Sur le dualisant de $X_0(N)$

P. MICHEL et E. ULLMO, Université d'Orsay

23 Janvier, 1997

1 Introduction

Soit N un entier sans facteur carré, on trouve dans [AU2] une interprétation modulaire et une interprétation spectrale de l'auto-intersection du dualisant relatif, dans le sens de la théorie d'Arakelov, des courbes modulaires $X_0(N)$. Le sens de cet invariant arithmétique a été donné par Szpiro [Sz] et Zhang [Z].Soit K un corps de nombres et $X_K \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ une courbe lisse et géométriquement connexe sur K de genre $g \geq 1$. On note ω^2 l'auto-intersection du dualisant relatif au sens de la théorie d'Arakelov [Ar] et ω_a^2 cette auto-intersection au sens de la théorie des intersections de Zhang [Z]. Ces deux invariants coincident quand le modèle minimal non-singulier $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(O_K)$ est lisse sur l'anneau des entiers O_K de K. On a toujours les inégalités:

$$\omega^2 \geq \omega_a^2 > 0 \tag{1}$$

et la différence $\omega^2 - \omega_a^2$ se calcule explicitement si on connait les fibres de mauvaise réduction de X par le théorème 5-5 et le corrolaire 5-7 de [Z]. Soit J_K la Jacobienne de X_K, on note h_{NT} la hauteur de Néron-Tate sur J_K. Pour tout diviseur D_0 de degré 1 sur X_K, on note ϕ_{D_0} le morphisme de X_K dans J_K qui lui est associé. Il est alors connu [Sz], [Z] que pour tout diviseur D_0 de degré 1 sur X_K et tout $\epsilon > 0$:

$$\{x \in X_K(\overline{K}) \ \ |h_{NT}(\phi_{D_0}(x)) \leq \frac{\omega_a^2}{2(2g-2)} - \epsilon\} \tag{2}$$

est fini et si on choisit D_0 tel que $[K_X - (2g-2)D_0]$ soit de torsion dans J_K (K_X est le diviseur canonique sur X_K) alors

$$\{x \in X_K(\overline{K}) \ \ |h_{NT}(\phi_{D_0}(x)) \leq \frac{\omega_a^2}{(2g-2)}\} \tag{3}$$

est infini. La discrétion de l'ensemble des points algébriques de X_K dans sa Jacobienne pour la topologie de Néron-Tate (conjecture de Bogomolov) qui est donc équivalente à la positivité de ω_a^2 a été montré dans [Ul].

Le but de ce travail est d'expliciter ces invariants arithmétiques dans le cas des courbes modulaires $X_0(N)$. Dans tout ce texte, N désignera un entier sans facteur carré tel que $N \notin \{1, \ldots, 10, 12, 13, 16, 18, 25\}$ de sorte que $X_0(N)$ admet une structure de courbe lisse géométriquement connexe de genre $g_N \geq 1$ sur $\mathbf{Q}$. On note ϕ le plongement de $X_0(N)$ dans sa Jacobienne $J_0(N)$. On notera ω_N^2 et $\omega_{a,N}^2$ les invariants arithmétiques précédemment définie de la courbe modulaire $X_0(N)$. On obtient ainsi:

Théorème 1.1 *Pour tout N sans facteur carrés, premier à 6, on a l'égalité*

$$\omega_N^2 = 3g_N \log N(1 + O(\frac{\log\log N}{\log N})).$$

Deligne et Rapoport [DeRa] ont déterminé le modèle minimal non singulier $X_0(N)/\mathbf{Z}$ de $X_0(N)$. Ceci permet de calculer explicitement la différence $\omega_N^2 - \omega_{a,N}^2$. Ceci a été fait dans [AU2] où il est montré (partie 4-3) que

$$\omega_N^2 - \omega_{a,N}^2 = \frac{g_N}{3} \log N + O(\log N). \tag{4}$$

On a l'équivalent:

$$\omega_N^2 = 3g_N \log N(1 + O(\frac{\log\log N}{\log N})).$$

On obtient alors en utilisant 2 et 3:

Théorème 1.2 *Pour tout N sans facteur carrés, premier à 6, on a l'égalité*

$$\omega_{a,N}^2 = \frac{8}{3} g_N \log N(1 + O(\frac{\log\log N}{\log N})).$$

En particulier, on obtient pour tout $\epsilon > 0$ et tout N assez grand:

$$\{x \in X_0(N)(\overline{K}) \ \ |h_{NT}(\phi(x)) \leq (\frac{2}{3} - \epsilon) \log N\} \tag{5}$$

est fini et

$$\{x \in X_0(N)(\overline{K}) \ \ |h_{NT}(\phi(x)) \leq (\frac{4}{3} + \epsilon) \log N\} \tag{6}$$

est infini.

Les énoncés précédents reposent sur l'interprétation modulaire de l'auto-intersection du dualisant relatif démontré dans [AU2].On obtient ici le contrôle en fonction du niveau N, des quantités relative à la métrique d'Arakelov qui interviennent dans cette interprétation, ainsi que de la hauteur de Neron-Tate du diviseur canonique de $X_0(N)$. Nous expliquons ces résultats dans la section suivantes.

1.1 La métrique d'Arakelov de $X_0(N)$ Soit N un entier sans facteur carré et $S_2(\Gamma_0(N))$ l'espace des formes cuspidales holomorphes de poids deux et de niveau N. Cet espace est muni du produit scalaire de Petersson (,). Soit $\mathcal{F}$ une base de $S_2(\Gamma_0(N))$, orthonormée pour le produit scalaire de Petersson, alors la fonction

$$F(z) := \frac{y^2}{g_N} \sum_{f\in\mathcal{F}} |f(z)|^2$$

est la densité associée à la mesure d'Arakelov sur la courbe $X_0(N)$.

Pour toute pointe κ de $X_0(N)$ on note $E_\kappa(z,s)$ sa série d'Eisenstein correspondante. Il résulte alors de la théorie des séries d'Eisenstein que la transformée de Rankin-Selberg de F

$$R_{\kappa,F}(s) := \int_{X_0(N)} E_\kappa(z,s)F(z)\frac{dxdy}{y^2} \tag{7}$$

admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle en 1 de résidu $||F||_1/vol = 1/vol$, avec $vol := Vol(X_0(N))$; de sorte que l'on peut écrire

$$R_{\infty,F}(s) = \frac{1}{vol(s-1)} + C_F + O(s-1).$$

Il est démontré dans [AU2] (Prop. B et Prop 4.2.1) l'égalité

$$\omega_N^2 = \frac{12(g_N+1)(g_N-1)}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]}\sum_{p|N}(\frac{p+1}{p-1})\log p + 4g_N(g_N-1)g_{Ar}(0,\infty) - \frac{h}{2}. \tag{8}$$

Dans l'expression précédente $h = h_{NT}(K_{X_0(N)} - (2g-2)(\infty))$ est la hauteur de Néron-Tate du diviseur canonique de $X_0(N)$; il est démontré dans [AU2] (Lemme 4.1.1) que cette quantité est nulle si N possède un diviseur premier $\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ et un diviseur premier $\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, dans la section 6 nous traitons le cas général

$$h = O_\epsilon(N^\epsilon)$$

pour tout ϵ positif en nous ramenant à calculer des hauteurs de points de Heegner à l'aide des formules de Gross-Zagier [GZ].

La quantité $g_{Ar}(0,\infty)$ est la fonction de Green-Arakelov évaluée aux pointes 0 et ∞ et on a l'égalité ([AU2] Thm. C et Section 4.3)

$$g_{Ar}(0,\infty) = \frac{2\pi}{vol}\Big(\sum_{p|N}\frac{p^2-1-2p}{p^2-1}\log p - 2\gamma - \frac{a\pi}{6} - 1\Big) + 4\pi C_F - 2\pi D_F \tag{9}$$

Dans l'expression précédente, a désigne la dérivée en 1 de la fonction $\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)/(\Gamma(s)\zeta(2s))$ et D_F est une constante positive définie de la manière suivante: Soit la décomposition spectrale de $F(z)$

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} A_n\phi_n(z) + \sum_\kappa \int_0^\infty A_\kappa(t)E_\kappa(z, \frac{1}{2}+\imath t)dt,$$

alors D_F est la quantité

$$D_F = \sum_{n\geq 1} \frac{|A_n|^2}{\lambda_n} + 2\pi \sum_{\kappa} \int_0^{\infty} \frac{|A_\kappa(t)|^2}{1/4+t^2} dt.$$

D'après la majoration de Selberg $\lambda_1 \geq 3/16$ et l'identité de Parseval, on a la majoration

(10) $$D_F \leq (16/3)||F||_2^2.$$

Pour obtenir les théorèmes 1.1 et 1.2 nous estimons diverses quantités associées à $F(z)$ qui apparaissent dans l'équation (9). On obtient dans ce texte:

Théorème 1.3 *Pour tout N sans facteurs carrés et pour tout $\epsilon > 0$ on a*

$$C_F = \frac{1-\log 4\pi}{vol}(1 + O_\epsilon(N^{-1/8+\epsilon})).$$

Utilisant le Théorème F de [AU2] on en déduit le corollaire suivant sur la fonction Zéta de Selberg associée à $X_0(N)$:

Corollaire 1.4 *Pour tout $\epsilon > 0$ on a la majoration*

$$lim_{s\to 1} \frac{Z'}{Z}(s) - \frac{1}{s-1} = O_\epsilon(N^{7/8+\epsilon}).$$

Pour controler le terme D_F nous majorons d'abbord la norme sup , $\|F\|_\infty$ de F, puis sa norme L_2: Nous montrons les estimations suivantes

Théorème 1.5 *Pour tout N sans facteurs carrés, on a*

$$||F(z)||_\infty = \sup_{z\in\mathcal{H}} |F(z)| \ll \frac{\log N \tau^5(N)}{g_N}.$$

Remarque. — Ce résultat améliore nettement la majoration $||F(z)||_\infty \ll_\epsilon N^{1+\epsilon}$ de [AU1] TH. B: à cette époque la minoration de Hoffstein-Lockhart ([HL]) $(f,f) \gg N^{1-\epsilon}$ pour une forme primitive de niveau N, nétait pas disponible... Notons que si dans [AU1] p. 306 on insére cette minoration à la place de la minoration triviale $(f,f) \gg 1$, on obtient $||F(z)||_\infty \ll_\epsilon N^\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Nous tirons donc avantage des estimations en moyenne pour gagner un facteur g_N supplémentaire. Nous majorons également la norme L_2 de F en gagnant un facteur $\log N\tau^5(N)$ par rapport à la majoration précédente:

Théorème 1.6 *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout N sans facteurs carrés, on a l'égalité*

$$||F(z)||_2^2 = \int_{X_0(N)} F(z)^2 \frac{dxdy}{y^2} = \frac{1}{vol}(1 + O_\epsilon(N^{-1/53+\epsilon}));$$

Les égalités:

$$vol = \frac{\pi}{3}[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)], \quad \frac{12(g_N+1)}{[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]} = 1+O(\tau(N)N^{-1}), \sum_{p|N} \frac{\log p}{p} = O(\log\log N),$$

permettent en utilisant (9), les théorèmes 1.3, 1.6 et l'équation (10) d'obtenir:

$$g_{Ar}(0,\infty) = \frac{1}{2g_N} \log N(1 + O(\frac{\log\log N}{\log N})). \tag{11}$$

On obtient alors les théorèmes 1.1 et 1.2 en utilisant l'équation (8)

Disons que la preuve de ces estimations se simplifie considérablement si on suppose que N est premier: l'espace des formes de poids 2 coincide avec celui des formes nouvelles et on peut choisir pour base, une base formée de formes primitives de niveau N normalisées; aussi nous donnons dans la section 3. une démonstration du Théorème 4.1 pour N premier. Pour le cas général nous utilisons une base relativement "canonique" formée à partir de formes nouvelles primitives de niveau $m|N$; ce choix est synthétisé dans la proposition 2.2 ([AU1] Prop. 3.2).

Remarque. — Les estimations analogues aux Théorèmes 1.5, 1.6, 1.3 4.1, dans le cas des formes de poids ≥ 2 sont bien sur valables en suivant la même méthode. Nous nous sommes restreint au cas des formes de poids deux car il a une bonne interprétation pour la géométrie d'Arakelov. Pour les formes de poids $k > 2$ une interprétation Arakelovienne de ces estimations devrait exister comme cela est fortement suggéré dans [GZ].

2 Normalisations et Lemmes préliminaires

Dans la suite ϵ désignera un réel positif aussi petit que l'on souhaite dont la définition peut varier d'une ligne à l'autre.

Soit N sans facteurs carrés et $k \geq 2$ un entier pair. Rappelons que les pointes de $X_0(N)$ correspondent aux diviseurs v de N par $\kappa \equiv 1/v$ et que $\infty \equiv 1/N$. Pour toute pointe κ fixons $\sigma_\kappa \in SL_2(\mathbf{R})$ tel que $\sigma_\kappa(\infty) = \kappa$ et $\sigma_\kappa^{-1}\Gamma_0(N)_\kappa\sigma_\kappa = \Gamma_0(N)_\infty$ (si $\kappa = \infty$ on prendra $\sigma_\infty = Id$). Toute forme cuspidale de poids k, $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ admet alors un développement de Fourier autour de κ:

$$f_{|\sigma_\kappa}(z) = \sum_{n\geq 1} \hat{f}_\kappa(n)\,\mathrm{e}(nz), \;\; \mathrm{e}(z) := \exp(2\imath\pi z).$$

On pose alors $a_n(\kappa, f) := f_\kappa(n)/n^{(k-1)/2}$ (pour la pointe ∞, on écrira simplement $\hat{f}(n)$ et $a_n(f)$).

2.1 Base orthonormée, sommes de Kloosterman et grand crible Si $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de $S_k(\Gamma_0(N))$ les coefficients de Fourier de $F(z)$ sont reli'es des sommes de sommes de Kloosterman par la "formule des traces" de Petersson (cf. [DeI] (4.4)): pour tout $m, n \geq 1$ on a l'égalité

$$(12)\qquad \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in \mathcal{F}} a_m(f)\overline{a_n(f)} = \delta_{m-n} - 2\pi\imath^{-k} \sum_{c \geq 1} \frac{S(m,n;cN)}{cN} J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{cN})$$

où δ_{m-n} est le symbole de Kronecker, $S(m,n;c) = \sum_{\substack{x \pmod c \\ (x,c)=1}} \mathrm{e}(mx + n\overline{x}/c)$ est la somme de Kloosterman et $J_{k-1}(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre $k-1$; nous utiliserons les majorations suivantes de $S(m,n;c)$ et $J_{k-1}(x)$:

$$(13)\qquad S(m,n;c) \leq (m,n,c)^{1/2} c^{1/2} \tau(c), \quad J_{k-1}(x) \ll \min(x, x^{-(k-1)/2}).$$

On en déduit immédiatement l'égalité

$$(14)\qquad \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in \mathcal{F}} |a_1(f)|^2 = 1 + O(\tau(N) N^{-3/2})$$

Duke, Friedlander et Iwaniec ont combiné la formule des traces de Petersson avec le grand crible arithmétique donner des inégalités de grand crible quasi optimales sur les coefficients de Fourier des formes $f \in \mathcal{F}$ ([DFI] Theorem 1.):

Proposition 2.1 *Soit (α_n) une suite de complexes, alors on a l'égalité*

$$(15)\qquad \sum_{f \in \mathcal{F}} |\sum_{n \leq K} \alpha_n a_n(f)|^2 = \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}(1 + O(\frac{K}{N}))||\alpha||^2$$

avec

$$||\alpha||^2 = \sum_{n \leq K} |\alpha_n|^2$$

Remarque. — Dans [DFI], la proposition précédente est démontrée avec un terme $O(K \log K/N)$ au lieu de $O(K/N)$. Le facteur $\log K$ (qui n'apparait qu'en poids 2) peut être enlevé en utilisant la méthode de Duke [Du].

2.2 Une base orthonormée "quasiment canonique" Soit une forme nouvelle primitive f de $S_k(\Gamma_0(N))$ (ie. valeur propre de tous les opérateurs de Hecke, de l'involution d'Atkin), on impose *a priori* la normalisation $a_1(f) = 1$ et on a alors la majoration de Deligne

$$(16)\qquad |a_n(\kappa, f)| \leq \tau(n)$$

où $\tau(n)$ est la fonction nombre de diviseurs. Pour profiter pleinement de cette majoration dans les estimations qui suivent nous utiliserons une base particulière $\mathcal{F}$ obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt d'une base formée à partir des formes nouvelles primitives de niveau m où m parcourt l'ensemble des diviseurs de N ([AU1] Prop 3.2):

Proposition 2.2 *Soit N sans facteurs carrés la fonction $F(z)$ s'exprime sous la forme*

$$F(z) = \frac{1}{g_N} \sum_{m|N} \sum_{\substack{f \ primitive \\ pour \ \Gamma_0(m)}} H(f,N)(z)$$

avec

$$\begin{aligned} H(f,N)(z) = \quad & y^2 \frac{1}{(f,f)_N} \prod_{p|N/m} \Big(1 - \frac{\hat{f}(p)^2}{(p+1)^2}\Big)^{-1} \\ & \times \sum_{d,d'|N/m} \mu(d)\mu(d')dd'\hat{f}(R/r) \prod_{p|R/r} \frac{1}{p+1} f(dz)\overline{f}(d'z) \end{aligned}$$

où $R = [d,d']$ (resp. $r = (d,d')$) désigne de ppcm de d et d' (resp. leur pgcd) et $(\ ,\ )_N$ est le produit scalaire de Petersson sur $S_2(\Gamma_0(N))$.

On utilisera aussi une variante portant sur les coefficients de Fourier des éléments de $\mathcal{F}$:

Proposition 2.3 *Pour toute pointe κ, et pour tout couple $n_1, n_2 \geq 1$, on pose*

$$A(\kappa, n_1, n_2) := \sum_{f \in \mathcal{F}} a_f(\kappa, n_1)\overline{a_f(\kappa, n_2)};$$

on a alors l'égalité

$$A(\kappa, n_1, n_2) = \sum_{m|N} \sum_{\substack{f \ primitive \\ pour \ \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_N} \sum_{d,d'|N/m} b(d,d',f) a_f(\kappa, n_1/d)\overline{a_f(\kappa, n_2/d')}$$

avec

$$b(d,d',f) = \prod_{p|N/m} \Big(1 - \frac{\hat{f}(p)^2}{(p+1)^2}\Big)^{-1} \mu(d)\mu(d')dd'\hat{f}(R/r) \prod_{p|R/r} \frac{1}{p+1}$$

où $R = [d,d']$ (resp. $r = (d,d')$) désigne de ppcm de d et d' (resp. leur pgcd), et avec la convention que $a_f(\kappa, n/d) = 0$ si $d \not| n$.

De la majoration de Deligne (16) on en déduit alors le

Corollaire 2.4 *Pour toute pointe κ, et pour tout couple $n_1, n_2 \geq 1$, on a la majoration*

$$A(\kappa, n_1, n_2) \ll \tau(n_1)\tau(n_2)\tau(N)^5 (N, n_1, n_2)$$

Preuve. — Par la majoration de Deligne on a la majoration

$$b(d,d',f) = O(\tau(N)^2(d,d')^{3/2}[d,d']^{1/2}); \tag{17}$$

on en déduit par la majoration de Deligne $|a_f(\kappa,n_1/d)\overline{a_f(\kappa,n_2/d')}| \leq \tau(n_1)\tau(n_2)$ la majoration

$$\begin{aligned} A(\kappa,n_1,n_2) \quad & \ll \tau(n_1)\tau(n_2)\sum_{m|N}\sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_N} \sum_{\substack{d,d'|N/m \\ d|n_1,d'|n_2}} \tau(N)^2(d,d')^{3/2}[d,d']^{1/2} \\ & \ll \tau(n_1)\tau(n_2)\tau^4(N)\sum_{m|N}\frac{(N/m,n_1,n_2)(N/m)}{[\Gamma_0(m):\Gamma_0(N)]} \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_m} \\ & \ll \tau(n_1)\tau(n_2)\tau^5(N)(N,n_1,n_2) \end{aligned}$$

Dans la dernière majoration on a utilisé les égalités $(f,f)_N = [\Gamma_0(m):\Gamma_0(N)](f,f)_m$ et $[\Gamma_0(m):\Gamma_0(N)] = \prod_{p|N/m}(p+1)$ et la majoration

$$\sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_m} = O(1)$$

Pour montrer cette dernière majoration, il suffit de completer la famille orthonormée $\{f(z)/(f,f)_m^{1/2},\ f \textit{ primitive pour} \Gamma_0(m)\}$ en une base orthonormée telle que pour tout élément f dans la base, le premier coefficient de fourier de f en ∞ est ≥ 0 et d'appliquer à cette base la majoration (14).

□

2.3 Rappels sur la Théorie des séries d'Eisenstein et sur la Théorie de Rankin-Selberg

Séries d'Eisenstein. Notre référence sera [Iw] Chap. 13. Considérons le vecteur dont les composantes sont les série d'Eisenstein associées aux pointes κ de $X_0(N)$

$$\mathcal{E}(z,s) := {}^t(\ldots, E_\kappa(z,s), \ldots).$$

Alors le vecteur $\mathcal{E}(z,s)$ est une fonction holomorphe en s sur $\{s,\ Res > 1\}$ et elle admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$, holomorphe sur $\{s,\ Res \geq 1/2\} - \{1\}$ avec un pôle simple en 1 de résidu $1/vol(X_0(N))$; et $\mathcal{E}(z,s)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\mathcal{E}(z,s) = \Phi(s)\mathcal{E}(z,1-s) \tag{18}$$

où $\Phi(s)$ est la matrice dont les coefficients sont indicé par les couples de pointes $(\kappa,\kappa')=(1/v,1/v'),\ v|N,\ v'|N$ et dont le coefficient en (κ,κ') est

$$(19)\, \Phi_{\kappa,\kappa'}(s)=\psi(s)\prod_{p|N}(p^{2s}-1)^{-1}\phi((v,v')(N/v,N/v'))\prod_{p|(v,N/v')(v',N/v)}(p^s-p^{1-s})$$

$$avec\ \psi(s)=\pi^{2s-1}\frac{\Gamma(1-s)\zeta(2(1-s))}{\Gamma(s)\zeta(2s)}$$

et en particulier si on note t la nombre de facteurs premiers de N la fonction $s^t(s-1)(s-1/2)\zeta(2s)\mathcal{E}(z,s)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Théorie de Rankin-Selberg. Soient $f,g\in S_2(\Gamma_0(N)$ et considérons le vecteur dont les composantes sont indicées par les pointes κ de $X_0(N)$

$$\mathcal{L}(f\otimes\overline{g},s):=\ {}^t(\ldots,L_\kappa(f\otimes\overline{g},s),\ldots),\ L_\kappa(f\otimes\overline{g},s)=\sum_n\frac{a_n(\kappa,f)\overline{a_n(\kappa,g)}}{n^s}.$$

Alors $\mathcal{L}(f\otimes\overline{g},s)$ est holomorphe sur $Res>1$ et admet un prolongement méromorphe sur C avec éventuellement un pôle simple en 1 de résidu $16\pi^2(f,g)/vol(X_0(N))$:plus précisement, la fonction $s^{t-1}(s-1/2)\zeta(2s)\mathcal{L}(f\otimes\overline{g},s)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}-\{1\}$. De plus, la fonction vectorielle

$$\Lambda(f\otimes\overline{g},s)=\pi^{-s}\Gamma(s+1)\mathcal{L}(f\otimes\overline{g},s)$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f\otimes\overline{g},s)=\Phi(s)\Lambda(f\otimes\overline{g},1-s) \tag{20}$$

3 Borne supérieure pour la métrique d'Arakelov

Dans cette section, nous montrons le Théorème 1.5. On reprend les notations de [AU1] P.299. On pose

$$F_N^{new}(z):=\sum_{\substack{f\ primitive\\ pour\ \Gamma_0(N)}}\frac{y^2|f(z)|^2}{(f,f)}.$$

Notre première étape sera de montrer la proposition suivante

Proposition 3.1 *On a la majoration*

$$\sup_{z\in\mathcal{H}}|F_N^{new}(z)|\ll\log N.$$

Preuve. — Soit l'ensemble de matrices $A_{q,j}$ pour $q|N$ et $0 \leq j \leq q-1$ définies dans [AU1], elles forment un système de représentant de $SL_2(\mathbf{Z})/\Gamma_0(N)$; alors pour toute matrice $A_{q,j}$ et pour toute forme primitive nouvelle f on a l'égalité $y^2|f(A_{q,j}z)|^2 = y^2|f(\frac{z-j}{q})|^2$ [AU1] on a donc l'égalité

$$F_N^{new}(A_{q,j}z) = F_N^{new}(\frac{z-j}{q}),$$

Cela implique alors en completant la base des formes nouvelles en une base de $S_2(\Gamma_0(n))$

$$\sup_{z\in\mathcal{H}} F_N^{new}(z) = \sup_{\substack{z\in\mathcal{H}\\ y\geq 1/(2N)}} F_N^{new}(z) \leq \sup_{\substack{z\in\mathcal{H}\\ y\geq 1/(2N)}} g_N F(z). \tag{21}$$

dans la suite, on suppose donc que $y = Imz \geq 1/(2N)$. On utilise maintenant le développement de Fourier de $F(z)$ à l'infini:

$$F(z) = \frac{y^2}{g_N}\sum_{f\in\mathcal{F}} |\sum_{n\geq 1} \hat{f}_n \,\mathrm{e}(nz)|^2$$

Soit $K = \delta N \log N$ avec $\delta > 1/(4\pi)$; on fait la décomposition suivante de

$$|f(z)|^2 = |\sum_{n\leq K} \hat{f}_n \,\mathrm{e}(nz) + \sum_{n>K} \hat{f}_n \,\mathrm{e}(nz)|^2 \ll |\sum_{n\leq K} \hat{f}_n \,\mathrm{e}(nz)|^2 + |\sum_{n>K} \hat{f}_n \,\mathrm{e}(nz)|^2.$$

On majore $F(z) \ll F_{\leq K}(z) + F_{>K}(z)$ avec

$$F_{\leq K}(z) = \frac{y^2}{g_N}\sum_{f\in\mathcal{F}} |\sum_{n\leq K} \hat{f}_n \,\mathrm{e}(nz)|^2$$

et $F_{>K}(z)$ défini de manière analogue (les fonctions $F_{\leq K}(z)$ et $F_{>K}(z)$ ne sont plus $\Gamma_0(N)$-invariantes.

Majoration de $F_{>K}(z)$. Pour $y \geq 1/(2N)$, on a d'après le Corollaire 2.4 on a la majoration

$$\begin{aligned}
F_{>K}(z) &\ll \frac{\tau(N)^5}{g_N}\sum_{n_1,n_2>K}(n_1,n_2,N)\tau(n_1)\tau(n_2)(n_1n_2)^{1/2}y^2\,\mathrm{e}^{-2\pi(n_1+n_2)y}\\
&\ll \frac{\tau(N)^5}{g_N}\sum_{d|N} d(\sum_{n>K/d} y\tau(n)n^{1/2}\,\mathrm{e}^{-2\pi ndy})^2\\
&\ll \frac{\tau(N)^7}{g_N}K^{1+\epsilon}\,\mathrm{e}^{-4\pi Ky}\sum_{d|N}\frac{1}{d^{3/2+\epsilon}}\\
&\ll \frac{N^\epsilon}{g_N}K^{1+\epsilon}\,\mathrm{e}^{-4\pi K/N} \ll \frac{N^{1+\epsilon-4\pi\delta}}{g_N}
\end{aligned}$$

Majoration de $F_{\leq K}(z)$. On utilise la Proposition 15 pour obtenir

$$F_{\leq K}(z) = \frac{4\pi y^2}{g_N}(1 + O(\frac{K}{N})) \sum_{n\leq K} n\,\mathrm{e}^{-4\pi n y}.$$

On a l'égalité

$$\begin{aligned} y^2 \sum_{1\leq n\leq K} n\,\mathrm{e}^{-4\pi n y} &= \frac{-y^2}{4\pi}\frac{d}{dy}\frac{1-\mathrm{e}^{-4\pi(K+1)y}}{1-\mathrm{e}^{-4\pi y}} \\ &= y^2\frac{\mathrm{e}^{-4\pi y} + \mathrm{e}^{-4\pi(K+1)y}(K\,\mathrm{e}^{-4\pi y} - K + 1)}{(1-\mathrm{e}^{-4\pi y})^2} \end{aligned}$$

Comme $K = \delta N \log N$, $\delta > 1/4\pi$, cette fonction décroit rapidement pour $y > 1/(2N)$ et est majorée par sa valeur en $1/2N$ qui est $(4\pi)^{-2}(1 + o(1))$. On a donc la majoration

$$F(z) = O(\frac{1 + \log N}{g_N}),$$

et la proposition s'en déduit par (21).

□

Ceci démontre donc le Théorème 1.5, dans la cas où N est premier.

3.1 Majoration générale On utilise ici l'expression de $F(z)$ donnée dans la Proposition 2.2:

$$\begin{aligned} F(z) &\leq \frac{1}{g_N}\sum_{m|N}\frac{1}{[\Gamma_0(m):\Gamma_0(N)]}\prod_{p|N/m}\left(1-\frac{\hat{4}p}{(p+1)^2}\right)^{-1} \\ &\times \sum_{d,d'|N/m}\prod_{p|[d,d']/(d,d')}\frac{2p^{1/2}}{p+1}\sum_{\substack{f\ primitive \\ pour\ \Gamma_0(m)}}\frac{|ydf(dz)yd'\overline{f}(d'z)|}{(f,f)_m} \\ &\leq \frac{1}{2g_N}\sum_{m|N}\prod_{p|N/m}\left(\frac{p+1}{(p-1)^2}\right)\sum_{d,d'|N/m}\prod_{p|[d,d']/(d,d')}\frac{2p^{1/2}}{p+1}(F_m^{new}(dz) + F_m^{new}(d'z)); \end{aligned}$$

(on a utilisé la majoration $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$). Par la proposition 3.1, on en déduit la majoration

$$F(z) \ll \frac{\log N\tau(N)^5}{g_N}.$$

4 Transformée de Rankin-Selberg de la métrique d'Arakelov

Cette section est consacrée à la démontration des Théorèmes 1.3

Soit $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ une forme de poids 2, on pose $a_n(f) := \hat{f}(n)/n^{1/2}$ (où $\hat{f}(n)$ est le n-ième coefficient de Fourier de f dans son q-dévelopement à l'infini) et on considère sa convolution de Rankin-Selberg

$$L(s, f \otimes \overline{f}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n(f)|^2}{n^s}.$$

D'après la majoration de Deligne $|a_n(f)| \ll_\epsilon n^\epsilon$, cette série converge absoluement pour $Re\ s > 1$, d'autre part, on sait par la théorie des séries d'Eisenstein que $L(s, f \otimes \overline{f})$ se prolonge méromorphiquement à $\mathbf{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu R_f;on écrit donc le développement de Laurent de $L(s, f \otimes \overline{f})$ en 1 sous la forme

$$L(s, f \otimes \overline{f}) = \frac{R_f}{s-1} + c_f + \dots,\ R_f = \frac{16\pi^2(f,f)}{vol};$$

l'égalité

$$R_{\infty,F}(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s+1}} \frac{1}{g_N} \sum_{f \in \mathcal{F}} L(s, f \otimes \overline{f})$$

nous ramène à estimer la quantité

$$\frac{1}{g_N} \sum_{f \in \mathcal{F}} c_f.$$

En utilisant l'égalité $\Gamma'(1) = -\gamma$ on voit que le Théorème 1.3 est un corollaire du

Théorème 4.1 *Pour N sans facteurs carrés, et pour tout $\epsilon > 0$ on a la majoration*

$$\sum_f c_f = \gamma vol + O_\epsilon(N^{-1/8+\epsilon});$$

où γ désigne la constante d'Euler.

On considère la fonction

$$g(s) := (s - \frac{1}{2})\zeta(2s) \sum_{f \in \mathcal{F}} (L(s, f \otimes \overline{f}) - R_f \zeta(s));$$

$g(s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ et est holomorphe en 1 et notre but est donc de majorer $g(1)$...

Soit $\alpha > 0$ et $s_0 = \alpha + \imath t\ t \in \mathbf{R}$, on va majorer $g(1 + s_0)$: pour chaque f, on commence par la décomposition de $L(1 + s_0, f \otimes \overline{f})$:

$$L(1 + s_0, f \otimes \overline{f}) = \sum_{1 \leq n \leq N^\beta} \frac{a_f(n)^2}{n^{s_0+1}} + \sum_{n \geq N^\beta} \frac{a_f(n)^2}{n^{s_0+1}} := T_{f,1}(1 + s_0) + T_{f,2}(1 + s_0)$$

où $\beta = \beta(\alpha) > 1$ est un paramètre à fixer. On pose alors

$$L_F(s) = \sum_{f\in\mathcal{F}} L(s, f\otimes\overline{f}) := T_{1,F}(s) + T_{2,F}(s)$$

Dans la section suivante nous estimons $T_{1,F}(1+s_0)$ comme un terme principal grâce à la formule des traces de Petterson.

4.1 Passage aux sommes de Kloosterman Soit $T_{1,F}(1+s_0) := \sum_{f\in\mathcal{F}} T_{f,1}(1+s_0)$, on va montrer le lemme suivant

Lemme 4.2 *Pour* $0 < \alpha < 0.7$ *et* $\beta = \frac{15}{8}(1+6\alpha/5)(1+7\alpha/4+3\alpha^2/2)^{-1}$ *alors pour tout* $\epsilon > 0$ *on a*

$$T_{1,F}(1+s_0) = 4\pi\zeta(1+s_0) + O_{\epsilon,\alpha}(N^{\epsilon-\alpha\beta})$$

Preuve. — Par (12) on a

$$T_{1,F} = 4\pi\zeta(1+s_0) + O_\alpha(\frac{1}{\alpha N^{\alpha\beta}}) + T_1',$$

avec

$$T_1' = 8\pi^2 \sum_c \sum_{n\le N^\beta} \frac{S(n,n;cN)}{n^{1+s_0}cN} J_1(\frac{4\pi n}{cN})$$
$$= \sum_{n\le N^{\beta'}} + \sum_{N^{\beta'}<n\le N^\beta}$$

et $0 < \beta' < \beta$, la première somme est majorée par

$$\sum_{n\le N^{\beta'}} \le \sum_n \sum_c \frac{S(n,n;cN)}{n^{1+s_0}cN} J_1(\frac{4\pi n}{cN}) \ll \sum_{n\le N^{\beta'}} \frac{(n,N)^{1/2}}{n^{\sigma_0}} \sum_c \frac{(n,c)^{1/2}(Nc)^{1/2+\epsilon}}{(Nc)^2}$$
$$\ll_\alpha N^{(1-\alpha)\beta'-3/2+\epsilon}$$

On décompose la somme

$$\sum_{N^{\beta'}<n\le N^\beta} := \sum_{N^{\beta'}<n\le N^\beta}\sum_{c\le C} + \sum_{N^{\beta'}<n\le N^\beta}\sum_{c>C}$$

La deuxième somme est majorée comme précédemment par $N^{\epsilon+\beta-\alpha\beta'-3/2}/C^{1/2}$ Alors que la première est majorée par

$$N^\epsilon \sum_{N^{\beta'}<n\le N^\beta} \frac{(n,N)^{1/2}}{n^{3/2+\alpha}} \sum_{c\le C} \frac{(cN)^{1/2+\epsilon}(c,n)^{1/2}}{(cN)^{1/2}} \ll_\alpha \frac{N^\epsilon C}{N^{(\alpha+1/2)\beta'}}.$$

On prend alors $C = (N^{2\beta/3-1+\beta'/3})$ (on a donc la condition $2\beta+\beta'>3$) et T_1' est majorée par $O_\alpha(N^{(1-\alpha)\beta'-3/2+\epsilon}+N^{2\beta/3-\beta'(\alpha+1/6)-1+\epsilon})$. On choisit alors $\beta' = 3/2-\alpha\beta$ et

(22) $$\beta = \frac{15}{8}(1+6\alpha/5)(1+7\alpha/4+3\alpha^2/2)^{-1}$$

et $\alpha \leq 0.7$ (de sorte que $\beta' \leq \beta$ et $2\beta+\beta'>3$); ceci termine la preuve du Lemme.

□

Notons que $|\mathcal{F}| = g_N$ le genre de $X_0(N)$ et pour N sans facteur carrés et premier à 6 g_N est donné par l'expression suivante [AU2] Lemme 3.3.10

(23) $$g_N = \frac{1}{12}\prod_{p|N}(p+1)+1-\frac{1}{4}\prod_{p|N}\Big(1+(\frac{-1}{p})\Big)-\frac{1}{3}\prod_{p|N}\Big(1+(\frac{-3}{p})\Big)-\tau(N)/2.$$

Corollaire 4.3 *Avec les hypothèses du Lemme 4.2, on a l'égalité*

$$g(1+s_0) = O_\alpha(T_2(1+s_0)+N^{\epsilon-\alpha\beta}).$$

avec

$$T_2(s) = \sum_f \sum_{n>N^\beta} \frac{|a_n(f)|^2}{n^s}.$$

Preuve. — D'après la définition de $g(s)$, le lemme précédent et les égalités

$$vol(H/\Gamma_0(N)) = \pi/3[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)],\ \ [\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)] = N\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p}),$$

on a

$$\begin{aligned} g(1+s_0) &= (s_0+1/2)\zeta(2(1+s_0))4\pi(1-\frac{12g_N}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]})\zeta(1+s_0) \\ &\quad +O_\alpha(T_2(1+s_0)+N^{\epsilon-\alpha\beta}); \end{aligned}$$

Enfin, d'après (23) on remarque que

$$1-\frac{12g_N}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]} = O(\tau(N)N^{-1}) = O(N^{-\alpha\beta}).$$

□

Dans toute la suite la valeur de β sera celle définie au lemme 4.2 en fonction de $\alpha < 0.7$.

4.2 Le cas N premier On suppose ici N premier, on peut donc prendre pour $\mathcal{F}$ une base formée des $f/(f,f)^{1/2}$ où f décrit l'ensemble des formes primitives de niveau N (deux telles formes distinctes sont automatiquement orthogonales). Soit f une telle forme, sa convolution de Rankin-Selberg admet alors l'équation fonctionnelle suivante [CS]: On pose $\Phi_N(s) := \prod_{p|N}(1-\frac{1}{p^s})$; Alors la fonction $\zeta(2s)L(s, f\otimes\overline{f})$ est holomorphe sur $\mathbf{C}-\{1\}$ avec un pôle simple en 1 et vérifie

$$\Lambda(f,s) = \Lambda(f,1-s) \textit{ avec } \Lambda(f,s) = \mathcal{G}(s)\Phi_N(s)\zeta(2s)L(s,f\otimes\overline{f})$$
$$\mathcal{G}(s) := (2\pi^2)^{-s}\Gamma(s)\Gamma(s/2)^2$$

Par la majoration de Deligne $|a_f(n)|^2 \ll \tau(n)^2$, on a la majoration

$$T_2(1+s_0) \leq \sum_{n>N^\beta}\frac{\tau(n)^2}{n^{1+\alpha}} \ll N^{\epsilon-\alpha\beta} \tag{24}$$

Alors d'après le Corollaire 4.3 on a

$$g(1+s_0) = O(N^{\epsilon-\alpha\beta}).$$

D'autre part, l'équation fonctionnelle donne

$$\zeta(-2s_0)L_f(-s_0) = N^{1+2s_0}\frac{\mathcal{G}(1+s_0)\Phi_N(1+s_0)}{\mathcal{G}(-s_0)\Phi_N(-s_0)}\zeta(2(1+s_0))L(1+s_0,f\otimes\overline{f}).$$

Par l'égalité

$$|\Phi_N(-s_0)| \gg N^{\alpha-\epsilon},$$

et la formule de Stirling on voit qu'il existe une constante $A>0$ telle que

$$|\zeta(-2s_0)L_f(-s_0)| \ll (1+|t|)^A N^{1+\alpha+\epsilon}.$$

On déduit afin de l'équation fonctionnnelle pour ζ et des égalités

$$\sum_f\frac{1}{(f,f)} = O(1),\ \sum_f\frac{R_f}{(f,f)} = O(\frac{g_N}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]}) = O(1),$$

la majoration de $g(-s_0)$:

$$g(-s_0) = O((1+|t|)^A(N^{1+\alpha+\epsilon})$$

Par le principe de Phragmen-Lindelöf on a alors, pour tout $\epsilon,\alpha,\alpha'>0$ avec $\alpha<0.7$ l'égalité

$$g(1) = O((N^{1+\alpha'+\epsilon})^{\frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha'}}(N^{\epsilon-\alpha\beta})^{\frac{1+\alpha'}{1+\alpha+\alpha'}})$$
$$= 0(N^{\epsilon+(1+\alpha')(\alpha(1-\beta)+\epsilon)/(1+\alpha+\alpha')}).$$

On choisit alors α', ϵ assez petits, $\alpha = 1/3$ de sorte que $\alpha(\beta - 1)/(1+\alpha) = 0.125..$ et

$$g(1) = O(N^{-1/8+\epsilon}).$$

On a alors $\sum_f \frac{c_f}{(f,f)} = c_\zeta \sum_f \frac{R_f}{(f,f)} + g(1)$. avec

$$c_\zeta = (\zeta(s) - \frac{1}{s-1})(1) = \gamma$$

Ce qui prouve de Théorème 4.1 si N est premier.

4.3 Le cas général Soit N sans facteurs carrés.

Comme dans la section précédente, nous majorons $g(1)$ par convexité et pour cela il reste a obtenir une majoration de $g(1+s_0)$ (d'après le corollaire 1.2 il suffit de majorer $T_2(1+s_0)$) et une majoration de $g(-s_0)$. A ce point nous utilisons l'expression particulière de $F(z)$ en terme de formes primitives de niveau $m|N$ (Prop. 2.3), on obtient donc

$$L_F(s) = \sum_{m|N} \sum_{\substack{f \ primitive \\ pour \ \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_N} \sum_{d,d'|N/m} b(d,d',f) L(s, f(dz) \otimes \overline{f}(d'z)) \tag{25}$$

et en tronquant cette série de Dirichlet puis le Corollaire 2.4 on a

$$T_2(1+s_0) = \sum_{n > N^\beta} \frac{A(n,n)}{n^{1+s_0}}.$$

On obtient finalement

$$g(1+s_0) = O(N^{\epsilon - \alpha\beta})$$

Reste à majorer $g(-s_0)$.

Majoration de $g(-s_0)$ On utilise l'égalité (25) avec $s = -s_0$; l'équation fonctionnelle (20) fournit

$$L(-s_0, f(dz) \otimes \overline{f}(d'z)) = \frac{\pi^{-1}\Gamma(2+s_0)}{\Gamma(1-s_0)} \sum_{v|N} \Phi_{\infty,1/v}(-s_0) L_{1/v}(1+s_0, f(dz) \otimes \overline{f}(d'z))$$

Par la majoration (16), on a

$$L_{1/v}(1+s_0, f(dz) \otimes \overline{f}(d'z)) = \sum_{n \equiv 0 (\mathrm{mod}[d,d'])} \frac{a_{n/d}(1/v,f)\overline{a}_{n/d'}(1/v,f)}{n^{1+s_0}} \ll \frac{\tau^2([d,d'])}{[d,d']^{1+\alpha+\epsilon}}$$

D'autre part, part les formules de Stirling il existe $A > 0$ tel qu'on ait

$$\Phi_{1/N,1/v}(-s_0) \ll_\alpha (1+|t|)^A \phi(v) \prod_{p|N/v} |p^{-s_0} - p^{1+s_0}| \ll_\alpha (1+|t|)^A N^{1+\alpha+\epsilon}.$$

De ces majorations on déduit que

$$L_F(-s_0) \ll_\alpha (1+|t|)^A N^{1+\alpha+\epsilon}$$

et donc que $g(-s_0) = O((1+|t|)^A N^{1+\alpha+\epsilon})$ et on conclut comme précédemment par application du principe de Phragmen-Lindelöf.

5 Majoration de la norme L_2 de $F(z)$.

Pour évaluer l'intégrale $||F||_2^2 = \int_{X_0(N)} F(z)^2 d\mu(z)$, on emploie la méthode de Rankin-Selberg: on considère la transformée de Rankin-Selberg de F^2

$$R_{F^2}(s) = \int_{X_0(N)} F(z)^2 E_\infty(z,s) d\mu(z),$$

c'est une fonction holomorphe sur $Re\ s > 1$ qui se prolonge méromorphiquement à $\mathbf{C}$ avec un pôle en 1 de residu $||F||_2^2/vol$. Pour $\Re es > 1$, cette fonction se met sous la forme d'une série de Dirichlet

$$R_{F^2}(s) = \frac{\Gamma(s+3)}{(4\pi)^{s+3}} L(s,F^2) \text{ avec } \qquad L(s,F^2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3+s}} \widehat{F^2}(n) \ et$$

$$\widehat{F^2}(n) \qquad = \frac{1}{g_N^2} \sum_{f,g\in\mathcal{F}} |\widehat{f.g}(n)|^2;$$

$$\widehat{f.g}(n) \qquad = \sum_{i=1}^{n-1} \hat{f}(i)\hat{g}(n-i).$$

Si on préfère, on peut encore écrire $L(s,F^2)$ comme somme des transformées de Rankin-Selberg des formes de poids 4, $f.g$ avec f et $g \in \mathcal{F}$:

$$L(s,F^2) = \frac{1}{g_N^2} \sum_{f,g\in\mathcal{F}} L(s, f.g \otimes \overline{f.g}).$$

Si f et g sont deux formes nouvelles primitives de poids 2 et de niveau N, on peut espérer que le n-ième coefficient de Fourier de la forme de poids 4 $f.g$ satisfasse à la majoration de Deligne avec une bonne uniformité en N; l'idéal serait une majoration du type $\widehat{f.g}(n) = O_\epsilon(N^\epsilon n^{3/2+\epsilon})$; le lemme suivant montre que cette majoration est vraie en moyenne sur les $f,g \in \mathcal{F}$ et sur n:

Lemme 5.1 *Pour tout $x \geq 1$, et pour tout $\epsilon > 0$, on a la majoration*

$$\sum_{n\leq x} \frac{\widehat{F^2}(n)}{n^3} \ll_\epsilon \frac{N^\epsilon}{g_N^2} x^{1+\epsilon} \tag{26}$$

Preuve. — Pour s tel que $\Re es > 1$, on a la représentation intégrale

$$L(s,F^2) = \frac{(4\pi)^{s+3}}{\Gamma(s+3)} \int_0^1 \int_0^\infty F(z)^2 y^s \frac{dxdy}{y^2};$$

utilisant le Théorème 1.5, la positivité de F et la représentation intégrale de $L(s,F)$, on en déduit la majoration

$$L(s,F^2) = O\Big(\frac{\log^2 N}{g_N} \frac{\Gamma(\Re es+1)}{|\Gamma(s+3)|} L(\Re es, F)\Big);$$

appliquant alors le corollaire 2.4 on obtient la majoration

$$L(s,F^2) = O_{s,\epsilon}\Big(\frac{N^\epsilon}{g_N^2} \frac{\Gamma(\Re es+1)}{|\Gamma(s+3)|}\Big).$$

On utilise alors une formule de Perron effective, sous la forme de Théorème 2. Chap II. 2. de [T] avec $\kappa = 1+\epsilon$, $T = 1$ (cf. les notations de *loc. cit.*) ainsi que la positivité de $\frac{\widehat{F^2}(n)}{n^3}$ pour obtenir la majoration (26).

□

Posons $s = 1+\alpha+it$ avec $\alpha > 0$, $t \in \mathbf{R}$ et $K = N^\beta$, $\beta > 1$ un paramètre à fixer; par l'inégalité (26) et par intégration par partie, on a la décomposition suivante de $L(s,F^2)$:

$$\begin{aligned} L(s,F^2) \quad &= \sum_{n\leq K} \frac{1}{n^{3+s} g_N^2} \sum_{f,g} |\sum_{i=1}^{n-1} \hat{f}(i)\hat{g}(n-i)|^2 \\ &+ O_\epsilon\Big(\frac{K^\epsilon}{g_N^2 K^\alpha}\Big) \end{aligned}$$

On réécrit, la première somme sous la forme $\frac{(4\pi)^2}{g_N^2} T_{1,F^2}(s)$. Par (12), $T_{1,F^2}(s)$ s'écrit encore

$$\begin{aligned} T_{1,F^2}(s) \quad &= \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n\leq K} \frac{1}{n^{3+s}} \sum_{f,g} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{n_3+n_4=n} \hat{f}(n_1)\overline{\hat{f}(n_3)}\hat{g}(n_2)\overline{\hat{g}(n_4)} \\ &= \sum_{n\leq K} \frac{1}{n^{3+s}} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{n_3+n_4=n} (n_1n_2n_3n_4)^{1/2} \times \\ &(\delta_{n_1-n_3}\delta_{n_2-n_4} - \delta_{n_1-n_3} S(n_2,n_4) - \delta_{n_2-n_4} S(n_1,n_3) + S(n_1,n_3)S(n_2,n_4)) \end{aligned}$$

avec

$$S(m,n) = 2\pi \sum_{c\geq 1} \frac{S(m,n;cN)}{cN} J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{cN}\Big).$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_{1,F^2}(s) \quad &= \sum_{n\leq K}\frac{1}{n^{3+s}}\Big(\sum_{n_1=1}^{n-1} n_1(n-n_1) - 2\sum_{n_1=1}^{n-1} n_1(n-n_1)S(n_1,n_1) \\ &+ \sum_{n_1,n_3=1}^{n-1}(n_1n_3(n-n_1)(n-n_2))^{1/2}S(n_1,n_3)S(n-n_1,n-n_3)\Big) \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est le terme principal et il s'écrit sous la forme

$$\sum_{n\leq K}\frac{1}{n^{3+s}}\sum_{n_1=1}^{n-1} n_1(n-n_1) = \Xi(s) + O(N^{-\alpha\beta}). \tag{27}$$

où $\Xi(s) = \zeta(s)/6 - \zeta(s+2)/6$.

Le deuxième terme est majoré trivialement par la majoration suivante, valable pour tout $C \geq 1$:

$$\sum_{c\geq C}\frac{S(m,n;cN)}{cN}J_1\Big(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{cN}\Big) = O((m,n,N)^{1/2}(mn)^{1/2}C^{-1/2}N^{\epsilon-3/2}) \tag{28}$$

et on obtient

$$\sum_{n\leq K}\frac{1}{n^{3+s}}\sum_{n_1=1}^{n-1} n_1(n-n_1)S(n_1,n_1) \ll_\epsilon \frac{K^{1-\alpha+\epsilon}}{N^{3/2}}. \tag{29}$$

Le troisième terme est le plus difficile, on le notera dans la suite

$$T_{3,F^2,K}(s) = \sum_{n\leq K}\frac{1}{n^{3+s}}\sum_{n_1,n_3=1}^{n-1}(n_1n_3(n-n_1)(n-n_3))^{1/2}S(n_1,n_3)S(n-n_1,n-n_3).$$

On choisira $\beta = 54/53$ et on montrera dans la section suivante la

Proposition 5.2 *Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\epsilon > 0$, on a la majoration*

$$T_{3,F^2,N^{54/53}}(1+\alpha+\imath t) \ll_{\epsilon,\alpha} N^{\epsilon-(54/53)\alpha}.$$

Indiquons à partir de cette proposition la fin de la preuve du Théorème 1.6; elle est tout à fait similaire à celle du Théorème 1.3: On considère la fonction

$$h(s) = (s-1)(L(s,F^2) - \frac{(4\pi)^2}{g_N^2}\Xi(s));$$

D'après (27), (29) et la Proposition 5.2, la fonction $h(s)$ pour $s = 1+\alpha+\imath t$ est majorée par $O(N^{\epsilon-(54/53)\alpha}/g_N^2)$. D'autre part en généralisant la majoration (26) aux autres pointes de $X_0(N)$ et en utilisant l'equation fonctionnelle de $L(s, F^2)$ (obtenue à partir des équations fonctionnelles des fonctions $L(s, f.g \otimes \overline{f.g})$) on voit que

$$h(-\epsilon + it) = O_\epsilon(\frac{N^{1+\epsilon}(1+|t|)^A}{g_N^2}).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le principe de Phragmen-Lindelöf avec α assez grand pour obtenir l'égalité

$$||F||_2^2 = \frac{vol}{(4\pi g_N)^2}(1 + O_\epsilon(N^{\epsilon-1/53})) = \frac{1}{vol}(1 + O_\epsilon(N^{\epsilon-1/53})).$$

5.1 Preuve de la Proposition 5.2 Notons T_n la somme

$$\begin{aligned} T_n := & \sum_{n_1,n_3=1}^{n-1} (n_1(n-n_1)n_3(n-n_3))^{1/2} \\ & \times 4\pi^2 \sum_{c,c'\geq 1} \frac{S(n_1,n_3;cN)}{cN}\frac{S(n-n_1,n-n_3;c'N)}{c'N} \\ & \times J_1(\frac{4\pi\sqrt{n_1n_3}}{cN})J_1(\frac{4\pi\sqrt{(n-n_1)(n-n_3)}}{c'N}) \\ := & \frac{1}{N^2}\sum_{c,c'\geq 1}\frac{1}{cc'}\sum_{n_3=1}^{n-1}(n_3(n-n_3))^{1/2}\sum_{n_1=1}^{n-1}T(n_1,n_3,c,c') \end{aligned}$$

Soit $0 < \delta < 1$, on considère les conditions suivantes sur n_1, n_3, c, c':

$$n^{1-\delta} \leq n_1, n_3 < n - n^{1-\delta},\ 1 \leq c, c' \leq n^{2\delta}; \tag{30}$$

Par (28), la contribution à T_n des (n_1, n_3, c, c') ne vérifiant pas les conditions ci-dessus est en $O(N^{\epsilon-3}n^{6-\delta})$; on supposera dans la suite que les variables n_1, n_3, c, c' satisfonts aux conditions (30). Fixons n_3 compris entre $n^{1-\delta}$ et $n - n^{1-\delta}$, $1 \leq c, c' \leq n^{2\delta}$ et considérons la fonction de n_1

$$g(n_1) : n_1 \to (n_1(n-n_1))^{1/2}J_1(\frac{4\pi\sqrt{n_1n_3}}{cN})J_1(\frac{4\pi\sqrt{(n-n_1)(n-n_3)}}{c'N});$$

Alors, par les majorations $J_1(x), J_1'(x) = O(1)$, on trouve

$$g'(n_1) = O(n^{\delta/2}(1 + \frac{n}{N}(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'})));$$

Puis, par intégration par partie, on obtient

$$\sum_{n^{1-\delta}\leq n_1 < n-n^{1-\delta}} T(n_1,n_3,c,c') \ll n^{1+\delta/2}(1 + \frac{n}{N}(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}))\max_{x\in[n^{1-\delta},n-n^{1-\delta}]}|T(x)|, \tag{31}$$

avec

$$T(x)=\sum_{n_1\leq x} S(n_1,n_3;cN)S(n-n_1,n-n_3;c'N).$$

La somme $T(x)$ est la somme d'une fonction arithmétique définie modulo $[cN,c'N]=[c,c']N$, si bien qu'en complétant cette somme par des caractères additifs on a la majoration

$$|T(x)|\ll \frac{x}{[c,c']N}|\mathcal{T}(0)|+\log(cc'N)\max_{k\in\mathbf{Z}/[c,c']N\mathbf{Z}}|\mathcal{T}(k)|$$

avec

$$\mathcal{T}(k)=\sum_{x \pmod{[c,c']N}} S(x,n_3;cN)S(n-x,n-n_3;c'N)\,\mathrm{e}(\frac{kx}{[c,c']N}).$$

Dans la dernière section, on montrera la proposition:

Proposition 5.3 *Pour tout $\epsilon>0$, on a la majoration*

$$\mathcal{T}(k)=O_\epsilon((N,n)^{1/2}(cc',N)^{1/2}(cc')^{1/2}([c,c']N)^{3/2+\epsilon});$$

si $k=0$, on obtient,

$$\mathcal{T}(0)=O_\epsilon((n,cc'N)^{1/2}([c,c']N)^{3/2+\epsilon}.$$

Donnons d'abord la fin de la preuve de la Proposition 5.2: On obtient la majoration

$$\begin{aligned}|T(x)| \quad &\ll_\epsilon (n,cc'N)^{1/2}x(cc'N)^{1/2+\epsilon}+(N,n)^{1/2}(cc',N)^{1/2}(cc')^2N^{3/2+\epsilon}\\ &\ll_\epsilon (n,cc'N)^{1/2}xn^{2\delta}N^{1/2+\epsilon}+(N,n)^{1/2}(cc',N)^{1/2}n^{8\delta}N^{3/2+\epsilon}.\end{aligned}$$

Par la majoration (31) et en sommant sur les n_3,c,c' vérifiant (30) on obtient la majoration

$$T_n\ll_\epsilon N^{\epsilon-3}n^{6-\delta}+(n,N)^{1/2}N^{-2}n^{3+\delta/2}(1+\frac{n}{N})(n^{1+2\delta}N^{1/2}+n^{8\delta}N^{3/2});$$

Sommant sur $n\leq N^\beta$, on obtient finallement

$$T_{3,F^2,N^\beta}(1+\alpha+\imath t)\ll_{\epsilon,\alpha} N^{\beta(3-\alpha-\delta)-3+\epsilon}+N^{\beta(2-\alpha+5\delta/2)-5/2+\epsilon}+N^{\beta(1-\alpha+17\delta/2)-3/2+\epsilon}.$$

On choisit alors δ de sorte que $\beta(3-\alpha-\delta)-3=-\alpha\beta$ ce qui donne $\delta=3(\beta-1)/\beta$ et on a alors les égalités

$$\beta(2-\alpha+5\delta/2)-5/2=-\alpha\beta+19\beta/2-10$$

$$\beta(1-\alpha+17\delta/2)-3/2=-\alpha\beta+53\beta/2-54/2$$

et on choisit $\beta=54/53$.

5.2 Majoration de $\mathcal{T}(k)$ On utilise la multiplicativité croisée des sommes de Kloosterman: pour c_1 c_2 premiers entre eux on a l'égalité

$$S(m,n;c_1c_2)=S(\overline{c_2}m,\overline{c_2}n;c_1)S(\overline{c_1}m,\overline{c_1}n;c_2).$$

Cette égalité combinée avec le Théorème chinois et les différentes symétries ramène l'estimation de $\mathcal{T}(k)$ à celle d'un produit de sommes de la forme

$$\mathcal{T}(k;p^a;p^b):=\sum_{x(\operatorname{mod} p^b)} S(x,n_3;p^a)S(w(n-x),w(n-n_3);p^b)\,\mathrm{e}(\frac{kw'x}{p^b}),$$

$b\geq a$ et $p^a||cN$ et $p^b||c'N$ et $(ww',p)=1$. Pour $k\not\equiv 0(\operatorname{mod} p^b)$ et $(a,b)\neq(1,1)$,en utilisant la majoration des sommes de Kloosterman: $|S(m,n;p^a)|\leq 2(m,n,p^a)^{1/2}p^{a/2}$, la somme précédente est majorée grossièrement par

$$2p^{(a+b)/2}\sum_{x=0}^{p^b-1}(x,p^a)^{1/2}(n-x,p^b)^{1/2}\ll bp^{a/2+3b/2}. \tag{32}$$

Si $a=b=1$ la somme précédente s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(k;p^a;p^b) &= \sum_{y,y'\in\mathbf{F}_p^*}\mathrm{e}(\frac{n_3\overline{y}+wny'+w(n-n_3)\overline{y'}}{p})\sum_{x\in\mathbf{F}_p}\mathrm{e}(\frac{x(w'k+y-wy')}{p})\\ &= p\sum_{\substack{y'\in\mathbf{F}_p^*\\ wy'-w'k\in\mathbf{F}_p^*}}\mathrm{e}(\frac{n_3\overline{wy'-w'k}+wny'+w(n-n_3)\overline{y'}}{p})\\ &= O(p^{3/2}) \qquad (33)\end{aligned}$$

d'après les majorations de Weil pour les sommes d'exponentielles en 1 variable sur les corps finis, sauf si on a $w\equiv 1,\ k\equiv 0, n\equiv 0$ (mod p) auquel cas la somme vaut p^2.

Si $k=0$ et $a<b$ la somme $\mathcal{T}(k;p^a;p^b)$ vaut

$$\sum_{x_0=0}^{p^a-1}S(x_0,n_3;p^a)\sum_{y\in(\mathbf{Z}/p^b\mathbf{Z})^*}\mathrm{e}(\frac{w(n-x_0)y+w(n-n_3)\overline{y}}{p^b})\sum_{x_1(\mathrm{mod}\ p^{b-a})}\mathrm{e}(\frac{-wyx_1}{p^{b-a}})=0.$$

Enfin, si $k=0$, $a=b$, la somme vaut alors

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(k;p^a;p^b) &= p^b\sum_{y'\in(\mathbf{Z}/p^b\mathbf{Z})^*}\mathrm{e}(\frac{n_3\overline{wy'}+wny'+w(n-n_3)\overline{y'}}{p^b})\\ &= p^bS(wn,wn+(\overline{w}-w)n_3;p^b)=O((n,p^b)^{1/2}p^{3b/2}). \qquad (34)\end{aligned}$$

Tout est près pour majorer $\mathcal{T}(k)$: on écrit $[c,c']N = [c,c']N'N''$ avec $N' = (N,[c,c'])$ et N'' premier avec cc'. Comme N'' est sans facteurs carrés, sa contribution à $\mathcal{T}(k)$ correspont à la majoration (33), et vaut

$$O_\epsilon((N'',n)^{1/2}N''^{3/2+\epsilon}).$$

La contribution du facteur $[c,c']N'$ est estimée trivialement par (32) et vaut

$$O_\epsilon(([c,c']N')^{2+\epsilon}).$$

Dans le cas $k=0$ on utilise (34) et la contribution à $\mathcal{T}(0)$ de $[c,c']N'$ est un

$$O_\epsilon((n,[c,c']N')^{1/2}([c,c']N')^{3/2+\epsilon}).$$

On en déduit la proposition.

6 Diviseur canonique et points de Heegner

Dans cette section, nous majorons la hauteur de Neron-Tate du diviseur canonique de $X_0(N)$, cette quantité contribue à ω_N^2 par la formule (8). Nous montrons ici la majoration, pour tout $\epsilon > 0$

$$h = h_{NT}(K_{X_0(N)} - (2g_N - 2)(\infty) = O_\epsilon(N^\epsilon), \tag{35}$$

On commence à exprimer cette hauteur en terme des hauteurs des points de Heegner de $X_0(N)$ associés à $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, quand de tels points existent cf. [G]. Notons $\mathcal{H}_i$ (resp $\mathcal{H}_j$) le diviseur formé des points de Heegner de $X_0(N)$ au dessus de i (resp. j) son degré est

$$\nu_2 := \prod_{p|N}(1+\left(\frac{-1}{p}\right)),\ (resp. \nu_3 = \prod_{p|N}(1+\left(\frac{-3}{p}\right)),$$

où $\left(\frac{-}{p}\right)$ est le symbole de Legendre. Si bien que ν_2 vaut 0 ou $2^{\omega(N)}$ suivant que $\mathcal{H}_i$ est vide òu non. On commence par montrer le

Lemme 6.1 *Soit N sans facteur carré premier à 6, on a l'égalité*

$$h = \frac{1}{36}h_{NT}(3(\mathcal{H}_i - \nu_2(\infty)) + 2(\mathcal{H}_j - \nu_3(\infty)).$$

Preuve. — Soit $f_N : X_0(N) \to X_0(1) = \mathbf{P}^1$ le morphisme naturel de projection, il n'est éventuellement ramifié qu'au dessus des points ∞ i et j et la formule de Hurwitz s'écrit alors

$$K_{X_0(N)} \sim {f_N}^* K_{\mathbf{P}^1} + \sum_{f_N(Q_i)=i}(e_{Q_i}-1)Q_i + \sum_{f_N(Q_j)=j}(e_{Q_j}-1)Q_j + \sum_{f_N(Q_\infty)=\infty}(e_{Q_\infty}-1)\infty.$$

Rappelons (cf. [Sh] Prop 1.43 p.24) que l'indice de ramification e_{Q_i} (resp. e_{Q_j}) d'un point au dessus de i (resp. j) vaut 1 ou 2 (resp. 1 ou 3) et que le nombre de ceux dont l'indice de ramification vaut 1 est ν_2 (resp. ν_3). On écrit donc

$$\begin{aligned}\sum_{f_N(Q_i)=i}(e_{Q_i}-1)Q_i &= \frac{1}{2}\sum_{f_N(Q_i)=i} e_{Q_i}Q_i - \frac{1}{2}\sum_{\substack{f_N(Q_i)=i\\ e_{Q_i}=1}} Q_i\\ &= \frac{1}{2}{f_N}^*(i) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{f_N(Q_i)=i\\ e_{Q_i}=1}} Q_i,\end{aligned}$$

et de même

$$\sum_{f_N(Q_j)=j}(e_{Q_j}-1)Q_j = \frac{2}{3}{f_N}^*(j) - \frac{2}{3}\sum_{\substack{f_N(Q_j)=j\\ e_{Q_j}=1}} Q_j;$$

On obtient finallement l'égalité (compte-tenu du fait que touts les points sur $\mathbf{P}^1$ sont équivalents à ∞)

$$K_{X_0(N)} \sim Cusp - \frac{1}{2}\sum_{\substack{f_N(Q_i)=i\\ e_{Q_i}=1}} Q_i - \frac{2}{3}\sum_{\substack{f_N(Q_j)=j\\ e_{Q_j}=1}} Q_j.$$

Où $Cusp$ désigne un diviseur à coéfficient rationnels à support dans les pointes. Par le Théorème de Manin-Drinfeld [Ma, Dr], le lemme résulte alors du lemme suivant dont la démonstration nous a été fournie par B. Edixhoven.

□

Lemme 6.2 *Les points de $X_0(N)$ qui s'envoient sur i (resp. j) par f_N et qui sont non ramifiés sont exactement les points de Heegner sur $X_0(N)$ de discriminant -4 (resp -3).*

Preuve. — Il suffit de montrer que quand un point de Heegner de discriminant -4 existe — il s'envoie alors sur i par f_N —, son indice de ramification vaut 1. (à écrire...) Nous aurions pu également démontrer ce résultat "à la main" en utilisant les coordonnées explicites dans le demi-plan d'un point de Heegner et en calculant l'ordre de son stabilisateur dans $\Gamma_0(N)$.

□

6.1 Majoration de la hauteur des points de Heegner sur $X_0(N)$ Dans cette section nous majorons la hauteur d'un point de Heegner sur $X_0(N)$ de discriminant -4, le cas du discriminant -3 est tout à fait similaire (en particulier les groupes de classes d'idéaux des anneaux d'entiers de $\mathbf{Q}(i)$ et $\mathbf{Q}(j)$ sont tous deux triviaux). On a la formule suivante [GZ] p. 307:

$$h_{NT}(c-\infty) = \langle c,c\rangle_\infty + \langle c,c\rangle_{fini},$$

avec

$$\langle c,c\rangle_{fini} = 2\log N$$

et

$$\begin{aligned}\langle c,c\rangle_\infty \quad &= \lim_{s\to 1}\Big[-8\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)r(Nn+4)Q_{s-1}(1+\frac{nN}{2}) + \frac{4\pi}{vol(s-1)}\Big] \\ &+O(1)\end{aligned}$$

où $\sigma(n)$ est la fonction définie en [GZ] Prop (3.2) Chap IV, et pour laquelle on a la majoration $|\sigma(n)| \le \tau(n)$; $r(n)$ est le nombre d'idéaux de $O_{\mathbf{Q}(i)}$ de norme n, en particulier, on a, pour tout $\epsilon > 0$ la majoration $r(n) = O_\epsilon(n^\epsilon)$; $Q_{s-1}(t)$ désigne la fonction de Legendre de seconde espèce [GZ] p. 238.

6.2 Expression spectrale de la hauteur des points de Heegner Considérons la série

$$H(s) = -8\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)r(Nn+4)Q_{s-1}(1+\frac{nN}{2}),$$

elle converge absoluement pour $\Re es > 1$ et défini dans ce demi-plan une fonction holomorphe; elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ de la manière suivante: pour $z, w \in H,\ z \notin \Gamma_0(N)w$, on considère le noyau de la résolvante pour $\Gamma_0(N)$

$$G_{N,s}(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)} g_s(z,\gamma w),\ avec\ g_s(z,w) = -2Q_{s-1}(1+\frac{u(z,w)}{2})$$

et $u(z,w) = |z-w|^2/Im(z)Im(w)$. En enlevant les singularités de $G_{N,s}$ on peut alors définir une fonction sur $H\times H$ par la formule

$$G^1_{N,s}(z,w) = \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(N)\\ \gamma w\neq z}} g_s(z,\gamma w).$$

Soit $\tau \in \mathcal{H}$ une coordonnée du point de Heegner c (rappelons que τ est de la forme

$$\tau = \frac{-B+i}{A},\ A>0,\ avec\ A \equiv 0(\mathrm{mod}\, N),\ B \equiv \beta_c(\mathrm{mod}\, N),$$

où $\beta_c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ vérifie $\beta_c^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, N)$ et caractérise c [GZ] p.236), alors on a l'égalité ([GZ] p.251)

$$H(s) = G^1_{N,s}(\tau,\tau).$$

Prenons alors $a > 1$, la fonction $G_{N,s}(z,w) - G_{N,a}(z,w)$ est alors définie sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur la domaine $\Re es > 1/2$ par son expression spectrale [Iw2] Theorem 7.5(prendre garde à la normalisation de loc. cit. qui est différente de la nôtre):

$$(36)\ \frac{1}{4\pi}(G_{N,s}(z,w) - G_{N,a}(z,w)) = \sum_j \chi_{sa}(s_j) u_j(z)\overline{u_j(w)} + \sum_\kappa \frac{1}{4i\pi}\int_{(1/2)} \chi_{sa}(v) E_\kappa(z,v)\overline{E}_\kappa(w,\overline{v})dv$$

avec

$$\chi_{sa}(s_j) = \frac{1}{(s-s_j)(1-s_j-s)} - \frac{1}{(a-s_j)(1-s_j-a)}.$$

Dans cette expression l'indice j concerne la j-ième valeur propre du Laplacien sur $X_0(N)$ notée $s_j(1-s_j)$, et les u_j forment une base orthonormale de valeurs propres. Compte-tenu de la minoration de Selberg $\lambda_1 > 3/16$, la fonction $G_{N,s}(z,w) - G_{N,a}(z,w)$ est holomorphe dans la domaine $\{s,\ \Re es > 3/4\} - \{1\}$ avec un pôle simple en 1 de résidu $-4\pi/vol$.

On a alors

$$(37)\qquad H(s) - H(a) = G_{N,s}(\tau,\tau) - G_{N,a}(\tau,\tau) - R_{sa}(\tau);$$

avec

$$R_{sa}(\tau) := \lim_{w\to\tau}\Big[\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(N)\\ \gamma\tau=\tau}} (g_s(\tau,\gamma w) - g_s(\tau,\gamma w))\Big].$$

Compte-tenu du dévellopement asymptotique

$$Q_{s-1}(1+t) = -\frac{1}{2}\log\frac{t}{2+t} - \Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1)\Big) + o(1),\ t\to 0,$$

On trouve

$$R_{sa}(\tau) = 2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - 2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a).$$

6.3 Majorations finales Compte-tenu de l'expression $Q_{s-1}(t) = O(t^{-s})$, $t\to+\infty$, on obtient la majoration $H(1+\epsilon) = O_{\delta,\epsilon}(N^{\epsilon-1})$ pour tout $\epsilon > 0$.

D'autre part, pour $7/8 \le \Re es \le 1+\epsilon$, l'expression (36) et la Proposition 7.2 de [Iw2], on en déduit la majoration

$$G_{N,s}(\tau,\tau) - G_{N,a}(\tau,\tau) + \frac{4\pi}{vol(s-1)} \ll (N(1+|t|))^A,$$

Pour un certain $A > 0$ que nous n'évaluerons pas.

On en déduit alors par le principe de Phragmen-Lindelöf la majoration

$$\lim_{s \to 1} H(s) + \frac{4\pi}{vol(s-1)} = O_\epsilon(N^\epsilon),$$

pour tout $\epsilon > 0$ et par conséquent

$$h_{NT}((x) - (\infty)) = O_\epsilon(N^\epsilon).$$

La même borne est valable avec un point de Heegner de Discrimant -3, le caractère quadratique de la hauteur de Néron-Tate implique alors la majoration

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{36} h_{NT}(3(\mathcal{H}_i - \nu_2(\infty)) + 2(\mathcal{H}_j - \nu_3(\infty)) = \quad & O_\epsilon(\tau(N)^2 N^\epsilon) \\ & = O_\epsilon(N^\epsilon) \end{aligned}$$

Nous n'avons pas cherché ici à obtenir le meilleur résultat possible, il semble qu'une majoration en $\tau(N)^2 \log N$ soit plus vraisemblable.

Références

[AU1] A. ABBES, E. ULLMO. — *Comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré sur* $X_0(N)$,

[AU2] A. ABBES, E. ULLMO. — *Auto-intersection du dualisant relatif des courbes modulaires* $X_0(N)$, à paraitre au J. Reine Angew. Math.

[Ar] S.J. Arakelov, *Intersection theory of divisors on an arithmetic surface*, Math. USSR–Izv. **8** (1974), 1167–1180.

[CS] B.J. COATES, W. SCHMIDT. — *Iwasawa Theory for the Symmetric square of an elliptic curve*, J. Reine Angew. Math. (1987),57-60.

[DeRa] P. DELIGNE, M. RAPOPORT *Schémas de modules des courbes elliptiques*, dans *Modular functions of one variable II*, Lectures Notes in Mathematics **349**, Springer-Verlag, New-York 1973.

[DeI] J.M. DESHOUILLERS, H. IWANIEC. — *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math 70, 219-288 (1982).

[DFI] W. DUKE, J.B. FRIEDLANDER et H. IWANIEC. — *Bounds for Automorphic L-functions II*, Invent. Math 115, 219-239 (1994).

[Du] W. DUKE. — *On the dimension of the space of forms of weight 1* Inter. Math. Res. Notices,

[Dr] V.G. DRINFELD. — *Two theorems on modular curves,* Functional analysis and its Applications, Vol 7 No 2, Translated from russian 1973 , p. 155-156.

[G] B.H. GROSS. — *Heegner points on* $X_0(N)$, In: Modular forms (ed. R.A. Rankin), p. 87-106 Chichester: Ellis Horwood 1984.

[GZ] B.H. GROSS, D. ZAGIER. — *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math 84, 225-320 (1986).

[Iw] H. IWANIEC. — *Topics in classical automorphic forms*, Graduate Course, Rutgers University, Spring 1995.

[Iw2] H. IWANIEC. — *Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms*, Rev. Mat. Iberoamericana, 1995.

[HL] J. HOFFSTEIN, P. LOCKHART. — *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. of Math. 140 (1994), 161-176.

[Ma] Y. MANIN. — *Parabolic points and Zeta functions of modular curves,* Izv. Akad. Nauk SSSR., Vol 6 No 1 (1972), AMS Translations, p.19-64.

[Sh] G. SHIMURA. — *Introduction to the arithmetic theory of automorphic forms,* Princeton Univ. Press, 1971.

[Sz] L.SZPIRO *Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique*, The Grothendieck Festchrift. **III** Progress in Mathematics (1990).

[Ul] E. ULLMO *Positivité et discrètion des points algébriques des courbes.* preprint Juin (1996) à paraître dans Annals of Maths.

[T] G. TENENBAUM. — *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.*

[Z] S. ZHANG. — *Admissible pairing on a curve*, Invent. Math, (1993).