CRIBLE ASYMPTOTIQUE ET

SOMMES DE KLOOSTERMAN

E. FOUVRY (Orsay) et P. MICHEL (Montpellier)

26/ 8/2002

I. Introduction

On doit à Bombieri d'avoir montré que si (a_n) est une suite de réels positifs, vérifiant diverses propriétés de régularité, dont la principale concerne la répartition de (a_n) dans les progressions arithmétiques et s'énonce ainsi :

Il existe une fonction multiplicative f, telle que la série de Dirichlet $G(s)$ définie par

$$G(s) = \Big(\sum_n \frac{1}{f(n)n^s}\Big)\zeta^{-1}(s+1), \tag{1.1}$$

est une série de Dirichlet normalement convergente sur un demi–plan fermé, contenant strictement le demi–plan $\Re s \geq 0$, et telle que, si on définit, pour tout $d \geq 1$, et tout $x \geq 1$

$$r(x;d) := \sum_{\substack{n\leq x\\ d\mid n}} a_n - \frac{1}{f(d)} \sum_{n\leq x} a_n,$$

le terme d'erreur $r(x;d)$ vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $B \geq 0$ et tout $x \geq 2$, la relation

$$\sum_{d\leq x^{1-\varepsilon}} \big|r(x;d)\big| = O_{\varepsilon,B}\Big(\big(\sum_{n\leq x} a_n\big)\cdot(\log x)^{-B}\Big), \tag{1.2}$$

alors, sous les conditions précédentes, on a, pour $k \geq 2$, l'équivalence asymptotique

$$\sum_{n\leq x} a_n\Lambda_k(n) \underset{X\to\infty}{\sim} k\cdot\Big(\prod_p \big(1-\frac{1}{f(p)}\big)\big(1-\frac{1}{p}\big)^{-1}\Big)\cdot\Big(\sum_{n\leq x} a_n\Big)\cdot(\log x)^{k-1}. \tag{1.3}$$

Dans la formule précédente, Λ_k est la fonction de von Mangoldt généralisée

$$\Lambda_k = (\log)^k * \mu,$$

(μ est ici la fonction de Möbius, $*$ est la convolution arithmétique). Rappelons que la fonction Λ_k a pour support l'ensemble des entiers n dont le nombre de diviseurs premiers distincts, noté $\omega(n)$, est compris entre 1 et k. Cet énoncé est un cas particulier de ([Bo1] Theorem 1) (voir aussi [Bo2]). La condition (1.1) indique que la fonction $d/f(d)$ vaut 1 en moyenne (c'est une hypothèse de *crible linéaire*) et la condition (1.2) que la suite (a_n) se répartit harmonieusement dans les progressions arithmétiques $\equiv 0$ (modulo d), en moyenne pour $d \leq x^{1-\varepsilon}$ (on dit alors que (a_n) a 1 pour *exposant de répartition*). L'hypothèse (1.2) est ainsi très exigeante. On sait qu'elle est vraie pour $a_n = 1$, $a_n = \mu^2(n-1)$, ou

$a_n = \sharp\{(p,p')\,;\, n = p+p',\ p,\ p'$ nombre premiers$\}$, par exemple. Il est plus délicat de démontrer qu'elle est vérifiée aussi dans le cas

$$a_n = \sharp\{(a,b)\ ;\ n = a^2+b^2,\ a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathcal{B}\},$$

pourvu que $\mathcal{B}$ soit une suite assez dense d'entiers ([Fo–Iw] lemma 4) et dans le cas $a_n = d(n-1)$, pourvu qu'on évite, dans la sommation l'intervalle $X^{\frac{2}{3}-\varepsilon} \le d \le X^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ (d est la fonction nombre de diviseurs) ([Fo] corollaire 5). On conjecture que la plupart des suites (a_n) raisonnables ont 1 pour exposant de répartition, en particulier pour $a_n = \Lambda(n-k)$, avec k entier fixé non nul et $\Lambda = \Lambda_1$, l'habituelle fonction de von Mangoldt : c'est un cas particulier de la conjecture d'Elliott–Halberstam. Nous proposerons plus bas une conjecture de ce type dans le cas des sommes de Kloosterman (conjecture $H(\vartheta)$).

Le résultat de Bombieri fournit donc une formule asymptotique, fait exceptionnel dans les méthodes de crible linéaire, qui ne donnent usuellement que des majorations ou des minorations d'où le nom de *crible asymptotique*. Une conséquence de formules comme (1.3) est de montrer et d'expliquer l'impossibilité, pour un crible linéaire général, de détecter les nombres premiers et ainsi de totalement faire la lumière sur le phénomène de parité découvert par Selberg. Le crible asymptotique a été étendu dans [Fr–I1] et [Fr–I2], en travaillant, par exemple, avec une hypothèse plus générale que (1.2) (pour des applications, voir par exemple [Fr] et [Fo–Ma]).

L'objet de cet article est d'adapter certaines des méthodes du crible asymptotique à la recherche des changements de signe des sommes de Kloosterman. Mais auparavant, nous travaillons, de façon plus générale, avec une suite de nombres complexes, de valeur moyenne nulle, ayant 1 pour exposant de répartition (voir condition (1.9) ci–dessous). Pour l'énoncé du théorème principal, nous utiliserons les notations suivantes :

• La lettre p est réservée aux nombres premiers,

• $\mathcal{C}_c^\infty([a,b])$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, infiniment dérivables, à support compact inclus dans $[a,b]$,

• La transformée de Mellin de la fonction g à support compact $\subset \mathbb{R}^+$, est

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty g(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t,$$

• Pour (a_n) suite de nombres complexes, g fonction à support compact, X et D réels supérieurs à 1, on note

$$\mathcal{R}\big((a_n), g, X, D\big) = \sum_{d\le D}\Big|\sum_{d\mid n} a_n g\big(\frac{n}{X}\big)\Big|, \tag{1.4}$$

• Pour $z \ge 2$, on dit que la suite de réels (λ_d) vérifie la condition $\mathrm{Sel}(z)$, si on a

$$\mathrm{Sel}(z)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \\ |\lambda_d| \le 2^{\omega(d)} & \text{pour tout } d,\\ \lambda_d = 0 & \text{si } d>z \text{ ou si } \mu^2(d) = 0.\end{cases}$$

Cette définition rappelle les propriétés des coefficients du crible de Selberg, mais, pour les coefficients (λ_d), avec lesquels nous travaillerons au §2.a, nous ne pouvons garantir l'habituelle inégalité $|\lambda_d| \le 1$, (voir, par exemple [Ha–Ri] p.100).

Notre résultat principal est le

Théorème 1.1. — *Il existe une constante absolue C_0, telle que, pour tout $z \geq 2$, il existe une suite (λ_d) vérifiant* $\mathrm{Sel}(z)$, *telle que pour toute suite complexe (a_n) vérifiant*

$$|a_n| \leq 2^{\omega(n)}, \tag{1.5}$$

tout entier $k \geq 1$, tout réel η $(0 < \eta < 1)$, tous réels X et $y \geq 2$ vérifiant

$$z^2 \leq yX^{-\eta},\ yz^2 \leq X^{1-\eta}, \tag{1.6}$$

toute fonction g positive, appartenant à $\mathcal{C}_c^\infty([1,2])$, on ait l'inégalité

$$\begin{aligned} \Big|\sum_n a_n \Lambda_k(n) g\big(\frac{n}{X}\big)\big(\sum_{d|n}\lambda_d\big)^2\Big| &\leq \hat{g}(1) C_0 X \cdot \frac{(\log X)(\log^{k+2}\big(2X/y)\big)}{\log^4 z} + O_{g,\eta}\big(X(\log^{k+6} X)(\log^{-8} z)\big) \\ &+ O_{k,g}\Big(X^{\frac12}(\log X)^{\frac{3k}{2}+290}\sum_{\ell=0}^{k}\mathcal{R}^{\frac12}(a_n, \log^\ell \cdot g, X, 2yz^2)\Big). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Au §3, nous en déduirons le

Corollaire 1.2. — *Il existe une constante absolue C_0 et pour tout $k \geq 1$, une constante $C_1(k)$, telles que, pour toute suite (a_n) vérifiant* (1.5), *tous réels η $(0 < \eta < 1)$, y, z et $X \geq 2$ vérifiant* (1.6), *toute fonction positive de $\mathcal{C}_c^\infty([1,2])$, on ait l'inégalité*

$$\begin{aligned} \Big|\sum_n a_n \Lambda_k(n) g\big(\frac{n}{X}\big)\Big| &\leq \hat{g}(1) C_0 X \cdot \frac{(\log X)(\log^{k+2}\big(2X/y)\big)}{\log^4 z} + \hat{g}(1) C_1(k) X (\log z)(\log X)^{k-2} \\ &+ O_{g,\eta}\big(X(\log^{k+6} X)(\log^{-8} z)\big) \\ &+ O_{k,g}\Big(X^{\frac12}(\log X)^{\frac{3k}{2}+290}\sum_{\ell=0}^{k}\mathcal{R}^{\frac12}(a_n, \log^\ell \cdot g, X, 2yz^2)\Big). \end{aligned} \tag{1.8}$$

En particulier, si pour tout $\varepsilon > 0$, tout $A > 0$, tout $g \in \mathcal{C}_c^\infty([1,2])$, on a

$$\mathcal{R}\big((a_n), g, X, X^{1-\varepsilon}\big) = O_{g,\varepsilon,A}\big(X(\log X)^{-A}\big), \tag{1.9}$$

on a, alors, pour $k \geq 3$ et pour $X \longrightarrow \infty$, la relation

$$\Big|\sum_n a_n \Lambda_k(n) g\big(\frac{n}{X}\big)\Big| = o_{g,k}\big(X(\log X)^{k-1}\big). \tag{1.10}$$

Cette formule montre des compensations entre les angles des $a_n\Lambda_k(n)$, puisqu'on a la majoration triviale

$$\Big|\sum_n a_n \Lambda_k(n) g\big(\frac{n}{X}\big)\Big| \leq 2^k \sum_n \Lambda_k(n) g\big(\frac{n}{X}\big) = O_k\big(\hat{g}(1) X (\log X)^{k-1}\big).$$

Rappelons la formule de Selberg, qui est à la base de la démonstration élémentaire d'Erdös–Selberg du théorème des nombres premiers

$$\sum_{p\leq X} \log^2 p + \sum\sum_{p_1p_2\leq X} (\log p_1)\cdot(\log p_2) \underset{X\to\infty}{\sim} 2X\log X,$$

et que Bombieri a généralisée en ([Bo1] p. 247)

$$\sum_{p\le X} a_p \log^2 p + \sum\sum_{p_1p_2\le X} a_{p_1p_2}(\log p_1)\cdot(\log p_2) \underset{X\to\infty}{\sim} 2\prod_p \frac{p}{p-1}\big(1-\frac{1}{f(p)}\big)\big(\sum_{n\le X} a_n\big)\cdot(\log X),$$

pour toute suite $a_n \ge 0$, vérifiant (1.1), (1.2) et d'autres hypothèses mineures. En calculant explicitement les valeurs de $\Lambda_3(p_1)$, $\Lambda_3(p_1p_2)$ et $\Lambda_3(p_1p_2p_3)$ pour des p_i distincts, et en majorant trivialement la contribution des $\Lambda_3(n)$ pour n divisibles par un carré, la formule (1.10) fournit un analogue de la formule de Selberg à savoir

(1.11)

$$\sum_{p_1} a_{p_1}(\log^3 p_1) g\big(\frac{p_1}{X}\big) + 3\sum\sum_{p_1>p_2} a_{p_1p_2}(\log p_1)\cdot(\log p_2)\cdot(\log p_1p_2) g\big(\frac{p_1p_2}{X}\big)$$
$$+ 6\sum\sum\sum_{p_1>p_2>p_3} a_{p_1p_2p_3}(\log p_1)\cdot(\log p_2)\cdot(\log p_3) g\big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\big) = o\big(\hat{g}(1)X\log^2 X\big),$$

valable pour toute suite (a_n) de nombres complexes vérifiant (1.5) et (1.9), lorsque $X\to\infty$.

Il est temps d'appliquer les résultats précédents aux sommes de Kloosterman. On pose, pour a, b et n entiers, avec $n\ge 1$,

$$\mathrm{Kl}(a,b;n) = \sum_{\substack{x \bmod n\\ (x,n)=1}} \exp\Big(2\pi i \frac{ax+b\overline{x}}{n}\Big),$$

($\overline{x}$ est l'inverse multiplicatif de x modulo n). Rappelons que les sommes de Kloosterman sont des nombres réels non nuls, qu'ils vérifient la multiplicativité croisée

$$\mathrm{Kl}(a,b;mn) = \mathrm{Kl}(a\overline{m}, b\overline{m}; n)\mathrm{Kl}(a\overline{n}, b\overline{n}; m) \text{ pour } (m,n)=1, \tag{1.12}$$

et la majoration

$$|\mathrm{Kl}(a,b;p^k)| \le 2(a,b,p^k)^{\frac12} p^{\frac{k}{2}}, \tag{1.13}$$

le cas le plus délicat ($k=1$), étant dû à Weil. Les sommes de Kloosterman sont un des outils les plus en vogue et les plus puissants de l'actuelle théorie analytique des nombres. Elles sont mystérieuses à de multiples points de vue. Nous nous contentons de rappeler notre totale ignorance de la répartition statistique de l'ensemble des rapports

$$\Big\{\frac{\mathrm{Kl}(1,1;p)}{2\sqrt{p}},\ p\le X\Big\}(X\longrightarrow\infty)$$

dans l'intervalle $[-1,1]$ (on pense que cette répartition est régie par la mesure $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, c'est la conjecture de Sato–Tate horizontale). On ignore même s'il existe une infinité de p tels que $\mathrm{Kl}(1,1;p)>0$ et une infinité de p tels que $\mathrm{Kl}(1,1;p)<0$. Dans la direction de cette conjecture, le seul pas significatif a été récemment franchi par les auteurs, qui ont montré l'existence d'une infinité de n, avec $\omega(n)\le 23$ tels que $\mathrm{Kl}(1,1;n)>0$ et d'une infinité de n, avec $\omega(n)\le 23$ tels que $\mathrm{Kl}(1,1;n)<0$ [Fo–Mi2]. Posons

$$a_n = \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}.$$

Par les relations (1.12) et (1.13), on sait que (1.5) est vraie. On peut alors appliquer les résultats précédents, pourvu qu'on contrôle le terme d'erreur $\mathcal{R}\big((a_n),g,X,D\big)$. Une telle quantité apparaît de façon naturelle comme formule des traces, en théorie des formes modulaires ([Ku], [De–Iw], par exemple). Pour tout ϑ $(0<\vartheta<1)$, nous désignons par $H(\vartheta)$ la conjecture

Conjecture $H(\vartheta)$. — *Pour toute $g\in\mathcal{C}_c^\infty([1,2])$, pour tout $\varepsilon>0$, tout $A\geq 0$, et tout $X\geq 2$, on a*

$$\sum_{d\leq X^{\vartheta-\varepsilon}}\Big|\sum_{d|n} g\big(\frac{n}{X}\big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| = O_{g,\varepsilon,A}\big(X\log^{-A}X\big).$$

On sait que $H(1/2)$ est vraie ([Fo–Mi2] Proposition 2.1) et nous pensons que $H(1)$ est vraie, en effet une analyse préliminaire semble indiquer qu'une telle conjecture résulterait d'une part de la non-existence de valeurs propres exceptionelles pour le groupe $\Gamma_0(q)$ et de certaines propriétés de bonne répartition des valeurs propres du Laplacien "proches" de 1/4, pour ce groupe quand $q\to+\infty$; cependant, avec la technologie existente, ce type de propriété semble actuellement hors d'atteinte (même en moyenne sur q), on pourra cependant se reporter à un travail récent de Z. Rudnick ([Ru], [Sa]) concernant l'étude de la répartition valeurs propres du Laplacien pour un niveau q fixé. Ainsi, sous l'hypothèse $H(1)$, la formule (1.10), devient l'élégante formule

$$\sum_n g\big(\frac{n}{X}\big)\Lambda_k(n)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} = o_{g,k}\big(X(\log X)^{k-1}\big),\ (k\geq 3)\ (X\longrightarrow\infty), \tag{1.14}$$

à laquelle nous aimerions donner le nom de *formule des traces sur les entiers presque premiers* par référence à la célèbre formule de Kuznietsov

$$\sum_n g\big(\frac{n}{X}\big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} = o_g(X),\ (X\longrightarrow\infty) \tag{1.15}$$

qui montre des compensations entre les signes des sommes de Kloosterman, sur des entiers consécutifs. En fait le second membre de (1.15) est beaucoup plus précis, il est en $O_g\big(X^{\frac12}\log X\big)$. Tout en supposant $H(1)$, il nous semble très difficile de prouver la véracité de (1.14), pour $k\geq 1$ ou même pour $k\geq 2$.

Les derniers résultats concernent les changements de signe des sommes de Kloosterman $\mathrm{Kl}(1,1;n)$, lorsque n a très peu de facteurs premiers. Dans [Fo–Mi2], nous avons montré par le crible étrange de dimension 2, de façon inconditionnelle (puisque $H(1/2)$ est démontrée) qu'il y a des changements de signe parmi les $\mathrm{Kl}(1,1;n)$, pour $\omega(n)\leq 23$, cf. supra. La méthode présentée dans [Fo–Mi2] est très sensible à la valeur de l'exposant de répartition, puisqu'on utilise les méthodes de crible. Pour illustrer ceci, signalons que si $H(1)$ est vraie, la méthode développée dans [Fo–Mi2], permet de remplacer la constante 23 par 11. Ici, nous travaillons avec le crible asymptotique qui surpasse que le crible étrange, à mesure que $H(\vartheta)$ est vrai pour ϑ très proche de 1.

Nous montrerons le

Corollaire 1.3. — *Pour tout $k\geq 3$, il existe $\vartheta_k<1$, telle que si $H(\vartheta_k)$ est vraie, alors chacun des ensembles*

$$\big\{\mathrm{Kl}(1,1;n)\,;1\leq\omega(n)\leq k,\ \mu^2(n)=1\big\}$$

et

$$\big\{\mathrm{Kl}(1,1;n)\,;2\leq\omega(n)\leq k+1,\ \mu^2(n)=1\big\}$$

contient une infinité de nombres positifs et une infinité de nombres négatifs.

Par contre, de façon inconditionnelle, c'est–à–dire en travaillant avec l'exposant de répartition 1/2, il ne semble pas que le crible asymptotique permette de passer en–dessous de 23, sans utililisation d'idées nouvelles par rapport à celles contenues dans cet article. Cette vérification a nécessité un très délicat calcul explicite de la constante C_0 du théorème 1.1. On verra au §2, que cette constante est le résidu d'une fonction méromorphe de plusieurs variables complexes en le pôle $s = w = w' = u = 0$, qui est un pôle d'ordre élevé. Ce calcul explicite n'a pu être mené qu'à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Cependant avec des raffinements supplémentaires il est problable les méthodes présentées permettront de passer en dessous de 23 ; voici deux raffinements possibles parmi d'autres : d'abord, si la majoration de $(\log d)^k$ par $(\log 2X/y)^k$ dans (2.9) permet de simplifier certains calculs, elle fait perdre une certaine quantité d'informations. D' autre part la majoration $|\mathrm{Kl}(1,1;n)| \leq 2^{\omega(n)}\sqrt{n}$ utilisée encore dans (2.9) nous amène à choisir comme coefficients λ_d ceux d'un crible de Selberg de dimension 4. Hors n se factorise sous la forme $n = mn'$ avec $m \leq z^2$; ainsi pour les diviseurs $1 \leq m \leq X^{1/2-\varepsilon}$, on peut plutôt utiliser la majoration $|\mathrm{Kl}(1,1;mn')| \leq 2^{\omega(n')}\sqrt{n'}|\mathrm{Kl}(\overline{n}', \overline{n}'; m)|$ et ainsi le grand crible et certaines versions des loi d'équirépartition de Sato-Tate verticales (pour le module m) devraient permettre de réduire partiellement la dimension des coefficients λ_d. De tels raffinements posent un certain nombre de problèmes techniques et calculatoires assez délicats (par exemple, le fait que dans la factorisation $n = mn'$, m et n' ne sont pas forcement premiers entre eux). Nous reviendrons sur ces questions dans un travail ultérieur.

Donnons quelques idées sur les démonstrations. La preuve du théorème 1.1 et du corollaire 1.2 est assez proche de [Bo1], tout en se démarquant nettement à divers points de vue. Ainsi, dans notre cas, il n'y a pas de terme principal, puisque (a_n) est de moyenne nulle, mais le terme d'erreur Σ_2 est très délicat à traiter. En effet, la majoration (1.5) s'interprète comme une hypothèse de dimension 2, que nous traitons résolument par l'analyse complexe. Cette hypothèse et la valeur explicite des coefficients λ_d de Selberg donnent naissance à une série de Dirichlet, qui est essentiellement une fraction rationnelle monôme en $\zeta^2(1+z_i)$, où les z_i sont des combinaisons linéaires en les quatre variables complexes s, w, w' et u. Le résidu à évaluer est ainsi compliqué à cause de l'ordre élevé du pôle. La technique suivie n'est pas sans rappeler ([K–M–V], §5).

Le changement de signes des sommes de Kloosterman, dont le dénominateur a peu de facteurs premiers (corollaire 1.3), est obtenu en comparant la majoration (1.14) (on suppose $H(1)$ vraie, pour simplifier l'exposé) et la minoration

$$\sum_n g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \gg_g \frac{X}{\log X}, \tag{1.16}$$

où la somme est faite sur les entiers n ayant exactement trois facteurs premiers, tous assez proches de $X^{\frac{1}{3}}$. La preuve de (1.16) est donnée dans ([Fo–Mi1], preuve du théorème 1.2), ou dans ([Fo–Mi2], proposition 5.2) : elle mélange le grand crible (dans une variante proche du théorème de Barban–Davenport–Halberstam), le théorème de Katz sur la répartition, dans l'intervalle $[-1,1]$, de l'ensemble

$$\Big\{\frac{\mathrm{Kl}(a,a;p)}{2\sqrt{p}};\ 1 \leq a < p\Big\}\ (p \longrightarrow \infty),$$

suivant la mesure $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (loi de Sato–Tate verticale), et un argument d'inclusion–exclusion. La relation (1.16), implique, pour $k \geq 3$

$$\sum_{n} g\big(\frac{n}{X}\big)\Lambda_k(n)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \gg_g X(\log X)^{k-1}. \tag{1.17}$$

la confrontation de (1.14) et (1.17) fournit le changement de signes annoncé.

2. Démonstration du Théorème 1

Nous emploierons les notations suivantes

• $[m,n]$ est le plus petit commun multiple des entiers m et n,

• $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{E}$,

• Pour α et β, vérifiant $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$, et n entier positif, on désigne par $\mathfrak{P}(n;\alpha,\beta)$ le produit des n bandes du plan complexe

$$\mathfrak{P}(n;\alpha,\beta) = \{(z_1,\ldots,z_n)\ ; z_i \in \mathbb{C},\ \alpha \leq \Re z_i \leq \beta, i = 1\cdots n\},$$

• Pour y réel ≥ 1, on définit la fonction $h_y(x)$ par les formules

$$h_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq y \\ \log(2y/x)/\log 2 & \text{si } y \leq x \leq 2y \\ 0 & \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

La fonction $h_y(x)$ est décroissante pour $x \geq 1$, majore la fonction caractéristique de l'intervalle $[1,y]$ et sa transformée de Mellin est

$$\hat{h}_y(u) = \frac{y^u(2^u-1)}{u^2\log 2}\ (\Re u > 0).$$

On pourra montrer cette formule en vérifiant la formule de la transformée de Mellin inverse

$$h_y(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re u=3}\Big(\frac{y}{x}\Big)^u \frac{2^u-1}{u^2\log 2}\,\mathrm{d}u, \tag{2.1}$$

qui s'apparente à la formule générale d'inversion de Mellin

$$g(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re s=\alpha} \hat{g}(s)x^{-s}\,\mathrm{d}s\ (\alpha > 0).$$

a. Construction des coefficients λ_d

Pour m et c entiers ≥ 1, s et u variables complexes, on définit les fonctions arithmétiques

$$\nu(s,u;m) = \prod_{p|m}\Big(2\frac{1+\frac{1}{p^u}}{1+\frac{1}{p^{1+s+u}}+\frac{2}{p^{1+s}}}\Big), \tag{2.2}$$

et

$$\eta(s,u;c) = \nu(s,u;c)\prod_{p|c}\Big(1-\frac{\nu(s,u;p)}{p^{1+s}}\Big). \tag{2.3}$$

On pose alors

$$\lambda_d = \frac{\lambda_d^0}{\lambda_1^0}, \tag{2.4}$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda_d^0 &= \sum_{d_1} \frac{\mu(d_1)\nu(0,0;d_1)}{d_1} \cdot \frac{\mu(dd_1)\nu(0,0;dd_1)}{\eta(0,0;dd_1)} h_z(dd_1) \\ &= \frac{\mu(d)}{\prod_{p|d}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})} \sum_{(d_1,d)=1} \frac{\mu^2(d_1)}{d_1} \cdot \frac{\nu(0,0;d_1)}{\prod_{p|d_1}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})} h_z(dd_1).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Puisque la fonction h_z est décroissante, et que la somme, à la ligne précédente est faite sur des réels positifs, on a l'inégalité

$$|\lambda_d^0| \leq \frac{\mu^2(d)}{\prod_{p|d}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})} \sum_{d_1} \frac{\mu^2(d_1)}{d_1} \cdot \frac{\nu(0,0;d_1)}{\prod_{p|d_1}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})} h_z(d_1) \leq \frac{\lambda_1^0}{\prod_{p|d}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})},$$

ce qui entraîne la relation

$$|\lambda_d| \leq \frac{1}{\prod_{p|d}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})} \leq 2^{\omega(d)}.$$

Il est alors facile de vérifier les autres conditions de $\mathrm{Sel}(z)$. Nous avons donc montré

Proposition 2.1. — *Pour tout $z \geq 2$, la suite de coefficients (λ_d) définie en (2.4) et (2.5) vérifie $\mathrm{Sel}(z)$.*

b. Début de la preuve du théorème 1, estimation de Σ_1

Posons, pour $y \geq 2$ et x réel,

$$h^y(x) = \mathbf{1}_{x\geq 1} - h_y(x).$$

En utilisant la définition de Λ_k, on décompose

$$\sum_n a_n \Lambda_k(n) g\big(\frac{n}{X}\big)\big(\sum_{d|n} \lambda_d\big)^2 = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{2.6}$$

avec

$$\Sigma_1 = \sum_n a_n g\big(\frac{n}{X}\big)\big(\sum_{d|n} \lambda_d\big)^2 \Big(\sum_{d|n} \mu(d) h_y(d) (\log \frac{n}{d})^k\Big)$$

et

$$\Sigma_2 = \sum_n a_n g\big(\frac{n}{X}\big)\big(\sum_{d|n} \lambda_d\big)^2 \Big(\sum_{d|n} \mu(d) h^y(d) (\log \frac{n}{d})^k\Big),$$

les λ_d ayant la valeur donnée en (2.4) et (2.5). Posons

$$L(m) = \sum_{[d_1,d_2]=m} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}. \tag{2.7}$$

Compte–tenu de la proposition 2.1, on voit que $L(m) = 0$ pour $m > z^2$ et qu'on a

$$|L(m)| \leq 8^{\omega(m)} \mu^2(m). \tag{2.8}$$

Par définition de Σ_1, on a

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_m L(m) \sum_d \mu(d) h_y(d) \sum_{n \equiv 0 \pmod{[d,m]}} a_n g\big(\frac{n}{X}\big)\big(\log \frac{n}{X} + \log \frac{X}{d}\big)^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell}{k} \sum_m L(m) \sum_d \mu(d) h_y(d) \big(\log \frac{X}{d}\big)^{\ell} \sum_{n \equiv 0 \pmod{[d,m]}} a_n \cdot \big((\log)^{k-\ell} \cdot g\big)\big(\frac{n}{X}\big),\end{aligned}$$

d'où la majoration

$$\begin{aligned}|\Sigma_1| &\ll_k \log^k X \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q \le 2yz^2} \Big(\sum_{\substack{d \le 2y,\, m \le z^2 \\ [d,m]=q}} \mu^2(d) |L(m)| \Big) \Big| \sum_{n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)} a_n \cdot \big((\log)^{\ell} \cdot g\big)\big(\frac{n}{X}\big) \Big| \\ &\ll_k \log^k X \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q \le 2yz^2} 17^{\omega(q)} \mu^2(q) \Big| \sum_{n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)} a_n \cdot \big((\log)^{\ell} \cdot g\big)\big(\frac{n}{X}\big) \Big|,\end{aligned}$$

par (2.8). L'inégalité de Cauchy–Schwarz, la définition (1.4) et l'hypothèse (1.5) donnent

$$\begin{aligned}&\sum_{q \le 2yz^2} 17^{\omega(q)} \mu^2(q) \Big| \sum_{n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)} a_n \cdot \big((\log)^{\ell} \cdot g\big)\big(\frac{n}{X}\big) \Big| \\ &\le \Big\{ \sum_{q \le 2yz^2} 289^{\omega(q)} \Big| \sum_{n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)} a_n \cdot \big((\log)^{\ell} \cdot g\big)\big(\frac{n}{X}\big) \Big| \Big\}^{\frac12} \mathcal{R}^{\frac12}((a_n), \log^{\ell} \cdot g, X, 2yz^2) \\ &\ll_{g,k} (\log X)^{\frac{k}{2}} \Big\{ \sum_{q \le 2yz^2} 578^{\omega(q)} \sum_{m \le (2X)/q} 2^{\omega(m)} \Big\}^{\frac12} \cdot \mathcal{R}^{\frac12}((a_n), \log^{\ell} \cdot g, X, 2yz^2) \\ &\ll_{g,k} X^{\frac12} (\log X)^{\frac{k}{2}+290} \cdot \mathcal{R}^{\frac12}((a_n), \log^{\ell} \cdot g, X, 2yz^2),\end{aligned}$$

uniformément pour $yz^2 \le X$. Nous sommes donc parvenus à la

Proposition 2.2. — *Uniformément pour $yz^2 \le X$, on a la relation*

$$|\Sigma_1| \ll_{g,k} X^{\frac12} (\log X)^{\frac{3k}{2}+290} \sum_{\ell=0}^{k} \mathcal{R}^{\frac12}((a_n), \log^{\ell} \cdot g, X, 2yz^2).$$

c. Premières étapes dans l'étude de Σ_2

D'après (1.5), le changement de variables $d \mapsto \frac{n}{d}$ et la croissance de la fonction h^y, on voit que Σ_2 vérifie

$$\begin{aligned}|\Sigma_2| &\le \sum_n 2^{\omega(n)} g\big(\frac{n}{X}\big)\big(\sum_{d|n} \lambda_d\big)^2 \Big(\sum_{d|n} \mu^2(d) h^y(d) (\log \frac{n}{d})^k \Big) \\ &\le \sum_n 2^{\omega(n)} g\big(\frac{n}{X}\big)\big(\sum_{d|n} \lambda_d\big)^2 \Big(\sum_{d|n} \mu^2\big(\frac{n}{d}\big) h^y\big(\frac{n}{d}\big) (\log d)^k \Big) \\ &\le \big(\log \frac{2X}{y}\big)^k \sum_{m < z^2} L(m) \sum_{n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; m)} \tilde{a}_n,\end{aligned} \tag{2.9}$$

avec

$$\tilde{a}_n = 2^{\omega(n)} g\big(\frac{n}{X}\big) \Big(\sum_{d|n} \mu^2(\frac{n}{d}) h^y\big(\frac{2X}{d}\big) \Big).$$

En remplaçant n par $\frac{dmn}{(d,m)}$, on voit que la majoration (2.9) devient

$$|\Sigma_2| \leq \big(\log \frac{2X}{y}\big)^k \sum_m L(m)\mathrm{TP}(m), \tag{2.10}$$

où le terme $\mathrm{TP}(m)$ vaut

$$\mathrm{TP}(m) := \sum_{n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m)} \tilde{a}_n = \sum_{d\leq 2X/y} \sum_n h^y\big(\frac{2X}{d}\big) g\big(\frac{dmn}{(d,m)X}\big)\mu^2\big(\frac{mn}{(d,m)}\big)2^{\omega(\frac{dm}{(d,m)}n)}. \tag{2.11}$$

Noter la redondance de la condition $d \leq 2X/y$. Utilisant l'expression de h^y en fonction d'une intégrale dans le plan complexe

$$h^y\big(\frac{2X}{d}\big) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re u=3} \frac{1-2^{-u}}{u\log 2}\big(\frac{2X}{yd}\big)^u \frac{\mathrm{d}u}{u},$$

et la formule d'inversion de Mellin : $g(x) = \int_{\Re s=3} \hat{g}(s)x^{-s}\,\mathrm{d}s$, on voit que $\mathrm{TP}(m)$ vaut aussi

$$\begin{aligned}\mathrm{TP}(m) = \frac{X}{(2i\pi)^2}\int_{\Re u=3}\int_{\Re s=2} \hat{g}(1+s)X^s\big(\frac{2X}{y}\big)^u \frac{1-2^{-u}}{u\log 2} \sum_d \frac{1}{(m/(d,m))^{1+s}d^{1+s+u}} \\ \times \sum_n \mu^2\big(\frac{m}{(d,m)}n\big)\frac{2^{\omega(\frac{dm}{(d,m)}n)}}{n^{1+s}}\cdot\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}u}{u}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Puisqu'on peut supposer $\mu^2(m) = 1$, (voir (2.8)), les nombres d et $m/(d,m)$ sont premiers entre eux, et la somme sur n se transforme en

$$\begin{aligned}\sum_n \mu^2\big(\frac{m}{(d,m)}n\big)\frac{2^{\omega(\frac{dm}{(d,m)}n)}}{n^{1+s}} &= \prod_{p|dm}\Big\{2\big(1+\mu^2\big(\frac{m}{(d,m)}p\big)\frac{1}{p^{1+s}}\big)\Big\}\prod_{p\nmid dm}\big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\big) \\ &= G_1(s)\zeta^2(1+s)\prod_{p|d} 2\frac{(1+\frac{1}{p^{1+s}})}{(1+\frac{2}{p^{1+s}})}\prod_{p|\frac{m}{(d,m)}}\frac{2}{(1+\frac{2}{p^{1+s}})},\end{aligned}$$

avec

$$G_1(s) = \prod_p \big(1+\frac{2}{p^{1+s}}\big)\big(1-\frac{1}{p^{1+s}}\big)^2.$$

Considérons maintenant la fonction des variables complexes s et u :

$$\begin{aligned}&\sum_d \frac{1}{(\frac{m}{(d,m)})^{1+s}d^{1+s+u}}\prod_{p|d} 2\frac{(1+\frac{1}{p^{1+s}})}{(1+\frac{2}{p^{1+s}})}\prod_{p|\frac{m}{(d,m)}}\frac{2}{(1+\frac{2}{p^{1+s}})} \\ &= \frac{1}{m^{1+s}}\prod_{p|m}\frac{2}{(1+\frac{2}{p^{1+s}})}\Big(1+\frac{1}{p^u}\cdot\frac{1+\frac{1}{p^{1+s}}}{1-\frac{1}{p^{1+s+u}}}\Big)\prod_{p\nmid m}\Big(1+\frac{2}{p^{1+s+u}}\cdot\frac{(1+\frac{1}{p^{1+s}})}{(1+\frac{2}{p^{1+s}})}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{p^{1+s+u}})}\Big) \\ &= \frac{1}{m^{1+s}}\nu(s,u;m)G_2(s,u)\zeta^2(1+s+u)\end{aligned}$$

avec $\nu(s,u;m)$ défini en (2.2) et

$$\begin{aligned}G_2(s,u) &= \prod_p\Big(1+\frac{2}{p^{1+s+u}}\cdot\frac{1+\frac{1}{p^{1+s}}}{1+\frac{2}{p^{1+s}}}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{p^{1+s+u}})}\Big)\big(1-\frac{1}{p^{1+s+u}}\big)^2 \\ &= \prod_p\Big(1+\frac{1}{p^{1+s+u}(1+\frac{2}{p^{1+s}})}\Big)\big(1-\frac{1}{p^{1+s+u}}\big).\end{aligned}$$

Retournant vers la formule (2.12), nous sommes parvenus à l'égalité

$$\begin{aligned}\mathrm{TP}(m) =&\frac{X}{(2i\pi)^2}\int_{\Re u=3}\int_{\Re s=2}\hat{g}(1+s)X^s\Big(\frac{2X}{y}\Big)^u\frac{1-2^{-u}}{u\log 2}\\ &\times G_1(s)G_2(s,u)\zeta^2(1+s)\zeta^2(1+s+u)m^{-(1+s)}\nu(s,u;m)\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u}{u}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

d. Introduction des coefficients du crible

Par (2.10) et (2.13), on obtient l'inégalité

(2.14)

$$\begin{aligned}|\Sigma_2| \le \Big(\log\frac{2X}{y}\Big)^k\sum_m L(m\mathrm{TP}(m) =&\Big(\log\frac{2X}{y}\Big)^k\Big\{\frac{X}{(2i\pi)^2}\int_{\Re u=3}\int_{\Re s=2}\hat{g}(1+s)X^s\Big(\frac{2X}{y}\Big)^u\frac{1-2^{-u}}{u\log 2}\\ &\times G_1(s)G_2(s,u)\zeta^2(1+s)\zeta^2(1+s+u)\sum_{m<z^2}L(m)\frac{\nu(s,u;m)}{m^{1+s}}\cdot\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u}{u}\Big\}.\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$Q(s,u) := \sum_{m<z^2}L(m)\frac{\nu(s,u;m)}{m^{1+s}}.$$

Par la définition (2.5) de λ_d^0 et par la formule (2.1), on parvient à

$$\lambda_d^0 = \frac{\mu(d)}{\prod_{p|d}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int_{\Re w=3}\big(\frac{z^w}{d^w}\big)\frac{(2^w-1)}{w^2\log 2}\sum_{(d_1,d)=1}\frac{\mu^2(d_1)}{d_1^{1+w}}\cdot\frac{\nu(0,0;d_1)}{\prod_{p|d_1}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})}\,\mathrm{d}w,\tag{2.15}$$

la lettre w désignant la variable complexe. En particulier, on a

$$\begin{aligned}\lambda_1^0 &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re w=3}z^w\frac{(2^w-1)}{w^2\log 2}\sum_{d_1}\frac{\mu^2(d_1)}{d_1^{1+w}}\cdot\frac{\nu(0,0;d_1)}{\prod_{p|d_1}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})}\,\mathrm{d}w\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re w=3}z^w\frac{(2^w-1)}{w^2\log 2}G_0(w)\zeta^4(1+w)\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

avec

$$G_0(w) = \prod_p\Big(1+\frac{\nu(0,0;p)}{p^{1+w}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^{1+w}}\Big)^4.\tag{2.16}$$

e. Calcul de λ_1^0

Puisque $\nu(0,0;p) = \frac{4}{1+3/p}$, on voit que le produit eulérien (2.16) est normalement convergent sur le demi–plan $\Re w \ge -\delta_0$, pour un certain $\delta_0 > 0$. Sur ce demi–plan, la fonction $G_0(w)$ est holomorphe, cette fonction et ses dérivées y sont uniformément bornées. On déforme le contour d'intégration de la formule (2.15), pour écrire

$$\begin{aligned}\lambda_1^0 =&\operatorname*{Res}_{w=0} z^w\frac{(2^w-1)}{w^2\log 2}G_0(w)\zeta^4(1+w) + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Re w=-\delta_0}z^w\frac{(2^w-1)}{w^2\log 2}G_0(w)\zeta^4(1+w)\,\mathrm{d}w\\ =&\operatorname*{Res}_{w=0} z^w\frac{(2^w-1)}{w^2\log 2}G_0(w)\zeta^4(1+w)+O(z^{-\delta_0}).\end{aligned}$$

Le point $w=0$ est un pôle quintuple de la fonction précédente, et on a l'égalité ($z \ge 2$)

$$\operatorname*{Res}_{w=0} z^w\frac{(2^w-1)}{w^2\log 2}G_0(w)\zeta^4(1+w) = \frac{G_0(0)}{4!}\log^4 z + O(\log^3 z) = \frac{\log^4 z}{4!}\prod_p\big(1-\frac{1}{p}\big)^3\big(1+\frac{3}{p}\big)+O(\log^3 z),$$

ce qui conduit à l'égalité

$$\lambda_1^0 = \frac{\log^4 z}{4!} \prod_p (1-\frac{1}{p})^3(1+\frac{3}{p}) + O(\log^3 z). \tag{2.17}$$

f. Transformation de $Q(s,u)$

Par les définitions (2.2), (2.3) et (2.7), on a l'égalité

$$Q(s,u) = \sum_c \frac{\eta(s,u;c)}{c^{1+s}} \Big(\sum_d \frac{\nu(s,u;d)}{d^{1+s}} \lambda_{cd} \Big)^2.$$

Par la définition de λ_d (voir (2.4) et (2.5)), on voit, par un calcul proche de celui menant à (2.15), que $Q(s,u)$ vaut aussi

$$Q(s,u) = \frac{1}{(2i\pi\lambda_1^0)^2} \int_{\Re w'=3} \int_{\Re w=3} \frac{z^{w+w'}(2^w-1)(2^{w'}-1)}{w^2 w'^2 \log^2 2} Q(s,w,w',u)\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}w', \tag{2.18}$$

avec

$$\begin{aligned} Q(s,w,w',u) = &\sum_c \frac{\eta(s,u;c)\mu^2(c)}{c^{1+s+w+w'} \prod_{p|c}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})^2} \\ &\times \sum_{\substack{d,\, d' \\ (dd',c)=1}} \frac{\mu(d)\mu(d')\nu(s,u;d)\nu(s,u;d')}{d^{1+s+w} d^{1+s+w'} \prod_{p|d}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p}) \prod_{p|d'}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})} \\ &\times \sum_{\substack{(d_1,cd)=1 \\ (d_1',cd')=1}} \frac{\mu^2(d_1)\mu^2(d_1')\nu(0,0;d_1)\nu(0,0;d_1')}{d_1^{1+w} d_1'^{1+w'} \prod_{p|d_1}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p}) \prod_{p|d_1'}(1-\frac{\nu(0,0;p)}{p})}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

g. Propriétés de la fonction $Q(s,w,w',u)$

La fonction Q définie en (2.19) est une fonction des quatre variables complexes s, w, w' et u, dont l'unique propriété requise est contenue dans le

Lemme 2.3. — *Il existe $\delta_0 > 0$, une fonction $G_3(s,w,w',u)$ holomorphe et non nulle sur $\mathfrak{P}(4;-\delta_0,+\infty)$, tels qu'on ait, sur $\mathfrak{P}(4;-\delta_0,+\infty)$, l'égalité*

$$Q(s,w,w',u) = G_3(s,w,w',u) \frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta^2(1+s+w+w'+u)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta^2(1+s+w+u)\zeta^2(1+s+w')\zeta^2(1+s+w'+u)}.$$

et telles que G_3, ainsi que toutes ses dérivées, y soient uniformément bornées.

Preuve. En fait, nous montrerons que la fonction G_3 est définie par un produit eulérien, normalement convergent sur $\mathfrak{P}$. Rappelons que la fonction $\nu(s,u;d)$ vérifie

$$\nu(s,u;d) = \prod_{p|d} \nu(s,u;p),$$

et qu'il en est de même de la fonction $\eta(s,u;d)$, (voir (2.2) et (2.3)). Effectuant la somme sur d_1 et d_1', dans (2.19), on a l'égalité

$$\sum_{\substack{(d_1,cd)=1 \\ (d_1',cd')=1}} \cdots = \zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w') \prod_{p|cd} (1+O(\frac{1}{\sqrt{p}})) \prod_{p|cd'} (1+O(\frac{1}{\sqrt{p}})) G^{(1)}(w,w'),$$

où $G^{(1)}(w,w')$ est un produit eulérien normalement convergent, pour $\Re w$, $\Re w' \geq -\delta_0$, pour un certain $\delta_0 > 0$, les constantes implicites dans les O étant uniformes sur cette région. Sommant sur d et d', on parvient à

$$\sum_{\substack{d,\, d' \\ (dd',c)=1}} \sum_{\substack{(d_1,cd)=1 \\ (d_1',cd')=1}} \cdots = \frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')}{\zeta^2(1+s+w)\zeta^2(1+s+w+u)\zeta^2(1+s+w')\zeta^2(1+s+w'+u)}$$
$$\times \prod_{p\mid c}\big(1+O(\frac{1}{\sqrt{p}})\big)G^{(2)}(s,w,w',u),$$

où $G^{(2)}(s,w,w',u)$ est un produit eulérien, normalement convergent, pour $\Re s$, $\Re w$, $\Re w'$, $\Re u \geq -\delta_0$, pour un certain $\delta_0 > 0$, la constante implicite dans le O étant uniforme sur cette région. Il reste à sommer sur c pour terminer la preuve du lemme 2.3.

$\blacksquare$

Regroupant le lemme 2.3 et les formules (2.14) et (2.18), nous sommes ainsi parvenus à

$$\sum_m L(m)\mathrm{TP}(m) = \frac{X}{(2i\pi)^4(\lambda_1^0)^2}\int_{\Re w'=3}\int_{\Re w=3}\int_{\Re u=3}\int_{\Re s=2}\hat{g}(1+s)G(s,w,w',u)$$
$$\times\,\zeta^2(1+s)\zeta^2(1+s+u)\frac{\zeta^4(1+w)\zeta^4(1+w')\zeta^2(1+s+w+w')\zeta^2(1+s+w+w'+u)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta^2(1+s+w+u)\zeta^2(1+s+w')\zeta^2(1+s+w'+u)} \tag{2.20}$$
$$\times\, X^s\big(\frac{2X}{y}\big)^u\frac{1-2^{-u}}{u\log 2}\cdot\frac{z^{w+w'}(2^w-1)(2^{w'}-1)}{ww'\log^2 2}\cdot\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w'}{ww'u},$$

avec

$$G(s,w,w',u) = G_1(s)G_2(s,u)G_3(s,w,w',u).$$

Les relations (2.14), (2.17) et (2.20), conduisent à l'inégalité

$$|\Sigma_2| \ll \frac{X}{\log^8 z}\log^k\big(\frac{2X}{y}\big)\cdot\mathfrak{I}, \tag{2.21}$$

où $\mathfrak{I}$ est l'intégrale quadruple

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{(2i\pi)^4}\int_{\Re w'=3}\int_{\Re w=3}\int_{\Re u=3}\int_{\Re s=2}H(s,w,w',u)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w' \tag{2.22}$$

où la fonction $H(s,w,w',u)$ est clairement définie par comparaison avec (2.20).

h. Déformation du contour d'intégration en s

Le lemme 2.3 entraîne l'existence d'un réel $\delta_0 > 0$, tel que, sur l'ensemble $\mathfrak{P}(4;-\delta_0,+\infty)$, la fonction $G(s,w,w',u)$ soit holomorphe, non nulle et bornée ainsi que ses dérivées.

Soit δ un réel positif, suffisamment petit par rapport à δ_0. Posons

$$\delta' = (1-\eta)\delta,$$

avec η défini en (1.6). La définition de δ' et les conditions (1.6) entraînent les inégalités

$$z^{2\delta}(X/y)^\delta X^{-\delta'} \leq (X^{1-\eta})^\delta\cdot X^{-\delta'} = 1, \tag{2.23}$$

et

$$z^{2\delta}(X/y)^{-\delta'} \leq z^{2\delta}y^{\delta}X^{-(1-\eta)\delta} = \big(yz^2/X^{1-\eta}\big)^{\delta} \leq 1. \tag{2.24}$$

Pour simplifier les notations, nous désignons, pour $n \geq 1$, par $\Xi(z_1, \ldots, z_n)$ (avec ou sans indice), toute fonction holomorphe et bornée, ainsi que ses dérivées, sur l'ensemble $\mathfrak{P}(n; -\delta_0, 3)$. La valeur de la fonction Ξ peut changer d'une ligne à l'autre. Il est possible, mais fastidieux de donner sa valeur exacte. Grâce à cette convention, au lemme 2.3 et à la formule (2.22), on voit que $\mathfrak{I}$ a l'écriture plus concise

(2.25)

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} = \frac{1}{(2i\pi)^4}\int_{\Re w'=3}\frac{z^{w'}}{w'}\cdot\zeta^4(1+w')\cdot\frac{2^{w'}-1}{w'}\int_{\Re t=3}\frac{z^{w}}{w}\cdot\zeta^4(1+w)\cdot\frac{2^{w}-1}{w}\\ \times\int_{\Re u=3}\frac{(2X/y)^u}{u}\cdot\frac{1-2^{-u}}{u}\int_{\Re s=2}\hat{g}(1+s)\zeta^2(1+s)X^s\Xi(s,w,w',u)H_1(s,w,w',u)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w',\end{aligned}$$

avec

$$H_1(s,w,w',u) = \frac{\zeta^2(1+s+u)\zeta^2(1+s+w+w')\zeta^2(1+s+w+w'+u)}{\zeta^2(1+s+w)\zeta^2(1+s+w+u)\zeta^2(1+s+w')\zeta^2(1+s+w'+u)}.$$

Puisque la fonction à intégrer n'a aucun pôle dans $\mathfrak{P}(4;\delta,+\infty)$, la formule (2.25) devient, par déplacement des quatre droites d'intégration,

(2.26)

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} = \frac{1}{(2i\pi)^4}\int_{\Re w'=\delta}\frac{z^{w'}}{w'}\cdot\zeta^4(1+w')\cdot\frac{2^{w'}-1}{w'}\int_{\Re w=\delta}\frac{z^{w}}{w}\cdot\zeta^4(1+w)\cdot\frac{2^{w}-1}{w}\\ \times\int_{\Re u=\delta}\frac{(2X/y)^u}{u}\cdot\frac{1-2^{-u}}{u}\int_{\Re s=\delta}\hat{g}(1+s)\zeta^2(1+s)X^s\Xi(s,w,w',u)H_1(s,w,w',u)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w',\end{aligned}$$

Déplaçant la droite d'intégration de $\Re s = \delta$ vers $\Re s = -\delta'$, on ne rencontre qu'un seul pôle (noter $\delta - \delta' > 0$) : il est double et situé en $s = 0$, car dû au facteur $\zeta^2(1+s)$. Un calcul de résidu donne, pour certaines fonctions $\Xi_1(w, w', u)$ et $\Xi_2(w, w', u)$, l'égalité

(2.27)

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{s=0}\hat{g}(1+s)\zeta^2(1+s)X^s\Xi(s,w,w',u)H_1(s,w,w'u)\\ &\quad= \hat{g}(1)\Big\{(\log X)H_1(0,w,w',u)\Xi_1(w,w',u) + H_1(0,w,w',u)\Xi_2(w,w',u) + \Big(\frac{\partial}{\partial s}H_1(s,w,w',u)\Big)_{s=0}\Xi_1(w,w',u)\Big\}\\ &\quad+ \hat{g}'(1)H_1(0,w,w',u)\Xi_1(w,w',u).\end{aligned}$$

Maintenant, puisque pour $\Re w = \Re w' = \Re u = \delta$ et $\Re s = -\delta'$, les nombres $s+w$, $s+w'$, $s+u$, $s+w+u$, $s+w'+u$, $s+w+w'$ et $s+w+w'+u$ ont une partie réelle strictement plus grande que $\eta\delta$, chacun des facteurs ζ^2 apparaissant dans la définition de $H_1(s,w,w',u)$ est $\asymp_\eta 1$. On déduit alors la majoration $\Xi(s,w,w',u)H_1(s,w,w',u) = O_\eta(1)$, lorsque $\Re w = \Re w' = \Re u = \delta$ et $\Re s = -\delta'$.

En utilisant la majoration $\hat{g}(1+s) = O_g\big((|s|+1)^{-2}\big)$, obtenue par intégration par partie, on parvient à l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Re s=-\delta'}\hat{g}(1+s)\zeta^2(1+s)X^s\Xi(s,w,w',u)H_1(s,w,w',u)\mathrm{d}s = O_g(X^{-\delta'}), \tag{2.28}$$

uniformément pour $\Re w = \Re w' = \Re u = \delta$. Reportant (2.28) et (2.27) dans (2.26), et utilisant (2.23) nous pouvons écrire, pour certaines fonctions $\Xi_1(w, w', u)$ et $\Xi_2(w, w', u)$, l'égalité

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} &= \hat{g}(1)\big((\log X)\ \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3\big) + \hat{g}'(1)\mathfrak{I}_1 + O_g\big(z^{2\delta}(X/y)^{\delta}X^{-\delta'}\big),\\ &= \hat{g}(1)\big((\log X)\ \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3\big) + \hat{g}'(1)\mathfrak{I}_1 + O_g(1)\end{aligned} \tag{2.29}$$

avec

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{(2i\pi)^3}\int_{\Re w'=\delta}\frac{z^{w'}}{w'}\cdot\zeta^4(1+w')\cdot\frac{2^{w'}-1}{w'}\int_{\Re w=\delta}\frac{z^w}{w}\cdot\zeta^4(1+w)\cdot\frac{2^w-1}{w}$$
$$\times\int_{\Re u=\delta}\frac{(2X/y)^u}{u}\cdot\frac{1-2^{-u}}{u}\cdot\Xi_1(w,w',u)H_1(0,w,w',u)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w',$$

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{1}{(2i\pi)^3}\int_{\Re w'=\delta}\frac{z^{w'}}{w'}\cdot\zeta^4(1+w')\cdot\frac{2^{w'}-1}{w'}\int_{\Re w=\delta}\frac{z^w}{w}\cdot\zeta^4(1+w)\cdot\frac{2^w-1}{w}$$
$$\times\int_{\Re u=\delta}\frac{(2X/y)^u}{u}\cdot\frac{1-2^{-u}}{u}\cdot\Xi_2(w,w',u)H_1(0,w,w',u)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w',$$

et

$$\mathfrak{I}_3 = \frac{1}{(2i\pi)^3}\int_{\Re w'=\delta}\frac{z^{w'}}{w'}\cdot\zeta^4(1+w')\cdot\frac{2^{w'}-1}{w'}\int_{\Re w=\delta}\frac{z^w}{w}\cdot\zeta^4(1+w)\cdot\frac{2^w-1}{w}$$
$$\times\int_{\Re u=\delta}\frac{(2X/y)^u}{u}\cdot\frac{1-2^{-u}}{u}\cdot\Xi_1(w,w',u)\Big(\frac{\partial}{\partial s}H_1(s,w,w',u)\Big)_{s=0}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w'.$$

Les intégrales $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$ sont de même nature. Par contre $\mathfrak{I}_3$ est notablement différente puisque, en dérivant par rapport à s, on modifie la nature des pôles de la fonction H_1.

i. Déformation du contour d'intégration en u, dans l'étude de $\mathfrak{I}_1$

Puisque

$$H_1(0,w,w',u) = \frac{\zeta^2(1+u)\zeta^2(1+w+w')\zeta^2(1+w+w'+u)}{\zeta^2(1+w)\zeta^2(1+w+u)\zeta^2(1+w')\zeta^2(1+w'+u)},$$

on voit que

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1 = {}&\frac{1}{(2i\pi)^3}\int_{\Re w'=\delta}\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\zeta^2(1+w')\int_{\Re w=\delta}\frac{z^w(2^w-1)}{w^2}\zeta^2(1+w)\zeta^2(1+w+w')\\ &\times\int_{\Re u=\delta}\Big(\frac{2X}{y}\Big)^u\frac{1-2^{-u}}{u^2}\cdot\frac{\Xi(w,w',u)\zeta^2(1+u)\zeta^2(1+w+w'+u)}{\zeta^2(1+w+u)\zeta^2(1+w'+u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w'.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Par l'égalité

$$\int_{\Re u=-\delta'}\frac{1-2^{-u}}{u^2}\zeta^2(1+u)\,\mathrm{d}u = O_\eta(1),$$

on déduit, par un calcul proche de celui conduisant à (2.28) et (2.29) et par la remarque (2.24), l'égalité

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2i\pi)^3}\int_{\Re w'=\delta}\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\zeta^2(1+w')\int_{\Re w=\delta}\frac{z^w(2^w-1)}{w^2}\zeta^2(1+w)\zeta^2(1+w+w')\\ &\times\int_{\Re u=-\delta'}\Big(\frac{2X}{y}\Big)^u\frac{1-2^{-u}}{u^2}\cdot\frac{\Xi(w,w',u)\zeta^2(1+u)\zeta^2(1+w+w'+u)}{\zeta^2(1+w+u)\zeta^2(1+w'+u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w'\\ &= O\big(z^{2\delta}(2X/y)^{-\delta'}\big) = O(1).\end{aligned}\tag{2.31}$$

En déplaçant la droite d'intégration $\Re u=\delta$ vers $\Re u=-\delta'$, on rencontre en $u=0$ un pôle triple dû au facteur $\frac{\zeta^2(1+u)}{u}$. Posons

$$H_2(w,w',u) = \frac{\zeta^2(1+w+w'+u)}{\zeta^2(1+w+u)\zeta^2(1+w'+u)}.$$

Par un calcul de résidu, on a facilement le

Lemme 2.4. — *Pour tous w et w' tels que $\Re w = \Re w' = \delta$, le résidu en $u = 0$, de la fonction*

$$\Big(\frac{2X}{y}\Big)^u \frac{1-2^{-u}}{u^2} \cdot \frac{\Xi(w,w',u)\zeta^2(1+u)\zeta^2(1+w+w'+u)}{\zeta^2(1+w+u)\zeta^2(1+w'+u)}$$

est combinaison linéaire, à coefficients complexes, de termes de la forme

$$\Big(\log \frac{2X}{y}\Big)^{\nu} \Xi(w,w')\Big(\frac{\partial^{\nu'}}{\partial u^{\nu'}} H_2(w,w',u)\Big)_{u=0},$$

avec ν et ν' entiers positifs vérifiant $\nu + \nu' \leq 2$.

■

Pour rendre plus explicite ce lemme, on pose

$$H_3(w,w') = H_2(w,w',0) = \frac{\zeta^2(1+w+w')}{\zeta^2(1+w)\zeta^2(1+w')}.$$

On désigne par $\mathcal{F}'$, l'ensemble des quatre fonctions $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$$(w,w') \mapsto 1,\ (w,w') \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w),\ (w,w') \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w'),\ (w,w') \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w+w'),$$

et par $\mathcal{F}''$, l'ensemble des fonctions de la forme $f_1(w,w')f_2(w,w')$ (avec f_1 et f_2 éléments de $\mathcal{F}'$) ou de la forme

$$(w,w') \mapsto \frac{\zeta''}{\zeta}(1+w),\ (w,w') \mapsto \frac{\zeta''}{\zeta}(1+w'),\ (t,w') \mapsto \frac{\zeta''}{\zeta}(1+w+w').$$

Avec ces conventions, on transforme le lemme 2.4 en

Lemme 2.5. — *Pour tous w et w' tels que $\Re w = \Re w' = \delta$, le résidu en $u = 0$, de la fonction*

$$\Big(\frac{2X}{y}\Big)^u \frac{1-2^{-u}}{u^2} \cdot \frac{\Xi(w,w',u)\zeta^2(1+u)\zeta^2(1+w+w'+u)}{\zeta^2(1+w+u)\zeta^2(1+w'+u)}$$

est combinaison linéaires, à coefficients complexes, de termes de la forme

$$\Big(\log \frac{2X}{y}\Big)^2 \Xi(w,w')H_3(w,w'), \tag{2.32}$$

$$\Big(\log \frac{2X}{y}\Big) f(w,w')\Xi(w,w')H_3(w,w'), \quad (f \in \mathcal{F}'), \tag{2.33}$$

et

$$f(w,w')\Xi(w,w')H_3(w,w'), \quad (f \in \mathcal{F}''). \tag{2.34}$$

■

Remarquons les différentes natures de (2.32), (2.33) et (2.34) : la puissance de logarithme varie, mais la présence du coefficient $f(w,w')$ peut ajouter des singularités à la fonction $H_3(w,w')$ en les points $w' = 0$, $w' = -w$ et $w = 0$. Regroupant les formules (2.30), (2.31) et le lemme 2.5, on parvient au

Lemme 2.6. — *Avec une erreur en $O(1)$, l'intégrale $\mathfrak{I}_1$ est combinaison linéaire, à coefficients complexes, de termes de la forme*

(2.35) $$\mathcal{C}_0 = \Big(\log \frac{2X}{y}\Big)^2 \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Re w'=\delta} \frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2} \int_{\Re w=\delta} \frac{z^{w}(2^{w}-1)}{w^2} \zeta^4(1+w+w')\Xi(w,w')\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w',$$

(2.36)
$$\mathcal{C}_1 = \Big(\log \frac{2X}{y}\Big) \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Re w'=\delta} \frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2} \int_{\Re w=\delta} \frac{z^{w}(2^{w}-1)}{w^2} \zeta^4(1+w+w')f(w,w')\Xi(w,w')\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w' \ (f \in \mathcal{F}')$$

et

(2.37)
$$\mathcal{C}_2 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Re w'=\delta} \frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2} \int_{\Re w=\delta} \frac{z^{w}(2^{w}-1)}{w^2} \zeta^4(1+w+w')f(w,w')\Xi(w,w')\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w' \ \ (f \in \mathcal{F}'').$$

j. Étude de $\mathcal{C}_0$

Soit Γ le parcours dans le plan complexe de la variable s défini par

$$\Gamma := \{s \in \mathbb{C}\,;\, \Re s = -c_0/\log(|\Im s|+2)\},$$

où c_0 est une constante positive suffisamment petite pour que Γ se trouve dans la zône sans zéro de la fonction $\zeta(1+s)$. Remarquons que pour w et $w' \in \Gamma$, on a $w+w' \neq 0$ et, plus précisément

(2.38) $$w \text{ et } w' \in \Gamma \Rightarrow \begin{cases} |w+w'| \gg \max\big(\frac{1}{\log(|\Im w|+2)}, \frac{1}{\log(|\Im w'|+2)}\big) \\ -2c_0/\log 2 \leq \Re(w+w') < 0. \end{cases}$$

En combinant (2.38), qui minore la distance de $1+w+w'$ au pôle de la fonction $\zeta(s)$, les majorations classiques

$$|\zeta^{(k)}(s)| \ll_k |\Im s|^{1-\Re s}\cdot \log^{k+1}|s| \qquad (\tfrac12 \leq \Re s \leq 1,\ |\Im s| \geq 1) \quad (k=0,1,\cdots),$$

$$|\zeta^{-1}(s)| \ll \log(|\Im s|+2), \qquad |\zeta^{(k)}(s)| \ll_k \log^{k+1}(|\Im s|+2) \qquad (s\in\Gamma) \qquad (k=0,1,\cdots),$$

(voir par exemple [Te] p.161, pour la dernière majoration et combiner avec la formule de Cauchy pour majorer les dérivées d'ordre supérieur), et le fait que $\zeta^{(k)}(1+s)$ a, en $s=0$, un pôle d'ordre k, on obtient les

Lemme 2.7. — *Si c_0 est une constante positive suffisamment petite, on a pour tout w et $w' \in \Gamma$ et k entier positif, les majorations*

(2.39) $$|\zeta^{(k)}(1+w+w')| \ll_k 1 + |w|^{\frac{1}{100}} + |w'|^{\frac{1}{100}}.$$

et

Lemme 2.8. — *Soit $k \geq 1$ et $F(X_0, X_1, \dots, X_k)$ la fraction rationnelle monôme*

$$F(X_0, X_1, \dots, X_k) = X_0^{\alpha_0} \cdots X_k^{\alpha_k},$$

avec $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$. Il existe alors $A = A(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$, tel que, pour $s \in \Gamma$, on ait

$$F\big(\zeta(1+s), \zeta'(1+s), \cdots, \zeta^{(k)}(1+s)\big) \ll_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} \log^A(|\Im s| + 2). \tag{2.40}$$

Signalons que la majoration moins forte $\zeta^{(k)}(1+s) \ll_k 1 + |s|^{\frac{1}{100}}$, pour $s \in \Gamma$, aurait été suffisante pour notre application.

Pour étudier $\mathcal{C}_0$, on déplace la droite d'intégration $\Re w = \delta$ vers $w \in \Gamma$. Ce faisant, puisqu'on a toujours $\Re(w + w') > 0$, pour $\Re w' = \delta$ et w à droite de Γ, on ne rencontre qu'un seul pôle : il est simple et situé en $w = 0$. On a donc la relation

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w = \delta} \frac{z^w(2^w - 1)}{w^2} \zeta^4(1 + w + w') \Xi(w, w') \, \mathrm{d}w \\ &= \Xi(w')\zeta^4(1 + w') + \frac{1}{2i\pi} \int_{w \in \Gamma} \frac{z^w(2^w - 1)}{w^2} \zeta^4(1 + w + w') \Xi(w, w') \, \mathrm{d}w \\ &:= \mathcal{C}_0'(w') + \mathcal{C}_0''(w'), \end{aligned} \tag{2.41}$$

par définition. Pour étudier la contribution de $\mathcal{C}_0'(w')$ à la partie droite de (2.35), on déplace la droite d'intégration $\Re w' = \delta$ vers $w' \in \Gamma$. On rencontre alors un unique pôle, il est quintuple et est situé en $w' = 0$. En ce point, le résidu est un polynôme de degré 4 en $\log z$, d'où la relation

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w' = \delta} \frac{z^{w'}(2^{w'} - 1)}{w'^2} \mathcal{C}_0'(w') \, \mathrm{d}w' = \frac{1}{2i\pi} \int_{w' \in \Gamma} \frac{z^{w'}(2^{w'} - 1)}{w'^2} \Xi(w')\zeta^4(1 + w') \, \mathrm{d}w' + O(\log^4 z). \tag{2.42}$$

Par découpage de l'intégrale en $|\Im w'| \leq \exp(\sqrt{\log z})$ et $|\Im w'| > \exp(\sqrt{\log z})$ et par l'inégalité (2.40), on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{w' \in \Gamma} \frac{z^{w'}(2^{w'} - 1)}{w'^2} \Xi(w')\zeta^4(1 + w') \, \mathrm{d}w' = O\big(\exp(-\frac{c_0}{2}\sqrt{\log z})\big). \tag{2.43}$$

Pour évaluer la contribution de $\mathcal{C}_0''(w')$, on écrit, par interversion des intégrations et par la formule des résidus,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi} \int_{\Re w' = \delta} \frac{z^{w'}(2^{w'} - 1)}{w'^2} \mathcal{C}_0''(w') \, \mathrm{d}w' \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{w \in \Gamma} \frac{z^w(2^w - 1)}{w^2} \int_{\Re w' = \delta} \frac{z^{w'}(2^{w'} - 1)}{w'^2} \Xi(w, w')\zeta^4(1 + w + w') \, \mathrm{d}w' \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{w \in \Gamma} \frac{z^w(2^w - 1)}{w^2} \int_{w' \in \Gamma} \frac{z^{w'}(2^{w'} - 1)}{w'^2} \Xi(w, w')\zeta^4(1 + w + w') \, \mathrm{d}w' \, \mathrm{d}w \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{w \in \Gamma} \frac{z^w(2^w - 1)}{w^2} \Big\{ \operatorname*{Res}_{w' = 0} + \operatorname*{Res}_{w' = -w} \Big\} \Big(\frac{z^{w'}(2^{w'} - 1)}{w'^2} \Xi(w, w')\zeta^4(1 + w + w') \Big) \, \mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Par (2.39) et par découpage de chacune des intégrales suivant la valeur de $|\Im w|$ et $|\Im w'|$par rapport à $\exp(\sqrt{\log z})$, on a la relation

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{w \in \Gamma} \frac{z^w(2^w - 1)}{w^2} \int_{w' \in \Gamma} \frac{z^{w'}(2^{w'} - 1)}{w'^2} \Xi(w, w')\zeta^4(1+w+w') \, \mathrm{d}w' \, \mathrm{d}w = O\big(\exp(-\frac{c_0}{2}\sqrt{\log z})\big), \tag{2.45}$$

(calcul identique fait pour (2.43)).

Dans l'expression (2.44), on a, puisque $w'=0$ est un pôle simple, l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{w\in\Gamma}\frac{z^w(2^w-1)}{w^2}\operatorname*{Res}_{w'=0}\Big(\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\Xi(w,w')\zeta^4(1+w+w')\Big)\,\mathrm{d}w=O\big(\exp(-\frac{c_0}{2}\sqrt{\log z})\big). \tag{2.46}$$

(calcul identique fait pour (2.43).

Par contre, dans (2.44), $w'=-w$ est un pôle quadruple. Par la minoration $|w|\gg 1$ ($w\in\Gamma$), par (2.39) et par un calcul de résidu, on voit qu'on a, uniformément pour $w\in\Gamma$, la majoration

$$\operatorname*{Res}_{w'=-w}\Big(\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\Xi(w,w')\zeta^4(1+w+w')\Big)=z^{-w}\operatorname*{Res}_{s=0}\Big(\frac{z^s(2^{s-w}-1)}{(s-w)^2}\Xi(w,s-w)\zeta^4(1+s)\Big)\ll z^{-\Re w}\log^3 z.$$

On voit alors que la contribution de ce deuxième résidu, à la partie droite de (2.44) est

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{w\in\Gamma}\frac{z^w(2^w-1)}{w^2}\operatorname*{Res}_{w'=-w}\Big(\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\Xi(w,w')\zeta^4(1+w+w')\Big)\,\mathrm{d}w=O(\log^3 z). \tag{2.47}$$

Regroupant (2.35), (2.41), (2.42), (2.43), (2.44), (2.45), (2.46) et (2.47), on obtient finalement la relation

$$\mathcal{C}_0\ll(\log z)^4\Big(\log\frac{2X}{y}\Big)^2. \tag{2.48}$$

k. Étude de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$

L'étude de ces deux quantités est très proche de celle menée pour $\mathcal{C}_0$. Elle nous mènera aux relations

$$\mathcal{C}_1\ll\Big(\log\frac{2X}{y}\Big)\cdot\log^5 z, \tag{2.49}$$

et

$$\mathcal{C}_2\ll\log^6 z. \tag{2.50}$$

De façon simplifiée, la présence du facteur $f(w,w')$ dans la définition (2.36) de $\mathcal{C}_1$ ou dans la définition (2.37) de $\mathcal{C}_2$, avec $f\in\mathcal{F}'$ ou $f\in\mathcal{F}''$, accroît l'ordre des pôles $w=0$, $w'=-w$ et $w'=0$, les accroissements des ordres des pôles étant au plus égale à 1, dans le cas de $\mathcal{C}_1$, au plus égale à 2, dans le cas de $\mathcal{C}_2$. La contribution du résidu en $w'=-w$ est toujours un terme d'erreur. Ceci explique l'augmentation de l'exposant de $\log z$ dans (2.49) et (2.50), par rapport à (2.48). Pour illustrer ce qui précède, nous avons choisi de traiter le cas typique de $\mathcal{C}_2$, lorsque $f(w,w')=\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w)\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w')$, les autres cas étant analogues, voire plus simples. Nous devons donc évaluer

$$\mathcal{C}_2=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Re w'=\delta}\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w')\int_{\Re w=\delta}\frac{z^w(2^w-1)}{w^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w)\zeta^4(1+w+w')\Xi(w,w')\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}w'. \tag{2.51}$$

Puisque, maintenant $w=0$ est un pôle double, l'analogue de (2.41) est ainsi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i\pi}\int_{\Re w=\delta}\frac{z^w(2^w-1)}{w^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w)\zeta^4(1+w+w')\Xi(w,w')\,\mathrm{d}w\\&=(\log z)\cdot\zeta^4(1+w')\Xi_1(w')+(\zeta'\cdot\zeta^3)(1+w)\Xi_2(w')\\&+\frac{1}{2i\pi}\int_{w\in\Gamma}\frac{z^w(2^w-1)}{w^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w)\zeta^4(1+w+w')\Xi(w,w')\,\mathrm{d}w\\&:=\mathcal{C}_2'(w')+\mathcal{C}_2''(w'),\end{aligned} \tag{2.52}$$

par définition, $\mathcal{C}_2''(w')$ désignant l'intégrale le le long de $w \in \Gamma$. Pour étudier la contribution de $\mathcal{C}_2'(w')$ à la partie droite de (2.51), on déplace la droite d'intégration $\Re w'$ vers $w' \in \Gamma$. Le premier terme de $\mathcal{C}_2'(w')$ engendre un pôle d'ordre 6 en $w' = 0$ et le second, un pôle d'ordre 7. Par un calcul identique à (2.43), on parvient à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Re w'=\delta} \frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w')C_2'(w')\,\mathrm{d}w' = O(\log^6 z). \tag{2.53}$$

Le traitement de la contribution de $\mathcal{C}_2''(w')$ se fait comme en (2.44). Après interversion des intégrations, déplacement de la droite d'intégration et majoration de l'intégrale sur $(w, w') \in \Gamma \times \Gamma$, par l'emploi des lemmes 2.7 et 2.8, on parvient à

(2.54)
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_{\Re w'=\delta} \frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w')C_2''(w')\,\mathrm{d}w' \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{w\in\Gamma} \frac{z^{w}(2^{w}-1)}{w^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w)\Big\{\operatorname*{Res}_{w'=0} + \operatorname*{Res}_{w'=-w}\Big\}\Big(\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\cdot\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w')\zeta^4(1+w+w')\Xi(w,w')\Big)\,\mathrm{d}w \\
&\quad + O\big(\exp(-\tfrac{c_0}{2}\sqrt{\log z})\big).
\end{aligned}$$

Le point $w' = 0$ est maintenant un pôle double, on a donc

$$\Big|\operatorname*{Res}_{w'=0}\Big(\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\cdot\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w')\zeta^4(1+w+w')\Xi(w,w')\Big)\Big| \ll (\log z)\cdot|\zeta^4(1+w)| + |(\zeta'\cdot\zeta^3)(1+w)|.$$

La contribution de ce résidu à la partie droite de (2.54), est, par le lemme 2.8

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{w\in\Gamma} \frac{z^{w}(2^{w}-1)}{w^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w)\operatorname*{Res}_{w'=0}\Big(\cdots\Big)\,\mathrm{d}w = O\big(\exp(-\tfrac{c_0}{2}\sqrt{\log z})\big). \tag{2.55}$$

Le point $w' = -w$ est un pôle quadruple, on a donc, la relation suivante, valable pour tout $w \in \Gamma$,

$$\operatorname*{Res}_{w'=-w}\Big(\frac{z^{w'}(2^{w'}-1)}{w'^2}\cdot\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w')\zeta^4(1+w+w')\Xi(w,w')\Big) \ll z^{-\Re w}(\log z)^3(\log^A(|\Im w|+2)),$$

où A est une certain entier, provenant de l'application du lemme 2.8, pour majorer en $s = 0$, la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}(1+s-w)$ ainsi que ses trois premières dérivées. Par un calcul proche de (2.47), on parvient à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{w\in\Gamma} \frac{z^{w}(2^{w}-1)}{w^2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w)\operatorname*{Res}_{w'=-w}\Big(\cdots\Big)\,\mathrm{d}w = O(\log^3 z). \tag{2.56}$$

Regroupant (2.52), (2.53), (2.54), (2.55) et (2.56), on a montré (2.50) dans le cas où $f(w, w') = \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w)\frac{\zeta'}{\zeta}(1+w')$.

Ainsi, par le lemme 2.6 et les relations (2.48), (2.49) et (2.50), on a

$$\mathfrak{I}_1 \ll \Big(\log\frac{2X}{y}\Big)^2(\log z)^4 + \Big(\log\frac{2X}{y}\Big)(\log z)^5 + \log^6 z,$$

ce qui donne, par l'hypothèse (1.6),

$$\mathfrak{I}_1 \ll \Big(\log\frac{2X}{y}\Big)^2(\log z)^4. \tag{2.57}$$

La même majoration est vraie pour $\mathfrak{I}_2$ (voir la définition (2.29)).

l. Étude de $\mathfrak{I}_3$

Puisque les méthodes sont très proches de celles menant à (2.48), (2.49) et (2.50), nous nous contenterons de donner quelques indications sur la preuve du

Lemme 2.9. — *Pour $y \le X$ et $z \ge 2$, on a*

$$\mathfrak{I}_3 \ll \sum_{0\le\nu\le 3} \big(\log \frac{2X}{y}\big)^{\nu} \log^{7-\nu} z.$$

En particulier, sous l'hypothèse (1.6)*, on a*

$$\mathfrak{I}_3 \ll \big(\log \frac{2X}{y}\big)^{3} \log^{4} z.$$

Preuve. Par définition (2.29) de $\mathfrak{I}_3$, on voit, par calculs de la dérivée $\Big(\frac{\partial}{\partial s} H_1(s,w,w',u)\Big)_{s=0}$, que cette intégrale est combinaison linéaire d'intégrales $\mathfrak{I}'_1$ avec

$$\mathfrak{I}'_1 = \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Re w'=\delta} \frac{z^{w'}}{w'} \cdot \zeta^4(1+w') \cdot \frac{2^{w'}-1}{w'} \int_{\Re w=\delta} \frac{z^{w}}{w} \cdot \zeta^4(1+w) \cdot \frac{2^{w}-1}{w}$$
$$\int_{\Re u=\delta} \frac{(2X/y)^u}{u} \cdot \frac{1-2^{-u}}{u} \cdot \Xi_1(w,w',u) g(w,w',u) H_1(0,w,w',u) \mathrm{d}u\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}w',$$

où $g(w,w',u)$ est l'une des sept fonctions de la liste suivante

(2.58)
$$(w,w',u) \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+u), \qquad (w,w',u) \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w+w'), \qquad (w,w',u) \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w+w'+u),$$
$$(w,w',u) \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w), \qquad (w,w',u) \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w+u), \qquad (w,w',u) \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w'),$$
$$(w,w',u) \mapsto \frac{\zeta'}{\zeta}(1+w'+u).$$

On note donc la forte ressemblance entre $\mathfrak{I}'_1$ et $\mathfrak{I}_1$, dont nous reprenons le calcul, avec les variantes nécessaires.

Lorsque $g(t,w',u) = \frac{\zeta'}{\zeta}(1+u)$, en $u=0$, on a maintenant un pôle d'ordre 4. L'énoncé du lemme 2.4 se modifie en remplaçant le facteur $\zeta^2(1+u)$ par $\zeta(1+u)\zeta'(1+u)$ et la condition $\nu+\nu' \le 2$ par $\nu+\nu' \le 3$. Ceci explique la présence du facteur $\big(\log \frac{2X}{y}\big)^3$.

Lorsque $g(w,w',u)$ est l'un des six autres facteurs de la liste (2.58), le pôle en $u=0$ est toujours d'ordre 3. Par contre en $w=0$ et $w'=0$, l'ordre des pôles est augmenté d'une unité au plus. On déforme de la même manière les contours d'intégration et on utilise toujours les lemmes 2.7 et 2.8.

■

Regroupant (2.29), (2.57) et le lemme 2.9, on voit qu'il existe une constante absolue C, telle qu'on ait la majoration

$$(2.59)\quad \begin{aligned} \mathfrak{I} &\le C\hat{g}(1)\Big((\log X)\cdot(\log \frac{2X}{y})^2 \cdot \log^4 z + (\log \frac{2X}{y})^3 \cdot \log^4 z\Big) + O_{g,\eta}(\log^6 X) \\ &\le C_0 \hat{g}(1)(\log X)\cdot \big(\log \frac{2X}{y}\big)^2 \cdot \log^4 z + O_{g,\eta}(\log^6 X) \end{aligned}$$

uniformément sous les conditions (1.6). Par (2.21) et (2.59), on parvient à

$$(2.60)\quad |\Sigma_2| \le C_0 \hat{g}(1) X(\log X)\cdot \big(\log \frac{2X}{y}\big)^{k+2} \cdot \log^{-4} z + O_{g,\eta}\big(X(\log^{k+6} X)\cdot(\log^{-8} z)\big).$$

Il suffit de regrouper (2.6), la proposition 2.2 et (2.60) pour terminer la preuve du théorème 1.1

■

3. Démonstration du Corollaire 1.2

D'après le théorème 1.1, il suffit, pour prouver le corollaire 1.2, de vérifier l'inégalité

$$\Big|\sum_n a_n \Lambda_k(n) g\big(\frac{n}{X}\big)\Big(1-\big(\sum_{d|n}\lambda_d\big)^2\Big)\Big| = O_k\Big(\hat{g}(1)X(\log z)(\log X)^{k-2}\Big) \tag{3.1}$$

Puisque les coefficients λ_d vérifient Sel(z) (Proposition 2.1), on voit que, si dans la somme précédente, l'entier n a une contribution non nulle, c'est que cet entier n a au plus k facteurs premiers et a au moins un diviseur premier $\leq z$. La contribution d'un tel n à la partie gauche de (3.1) est ainsi, en valeur absolue, inférieure à $2^{\omega(n)}\Lambda_k(n)g\big(\frac{n}{X}\big)(\sum_{d|n}\mu^2(d)2^{\omega(d)})^2$, par conséquent la partie gauche de (3.1) est

$$\leq \sum_{p\leq z}\ \sum_{n,\, p|n} 18^{\omega(n)} g\big(\frac{n}{X}\big)\Lambda_k(n) \leq 18^k \sum_{p\leq z}\ \sum_{n,\, p|n} g\big(\frac{n}{X}\big)\Lambda_k(n).$$

Pour prouver la relation (3.1), il suffit de prouver le

Lemme 3.1. — *Pour tout entier $k\geq 1$, pour tout X et tout z on a la relation*

$$\sum_{p\leq z}\ \sum_{n,\, p|n} g\big(\frac{n}{X}\big)\Lambda_k(n) = O_k\big(\hat{g}(1)X(\log z)(\log X)^{k-1}\big).$$

Preuve. On utilise la relation suivante, valable pour $(m,n)=1$ (voir [Fr–Iw2], p. 415)

$$\Lambda_k(mn) = \sum_{0\leq j\leq k}\binom{k}{j}\Lambda_j(m)\Lambda_{k-j}(n).$$

En écrivant $n = p^\ell m$ avec $(p,m)=1$, avec $p\leq z$, et en utilisant la relation précédente, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq z}\ \sum_{n,\, p|n} g\big(\frac{n}{X}\big)\Lambda_k(n) &\ll_k \sum_{0\leq j\leq k}\ \sum_{p\leq z}\ \sum_{\ell\geq 1}\Lambda_j(p^\ell)\sum_m g\big(\frac{p^\ell m}{X}\big)\Lambda_{k-j}(m)\\ &\ll_k \sum_{1\leq j\leq k}\ \sum_{\ell\geq 1}\ \sum_{p\leq z}\log^j p^\ell \sum_m g\big(\frac{p^\ell m}{X}\big)\Lambda_{k-j}(m)\\ &\ll_k \hat{g}(1)\sum_{1\leq j\leq k}\ \sum_{\ell\geq 1}\ \sum_{p\leq z}(\log^j p^\ell)\frac{X}{p^\ell}\log^{k-j-1}\big(\frac{X}{p^\ell}\big)\\ &\ll_k \hat{g}(1)X(\log z)(\log X)^{k-2},\end{aligned}$$

par la relation classique $\sum_{n\leq Y} g\big(\frac{n}{Y}\big)\Lambda_k(n) \ll_k \hat{g}(1)Y(\log Y)^{k-1}$. Ceci termine la preuve du lemme 3.1, de la relation (3.1) et ainsi de la relation (1.8) du corollaire 1.2.

Pour prouver la relation (1.10), on suppose l'exactitude de (1.9), qu'on applique avec pour fonction g la fonction $\log^\ell\cdot g$ $(0\leq \ell\leq k)$, et pour paramètres $y = X^{1-3\varepsilon}$, $z = X^\varepsilon$ et $A = k+600$. On remarque que, avec ce choix, la relation (1.6) est vérifiée avec $\eta=\varepsilon$. L'inégalité (1.8) devient

$$\Big|\sum_n a_n\Lambda_k(n)g\big(\frac{n}{X}\big)\Big| \leq \big(\varepsilon^{k-2}C_0 + \varepsilon C_1(k)\big)\hat{g}(1)X\log^{k-1}X + O_{g,k,\varepsilon}\big(X\log^{k-2}X\big).$$

Il suffit de faire tendre ε vers 0 pour obtenir, pour $k\geq 3$, la relation (1.10)

■

4. Démonstration du Corollaire 1.3

Par le grand crible et la loi de Sato–Tate verticale pour les sommes de Kloosterman, on a

Lemme 4.1 ([Fo–Mi2] Proposition 5.2). — *Il existe une constante absolue $c_1 > 0$, telle que, pour toute fonction g positive de $\mathcal{C}_c^\infty([1,2])$, il existe un réel $X(g)$, tel que pour $X > X(g)$, on ait la minoration*

$$\sum_{n,\, p|n \Rightarrow p > (2X)^{\frac14}} g\big(\frac{n}{X}\big)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \geq c_1 \hat{g}(1)\frac{X}{\log X}.$$

On déduit sous les conditions du lemme 4.1, la minoration

$$\sum_{n,\, p|n \Rightarrow p > (2X)^{\frac14}} g\big(\frac{n}{X}\big)\mu^2(n)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \geq \frac{c_1}{2}\hat{g}(1)\frac{X}{\log X}. \tag{4.1}$$

Remarquons que pour $k \geq 3$, et $X < n \leq 2X$ avec tous les diviseurs premiers de n distincts et $\geq (2X)^{\frac14}$, on a l'inégalité

$$\Lambda_k(n) \geq c_1' \log^k X, \tag{4.2}$$

avec $c_1' > 0$, indépendant de k. La relation (4.2) se montre, par exemple, à partir de la relation de récurrence

$$\Lambda_k = \log \cdot \Lambda_{k-1} + \Lambda * \Lambda_{k-1}. \tag{4.3}$$

Les relations (4.1) et (4.2) impliquent la minoration

$$\sum_{n,\, p|n \Rightarrow p > (2X)^{\frac14}} g\big(\frac{n}{X}\big)\mu^2(n)\Lambda_k(n)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \geq c_2\hat{g}(1)X(\log X)^{k-1}, \tag{4.4}$$

pour un certain $c_2 > 0$, et X suffisamment grand. On montre facilement (par exemple par récurrence avec la relation (4.3)) la majoration

$$\sum_n g\big(\frac{n}{X}\big)\big(1-\mu^2(n)\big)\Lambda_k(n) = o_{g,k}(X(\log X)^{k-1}). \tag{4.5}$$

Posons

$$X = yz^3,\ z = X^\eta\ (0 < \eta < \frac16).$$

La formule 1.8 du corollaire 1.2 et l'égalité (4.4) entraînent

(4.6)

$$\begin{aligned}\Big|\sum_n g\big(\frac{n}{X}\big)\mu^2(n)\Lambda_k(n)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| &\leq \hat{g}(1)\big(3^{k+2}\eta^{k-2}C_0 + \eta C_1(k)\big)X(\log X)^{k-1} + o_{g,k,\eta}\big(X(\log X)^{k-1}\big)\\ &+ O_{k,g}\Big(X^{\frac12}(\log X)^{\frac{3k}{2}+290}\sum_{\ell=0}^{k}\Big\{\sum_{d\leq 2yz^2}\Big|\sum_{n,\, d|n}(\log^\ell \cdot g)\big(\frac{n}{X}\big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big|\Big\}^{\frac12}\Big).\end{aligned}$$

Soit $\eta = \eta_k$ tel que

$$0 < 3^{k+2}\eta_k^{k-2}C_0 + \eta_k C_1(k) \leq \frac{c_2}{2}.$$

Posons $\vartheta_k = 1 - \eta_k$. On a donc $yz^2 = X^{1-\eta_k}$. Si on suppose que la conjecture $H(\vartheta_k)$, on voit que, pour X suffisamment grand, la relation (4.6) implique

$$\Big|\sum_n g\big(\frac{n}{X}\big)\mu^2(n)\Lambda_k(n)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \leq \frac{2c_2}{3}\hat{g}(1)X(\log X)^{k-1}. \tag{4.7}$$

Mettant ensemble (4.4) et (4.7) on déduit

$$\frac{\Big|\sum_n g\big(\frac{n}{X}\big)\mu^2(n)\Lambda_k(n)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big|}{\sum_n g\big(\frac{n}{X}\big)\mu^2(n)\Lambda_k(n)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big|} \leq \frac{2}{3},$$

ce qui implique la première partie du corollaire 1.3.

Pour la deuxième partie du corollaire 1.3, on utilise la relation (4.3) sous la forme

$$\Lambda_{k+1}(n) = (\log X)\cdot\Lambda_k(n) + (\Lambda * \Lambda_k)(n) + O(\Lambda_k(n)),$$

valable pour $X < n \leq 2X$, puis, par combinaison linéaire des relations (4.6) écrites pour les indices k et $k+1$, on obtient la relation

(4.8)
$$\begin{aligned}\Big|\sum_n g\big(\frac{n}{X}\big)\mu^2(n)\big(\Lambda * \Lambda_k\big)(n)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| &\leq \hat{g}(1)\Big((3^{k+3}\eta^{k-1} + 3^{k+2}\eta^{k-2})C_0 + \eta(C_1(k) + C_1(k+1))\Big)X\log^k X \\ &\quad + o_{g,k,\eta}\big(X\log^k X\big) \\ &\quad + O_{k,g}\Big(X^{\frac12}(\log X)^{\frac{3k}{2}+292}\sum_{\ell=0}^{k+1}\Big\{\sum_{d\leq 2yz^2}\Big|\sum_{n,\, d|n}\big(\log^\ell \cdot g\big)\big(\frac{n}{X}\big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big|\Big\}^{\frac12}\Big).\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout entier n vérifiant $X \leq n \leq 2X$, $\mu^2(n) = 1$, $\omega(n) \geq 2$ et $p|n \Rightarrow p \geq (2X)^{\frac14}$, on a

$$\big(\Lambda * \Lambda_k\big)(n) \geq c_3'(\log X)^{k+1},$$

pour un certain $c_3' > 0$. La relation (4.1) implique alors, pour un certain $c_3 > 0$

$$\sum_{n,\, p|n\Rightarrow p>(2X)^{\frac14}} g\big(\frac{n}{X}\big)\mu^2(n)\big(\Lambda * \Lambda_k\big)(n)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \geq c_3\hat{g}(1)X\log^k X. \tag{4.9}$$

Il reste à confronter les relations (4.8) et (4.9), à opérer comme précédemment, en choisissant η suffisamment petit et à remarquer que la fonction $\Lambda * \Lambda_k$ a pour support l'ensemble des entiers n vérifiant $2 \leq \omega(n) \leq k+1$, pour terminer la preuve du corollaire 1.3.

■

RÉFÉRENCES

[Bo1] E. BOMBIERI, *The asymptotic sieve,* Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5) 1/2 (1975–76), 243–269.

[Bo2] E. BOMBIERI, *On twin almost primes,* Acta Arith. **28** (1975), 177–193 et Corrigendum, 457–461.

[De–Iw] J–M. DESHOUILLERS et H. IWANIEC, *Kloosterman sums and Fourier coefficients os cusp forms,* Inv. Math. **70** (1982), 219–288 .

[Fo] E. FOUVRY, *Sur le problème des diviseurs de Titchmarsh,* J. Reine Angew. Math. **357**(1985), 51–76.

[Fo–Iw] E. FOUVRY et H. IWANIEC, *Gaussian Primes,* Acta Arith. **79**(1997), 249–287.

[Fo–Ma] E. FOUVRY et C. MAUDUIT, *Méthodes de crible et fonctions sommes de chiffres,* Acta Arith. **77** (1996), 339–351.

[Fo–Mi2] E. FOUVRY et P. MICHEL, *Sommes de modules de sommes d'exponentielles,* Pacific J. Math. (à paraître).

[Fo–Mi2] E. FOUVRY et P. MICHEL, *Sur le changement de signe des sommes de Kloosterman,* preprint.

[Fr] J. FRIEDLANDER, *Selberg's formula and Siegel's zero,* Recent Progress in Analytic Number Theory, éd. H. Halberstam et C. Hooley, vol. **I**, Academic Press, London (1981), 15–23.

[Fr–I1] J. FRIEDLANDER et H. IWANIEC, *On Bombieri's asymptotic sieve,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) **5** (1978), 719–756.

[Fr–I2] J. FRIEDLANDER et H. IWANIEC, *Bombieri's sieve,* Analytic Number Theory, vol. I, (Allerton Park, IL, 1995), Prog. Math. **138**, Birkhäuser, Boston (1996), 411–430.

[Ha–Ri] H. HALBERSTAM et H.–E. RICHERT, Sieve Methods, Academic Press, London (1974).

[K–M–V] E. KOWALSKI, P. MICHEL et J. VANDERKAM, *Non–vanishing of high derivatives of automorphic L–functions at the center of the critical strip,* J. Reine Angew. Math. **526** (2000), 1–34.

[Ku] N. V. KUZNIETSOV, *Petersson hypothesis for parabolic forms of weight* 0 *and Linnik hypothesis for sums of Kloosterman sums,* Math. Sbornik **111**(153), n. 3 (1980), 334-383.

[Ru] Z. RUDNICK, Prepublication (2002).

[Sa] P. SARNAK, *Lettre à Z. RUDNICK* (2002).

[Te] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France (1995).

Étienne FOUVRY
Mathématique, Bât. 425
Campus d'Orsay
F–91405 ORSAY Cedex
FRANCE
`Etienne.Fouvry@math.u-psud.fr`

Philippe MICHEL
Mathématique
Université Montpellier II, CC 051
34095 MONTPELLIER Cedex
FRANCE
`michel@math.univ-montp2.fr`