e cercività. Questo costituisce un risultato molto importante: la soluzione a basi ridotte è sempre una sottostima della soluzione a elementi finiti, ritenuta la soluzione esatta.

Si passa ora a dimostrare che per ogni $\mu \in \mathcal{D}$ e per ogni $N \geq 1$: $s_h(\mu) \leq s_N^+(\mu)$. Ricordando la definizione di errore (2.23), dalle (2.8) e (2.25) segue la consueta relazione errore - residuo:

$$\underline{A}_h(\mu)\underline{e}(\mu) = \underline{R}_h(\mu). \quad (2.31)$$

Sfruttando questa relazione nella (2.30), si ha:

$$\begin{aligned}
s_h(\mu) - s_N(\mu) &= \underline{e}^T(\mu)\underline{A}_h(\mu)\underline{e}(\mu) \\
&= \underline{R}_h^T(\mu)\underline{A}_h^{-1}(\mu)\underline{R}_h(\mu).
\end{aligned}$$

Definiamo una quantità $\eta_N(\mu)$, detta “effettività”, come

$$\eta_N(\mu) := \frac{s_N^+(\mu) - s_N(\mu)}{s_h(\mu) - s_N(\mu)} = \frac{\Delta_N(\mu)}{s_h(\mu) - s_N(\mu)} = \frac{\underline{R}_h^T(\mu)\underline{C}^{-1}(\mu)\underline{R}_h(\mu)}{\underline{R}_h^T(\mu)\underline{A}^{-1}(\mu)\underline{R}_h(\mu)}, \quad (2.32)$$

che, usando le equazioni (2.29), (2.31), si può riscrivere come:

$$\eta_N(\mu) := \frac{\hat{e}^T(\mu)\underline{C}(\mu)\hat{e}(\mu)}{\underline{e}^T(\mu)\underline{A}(\mu)\underline{e}(\mu)} = \frac{c(\hat{e}, \hat{e}; \mu)}{a(e, e; \mu)}$$

e quindi, per le proprietà di limitazione espresse dalle (2.27) e (2.28):

$$\rho_{min}(\mu) \leq \eta_N(\mu) \leq \rho_{max}(\mu). \quad (2.33)$$

Dalla condizione spettrale, secondo cui $\rho_{min}(\mu) \geq 1$ per ogni $\mu \in \mathcal{D}$, si ha

$$\eta_N(\mu) \geq 1$$

da cui segue $s_N^+(\mu) \geq s_N(\mu)$.

Sempre dalla condizione spettrale, secondo cui vale anche $\rho_{max}(\mu) \leq \rho$, e dalla (2.33) si ha anche:

$$\eta_N(\mu) \leq \rho.$$

Ovviamente è auspicabile che $\rho_{max}(\mu)$ sia il più possibile prossimo all'unità e quindi a $\rho_{min}(\mu)$. Infatti l'output a elementi finiti resta invariato all'aumentare di N , mentre Δ_N diminuisce. Si sa che $s_h(\mu)$ differirà dall'output calcolato $s_N(\mu)$ al più di Δ_N e quindi, trovato il valore di N per cui Δ_N è “sufficientemente piccolo”, il corrispondente output $s_N(\mu)$, calcolato con le basi ridotte, rappresenta una “buona” approssimazione dell'output reale $s_h(\mu)$, che ovviamente non è stato calcolato.

2.5 Analisi della Convergenza: Stima A-Priori

Nel contesto dell'ottimizzazione, o della progettazione, è richiesta una certa precisione sull'output perchè se $s_N^+(\mu)$ o $s_N^-(\mu)$ si scostano troppo da $s_h(\mu)$ ci si potrebbe discostare eccessivamente dall'ottimo. Poiché

$$|s_N^+(\mu) - s_h(\mu)| \leq |s_N^+(\mu) - s_N^-(\mu)| = \Delta_N(\mu)$$

e

$$|s_h(\mu) - s_N^-(\mu)| \leq |s_N^+(\mu) - s_N^-(\mu)| = \Delta_N(\mu),$$

è auspicabile controllare l'andamento di $\Delta_N(\mu)$ in funzione di N .

Sfruttando (2.30) e (2.32) si può scrivere:

$$\Delta_N(\mu) = s_N^+(\mu) - s_N^-(\mu) = (s_h(\mu) - s_N(\mu)) \left(\frac{s_N^+(\mu) - s_N^-(\mu)}{s_h(\mu) - s_N(\mu)} \right) = a(e(\mu), e(\mu); \mu) \cdot \eta_N(\mu).$$

Il primo fattore, $a(e(\mu), e(\mu); \mu)$, misura l'errore della soluzione dato che $e(\mu) = u_h(\mu) - u_N(\mu)$, mentre il secondo fattore $\eta_N(\mu)$ rappresenta il rapporto fra l'errore stimato e l'errore reale (effettività): il primo deve essere piccolo, il secondo deve essere il più possibile prossimo all'unità. È importante capire in che modo $\Delta_N(\mu)$ converge a zero all'aumentare di N , cioè vedere com'è la convergenza $\|u_h(\mu) - u_N(\mu)\| \rightarrow 0$ e $\eta_N(\mu) \rightarrow 1$ al variare di N .

Si dimostra [4] che $\|u_h(\mu) - u_N(\mu)\| \rightarrow 0$ e $\eta_N(\mu) \rightarrow 1$ in modo *esponenziale* e *uniforme* per ogni $\mu \in \mathcal{D}$ e per questo ci si aspetta una convergenza molto rapida anche per un grande numero di parametri.

2.5.1 La soluzione a basi ridotte come migliore approssimazione

La soluzione $u_N(\mu)$ del problema a basi ridotte è ottimale nella norma energia [2]. Questo significa che, dato un vettore in ingresso μ , la soluzione a basi ridotte è la miglior combinazione lineare possibile delle funzioni di base ζ^n , $n = 1, \dots, N$, per approssimare la soluzione esatta $u(\mu)$ nella norma energia.

In effetti si può dimostrare

Teorema 2.1. *L'errore in norma X della soluzione a basi ridotte è limitato dall'alto da una frazione della soluzione ottimale nello spazio W_N :*

$$\|u(\mu) - u_N(\mu)\|_X \leq \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \inf_{w_N \in W_N} \|u(\mu) - w_N\|_X. \quad (2.34)$$

Dimostrazione. Per semplicità di notazione si omette la dipendenza da μ di u_N e u . Sfruttando le proprietà di bilinearità e simmetria la forma $a(\cdot, \cdot; \mu)$ per $u - u_N - v_N \in X$ si può vedere come:

$$a(u - u_N - v_N, u - u_N - v_N; \mu) = a(u - u_N, u - u_N; \mu) - 2a(v_N, u - u_N; \mu) + a(v_N, v_N; \mu).$$

Per ortogonalità di Galerkin e per coercività dell'operatore a ($a(v_N, v_N; \mu) \geq \alpha \|v_N\|_X^2 \geq 0$) si ha

$$a(u - u_N - v_N, u - u_N - v_N; \mu) \geq a(u - u_N, u - u_N; \mu). \quad (2.35)$$

Sia $w_N = u_N + v_N$, vettore appartenente allo spazio delle basi ridotte W_N . Sfruttando le proprietà di continuità e coercività di $a(\cdot, \cdot; \mu)$ e la disuguaglianza (2.35) si ha:

$$\gamma \|u - w_N\|^2 \geq a(u - w_N, u - w_N; \mu) \geq a(u - u_N, u - u_N; \mu) \geq \alpha \|u - u_N\|_X^2,$$

da cui si ricava il risultato (2.34). □

2.5.2 L'output a basi ridotte come migliore approssimazione

Allo stesso modo l'output a basi ridotte è ottimale nella norma energia. Infatti

Teorema 2.2. *Per ogni $\mu \in \mathcal{D}$,*

$$|s(\mu) - s_N(\mu)| \leq \frac{\gamma^2}{\alpha} \left(\inf_{w_N \in W_N} \|u(\mu) - w_N\|_X \right)^2. \quad (2.36)$$

Dimostrazione. Anche in questo caso si omette la dipendenza da μ di u_N e u . Per linearità della forma $f(\cdot)$ si ha:

$$s(\mu) - s_N(\mu) = f(u) - f(u_N) = f(u - u_N).$$

Per il fatto che l'output è "compliant", cioè si calcola mediante lo stesso funzionale del termine noto del problema ($s = f$), si ottiene:

$$s(\mu) - s_N(\mu) = f(u - u_N) = a(u, u - u_N; \mu).$$

Sfruttando la bilinearità e la simmetria dell'operatore a e la già citata ortogonalità di Galerkin, si può scrivere:

$$s(\mu) - s_N(\mu) = a(u - u_N, u - u_N; \mu) + a(u_N, u - u_N, \mu) \rightarrow s(\mu) = s_N(\mu) + a(e(\mu), e(\mu); \mu)$$

da cui, per continuità e per la relazione (2.34), si trova la disuguaglianza (2.36). □

Più avanti, nella Sez.2.7, presenteremo il caso di output generico ($s(u) = g(u)$, eliminando la restrizione $s(u) = f(u)$) e la possibilità di introdurre un approccio duale per migliorare la precisione, mediante un'opportuna correzione [8].

La teoria completa *a priori* non può essere impiegata per il calcolo dei limiti superiore e inferiore perché dipende dalla norma della soluzione esatta, che è generalmente sconosciuta. Di conseguenza bisogna ricorrere ad una stima *a posteriori* dell'errore per conoscerne i limiti, che dipendono, in questo caso, da quantità calcolabili come i residui.

In [8] è stata sviluppata una rigorosa stima a posteriori per l'approssimazione a basi ridotte di equazioni ellittiche e coercive. In molti casi le stime dell'errore sono molto precise: il rapporto tra l'errore stimato sull'output e l'errore reale, cioè η_N , è molto vicino all'unità, ma sempre maggiore di 1.

2.6 Procedura Adattiva per la Costruzione della Base

Il primo problema che ci si pone è quale possa essere il numero N di funzioni che costituiscono la base W_N . Abbiamo visto nel paragrafo precedente che tale numero può, *in teoria*, essere scelto piuttosto piccolo. *In pratica* però non sappiamo *quanto* piccolo possa essere, poiché

dipende da vari fattori: la precisione richiesta, l'output o gli outputs di interesse e il problema in questione. È chiaro che N non può essere né troppo grande, né troppo piccolo, perché nel primo caso si avrebbe un'inefficienza computazionale e nel secondo una imprecisione inaccettabile. Per la necessità di un controllo su N si ricorre alla stima *a posteriori* dell'errore. L'altro problema è trovare *quali* funzioni devono rientrare nella base. Innanzitutto costruiamo off-line un'approssimazione a basi ridotte che presenti, sulla maggior parte del dominio, un errore in norma- X inferiore ad un valore prefissato ϵ_d^{prior} . Per far questo calcoliamo le soluzioni a elementi finiti associate a diversi μ distribuiti in maniera più o meno uniforme in \mathcal{D} (indichiamo questo insieme con \sum^{prior}). Iniziamo a considerare un primo punto μ^1 , cioè $S_{N'=1} = \{\mu^1\}$, e successivamente valutiamo $\Delta_{N'=1}(\mu)$ in \sum^{prior} . Si sceglie come μ^2 (da cui $S_{N'=2} = \{\mu^1, \mu^2\}$) il vettore dei parametri appartenente a \sum^{prior} che massimizza $\Delta_{N'=1}(\mu)$. Ripetiamo questo processo finché il massimo di $\Delta_{N'=N^{prior}}(\mu)$ in \sum^{prior} sia inferiore a ϵ_d^{prior} . Dato un nuovo valore di μ e fissata una tolleranza sull'errore ϵ_d^{post} , si ripete on-line la procedura adattiva, scegliendo i parametri campione da $S_{N^{prior}}$. Scegliamo tipicamente $\epsilon_d^{prior} \ll \epsilon_d^{post}$, da cui $N^{post}(\mu) \ll N^{prior}(\mu)$.

Questa procedura adattiva permette di avere una precisione maggiore per N piccoli ed è estremamente importante, non solo per il risparmio computazionale e la rapidità nel calcolo dell'output, ma anche per evitare malcondizionamenti nel procedimento di assemblaggio delle matrici.

Questo algoritmo di adattività nella scelta della base, che comporta la risoluzione completa del problema a basi ridotte, può essere sostituito da un algoritmo di proiezione dell'errore, basato sulla semplice risoluzione di un sistema lineare (si veda [9]).

2.7 Estensioni: Outputs “Non-compliant” e Operatori Non Simmetrici

Nei paragrafi precedenti si è riportata la teoria del metodo a basi ridotte nel caso di output “compliant”, cioè $l(v) = f(v)$, $\forall v \in X$. La formulazione del metodo e la teoria si possono estendere al caso in cui il funzionale lineare che definisce l'output sia più generale; inoltre si può lasciar cadere l'assunzione di simmetria (ma non di coercività) della forma bilineare $a(\cdot, \cdot; \mu)$, in modo da poter allargare la categoria dei problemi trattati. Un esempio significativo di

problema non simmetrico è l'equazione di diffusione-trasporto (si veda il Cap.3), nella quale è il termine convettivo a rendere l'operatore non simmetrico.

Innanzitutto generalizziamo la formulazione astratta riportata nel Par.2.2.1: si mantiene la definizione del problema “primario” (2.3), non richiedendo più la simmetria della simmetria della forma bilineare e si introduce un problema aggiunto o “duale”. Il problema “duale” di (2.3) ha la seguente formulazione: $\forall \mu \in \mathcal{D}$, cercare $\psi(\mu) \in X$ tale che

$$a(v, \psi(\mu); \mu) = -l(v), \quad \forall v \in X, \quad (2.37)$$

ricordando che $l(v)$ è il funzionale che definisce l'output (2.2).

2.7.1 Approssimazione a basi ridotte

Occorre innanzitutto creare lo spazio delle basi ridotte, scegliendo un set di parametri campioni casuali $S_{N/2} = \{\mu^1, \dots, \mu^{N/2}\}$, con $\mu^i \in \mathcal{D}$, per $i = 1, \dots, N/2$ (N pari). Definiamo uno spazio “integrato” per l'approssimazione a basi ridotte $W_N = \text{span}\{u(\mu^n), \psi(\mu^n)\}$, $n = \dots, N/2$.

Per ogni $\mu \in \mathcal{D}$, l'approssimazione a basi ridotte della soluzione è la proiezione di Galerkin in W_N . Per il problema primario si cerca la soluzione

$$u_N(\mu) \in W_N : a(u_N(\mu), v; \mu) = f(v), \quad \forall v \in W_N,$$

e per il problema aggiunto definiamo (ma, in generale, non calcoliamo) $\psi_N(\mu) \in W_N$, tale che $a(v, \psi_N(\mu); \mu) = -l(v)$, $\forall v \in W_N$. L'approssimazione a basi ridotte dell'output si calcola allora come $s_N(\mu) = l(u_N(\mu))$.

$u_N(\mu)$ e $\psi_N(\mu)$ sono ottimali nel senso che:

$$\begin{aligned} \|u(\mu) - u_N(\mu)\|_X &\leq \left(1 + \frac{\gamma(\mu)}{\alpha(\mu)}\right) \inf_{w_N \in W_N} \|u(\mu) - w_N\|_X, \\ \|\psi(\mu) - \psi_N(\mu)\|_X &\leq \left(1 + \frac{\gamma(\mu)}{\alpha(\mu)}\right) \inf_{w_N \in W_N} \|\psi(\mu) - w_N\|_X, \end{aligned}$$

Queste due disuguaglianze si dimostrano con argomentazioni analoghe a quelle viste in Par. 2.5.1 [8].

Per quanto riguarda l'output, si ha:

$$|s(\mu) - s_N(\mu)| = |l(u(\mu)) - l(u_N(\mu))| = |a(u(\mu) - u_N(\mu), \psi; \mu)| =$$

$$|a(u - u_N, \psi - \psi_N; \mu)| \leq \gamma_0 \|u - u_N\|_X \|\psi - \psi_N\|_X,$$

per la definizione stessa di output, l'ortogonalità di Galerkin, la definizione dei problemi primario e aggiunto e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Quest'ultimo risultato permette di capire perché si devono includere le $\psi(\mu^n)$, per $n = 1, \dots, N/2$, in W_N : per assicurare che $\|\psi - \psi_N\|_X$ sia piccolo. D'altro canto, l'inclusione delle soluzioni aggiunte $\psi(\mu^n)$ in W_N comporta un incremento del costo computazionale.

Esiste un'alternativa alla creazione di uno spazio “integrato” primario-duale per l'approssimazione a basi ridotte ed è l'approccio “non integrato”, che introduce due spazi separati, primario ($u(\mu^n)$) e duale ($\psi(\mu^n)$), per le approssimazioni, rispettivamente, di $u(\mu)$ e $\psi(\mu)$. La creazione di uno spazio “non integrato” comporta significativi vantaggi computazionali e di condizionamento. Entrambi gli approcci, “integrato” e “non integrato”, permettono di scindere la procedura computazionale in due stadi (off-line/on-line), in modo che l'onere computazionale e la memorizzazione della parte on-line siano indipendenti dalle dimensioni \mathcal{N} dello spazio delle approssimazioni a elementi finiti.

2.8 Una Breve Rassegna Bibliografica sulla Riduzione delle Dimensioni del Modello

In conclusione a questo capitolo vogliamo fare un rapido cenno all'inquadramento storico di tecniche risolutive basate sulla riduzione del modello.

Ridurre le dimensioni del modello significa approssimare in maniera accurata una funzione mediante un'altra funzione che richiede meno dati per essere definita. Passare da un problema infinito-dimensionale a uno finito-dimensionale costituisce già un tentativo di riduzione del modello, ma noi siamo interessati alla possibilità di approssimare un problema complesso, governato da un sistema di equazioni alle derivate parziali, usando, invece dei migliaia o addirittura milioni di gradi di libertà richiesti dalle approssimazioni a elementi finiti (o differenze finite, o volumi finiti, ecc.), solo un numero maneggevole di gradi di libertà.

2.8.1 Proper Orthogonal Decomposition

La ‘Proper Orthogonal Decomposition’ (POD) è probabilmente la più famosa tecnica di riduzione dell'ordine del modello. Si vuole approssimare la soluzione del problema (2.3)

impiegando un numero di funzioni di base molto inferiore rispetto a quello del metodo a elementi finiti.

La base della POD si determina nel seguente modo [10]:

- partendo da una base ridotta $\{\phi_1, \dots, \phi_{\widetilde{M}}\}$, cioè una base di soluzioni a elementi finiti associate a “snapshots” (parametri campione), dove \widetilde{M} è generalmente $\mathcal{O}(100)$, si calcola la media

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\widetilde{M}} \sum_{j=1}^{\widetilde{M}} \phi_j.$$

Assumiamo che le ϕ_i , $i = 1, \dots, \widetilde{M}$ siano state calcolate con il metodo a elementi finiti: $\phi_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, dove $\mathcal{N} \gg 1$ è la dimensione dello spazio a elementi finiti.

- Si costruisce la matrice $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ di correlazione C (simmetrica e semidefinita positiva), i cui elementi sono $c_{i,j} = \frac{1}{\widetilde{M}} (\phi_i - \bar{\phi})^T (\phi_j - \bar{\phi})$, $i, j = 1, \dots, \widetilde{M}$.
- Si calcolano gli autovalori $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\widetilde{M}}\}$ e i corrispondenti autovettori $\{v_1, \dots, v_{\widetilde{M}}\}$ di C , ordinando gli autovalori in modo decrescente.
- Si sceglie M :

$$M = \min_{m \in [1, \widetilde{M}]} \text{per cui } \frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j}{\sum_{j=1}^{\widetilde{M}} \lambda_j} \geq \gamma,$$

dove $0 \leq \gamma \leq 1$ è una tolleranza fissata.

- Si pone $\Phi_i = \sum_{j=1}^{\widetilde{M}} (v_i)_j (\phi_j - \bar{\phi})$, per $i = 1, \dots, M$. $(v_i)_j$ è la j -esima componente dell’ i -esimo autovettore.
- Si normalizza $\hat{\Phi}_i = \frac{\Phi_i}{|\Phi_i|}$, dove $|\Phi_i|^2 = \Phi_i^T \Phi_i$.

Sia $B = \text{span}\{\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_M\}$; l’approssimazione POD del problema (2.3) è : trovare $u_M(\mu) \in B$ tale che

$$a(u_M(\mu), v; \mu) = f(v), \quad \forall v \in B. \quad (2.38)$$

Questo metodo funziona bene per problemi dipendenti da un solo parametro, ma l’estensione a generici problemi multi-parametro è piuttosto limitata. Il problema è la scelta degli “snapshots”, poiché modelli di ordine ridotto ottenuti per una configurazione possono non essere ottimali per altre configurazioni e portare a risultati inaccurati o errati.

2.8.2 Sui metodi a basi ridotte

I metodi a basi ridotte sono stati introdotti verso la fine degli anni '70 per l'analisi non-lineare delle strutture, in cui venivano usati solo problemi dipendenti da un singolo parametro. Più tardi, negli anni '80 e '90, sono stati sviluppati ampiamente. In particolare, A.K. Noor (per un bibliografia dettagliata della storia del metodo si rimanda a [11]) estese il metodo a generici problemi multi-parametrici, J.P. Fink e W.C. Rheinboldt hanno iniziato a trattare problemi di carattere geometrico e hanno sviluppato un'analisi dell'errore per una classe generale di problemi mono-parametrici. T.A. Porsching ha considerato spazi approssimanti di Lagrange, Taylor e ai minimi quadrati discreti e ha sviluppato l'analisi *a priori*. La maggior parte dei primi lavori focalizza l'attenzione su due punti: in primo luogo la selezione delle funzioni di base e il metodo più semplice per calcolarle; indi la validazione dell'efficienza e della precisione dell'approccio a basi ridotte mediante un certo numero di problemi test.

Più recentemente l'approccio a basi ridotte è stato applicato in molte altre aree, per esempio in problemi di meccanica dei fluidi, fino alle equazioni di Navier-Stokes [34] e ai problemi di controllo ottimale [26, 27, 28]. Un contributo significativo allo sviluppo e all'applicazione delle metodologie si deve a A.T. Patera (per una prima sintesi si veda [8]) e ai suoi collaboratori presso il Dipartimento di Ingegneria Meccanica del Massachusetts Institute of Technology. Tra le pubblicazioni più recenti si ricordano [6], [33].

Capitolo 3

Basi Ridotte per Problemi di Diffusione e Trasporto

Per motivare e illustrare i vari aspetti della teoria esposta si è scelto di considerare dei problemi di diffusione e trasporto di una sostanza inquinante in atmosfera e in un fluido di altra natura. Nel primo caso l'obiettivo del lavoro è di estendere l'uso delle basi ridotte anche a problemi ambientali studiati mediante la teoria del controllo ottimale [12], in cui l'osservazione del sistema è rappresentata dalla concentrazione di inquinante in un sottodominio di interesse mentre il controllo agisce sull'emissione di inquinante da parte di un impianto industriale. L'originalità in questo caso consiste nel risolvere il problema di stato e il problema aggiunto con metodi a basi ridotte.

Nel secondo caso si applica il metodo delle basi ridotte ad un problema più complesso, non stazionario, in cui si ha una sorgente di inquinante in un fluido mosso da convezione naturale e si vuole rilevare la variazione nel tempo della concentrazione di inquinante in un sottodominio fissato.

3.1 Un Problema di Inquinamento Atmosferico

Si definisce *contaminata* l'aria che contiene composti, solidi o gassosi, di origine naturale o antropica, in grado di causare danni agli esseri viventi, alla vegetazione e ai manufatti esposti alla sua azione [13]. Per evitare che si verifichino situazioni di pericolo si sono fissati,

all'interno di una normativa (*D.M. 15/04/94*), i valori limite di concentrazione delle sostanze inquinanti e in particolare si distingue tra:

- *livello di attenzione*, quando la situazione di inquinamento inizia ad essere preoccupante;
- *livello di allarme*, quando la concentrazione di inquinante é rischiosa dal punto di vista sanitario e ambientale.

Le concentrazioni relative a questi *livelli* sono reperibili, per esempio, in [13] per i principali inquinanti atmosferici, tra cui si ricordano il *monossido di carbonio* (CO), gli *ossidi di azoto* (NO e NO_2), gli *ossidi di zolfo* (prevalentemente SO_2) e il *particolato* PM_x , dove il pedice x indica la dimensione caratteristica di tali particelle.

L'evoluzione della concentrazione di inquinante in atmosfera dipende dal tipo di inquinante, in base alla sua tipica scala temporale (cioè l'intervallo di tempo in cui resta in atmosfera prima di essere rimosso da fenomeni fisici o da reazioni chimiche) e spaziale. Per i problemi di scarichi industriali, come quello in questione, risultano interessanti la *scala urbana* (fino a 10 – 50 Km) e la *scala regionale* (fino a 500 Km).

Il nostro scopo è di sviluppare un metodo sistematico in grado di tenere sotto controllo il livello di SO_4 in una determinata area, in modo che la concentrazione di questa sostanza inquinante sia inferiore al livello di attenzione ($125\mu g/m^3$ per l'ossido di zolfo), in condizioni di vento stazionario. Tale concentrazione in atmosfera è governata da fenomeni di diffusione e trasporto: per il calcolo della distribuzione di inquinante all'altezza delle emissioni si impiega un modello matematico basato sulle equazioni di diffusione e trasporto in due dimensioni, mentre per conoscere il valore a terra si sfrutta l'analogia con il modello di Gauss, come discusso in [12].

3.2 Il Modello Matematico per il Controllo dell'Inquinamento dell'Aria

3.2.1 Equazioni di trasporto e diffusione di una sostanza in aria

Un approccio di tipo euleriano basato sul bilancio di massa dell'inquinante suggerisce la seguente equazione, con le opportune condizioni iniziali e al contorno:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \nu \Delta C + \nabla \cdot (C\mathbf{V}) = Q, \quad (3.1)$$

dove C rappresenta la concentrazione di inquinante, ν la diffusione molecolare dell'inquinante in aria, \mathbf{V} il vettore velocità del vento e Q il termine sorgente. In pratica, però la (3.1) risulta inutilizzabile perchè il campo di velocità \mathbf{V} deve essere calcolato tramite le equazioni di Navier-Stokes incomprimibili, con una risoluzione spaziale estremamente onerosa a causa dell'alto numero di Reynolds per il problema in questione. Utilizzare una risoluzione spaziale inferiore comporterebbe la perdita di informazioni sui meccanismi di diffusione turbolenta, si ricorre allora alla formulazione alternativa seguente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla C) + \nabla \cdot (C\mathbf{V}) = Q, \quad (3.2)$$

dove \mathbf{K} è una matrice diagonale 3×3 che tiene conto della *diffusione turbolenta* nelle sue componenti lungo gli assi di riferimento, mentre si trascura il termine di diffusione molecolare. Grazie all'introduzione di \mathbf{K} , il vettore \mathbf{V} può limitarsi a descrivere il moto medio dell'aria ed essere quindi calcolato senza un'eccessiva risoluzione spaziale.

Le componenti del vettore \mathbf{K} dipendono da molti fattori e non sono in generale note, per cui si farà riferimento a modelli empirici.

In tutta la trattazione riterremo le reazioni chimiche trascurabili.

3.2.2 Influenza della situazione meteorologica

I principali fenomeni di inquinamento si verificano nel cosiddetto *Strato Limite Planetario* ed è importante valutarne la dinamica interna delle masse d'aria, considerando l'influenza della superficie terrestre, del gradiente di pressione orizzontale e della forze di Coriolis. La classificazione dei movimenti di tali masse d'aria si opera sulla base del profilo di temperatura all'interno dello strato limite, perché questo fornisce informazioni sulla capacità dispersiva dell'atmosfera. Si valuta allora il parametro $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ [13], definito nel seguente modo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma$$

dove z rappresenta la quota, $\frac{\partial T}{\partial z}$ il gradiente termico e γ il gradiente adiabatico di temperatura con la quota, pari a $-0.0098 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{m}$.

Si ha quindi la seguente suddivisione in *classi di stabilità*:

- se $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$, l'atmosfera si dice *stabile*, caratterizzata da una scarsa diffusione verticale dell'inquinante;

- se $\frac{\partial\theta}{\partial z} \simeq 0$, l'atmosfera si dice *neutra*, perché si verifica una situazione di equilibrio indifferente a tutti gli spostamenti delle particelle di aria e la dispersione dell'inquinante è dovuta essenzialmente alla turbolenza meccanica (orografia del suolo);
- se $\frac{\partial\theta}{\partial z} < 0$, l'atmosfera è *instabile* ed è caratterizzata da moti convettivi dovuti al riscaldamento della superficie terrestre e da venti di debole intensità; di conseguenza l'inquinante tende a disperdersi ma anche a cadere in prossimità della sorgente.

Le condizioni di instabilità sono particolarmente critiche quando le sorgenti emissive sono costituite da camini industriali.

3.2.3 Il modello Gaussiano

Il modello Gaussiano consente di prevedere la concentrazione al suolo degli inquinanti emessi da un camino, se valgono le seguenti ipotesi [13]:

- processo stazionario e termine sorgente Q stazionario;
- dominio omogeneo e terreno piano;
- caratteristiche meteorologiche costanti in spazio e tempo, con velocità del vento \mathbf{V} di modulo costante e modesto ($1 - 5$ m/s, circa) e diretta come l'asse x (vedi Fig.3.1);
- trasporto di inquinante dovuto alla diffusione turbolenta trascurabile in direzione x rispetto al trasporto del vento;
- coefficienti di diffusione turbolenta K_{yy} e K_{zz} dipendenti dalla sola coordinata x .

Come si può notare le ipotesi del modello sono piuttosto restrittive e difficilmente riscontrabili nella realtà: si tratta di una semplificazione del problema da cui partire.

Applicando queste ipotesi alla (3.2), si ha:

$$-K_{yy} \frac{\partial^2 C}{\partial^2 y} - K_{zz} \frac{\partial^2 C}{\partial^2 z} + V \frac{\partial C}{\partial x} = Q, \quad (3.3)$$

corredata delle opportune condizioni al contorno. In particolare, sempre secondo [13], si assume che sufficientemente lontano dal camino, soprattutto nella direzione sottovento, la concentrazione di inquinante sia pari a alla quantità fissata C_f e che al suolo ci sia completa riflessione delle particelle di inquinante. In questo contesto la soluzione della (3.3) è la

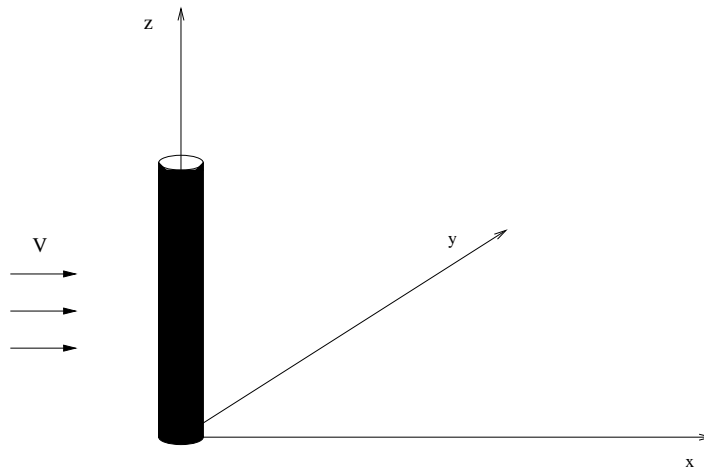


Figura 3.1: Sistema di riferimento per i modelli Gaussiani

seguinte:

$$C = C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi V \sigma_x \sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2} \cdot \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-H}{\sigma_z}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z+H}{\sigma_z}\right)^2} \right] + C_f \quad (3.4)$$

dove $\sigma_y := \sqrt{2K_{yy}x/V}$ e $\sigma_z := \sqrt{2K_{zz}x/V}$ sono i *coefficienti di dispersione* e H è l'*altezza effettiva* della sorgente di inquinante, cioè la somma dell'altezza effettiva de camino e della quota di innalzamento dei fumi. Il valore di H non è facilmente determinabile perché dipende da molti fattori, tra cui le condizioni atmosferiche, la temperatura e la velocità di uscita dei fumi stessi ecc., e quindi si ricorre a formule basate sull'osservazione sperimentale. I coefficienti σ_x e σ_y modellano il comportamento dell'atmosfera e assumono valori diversi a seconda dell'orografia del suolo e della classe di stabilità dell'atmosfera.

Per il nostro problema verranno impiegati i seguenti coefficienti di dispersione per le tre classi di stabilità:

$$\begin{aligned} \text{aria instabile:} & \begin{cases} \sigma_y = 0.270x(1 + 0.00025x)^{-\frac{1}{2}} [m], \\ \sigma_z = 0.220x(1 + 0.00010x)^{-\frac{1}{2}} [m] \end{cases} \\ \text{aria neutra:} & \begin{cases} \sigma_y = 0.120x(1 + 0.00025x)^{-\frac{1}{2}} [m], \\ \sigma_z = 0.040x(1 + 0.00020x)^{-\frac{1}{2}} [m] \end{cases} \\ \text{aria stabile:} & \begin{cases} \sigma_y = 0.075x(1 + 0.00025x)^{-\frac{1}{2}} [m], \\ \sigma_z = 0.012x(1 + 0.00020x)^{-\frac{1}{2}} [m]. \end{cases} \end{aligned}$$

3.2.4 Problema di controllo ottimo dell'inquinante

Nella definizione del problema si mantengono le stesse assunzioni fatte in [14]:

- all'*altezza effettiva* la distribuzione della concentrazione di inquinante è dominata da una equazione di diffusione e trasporto in due dimensioni (piano x-y), in forma non conservativa;
- distribuzione della concentrazione al suolo calcolata in analogia con il modello Gaussiano, cioè si sceglie di utilizzare un modello ibrido bidimensionale-gaussiano. Il modello bidimensionale permette di calcolare la concentrazione della sostanza inquinante all'altezza effettiva mentre il modello gaussiano consente di riportare tale concentrazione al suolo;
- coefficienti di diffusione turbolenta dipendenti dalla sola coordinata radiale ($r =$ distanza dalla sorgente);
- coefficienti di diffusione in direzione y e z uguali: $K_{yy} = K_{zz} = K$.

Di conseguenza il problema in *forma non conservativa* si riscrive:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (K \nabla C_H) + \mathbf{V} \cdot \nabla C_H = Q \quad \text{in } \Omega \\ C_H = 0 \quad \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial C_H}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (3.5)$$

dove C_H rappresenta la concentrazione di inquinante all'altezza effettiva, Γ_D è la parte di contorno sopravento e Γ_N tutti gli altri tratti del bordo (Fig.3.2).

Il termine sorgente Q si definisce all'intersezione tra il cono di fumo fuoriuscente e il piano x-y all'altezza effettiva.

Grazie alla già citata analogia con il modello Gaussiano la concentrazione alla generica quota z si ricava tramite la formula:

$$C(x, y, z) = C_H(x, y) \cdot \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z-H}{\sigma_z} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z+H}{\sigma_z} \right)^2} \right]. \quad (3.6)$$

Dal momento in cui interessa osservare la concentrazione di inquinante su una determinata area, quale potrebbe essere quella di una città, e controllare l'emissione di inquinante da parte di un impianto industriale si passa dal semplice problema (3.5) ad un problema di *controllo*

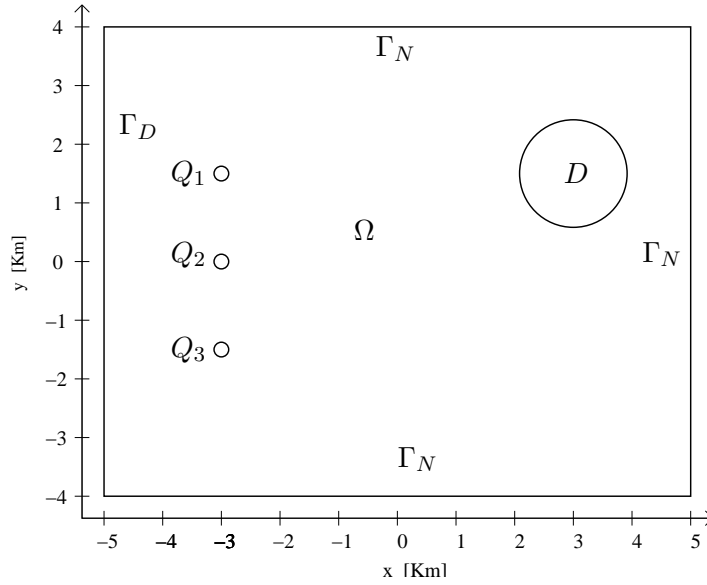


Figura 3.2: Dominio di riferimento per il problema di controllo delle emissioni di inquinante ottimale.

Indicando con w (variabile di stato) la concentrazione C_H all'altezza effettiva, con u (variabile di controllo) l'emissione di inquinante Q e con ν il termine di diffusione turbolenta K , il *Problema di Stato* si può riscrivere come:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \nabla w) + \mathbf{V} \cdot \nabla w = u & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.7)$$

dove u vale Q_i sull' i -esimo camino e 0 al di fuori dei camini stessi. L'osservazione si basa sulla proiezione al suolo della concentrazione in corrispondenza dell'area D , cioè :

$$J(w, u) = \int_D (g(x, y)w(u) - z_d)^2 d, \quad (3.8)$$

dove $g(x, y) = 2e^{-\frac{1}{2}(\frac{H}{\sigma_z})^2}$ consente di proiettare al suolo la concentrazione in quota, come si ricava facilmente dalla (3.6), mentre z_d rappresenta l'osservazione ammissibile o desiderata al suolo, inferiore al livello di attenzione.

Definiamo lo spazio $L^2(\Omega)$ delle funzioni a quadrato integrabili su $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ t.c. } \int_{\Omega} f(x)^2 d\Omega < +\infty\}.$$

$H^1(\Omega)$ è lo spazio di *Sobolev* di ordine 1 su Ω ed è costituito dalla totalità delle funzioni f di $L^2(\Omega)$ aventi tutte le derivate distribuzionali fino al primo ordine appartenenti a $L^2(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \text{ t.c. } \mathcal{D}_i f \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\}$$

dove $\mathcal{D}_i f$ è la derivata prima di f rispetto a x_i nel *senso delle distribuzioni* [15].

Sia $H_{\Gamma_D}^1 := \{v \in H^1(\Omega), \text{ t.c. } v|_{\Gamma_D} = 0\}$; si può passare alla formulazione debole del problema (3.7):

$$\text{cercare } w \in H_{\Gamma_D}^1 \quad : \quad a(w, \varphi) = F(\varphi, u), \quad \forall \varphi \in H_{\Gamma_D}^1 \quad (3.9)$$

dove:

$$a(w, \varphi) := \int_{\Omega} \nu \nabla w \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla w \, \varphi \, d\Omega, \quad (3.10)$$

$$F(\varphi, u) := \int_{\Omega} u \varphi \, d\Omega. \quad (3.11)$$

E' ora possibile definire la *Lagrangiana*:

$$\mathcal{L}(w, p, u) := J(w, u) + F(p, u) - a(w, p),$$

con $w, p \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ e $u \in L^2(\Omega)$; differenziando la Lagrangiana rispetto alla variabile di stato ($\mathcal{L}_w[\varphi]$) si ottiene l'equazione aggiunta in forma debole:

$$\text{cercare } p \in H_{\Gamma_D}^1 \quad : \quad a^{ad}(p, \phi) = F^{ad}(\phi, w), \quad \forall \phi \in H_{\Gamma_D}^1, \quad (3.12)$$

dove:

$$a^{ad}(p, \phi) := \int_{\Omega} \nu \nabla p \cdot \nabla \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \phi \, p \, d\Omega, \quad (3.13)$$

$$F^{ad}(\phi, w) := \int_{\Omega} (g(x, y) \, w - z_d) \, g(x, y) \, \phi \, dD. \quad (3.14)$$

che, passando alla forma forte, diventa:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \nabla p + \mathbf{V} \cdot p) = \chi_D g(x, y) (g(x, y) \, w - z_d) \text{ in } \Omega \\ p = 0 \quad \text{su } \Gamma_D \\ \nu \frac{\partial p}{\partial n} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.15)$$

dove χ_D è la funzione caratteristica del sottodominio D . Differenziando la Lagrangiana \mathcal{L} rispetto alla funzione di controllo ($\mathcal{L}_u[\psi]$) si ottiene il vincolo di raggiungimento dell'ottimo in forma debole:

$$\mathcal{L}_u[\psi] = \int_Q p\psi \, d\Omega = 0, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega), \quad (3.16)$$

dal quale si ottiene la derivata del funzionale costo:

$$J'(p) = p. \quad (3.17)$$

Con Q si indica l'unione dei tre sottodomini corrispondenti ai camini. Per la risoluzione del problema di controllo si impiega un metodo iterativo e la condizione di arresto si basa sulla norma di J' :

$$\|J'(p)\|_{L^2(Q)} = \|p\|_{L^2(Q)} < tol \quad (3.18)$$

dove tol è una certa tolleranza di arresto.

3.3 Approssimazione Numerica del Problema: Stabilizzazione

Per ottenere un'approssimazione numericamente accurata della soluzione esatta si usa, come si è già visto nel capitolo precedente, il metodo a elementi finiti. Tale metodo consente di definire la soluzione in spazi assai generali e le condizioni al contorno sono integrate nella formulazione del problema.

Per calcolare la soluzione a elementi finiti si introduce una triangolazione \mathcal{T}_h del dominio (Fig. 3.3). Assumiamo che i triangoli, chiamati anche elementi, coprano il dominio computazionale $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ e che non ci sia sovrapposizione tra gli elementi. Il pedice h indica il diametro massimo della triangolazione, definito come:

$$h = \sup_{T_h \in \mathcal{T}_h} \sup_{x, y \in T_h} |x - y|,$$

dove $|\cdot|$ è la norma euclidea.

3.3.1 Stabilizzazione delle equazioni di diffusione e trasporto

L'equazione di stato (3.7) è una classica equazione di diffusione trasporto, per la quale si possono definire:

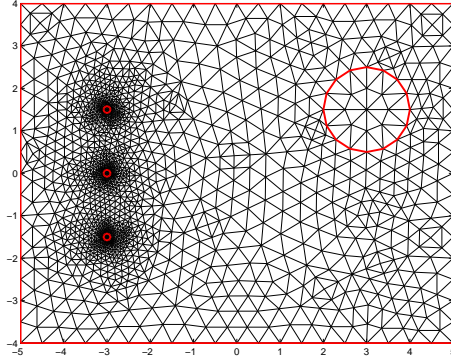


Figura 3.3: Triangolazione usata per il metodo a elementi finiti.

- il numero di Péclet globale: $\mathbb{P}e_g := \frac{\|\mathbf{V}\|_{L^\infty(\Omega)}L}{2\|\nu\|_{L^\infty(\Omega)}}$, dove L è la dimensione caratteristica del problema;

e, una volta discretizzato il problema,

- il numero di Péclet locale: $\mathbb{P}e := \frac{\|\mathbf{V}\|_{L^\infty(K)}h}{2\|\nu\|_{L^\infty(K)}}$, con h è diametro dell'elemento di griglia K .

Se il numero di Péclet globale è superiore all'unità il problema si dice a *trasporto dominante*, altrimenti si dice a *diffusione dominante*. Se invece è il numero di Péclet locale ad essere superiore dell'unità, è possibile che la soluzione numerica ottenuta con il metodo di Galerkin agli elementi finiti presenti oscillazioni. Allo scopo di ridurre o eliminare tali oscillazioni si introducono dei *termini di stabilizzazione*, in modo da rendere il numero di Péclet locale inferiore al valore unitario [15].

Nel caso del problema di controllo definito nella sezione (3.2.4) si ha la necessità di stabilizzazione sia per il problema di stato, sia per il problema aggiunto, poiché, in base ai dati disponibili in letteratura, entrambi sono dominati dal termine di trasporto. Si ha inoltre una mutua influenza della stabilizzazione dei due problemi: la cattiva approssimazione della variabile di stato influenzerebbe il problema aggiunto, il cui termine sorgente è l'osservazione della variabile di stato, e la variabile aggiunta, a sua volta, influenzerebbe il termine sorgente dell'equazione di stato (controllo).

3.3.2 Stabilizzazione del problema di stato: il metodo SUPG

Prima di risolvere il problema completo di controllo ottimale, si verifica l'applicabilità del metodo a basi ridotte al solo problema di stato e quindi è sufficiente stabilizzare quest'ultimo, per il momento.

Si consideri il seguente problema agli elementi finiti stabilizzati:

$$\text{cercare } w_h \in X_h \quad : \quad a(w_h, \varphi_h) + \mathcal{L}_h^{(\rho)}(w_h, \varphi_h; u) = F(\varphi, u_h), \quad \forall \varphi_h \in X_h,$$

dove $a(., .)$ e $F(., .)$ sono definiti in (3.10) e (3.11). Si pretende che il termine di stabilizzazione soddisfi la seguente condizione di consistenza forte: $\mathcal{L}_h^{(\rho)}(w, u, \varphi_h) = 0, \forall \varphi_h \in X_h$. A tal fine poniamo:

$$\mathcal{L}_h^{(\rho)}(w_h, u, \varphi_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K (Aw_h - u, \mathcal{S}_K^{(\rho)}(\varphi_h))_{L^2(K)}, \quad (3.19)$$

dove $Aw = -\nabla \cdot (\nu \nabla w) + \mathbf{V} \cdot \nabla w$ e u sono rispettivamente l'operatore e il termine noto dell'equazione di stato in forma forte (3.7) e

$$\mathcal{S}_K^\rho = \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} [A_{SS}\varphi_h + \rho \cdot A_S\varphi_h],$$

intendendo con $A_{SS}\varphi_h$ e $A_S\varphi_h$, rispettivamente, la parte antisimmetrica e la parte simmetrica di $A\varphi_h$; ρ assume valori differenti a seconda del metodo di stabilizzazione scelto. Si è usata la notazione $(u, v)_{L^2(K)} = \int_K uv \, dK$. Il diametro di K è h_K e δ_K è un parametro dipendente dal numero di Péclet locale.

Scegliendo di usare il metodo SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) [15], per cui $\rho = 0$, si prende in considerazione solo la parte antisimmetrica dell'operatore:

$$\begin{aligned} A_{SS}\varphi_h &= \frac{1}{2} \left(\nabla \cdot (\mathbf{V}\varphi_h) + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((\nabla \cdot \mathbf{V})\varphi_h + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h \right) \\ &= \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h, \end{aligned}$$

con $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ poichè il campo di velocità si considera costante per un dato problema.

Il problema stabilizzato ha pertanto la seguente formulazione:

$$\text{cercare } w_h \in X_h \quad : \quad a(w_h, \varphi_h) + s_h(w_h, \varphi_h; u_h) = F(\varphi_h; u_h), \quad \forall \varphi_h \in X_h,$$

$$s_h(w_h, \varphi_h; u_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K (Aw_h - u)(A_{SS}\varphi_h) \, dK$$

o equivalentemente:

$$\text{cercare } w_h \in X_h \quad : \quad a_h(w_h, \varphi_h) = F_h(\varphi_h; u_h), \quad \forall \varphi_h \in X_h, \quad (3.20)$$

dove:

$$a_h(w_h, \varphi_h) := a(w_h, \varphi_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K (-\nabla \nu \cdot \nabla w_h + \mathbf{V} \cdot \nabla w_h)(\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h) dK, \quad (3.21)$$

$$F_h(\varphi_h; u_h) := F(\varphi_h; u_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K u_h(\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h) dK. \quad (3.22)$$

Con u_h si intende l'approssimazione discreta della funzione u e $X_h \subset H_{\Gamma_D}^1$ è lo spazio degli elementi finiti. Noi utilizzeremo \mathbb{P}^1 , cioè lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 1 e quindi lo spazio generatore degli elementi finiti è lo spazio delle funzioni continue che sono polinomiali di grado 1 sui singoli triangoli della reticolazione \mathcal{T}_h .

3.4 Risoluzione del Problema di Stato con i Metodi a Basi Ridotte

Ci si riferisce al dominio riportato in Fig.3.2 e si studiano alcuni casi corrispondenti a scelte diverse dei parametri in ingresso, nelle tre diverse condizioni di stabilità dell'aria.

3.4.1 Caso 1: emissioni variabili dei camini

Nel primo caso studiato il problema è caratterizzato da un vettore di parametri in ingresso a due componenti, $\mu = \{\mu_1, \mu_2\}$, con $\mu_i = u_i$, per $i = 1, 2$, dove per u_i si intende il tasso di emissione dell' i -esimo camino industriale (i camini sono numerati dall'alto verso il basso) all'altezza effettiva $H = 100 \text{ m}$, in un campo di vento costante ($V = 2.5 \text{ m/s}$ in direzione \hat{x}). Supponendo che la quantità di sostanza inquinante emessa nell'unità di tempo sia proporzionale alla produttività dell'impianto industriale, si fissa un valore totale delle emissioni ($u_{tot} = 2700 \text{ g/s}$), in modo da garantire un certo livello di produzione. Di conseguenza, noti u_1 e u_2 , u_3 si ricava sottraendo i primi due al totale u_{tot} . Si può assumere per μ un valore qualsiasi all'interno di uno spazio specificato $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, con $\mathcal{D} = [0, 2700] \times [0, 2700]$, cioè ciascun camino può emettere ad un tasso variabile tra lo 0% e il 100% del totale u_{tot} , con il vincolo $u_1 + u_2 \leq u_{tot}$.

L'output è dato dalla concentrazione della sostanza inquinante sul sottodominio di interesse D .

Questo primo problema è semplificato rispetto alla trattazione generica del capitolo precedente perché solo il termine noto (3.22) della formulazione debole dipende da μ , mentre la forma (3.21) è parametro-indipendente e l'output dipende dal parametro solo indirettamente. Sia w_N la soluzione a basi ridotte del problema di stato stabilizzato. In base alla (2.10) e alla (2.15) scriviamo:

$$w_N(\mu) = \sum_{j=1}^N w_{N_j}(\mu) \zeta^j = \sum_{j=1}^N w_{N_j}(\mu) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \zeta_i^j \varphi_i. \quad (3.23)$$

Le N incognite $w_{N_j}(\mu)$ si calcolano risolvendo il problema:

$$a_h(w_N(\mu), \zeta_h) = F_h(\zeta_h) \quad h = 1, \dots, N. \quad (3.24)$$

dove

$$a_h(w_N(\mu), \zeta_h) = \sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^N w_{N_j}(\mu) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \zeta_i^j \zeta_m^h \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nu \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_m + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_m + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K \left(-\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_i + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i \right) (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m) \right] \quad (3.25)$$

e

$$F_h(\zeta_h) = \sum_{h=1}^N \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \zeta_m^h \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u \varphi_m + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K u (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m) \right]. \quad (3.26)$$

Definiamo le matrici \underline{C} , \underline{B} , $\underline{S} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$, rispettivamente la matrice di rigidità, la matrice relativa al termine di trasporto e la matrice di stabilizzazione:

$$C_{m,i} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nu \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_m, \quad (3.27)$$

$$B_{m,i} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_m, \quad (3.28)$$

$$S_{m,i} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K \left(-\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_i + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i \right) (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m). \quad (3.29)$$

La matrice $\underline{A}_h \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ (2.5) è quindi data da:

$$A_{h,m,i} = C_{m,i} + B_{m,i} + S_{m,i}. \quad (3.30)$$

Si noti che, come già anticipato, \underline{A}_h è indipendente dai parametri in ingresso μ .

Siano inoltre $\underline{G}(\mu), \underline{H}(\mu) \in \mathbb{R}^N$ i vettori colonna definiti come:

$$G_m(\mu) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u \varphi_m, \quad (3.31)$$

$$H_m(\mu) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K u (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m), \quad (3.32)$$

in modo che \underline{F}_h (3.26) si possa scrivere nel seguente modo:

$$F_{h_m}(\mu) = G_m(\mu) + H_m(\mu). \quad (3.33)$$

Entrambi \underline{G} e \underline{H} dipendono da μ poiché u è la funzione di \mathbb{R}^2 che vale $u_i = \mu^i$ sull' i -esimo camino e 0 sul resto del dominio.

Indicando con \underline{W} la matrice $N \times N$ le cui colonne sono i vettori dei valori nodali delle soluzioni a elementi finiti $\underline{\zeta}^i$, $i = 1, \dots, N$ (2.9), il vettore delle incognite $\underline{w}_N(\mu)$ si ottiene risolvendo il problema:

$$(\underline{W}^T \underline{A}_h \underline{W}) \underline{w}_N(\mu) = \underline{W}^T \underline{F}_h(\mu) \quad (3.34)$$

Assemblaggio della base

Si calcolano le soluzioni a elementi finiti associate ad un insieme di punti distribuiti in \mathcal{D} in maniera uniforme, come riportato in Fig.3.28

Si sceglie come primo punto $\mu^1 = \{0, 0\}$, cioè la prima funzione della base è la soluzione corrispondente ad avere i primi due camini spenti. Seguendo la procedura descritta nel paragrafo 2.6, si trovano i due elementi successivi dell'insieme dei parametri campione: $\mu^2 = \{0, 2700\}$, $\mu^3 = \{2700, 0\}$. Si nota che l'errore relativo medio in norma- H^1 passa da $\mathcal{O}(10^{-1})$ a $\mathcal{O}(10^{-15})$.

Questa rapida caduta dell'errore per N molto piccolo ha più di una motivazione. Innanzi tutto l'estrema semplicità del problema in questione (come già osservato, \underline{A}_h è indipendente da μ), che lo rende adatto ad essere una prima applicazione del metodo, toglie generalità ai risultati.

Inoltre per $N' = 3$ la base è formata dalle soluzioni del problema di stato dovute a due camini spenti e l' i -esimo (rispettivamente $i = 3, 1, 2$) funzionante a pieno regime. Poiché la semplicità del problema determina la sovrapposizione degli effetti, la soluzione a basi ridotte sarà una opportuna combinazione lineare delle tre funzioni di base e i coefficienti di tale combinazione dipendono dalle percentuali di funzionamento delle ciminiere 1 e 2.

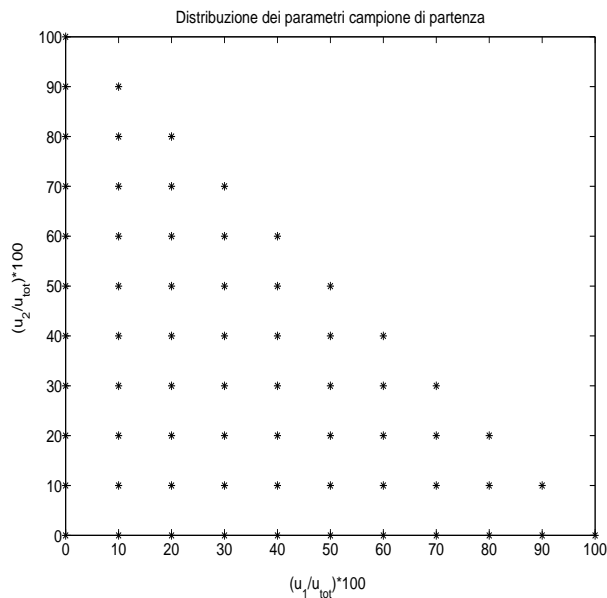
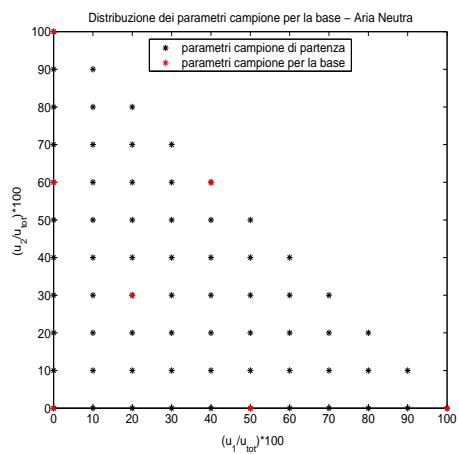
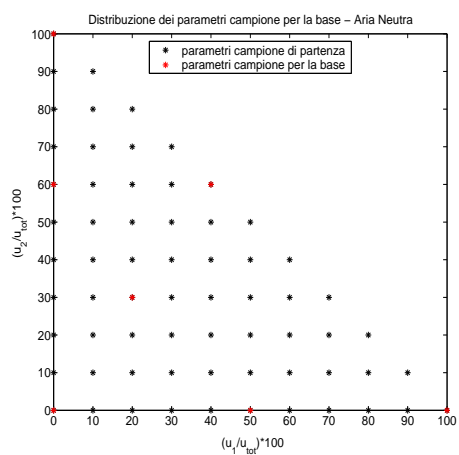


Figura 3.4: Distribuzione uniforme in \mathcal{D} dei parametri di partenza per la costruzione della base nelle diverse condizioni di stabilità dell'aria.

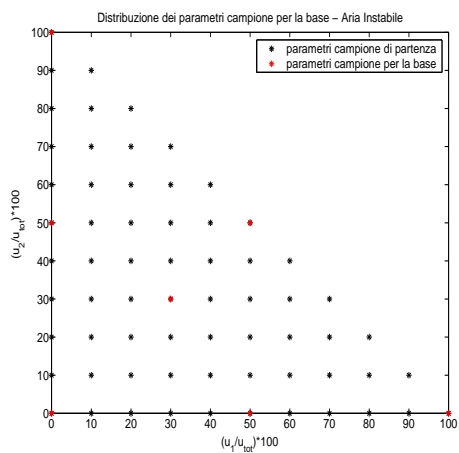
Nonostante la precisione sia soddisfacente già per $N' = 3$, si prosegue l'assemblaggio fino a N' a 7 per arricchire la base. La Fig.3.5 riporta, segnati in rosso, i punti di \mathcal{D} che costituiscono i parametri campione nelle tre diverse condizioni di stabilità dell'aria. Si è voluto inoltre calcolare l'errore in norma- H^1 di ciascuna soluzione corrispondente a questi 7 parametri in ingresso al variare del numero di funzioni di base. Avendo testato tutte le diverse configurazioni, si è scelto di riportare in Fig.3.6 gli andamenti dell'errore- H^1 massimo, minimo e medio all'aumentare di N' . In tutti e tre i casi, l'andamento all'incirca costante del minimo attorno a 10^{-16} è una verifica della consistenza del metodo: per ogni N' l'errore minimo è dovuto ad un soluzione il cui μ appartiene a $S_{N'}$ e per cui, quindi, $w_N(\mu^i)$ coincide con $u_h(\mu^i) \in W_N$. Nel caso di aria neutra, per $N' = 1$ non è riportato nessun valore dell'errore minimo relativo perché tale valore è inferiore alla precisione macchina. I grafici dell'errore medio e massimo mostrano la brusca diminuzione dell'errore per $N' \geq 3$. L'andamento non costantemente decrescente dell'errore massimo e medio al crescere di N' si spiega in termini di malcondizionamento del sistema (3.34). Poiché già con tre funzioni di base si riesce a calcolare la soluzione per ogni $\mu \in \mathcal{D}$, l'aggiunta di ulteriori funzioni può costituire un disturbo per il sistema perché fornisce "informazioni" non strettamente necessarie.



(a)

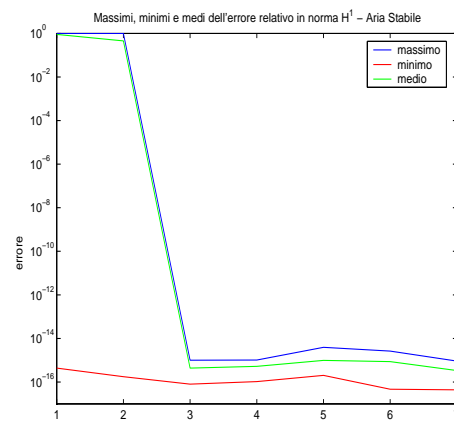


(b)

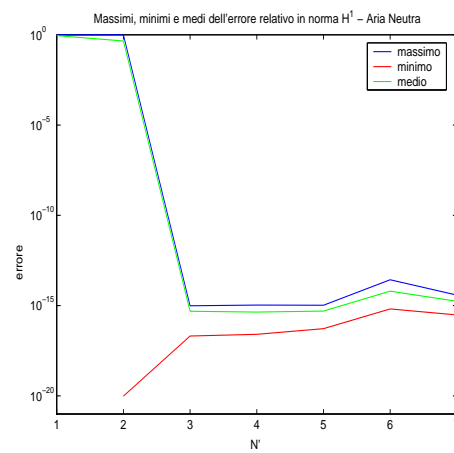


(c)

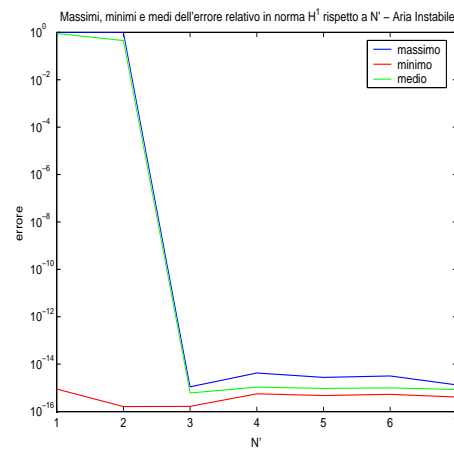
Figura 3.5: Risultati della ricerca dei parametri campione per S_N per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).



(a)



(b)



(c)

Figura 3.6: Caso 1 (emissioni variabili): andamento dell'errore- H^1 relativo massimo, minimo e medio rispetto all'aumentare del numero di funzioni di base, per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).

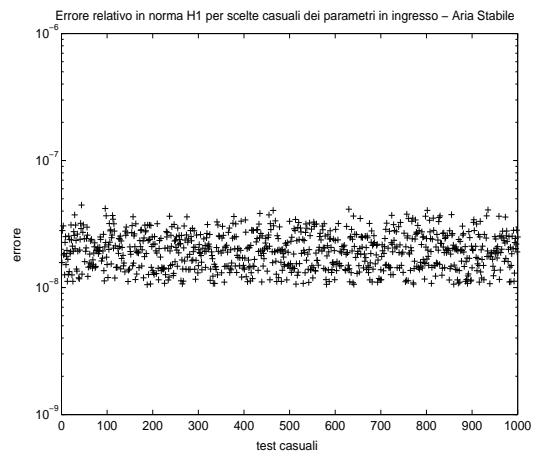
Errore per una scelta casuale dell'input

Al fine di verificare la validità del metodo qualsiasi siano i parametri in ingresso, si è calcolato l'errore relativo in norma- H^1 della soluzione a basi ridotte per mille differenti termini noti, generati casualmente impiegando la funzione `random` di Matlab. Come si nota in Fig.3.7 l'errore resta sempre confinato in un intervallo limitato: $[10^{-8}, 10^{-7}]$. In assenza, per ora, di una rigorosa stima dell'errore, questo test, basandosi su un numero elevato di soluzioni dovute a input casuali, garantisce l'applicabilità del metodo a basi ridotte per questo primo caso, con la base trovata, $\forall \mu \in \mathcal{D}$.

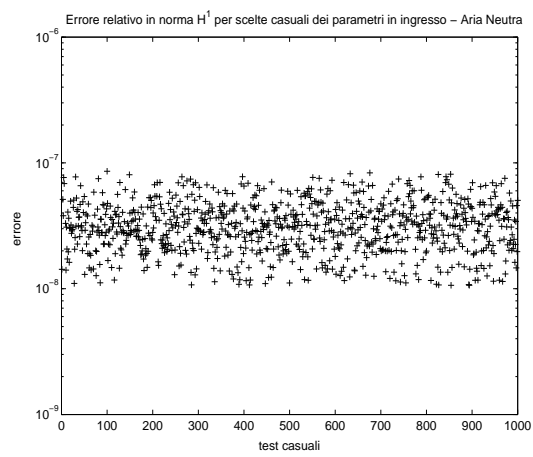
Considerando il tempo necessario per calcolare la soluzione a elementi finiti e il tempo richiesto dalla parte on-line per completare l'assemblaggio delle matrici e risolvere il problema a basi ridotte, si riscontra un risparmio medio dei tempi computazionali del 70 % circa. Se si infittisce la griglia, i costi computazionali per il metodo a elementi finiti aumentano di molto, mentre quelli per il metodo a basi ridotte restano praticamente invariati (si ricorda che i costi computazionali per la parte on-line sono indipendenti da \mathcal{N}) e quindi si avrebbero risparmi computazionali maggiori. Infittire o meno la griglia riguarda la precisione che si vuole avere sulla soluzione a elementi finiti; le basi ridotte non fanno altro che ricostruire la soluzione a elementi finiti. Di conseguenza una volta che la griglia è tale da garantire la precisione richiesta, prenderne una più fine renderebbe le basi ridotte ancora più competitive. L'importante, comunque, è confrontare i tempi in modo coerente, cioè la griglia per la soluzione a elementi finiti deve essere la stessa su cui sono state calcolate le funzioni di base per il metodo a basi ridotte.

Esempio di soluzione a basi ridotte

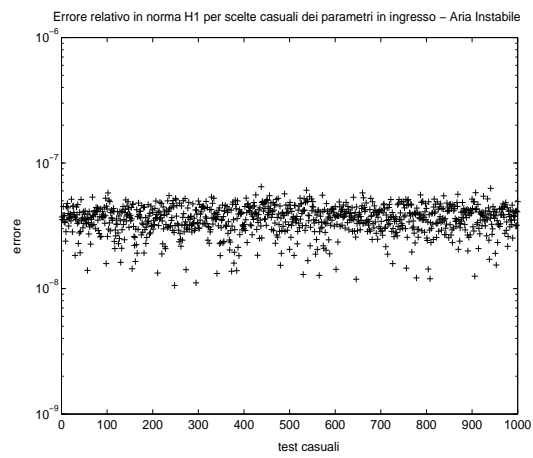
Riportiamo in Fig.3.8, a titolo di esempio, la soluzione a basi ridotte corrispondente a $\mu = \{810 [g/s], 540 [g/s]\}$, in aria instabile, e in Fig.3.9 la soluzione relativa a elementi finiti. I grafici mostrano la distribuzione della concentrazione in $[\mu g/m^3]$ della sostanza inquinante, sia all'altezza effettiva che al suolo. Si osserva la perfetta sovrapposizione delle soluzioni calcolate con i due metodi differenti. L'errore relativo in norma- H^1 è dell'ordine di 10^{-15} .



(a)



(b)



(c)

Figura 3.7: Caso 1 (emissioni variabili): errore relativo in norma- H^1 per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).

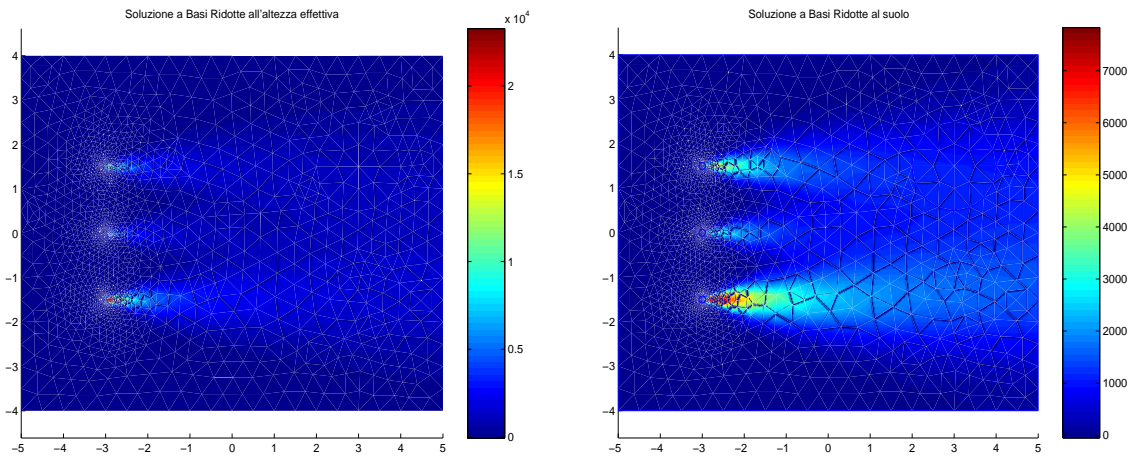


Figura 3.8: Caso 1 (emissioni variabili): esempio di soluzione a basi ridotte in aria instabile.

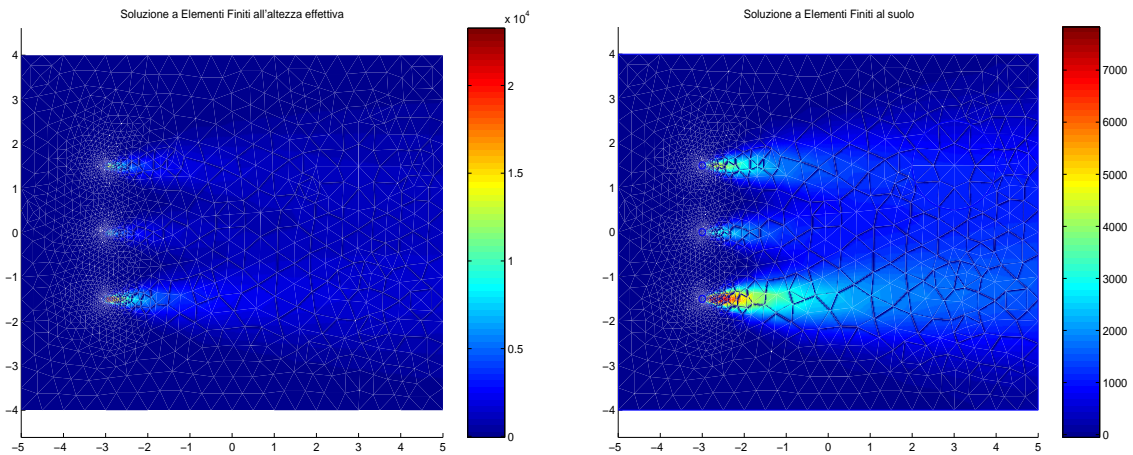


Figura 3.9: Caso 1 (emissioni variabili): soluzione corrispondente a elementi finiti.

3.4.2 Caso 2: direzione variabile del vento

In questo secondo caso il vettore di parametri in ingresso è costituito dalle due componenti del vettore velocità nel sistema di riferimento cartesiano (Fig.3.2), cioè $\mu = \{V_x, V_y\}$. La direzione della velocità del vento si considera variabile nell'intervallo $[-90^\circ, 90^\circ]$, ma si mantiene il modulo fisso (per comodità $|\mathbf{V}| = 1 \text{ m/s}$), in modo che il campo di viscosità resti invariato. Sempre considerando $u_{tot} = 2700 \text{ g/s}$, si fissa, arbitrariamente, il valore delle emissioni di ciascuno camino: $u_1 = 10\%$, $u_2 = 20\%$ e quindi $u_3 = 70\%$ del totale. Il parametro μ può assumere un valore all'interno dello spazio $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D} = [0, 1] \times [-1, 1]$, con il vincolo $\sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = 1$.

Questo problema, pur essendo ancora semplice perché il numero delle componenti di μ è basso, è più generale del caso precedente poiché la forma bilineare (3.21) è dipendente dal parametro in ingresso. Si vogliono calcolare le N incognite $w_{N_i}(\mu)$, cioè i pesi della combinazione lineare (3.23), per ottenere la soluzione w_N del problema a basi ridotte (3.24). L'operatore a_h e il funzionale F_h restano gli stessi definiti rispettivamente dalle (3.25) e (3.26).

Passando alla forma matriciale, la matrice $\underline{A}_h \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ (2.5) si può scrivere nel seguente modo:

$$A_{h_{m,i}}(\mu) = C_{m,i} + V_x \cdot B_{x_{m,i}} + V_y \cdot B_{y_{m,i}} + S_{m,i}(\mu), \quad (3.35)$$

dove \underline{C} è la matrice di rigidezza (3.27), \underline{S} è la matrice di stabilizzazione (3.29), in questo caso parametro-dipendente, e \underline{B}_x e \underline{B}_y sono date da:

$$B_{x_{m,i}} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{U}_x \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_m, \quad (3.36)$$

$$B_{y_{m,i}} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{U}_y \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_m, \quad (3.37)$$

con $\mathbf{U}_x = (1, 0)$ e $\mathbf{U}_y = (0, 1)$. $\underline{B} = V_x \cdot \underline{B}_x + V_y \cdot \underline{B}_y$, dove \underline{B} è la matrice relativa al termine di trasporto, definita da (3.28).

\underline{F}_h (3.26) è data da:

$$F_{h_m}(\mu) = G_m + H_m(\mu). \quad (3.38)$$

In questo secondo caso \underline{H} (3.32) è parametro-dipendente perchè dipende dal vettore velocità, mentre \underline{G} (3.31) risulta parametro-indipendente.

Tutte le matrici parametro-indipendenti (\underline{C} , \underline{B}_x , \underline{B}_y , \underline{G}) vengono calcolate off-line, una e una sola volta, e memorizzate, mentre le matrici \underline{S} e \underline{H} , dipendenti dal parametro in modo non affine, devono essere calcolate on-line per ogni nuovo parametro μ in ingresso. Scelto un nuovo valore di μ , on-line si effettua anche l'assemblaggio delle matrici $\underline{A}_h(\mu)$ e $\underline{F}_h(\mu)$. Continuando ad indicare con \underline{W} la matrice $\mathcal{N} \times N$ le cui colonne sono i vettori dei valori nodali delle soluzioni a elementi finiti utilizzate come funzioni di base, il vettore delle incognite $\underline{w}_N(\mu)$ si ottiene risolvendo il problema:

$$(\underline{W}^T \underline{A}_h(\mu) \underline{W}) \underline{w}_N(\mu) = \underline{W}^T \underline{F}_h(\mu) \quad (3.39)$$

dove la differenza dalla (3.34) consiste, come già detto, nella dipendenza di \underline{A}_h da μ .

Assemblaggio della base

Per trovare una base si parte dal calcolo delle soluzioni a elementi finiti associate ad un insieme di punti distribuiti in maniera uniforme in \mathcal{D} .

Per garantire di coprire tutto il sottospazio \mathcal{D} omogeneamente e senza direzioni preferenziali per il vento, prendiamo un numero di vettori equispaziati nell'intervallo $[-90^\circ, 90^\circ]$. Si aumenta il numero di vettori della base finché l'errore relativo medio in norma- H^1 , per input casuale, non sia ritenuto soddisfacente. Per una base di 36 soluzioni associate a altrettante direzioni del vento, distanziate tra loro di 5° , osserviamo che tale errore è dell'ordine di 10^{-6} per aria instabile. Per aria stabile e neutra si ha un errore dello stesso ordine di grandezza per una base di 60 funzioni (corrispondenti a direzioni del vento distanziate tra loro di 3°). Per capire questa diversità nel numero di elementi della base occorre considerare il peso del termine diffusivo rispetto a quello del termine convettivo in A_h (3.35). All'aumentare della viscosità il termine diffusivo diventa dominante e quindi bastano “poche” funzioni di base per avere una buona approssimazione della soluzione dipendente dalla velocità di trasporto. Poiché nel caso di aria instabile la viscosità è maggiore in modulo (Fig.3.10), il termine convettivo ha un'influenza minore e occorrono meno funzioni di base. Si noti l'utilizzo di un

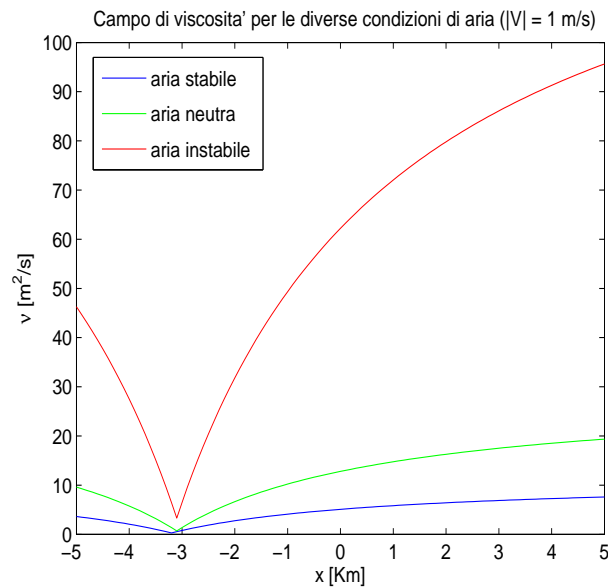


Figura 3.10: Andamento della viscosità in funzione delle coordinate x nelle tre condizioni di aria.

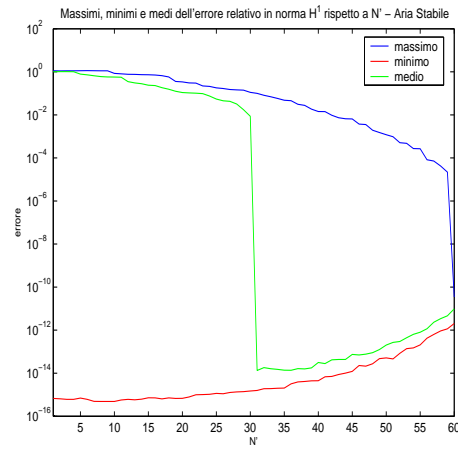
numero N di funzioni di base molto maggiore rispetto al caso 1 per via della dipendenza di \underline{A}_h da μ , che rende il problema meno banale e più complesso.

Trovato N , si segue la procedura descritta nel paragrafo 2.6 per ordinare gli elementi della base, senza ridurre il numero. L'ordinazione della base è finalizzata al calcolo dell'andamento dell'errore- H^1 massimo, minimo e medio all'aumentare di N' . Come già fatto per il caso 1, si calcola l'errore in norma- H^1 di ciascuna soluzione corrispondente ai parametri di S_N al variare del numero di funzioni di base e si trova l'errore massimo, minimo e medio per ogni N' . Uno dei vantaggi di sfruttare la base ordinata è che l'andamento dei massimi degli errori è sempre decrescente, come mostra la Fig.3.11, e si riesce a controllare il numero di basi utilizzate (N). Anche in questo secondo caso, per tutte e tre le condizioni di aria, l'andamento del minimo è una verifica della consistenza del metodo. La brusca caduta dell'errore medio in corrispondenza di $N' = N/2$ indica che per una base formata da un numero dimezzato di elementi l'errore medio, calcolato su diverse configurazioni, è già "piccolo" ($\mathcal{O}(10^{-13})$), ma, dato che l'errore massimo è ancora troppo elevato, si continua ad aumentare N' . L'andamento non costante dell'errore minimo e non monotonicamente decrescente dell'errore medio al crescere di N' si spiega con l'inizio di un malcondizionamento del sistema (3.39). Per l'eliminazione del problema di malcondizionamento mediante l'ortonormalizzazione delle basi (algoritmo di Gram-Schmidt) si veda [9].

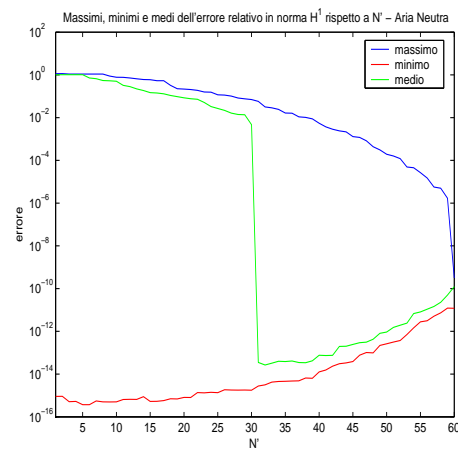
Errore per una scelta casuale dell'input

Calcoliamo l'errore relativo in norma- H^1 della soluzione a basi ridotte per cento differenti parametri in ingresso, generati tramite la funzione `random` di Matlab. Come si nota in Fig.3.12 l'errore resta sempre confinato in un intervallo limitato: $[10^{-8}, 10^{-5}]$. Anche questo secondo caso test, basandosi su un numero sufficientemente elevato di soluzioni relative a input casuali, garantisce l'applicabilità del metodo a basi ridotte, con la base trovata, $\forall \mu \in \mathcal{D}$.

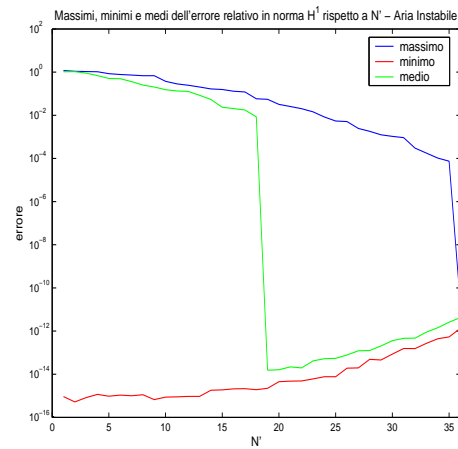
Si riscontra un risparmio medio di tempo di calcolo di ciascuna soluzione a basi ridotte, rispetto a quello per la corrispondente soluzione a elementi finiti, del 50 % circa. Il calo del risparmio è dovuto alla necessità di calcolare on-line \underline{S} (3.29) e \underline{H} (3.32). Se però, una volta costruita la base, si ha la necessità di effettuare un grande numero di test (on-line) il risparmio è molto consistente.



(a)

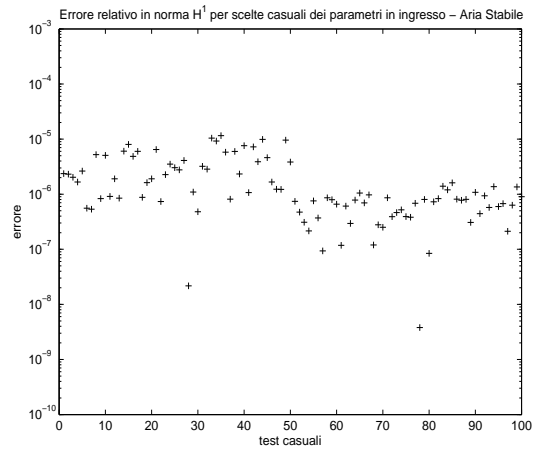


(b)

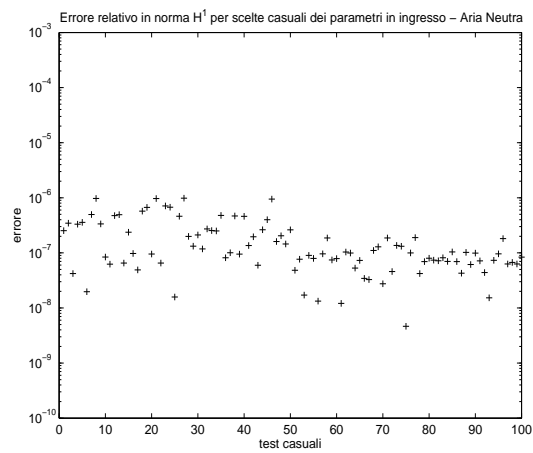


(c)

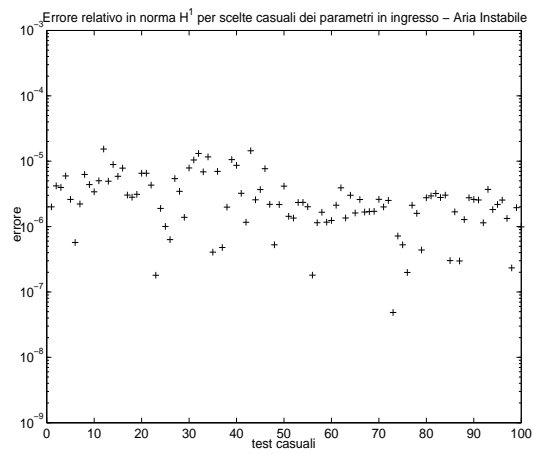
Figura 3.11: Caso 2 (vento variabile): andamento dell'errore- H^1 relativo massimo, minimo e medio rispetto all'aumentare del numero di funzioni di base, per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).



(a)



(b)



(c)

Figura 3.12: Caso 2 (vento variabile): errore relativo in norma- H^1 per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).

Esempio di soluzione a basi ridotte

Riportiamo in Fig.3.13, a titolo di esempio, la soluzione a basi ridotte corrispondente a $\mu = \{\cos(\text{atan}(0.5)) [m/s], \sin(\text{atan}(0.5)) [m/s]\}$, in aria instabile, e in Fig.3.14 la soluzione relativa ottenuta risolvendo il problema a elementi finiti. I grafici mostrano la distribuzione della concentrazione in $[\mu g/m^3]$ della sostanza inquinante, sia all'altezza effettiva che al suolo. Si osserva ancora la perfetta somiglianza delle soluzioni calcolate con i due metodi differenti. L'errore relativo in norma- H^1 è dell'ordine di 10^{-6} .

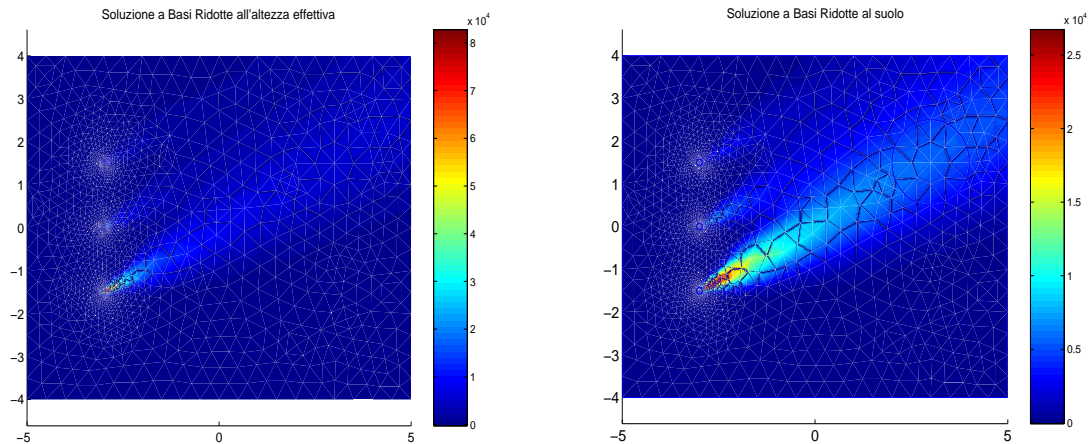


Figura 3.13: Caso 2 (vento variabile): esempio di soluzione a basi ridotte in aria instabile.

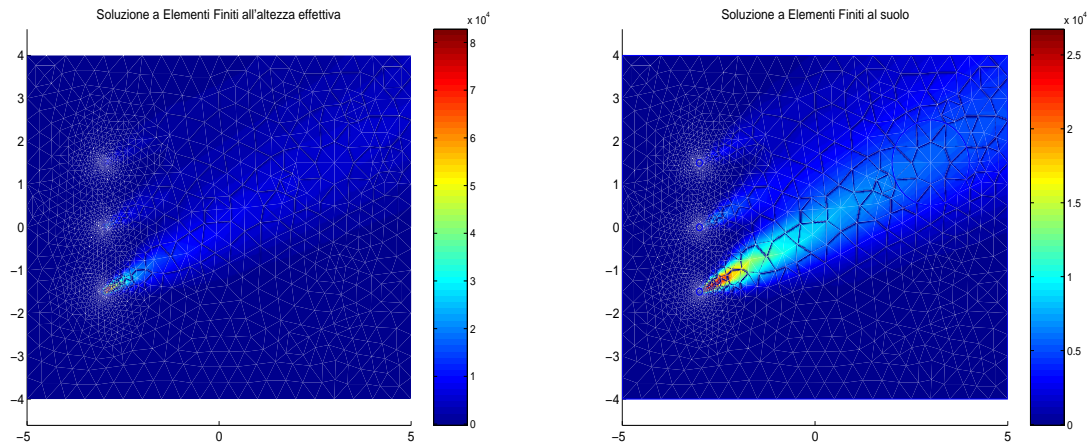


Figura 3.14: Caso 2 (vento variabile): soluzione corrispondente a elementi finiti.

3.4.3 Caso 3: viscosità variabile

In [12] la viscosità ν dell'aria è riportata in funzione della coordinata x (Fig.3.2), per ognuna delle classi di stabilità atmosferica. Si introduce un parametro moltiplicativo, indicato con $\bar{\nu}$ (finora si è tenuto $\bar{\nu} = 0.5$), in modo che ν si presenti nella forma:

- aria stabile: $\nu = \bar{\nu} \cdot \left(75^2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x+3.1)+0.1}{1+0.25 \cdot (x+3.1)+0.1} \right) \cdot V_m$;
- aria neutra: $\nu = \bar{\nu} \cdot \left(120^2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x+3.1)+0.1}{1+0.25 \cdot (x+3.1)+0.1} \right) \cdot V_m$;
- aria instabile: $\nu = \bar{\nu} \cdot \left(270^2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x+3.1)+0.1}{1+0.25 \cdot (x+3.1)+0.1} \right) \cdot V_m$.

V_m è il modulo della velocità media del vento, che assumiamo pari a 2.5 m/s (per semplicità si sceglie un campo di vento costante in direzione \hat{x}). Fissiamo arbitrariamente il valore delle emissioni di ciascun camino, per esempio $u_1 = 20\%$, $u_2 = 30\%$ e $u_3 = 50\%$ del totale $u_{tot} = 2700$ g/s e prendiamo $\bar{\nu}$ come unico parametro in ingresso: $\mu = \bar{\nu}$. Assumiamo che $\bar{\nu}$ vari all'interno dell'intervallo $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^1$, $\mathcal{D} = [0.1, 1]$; $\bar{\nu}$ è un indice di stabilità dell'aria: tanto più $\bar{\nu}$ è basso tanto più l'aria è stabile, cioè per esempio in condizioni di aria instabile, $\bar{\nu} \simeq 1$ indicherà una forte instabilità mentre per $\bar{\nu}$ tendente a 0.1 si avrà una debole instabilità. Vogliamo calcolare la soluzione a basi ridotte w_N (3.23) del problema di stato stabilizzato (3.24), in cui l'operatore a_h è definito da (3.25) e il funzionale F_h da (3.26). Le incognite del problema a basi ridotte sono i coefficienti $w_{N_i}(\mu)$, per $i = 1, \dots, N$.

Poiché la viscosità dell'aria si scrive come prodotto tra il fattore moltiplicativo $\bar{\nu}$ e una funzione in x , che indichiamo con $n(x)$, cioè $\nu = \bar{\nu} \cdot n(x)$, la matrice di rigidezza \underline{C} si può vedere come:

$$C_{m,i} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nu \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_m = \bar{\nu} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K n(x) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_m = \bar{\nu} \cdot D_{m,i},$$

dove la matrice \underline{D} non è altro che la matrice \underline{C} valutata per $\bar{\nu} = 1$. La matrice $\underline{A}_h \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ (2.5) si può allora scrivere come:

$$A_{h_{m,i}}(\mu) = \mu \cdot D_{m,i} + B_{m,i} + S_{m,i}(\mu), \quad (3.40)$$

dove \underline{B} è la matrice relativa al termine di trasporto (3.28) e \underline{S} è la matrice di stabilizzazione (3.29), parametro-dipendente perché dipende da ν . Anche per questo problema, la matrice \underline{A}_h dipende da μ .

\underline{F}_h (3.26) è data da:

$$F_{h_m}(\mu) = G_m + H_m(\mu), \quad (3.41)$$

con \underline{H} (3.32) parametro-dipendente, mentre \underline{G} (3.31) risulta parametro-indipendente.

Si adotta nuovamente l'approccio computazionale a due stadi: tutte le matrici parametro-indipendenti (\underline{D} , \underline{B} , \underline{G}) vengono calcolate off-line una e una sola volta e memorizzate, mentre le matrici \underline{S} e \underline{H} , dipendenti dal parametro, devono essere calcolate on-line per ogni nuovo parametro μ in ingresso.

Mantenendo la notazione dei casi precedenti, il vettore delle incognite $\underline{w}_N(\mu)$ si ottiene risolvendo il problema:

$$(\underline{W}^T \underline{A}_h(\mu) \underline{W}) \underline{w}_N(\mu) = \underline{W}^T \underline{F}_h(\mu). \quad (3.42)$$

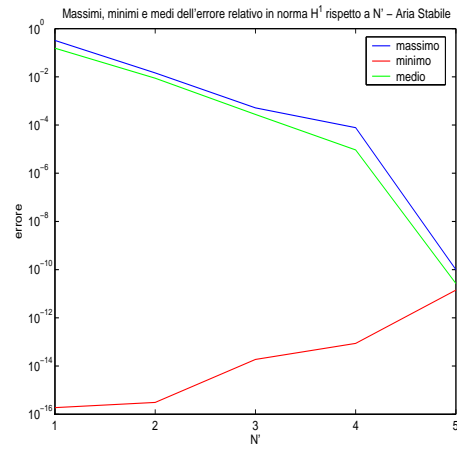
Assemblaggio della base

Si calcolano le soluzioni a elementi finiti associate ad un insieme di punti distribuiti in \mathcal{D} in maniera uniforme, cioè si prendono N valori μ^i nell'intervallo $[0.1, 1]$ tali che $|\mu^{i+1} - \mu^i| = 0.9/(N - 1)$. Aumentiamo N finché l'errore relativo medio in norma- H^1 non sia ritenuto soddisfacente. Si nota che per una base di 37 elementi, cioè $|\mu^{i+1} - \mu^i| = 0.025$, tale errore è dell'ordine di 10^{-5} per aria instabile e si procede a ordinare gli elementi della base, senza ridurne il numero. Nei casi di aria neutra e stabile, invece, per avere un errore dello stesso ordine di grandezza, o inferiore, è sufficiente un numero di basi molto inferiore (rispettivamente 6 e 5). In queste due condizioni, infatti, la viscosità è minore in modulo (Fig.3.10) e, poiché si ha dominanza del termine convettivo, basta un numero minore di funzioni di base per approssimare bene la soluzione, dipendente dal coefficiente di diffusività.

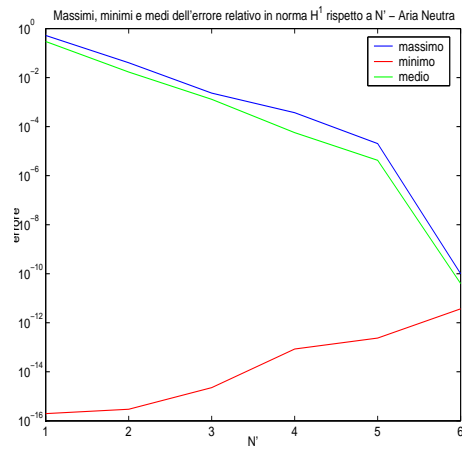
Si segue la stessa procedura dei casi 1 e 2: si calcola l'errore in norma- H^1 di ciascuna soluzione corrispondente ai parametri di S_N al variare del numero di funzioni di base e si trovano gli errori massimi, minimi e medi per ogni N' (Fig.3.15). L'andamento del minimo, per tutte le condizioni di aria, mostra la consistenza del metodo e l'andamento crescente si spiega sempre con l'inizio di un malcondizionamento del sistema (3.42). Grazie all'ordinamento delle basi gli andamenti dei massimi e dei medi sono decrescenti. Per aria instabile, l'andamento dei medi per $N' = N/2$ presenta la stessa brusca caduta riscontrata nel caso 2.

Errore per una scelta casuale dell'input

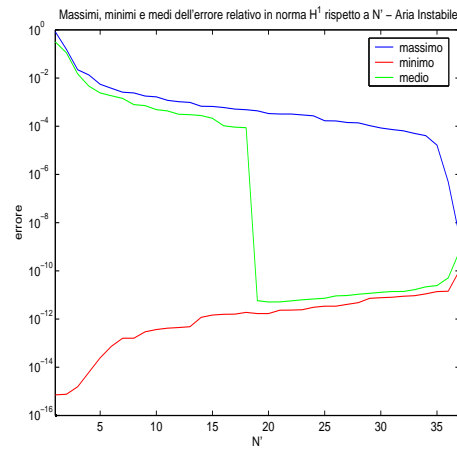
Calcoliamo l'errore relativo in norma- H^1 della soluzione a basi ridotte per almeno cento differenti parametri in ingresso, generati impiegando la funzione `random` di Matlab. Anche in



(a)



(b)



(c)

Figura 3.15: Caso 3 (viscosità variabile): andamento dell'errore- H^1 relativo massimo, minimo e medio rispetto all'aumentare del numero di funzioni di base, per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).

questo terzo caso, come si nota in Fig.3.16, l'errore resta sempre confinato in un intervallo limitato: $[10^{-9}, 10^{-6}]$ per aria stabile, $[10^{-8}, 10^{-5}]$ per aria neutra e $[10^{-9}, 10^{-4}]$ per aria instabile. Si può concludere che questo test, basandosi su un numero sufficientemente elevato di soluzioni relative a input casuali, garantisce l'applicabilità del metodo a basi ridotte, $\forall \mu \in \mathcal{D}$.

Il risparmio di tempo nel calcolo on-line di una soluzione a basi ridotte, rispetto al calcolo della relativa soluzione a elementi finiti, è del 50 %. Anche in questo terzo caso il risparmio è limitato dalla necessità di formare on-line i termini di stabilizzazione.

Esempio di soluzione a basi ridotte

A titolo di esempio, si riporta in Fig.3.17 la soluzione a basi ridotte corrispondente a $\bar{\nu} = 0.67$, in aria instabile, e in Fig.3.18 la soluzione relativa a elementi finiti. I grafici mostrano la distribuzione della concentrazione in $[\mu g/m^3]$ della sostanza inquinante, sia all'altezza effettiva che al suolo. L'errore relativo in norma- H^1 è dell'ordine di 10^{-5} .

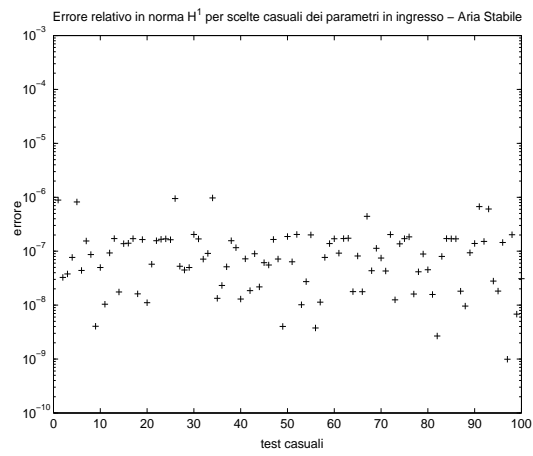
3.4.4 Caso 4: emissioni variabili e direzione variabile del vento

L'ultimo caso è leggermente più complesso: si prende un vettore di parametri in ingresso a quattro componenti $\mu = \{u_1, u_2, V_x, V_y\}$, cioè si lasciano variare i tassi di emissione dei tre camini e la direzione della velocità del vento. Resta fissato il valore totale delle emissioni a $u_{tot} = 2700 \text{ g/s}$, in modo che $u_3 = 2700 - u_1 - u_2$ (avendo imposto $u_1 + u_2 \leq u_{tot}$) e si mantiene unitario in modulo della velocità. Si assume che la direzione della velocità possa variare nell'intervallo $[-40^\circ, 90^\circ]$. Non si prende più l'intervallo $[-90^\circ, 90^\circ]$ per evitare di considerare alcune direzioni del vento che portano i coni di emissione ad essere, di sicuro, esterni alla città. Questa restrizione dell'intervallo si opera in vista della risoluzione del problema di controllo ottimo per questo caso (Sez.5.3): se l'inquinante non investe l'area di osservazione non c'è bisogno di controllo.

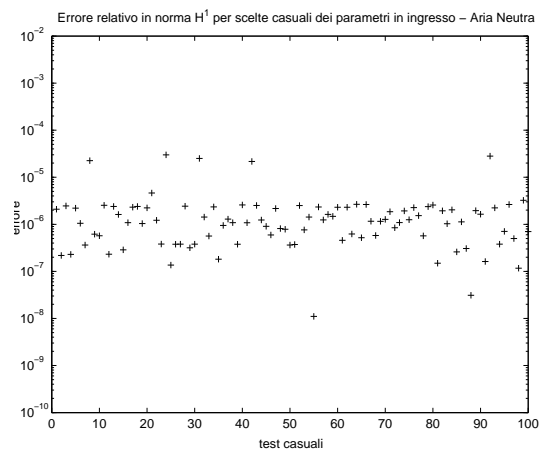
Le N incognite $w_{N_i}(\mu)$ (3.23) si calcolano risolvendo il problema (3.24), dove l'operatore a_h e il funzionale F_h sono definiti rispettivamente in (3.25) e (3.26).

Passando alla forma matriciale, la matrice $\underline{A}_h \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ (2.5) si può scrivere nel seguente modo:

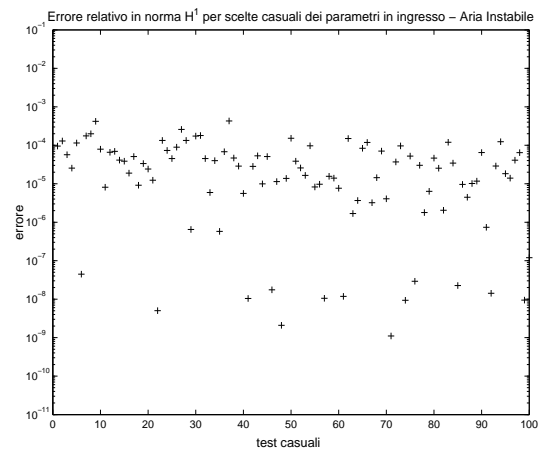
$$A_{h_{m,i}}(\mu) = C_{m,i} + V_x \cdot B_{x_{m,i}} + V_y \cdot B_{y_{m,i}} + S_{m,i}(\mu), \quad (3.43)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.16: Caso 3 (viscosità variabile): errore relativo in norma- H^1 per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).

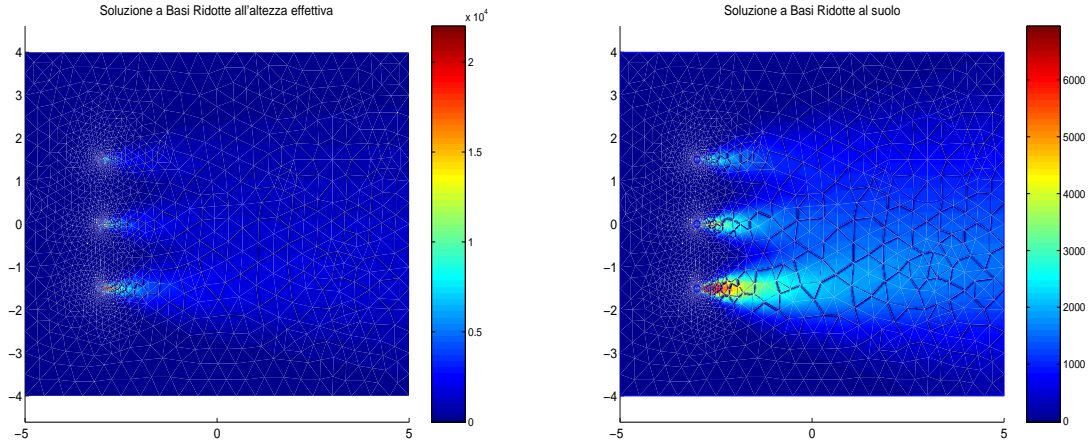


Figura 3.17: Caso 3 (viscosità variabile): esempio di soluzione a basi ridotte in aria instabile.

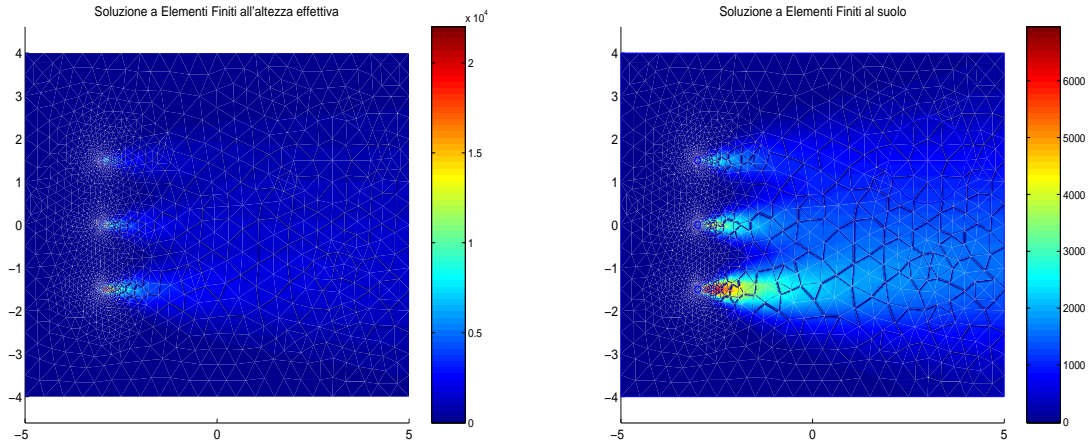


Figura 3.18: Caso 3 (viscosità variabile): soluzione corrispondente a elementi finiti.

dove \underline{C} è la matrice di rigidità (3.27), \underline{S} è la matrice di stabilizzazione (3.29), parametro-dipendente, e \underline{B}_x e \underline{B}_y sono le matrici di trasporto definite in (3.36) e (3.37).

\underline{F}_h (3.26) è data da:

$$F_{h_m}(\mu) = G_m(\mu) + H_m(\mu), \quad (3.44)$$

con \underline{G} (3.31) e \underline{H} (3.32) entrambi parametro-dipendenti.

Mantenendo la notazione dei casi precedenti, il vettore delle incognite $\underline{w}_N(\mu)$ si ottiene risolvendo il problema:

$$(\underline{W}^T \underline{A}_h(\mu) \underline{W}) \underline{w}_N(\mu) = \underline{W}^T \underline{F}_h(\mu). \quad (3.45)$$

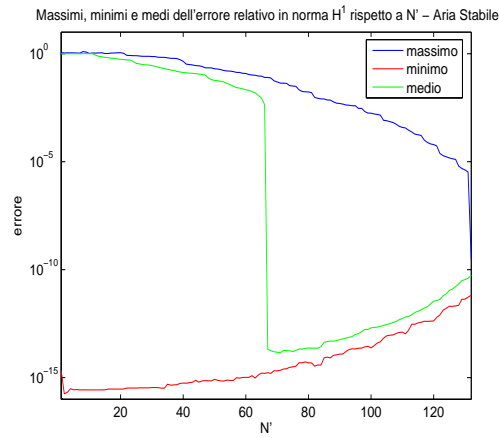
Assemblaggio della base

Osservando le elementi delle basi per i casi 1 e 2, si intuisce come creare una buona base di partenza per questo quarto caso. Per aria instabile, le funzioni di base sono le soluzioni a elementi finiti corrispondenti ad avere, per direzioni del vento distanziate di 5° nell'intervallo $[-40^\circ, 90^\circ]$, un cammino funzionante al 100% di u_{tot} a rotazione, quindi $N = 81$. Questa base permette di avere un errore medio in norma- H^1 , per input casuale, compreso tra $[10^{-6}, 10^{-3}]$. Per aria stabile e neutra si ha un errore dello stesso ordine di grandezza per una base di 132 funzioni, date dalle soluzioni ad elementi finiti aventi, per direzioni del vento distanziate tra loro di 3° nello stesso intervallo, un cammino funzionante al 100% di u_{tot} a rotazione. Questa diversità nel numero di elementi della base ha la stessa spiegazione riportata per il caso 2: al calare della viscosità (Fig.3.10) il termine convettivo diventa dominante e quindi occorre un numero maggiore di funzioni di base per avere una buona approssimazione della soluzione. La base viene ordinata e si calcola l'errore in norma- H^1 di ciascuna soluzione corrispondente ai parametri di S_N , al variare del numero di funzioni di base. Si trovano gli errori massimi, minimi e medi per ogni N' , riportati in Fig.3.19. L'andamento del minimo è sempre una verifica della consistenza del metodo. Nonostante attorno a $N' = N/2$ ci sia una brusca caduta dell'errore medio, si continua ad aumentare il numero di funzioni di base finché si ritiene soddisfacente l'errore massimo. L'andamento non costante dell'errore minimo e quello non monotonicamente decrescente dell'errore medio si spiegano sempre in termini di malcondizionamento del sistema (3.45).

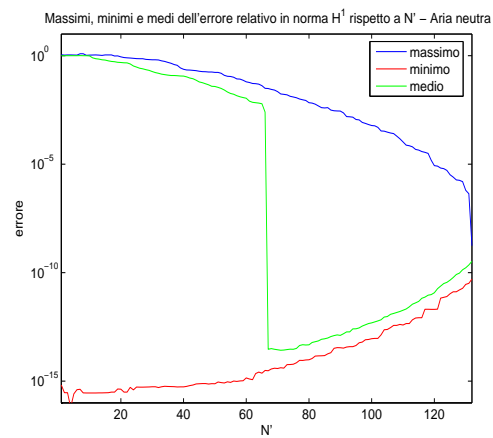
Errore per una scelta casuale dell'input

Si ripete la procedura più volte descritta e anche in quest'ultimo caso, come si nota in Fig.3.20, l'errore resta sempre confinato in un intervallo limitato: $[10^{-8}, 10^{-4}]$ per aria stabile, $[10^{-9}, 10^{-4}]$ per aria neutra e $[10^{-6}, 10^{-3}]$ per aria instabile. Si conclude che il test, basandosi su un numero sufficientemente elevato di soluzioni relative a input casuali, garantisce l'applicabilità del metodo a basi ridotte con la base trovata, $\forall \mu \in \mathcal{D}$.

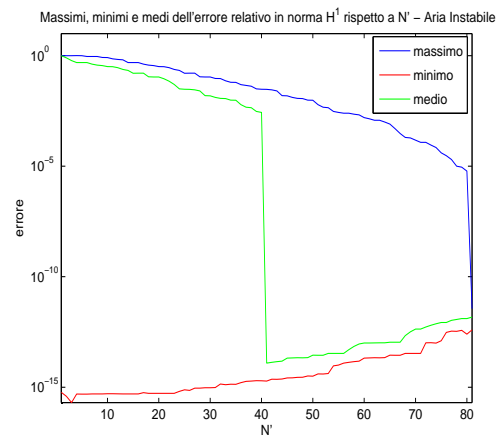
Il risparmio di tempo nel calcolo on-line di una soluzione a basi ridotte, rispetto al calcolo della relativa soluzione a elementi finiti, è del 60 %.



(a)

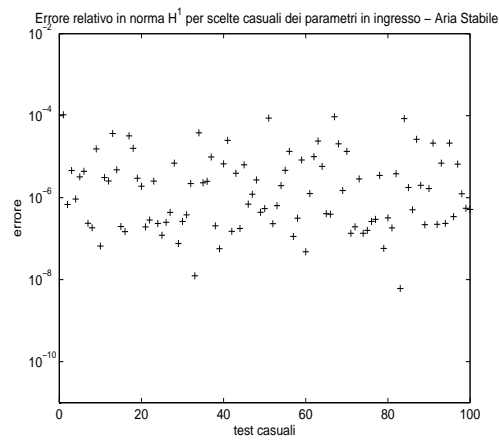


(b)

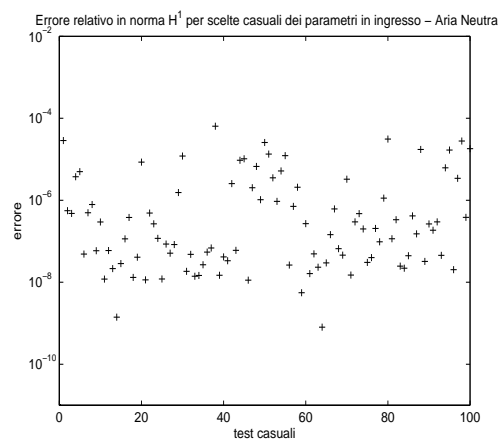


(c)

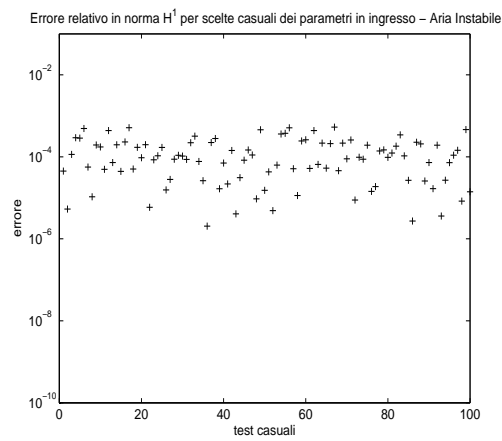
Figura 3.19: Caso 4 (emissioni e vento variabili): andamento dell'errore- H^1 relativo massimo, minimo e medio rispetto all'aumentare del numero di funzioni di base, per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).



(a)



(b)



(c)

Figura 3.20: Caso 4 (emissioni e vento variabili): errore relativo in norma- H^1 per le tre diverse condizioni di stabilità dell'aria: stabile (a), neutra (b) e instabile (c).

Esempio di soluzione a basi ridotte

Riportiamo in Fig.3.21 la soluzione a basi ridotte corrispondente a $\mu = \{1971 [g/s], 567 [g/s], \cos(\text{atan}(0.3))[m/s], \sin(\text{atan}(0.3))[m/s]\}$, in aria instabile, e in Fig.3.22 la soluzione relativa a elementi finiti. I grafici mostrano la distribuzione della concentrazione in $[\mu g/m^3]$ della sostanza inquinante all'altezza effettiva e al suolo. L'errore relativo in norma- H^1 è dell'ordine di 10^{-5} .

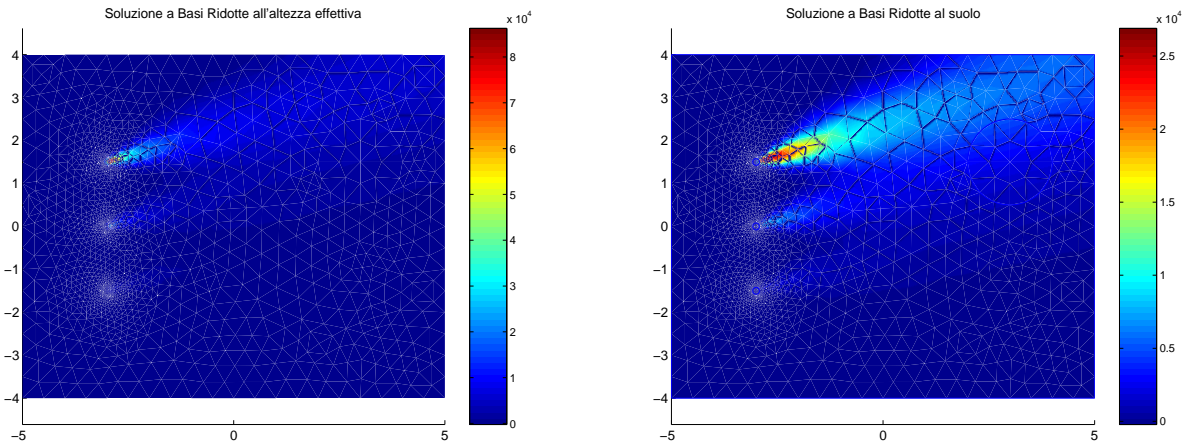


Figura 3.21: Caso 4 (emissioni e vento variabili): esempio di soluzione a basi ridotte in aria instabile.

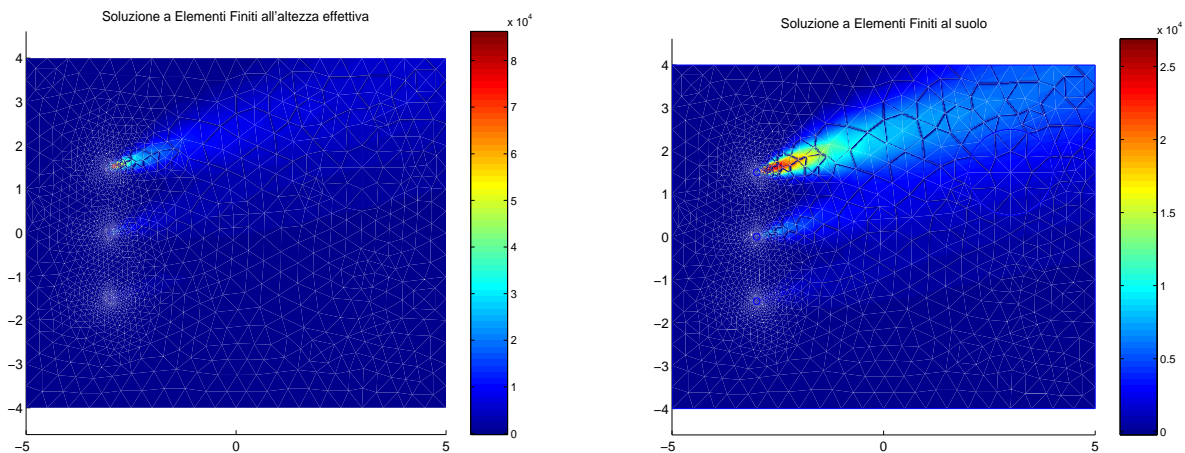


Figura 3.22: Caso 4 (emissioni e vento variabili): soluzione corrispondente a elementi finiti.

3.5 Un Problema di Inquinamento di un Fluido Generico in una Cavità

In una cavità di forma rettangolare contenente un fluido di proprietà generiche è presente una sorgente di sostanza inquinante in Ω_u e si vuole rilevare la concentrazione di tale sostanza in Ω_s (Fig.3.23). Il campo di velocità del fluido è quello indotto dalla convezione naturale, la quale si genera in presenza di:

- forza gravitazionale;
- un gradiente di temperatura non parallelo alla forza gravitazionale: le pareti verticali della cavità sono mantenute a due temperature differenti (quella di sinistra alla temperatura superiore T_h) in modo che i due vettori (∇T e \mathbf{g}) siano ortogonali.

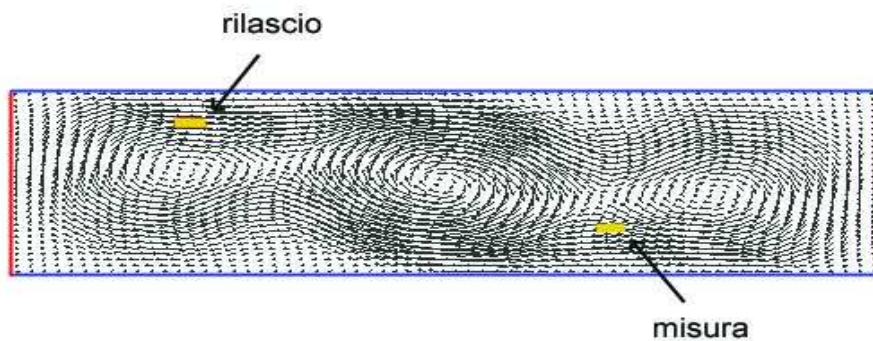


Figura 3.23: Dominio per il problema della convezione naturale in cavità.

Le pareti orizzontali della cavità sono adiabatiche e hanno una lunghezza (B) pari a quattro volte quella delle pareti verticali (H).

I parametri adimensionali caratteristici della convezione naturale e i loro valori sono:

- il numero di Nusselt:

$$Nu = \frac{h \cdot L}{k},$$

dove h è il coefficiente di scambio termico, L la lunghezza caratteristica del problema e k la diffusività termica. Per questo problema il valore del numero di Nusselt è di poca importanza in quanto non interessa lo scambio termico.

- Il numero di Prandtl:

$$Pr = \frac{\nu}{k} = 0.$$

Il fatto che sia nullo significa che la diffusività termica k è elevata rispetto alla diffusività di quantità di moto ν .

- Il numero di Grashof:

$$Gr = \frac{g \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2} = 16000,$$

dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità, α il coefficiente di espansione termica e $\Delta T = T_h - T_c$ la differenza di temperatura tra le pareti verticali. Gr rappresenta il rapporto tra le forze di galleggiamento e le forze viscosse.

Si ipotizza che il fluido sia incomprimibile e newtoniano e che il flusso sia bidimensionale e laminare. Si suppone valida l'approssimazione di Boussinesq (le variazioni di densità si considerano solo nel termine di galleggiamento) e si ritengono modeste le variazioni di pressione all'interno della cavità. Questo problema di convezione naturale, con i valori indicati dei parametri adimensionali, la geometria scelta e le ipotesi sopraelencate, corrisponde al problema di Roux [16].

Per ottenere il campo di velocità del fluido in istanti discreti di tempo si risolvono le equazioni di Navier-Stokes, adimensionalizzate e semplificate dalle ipotesi fatte, tramite una simulazione numerica diretta, su una mesh strutturata, usando la tecnica dei volumi finiti in ambiente Matlab [17]. Si indicano con u^* e v^* le componenti del vettore velocità, $\mathbf{V} = (u^*, v^*)$, e con p^* la pressione. Siano definite le seguenti variabili adimensionali (senza asterisco): $t = \frac{k}{H^2} t^*$, $x = \frac{x^*}{H}$, $y = \frac{y^*}{H}$, $u = \frac{H}{k} u^*$, $v = \frac{H}{k} v^*$, $p = \frac{H^2}{\rho k^2} p^*$, $T = \frac{T^* - T_c}{T_h - T_c}$. Si possono allora scrivere le equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale per il problema in questione:

- equazione di continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

- equazioni di bilancio della quantità di moto:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + Pr \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - Gr \cdot Pr^2 \cdot T, \end{cases}$$

- equazione di bilancio dell'energia:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

3.6 Modello Matematico e Approssimazione Numerica del Problema della Cavità

Indicando con y la concentrazione di sostanza inquinante, con \mathbf{V} il campo di velocità della convezione naturale e con ν la diffusività, l'equazione che governa il problema, corredata dalle opportune condizioni al contorno e dalla condizione iniziale, è la seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + \mathbf{V} \cdot \nabla y = \beta(\mathbf{x})u(t) \\ y|_{\Gamma_D} = 0 \\ \nabla y \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_D} = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Il bordo di Dirichlet coincide con la parete verticale alla temperatura superiore, mentre per le pareti restanti valgono condizioni al contorno di Neumann. Il termine noto si scrive come prodotto di due funzioni: β , dipendente solo dalla spazio, che indica dove viene rilasciato l'inquinante e u , dipendente solo dal tempo, che indica la quantità di sostanza inquinante emessa nel tempo. La funzione $\beta(\mathbf{x})$ vale 1 in Ω_u e 0 altrove, mentre $u(t)$ assume un valore fissato u_0 per $t = 0$ e vale 0 in tutti gli altri istanti, cioè si emette inquinante esclusivamente nell'istante iniziale.

Ricordando che $H_{\Gamma_D}^1 = \{v \in H^1(\Omega), t.c. v|_{\Gamma_D} = 0\}$, si può passare alla formulazione debole del problema (3.46):

$$\forall 0 < t \leq 1 \text{ cercare } y(t) \in H_{\Gamma_D}^1 : a(y(t), \varphi) = F(\varphi, u(t)), \forall \varphi \in H_{\Gamma_D}^1,$$

dove:

$$\begin{aligned} a(y(t), \varphi) &:= \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nu \nabla y \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla y \varphi \, d\Omega, \\ F(\varphi, u) &:= \int_{\Omega} \beta(\mathbf{x})u(t)\varphi \, d\Omega. \end{aligned}$$

Per calcolare l'approssimazione a elementi finiti della soluzione esatta introduciamo una triangolazione \mathcal{T}_h del dominio, sufficientemente raffinata, e una discretizzazione dell'intervallo

temporale $[0, 1]$ s , poiché si tratta di un problema non stazionario e quindi occorre discretizzare l'equazione in tempo, oltre che in spazio [15].

Si discretizza la derivata temporale mediante un semplice rapporto incrementale:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y^k - y^{k-1}}{\Delta t},$$

dove $y^k = y(t^k = k \cdot \Delta t)$, per $k = 1, \dots, N_k$ con $N_k = 1/\Delta t$. Si sceglie di adottare una strategia del tipo *Eulero implicito* [15]. Il problema discretizzato nel tempo assume la forma seguente:

$$\text{per } 1 \leq k \leq N_k \text{ cercare } y^k \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1 \quad : \quad a^k(y^k, \varphi) = F^k(\varphi, u^k), \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1, \quad (3.47)$$

dove:

$$\begin{aligned} a^k(y^k, \varphi) &:= \Delta t^{-1} \int_{\Omega} y^k \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nu \nabla y^k \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{V}^k \cdot \nabla y^k \varphi \, d\Omega, \\ F^k(\varphi, u^k) &:= \int_{\Omega} \beta(\mathbf{x}) u^k \varphi \, d\Omega + \Delta t^{-1} \int_{\Omega} y^{k-1} \varphi \, d\Omega. \end{aligned}$$

\mathbf{V}^k è il campo di moto della convezione naturale all'istante t^k , mentre $u^k = u(t^k)$.

Passando alla discretizzazione in spazio si nota che qualsiasi sia il valore di $\nu \in [0.1, 10]$, il numero di Péclet locale è superiore all'unità e quindi il problema necessita di stabilizzazione. Indicando con $y_h^k \in X_h$ l'approssimazione Galerkin-elementi finiti della soluzione all'istante t^k , il problema stabilizzato è il seguente:

$$\text{cercare } y_h^k \in X_h \quad : \quad a^k(y_h^k, \varphi_h) + \mathcal{L}_h^{(\rho)}(y_h^k, f, \varphi_h) = F^k(\varphi, u^k), \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

purchè valga $\mathcal{L}_h^{(\rho)}(y^k, f, \varphi_h) = 0$, $\forall \varphi_h \in X_h$. La forma generale per $\mathcal{L}_h^{(\rho)}$ è la (3.19), dove, per questo problema, $Ay = \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + \mathbf{V} \cdot \nabla y$ e $f = \beta(\mathbf{x})u(t)$. Scegliendo nuovamente di usare il metodo SUPG, per cui $\rho = 0$, si prende in considerazione solo la parte antisimmetrica dell'operatore:

$$A_{SS}\varphi_h = \frac{1}{2} \left(\nabla \cdot (\mathbf{V} \varphi_h) + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h \right) = \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_h,$$

e il problema stabilizzato ha la seguente formulazione:

$$\text{per } 1 \leq k \leq N_k \text{ cercare } y_h^k \in X_h \quad : \quad a^k(y_h^k, \varphi_h) + s_h(y_h^k, \varphi_h; u^k) = F^k(\varphi_h; u^k), \quad \forall \varphi_h \in X_h,$$

$$s_h(y_h^k, \varphi_h; u^k) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \int_K (Ay_h^k - f)(A_{SS}\varphi_h) \, dK$$

o equivalentemente:

$$\text{per } 1 \leq k \leq N_k \text{ cercare } y_h^k \in X_h : a_h^k(y_h^k, \varphi_h) = F_h^k(\varphi_h; u^k), \quad \forall \varphi_h \in X_h, \quad (3.48)$$

dove:

$$a_h^k(y_h^k, \varphi_h) := a^k(y_h^k, \varphi_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \int_K (\Delta t^{-1} y_h^k + \mathbf{V}^k \cdot \nabla y_h^k)(\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_h) dK,$$

$$F_h^k(\varphi_h; u^k) := F(\varphi_h; u^k) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \left[\int_K (\Delta t^{-1} y_h^{k-1})(\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_h) dK + \int_K \beta_h u^k (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_h) dK \right].$$

Il diametro di K è h_K , δ_K è un parametro dipendente dal numero di Péclet locale, β_h è l'approssimazione discreta della funzione $\beta(\mathbf{x})$ e $X_h \subset H_{\Gamma_D}^1$ è lo spazio degli elementi finiti (noi li utilizzeremo di tipo \mathbb{P}^1). Il contributo alla stabilizzazione è nullo per tutti i triangoli per cui \mathbf{V}^k è nulla. Introduciamo un output di interesse dato dalla concentrazione di sostanza inquinante nel sottodomino Ω_s (Fig.3.23):

$$s(\nu, t) = |\Omega_s|^{-1} \int_{\Omega_s} y(\nu, t) d\Omega. \quad (3.49)$$

3.6.1 Esempi di soluzione a elementi finiti

Si riportano le soluzioni a elementi finiti corrispondenti a tre coefficienti di diffusività diversi:

- $\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ (Fig.3.24) con $\text{Pe}_g \gg 1$: il flusso si dice a trasporto dominante, come mostrano i grafici in cui l'inquinante evidenzia la struttura vorticoso del moto;
- $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ (Fig.3.25): il numero di Péclet è attorno all'unità e si hanno contemporaneamente diffusione e trasporto, senza che nessuno dei due sia dominante;
- $\nu = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ (Fig.3.26) con $\text{Pe}_g \ll 1$: si ha dominanza della diffusione, infatti i grafici mostrano come la traccia dell'inquinante perda ogni informazione sulla struttura del moto convettivo.

Occorre precisare che la scala cromatica varia tra i grafici, perché la concentrazione ($[g/m^2]$) di inquinante in uno spazio fissato cala al passare del tempo e, se si mantenesse inalterata la scala, negli ultimi grafici non si noterebbero le variazioni di concentrazione. In tutti i grafici il

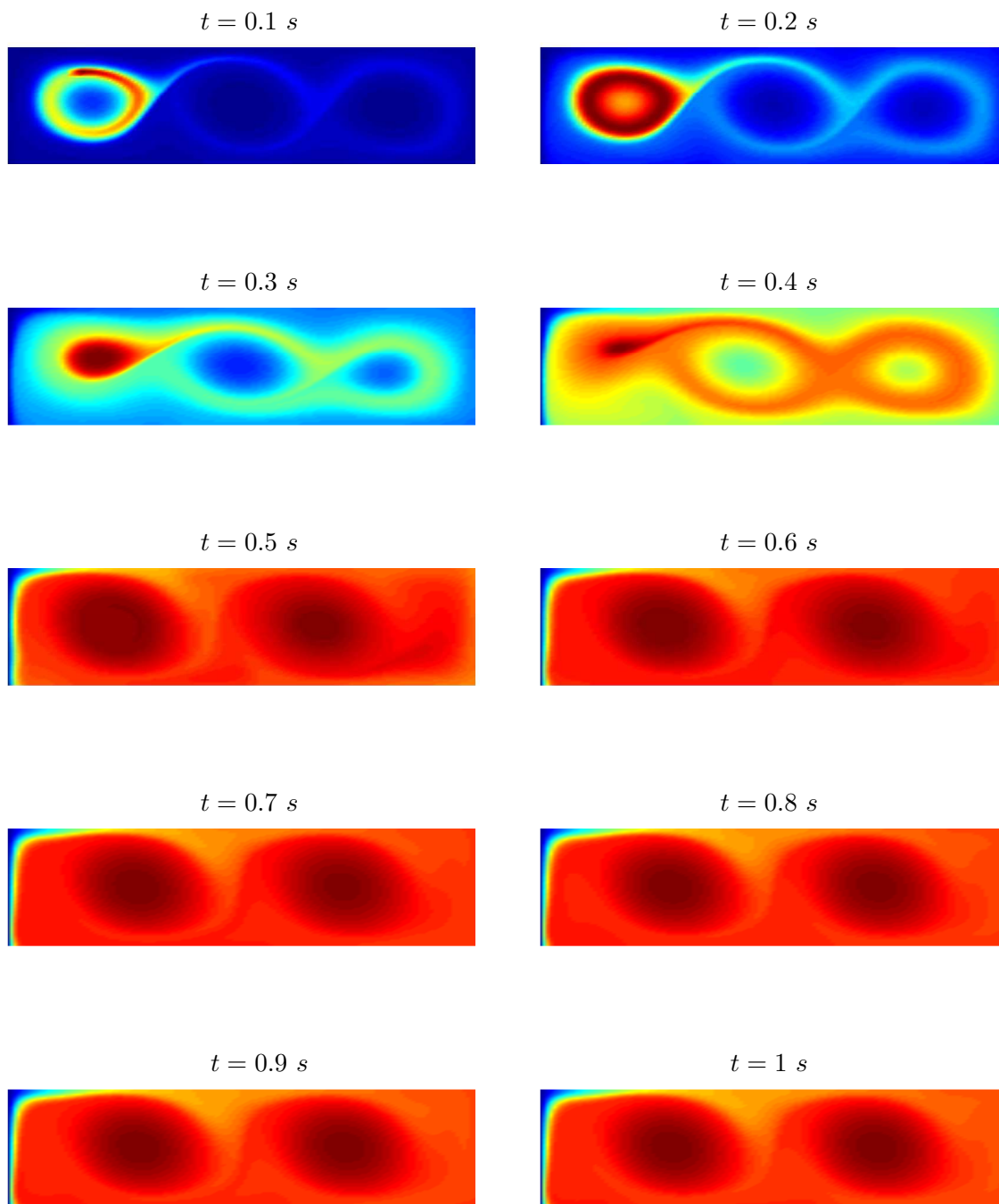


Figura 3.24: Soluzioni a elementi finiti della convezione naturale in cavità per $\nu = 0.01\text{ m}^2/\text{s}$: diffusione di inquinante (concentrazione $[\text{g}/\text{m}^2]$).

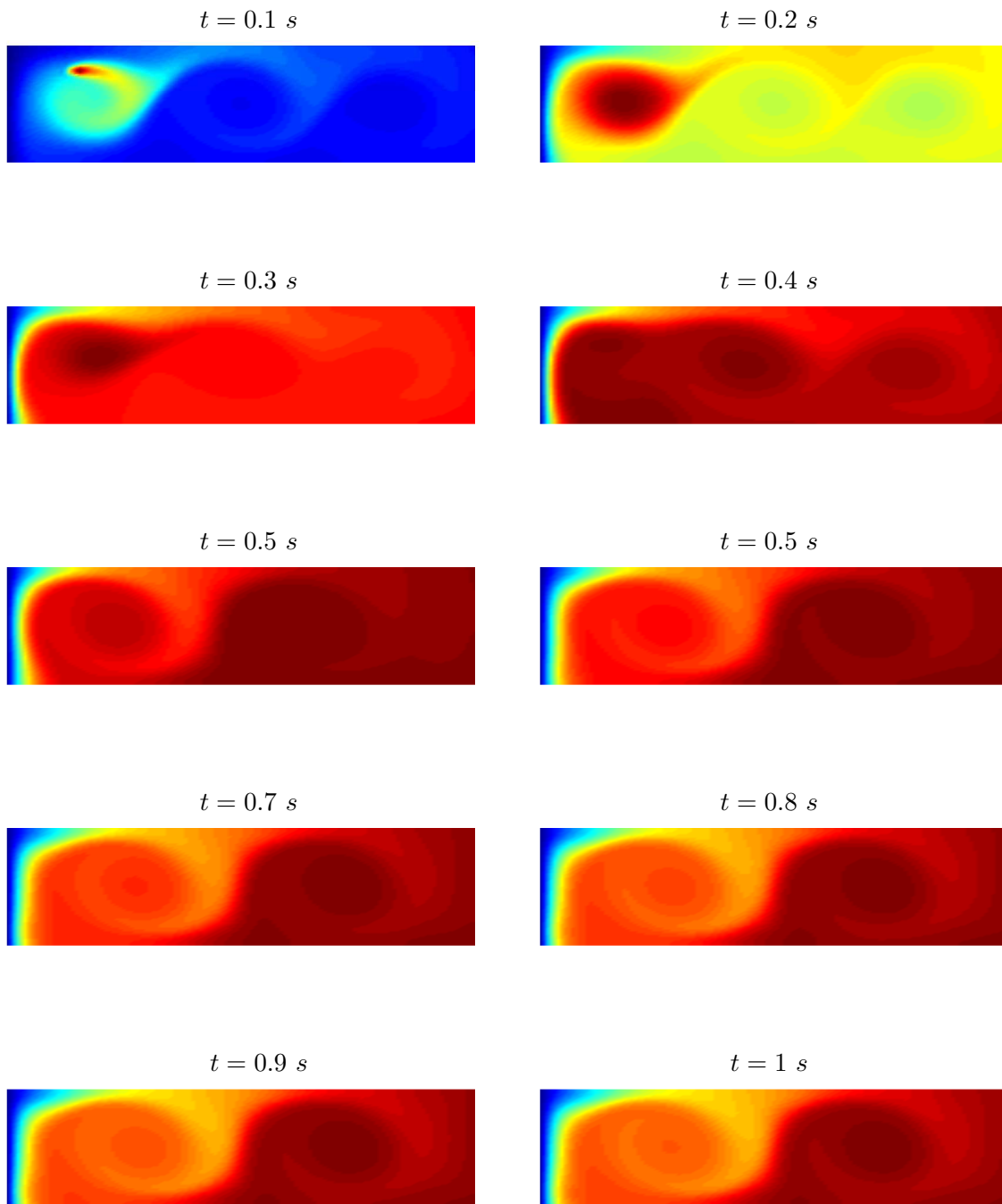


Figura 3.25: Soluzioni a elementi finiti della convezione naturale in cavità per $\nu = 0.1 m^2/s$: diffusione di inquinante (concentrazione $[g/m^2]$).

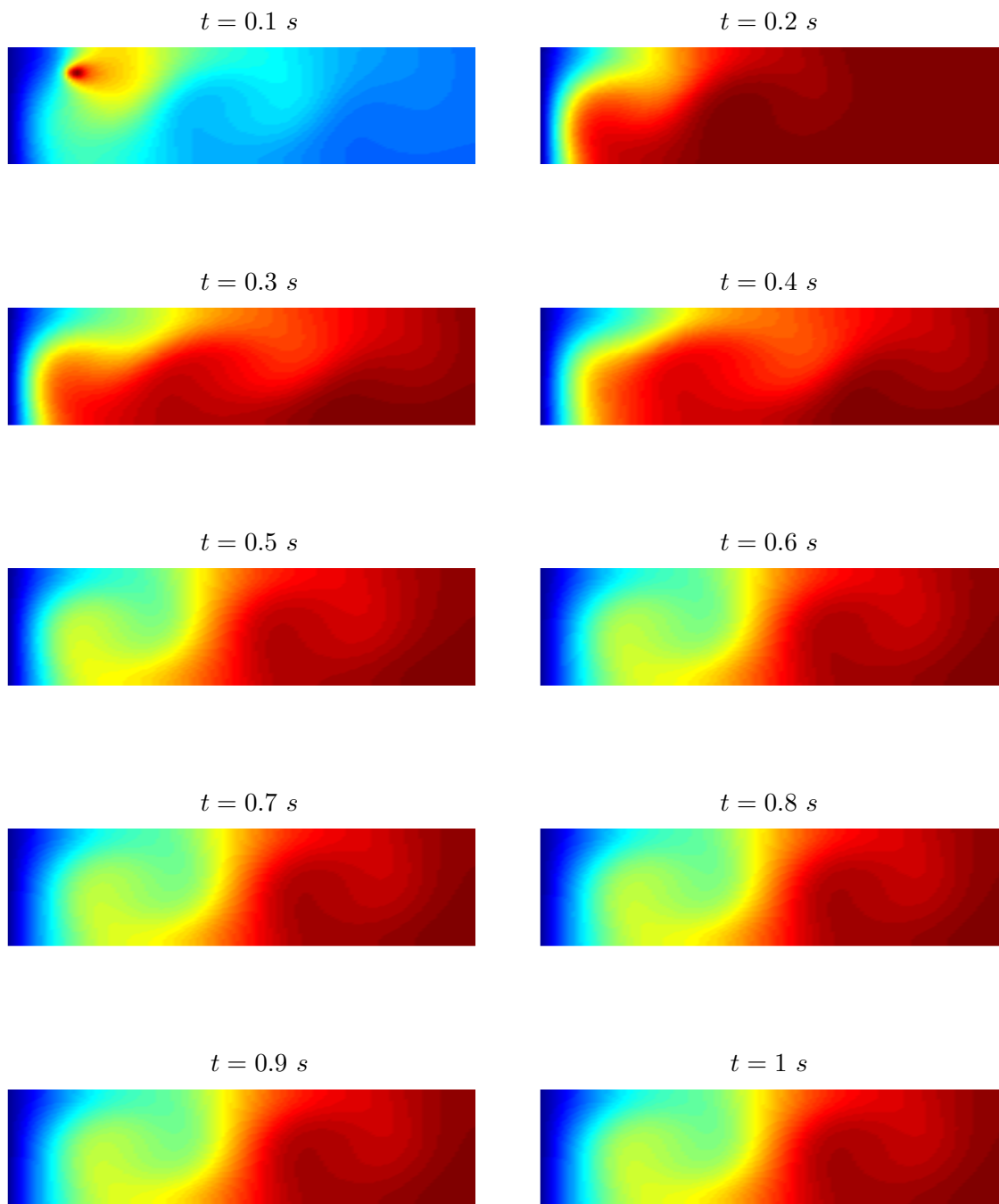


Figura 3.26: Soluzioni a elementi finiti della convezione naturale in cavità per $\nu = 1 m^2/s$: diffusione di inquinante (concentrazione $[g/m^2]$).

blu scuro indica una concentrazione nulla mentre il rosso scuro, per $\nu = 0.01 \text{ m}^2/s$, passa da 0.55 g/m^2 per $t = 0.1 \text{ s}$ a 0.055 g/m^2 nell'ultimo grafico, per $\nu = 0.1 \text{ m}^2/s$ va da 0.28 g/m^2 per $t = 0.1 \text{ s}$ a 0.022 g/m^2 per $t = 1 \text{ s}$ e infine per $\nu = 1 \text{ m}^2/s$ passa da 0.01 g/m^2 per $t = 0.1 \text{ s}$ a 0.002 g/m^2 per $t = 1 \text{ s}$. Indicativamente in uno stesso grafico i colori freddi si riferiscono alle concentrazioni basse e quelli caldi alle concentrazioni maggiori.

Si osserva che per $t \geq 0.5 \text{ s}$ l'aspetto della soluzione si stabilizza e non varia di molto, a parte piccole traslazioni in orizzontale, mentre nei primi istanti varia molto velocemente. Si è deciso allora di vedere le dinamiche che intervengono, per esempio, per $\nu = 0.1 \text{ m}^2/s$ e istanti di tempo compresi tra $t = 0.1 \text{ s}$ e $t = 0.2 \text{ s}$: Fig.3.27 riporta le soluzioni campionate con passo temporale $\Delta t = 0.01 \text{ s}$.

3.7 Risoluzione del Problema della Cavità con i Metodi a Basi Ridotte

Il vettore dei parametri in ingresso è a due componenti: $\mu = \{\nu, t^f\}$, dove $t^f \in [0, 1] \text{ s}$ è l'istante finale di tempo in cui si vuole conoscere la soluzione. Il vettore μ può assumere un valore qualsiasi all'interno dello spazio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, con $\mathcal{D} = [0.1, 1] \times [0, 1]$. Si preferisce limitare l'intervallo di variazione di ν a $[0.1, 1]$, anzichè considerare $[0.01, 1]$, per evitare un range di variazione della variabile in ingresso troppo elevato, considerando un problema evolutivo.

Sia $y_N(\mu)$ la soluzione a basi ridotte del problema stabilizzato (3.48). In base alla (2.10) e alla (2.15) scriviamo:

$$y_N(\nu, t^k) = \sum_{j=1}^N y_{N_j}^k(\mu) \zeta^j = \sum_{j=1}^N y_{N_j}^k(\mu) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \zeta_i^j \varphi_i. \quad (3.50)$$

Per ogni istante k -esimo t^k , $1 \leq k \leq N_k$, le N incognite $y_{N_j}^k(\mu)$ si calcolano risolvendo il problema:

$$a_h^k(y_N(\mu), \zeta_h; \mu) = F_h^k(\zeta_h) \quad 1 \leq h \leq N.$$

dove

$$a_h^k(y_N, \zeta_h; \mu) = \sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^N y_{N_j}^k(\mu) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \zeta_i^j \zeta_m^h \left[\Delta t^{-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \varphi_i \varphi_m + \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_m + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_m + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \int_K (\Delta t^{-1} \varphi_i + \mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_i) (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_m) \right]$$

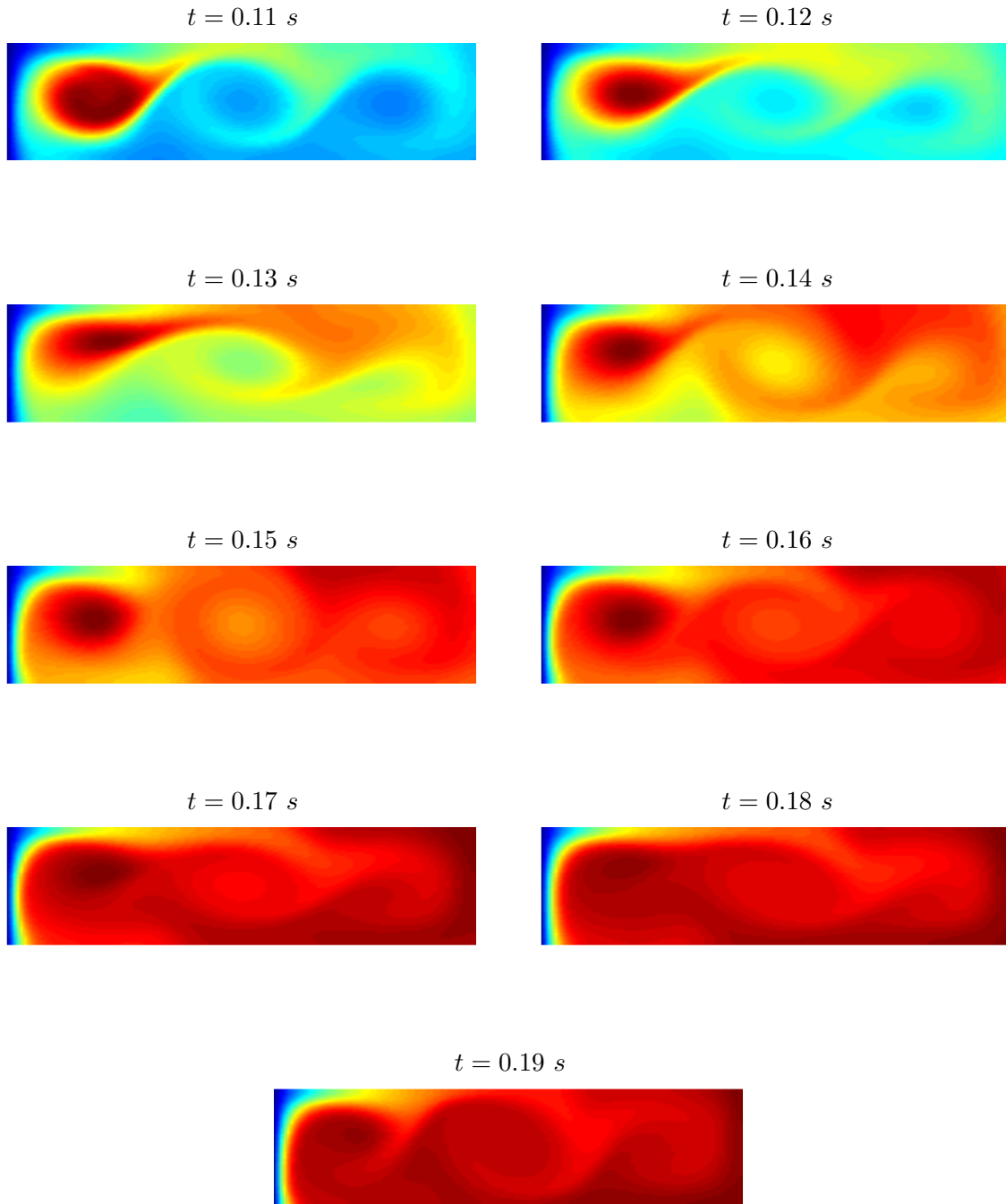


Figura 3.27: Soluzioni a elementi finiti per $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{g}$ nell'intervallo temporale $[0.1, 0.2] \text{ s}$: diffusione di inquinante in cavità (concentrazione $[\text{g}/\text{m}^2]$).

e

$$F_h^k(\zeta_h) = \sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^N y_{N_j}^{k-1} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \zeta_i^j \zeta_m^h \left[\Delta t^{-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \varphi_i \varphi_m + \Delta t^{-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \int_K \varphi_i (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_m) \right] +$$

$$\sum_{h=1}^N \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \zeta_m^h \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \beta_h u^k \varphi_m + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \int_K \beta_h u^k (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_m) \right].$$

Definiamo le matrici \underline{M} , \underline{C} , \underline{B}^k , $\underline{S}^k \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$, rispettivamente matrice di massa, matrice di rigidezza, matrice associata al termine di trasporto e matrice di stabilizzazione:

$$M_{m,i} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \varphi_i \varphi_m,$$

$$C_{m,i} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_m,$$

$$B_{m,i}^k = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_m,$$

$$S_{m,i}^k(\mu) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \int_K (\Delta t^{-1} \varphi_i + \mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_i) (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_m).$$

La matrice $\underline{A}_h \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ (2.5) è data da:

$$A_h^k(\mu) = \Delta t^{-1} \cdot M + \nu \cdot C + B^k + S^k(\mu).$$

Per poter scrivere il termine noto in forma matriciale occorre definire anche $\underline{D}^k \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ e $\underline{G}^k, \underline{H}^k \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$:

$$D_{m,i}^k(\mu) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \int_K \varphi_i (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_m),$$

$$G_m^k = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \beta_h u^k \varphi_m,$$

$$H_m^k(\mu) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}^k\|} \int_K \beta_h u^k (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi_m).$$

\underline{S}^k , \underline{D}^k e \underline{H}^k dipendono in modo non affine da μ , perché il parametro δ_K dipende dal numero di Péclet (quindi da ν) in modo non affine; di conseguenza devono essere calcolate on-line. Tutte le altre matrici vengono calcolate off-line.

Mantenendo la notazione del problema di inquinamento atmosferico, il vettore delle incognite $\underline{y}_N^k(\mu)$ si ottiene risolvendo il problema:

$$(\underline{W}^T \underline{A}_h^k(\mu) \underline{W}) \underline{y}_N^k(\mu) = \Delta t^{-1} \cdot [\underline{W}^T (\underline{M} + \underline{D}^k(\mu)) \underline{W}] \underline{y}_N^{k-1} + \underline{W}^T (\underline{G}^k + \underline{H}^k(\mu)), \quad (3.51)$$

dove il vettore \underline{y}_N^{k-1} è noto dalla soluzione al passo temporale precedente $t = t^{k-1}$.

Dalla soluzione (3.50) si calcola l'approssimazione a basi ridotte dell'output:

$$s_N^k(\nu, t^k) = |\Omega_s|^{-1} \int_{\Omega_s} y_N^k(\mu) d\Omega. = |\Omega_s|^{-1} \sum_{j=1}^N y_{N_j}^k(\mu) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \zeta_i^j \int_{\Omega_s} \varphi_i d\Omega. \quad (3.52)$$

3.7.1 Assemblaggio della base

Come funzioni di base si prendono le soluzioni ottenute risolvendo il problema ad elementi finiti, estratte ogni decimo di secondo, per $\nu = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1 \text{ m}^2/s$. Si preferisce partire, come già fatto per alcuni dei problemi precedenti, da una base di funzioni non casuali, ma associate ad una distribuzione uniforme in \mathcal{D} dei parametri in ingresso (Fig.3.28). Per questa

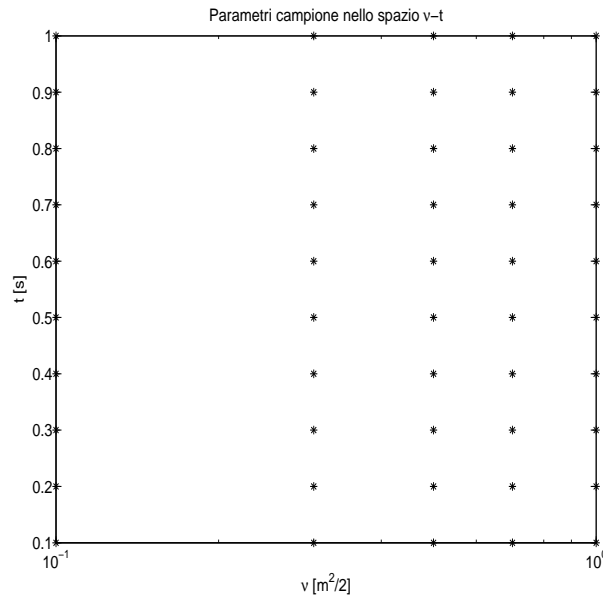


Figura 3.28: Distribuzione uniforme dei parametri campione per il problema della convezione naturale in cavità.

base di 50 elementi l'errore relativo medio in norma- H^1 è dell'ordine di 10^{-7} e non è richiesta nessuna ordinazione degli elementi stessi perché la base di partenza è già sufficientemente ordinata, come mostra la Fig.3.29, in cui l'andamento dell'errore massimo è monotonicamente decrescente. Si ripete la procedura più volte descritta: si calcola l'errore in norma- H^1 di ciascuna soluzione corrispondente ai 50 parametri campione di S_N al variare del numero di funzioni di base e si trovano massimi, minimi e medi per ogni N' . Si riporta solo l'andamento dei massimi (Fig.3.29), perché ritenuto il più significativo dei tre. L'andamento dei minimi,

infatti, non è altro che una prova di consistenza del metodo e quello dei medi presenta, come già riscontrato in altri casi, una caduta verticale dell'errore relativo medio in corrispondenza di $N' = N/2$.

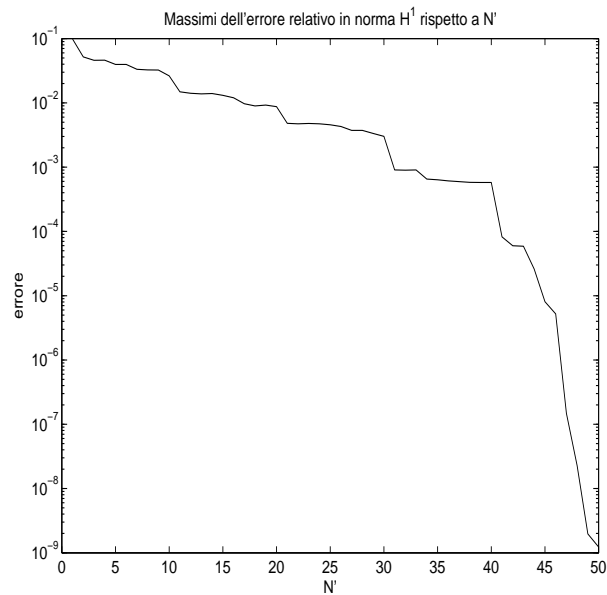


Figura 3.29: Andamento dell'errore- H^1 relativo massimo all'aumentare del numero di funzioni di base.

3.7.2 Limiti dell'errore sulla soluzione

Calcoliamo, al variare di N' , l'errore relativo in norma- H^1 su un numero elevato di soluzioni casuali. I parametri in ingresso sono stati generati, come negli altri casi, dalla funzione `random` di Matlab. Si interpolano i massimi e i minimi di questi errori, in modo da tracciare nel piano (Fig.3.30) una banda all'interno della quale è "molto probabile" che si trovi l'errore, qualunque sia il parametro in ingresso. Si conclude che questo test, per il momento, garantisce l'applicabilità del metodo a basi ridotte per il problema della cavità, $\forall \mu \in \mathcal{D}$. Più avanti (Sez.3.7.4) si accenna alla stima a posteriori del problema in questione [18].

3.7.3 Limiti dell'errore sull'output "non-compliant" e "compliant"

Si ripete ora l'operazione analoga per l'output: si calcola, al variare di N' , l'errore relativo in norma- H^1 degli output corrispondenti a parametri in ingresso scelti in maniera casuale. Si

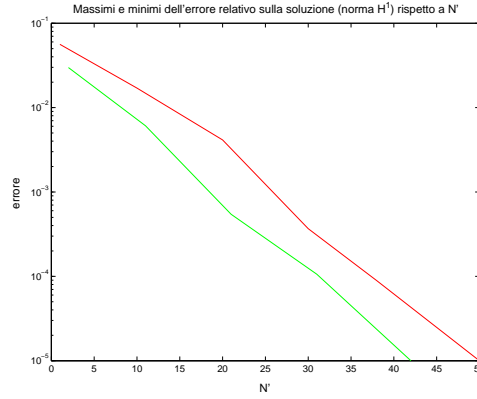


Figura 3.30: Interpolazione dei massimi e dei minimi degli errori- H^1 relativi su soluzioni dovute a parametri in ingresso casuali.

interpolano i massimi e i minimi di questi errori in modo da evidenziare i limiti per gli errori sull'output ai diversi N' .

La scelta di rilevare la concentrazione dell'inquinante in Ω_D rende l'output “non-compliant” (si emette in un'area e si rileva la concentrazione nel tempo in un'area differente) e noi lo stiamo calcolando senza tenere conto della necessità di integrare la base con le soluzioni del problema duale $\psi(\mu^n)$ (2.37), per $n = 1, \dots, N$. Questo peggiora l'approssimazione a basi ridotte dell'output. Per capire la differenza tra l'approssimazione di un output “non-compliant” e quella di un output “compliant” con la stessa base W_N , si va a rilevare la concentrazione dell'inquinante nella stessa zona di emissione e si tracciano massimi e minimi degli errori- H^1 al variare di N' . La Fig.3.31 mostra il confronto. Si osserva che l'errore sull'output compliant è inferiore di un ordine di grandezza [11].

3.7.4 Cenni alla stima a posteriori

Il problema (3.47) si può riscrivere come:

per $1 \leq k \leq N_k$ cercare $y^k \in H_{\Gamma_D}^1$:

$$\Delta t^{-1} m(y^k(\mu) - y^{k-1}(\mu), \varphi) + a^{DT}(y^k, \varphi; \mu) = b(u^k, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_{\Gamma_D}^1, \quad (3.53)$$

dove:

$$m(y^k(\mu) - y^{k-1}(\mu), \varphi) = \int_{\Omega} (y^k(\mu) - y^{k-1}(\mu)) \varphi \, d\Omega,$$

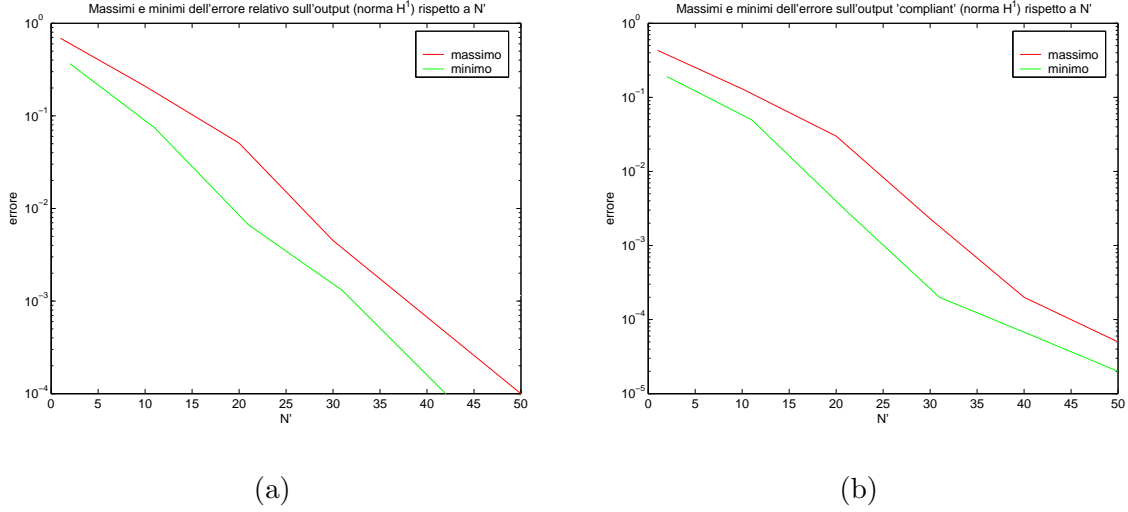


Figura 3.31: Interpolazione dei massimi e dei minimi degli errori- H^1 sull'output nei due casi: “non-compliant” (a) e compliant (b).

e

$$b(u^k, \varphi) = \int_{\Omega} \beta(\mathbf{x}) u^k \varphi \, d\Omega.$$

La forma bilineare di diffusione e trasporto $a^{DT}(y^k, \varphi; \mu)$ è non simmetrica e può essere vista come la somma di due termini, uno di diffusione e uno di trasporto [18]:

$$a^{DT}(y^k, \varphi; \mu) = a^D(y^k, \varphi; \mu) + a^T(y^k, \varphi; \mu),$$

con

$$\begin{aligned} a^D(y^k, \varphi; \mu) &= \int_{\Omega} \nabla y^k \cdot \nabla \varphi \, d\Omega, \\ a^T(y^k, \varphi; \mu) &= \int_{\Omega} (\mathbf{V}^k \cdot \nabla y^k) \varphi \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{V}^k) y^k \varphi \, d\Omega. \end{aligned}$$

Il termine di trasporto a^T è tale che:

$$\begin{aligned} a^T(\varphi, \varphi) &= \int_{\Omega} (\mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi) \varphi + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{V}^k) \varphi^2, \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{V}^k \cdot \nabla \varphi^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{V}^k) \varphi^2, \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{V}^k \varphi^2), \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}^k) \varphi^2 = 0, \quad \forall \varphi \in H_{\Gamma_D}^1. \end{aligned}$$

Poiché $a^{DT}(\varphi, \varphi) = a^D(\varphi, \varphi)$, per la stima a posteriori dell'errore si possono usare i risultati riportati in [8] per il caso di forma bilineare simmetrica. Se $a^{DT}(\varphi, \varphi)$ non fosse riconducibile ad una forma simmetrica, si dovrebbero impiegare “tecniche aggiunte” [8], che si basano sul calcolo del residuo del problema primario e del problema duale (Sez.2.7) e la stima a posteriori risulterebbe molto più complessa.

Supponiamo che il parametro inf-sup

$$\tilde{\alpha}(\mu) = \inf_{y \in H_{\Gamma_D}^1} \sup_{\varphi \in H_{\Gamma_D}^1} \frac{a^{DT}(y, \varphi; \mu)}{\|y\| \|\varphi\|}$$

sia strettamente positivo, cioè $\tilde{\alpha}(\mu) \geq \alpha_0 > 0, \forall \mu \in \mathcal{D}$.

Sia $R(\varphi; t^k, \nu)$ il residuo del problema (3.53) per l'approssimazione a basi ridotte della soluzione $y_N(\nu, t^k) \in W_N$:

$$R(\varphi; t^k, \nu) = b(u^k, \varphi) - (\Delta t^{-1} m(y_N(\nu, t^k) - y_N(\nu, t^{k-1}), \varphi) + a^{DT}(y_N(\nu, t^k), \varphi; \mu))$$

e sia

$$\varepsilon_N(\nu, t^k) = \sup_{\varphi \in H_{\Gamma_D}^1} \frac{R(\varphi; t^k, \nu)}{\|\varphi\|}, \quad 1 \leq k \leq N_k.$$

Definiamo lo stimatore dell'errore:

$$\Delta_N(\nu, t^k) = \tilde{\alpha}^{-1/2}(\mu) \left(\sum_{k'=1}^k \Delta t \varepsilon_N^2(\nu, t^{k'}) \right)^{1/2}, \quad 1 \leq k \leq N_k.$$

Definiamo inoltre la seguente norma:

$$\|y(\nu, t^k)\|^2 = m(y(\nu, t^k), y(\nu, t^k)) + \sum_{k'=1}^k \Delta t a^D(y(\nu, t^{k'}), y(\nu, t^{k'}); \mu).$$

Si può dimostrare [18] che

$$\|y(\nu, t^k) - y_N(\nu, t^k)\|^2 \leq \Delta_N(\nu, t^k), \quad \forall \mu \in \mathcal{D}.$$

Questa disuguaglianza afferma che $\Delta_N(\nu, t^k)$ è una *rigorosa* sovrastima di $\|y(\nu, t^k) - y_N(\nu, t^k)\|^2$.

Per quanto riguarda l'output è possibile dimostrare [18] che:

$$|s(\nu, t^k) - s_N(\nu, t^k)| \leq \Delta^s(\nu, t^k),$$

dove

$$\Delta^s(\nu, t^k) = \left(\sup_{\varphi \in H_{\Gamma_D}^1} \frac{l(\varphi)}{\|\varphi\|_{H_{\Gamma_D}^1}} \right) \Delta_N(\nu, t^k).$$

Per calcolare $\varepsilon_N(\mu)$ e $\tilde{\alpha}(\mu)$ in modo efficiente si adotta una costruzione appropriata, associata a procedure computazionali off-line/on-line [19]. I costi on-line sono indipendenti da \mathcal{N} e sono paragonabili ai costi on-line per la valutazione di $s_N(\nu, t^k)$.

3.7.5 Esempio di soluzione a basi ridotte

A titolo di esempio, e per mostrare la ricostruzione della soluzione a basi ridotte rispetto a quella con approssimazione Galerkin-elementi finiti, riportiamo in Fig.3.32 il confronto fra la soluzione a basi ridotte per $\mu = (0.1, 1)$ e la soluzione relativa a elementi finiti. La concentrazione è espressa in g/m^2 .

Fig.3.33 mostra l'errore puntuale in modulo tra le due soluzioni su tutto il dominio, mentre l'errore relativo in norma- H^1 è dell'ordine di 10^{-11} .

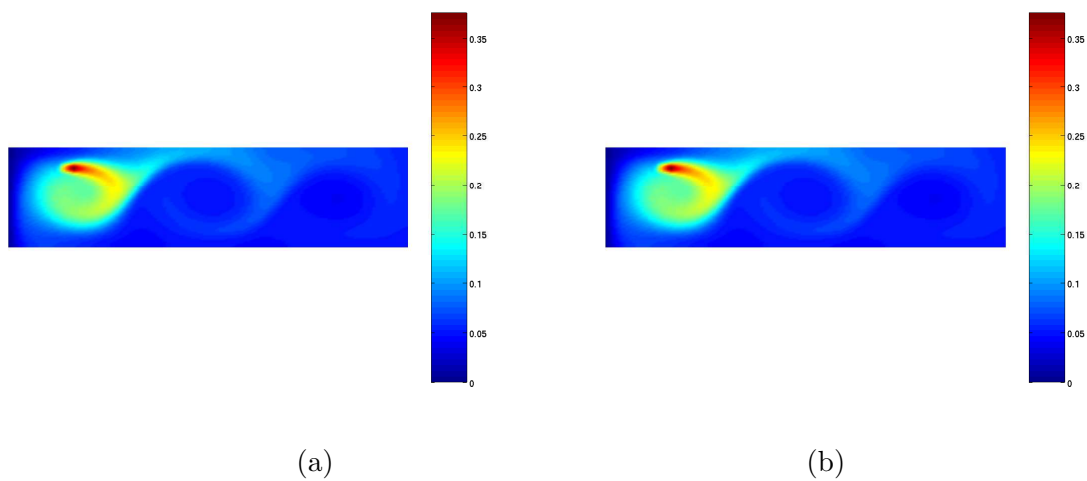


Figura 3.32: Confronto tra la soluzione a basi ridotte (a) e la relativa soluzione a elementi finiti (b). Concentrazione in $[g/m^2]$

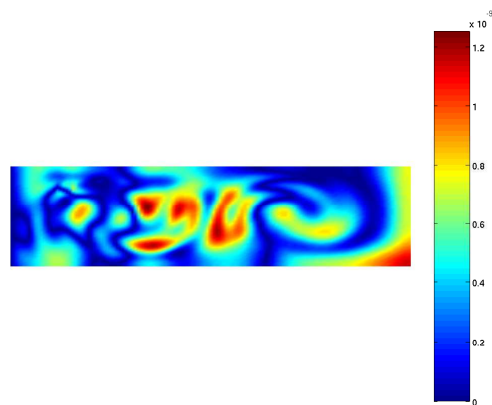


Figura 3.33: Esempio di distribuzione dell'errore puntuale in modulo tra la soluzione a basi ridotte e la soluzione a elementi finiti

Capitolo 4

Richiami di Teoria del Controllo Ottimale per Problemi alle Derivate Parziali

In questo capitolo richiamiamo brevemente i concetti fondamentali su cui si fonda la teoria del controllo ottimale dei sistemi di equazioni alle derivate parziali. L'approccio classico a questo tipo di problemi si basa sulla teoria sviluppata da J.L. Lions [20, 21], ampiamente descritta in [12, 22], o sul formalismo della *Lagrangiana* [23]. Nell'applicazione centrale di questo lavoro di tesi (Cap.5) adotteremo il formalismo della Lagrangiana, sui cui aspetti teorici ci si soffermerà in questo capitolo. Verrà proposto un algoritmo iterativo per la risoluzione dei problemi di controllo e infine si presenteranno i risultati di un esempio semplice per facilitare la comprensione.

4.1 Introduzione alla Teoria del Controllo Ottimale

Per illustrare la teoria del controllo ottimale è necessario introdurre i seguenti elementi:

- la *funzione di controllo* $u \in \mathcal{U}_{ad}$, dove \mathcal{U}_{ad} è detto lo spazio dei *controlli ammissibili*.
Il controllo può essere sul contorno Γ (*controllo sul bordo*) o all'interno del dominio di calcolo Ω (*controllo distribuito*).
- Lo *stato del sistema* $w(u)$, dipendente dal valore assunto dalla funzione controllo, che

rappresenta la soluzione di un problema differenziale alle derivate parziali detto *problema di stato*:

$$\Lambda w(u) = f, \quad (4.1)$$

completato dalle opportune condizioni al bordo. Questo problema descrive il sistema fisico che si vuole controllare e/o ottimizzare.

- La *funzione di osservazione* $z(u) \in \mathcal{Z}$, funzione di $w(u)$ tramite un operatore \mathcal{C} e quindi a sua volta dipendente dal controllo u : $z(u) = \mathcal{C}w(u)$. L'osservazione può essere sul contorno o all'interno del dominio o in una parte di essi.
- Il *funzionale costo* J , definito sullo spazio \mathcal{Z} delle funzioni osservate:

$$z(u) \in \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{J}(z(\mathbf{u})) \geq \mathbf{0}. \quad (4.2)$$

Il *problema di controllo ottimale* si può esprimere in una delle due forme:

- cercare $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tale che:

$$J(u) = \inf J(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}; \quad (4.3)$$

- cercare $u \in \mathcal{U}_{ad}$ per cui valga:

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \quad (4.4)$$

È evidente che bisogna assicurare l'esistenza e unicità della soluzione del problema di controllo.

4.1.1 Esistenza e unicità per i minimi dei funzionali

Sia \mathcal{U} uno spazio funzionale di *Hilbert* [24] su cui è definita la *forma* π : $u, v \rightarrow \pi(u, v)$, $\forall u, v \in \mathcal{U}$. Si assuma che tale forma abbia le seguenti caratteristiche:

- *bilinearità*:

$$\pi(\lambda u + \mu w, v) = \lambda \pi(u, v) + \mu \pi(w, v) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in \mathcal{U}$$

$$\pi(u, \lambda w + \mu v) = \lambda \pi(u, v) + \mu \pi(u, w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in \mathcal{U},$$

- *simmetria*: $\pi(u, v) = \pi(v, u)$, $\forall u, v \in \mathcal{U}$;
- *continuità*: $\exists M > 0$: $|\pi(u, v)| \leq M \|u\| \cdot \|v\|$, $\forall u, v \in \mathcal{U}$;

- *coercività*: $\exists c > 0 : \pi(v, v) \geq c\|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{U}$.

Con $\|\cdot\|$ si indica la norma di \mathcal{U} indotta dal prodotto scalare: $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

Si consideri ora una forma L su \mathcal{U} : $v \rightarrow L(v)$, $\forall v \in \mathcal{U}$. Si richiede che tale forma sia

- *lineare*: $L(\lambda v + \mu w) = \lambda L(v) + \mu L(w)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v, w \in \mathcal{U}$;
- *continua*: $\exists \gamma > 0 : |L(v)| \leq \gamma\|v\|$, $\forall v \in \mathcal{U}$.

Sia $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$ lo spazio delle funzioni ammissibili per il controllo e supponiamo di poter scrivere il *funzionale costo* come:

$$J(v) = \pi(v, v) - 2L(v), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.5)$$

Valgono i seguenti risultati [20]:

Teorema 4.1. *Sia $\pi(u, v)$ una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica su \mathcal{U} . Allora esiste ed è unico il controllo $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tale che:*

$$J(u) = \inf J(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.6)$$

Teorema 4.2. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente (4.1), la soluzione $u \in \mathcal{U}_{ad}$ è caratterizzata dalla seguente disuguaglianza variazionale:*

$$\pi(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.7)$$

Nel caso in cui \mathcal{U}_{ad} sia un insieme chiuso e convesso con vertice nell'origine 0 (cioè un cono) vale anche:

$$\pi(u, v) \geq L(v), \quad \pi(u, u) = L(u) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.8)$$

Teorema 4.3. *Si assuma che la funzione $v \rightarrow L(v)$ sia strettamente convessa e differenziabile e soddisfi la condizione: $J(v) \rightarrow \infty$ per $\|v\| \rightarrow \infty$, $\forall v \in \mathcal{U}_{ad}$. Allora l'unico elemento $u \in \mathcal{U}_{ad}$ che soddisfa la condizione (4.6) è caratterizzato dalla disequazione:*

$$J'(u) \cdot (v - u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.9)$$

Teorema 4.4. *Con tutte le ipotesi del teorema (4.3) soddisfatte, un risultato equivalente a (4.9) è:*

$$J'(v) \cdot (v - u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4.10)$$

Infatti, in generale, vale:

$$J'(v) \cdot (v - u) \geq J'(u) \cdot (v - u) \geq 0 \quad \forall v, u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

L'esistenza e l'unicità del controllo ottimale u si possono provare anche nel caso di forme bilineari continue, coercive, non necessariamente simmetriche. Si osservi infatti che dal teorema 4.2 si può dedurre il seguente lemma, grazie al lemma di Lax-Milgram [1, 15]:

Lemma 4.1. *Se $\mathcal{U}_{ad} \equiv \mathcal{U}$ e $\pi(u, v)$ è una forma bilineare continua e coerciva, non necessariamente simmetrica, allora esiste ed è unica la funzione di controllo u tale che:*

$$\pi(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Alla luce dei problemi elencati il problema di controllo si può esprimere in una delle tre seguenti formulazioni equivalenti:

- i) cercare $u \in \mathcal{U}_{ad} : J(u) = \inf J(v), \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$
- ii) cercare $u \in \mathcal{U}_{ad} : J'(u) \cdot (v - u) \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$
- iii) cercare $u \in \mathcal{U}_{ad} : J'(v) \cdot (v - u) \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.

4.1.2 Spazi funzionali e definizione del problema aggiunto

Siano \mathcal{V} e \mathcal{H} due spazi di *Hilbert* tali che:

- $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$;
- l'iniezione di \mathcal{V} in \mathcal{H} sia continua, cioè esiste una costante \mathcal{C} tale che $\|v\|_{\mathcal{H}} \leq \mathcal{C}\|v\|_{\mathcal{V}}, \forall v \in \mathcal{H}$;
- \mathcal{V} sia denso in \mathcal{H} , cioè ogni elemento di \mathcal{H} può essere ottenuto come limite, nella norma $\|\cdot\|$, di una successione di elementi di \mathcal{V} .

Sia \mathcal{V}' il duale di \mathcal{V} , cioè lo spazio costituito dai funzionali lineari limitati definiti su \mathcal{V} , si ha che \mathcal{H} è un sottospazio di \mathcal{V}' e $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$. In seguito gli spazi \mathcal{V} e \mathcal{H} saranno scelti, rispettivamente, come $H^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, dove Ω indica il dominio.

Definizione 1. *Dati due spazi funzionali \mathcal{X} e \mathcal{Y} , si definisce isomorfismo un operatore lineare e continuo \mathcal{T} che metta in corrispondenza biunivoca gli elementi dei due spazi funzionali e, inoltre, esista il suo inverso \mathcal{T}^{-1} . Un isomorfismo si dice canonico se $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$.*

Definizione 2. Dato un operatore A lineare e continuo e prese $\phi, \psi \in \mathcal{V}$, si definisce operatore aggiunto di A , e si indica con A^* , l'operatore per cui vale:

$$\nu' \langle A\phi, \psi \rangle_{\mathcal{V}} = \nu \langle \phi, A^*\psi \rangle_{\mathcal{V}'}$$

La notazione $\langle F, \phi \rangle$, detta *crochet*, indica il funzionale F che opera sugli elementi ϕ appartenenti allo spazio opportuno.

Per un certo controllo $u \in \mathcal{U}_{ad}$, lo stato $w(u)$ del sistema è la soluzione di:

$$Aw = f + Bu.$$

dove A è un operatore differenziale, continuo e lineare, applicato alla variabile di stato w e B è un operatore differenziale, anch'esso lineare e continuo, che introduce la variabile di controllo u nell'equazione di stato.

Il funzionale costo si scrive come:

$$J(w, u) = \frac{1}{2} \|Cw - z_d\|^2 + \frac{1}{2} n(u, u), \quad (4.11)$$

dove C è l'operatore che porta la variabile di stato nello spazio \mathcal{Z} delle funzioni osservate, z_d è la funzione osservazione desiderata e $n(., .)$ è una forma Hermitiana definita positiva.

Definizione 3. Una forma bilineare $n : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice Hermitiana definita positiva se:

- $n(\phi, \psi) = \overline{n(\psi, \phi)}, \forall \phi, \psi \in \mathcal{V}$,
- $n(\phi, \phi) > 0$, per $\phi \in \mathcal{V}$.

Grazie alla forma Hermitiana possiamo riscrivere il funzionale costo come somma algebrica di una forma π e un funzionale L (4.5) che soddisfino le ipotesi del Teorema 4.1, a garanzia dell'esistenza e unicità del controllo ottimale $u \in \mathcal{U}_{ad}$. Nel caso in cui la forma $n(., .)$ sia nulla, in teoria si dimostra solo l'esistenza della soluzione del problema di controllo ma non l'unicità. In pratica, poiché la discretizzazione produce, in genere, effetti dissipativi, la soluzione è unica anche se $n(., .) = 0$.

Per un controllo $u \in \mathcal{U}_{ad}$, lo stato aggiunto $p(u) \in \mathcal{V}$ è definito da:

$$A^*p(u) = C^*\Lambda[Cw(u) - Z_d].$$

Un risultato notevole per lo studio dei problemi di controllo ottimale è il seguente corollario che deriva dalle definizioni introdotte precedentemente:

Corollario 4.1. (Lions). *Per la derivata del funzionale costo vale:*

$$\frac{1}{2} \cdot J'(u) = B^*p(u) + \Lambda_{\mathcal{U}}N(u).$$

dove p è lo stato aggiunto, $\Lambda_{\mathcal{U}}$ è un isomorfismo canonico di \mathcal{U} in \mathcal{U}' e $N(u)$ è l'operatore associato alla forma Hermitiana. Questo risultato permette di calcolare la derivata del funzionale costo ricorrendo alla risoluzione di un altro problema differenziale, del tutto simile al problema di stato: il problema aggiunto.

Per un'applicazione di questo Corollario si veda l'esempio alla Sez.4.4.

4.2 Approccio ai Problemi di Controllo mediante Lagrangiana

4.2.1 Ottimizzazione vincolata

Si consideri un semplice esempio di *ottimizzazione vincolata*: date $f, g \in C^1(X)$, dove X è un aperto di \mathbb{R}^N , trovare gli estremi della funzione f , col vincolo che i punti estremi appartengano all'insieme $E_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : g(\mathbf{x}) = 0\}$. Per semplicità di trattazione si assume che g sia una funzione scalare $g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 4. *Dati f, g e E_0 , il punto $\mathbf{x}_0 \in X$ si definisce punto critico condizionato al vincolo $g(\mathbf{x}) = 0$ se:*

- è un punto regolare per E_0 , cioè $g(\mathbf{x}_0) = 0$ e $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$;
- la derivata di f in direzione tangente al vincolo g è nulla in \mathbf{x}_0 .

Questa definizione permette di arrivare a enunciare il seguente teorema fondamentale:

Teorema 4.5. *Siano $f, g \in C^1(X)$, con X aperto di \mathbb{R}^N , e sia \mathbf{x}_0 un punto regolare di $E_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : g(\mathbf{x}) = 0\}$; allora \mathbf{x}_0 è un punto critico vincolato se e solo se esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_0 \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

Definiamo la funzione $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$, detta *Lagrangiana*:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) := f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}).$$

Dal Teorema 4.5 segue che \mathbf{x}_0 è un punto critico vincolato se e solo se $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ è un punto critico libero per la funzione \mathcal{L} . Il numero λ_0 si definisce *moltiplicatore di Lagrange* e il suo valore si ricava risolvendo il sistema:

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 0$$

cioè:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathbf{x}} = f_{\mathbf{x}} - \lambda g_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \\ \mathcal{L}_{\lambda} = -g = 0. \end{cases}$$

4.2.2 Formulazione astratta del problema di controllo ottimale

Come detto, lo scopo del problema di controllo è trovare la funzione $u \in \mathcal{U}_{ad}$ che minimizza il funzionale costo $J = J(w, u)$, dove w è la soluzione del problema di stato. Il problema si può formulare come segue:

$$\text{trovare } u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tale che } J(w, u) \text{ sia minimo e valga } Aw = f + Bu, \forall w \in \mathcal{V}. \quad (4.12)$$

Notando il parallelismo tra il funzionale costo J e la funzione f (Sez. 4.2.1), tra l'equazione di stato e la funzione g e tra il controllo u e il punto estremo \mathbf{x} , il problema di controllo ottimale non è altro che un problema di estremo vincolato.

Introducendo il moltiplicatore Lagrangiano p e il funzionale Lagrangiano

$$\mathcal{L}(w, p, u) = J(w, u) + \langle p, Aw - f - Bu \rangle, \quad (4.13)$$

il problema (4.12) si riconduce alla ricerca dei punti critici liberi (w, p, u) del funzionale Lagrangiano. La soluzione del problema (4.12) si trova allora risolvendo il sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\nabla \mathcal{L}(w, p, u) = 0.$$

Si consideri $w \in \mathcal{V}$, $u \in \mathcal{U}$ e $f \in \mathcal{H}$, essendo \mathcal{V} , \mathcal{U} , \mathcal{H} opportuni spazi di Hilbert, la forma debole dell'equazione di stato è data da:

$$a(w, \varphi) = (f, \varphi) + b(u, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}, \quad (4.14)$$

dove $a(., .)$ è la forma bilineare associata all'operatore ellittico e $b(., .)$ è la forma bilineare associata al termine di controllo Bu .

Il funzionale costo è definito dalla (4.11). Il moltiplicatore di Lagrange p appartiene allo stesso spazio funzionale \mathcal{V} della variabile di stato e, grazie alle (4.14) e (4.11), la (4.13) diventa:

$$\mathcal{L}(w, p, u) = J(w, u) + b(u, p) + (f, p) - a(w, p).$$

Il problema (4.12) è analogo a:

$$\text{cercare } (w, p, u) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{U} : \nabla \mathcal{L}(w, p, u)[(\varphi, \phi, \psi)] = 0, \forall (\varphi, \phi, \psi) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{U}.$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_w[\varphi] = (Cw - z_d, C\varphi) - a(p, \varphi) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{V}, \\ \mathcal{L}_p[\phi] = (f, \phi) + b(u, \phi) - a(w, \phi) = 0, \forall \phi \in \mathcal{V}, \\ \mathcal{L}_u[\psi] = b(p, \psi) + n(u, \psi) = 0, \forall \psi \in \mathcal{U}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Il termine \mathcal{L}_p corrisponde all'equazione di stato in forma debole, \mathcal{L}_w all'equazione aggiunta e \mathcal{L}_u esprime il vincolo di raggiungimento dell'ottimo. Riscrivendo il sistema (4.15) si ha:

$$\begin{cases} a(p, \varphi) = (Cw - z_d, C\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{V}, \\ a(w, \phi) = (f, \phi) + b(u, \phi), \forall \phi \in \mathcal{V}, \\ b(p, \psi) + n(u, \psi) = 0, \forall \psi \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

La variabile aggiunta, intesa come moltiplicatore di Lagrange, è legata alla *sensitività* del funzionale costo J , alle variazioni della funzione di osservazione e quindi della funzione di controllo.

Il vincolo di raggiungimento dell'ottimo $\mathcal{L}_u[\psi]$ può essere messo in relazione con la derivata forte $J'(u)$ tramite la definizione di funzionale costo e il *Teorema di Rappresentazione di Riesz*.

Teorema 4.6. (Riesz). *Ogni funzionale lineare e limitato su uno spazio di Hilbert X si può rappresentare come prodotto scalare:*

$$\forall z^* \in X', \exists! z \in X : \langle z^*, x \rangle = (z, x), \forall x \in X \text{ e } \|z^*\| = \|z\|_X,$$

con X' spazio duale di X .

Il funzionale $\mathcal{L}_u[\psi]$ è lineare e limitato e ψ appartiene allo spazio di Hilbert. Possiamo allora scrivere $\mathcal{L}_u[\psi] = \langle J'(p, u), \psi \rangle = (J'(p, u), \psi)$.

Il formalismo della Lagrangiana genera l'equazione aggiunta in forma debole, a differenza del metodo alla Lions che la esprime direttamente in forma forte. La definizione di problema aggiunto, e quindi di variabile aggiunta, non è univoca e i due approcci, in generale, non conducono alla stessa. Questo non significa che ce ne sia uno più corretto dell'altro, ma solamente che uno dei due sarà più conveniente per un dato problema.

4.3 Metodo Iterativo per la Risoluzione del Problema di Controllo

Per trovare la soluzione del problema di controllo ottimale (4.12) si impiega un procedimento iterativo, ricordando che in corrispondenza dell'ottimo devono essere soddisfatte le tre equazioni del sistema (4.15):

- equazione di stato;
- equazione aggiunta;
- equazione di vincolo di raggiungimento dell'ottimo.

Per l'elaborazione di un algoritmo iterativo occorre osservare che la valutazione di J' in un dato punto del dominio di controllo fornisce un'indicazione della sensitività del funzionale costo J , in quel punto, alle variazioni del controllo u . Questo significa che una variazione infinitesimale della funzione di controllo δu , attorno ad un certo valore di u , genera una variazione δJ proporzionale a $J'(u)$, a meno di infinitesimi di ordine superiore. Sia u^k la funzione di controllo al passo k -esimo, il controllo al passo successivo $k + 1$, si ottiene nel seguente modo:

$$u^{k+1} = u^k - \tau^k J'(u^k). \quad (4.16)$$

Si sceglie cioè di impiegare il metodo *discesa ripida* con $-J'(u^k)$ come *direzione di discesa*, dove τ^k indica un *parametro di rilassamento* [22]. Il metodo di discesa ripida rientra nella categoria dei metodi di Newton inesatti [25] e a differenza di altri metodi, quali il metodo di Newton e il metodo del gradiente coniugato, non necessita di calcoli aggiuntivi per la determinazione della direzione di discesa. Infatti, la derivata del funzionale costo è nota una volta risolto il problema aggiunto. Resta il problema della determinazione di un valore

appropriato del parametro di rilassamento τ^k . La scelta di tale parametro deve essere in grado di garantire la convergenza del funzionale costo al minimo, cioè ad ogni passo deve valere:

$$J(u^k - \tau^k J'(u^k)) < J(u^k).$$

In seguito si prenderà τ^k pari a un valore ottimale τ_{opt} , da determinarsi a priori (si veda [12]). Un aspetto fondamentale per l'elaborazione del procedimento iterativo è la scelta del criterio d'arresto del procedimento stesso. Se la soluzione che minimizza il funzionale costo è effettivamente raggiungibile dal sistema, potrebbe sembrare un criterio appropriato quello di fissare una tolleranza sulla distanza, in norma opportuna, tra l'osservata z e la z_d desiderata:

$$\|z^k - z_d\|_{\mathcal{Z}} \leq tol.$$

In realtà non è detto che in un processo iterativo convergente il funzionale costo J tenda a zero per $k \rightarrow \infty$, quindi imporre che la distanza tra l'osservata e la z_d sia inferiore alla tolleranza prefissata può portare ad un valore di J tutt'altro che nullo. Occorre allora adottare un criterio d'arresto basato sulla valutazione della norma della derivata del funzionale costo:

$$\|J'(u^k)\|_{\mathcal{U}} \leq tol.$$

Il valore della tolleranza dipende dal livello di vicinanza all'ottimo reale che si vuole avere, nonché dal valore iniziale di $\|J'\|$. La derivata del funzionale risulta definita solo dove lo è la funzione di controllo, come si nota dalla forma debole impiegata per definire il differenziale $\mathcal{L}_u[\psi]$, essendo ψ appartenente allo spazio \mathcal{U} delle funzioni di controllo.

Il metodo iterativo per la ricerca dell'ottimo può essere schematizzato come segue:

1. A partire dall'equazione di stato e dal funzionale costo si definisce il funzionale Lagrangiano, da cui si ricavano le espressioni dell'equazione aggiunta e il criterio d'arresto, che valuta la distanza dall'ottimo.
2. Si fornisce un valore iniziale u_0 della funzione di controllo.
3. Si risolve l'equazione di stato per questo valore del controllo e si ottiene w .
4. Si valuta il funzionale costo e si risolve l'equazione aggiunta in p .
5. Nota la variabile aggiunta, si ricava il valore di J' .

6. Si verifica se il criterio di arresto è soddisfatto e se lo è si ha già la soluzione ottimale.
7. Se non è soddisfatto, si adotta un procedimento iterativo sulla funzione di controllo usando il metodo *discesa ripida* (4.16) e si riparte dal punto 3.

4.4 Esempio di Problema di Controllo

Si illustra un semplice esempio di problema di controllo ottimale con condizioni di tipo Dirichlet con controllo u e osservazione distribuiti in tutto il dominio Ω .

Il problema di stato è dato dal problema di Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta w = f + u & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.17)$$

Il controllo u opera sul problema come un termine sorgente aggiunto alla forzante f . Lo scopo del problema è trovare il minimo del funzionale:

$$J(u) = \int_{\Omega} (w(u) - z_d) d\Omega,$$

avendo scelto di osservare la soluzione w e di confrontarla con z_d su tutto il dominio.

Il problema aggiunto per il problema di controllo (4.17) è :

$$\begin{cases} -\Delta p = w(u) - z_d & \text{in } \Omega, \\ p = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.18)$$

Si risolve il caso in cui Ω sia il quadrato $(0, 1) \times (0, 1)$ in \mathbb{R}^2 , $f = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$ e la funzione di controllo desiderata sia $z_d = 5xy(1-x)(1-y)$. Si parte da un valore del controllo iniziale u_0 nullo e si segue l'algoritmo iterativo descritto nella Sez.(4.3), ponendo $\tau_{opt} = 700$ [12] e definendo un criterio d'arresto basato sull'errore relativo tra la soluzione ottenuta e quella desiderata:

$$\frac{\|w - z_d\|_{L^2(\Omega)}}{\|z_d\|_{L^2(\Omega)}} \leq tol.$$

Imponendo una tolleranza pari a 10^{-4} , si arriva a convergenza dopo 9 iterazioni. Riportiamo i grafici (Fig.4.1) della soluzione del problema di stato, iniziale e a convergenza, da confrontare con z_d , la soluzione del problema aggiunto (Fig.4.2), il controllo a convergenza e l'errore puntuale tra la soluzione ottenuta e la soluzione desiderata (Fig.4.3).

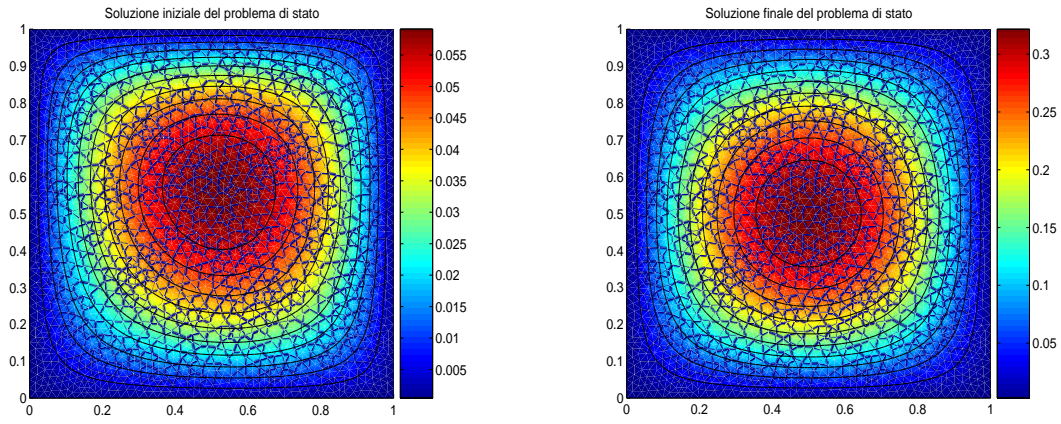


Figura 4.1: Soluzione del problema di stato (4.17): iniziale w_i (a sinistra) e finale w_f (a destra).

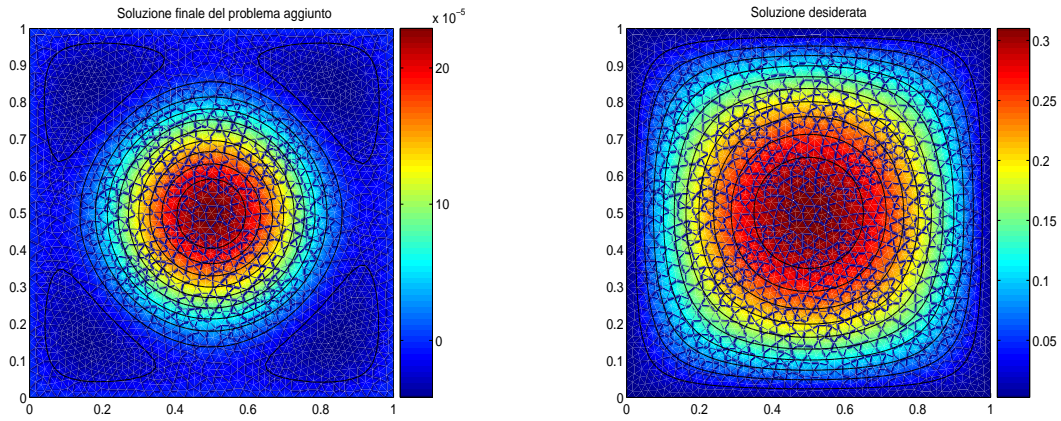


Figura 4.2: Soluzione finale del problema aggiunto (4.18) p_f (a sinistra) e soluzione ottimale z_d (a destra).

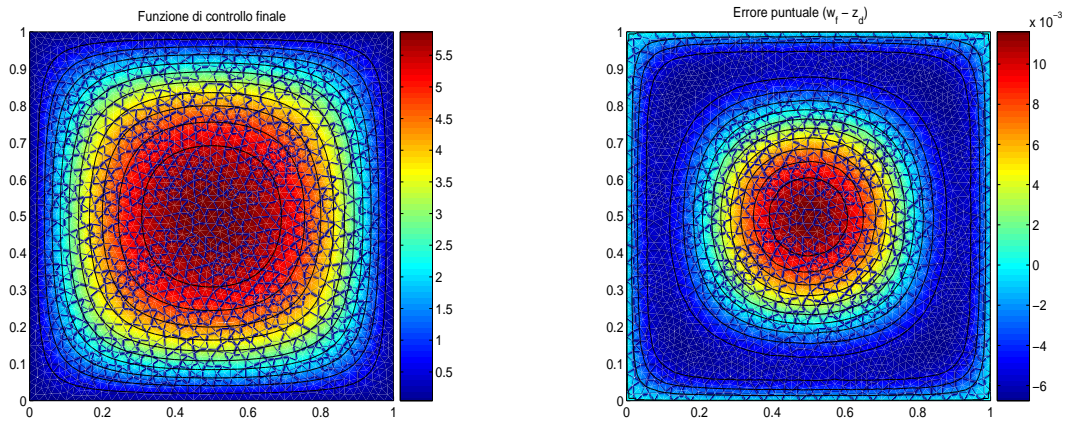


Figura 4.3: Controllo finale u_f (a sinistra) e errore puntuale $w_f - z_d$ (a destra).

Capitolo 5

Metodi a Basi Ridotte per Problemi di Controllo

Nel capitolo precedente abbiamo verificato l'applicabilità del metodo a basi ridotte al solo problema di stato (3.7). Si vuole ora estenderne l'applicazione al problema aggiunto (3.15), in modo che ad ogni passo del metodo iterativo per la ricerca del controllo ottimo (Sez.4.3) entrambi i problemi possano essere risolti con il metodo a basi ridotte, ottenendo riduzioni significative dei tempi di calcolo. Considereremo due diverse applicazioni del controllo ottimale a problemi parametrizzati risolti mediante metodi a basi ridotte.

5.1 Approssimazione Numerica Del Problema di Controllo: la Lagrangiana Stabilizzata

Invece di stabilizzare separatamente le equazioni di stato e aggiunta in modo convenzionale, per evitare instabilità numeriche e la loro propagazione nel metodo iterativo di ottimizzazione si sceglie il metodo della *Lagrangiana stabilizzata* [14]. Tale approccio è diverso rispetto a quello usato nel Cap.3 perché in questo modo non solo il metodo è fortemente consistente, ma c'è anche coerenza tra le equazioni stabilizzate di stato e aggiunta.

La Lagrangiana stabilizzata si definisce come:

$$\mathcal{L}_h(w_h, p_h, u_h) := \mathcal{L}(w_h, p_h, u_h) + S_h(w_h, p_h, u_h), \quad \forall w_h, p_h \in X_h,$$

dove:

$$S_h(w_h, p_h, u_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K R(w_h, u_h) R^{ad}(p_h, w_h) dK. \quad (5.1)$$

I termini $R(w_h, u_h)$ e $R^{ad}(p_h, w_h)$ rappresentano i residui, rispettivamente, dell'equazione di stato e aggiunta, mentre δ_K è un parametro di stabilizzazione dipendente dal numero di Péclet locale. La funzione u_h è l'approssimazione discreta del controllo $u \in L^2(\Omega)$ e $X_h \subset H_{\Gamma_D}^1$ è lo spazio degli elementi finiti (noi utilizzeremo elementi finiti di tipo \mathbb{P}^1). Esplicitando i residui dalle equazioni (3.7) e (3.15), si ottiene:

$$R(w_h, u_h) := L(w_h) - u_h,$$

$$R^{ad}(p_h, w_h) := L^{ad}(p_h) - G(w_h);$$

dove

$$L(w_h) := -\nabla \cdot (\nu \nabla w_h) + \mathbf{V} \cdot \nabla w_h, \quad (5.2)$$

$$L^{ad}(p_h) := -\nabla \cdot (\nu \nabla p_h + \mathbf{V} p_h), \quad (5.3)$$

$$G(w_h) := \chi_D g(x, y) (g(x, y) w_h - z_d). \quad (5.4)$$

Le funzioni g , χ_D , z_d sono state introdotte nella sezione 3.2.4. Differenziando la Lagrangiana stabilizzata rispetto alla variabile aggiunta, otteniamo l'equazione di stato stabilizzata in forma debole:

$$\text{cercare } w_h \in X_h \quad : \quad a(w_h, \varphi_h) + s_h(w_h, \varphi_h; u_h) = F(\varphi_h; u_h), \quad \forall \varphi_h \in X_h,$$

$$s_h(w_h, \varphi_h; u_h) := - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K R(w_h, u_h) L^{ad}(\varphi_h) dK,$$

o equivalentemente:

$$\text{cercare } w_h \in X_h \quad : \quad a_h(w_h, \varphi_h) = F_h(\varphi_h; u_h), \quad \forall \varphi_h \in X_h, \quad (5.5)$$

dove:

$$a_h(w_h, \varphi_h) := a(w_h, \varphi_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K L(w_h) L^{ad}(\varphi_h) dK, \quad (5.6)$$

$$F_h(\varphi_h; u_h) := F(\varphi_h; u_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K u_h L^{ad}(\varphi_h) dK. \quad (5.7)$$

Differenziando invece la Lagrangiana stabilizzata rispetto alla variabile di stato, otteniamo l'equazione aggiunta stabilizzata:

$$\begin{aligned} \text{cercare } p_h \in X_h \quad &: \quad a^{ad}(p_h, \phi_h) + s_h^{ad}(p_h, \phi_h; w_h) = F^{ad}(\phi_h; w_h), \quad \forall \phi_h \in X_h, \\ s_h^{ad}(p_h, \phi_h; w_h) &:= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K (R^{ad}(p_h, w_h)L(\phi_h) - R(w_h; u_h)G'(\phi_h)) \, dK, \end{aligned}$$

con

$$G'(w) := \chi_D g^2 w.$$

L'equazione aggiunta si può anche riscrivere nel seguente modo:

$$\text{cercare } p_h \in X_h \quad : \quad a_h^{ad}(p_h, \phi_h) = F_h^{ad}(\phi_h; w_h; u_h), \quad \forall \phi_h \in X_h,$$

dove:

$$\begin{aligned} a_h^{ad}(p_h, \phi_h) &:= a^{ad}(p_h, \phi_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K L^{ad}(p_h)L(\phi_h) \, dK, \\ F_h^{ad}(\phi_h; w_h; u_h) &:= F^{ad}(\phi_h; w_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K (G(w_h)L(\phi_h) + R(w_h; u_h)G'(\phi_h)) \, dK. \end{aligned}$$

I termini $a(w_h, \varphi_h)$, $F(\varphi_h; u_h)$, $a^{ad}(p_h, \phi_h)$ e $F^{ad}(\phi_h; w_h)$ sono definiti nelle (3.10), (3.11), (3.13) e (3.14). In questo modo si sono ottenute le approssimazioni di Galerkin delle equazioni di stato e aggiunta, arricchite dei termini derivanti dalla differenziazione di S_h in (5.1).

Infine differenziando \mathcal{L}_h rispetto a u_h si ottiene:

$$J'(p_h, w_h) = p_h - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K R^{ad}(p_h; w_h), \quad (5.8)$$

a cui è associato il seguente criterio di arresto:

$$\|J'(p_h, w_h)\|_{L^2(\Omega)} = \|p_h - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K R^{ad}(p_h; w_h)\|_{L^2(\Omega)} < tol. \quad (5.9)$$

5.2 Risoluzione del Problema Aggiunto con i Metodi a Basi Ridotte

Si vuole studiare il problema di controllo completo solo in due dei quattro casi analizzati nel Cap.3, quelli ritenuti più significativi: il caso 1 (emissioni variabili), certamente il più semplice e il caso 4 (emissioni e velocità variabile), il più complesso dei quattro. Per questo motivo si risolve il problema aggiunto solo nei casi di interesse, riferendosi sempre al dominio riportato in Fig.3.2.

5.2.1 Caso a: emissioni variabili dei camini

Per risolvere il problema aggiunto (3.15) occorre conoscere la soluzione del problema di stato. Indichiamo sempre con w_N l'approssimazione a basi ridotte della variabile di stato, che ora supponiamo nota, e sia p_N l'approssimazione a basi ridotte della soluzione del problema aggiunto.

Coerentemente con la (3.23), scriviamo:

$$p_N(\mu) = \sum_{j=1}^N p_{N_j}(\mu) \xi^j = \sum_{j=1}^N p_{N_j}(\mu) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \xi_i^j \varphi_i, \quad (5.10)$$

dove con ξ^j , $j = 1, \dots, N$, si indicano le funzioni di base per il problema aggiunto. L'approssimazione del problema aggiunto dipende dal vettore dei parametri in ingresso μ tramite la soluzione del problema di stato $w_N(\mu)$. Si ricorda che in questo caso $\mu = \{u_1, u_2\}$, dove u_i è il tasso di emissione dell' i -esimo camino.

Le N incognite $p_{N_j}(\mu)$ si calcolano risolvendo il problema:

$$a_h^{ad}(p_N(\mu), \xi_h) = F_h^{ad}(\xi_h; w_N, u_h) \quad h = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

dove

$$a_h^{ad}(p_N(\mu), \xi_h) = \sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^N p_{N_j}(\mu) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \xi_i^j \xi_m^h \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nu \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_m + \quad (5.12)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m) \varphi_i + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K (\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_i + \nabla \cdot \mathbf{V} \varphi_i + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i) (-\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_m + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m) \right],$$

e

$$F_h^{ad}(\xi_h; w_N(\mu); u_h) = \sum_{h=1}^N \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \xi_m^h \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \chi_{Dg}(g w_N(\mu) - z_d) \varphi_m - \quad (5.13)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \chi_{Dg}(g w_N(\mu) - z_d) (-\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_m + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m) -$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \chi_{Dg^2} (-\nabla \nu \cdot \nabla w_N(\mu) + \mathbf{V} \cdot \nabla w_N(\mu) + u_h) \varphi_m \right].$$

Sia \underline{C} la matrice (3.27), introduciamo $\underline{B}^{ad}, \underline{S}^{ad} \in \mathbb{R}^{N \times \mathcal{N}}$:

$$B_{m,i}^{ad} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m) \varphi_i = B_{i,m}, \quad (5.14)$$

$$S_{m,i}^{ad} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K (\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_i + \nabla \cdot \mathbf{V} \varphi_i + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i) (-\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_m + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m) \right]. \quad (5.15)$$

dove $B_{i,m}$ è definito da (3.28).

Indichiamo con \underline{A}_h^{ad} la matrice $\mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$:

$$A_{h_{m,i}}^{ad} = C_{m,i} + B_{m,i}^{ad} + S_{m,i}^{ad}.$$

Siano inoltre $\underline{G}^{ad}, \underline{H}^{ad}, \underline{I}^{ad} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ i vettori colonna definiti come:

$$\underline{G}_m^{ad} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \chi_{DG} \varphi_m, \quad (5.16)$$

$$\underline{H}_m^{ad} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \chi_{DG} \left(-\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_m + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m \right), \quad (5.17)$$

$$\underline{I}_m^{ad} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \chi_{DG}^2 \left(-\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_m + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m \right) \varphi_m. \quad (5.18)$$

Nella definizione di \underline{I}^{ad} si è tenuto conto del fatto che:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \chi_{DG}^2 u_h \varphi_m = 0,$$

perché la funzione discretizzata u_h assume valori nulli nel sottodominio di osservazione D (Fig.3.2).

Tutte le matrici \underline{C} , \underline{B}^{ad} , \underline{S}^{ad} e i vettori \underline{G}^{ad} , \underline{H}^{ad} , \underline{I}^{ad} vengono calcolate off-line una e una sola volta e memorizzate, mentre per ogni nuovo μ si assembla on-line il termine noto $\underline{F}_h^{ad} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$:

$$\underline{F}_h^{ad}(\mu) = (g w_N(\mu) - z_d) \cdot (\underline{G}^{ad} + \underline{H}^{ad}) + w_N(\mu) \cdot \underline{I}^{ad}.$$

Indicando con \underline{Z} la matrice $\mathcal{N} \times N$ le cui colonne sono i vettori dei valori nodali delle soluzioni a elementi finiti del problema aggiunto $\underline{\xi}^i$, $i = 1, \dots, N$, e ricordando che $w_N(\mu)$ (3.23), $z_d \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, il vettore delle incognite $\underline{p}_N(\mu)$ si ottiene risolvendo il problema:

$$(\underline{Z}^T \underline{A}_h^{ad} \underline{Z}) \underline{p}_N(\mu) = \underline{Z}^T \underline{F}_h^{ad}(\mu). \quad (5.19)$$

Assemblaggio della base

Occorre innanzi tutto capire *quante* e *quali* funzioni di base servono per il problema aggiunto. Una possibilità è quella di creare una base “coerente” con quella del problema di stato: le funzioni di base per il problema aggiunto sono le soluzioni del problema aggiunto il cui termine noto è calcolato sostituendo a w (3.15) le funzioni di base del problema di stato.

In realtà si scopre che è più opportuno creare una base propria e indipendente: si parte da una

distribuzione uniforme di parametri in ingresso nello spazio $\mathcal{D} = [0, 2700] \times [0, 2700]$ (sempre col vincolo $u_1 + u_2 \leq 2700$ g/s). Per ciascun μ si calcola la soluzione a elementi finiti del problema di stato, che permette di calcolare la soluzione a elementi finiti del problema aggiunto e, seguendo la procedura descritta nel paragrafo 2.6, si individuano le funzioni di base. Nonostante, anche per il problema aggiunto, la precisione sia soddisfacente già per $N' = 3$, si prosegue l'assemblaggio fino a N' a 7 per arricchire la base.

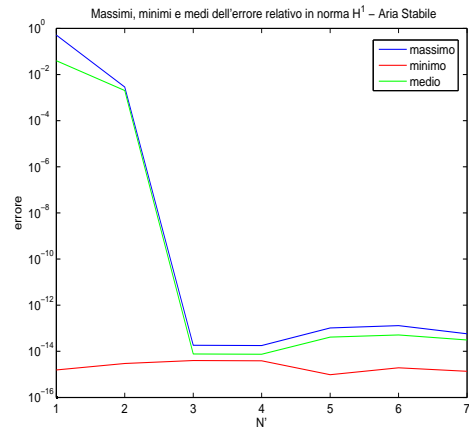
Con la base generata in questo secondo modo calcoliamo l'errore in norma- H^1 di ciascuna soluzione corrispondente a questi 7 parametri in ingresso al variare del numero di funzioni di base. Si riportano in Fig.5.1 gli andamenti dell'errore- H^1 massimo, minimo e medio all'aumentare di N' . Come già osservato per i problemi di stato, per tutti i regimi atmosferici l'andamento all'incirca costante del minimo attorno a 10^{-15} è una prova della consistenza del metodo. I grafici dell'errore medio e massimo mostrano la brusca diminuzione dell'errore per $N' \geq 3$: la semplicità di questo primo caso è tale per cui anche una base con pochi elementi garantisce una buona approssimazione della soluzione. L'andamento non costantemente decrescente dell'errore massimo e medio al cresce di N' è dovuto al malcondizionamento del sistema (5.19). La spiegazione di questo comportamento del sistema è analoga a quella riportata nella Sez.3.4.1. Se per ottenere i grafici in Fig.5.1 avessimo usato la base "coerente", non si avrebbe avuto un andamento costantemente decrescente nemmeno per $N' \leq 3$.

5.2.2 Caso b: emissioni e velocità del vento variabili

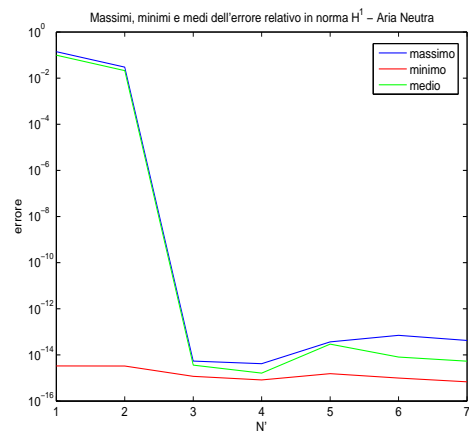
In questo caso si fanno variare sia i tassi di emissione dei primi due camini, mantenendo $u_{tot} = 2700$ g/s, sia la direzione della velocità del vento. Abbiamo dunque $\mu = \{u_1, u_2, V_x, V_y\}$ con i vincoli $u_1 + u_2 \leq u_{tot}$ e $\sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = 1$. Si vogliono calcolare le N incognite $p_{N_j}(\mu)$, cioè i pesi della combinazione lineare (5.10), per ottenere l'approssimazione a basi ridotte della soluzione $p_N(\mu)$ del problema aggiunto (5.11). L'operatore a_h^{ad} e il funzionale F_h^{ad} restano gli stessi definiti rispettivamente dalle (5.12) e (5.13).

Passando alla forma matriciale, sia $\underline{A}_h^{ad} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ la matrice definita come segue:

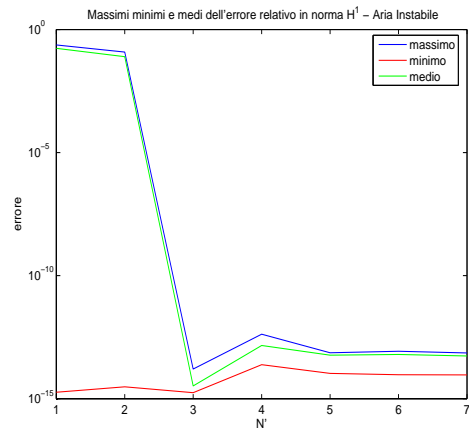
$$A_{h_{m,i}}^{ad}(\mu) = C_{m,i} + V_x \cdot B_{x_{m,i}}^{ad} + V_y \cdot B_{y_{m,i}}^{ad} + S_{m,i}^{ad}(\mu),$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.1: Problema aggiunto per il caso a (emissioni variabili): andamento dell'errore- H^1 relativo massimo, minimo e medio rispetto all'aumentare del numero di funzioni di base, per aria stabile (a), neutra (b) e instabile (c).

dove \underline{C} è la matrice di rigidezza (3.27), \underline{S}^{ad} è la matrice di stabilizzazione (5.15), in questo caso parametro-dipendente. Gli elementi delle matrici \underline{B}_x^{ad} e \underline{B}_y^{ad} sono dati da:

$$B_{x_{m,i}}^{ad} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{U}_x \cdot \nabla \varphi_m) \varphi_i = B_{x_{i,m}},$$

$$B_{y_{m,i}}^{ad} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{U}_y \cdot \nabla \varphi_m) \varphi_i = B_{y_{i,m}},$$

con $\mathbf{U}_x = (1, 0)$ e $\mathbf{U}_y = (0, 1)$, mentre $B_{x_{i,m}}$ e $B_{y_{i,m}}$ sono definiti in (3.36) e (3.37). Inoltre vale $\underline{B}^{ad} = V_x \cdot \underline{B}_x^{ad} + V_y \cdot \underline{B}_y^{ad}$, dove \underline{B}^{ad} è la matrice relativa al termine di trasporto, definita da (5.14).

Il termine noto \underline{F}_h (3.26) è dato dal vettore:

$$F_{h_m}^{ad}(\mu) = G_m^{ad} + H_m^{ad}(\mu) + I_m^{ad}(\mu).$$

In questo secondo caso \underline{H}^{ad} (5.17) e \underline{I}^{ad} (5.18) sono parametro-dipendenti perchè dipendono dal vettore velocità, mentre \underline{G}^{ad} (5.16) risulta parametro-indipendente.

Tutte le matrici e i vettori parametro-indipendenti (\underline{C} , \underline{B}_x^{ad} , \underline{B}_y^{ad} , \underline{G}^{ad}) vengono calcolati offline, una e una sola volta, mentre \underline{S}^{ad} , \underline{H}^{ad} e \underline{I}^{ad} , dipendenti dal parametro in modo non affine a causa del parametro di stabilizzazione δ_K , devono essere calcolati on-line per ogni nuovo parametro μ in ingresso. On-line si effettua anche l'assemblaggio delle matrici $\underline{A}_h^{ad}(\mu)$ e $\underline{F}_h^{ad}(\mu)$.

Mantenendo la notazione del caso precedente, il vettore delle incognite $\underline{p}_N(\mu)$ si ottiene risolvendo il problema:

$$(\underline{Z}^T \underline{A}_h^{ad}(\mu) \underline{Z}) \underline{p}_N(\mu) = \underline{Z}^T \underline{F}_h^{ad}(\mu). \quad (5.20)$$

A differenza di (5.19), in (5.20) anche la matrice \underline{A}_h^{ad} dipende dal parametro in ingresso μ e questo rende il problema leggermente più complicato e i risultati più generalizzabili.

Assemblaggio della base

Vista la complessità di questo secondo caso, il modo più semplice di costruire la base per il problema aggiunto è di considerare nel termine noto le soluzioni a elementi finiti usate come funzioni di base del problema di stato. Questo significa che per aria instabile si ha una base di 81 elementi (si prendono le soluzioni a elementi finiti del problema di stato associate a direzioni del vento distanziate di 5° nell'intervallo $[-40^\circ, 90^\circ]$, con un camino funzionante al

100% di u_{tot} a rotazione e da queste si risolve poi il problema aggiunto), mentre per aria neutra e stabile si hanno 132 funzioni di base (per direzioni del vento distanziate di 3° nello stesso intervallo, con un camino funzionante al 100% di u_{tot} a rotazione).

Ora che si è stabilita la dimensione della base per il problema aggiunto, si segue la procedura descritta nel paragrafo 2.6 per ordinare, in modo indipendente, gli elementi della base, senza ridurne il numero. Come già fatto per il caso precedente, si calcola l'errore in norma- H^1 di ciascuna soluzione dipendente dai parametri di S_N al variare del numero di funzioni di base e si trova l'errore massimo, minimo e medio per ogni N' . Si riportano in Fig.5.2 gli andamenti. Anche in questo caso si ripete quanto già osservato per il problema di stato: per tutte le condizioni d'aria l'andamento circa costante del minimo è una prova della consistenza del metodo e il numero di funzioni di base si aumenta finchè l'errore massimo si ritiene sufficientemente basso.

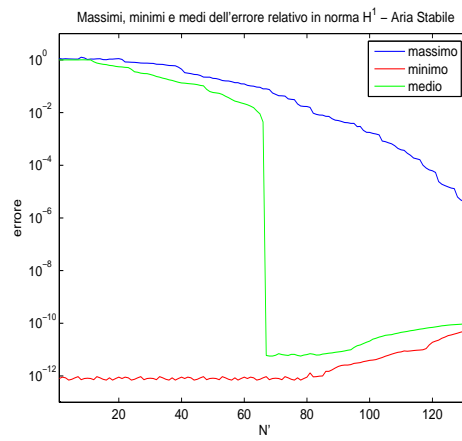
5.3 Risoluzione del Problema di Controllo Completo con Metodi a Basi Ridotte

Verificata l'applicabilità del metodo a basi ridotte, separatamente, per il problema di stato e il problema aggiunto, si vuole applicare tale metodo nella risoluzione di un problema di controllo completo.

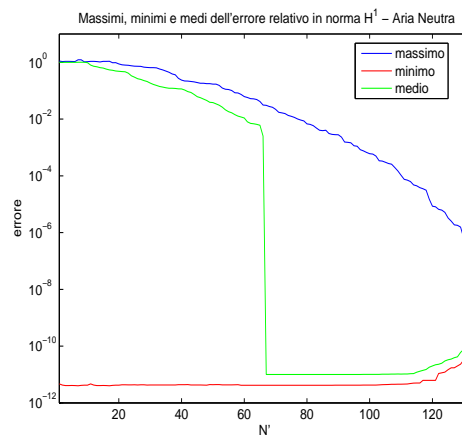
Ad ogni passo dell'algoritmo iterativo per la ricerca dell'ottimo (Sez.4.3) applicheremo il metodo a basi ridotte sia al problema di stato (punto 3) che al problema aggiunto (punto 4). Il problema di stato viene risolto nel modo descritto nel Cap.3 (alla Sez.3.4.1 per il primo caso e alla Sez.3.4.4 per il secondo) con la differenza del termine di stabilizzazione: invece di quello definito in (3.29), derivante dal metodo SUPG, si usa

$$S'_{m,i} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \left(\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_m + \nabla \cdot \mathbf{V} \varphi_m + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_m \right) \left(-\nabla \nu \cdot \nabla \varphi_i + \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi_i \right) = S_{i,m}^{ad}.$$

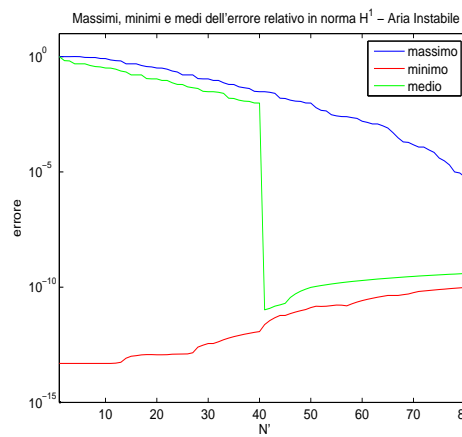
Questo cambiamento della matrice di stabilizzazione dipende dal fatto che la stabilizzazione indotta dalla Lagrangiana stabilizzata è particolarmente indicata per la soluzione di problemi di controllo ottimale, ma perde di significato quando si studia il solo problema di stato, come fatto nel Cap.3. Il problema aggiunto viene risolto esattamente come descritto nella Sez.5.2. In entrambi i casi si impongono i valori iniziali per le emissioni dei tre camini industriali



(a)



(b)



(c)

Figura 5.2: Problema aggiunto per il caso b (emissioni e vento variabili): andamento dell'errore- H^1 relativo massimo, minimo e medio rispetto all'aumentare del numero di funzioni di base, per aria stabile (a), neutra(b) e instabile (c).

e la soluzione del problema di controllo fornisce i tassi di emissione che rendono il livello di inquinamento sull'area di osservazione il più vicino possibile a quello desiderato, pari a $110 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Si è scelto tale valore perché è ben al di sotto del limite ammesso di $250 \mu\text{g}/\text{m}^3$ e inferiore alla soglia di attenzione $125 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Per quanto riguarda l'algoritmo iterativo, si prende un parametro di rilassamento del metodo “discesa ripida” costante e pari a $\tau_{opt} = 800$ [12].

Nell'evoluzione della risoluzione del problema di controllo può succedere che, per garantire la convergenza della concentrazione di inquinante sulla città al valore desiderato, un cammino passi da *sorgente* di inquinante a *pozzo*. Quando questo avviene, il cammino corrispondente viene spento completamente, il che implica una perturbazione sull'evoluzione dell'algoritmo di ottimizzazione.

5.3.1 Caso a: errori per una scelta “casuale” dell'input

Per verificare che il problema risolto con il metodo a elementi finiti e quello risolto con il metodo a basi ridotte, pur evolvendo in maniera indipendente, convergano alla stessa soluzione, si calcola l'errore- L^2 ε_u sul controllo a convergenza e l'errore ε_J sul funzionale costo (3.8) a convergenza per un certo numero di input “casuali”:

$$\varepsilon_u = \int_Q (u_h^f - u_N^f)^2 d\Omega, \quad (5.21)$$

$$\varepsilon_J = |J^f(w_N, u_N) - J^f(w_h, u_h)|. \quad (5.22)$$

L'apice f indica che ci stiamo riferendo alla convergenza, cioè all'iterazione finale, e u_h^f e u_N^f sono dati da:

$$u_h^f = u_h^{f-1} - \tau_{opt} J'(u_h^{f-1}) = u_0 - \tau_{opt} \sum_{i=1}^{f-1} J'(u_h^i),$$

$$u_N^f = u_N^{f-1} - \tau_{opt} J'(u_N^{f-1}) = u_0 - \tau_{opt} \sum_{i=1}^{f-1} J'(u_N^i).$$

dove u_0 è il controllo iniziale, calcolato sui tassi di emissione dei camini passati come parametri in ingresso.

Si usano le virgolette per “casuali” perché, a partire da un certo numero di input generati dalla funzione `random` di Matlab, si eliminano tutti quelli che non hanno bisogno di controllo ottimale in quanto sono già condizioni di ottimo. Infatti, se i tassi di emissioni sono tali

che $\|J'(u_N^1)\|_{L^2(\Omega)} < tol$, il controllo ottimale perde di significato e si hanno $\varepsilon_u = 0$ e ε_J è dell'ordine di 10^{-17} .

Risolviendo i casi test, si nota che il problema di controllo a elementi finiti e quello a basi ridotte convergono in un numero di iterazioni che non sempre coincide, ma in generale differisce di una o due iterazioni.

Imponendo una tolleranza $tol = 10^{-7}$ per un certo numero di input "casuali", si riscontra che $\varepsilon_u \in [10^{-17}, 10^{-4}]$ e $\varepsilon_J \in [10^{-13}, 10^{-10}]$ per le condizioni di aria instabile e neutra. Nel caso di aria stabile non è necessario, in nessun caso, operare alcuna ottimizzazione sul problema, perché la concentrazione di inquinante sull'area di osservazione è al di sotto di $110 \mu g/m^3$. Questo significa che nel caso di aria stabile si può mantenere il massimo della produttività con una qualsiasi combinazione di u_1 , u_2 e u_3 . Gli errori sul funzionale costo si mantengono molto bassi, mentre gli errori di controllo in alcuni casi arrivano ad essere dell'ordine di grandezza di 10^{-4} . Per giustificare quest'ultimo valore basta notare che:

$$\varepsilon_u = \int_Q (u_h^f - u_N^f)^2 d\Omega = \int_Q \left(\tau_{opt} \sum_{i=1}^{f-1} \left(J'(u_N^i) - J'(u_h^i) \right) \right)^2 d\Omega,$$

e, ricordando che $J' = p$ (3.17), si riscrive:

$$\varepsilon_u = \int_Q \left(\tau_{opt} \sum_{i=1}^{f-1} \left(p_N^i - p_h^i \right) \right)^2 d\Omega.$$

Questo significa che l'errore- L^2 sul controllo a convergenza dipende dalla somma, estesa a tutte le iterazioni precedenti, degli errori sulla variabile aggiunta moltiplicata per $\tau_{opt} = 800$ e quindi tanto più grande sarà il numero di iterazioni per arrivare a convergenza, tanto maggiore sarà ε_u . Un errore $\varepsilon_u \sim 10^{-4}$ è comunque accettabile perché noi siamo interessati a conoscere le percentuali di funzionamento dei camini (date dall'integrale del controllo u sull'area di ciascun camino diviso l'area della bocca del camino) e si ritiene sufficiente una precisione fino alla seconda cifra decimale.

Confrontando il tempo necessario per risolvere il problema di controllo con il metodo a elementi finiti (su una griglia di circa 1700 nodi) e quello richiesto per la risoluzione con il metodo a basi ridotte, si riscontra un risparmio medio dei tempi computazionali del 65-70% circa. Questo è già un buon risultato perché nel tempo in cui il metodo a elementi finiti risolve una iterazione (problema di stato + problema aggiunto), il metodo a basi ridotte ne risolve tre. Se per i problemi di stato e aggiunto si adottasse un metodo di stabilizzazione, o

una sorta di “stabilizzazione inesatta”, tale da permettere di calcolare off-line la matrice di stabilizzazione, si avrebbe un risparmio di tempo fino al 90%.

5.3.2 Caso a: esempi di soluzione

Si parte da una configurazione, in condizione di aria neutra, con il primo camino funzionante al 45% di u_{tot} e il secondo spento, cioè $\mu = \{1215, 0\}$ [g/s]. Le Fig.5.3 e Fig.5.4 mostrano la soluzione iniziale a elementi finiti e a basi ridotte, rispettivamente, del problema di stato e del problema aggiunto al suolo. In Fig.5.5 riportiamo le soluzioni a convergenza calcolate con i due metodi: la condizione di ottimo prevede che il primo camino abbia un tasso di emissione ridotto al 3.49%, il secondo resti spento e il terzo funzioni al 55.02%.

Per questa particolare scelta di μ i problemi di controllo risolti con i due metodi convergono entrambi dopo 21 iterazioni, con la differenza che il problema a basi ridotte impiega 1.4 s a convergere, mentre quello a elementi finiti ne impiega 5.2 s. Il fatto che i problemi risolti con i due metodi convergano dopo uno stesso numero di iterazioni è un caso fortuito, ma consente di confrontare i valori della derivata del funzionale costo ($J'(u_N)$ e $J'(u_h)$ in Fig.5.6), del funzionale costo ($J(w_N, u_N)$ e $J(w_h, u_h)$ in Fig.5.7) ad ogni iterazione e di apprezzare l'andamento dell'errore- L^2 sul controllo (Fig.5.8). Mentre il funzionale costo J decresce in modo monotono, sull'andamento di J' a priori non si può dire nulla; in ogni caso si nota che c'è perfetta sovrapposizione tra $J'(u_N)$ e $J'(u_h)$ ad ogni iterazione. Lo stesso vale per $J(w_N, u_N)$ e $J(w_h, u_h)$.

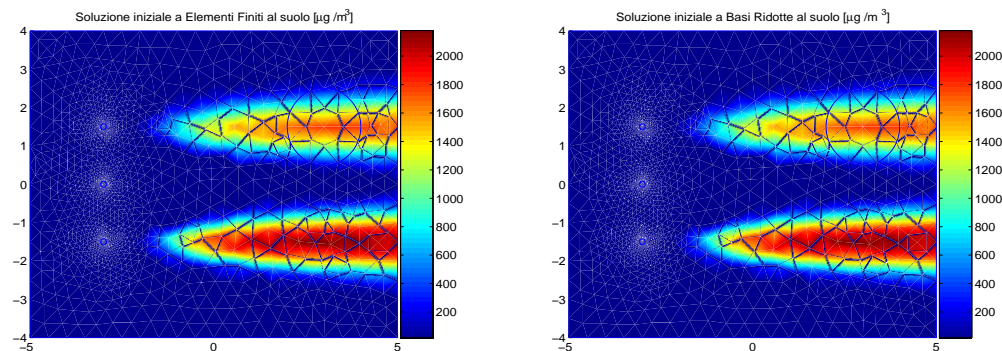


Figura 5.3: Caso a (emissioni variabili): soluzione a elementi finiti (a destra) e a basi ridotte (a sinistra) del problema di stato alla prima iterazione. La concentrazione è in $[\mu\text{g}/\text{m}^3]$.

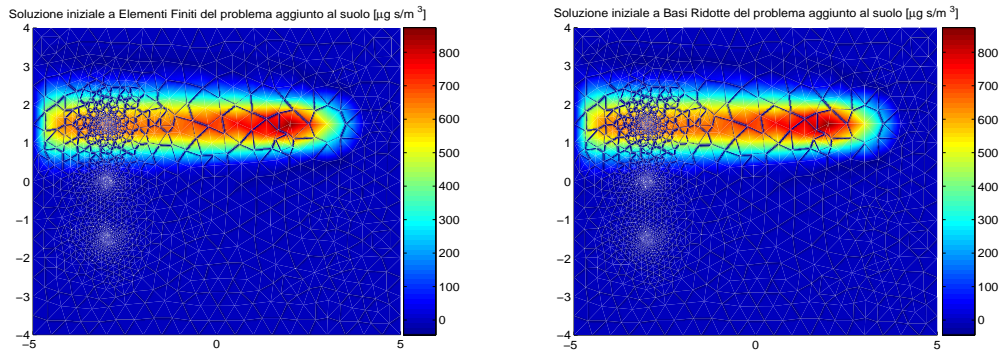


Figura 5.4: Caso a (emissioni variabili): soluzione a elementi finiti (a destra) e a basi ridotte (a sinistra) del problema aggiunto alla prima iterazione. La soluzione è in $[\mu\text{g s}/\text{m}^3]$.

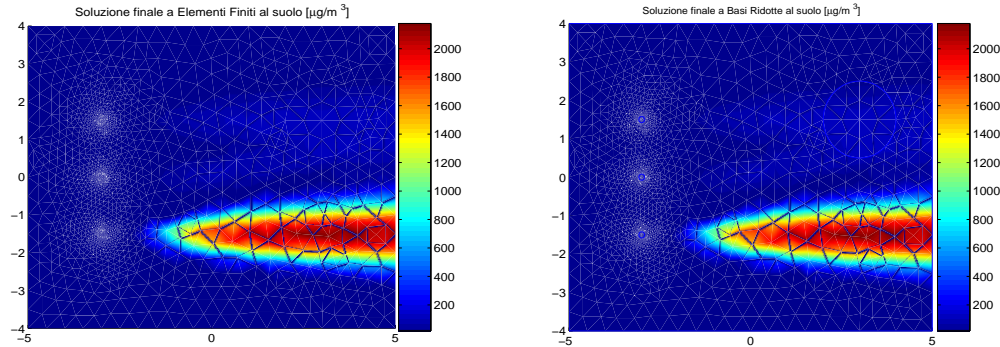


Figura 5.5: Caso a (emissioni variabili): soluzione a elementi finiti (a destra) e a basi ridotte (a sinistra) del problema di stato a convergenza. La concentrazione è in $[\mu\text{g}/\text{m}^3]$.

5.3.3 Caso b: errori per una scelta “casuale” dell’input

Si ripete per il caso b quanto già visto per il caso a: in assenza di una rigorosa stima dell’errore, si valutano gli errori sul funzionale costo e sul controllo a convergenza per un certo numero di input “casuali”. Anche in questo secondo caso non vengono tenuti in considerazione tutti quei parametri in ingresso che rappresentano già una condizione di ottimo.

Imponendo sempre una tolleranza $tol = 10^{-7}$ per un certo numero di input “casuali”, si osserva che $\varepsilon_u \in [10^{-14}, 10^{-5}]$ e $\varepsilon_J \in [10^{-11}, 10^{-8}]$ per le condizioni di aria instabile e neutra. Anche in questo caso, per la condizione di aria stabile, non è necessario alcun tipo di ottimizzazione e l’impianto industriale può operare con un qualsiasi tasso di emissione per i tre camini.

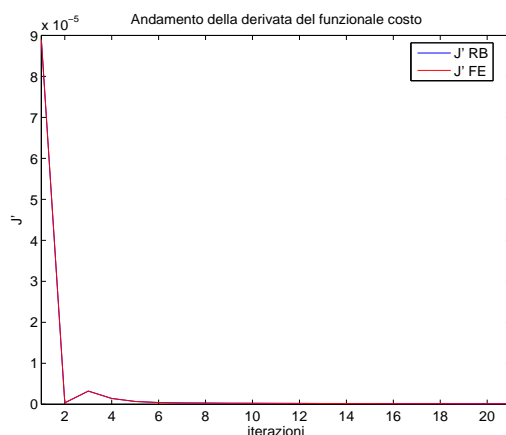


Figura 5.6: Caso a (emissioni variabili): andamento della derivata del funzionale costo $J'(u_N)$ e $J'(u_h)$.

L'ampio intervallo in cui ε_u si spiega con la stessa considerazione fatta nella Sez.5.3.1: poiché ε_u dipende dalla somma, estesa a tutte le iterazioni precedenti la convergenza, degli errori sulla variabile aggiunta, se il problema converge dopo molte (più di 40) iterazioni l'errore è 10^{-5} mentre se arriva subito a convergenza (2 iterazioni) è dell'ordine di 10^{-14} .

Si riscontra un risparmio medio di tempo di calcolo per la risoluzione completa di un problema di controllo ottimale con il metodo a basi ridotte, rispetto a quella con gli elementi finiti, attorno al 55-65%.

5.3.4 Caso b: esempi di soluzione

Si riportano, a titolo di esempio, alcuni grafici associati alla soluzione del problema di controllo, in aria instabile, avente il primo cammino che funziona al 30% di u_{tot} , il secondo al 40% e la direzione del vento inclinata di 45° rispetto all'asse delle x (Fig.3.2). In Fig.5.9 riportiamo la soluzione iniziale a elementi finiti e a basi ridotte del problema di stato al suolo. La Fig.5.10 mostra la soluzione ottimale, che prevede che il primo cammino abbia un tasso di emissione del 30.02%, del 38.81% per il secondo e del 7.27% per il terzo.

Anche in questo secondo caso si è voluto scegliere un particolare set di parametri in ingresso in modo che i problemi risolti con il metodo a elementi finiti e con il metodo a basi ridotte convergano dopo uno stesso numero di iterazioni. Questo consente di confrontare ad ogni iterazione i valori del funzionale costo ($J(w_N, u_N)$ e $J(w_h, u_h)$ in Fig.5.12), della

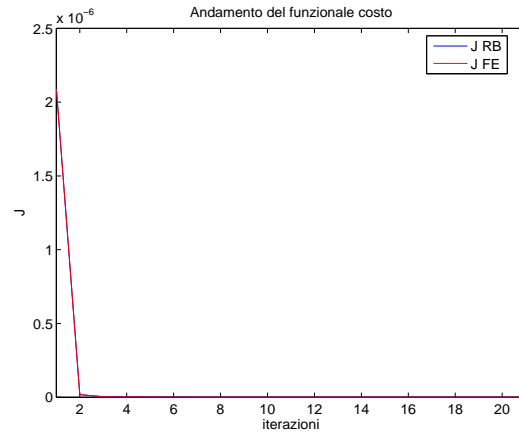


Figura 5.7: Caso a (emissioni variabili): andamento del funzionale costo $J(w_N, u_N)$ e $J(w_h, u_h)$.

derivata del funzionale costo ($J'(u_N)$ e $J'(u_h)$ in Fig.5.11) e di valutare l'errore- L^2 sul controllo (Fig.5.13). Si nota che $J'(u_h) > J'(u_N)$ per tutte le iterazioni, esclusa la prima e l'ultima in cui i valori calcolati con i due metodi coincidono. Per quanto riguarda invece l'andamento del funzionale costo, fino alla quinta iterazione $J(w_N, u_N) < J(w_h, u_h)$, mentre dalla quinta a convergenza $J(w_N, u_N) > J(w_h, u_h)$ e il modulo della differenza dei due valori $|J(w_N, u_N) - J(w_h, u_h)|$ aumenta ad ogni iterazione fino a portarsi ad un valore costante. Inizialmente $J(w_N, u_N) < J(w_h, u_h)$ perché la soluzione a basi ridotte è sempre una sottostima della soluzione a elementi finiti (Sez.2.4.3). Dopo un certo numero di iterazioni si ha, invece, $J(w_N, u_N) > J(w_h, u_h)$ perché, se la soluzione a basi ridotte è una sottostima, il termine sorgente del problema aggiunto è inferiore se si impiega il metodo a basi ridotte e di conseguenza su tutto il dominio si avrà che $p_N(\mu) < p_h(\mu)$; poiché $J' = p$, se $J'(u_N) < J'(u_h)$ (come mostra anche Fig.5.11), significa che $J(w_N, u_N)$ decresce meno rapidamente e quindi $J(w_N, u_N)$ risulta maggiore.

Osservazione 5.1. Lo studio dei problemi di controllo con basi ridotte in fluidodinamica è stato anche fatto da K. Ito e S.S. Ravindran in tre lavori [26, 27, 28], ma senza considerare problemi parametrizzati e impiegando metodi diversi per quanto riguarda l'assemblaggio delle basi.

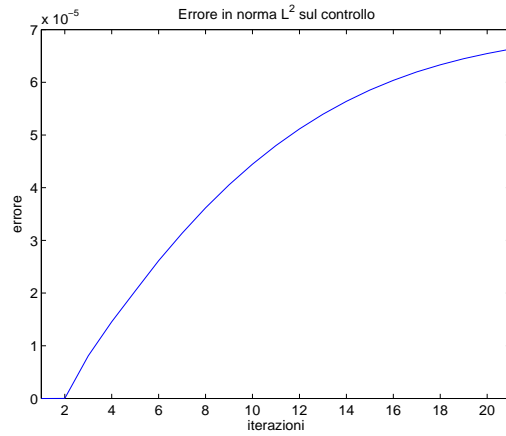


Figura 5.8: Caso a (emissioni variabili): andamento dell'errore- L^2 sul controllo ε_u .

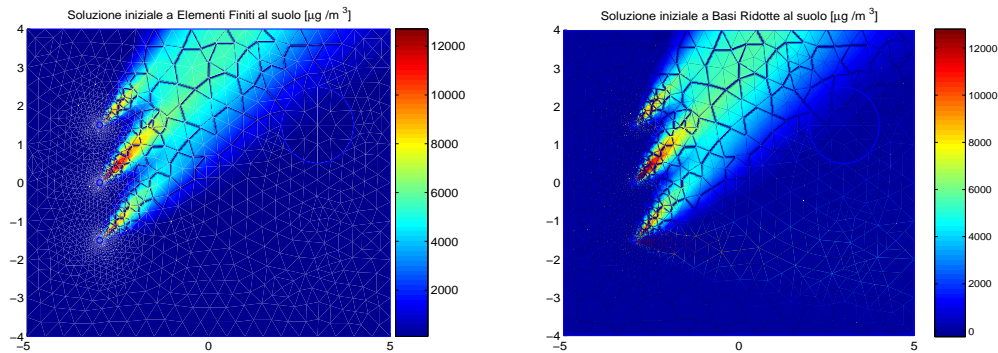


Figura 5.9: Caso b (emissioni e vento variabili): soluzione a elementi finiti (a destra) e a basi ridotte (a sinistra) del problema di stato alla prima iterazione. La concentrazione è in $[\mu\text{g}/\text{m}^3]$.

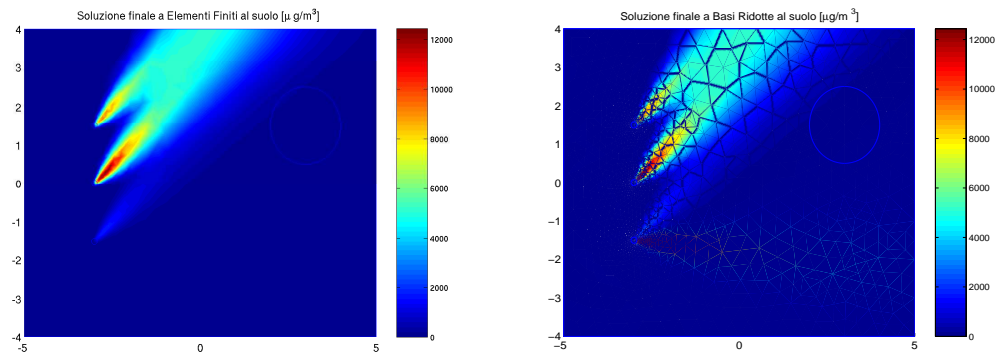


Figura 5.10: Caso b (emissioni e vento variabili): soluzione a elementi finiti (a destra) e a basi ridotte (a sinistra) del problema di stato a convergenza. La concentrazione è in $[\mu\text{g}/\text{m}^3]$.

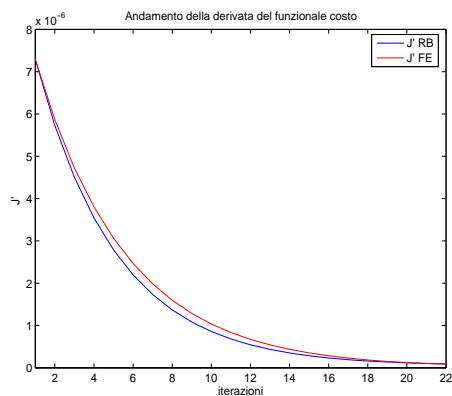


Figura 5.11: Caso b (emissioni e vento variabili): andamento della derivata del funzionale costo $J'(u_N)$ e $J'(u_h)$.

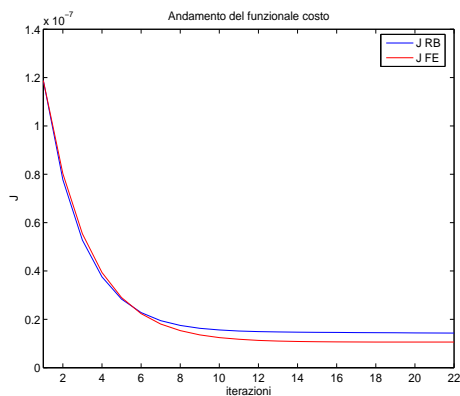


Figura 5.12: Caso b (emissioni e vento variabili): andamento del funzionale costo $J(w_N, u_N)$ e $J(w_h, u_h)$.

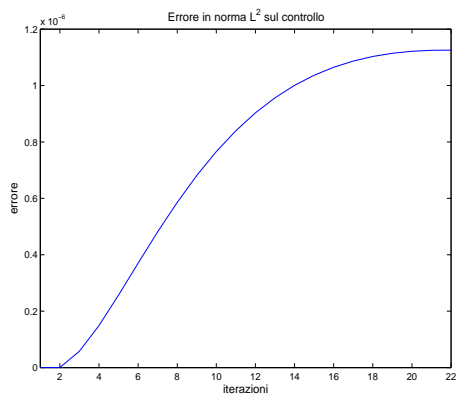


Figura 5.13: Caso b (emissioni e vento variabili): andamento dell'errore- L^2 sul controllo ε_u .

Capitolo 6

Basi Ridotte per Domini Parametrizzati e Sensitività Geometrica

In questo capitolo consideriamo un problema in un dominio parametrizzato, completando così il quadro dei parametri introdotti (fisici, di produzione e geometrici).

Verranno studiati due casi test diversi e si passerà alla combinazione dello studio geometrico parametrizzato con il problema di controllo.

6.1 Motivazione

Gli esempi riportati nel capitolo precedente mostrano che la soluzione ottimale comporta sempre una riduzione della produttività dell'impianto industriale. Si nota infatti che a convergenza il totale delle emissioni non è più pari a u_{tot} e, assumendo che i tassi di emissività siano proporzionali alla produttività, questo corrisponde ad una riduzione dell'attività dell'industria.

Per questo motivo introduciamo ora un'analisi della sensitività della soluzione del problema di stato alla variazione di alcune quantità geometriche di interesse. Studiamo cioè come varia la concentrazione di inquinante sulla città (*output*) al variare di determinati parametri geometrici (*inputs*). Si tratta sempre di valutare una relazione "input-output", ma, a differenza dei casi studiati nei Capitoli 3 e 5, le variabili in ingresso non sono più parametri fisici (l'intensità

delle sorgenti di inquinante, la direzione del vento, la viscosità) ma geometrici (la distanza della città dai camini, l'area delle città, le distanze tra i camini).

Quest'analisi applicata poi al problema di controllo ottimale fa sì che l'ottimo sia la soluzione che, contemporaneamente, minimizza l'inquinamento e massimizza la produttività.

Lo studio della sensitività geometrica è particolarmente interessante perché permette di risolvere alcune questioni di tipo pratico: supponendo, per esempio, di voler costruire un impianto industriale nei pressi di una città già esistente, suggerisce dove farlo sorgere o, se si vuole aggiungere una nuova ciminiera, dove è più opportuno posizionarla.

6.2 I Modelli Geometrici

Prendiamo in considerazione due modelli differenti: il primo offre la possibilità di allontanare la città e di modificarne l'area, mentre il secondo consente di variare la posizione dei camini.

6.2.1 Modello 1

Si divide il dominio fisico $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ in quattro sottodomini $\hat{\Omega}^i$, con $i = 1, \dots, 4$ (Fig.6.1), considerando i seguenti parametri:

- la distanza L tra i camini e la città;
- la lunghezza H_2 , da cui dipende l'area della città;
- la lunghezza H_1 .

Si impone il vincolo $H_1 + H_2 = H$ (nei nostri calcoli prenderemo $H = 8 \text{ Km}$).

Il metodo a basi ridotte, che per costruire le basi necessita di soluzioni sullo stesso dominio, si basa sulla trasformazione affine che permette di passare da un dominio di riferimento (Ω , per cui $L = 2 \text{ Km}$, $H_1 = 4 \text{ Km}$, $H_2 = 4 \text{ Km}$) a quello reale ($\hat{\Omega}$).

6.2.2 Modello 2

Dividiamo il dominio in sette sottodomini $\hat{\Omega}^i$, con $i = 1, \dots, 7$, e prendiamo in considerazione i parametri C_1 , C_2 , C_3 e C_4 (Fig.6.2), con i vincoli $C_1 + C_2 = 3 \text{ Km}$ e $C_3 + C_4 = 3 \text{ Km}$. Il cammino centrale è fisso e si fa variare la distanza C_2 del cammino inferiore e la distanza C_3 del cammino superiore. Il dominio di riferimento $\hat{\Omega}$ è quello per cui $C_1 = 2 \text{ Km}$, $C_2 = 1 \text{ Km}$,

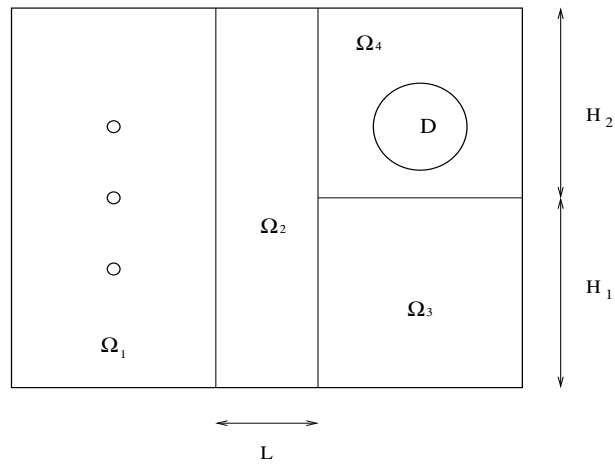


Figura 6.1: Schema del dominio computazionale reale: sottodomini e parametri per il modello 1.

$C_3 = 1 \text{ Km}$ e $C_4 = 2 \text{ Km}$.

In questo caso la città è fissa e non subisce trasformazioni.

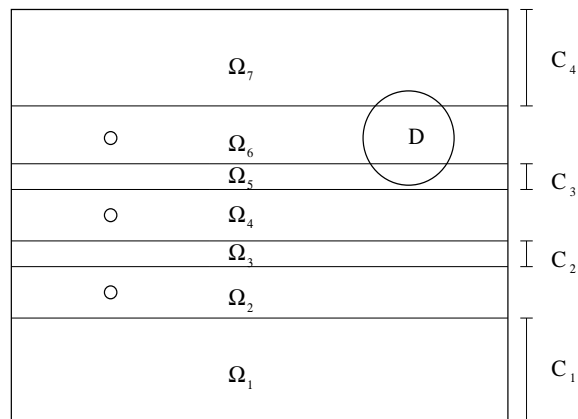


Figura 6.2: Schema del dominio computazionale reale: sottodomini e parametri per il modello 2.

6.3 Il Problema di Stato Parametrizzato

Il nostro scopo è parametrizzare il problema di stato (3.7) in sottodomini che dipendano dalle quantità geometriche di interesse. Per lo studio di problemi alle derivate parziali parametriz-

zati si veda [5, 9, 29]. Indichiamo con R il numero di sottodomini in cui è suddiviso il dominio reale: $\hat{\Omega} = \bigcup_{r=1}^R \hat{\Omega}^i$. Dalla formulazione debole del problema (3.9) definiamo le seguenti forme bilineari e lineari:

$$\hat{\mathcal{A}}(\hat{w}, \hat{v}) = \sum_{r=1}^R \int_{\hat{\Omega}^r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}_i} \hat{\nu}_{ij}^r \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_j} d\hat{\Omega}, \quad (6.1)$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\hat{w}, \hat{v}) = \sum_{r=1}^R \int_{\hat{\Omega}^r} V_i \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}_i} \hat{v} d\hat{\Omega}, \quad (6.2)$$

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{v}) = \sum_{r=1}^R \int_{\hat{\Omega}^r} \hat{u} \hat{v} d\hat{\Omega}.$$

dove $1 \leq i, j \leq d = 2$ e $\hat{\nu}_{i,j}^r = \hat{\nu}^r \delta_{i,j}$. Per semplicità si considera che il campo di viscosità non sia più dipendente dalla coordinata x , ma assuma un valore costante su ciascun sottodominio $\hat{\Omega}^i$, $i = 1, \dots, R$ (modello 1) o sia addirittura costante su tutto il dominio $\hat{\Omega}$ (modello 2). Il problema di stato in forma debole nel dominio reale si può scrivere come:

$$\text{cercare } \hat{w}(\mu) \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1 : \hat{\mathcal{A}}(\hat{w}, \hat{v}) + \hat{\mathcal{B}}(\hat{w}, \hat{v}) = \hat{\mathcal{F}}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1. \quad (6.3)$$

Siamo interessati a un'equazione alle derivate parziali dipendente dal set di parametri geometrici μ che costituiscono i coefficienti in ingresso. Si riporta quindi il problema (6.3) ad un *dominio di riferimento* tramite una trasformazione affine di ogni sottodominio $\hat{\Omega}^r$ nel corrispondente Ω^r . Per ogni $\hat{x} \in \hat{\Omega}^r$, $r = 1, \dots, R$, la sua immagine $x \in \Omega^r$ è data da:

$$x = \mathcal{G}^r(\mu; \hat{x}) = G^r(\mu) \hat{x} + g^r, \quad 1 \leq r \leq R.$$

Di conseguenza si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = G_{ji}^r(\mu) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq d = 2 \quad (6.4)$$

e nel dominio di riferimento Ω otteniamo:

$$\mathcal{A}(w, v; \mu) = \sum_{r=1}^R \int_{\Omega^r} \frac{\partial w}{\partial x_i} \left(G_{ii}^r(\mu) \hat{\nu}_{ij}^r G_{jj}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1,$$

$$\mathcal{B}(w, v; \mu) = \sum_{r=1}^R \int_{\Omega^r} V_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \left(G_{ii}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) v d\Omega, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1,$$

$$\mathcal{F}(v; \mu) = \sum_{r=1}^R \int_{\Omega^r} \left(\hat{u} |(G^r(\mu))^{-1}| \right) v d\Omega, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1.$$

I tensori di trasformazione per le forme bilineari sono dati da:

$$\nu_{ij}^r(\mu) = G_{ii'}^r(\mu) \hat{\nu}_{i'j'}^r G_{j'j}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}|, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad r = 1, \dots, R,$$

dove ν^r corrisponde alla definizione di viscosità nei sottodomini di riferimento, mentre per le forme lineari definiamo:

$$\chi_i^r(\mu) = G_{ii'}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}|, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad r = 1, \dots, R. \quad (6.5)$$

Inoltre introduciamo:

$$\begin{aligned} \sigma^{q(i,j,r)}(\mu) &= \nu_{ij}^r(\mu), \quad \mathcal{A}^{q(i,j,r)}(w, v) = \int_{\Omega^r} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega, \\ \Phi^{s(i,r)}(\mu) &= \chi_i^r(\mu), \quad \mathcal{B}^{s(i,r)}(w, v) = \int_{\Omega^r} V_i \frac{\partial w}{\partial x_i} v d\Omega, \end{aligned} \quad (6.6)$$

per $1 \leq i, j \leq 2, \quad r = 1, \dots, R$, con q e s che sono indici “condensati” per indicare una combinazione rispettivamente di i, j, r e i, r . Queste definizioni permettono di riscrivere le forme \mathcal{A} e \mathcal{B} come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\sigma(\mu), w, v) &= \sum_{q=1}^{Q^a} \sigma^q(\mu) \mathcal{A}^q(w, v), \\ \mathcal{B}(\Phi(\mu), w, v) &= \sum_{s=1}^{Q^b} \Phi^s(\mu) \mathcal{B}^s(w, v), \end{aligned} \quad (6.7)$$

con $\max(Q^a) = d \times d \times R$ e $\max(Q^b) = d \times R$. Si noti anche in questo caso il disaccoppiamento computazionale nei due stadi off-line/on-line.

Il problema di stato nel dominio di riferimento Ω è:

$$\text{cercare } w(\mu) \in H_{\Gamma_D}^1 \quad : \quad \mathcal{A}(w, v; \mu) + \mathcal{B}(w, v; \mu) = \mathcal{F}(v; \mu), \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1.$$

L'output di interesse è sempre la concentrazione di inquinante sopra la città:

$$s(\mu) = \frac{\int_{\hat{D}} \hat{w} d\hat{\Omega}}{\int_{\hat{D}} d\hat{\Omega}}.$$

6.3.1 Modello 1

Introduciamo il vettore dei parametri in ingresso $\mu = \{L, H_1, H_2\} \in \mathcal{D} \subset R^P$, dove \mathcal{D} è dato da $[L_{min}, L_{max}] \times [H_{1min}, H_{1max}] \times [H_{2min}, H_{2max}]$.

Per questo modello si adotta una viscosità costante su ciascun sottodominio reale. La viscosità viene inglobata nei quattro tensori di trasformazione nei sottodomini di riferimento che riportiamo di seguito:

$$\nu^1 = \hat{\nu}^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \nu^2 = \hat{\nu}^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} \end{bmatrix}; \nu^3 = \hat{\nu}^3 \begin{bmatrix} \frac{H_1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{H_1} \end{bmatrix}; \nu^4 = \hat{\nu}^4 \begin{bmatrix} \frac{H_2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{H_2} \end{bmatrix};$$

mentre χ^r , $r = 1, \dots, 4$, vale:

$$\chi^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \chi^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}; \chi^3 = \begin{bmatrix} \frac{H_1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}; \chi^4 = \begin{bmatrix} \frac{H_2}{4} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'output si calcola come:

$$s(\mu) = \frac{\int_{\hat{D}} \hat{w} d\hat{\Omega}}{\int_{\hat{D}} d\hat{\Omega}} = \frac{\int_D \hat{w} |(G^4(\mu))^{-1}| d\Omega}{\int_D |(G^4(\mu))^{-1}| d\Omega},$$

e poiché $|(G^4(\mu))^{-1}|$ è costante si ha:

$$s(\mu) = \frac{\int_D \hat{w} d\Omega}{\int_D d\Omega}.$$

6.3.2 Modello 2

Il vettore dei parametri in ingresso è $\mu = \{C_1, C_2, C_3, C_4\} \in \mathcal{D} \subset R^4$, dove \mathcal{D} è dato da $[C_{1min}, C_{1max}] \times [C_{2min}, C_{2max}] \times [C_{3min}, C_{3max}] \times [C_{4min}, C_{4max}]$.

La viscosità è sempre inglobata nei tensori di trasformazione nei sottodomini di riferimento:

$$\nu^1 = \nu \begin{bmatrix} \frac{C_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{C_1} \end{bmatrix}; \nu^2 = \nu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \nu^3 = \nu \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix};$$

$$\nu^4 = \nu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \nu^5 = \nu \begin{bmatrix} C_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}; \nu^6 = \nu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \nu^7 = \nu \begin{bmatrix} \frac{C_4}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{C_4} \end{bmatrix};$$

mentre χ^r , $r = 1, \dots, 7$, vale:

$$\chi^1 = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \chi^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \chi^3 = \begin{bmatrix} C_2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\chi^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \chi^5 = \begin{bmatrix} C_3 \\ 1 \end{bmatrix}; \chi^6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \chi^7 = \begin{bmatrix} \frac{C_4}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso si non si fanno variare l'area della città e la sua posizione, quindi:

$$s(\mu) = \frac{\int_D \hat{w} d\Omega}{\int_D d\Omega}.$$

6.4 Analisi di Sensitività

Sia $\hat{w}_N(\mu) \in \hat{W}_N$ (3.23) la soluzione a basi ridotte del problema di stato nel dominio reale $\hat{\Omega}$. Volendo studiare la sensitività geometrica della soluzione del solo problema di stato, per il problema discretizzato si adotta il metodo di stabilizzazione SUPG. La stabilizzazione introduce due forme ulteriori, una bilineare e una lineare:

$$\hat{S}(\hat{w}_N, \hat{v}) = \sum_{r=1}^R \sum_{\hat{K} \in \mathcal{T}_h^r} \delta_{\hat{K}} \frac{h_{\hat{K}}}{\|\mathbf{V}\|} \int_{\hat{K}} \left(V_i \frac{\partial \hat{w}_N}{\partial \hat{x}_i} \right) \left(V_j \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_j} \right) d\hat{K}, \quad (6.8)$$

$$\hat{G}(\hat{v}) = \sum_{r=1}^R \sum_{\hat{K} \in \mathcal{T}_h^r} \delta_{\hat{K}} \frac{h_{\hat{K}}}{\|\mathbf{V}\|} \int_{\hat{K}} \hat{u} \left(V_i \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_i} \right) d\hat{K}. \quad (6.9)$$

L'approssimazione a basi ridotte del problema di stato stabilizzato nel dominio reale $\hat{\Omega}$ è:

$$\text{cercare } \hat{w}_N(\mu) \in \hat{W}_N \quad : \quad \hat{\mathcal{A}}(\hat{w}_N, \hat{v}) + \hat{\mathcal{B}}(\hat{w}_N, \hat{v}) + \hat{S}(\hat{w}_N, \hat{v}) = \hat{\mathcal{F}}(\hat{v}) + \hat{\mathcal{G}}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \hat{W}_N.$$

Nel dominio di riferimento abbiamo:

$$\mathcal{S}(w_N, v; \mu) = \sum_{r=1}^R \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K V_i \frac{\partial w_N}{\partial x_i} \left(G_{ii'}^r(\mu) G_{jj'}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} V_j dK, \quad \forall v \in W_N,$$

$$\mathcal{G}(v; \mu) = \sum_{r=1}^R \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K \hat{u} V_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \left(G_{ii'}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) dK, \quad \forall v \in W_N,$$

per $1 \leq i, j \leq 2$, $r = 1, \dots, R$. Definiamo i tensori di trasformazione per la forma bilineare $\mathcal{S}(w_N, v; \mu)$:

$$\lambda_{ij}^r(\mu) = G_{ii'}^r(\mu) G_{jj'}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| = \frac{\nu_{ij}^r}{\hat{\nu}_{i'j'}^r}, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad r = 1, \dots, R,$$

mentre per la forma lineare $\mathcal{G}(v; \mu)$ la trasformazione è data dai $\chi_i^r(\mu)$.

Introduciamo allora:

$$\Upsilon^{q(i,j,r)}(\mu) = \lambda_{ij}^r(\mu), \quad \mathcal{S}^{q(i,j,r)}(w_N, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K V_i \frac{\partial w_N}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} V_j dK, \quad (6.10)$$

$$\mathcal{G}^{s(i,r)}(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \frac{h_K}{\|\mathbf{V}\|} \int_K \hat{u} V_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dK,$$

per $1 \leq i, j \leq 2$, $r = 1, \dots, R$. Le forme \mathcal{S} e \mathcal{G} si possono riscrivere come:

$$\mathcal{S}(\Upsilon(\mu), w_N, v) = \sum_{q=1}^{Q^a} \Upsilon^q(\mu) \mathcal{S}^q(w_N, v), \quad (6.11)$$

$$\mathcal{G}(\Phi(\mu), v) = \sum_{s=1}^{Q^b} \Phi^s(\mu) \mathcal{G}^s(v), \quad (6.12)$$

dove $\Phi^s(\mu)$ è definito in (6.6).

Queste definizioni consentono di introdurre l'approssimazione a basi ridotte del problema di stato stabilizzato nel dominio di riferimento Ω :

cercare $w_N(\mu) \in W_N$: $\mathcal{A}(w_N, v; \mu) + \mathcal{B}(w_N, v; \mu) + \mathcal{S}(w_N, v; \mu) = \mathcal{F}(v; \mu) + \mathcal{G}(v; \mu)$, $\forall v \in W_N$.

6.4.1 Modello 1: risultati

Essendo L , H_1 e H_2 gli unici parametri variabili, si fissano i tassi di emissione dei tre camini e la direzione del vento: $u_1 = 50\%$ di $u_{tot} = 2700$ g/s, $u_2 = 20\%$ e quindi $u_3 = 30\%$, con $\mathbf{V} = (2.5, 0)$ m/s. Come già specificato, si assume che la viscosità sia costante su ciascun sottodominio: $\hat{\nu}^1 = 50$ m²/s, $\hat{\nu}^2 = 160$ m²/s, $\hat{\nu}^3 = \hat{\nu}^4 = 220$ m²/s (si ricorda che sono i valori della viscosità turbolenta, non della viscosità molecolare). Questi valori rappresentano una media sui sottodomini della viscosità in condizioni di aria instabile. Ci si limita a considerare solo questo tipo di aria perché, come visto nel Cap.5, è la condizione più critica ed è quindi la più significativa per l'analisi di sensitività.

Per generare la base si parte da una distribuzione uniforme di punti $\mu = \{L, H_1, H_2\}$ in \mathcal{D} , dove \mathcal{D} è dato da $[2, 10] \times [1, 7] \times [1, 7]$ ($[Km \times Km \times Km]$). I parametri indipendenti, in realtà, sono due perché si impone il vincolo $H_1 + H_2 = 8$ Km. Seguendo la procedura descritta al paragrafo 2.6 si ricava la base ottimizzata: per una base costituita da 20 elementi si ha un errore medio in norma H^1 , per input casuale, dell'ordine di 10^{-5} , che si ritiene soddisfacente. Avendo provato su numerosi casi test che la soluzione a basi ridotte, con la base così generata, garantisce una "buona" approssimazione della soluzione a elementi finiti, si passa allo studio della sensitività della soluzione alle variazioni di L e H_1 (da cui dipende H_2). Il risultato dell'analisi è riportato in Fig.6.3. Per L fissato, cioè considerando una data distanza tra i camini industriali e la città, si osserva che la concentrazione di inquinante sulla città aumenta

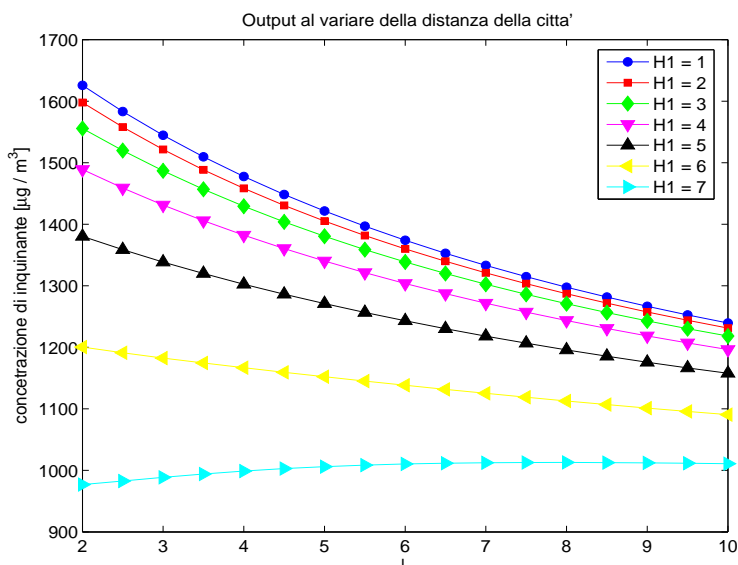


Figura 6.3: Variazione della concentrazione di inquinante (in $\mu\text{g}/\text{m}^3$) sulla città al variare della sua distanza (L) e della sua area (dipendente da $H_2 = 8 - H_1$).

all'aumentare delle dimensioni della città (proporzionali a H_2). Per quanto riguarda il comportamento al variare di L , ci si aspetta che la concentrazione di inquinamento diminuisca all'aumentare della distanza dai camini e questo si verifica in 6 casi su 7. Il settimo caso corrisponde ad avere una città molto piccola e confinata in alto a destra nel dominio: all'aumentare di L aumenta anche la superficie della città interna al cono di emissione del primo camino. Questo spiega il comportamento in controtendenza; infatti, per L piccolo, la città è parzialmente esterna a tale cono di fumo e ci entra progressivamente all'aumentare di L .

Volendo costruire un impianto industriale nei pressi di una città, si deve tenere presente che non sempre allontanare la città equivale a diminuire l'inquinamento su di essa ma occorre considerare la posizione relativa tra la città e il cono di fumo che fuoriesce dai camini.

6.4.2 Modello 2: risultati

Questo secondo caso è leggermente più complicato del precedente: aumenta il numero dei parametri in ingresso, $\mu = \{C_1, C_2, C_3, C_4\} \in \mathcal{D}$, e di conseguenza aumenta il numero di sottodomini. Lo spazio \mathcal{D} è dato da $[0.1, 2.9] \times [0.1, 2.9] \times [0.1, 2.9] \times [0.1, 2.9]$ ($[Km \times Km \times Km \times Km]$) e anche in questo caso i parametri indipendenti sono solo due perché si impongono due vincoli:

$C_1 + C_2 = 3 \text{ Km}$ e $C_3 + C_4 = 3 \text{ Km}$. Si fissano i tassi di emissione dei camini ($u_1 = 20\%$ di $u_{tot} = 2700 \text{ g/s}$, $u_2 = 5\%$ e quindi $u_3 = 75\%$) e si mantiene un campo di velocità del vento diretto come l'asse delle x (Fig.3.2), di intensità 2.5 m/s . La viscosità si assume costante su tutto il dominio e pari a $100 \text{ m}^2/\text{s}$.

Per costruire la base ottimizzata si parte sempre da una distribuzione uniforme di μ in \mathcal{D} e si selezionano gli elementi che faranno parte della base seguendo la procedura descritta nella Sez.2.6. Per una base di 35 elementi l'errore medio in norma H^1 , per input casuale, è dell'ordine di 10^{-5} , cioè per avere la stessa precisione del modello 1 è necessario aumentare il numero di funzioni di base a causa della maggiore complessità del problema.

Riportiamo in Fig.6.4 il risultato dell'analisi. Si osserva che fissando C_3 , cioè per una deter-

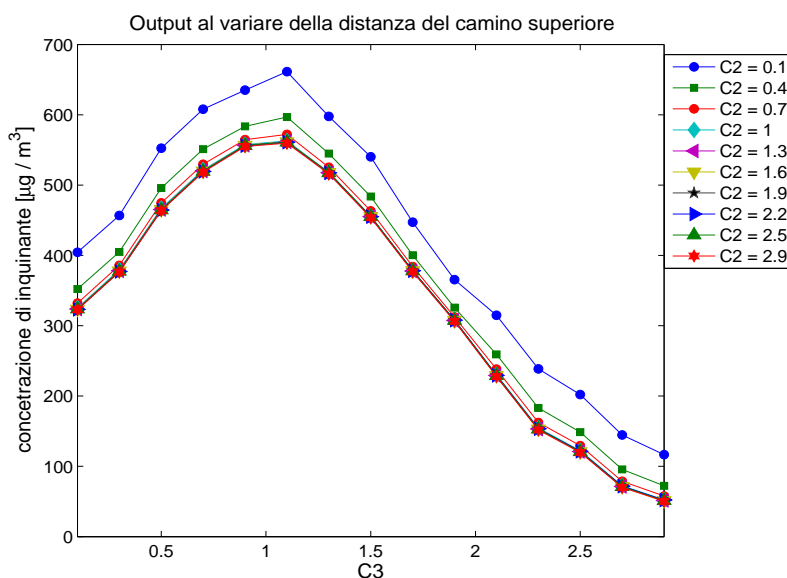


Figura 6.4: Variazione della concentrazione di inquinante (in $\mu\text{g}/\text{m}^3$) sulla città al variare della posizione del camino superiore (C_3) e inferiore (C_2).

minata posizione del camino superiore, la concentrazione di inquinante sulla città diminuisce per C_2 che va da 0.1 a 1.3, mentre per $1.3 \leq C_2 \leq 2.9$ non ci sono variazioni sostanziali. Questo dipende dal fatto che per $C_2 \geq 1.3$ la città è esterna al cono di emissione del terzo camino. Invece, se si mantiene costante la posizione C_2 del camino inferiore, si nota che la concentrazione di inquinante sulla città ha un rapido incremento fino a raggiungere un massimo intorno a $C_3 = 1$ e poi decresce fino a $C_3 = 2.9$. Questo comportamento è dovuto al

fatto che per $C_3 = 0.1$ la città è investita solo parzialmente dalla scia di inquinante, mentre per $C_3 = 1$ la città è completamente interna al cono di emissione dei fumi. Per $C_3 \geq 1$ la città esce progressivamente dal cono di emissione.

Ancora una volta si vede come sia importante considerare la posizione relativa tra la città e i coni di emissione dei tre camini: si vede infatti che spostare la terza ciminiera verso il basso, oltre $C_2 = 1.3$, non comporta vantaggi di nessun tipo mentre spostare il camino 1 da $C_3 = 1$ a $C_3 = 2.9$ consente di ridurre l'inquinamento dell'80% circa.

6.5 Analisi di Sensitività Applicata al Problema di Controllo

Si vuole sfruttare l'analisi di sensitività della soluzione del problema di stato all'interno del problema di controllo, con lo scopo massimizzare la produttività dell'impianto mentre si minimizza l'inquinamento sull'area di osservazione. Si prende in considerazione solo il modello 2, perchè siamo interessati a valutare il miglior posizionamento dei camini. Supponiamo cioè di dover scegliere dove costruire i tre camini (o, per esempio, dove costruirne un terzo quando due sono già esistenti), nota la distanza dalla città rispetto a cui dovranno sorgere e le dimensioni della città stessa.

Si passano come parametri in ingresso i tassi di emissioni che si vorrebbero assegnare ai camini, cioè si definisce il controllo iniziale u_0 , e si fornisce la tolleranza per il criterio di arresto del metodo iterativo adottato per la risoluzione del problema di controllo (Sez.4.3). Si risolvono i problemi di stato e aggiunto per il controllo u_0 . In generale la prima soluzione del problema aggiunto non sarà tale da soddisfare il criterio di arresto (3.18). A questo punto non si avvia subito il procedimento iterativo sulla funzione di controllo (punto 7 della schematizzazione nella Sez.4.3), ma si controlla se variando le posizioni del camino 1 e 3 si riesce a soddisfare il criterio d'arresto. Nel caso in cui si riuscisse a soddisfarlo semplicemente variando C_2 e C_3 , si riuscirebbe a produrre al 100% delle possibilità dell'impianto con i tassi di emissione desiderati. In caso contrario, si inizia il processo iterativo sulla variabile di controllo basato sul metodo di discesa ripida (4.16). Ad ogni passo iterativo in cui lo stato aggiunto non soddisfa il criterio di arresto, prima di passare al passo successivo, si vede se il criterio può essere soddisfatto variando i parametri geometrici. In questo modo si minimizza il numero di iterazioni e quindi si massimizza la produttività perché ad ogni passo iterativo il tasso di emissività dei camini diminuisce (essendo $u^{k+1} = u^k - \tau^k J'(u^k)$). Per chiarire questa

variante del metodo iterativo che si utilizza per la risoluzione del problema di controllo se ne rappresenta lo schema in figura 6.5.

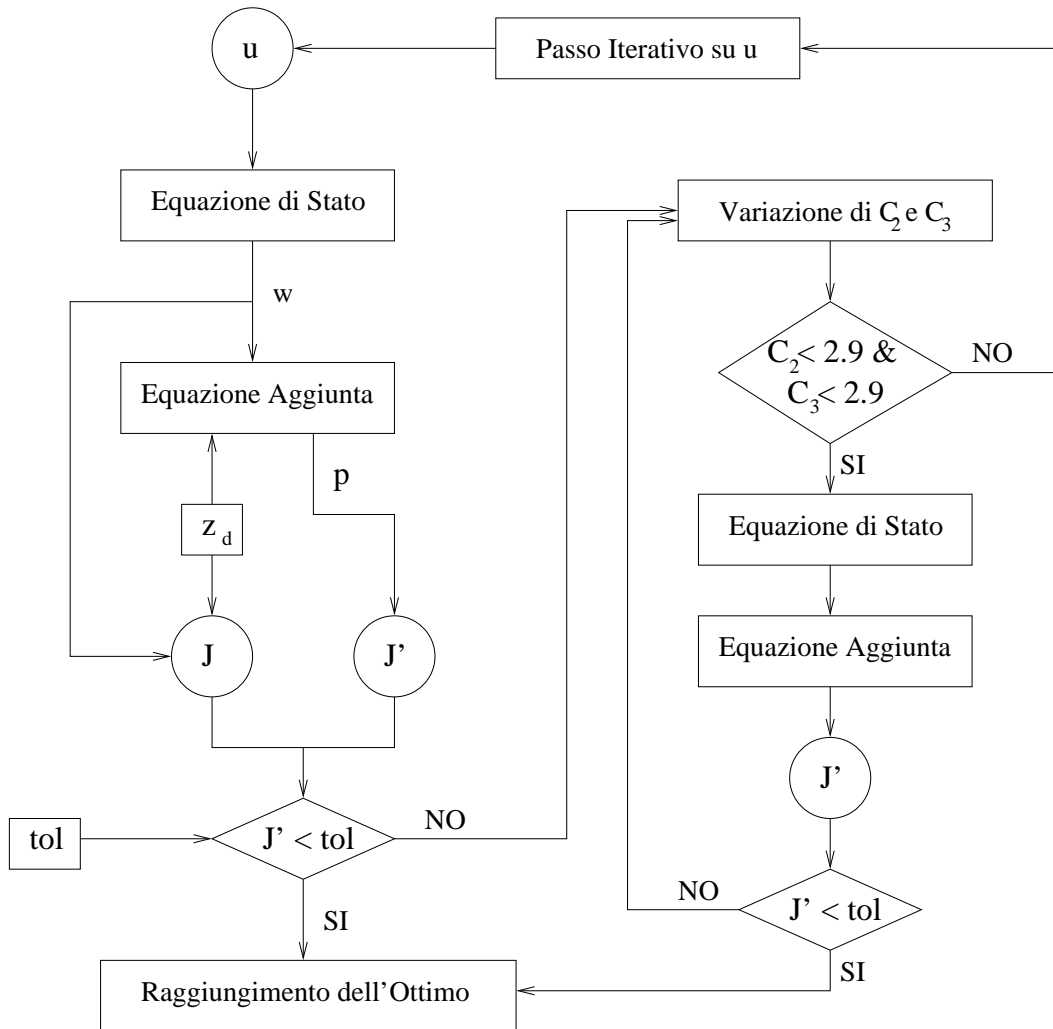


Figura 6.5: Schema del processo iterativo per la risoluzione del problema di controllo che tiene conto dell'analisi di sensitività geometrica.

6.5.1 Problema aggiunto parametrizzato

Sia \hat{A} la forma (6.1); dalla formulazione debole del problema aggiunto (3.12) definiamo le seguenti forme bilineare e lineare:

$$\hat{B}^{ad}(\hat{p}, \hat{v}) = \sum_{r=1}^R \int_{\hat{\Omega}^r} \hat{p} V_i \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i} d\hat{\Omega} = \hat{B}(\hat{v}, \hat{p}),$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{ad}(\hat{v}) = \sum_{r=1}^R \int_{\hat{\Omega}^r} \hat{\chi}_D \hat{g} (\hat{g}\hat{w} - \hat{z}_d) \hat{v} \, d\hat{\Omega},$$

per $1 \leq r \leq 7$, $1 \leq i, j \leq 2$, dove $\hat{\mathcal{B}}$ è definito da (6.2). Il problema aggiunto in forma debole nel dominio reale si può scrivere come:

$$\text{cercare } \hat{p}(\mu) \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1 \quad : \quad \hat{\mathcal{A}}(\hat{p}, \hat{v}) + \hat{\mathcal{B}}^{ad}(\hat{p}, \hat{v}) = \hat{\mathcal{F}}^{ad}(\hat{v}), \quad \forall \hat{v} \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1.$$

In base alla (6.4), nel dominio di riferimento otteniamo:

$$\mathcal{B}^{ad}(p, v; \mu) = \sum_{r=1}^R \int_{\Omega^r} V_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \left(G_{ii'}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) p \, d\Omega, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1,$$

$$\mathcal{F}^{ad}(v; \mu) = \sum_{r=1}^R \int_{\Omega^r} \left(\hat{\chi}_D \hat{g} (\hat{g}\hat{w} - \hat{z}_d) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) v \, d\Omega, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1.$$

Inoltre introduciamo:

$$\Phi^{s(i,r)}(\mu) = \chi_i^r(\mu), \quad \mathcal{B}_{ad}^{s(i,r)}(p, v) = \int_{\Omega^r} V_i \frac{\partial v}{\partial x_i} p \, d\Omega,$$

per $1 \leq i, j \leq 2$, $1 \leq r \leq 7$, dove $\chi_i^r(\mu)$ è definito in (6.5). Queste definizioni permettono di scrivere la forma \mathcal{B}^{ad} come segue:

$$\mathcal{B}^{ad}(\Phi(\mu), p, v) = \sum_{s=1}^{Q^b} \Phi^s(\mu) \mathcal{B}_{ad}^s(p, v).$$

Il problema aggiunto nel dominio di riferimento è:

$$\text{cercare } p(\mu) \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1 \quad : \quad \mathcal{A}(p, v) + \mathcal{B}^{ad}(p, v) = \mathcal{F}^{ad}(v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}^1,$$

dove \mathcal{A} è dato da (6.7).

Indichiamo con $\hat{p}_N(\mu) \in \hat{Z}_N$ l'approssimazione a basi ridotte dello stato aggiunto nel dominio reale $\hat{\Omega}$. Poiché il problema aggiunto si studia in funzione del problema di controllo ottimale, adottiamo la stabilizzazione che deriva dalla Lagrangiana stabilizzata. Le forme introdotte dalla stabilizzazione sono:

$$\hat{\mathcal{S}}^{ad}(\hat{p}_N, \hat{v}) = \sum_{r=1}^R \sum_{\hat{K} \in \mathcal{T}_h^r} \delta_{\hat{K}} \int_{\hat{K}} \left(V_i \frac{\partial \hat{p}_N}{\partial \hat{x}_i} \right) \left(V_j \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_j} \right) d\hat{K},$$

$$\hat{\mathcal{G}}^{ad}(\hat{v}) = - \sum_{r=1}^R \sum_{\hat{K} \in \mathcal{T}_h^r} \delta_{\hat{K}} \int_{\hat{K}} \hat{\chi}_D \hat{g} (\hat{g}\hat{w}_N - \hat{z}_d) \left(V_i \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_i} \right) d\hat{K},$$

$$\hat{\mathcal{H}}^{ad}(\hat{v}) = - \sum_{r=1}^R \sum_{\hat{K} \in \mathcal{T}_h^r} \delta_{\hat{K}} \int_{\hat{K}} \hat{\chi}_D \hat{g}^2 \left(V_i \frac{\partial \hat{w}_N}{\partial \hat{x}_i} + \hat{u} \right) \hat{v} \, d\hat{K},$$

sempre per $1 \leq i, j \leq 2, 1 \leq r \leq 7$.

L'approssimazione a basi ridotte del problema aggiunto nel dominio reale è:

cercare $\hat{p}_N(\mu) \in \hat{Z}_N$:

$$\hat{\mathcal{A}}(\hat{p}_N, \hat{v}) + \hat{\mathcal{B}}^{ad}(\hat{p}_N, \hat{v}) + \hat{\mathcal{S}}^{ad}(\hat{p}_N, \hat{v}) = \hat{\mathcal{F}}^{ad}(\hat{v}) + \hat{\mathcal{G}}^{ad}(\hat{v}) + \hat{\mathcal{H}}^{ad}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \hat{Z}_N.$$

Nel dominio di riferimento abbiamo:

$$\mathcal{S}^{ad}(p_N, v; \mu) = \sum_{r=1}^R \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \int_K V_i \frac{\partial p_N}{\partial x_i} \left(G_{ii'}^r(\mu) G_{jj'}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} V_j \, dK, \quad \forall v \in Z_N,$$

$$\mathcal{G}^{ad}(v; \mu) = - \sum_{r=1}^R \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \int_K \hat{\chi}_D \hat{g} \left(\hat{g} \hat{w}_N - \hat{z}_d \right) \left(V_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(G_{ii'}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) dK, \quad \forall v \in Z_N,$$

$$\mathcal{H}^{ad}(v; \mu) = - \sum_{r=1}^R \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \int_K \hat{\chi}_D \hat{g}^2 \left(V_i \frac{\partial \hat{w}_N}{\partial x_i} \right) \left(G_{ii'}^r(\mu) |(G^r(\mu))^{-1}| \right) v \, dK, \quad \forall v \in Z_N.$$

Introduciamo

$$\mathcal{S}_{ad}^{q(i,j,r)}(p_N, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \int_K V_i \frac{\partial p_N}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} V_j \, dK, \quad \forall v \in Z_N,$$

$$\mathcal{G}_{ad}^{s(i,r)}(v) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \int_K \hat{\chi}_D \hat{g} \left(\hat{g} \hat{w}_N - \hat{z}_d \right) \left(V_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dK,$$

$$\mathcal{H}_{ad}^{s(i,r)}(v) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h^r} \delta_K \int_K \hat{\chi}_D \hat{g}^2 \left(V_i \frac{\partial \hat{w}_N}{\partial x_i} \right) v \, dK.$$

Le forme \mathcal{S}^{ad} , \mathcal{G}^{ad} e \mathcal{H}^{ad} si possono allora scrivere come:

$$\mathcal{S}^{ad}(\Upsilon(\mu), p_N, v) = \sum_{q=1}^{Q^a} \Upsilon^q(\mu) \mathcal{S}_{ad}^q(p_N, v),$$

$$\mathcal{G}^{ad}(\Phi(\mu), v) = \sum_{s=1}^{Q^b} \Phi^s(\mu) \mathcal{G}_{ad}^s(v),$$

$$\mathcal{H}^{ad}(\Phi(\mu), v) = \sum_{s=1}^{Q^b} \Phi^s(\mu) \mathcal{H}_{ad}^s(v),$$

dove $\Upsilon^q(\mu)$ e $\Phi^s(\mu)$ sono definiti rispettivamente in (6.10) e (6.6).

Tutte queste definizioni consentono di introdurre l'approssimazione a basi ridotte del problema aggiunto stabilizzato nel dominio di riferimento Ω :

cercare $p_N(\mu) \in Z_N$:

$$\mathcal{A}(p_N, v) + \mathcal{B}^{ad}(p_N, v) + \mathcal{S}^{ad}(p_N, v) = \mathcal{F}^{ad}(v) + \mathcal{G}^{ad}(v) + \mathcal{H}^{ad}(v) \quad \forall v \in Z_N.$$

6.5.2 Risoluzione del problema di controllo

Per la soluzione del problema di stato all'interno del problema di controllo ottimale si adotta la stabilizzazione derivante dalla Lagrangiana stabilizzata, anziché impiegare il metodo SUPG (Sez.6.4). Poiché la viscosità è costante su tutto il dominio, i due metodi di stabilizzazione introducono forme, lineari e bilineari, coincidenti: $\hat{\mathcal{S}}(\hat{w}_N, \hat{v})$ (6.8), $\hat{\mathcal{G}}(\hat{v})$ (6.9), $\mathcal{S}(w_N, v)$ (6.11) e $\mathcal{G}(v)$ (6.12) restano invariate.

I parametri in ingresso per questo problema sono sei: le emissioni dei primi due camini e i quattro parametri geometrici del modello 2, cioè $\mu = \{u_1, u_2, C_1, C_2, C_3, C_4\}$. Si impongono i vincoli consueti: $u_1 + u_2 \leq 2700$ g/s, $C_1 + C_2 = 3$ Km e $C_3 + C_4 = 3$ Km, quindi dei sei parametri in ingresso solo quattro sono indipendenti. Il set di parametri μ appartiene allo spazio $\mathcal{D} = [0, 2700] \times [0, 2700] \times [0.1, 2.9] \times [0.1, 2.9] \times [0.1, 2.9] \times [0.1, 2.9]$.

Per generare la base seguiamo la stessa procedura usata in tutti i casi precedenti: si parte da una distribuzione uniforme di parametri nello spazio \mathcal{D} e si calcolano le soluzioni a elementi finiti del problema di stato e del problema aggiunto. Sempre grazie al procedimento riportato nella Sez.2.6 si ricavano le basi ottimizzate, indipendentemente per i due problemi. Si osserva che per $N = 80$, per entrambi i problemi, la soluzione a basi ridotte è una “buona” approssimazione della soluzione a elementi finiti, cioè si ha un errore medio in norma- H^1 , per input casuale, dell'ordine di 10^{-5} .

Per verificare che il problema di controllo risolto con il metodo a elementi finiti e quello risolto con il metodo a basi ridotte, pur evolvendo in maniera indipendente, convergono alla stessa soluzione, si calcola l'errore- L^2 sul controllo, a convergenza, ε_u (5.21) e l'errore sul funzionale costo, a convergenza, ε_J (5.22) per un certo numero di input casuali. Imponendo $tol = 10^{-7}$, si riscontra un valore medio di ε_u dell'ordine di grandezza di 10^{-5} e di ε_J dell'ordine di 10^{-10} . Per quanto riguarda l'errore sul controllo a convergenza vale quanto già osservato

nella Sez.5.3.1: tanto maggiore è il numero di iterazioni per arrivare a convergenza, tanto più grande sarà ε_u (a causa della propagazione dell'errore ad ogni passo del metodo).

Per ciascuno degli input casuali si risolve anche il problema di controllo senza sensitività geometrica, cioè quello che itera semplicemente sulla funzione di controllo senza considerare possibili variazioni della geometria: l'analisi di sensitività consente un guadagno medio della produttività del 15% sul totale.

6.5.3 Esempio di soluzione

Partiamo da una configurazione iniziale con il primo camino funzionante al 30% di $u_{tot} = 2700$ g/s e il secondo operativo al 40%, in condizioni di aria instabile. Il metodo iterativo adottato per la soluzione del problema di controllo converge, per $tol = 10^{-7}$, dopo quattro iterazioni (si contano le iterazioni sul controllo u) alla soluzione ottimale: il primo camino spento, il secondo attivo al 18.3% di u_{tot} e il terzo al 29.83%, con $C_2 = 0.4$ Km e $C_3 = 2.9$ Km. La soluzione a convergenza prevede che il camino superiore sia spostato il più in alto possibile, mentre quello inferiore viene avvicinato al camino centrale. Se si risolvesse il problema di controllo senza sensitività geometrica la soluzione a convergenza prevederebbe $u_1 = 3.55\%$, $u_3 = 28.66\%$ e il camino centrale spento, cioè si avrebbe una riduzione del 15.92% sul totale u_{tot} . Il fatto che il camino superiore sia spostato verso l'alto significa che si ha un margine di aumento del suo tasso di emissione senza incrementare l'inquinamento sulla città. Il problema di controllo ottimo però non tiene conto della possibilità di aumentare i tassi di emissione, che, in genere, diminuiscono ad ogni iterazione.

La Fig.6.6 mostra il confronto tra la soluzione iniziale calcolata con il metodo a basi ridotte e quella calcolata con gli elementi finiti, mentre Fig.6.7 riporta lo stesso confronto per la soluzione a convergenza. Per mostrare l'effetto della variazione dei parametri geometrici riportiamo in Fig.6.8 e in Fig.6.9 la sensitività della derivata del funzionale costo e la sensitività del funzionale costo alla variazione di C_2 e C_3 , per $u = u_0$.

Come si nota da Fig.6.8, spostare i camini 1 e 3 non è sufficiente a soddisfare il criterio di arresto (3.18) alla prima iterazione, perché per nessuna configurazione geometrica si ha $\|J'(u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq 10^{-7}$. Questo si verifica per la maggioranza dei casi analizzati e significa che, in generale, non si riesce a produrre al 100% di u_{tot} con i soli cambiamenti di geometria previsti dal modello 2. In questo caso si ha $\varepsilon_J = 2 \cdot 10^{-10}$ e $\varepsilon_u = 4.4 \cdot 10^{-5}$.

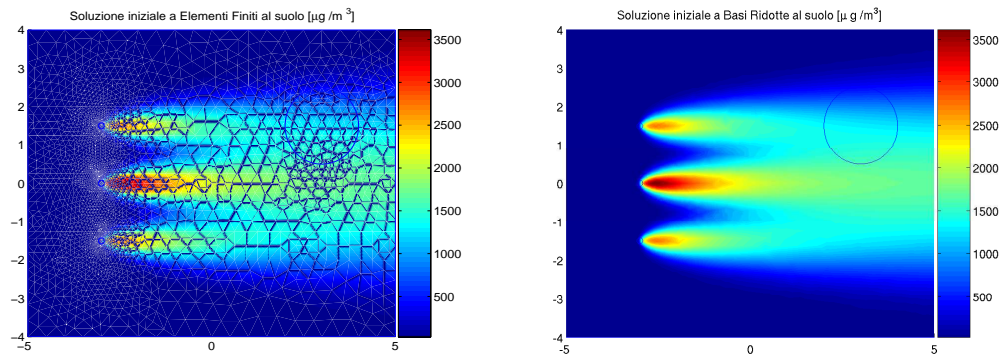


Figura 6.6: Soluzione a elementi finiti (a destra) e a basi ridotte (a sinistra) del problema di stato alla prima iterazione. La concentrazione è in $[\mu\text{g}/\text{m}^3]$.

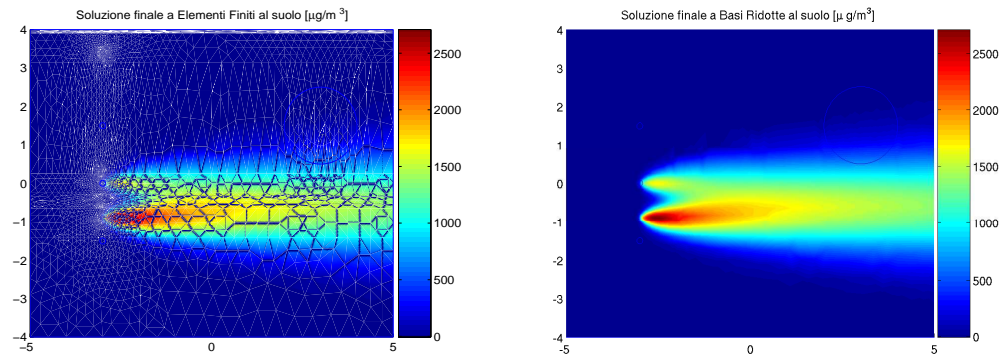


Figura 6.7: Soluzione a elementi finiti (a destra) e a basi ridotte (a sinistra) del problema di stato a convergenza. La concentrazione è in $[\mu\text{g}/\text{m}^3]$.

6.6 Sviluppi

Nel 2004 in [30] è stato proposto un metodo per trattare parametrizzazioni con mappe non affini, mediante un metodo di interpolazione empirica (chiamato “*magic points*”) che permette di mantenere il disaccoppiamento computazionale off-line/on-line e garantisce accuratezza e convergenza. In [31, 32] il metodo viene applicato a parametrizzazioni su domini curvi e nel nostro caso in esame si potrebbe usare per considerare la viscosità dipendente dai parametri geometrici e dalle coordinate.

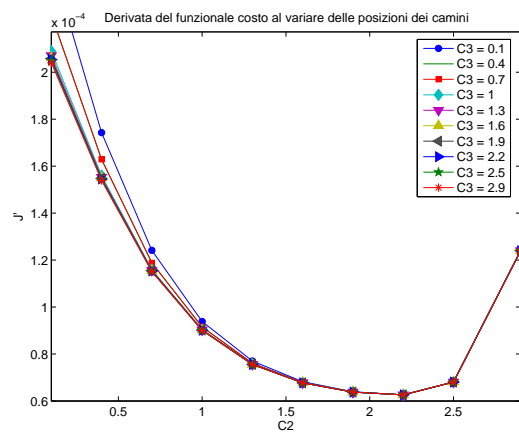


Figura 6.8: Andamento della derivata del funzionale costo, calcolata sul controllo iniziale, al variare dei parametri geometrici C_2 e C_3 .

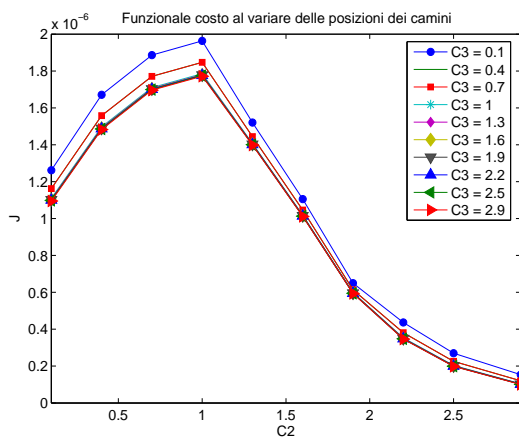


Figura 6.9: Andamento del funzionale costo, calcolato sul controllo iniziale, al variare dei parametri geometrici C_2 e C_3 .

Capitolo 7

Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono stati affrontati gli aspetti legati alla risoluzione numerica di problemi di controllo ottimale governati da equazioni differenziali alle derivate parziali, lineari di tipo ellittico, parametrizzate, definite su domini bidimensionali. Per calcolare la soluzione ottimale e contenere i costi computazionali si è posta l'attenzione sull'approssimazione numerica delle equazioni che governano il problema di controllo: anzichè adottare il metodo Galerkin-Elementi Finiti, che implicherebbe tempi di calcolo elevati, si è impiegato il metodo a basi ridotte.

Come applicazione principale di questa tesi è stato scelto un problema di controllo di fluidodinamica ambientale, relativo al controllo delle emissioni di sostanze inquinanti da parte di ciminiere, modellato con un equazioni di diffusione-trasporto su domini bidimensionali. Prima di risolvere con il metodo a basi ridotte il problema di controllo completo, si è voluto verificarne l'applicabilità al semplice problema di diffusione e trasporto dell'inquinante, analizzando quattro diverse parametrizzazioni. In un primo momento si sono presi in considerazione solo parametri di tipo fisico e questi quattro casi, di complessità differente, hanno permesso di mettere in evidenza le potenzialità del metodo a basi ridotte. Per arricchire il quadro dei casi in esame si è applicato tale metodo anche a un problema non stazionario di diffusione e trasporto di inquinante in un fluido generico, chiuso in una cavità rettangolare e mosso dalla convezione naturale. Dopo aver richiamato i concetti fondamentali della teoria del controllo ottimale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali, si è proposto un algoritmo iterativo per la risoluzione del problema di controllo degli inquinanti. Successivamente si è passati all'applicazione del metodo a basi ridotte per entrambe le equazioni (equazione

di stato ed equazione aggiunta) che governano il problema di controllo, mettendone in evidenza i vantaggi computazionali. Si sono considerati poi dei parametri di tipo geometrico, per mostrare la versatilità del metodo a basi ridotte ed elaborare un'analisi di sensitività geometrica. Infine, come ultima applicazione, si è risolto un problema di controllo ottimale con parametri in ingresso sia fisici che geometrici.

In conclusione possiamo evidenziare le seguenti considerazioni sugli aspetti originali sviluppati in questa tesi:

- È stata presentata una sintesi del metodo a basi ridotte, che rappresenta uno strumento molto potente per la valutazione rapida e ripetuta di una relazione di tipo “input-output”, qualora il problema presenti una dipendenza affine dai parametri in ingresso (inputs). Questo tipo di dipendenza consente di suddividere l'approccio computazionale in due stadi: uno (off-line), oneroso dal punto di vista computazionale, viene svolto una e una sola volta e l'altro (on-line), molto efficiente e rapido, è eseguito per ogni nuovo input. La decomposizione off-line/on-line consente considerevoli risparmi di tempo.
- Tutto ciò che presenta una dipendenza non-affine dal parametro non può essere calcolato off-line e, dovendo essere calcolato on-line, comporta una riduzione del risparmio dei tempi computazionali. Per quanto riguarda il problema di diffusione-trasporto di sostanze inquinanti in aria, questo si verifica per i termini dovuti alla stabilizzazione dell'equazione (metodo SUPG per il solo problema di stato e stabilizzazione derivante dalla Lagrangiana stabilizzata per il problema di controllo ottimale). Di conseguenza tutti i risparmi di tempo riportati nelle sezioni opportune sono soggetti a miglioramenti qualora si introducesse un metodo di stabilizzazione basato su termini di stabilizzazione calcolabili off-line.
- Una prima questione da affrontare nell'impiego del metodo a basi ridotte è stabilire il numero N delle funzioni di base, cioè la dimensione dello spazio in cui si cerca la soluzione. Tale numero per un dato problema parametrizzato dipende dalla complessità del problema stesso: fissato l'ordine di grandezza dell'errore medio per input casuale, maggiore è la complessità, maggiore è la dimensione della base. Il numero delle funzioni di base dipende anche dal tipo di parametro in ingresso e dal suo peso all'interno del

problema; per esempio, se il parametro è la velocità, il caso in cui si ha convezione dominante necessita di un numero di funzioni di base superiore al caso con diffusione dominante.

- Per la soluzione del problema non stazionario, una volta discretizzata la derivata temporale con il metodo Eulero implicito, l'istante temporale a cui si vuole calcolare la soluzione si considera come un parametro in ingresso. In questo caso quindi la tecnica risolutiva non differisce da quella adottata per i problemi stazionari, con la differenza che la soluzione ad un istante di tempo dipende dalla soluzione all'istante precedente. Ciò determina una propagazione dell'errore, tra soluzione a basi ridotte e soluzione a elementi finiti, ad ogni passo temporale e di conseguenza è importante fare in modo che resti "piccolo" l'errore delle soluzioni alla fine dell'intervallo temporale considerato. Per il problema non stazionario si è anche fatto un confronto tra l'errore sull'output "non-compliant" e l'errore sull'output "compliant", mostrando che nel caso "non-compliant", se non si assembla la base in maniera opportuna, l'approssimazione a basi ridotte dell'output è peggiore.
- Per quanto riguarda il problema di controllo si è trovato che per l'approssimazione dello stato aggiunto con il metodo a basi ridotte è meglio creare una base propria e indipendente da quella usata per la soluzione del problema di stato. È meglio cioè adottare una base "non coerente", intendendo per "coerente" la base formata dalle soluzioni del problema aggiunto dipendenti dalle funzioni di base del problema di stato. Per quanto riguarda il numero di funzioni di base necessarie per approssimare la variabile aggiunta con un errore al di sotto di una soglia prestabilita, valgono le stesse osservazioni fatte per la variabile di stato: N dipende dalla complessità del problema e dai parametri in ingresso.
- L'adozione del metodo a basi ridotte per la soluzione del problema di stato e del problema aggiunto ad ogni passo del metodo iterativo per la risoluzione del problema di controllo ottimo comporta notevoli vantaggi dal punto di vista dei tempi di calcolo. Nei due casi analizzati si è riscontrato un risparmio dei tempi computazionali fino al 70%. Questo significa che nello stesso tempo in cui con gli elementi finiti si risolve un'iterazione (problema di stato e problema aggiunto), con il metodo a basi ridotte se

ne risolvono tre. Il prezzo da pagare per questa riduzione dei tempi è un errore sul controllo e sul funzionale costo a convergenza. Quest'ultimo si mantiene sempre molto basso, mentre bisogna fare attenzione al fatto che l'errore sul controllo a convergenza dipende dalla somma, estesa a tutte le iterazioni precedenti, degli errori sulla variabile aggiunta moltiplicata per il parametro di rilassamento ottimale. Di conseguenza tanto più grande sarà il numero di iterazioni per arrivare a convergenza, tanto maggiore sarà l'errore sul controllo a convergenza. Si deve fare in modo che anche nel caso peggiore (molte iterazioni per arrivare a convergenza) tale errore sia comunque accettabile.

- Si è condotta un'analisi di sensitività della variabile di stato rispetto alla variazione di alcune quantità geometriche di interesse. In particolare si sono considerati due modelli: uno che permette di modificare la superficie della città e la distanza tra la città e i camini industriali e l'altro che fa variare le posizioni dei camini. È emerso che ciò che conta è la posizione relativa tra la città e i coni di emissione dei camini. Questo, per esempio, spiega perché non sempre allontanare la città equivale a diminuire l'inquinamento sopra di essa, come invece ci si potrebbe aspettare.
- L'applicazione finale di sintesi tra il metodo a basi ridotte e la teoria del controllo ottimale per sistemi di equazioni alle derivate parziali è una sorta di problema di controllo "doppio": i due obiettivi sono minimizzare l'inquinamento sopra la città e massimizzare la produttività dell'impianto industriale. Per risolvere questo tipo di problema si applica l'analisi di sensitività ad ogni passo del metodo iterativo per la risoluzione del problema di controllo. Si cerca cioè di mantenere l'inquinamento sull'area di osservazione sotto una soglia prefissata provando prima a variare le posizioni dei camini e poi, solo se questo non è possibile, si passa a ridurre i tassi di emissione.

Come già specificato, nel corso di questa tesi il metodo a basi ridotte è stato applicato solamente a problemi che presentano una dipendenza affine dai parametri in ingresso. Un sviluppo futuro del lavoro prevede la possibilità di studiare problemi con dipendenza non affine da parametri. Recentemente [30] è stato proposto un metodo per trattare questo tipo di dipendenza che si basa su un metodo di interpolazione empirica. Chiaramente aumenta la complessità del metodo di approssimazione della soluzione del problema ma si può affrontare una casistica più ampia di problemi. Si sono considerate solo equazioni scalari ma il metodo

a basi ridotte può essere applicato anche a equazioni vettoriali, come in [9], dove le variabili da approssimare sono la velocità (nelle sue due componenti, trattandosi di un problema bidimensionale) e la pressione. Questo lavoro, che si basa su equazioni di diffusione e trasporto, si inserisce in un filone di applicazione del metodo a basi ridotte che è partito dalle equazioni di Stokes [9, 31] per arrivare alle equazioni di Navier-Stokes [33, 34] con l'aggiunta del termine di trasporto non lineare. Tra quello che resta ancora da fare si ricorda, in particolar modo, la derivazione di una rigorosa stima a posteriori del problema parametrizzato.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto il Prof. Alfio Quarteroni per avermi dato la possibilità di sviluppare questo lavoro a Losanna e al MOX e per aver gentilmente trovato, tra i numerosissimi impegni, del tempo da dedicarmi.

Ringrazio l'Ing. Gianluigi Rozza per avermi avvicinato all'affascinante teoria dei metodi a basi ridotte e per avermi aiutato ogni volta che ne ho avuto bisogno: senza di lui questo lavoro non sarebbe mai stato realizzato.

Un ringraziamento al Prof. Anthony T. Patera per alcuni preziosi suggerimenti, al Dott. Martin Grepl e all'Ing. Luca Dedè per il materiale che mi hanno fornito.

Vorrei dire grazie a tutti i dottorandi e gli assistenti della cattedra di Modélisation et Calcul Scientifique dell'EPFL: tra cene high-performance, sessioni di pattinaggio e party vari hanno reso il mio soggiorno a Losanna memorabile, oltre che proficuo.

Grazie di cuore a tutti gli amici che ho conosciuto al Politecnico: a Roberto per la compagnia in tutti i viaggi in pullman, a Giulio e Tome per i sabato sera alternativi, a Ligeia per essere semplicemente se stessa e agli altri (troppi per farne i nomi) perché senza di loro sarebbe stato tutto molto più difficile.

Ringrazio le mie due amiche di sempre, Francesca e Ilaria, perché insieme siamo tre (dis)grazie.

Un ringraziamento anche a Sonia e Rajaa perché, se mi dovesse fallire la carriera di ingegnere, potrò sempre pensare di realizzare il mio sogno di bambina: diventare una danzatrice.

Il mio grazie più sentito va, infine, a tutta la mia famiglia, in particolare ai miei genitori, per avermi sopportato anche quando ero insopportabile, e a mia sorella Rossella, perché non c'è nessun amico come una sorella e nessuna sorella migliore della mia.

Bibliografia

- [1] A. Quarteroni, A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [2] T. B. Leurent. *Reduced Basis Output Bounds for Linear Elasticity: Application to Microtruss Structures*. Master Thesis, MIT, Massachusetts Institute of Technology, (Giugno 2001).
- [3] Y. Maday, A. T. Patera, G. Turinici. *A Priori Convergence Theory for Reduced-Basis Approximation of Single-Parameter Symmetric Coercive Elliptic Partial Differential Equations*. Journal of Scientific Computing, Vol.17, Nos.1-4, (Dicembre 2002).
- [4] Y. Maday, A. T. Patera, G. Turinici. *Global A Priori Convergence Theory for Reduced-Basis Approximation of Single-Parameter Elliptic Partial Differential Equations*. J. Sci. Comput., Vol. 17, No. 1-4, (2002).
- [5] K. Veroy. *Reduced-Basis Methods Applied to Problems in Elasticity*. PhD Thesis, MIT, Massachusetts Institute of Technology, (Giugno 2003).
- [6] G. Rozza. *Reduced Basis Methods for Elliptic Equations in sub-domains with A Posteriori Error Bounds and Adaptivity*. Applied Numerical Mathematics, in stampa 2005, (disponibile online Dicembre 2004).
- [7] C. Prud'homme, A.T. Patera. *Reduced-Basis Output Bounds for Approximately Parameterized Elliptic Coercive Partial Differential Equations*. Computing and Visualization in Science, (2003).

- [8] C. Prud'homme, D. V. Rovas, K. Veroy, L. Machiels, Y. Maday, A. T. Patera, G. Turinici. *Reliable Real-Time Solution of Parametrized Partial Differential Equations: Reduced-Basis Output Bound Methods*. J. Fluids Engineering 172, pp. 70–80, (2002).
- [9] A. T. Patera, G. Rozza, K. Veroy. *Reduced Basis Techniques for Stokes Equations in parametrized domains*. EPFL-IACS report 22.2004, preprint.
- [10] M. Gunzburger. *Perspectives in Flow Control and Optimization*. SIAM, Series Advances in Design and Control, (2003).
- [11] D. V. Rovas. *Reduced-Basis Output Bound Methods for Parametrized Partial Differential Equations*. PhD Thesis, MIT, Massachusetts Institute of Technology, (Febbraio 2003).
- [12] L. Dedè. *Controllo Ottimale e Adattività per Equazioni alle Derivate Parziali e Applicazioni*. Tesi di Laurea, Facoltà di Ingegneria Industriale, Politecnico di Milano, (2004).
- [13] G. Finzi, G. Pirovano, M. Volta. *Gestione della Qualità dell'Aria. Modelli di Simulazione e Previsione*. McGraw-Hill, Milano (2001).
- [14] L. Dedè, A. Quarteroni. *Optimal Control and Numerical Adaptivity for Advection-Diffusion Equations*. M2AN, in stampa, (2005).
- [15] A. Quarteroni. *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. Springer-Verlag, Milano, (2000).
- [16] B. Roux (ed.). *Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low-Pr Fluids*. Notes on Numerical Mechanics, v.27, Vieweg, Braunschweig, (1990).
- [17] M.K. Ermakov, V.L. Griaznov, S.A. Nikitin, D.S. Pavlovski, V.I. Polezhaev. *A PC-based System for Modelling of Convection in Enclosures on the Basis of Navier-Stokes Equations*. Int. J. Numer. Methods in Fluids, 15 (1992) No. 9, pp. 975–984.
- [18] M. Grepl. *Reduced-Basis Methods for Time-Dependent (parabolic) Systems*. PhD Thesis, MIT, Massachusetts Institute of Technology, (Febbraio 2005).

- [19] M.A. Grepl, N.C. Nguyen, K. Veroy, A.T. Patera, G.R. Liu. *Certified Rapid Solution of Parametrized Partial Differential Equations for Real-Time Applications*. Preprint, (2005).
- [20] J.L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, (1971).
- [21] J.L. Lions. *Sur quelques questions d'Analyse, de Mécanique et de Contrôle Optimal*. Les Presses Université de Montreal, (1976).
- [22] G. Rozza. *Controllo Ottimale e Ottimizzazione di Forma in Fluidodinamica Computazionale*. Tesi di Laurea, Facoltà di Ingegneria Industriale, Politecnico di Milano, (2002).
- [23] R. Becker, H. Kapp, R. Rannacher. *Adaptive Finite Elements Methods for Optimal Control of Partial Differential Equations: Basic Concepts*. SIAM J. Control Opt. 39(1), (2000).
- [24] H. Brezis. *Analisi Funzionale*. Liguori, Napoli, (1986).
- [25] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, New York, (2000).
- [26] K. Ito, S.S. Ravindran. *Reduced Basis Methods for Optimal Control of Unsteady Viscous Flows*. International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol.15, pp.97-113, (2001).
- [27] K. Ito, S.S. Ravindran. *A Reduced-Order Method for Simulation and Control of Fluid Flow*. Journal of Computational Physics, 143 (2), pp. 403-425, (Luglio 1998).
- [28] K. Ito, S.S. Ravindran. *A Reduced Basis Method for Control Problems Governed by PDEs*. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 126, Birkäuser Verlag, pp. 153-168, (1998).
- [29] G. Rozza. *Real Time Reduced Basis Techniques in Arterial Bypass Geometries*. Computational Fluid Dynamics and Solid Mechanics, K.J. Bathe Ed., Elsevier, (2005).

- [30] M. Barrault, Y. Maday, N.C. Nguyen, A.T.Patera. *An “Empirical Interpolation” Method: Application to Efficient Reduced-Basis Discretization of Partial Differential Equations.* C. R. Acad. Sci. Paris, Analyse Numerique, (2005).
- [31] G. Rozza. *Reduced Basis Methods for Stokes Equations in Domains with Non Affine Parameters Dependence.* EPFL-IACS report 06.2005, sottomesso a Comp. Vis. in Science.
- [32] G. Rozza. *Optimal Flow Control and Reduced Basis Techniques in Shape Design with Applications in Haemodynamics.* PhD Thesis, EPFL, (2005).
- [33] N.C. Nguyen, K. Veroy, A.T. Patera. *Certified Real-Time Solution of Parametrized Partial Differential Equations.* Handbook of Materials Modeling. R. Catlow, H. Shercliff and S. Yip Eds. Kluwer Academic Publishing, (2005).
- [34] K. Veroy, A.T. Patera. *Certified Real-Time Solution of the Parametrized Steady Incompressible Navier-Stokes Equations; Rigorous Reduced-Basis A Posteriori Error Bounds.* International Journal Numerical Methods for Fluids, **47**, 8-9, pp. 773–788, (2005).