C. R. Acad. Sci. Paris, t. 33?, Série I, p. 1–??, 2003 - PXMA????.TEX -
Rubrique/*Heading*
(Sous-rubrique/*Sub-Heading*)

Effective equations describing the flow of a viscous incompressible fluid through and tangentially to a filter

Pascal Azerad [a], Andro Mikelić [b] et Franck Nicoud [a]

[a] **Institut de modélisation de mathématiques de Montpellier, CNRS-UMR 5030, Université de Montpellier II, FRANCE**

[b] **LaPCS, UFR Mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1, Bât. J. Braconnier, 21, avenue C. Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex, FRANCE**
E-mail:Andro.Mikelic@univ-lyon1.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Abstract. We study the 2D creeping flow of a viscous incompressible fluid through and tangentially to a thin filter. The flow is governed by given pressure drops in horizontal and vertical directions. Filter consists of periodically placed perforations of the typical size ε. The filter thickness is of the same order. By employing the boundary layer technique due to W. Jäger and A. Mikelić, we obtain the effective model with the interface law . The approximation is rigorously justified by obtaining the error estimates for the velocity and the pressure . © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Equations efficaces décrivant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à travers et tangentiel à un filtre

Résumé. *Nous considérons l'écoulement lent 2D d'un fluide incompressible visqueux à travers et tangentiel à un filtre de faible épaisseur. L'écoulement est régi par une petite chute de pression dans les directions horizontale et verticale. Le filtre contient de perforations périodiques de la taille caractéristique ε. L'épaisseur du filtre est de même ordre. En utilisant la technique des couches limites, développée par W. Jäger et A. Mikelić, nous obtenons les équations efficaces avec une loi de paroi. L'approximation est justifiée rigoureusement en obtenant une estimation d'erreur pour la vitesse et pour la pression.* © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Version française abrégée

Soit $\Omega =]0, L[\times] - h/2, h/2[$ et soient $\Omega_{1,\varepsilon} =]0, L[\times]\varepsilon, h/2[$ et $\Omega_{2,\varepsilon} =]0, L[\times] - h/2, -\varepsilon[$. La cellule canonique contenant la perforation est $Y = (-b, b) \times (0, 1)$ avec $0 < b < 1/2$. La partie solide est alors $Z = \big((-1/2, -b) \cup (b, 1/2)\big) \times (0, 1)$. L'interface est $\Sigma = (0, L) \times \{0\}$ et le filtre est donné par $F^\varepsilon =$

Note présentée par First name NAME

S0764-4442(00)0????-?/FLA

$(0,L)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\backslash\overline{R}^{\varepsilon}$, où $R^{\varepsilon}=\left(\bigcup_{\{k\in\mathbb{N}\}}\varepsilon\big(Y\cup(Y-e_y)\cup(-b,b)\times\{0\}+(k+1/2)e_x\big)\right)\cap\left((0,L)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\right)$ est l'ensemble des perforations. Pour simplicité nous supposons que L/ε est un entier. Le domaine rempli par le fluide est $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\overline{F}^{\varepsilon}$ et la frontière entre le fluide et le filtre est $S_\varepsilon=\partial F^\varepsilon\setminus\partial\Omega$.

Nous considérons l'écoulement lent 2D d'un fluide visqueux incompressible, à petite épaisseur $\varepsilon>0$ du filtre. La vitesse du fluide v^ε et la pression p^ε satisfont les équations de Stokes

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_x^\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x^\varepsilon}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x}=-\frac{\Delta_x P}{L}\quad\text{et}\quad-\mu\left(\frac{\partial^2 v_y^\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y^\varepsilon}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial y}=-\frac{\Delta_y P}{h}\quad\text{dans}\quad\Omega_\varepsilon\tag{1}$$

$$\frac{\partial v_x^\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial v_y^\varepsilon}{\partial y}=0\quad\text{dans}\quad\Omega_\varepsilon\qquad\text{et}\qquad v^\varepsilon=0\quad\text{sur}\quad S_\varepsilon\tag{2}$$

$$\frac{\partial v_x^\varepsilon}{\partial y}=0=v_y^\varepsilon\quad\text{sur}\quad y=\pm h/2;\qquad\{v^\varepsilon,p^\varepsilon\}\quad\text{sont}\quad L-\text{périodiques en}\quad x.\tag{3}$$

Les chutes de la pressions sont supposés constants et positives. Notons que la vitesse déterminée par le problème (1)-(3) est symétrique par rapport à y, i.e. $v_x^\varepsilon(x,y)=v_x^\varepsilon(x,-y),\ v_y^\varepsilon(x,y)=-v_y^\varepsilon(x,-y)$.

Nous étudions le comportement du système (1)-(3) dans la limite lorsque $\varepsilon\to 0$. Nous allons suivre la stratégie développée dans les articles [3] et [4]. Plus précisément nous commençons par une approximations d'ordre zero où le filtre est considéré comme une barrière imperméable. Dans ce cas le système (1)-(3) est remplacé par

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_x^0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x^0}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial p^0}{\partial x}=-\frac{\Delta_x P}{L}\quad\text{et}\quad-\mu\left(\frac{\partial^2 v_y^\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y^\varepsilon}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial y}=-\frac{\Delta_y P}{h}\quad\text{dans}\quad\Omega_{1,\varepsilon}\tag{4}$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial x}+\frac{\partial v_y^0}{\partial y}=0\quad\text{dans}\quad\Omega_{1,\varepsilon}\qquad\text{et}\qquad v^0=0\quad\text{sur}\quad\Sigma_{1,\varepsilon}\tag{5}$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial y}=0=v_y^0\quad\text{sur}\quad y=h/2;\qquad\{v^\varepsilon,p^\varepsilon\}\quad\text{sont}\quad L-\text{périodiques en}\quad x.\tag{6}$$

Le système (4)-(6), et son analogue pour $-h/2<y<\varepsilon$, admettent une solution unique pour la vitesse $(v_x^0,0)$, où

$$v_x^0=\begin{cases}\dfrac{\Delta_x P}{2\mu L}(y-h+\varepsilon)(y-\varepsilon) & \text{pour}\ \varepsilon<y<h/2,\\ \dfrac{\Delta_x P}{2\mu L}(y+h-\varepsilon)(y+\varepsilon) & \text{pour}\ -h/2<y<-\varepsilon.\end{cases}\tag{7}$$

v_x^0 est prolongée par zéro dans $-\varepsilon\leqslant y\leqslant\varepsilon$.

Pour la pression nous trouvons

$$p^0=\begin{cases}-\dfrac{\Delta_y P}{h}y+C_+ & \text{pour}\ \varepsilon<y<h/2,\\ -\dfrac{\Delta_y P}{h}y+C_- & \text{pour}\ -h/2<y<-\varepsilon.\end{cases}\tag{8}$$

où C_+ et C_- sont des constantes arbitraires.

$\boxed{\text{1ERE ÉTAPE}}$ Nous allons estimer les différences $u^\varepsilon=v^\varepsilon-v_x^0e_x$ et $\tilde{p}^\varepsilon=p^\varepsilon-p^0$.

Notons que la contrainte normale sur $\Sigma_{1,\varepsilon}$, provenant de notre approximation d'ordre zéro, est

$$(2\mu D(v^0)-p^0)(-e_y)=-\frac{\Delta_x P}{2L}(2\varepsilon-h)e_x-(\frac{\Delta_y P}{h}\varepsilon-C_+)e_y.$$

Pour bien définir l'approximation de la pression dans les perforations, nous introduisons la vitesse de Darcy correspondante :

Soit $\{w, \pi\}$ la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w + \nabla \pi = e_x & \text{dans } Y, \\ \displaystyle\int_Y \pi \, dxdy = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}\, w = 0 & \text{dans } Y, \\ w = 0 \quad \text{sur} \quad \partial Y \setminus \{y = 0\}; \quad w_y = 0, \ \dfrac{\partial w_x}{\partial y} = 0 & \text{sur } \partial Y \cap \{y = 0\}. \end{cases} \tag{9}$$

Nous prolongeons cette solution sur $y < 0$ par symétrie, i.e. $w_x(x,y) = w_x(x,-y)$, $w_y(x,y) = -w_y(x,-y)$ et $\pi(x,y) = \pi(x,-y)$. Clairement, $w^{0,\varepsilon} = -\varepsilon^2 w(x/\varepsilon, y/\varepsilon)\dfrac{\Delta_x P}{\mu L}$, $\pi^{0,\varepsilon} = -\varepsilon\pi(x/\varepsilon, y/\varepsilon)\dfrac{\Delta_x P}{L} - \dfrac{\Delta_y P}{h} y$ satisfait

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 w_x^{0,\varepsilon}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x^{0,\varepsilon}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \pi^{0,\varepsilon}}{\partial x} = -\frac{\Delta_x P}{L} \ \text{et} \ -\mu\left(\frac{\partial^2 w_y^{0,\varepsilon}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y^{0,\varepsilon}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \pi^{0,\varepsilon}}{\partial y} = -\frac{\Delta_y P}{h} \ \text{dans } R^\varepsilon \tag{10}$$

$$\frac{\partial w_x^{0,\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial w_y^{0,\varepsilon}}{\partial y} = 0 \quad \text{dans} \quad R^\varepsilon \qquad \text{et} \qquad v^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial R^\varepsilon \tag{11}$$

Notons que

$$(2\mu D(w^{0,\varepsilon}) - p^{0,\varepsilon})e_y|_{y=\varepsilon} = -\frac{2\Delta_x P}{L}\varepsilon D_{x/\varepsilon, y/\varepsilon}(w(x/\varepsilon, 1))e_y + (\frac{\Delta_x P}{L}\pi(x/\varepsilon, 1) + \frac{\Delta_y P}{h})\varepsilon e_y.$$

Soient

$$v^{0,\varepsilon} = \begin{cases} v^0 & \text{pour } y \in (-h/2, h/2) \setminus (-\varepsilon, \varepsilon), \\ w^{0,\varepsilon} & \text{pour } y \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases} \tag{12}$$

$$p^{0,\varepsilon} = \begin{cases} p^0 & \text{pour } y \in (-h/2, h/2) \setminus (-\varepsilon, \varepsilon), \\ \pi^{0,\varepsilon} + C_s & \text{pour } y \in (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases} \tag{13}$$

et $v^\varepsilon = u^\varepsilon + v^{0,\varepsilon}$, $p^\varepsilon = c^\varepsilon + p^{0,\varepsilon}$. Alors $\{u^\varepsilon, c^\varepsilon\}$ satisfait l'équation variationnelle

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} D(u^\varepsilon) : D(\varphi) \, dxdy = \int_{\Sigma_\varepsilon^1} \Big\{ &-\frac{\Delta_x P}{2L}(2\varepsilon - h)e_x - (\frac{\Delta_y P}{h}\varepsilon - C_+)e_y - \frac{\Delta_x P}{L}\varepsilon\frac{\partial w_x}{\partial y}(x/\varepsilon, 1))e_x \\ &+ (\frac{\Delta_x P}{L}\pi(x/\varepsilon, 1) + \frac{\Delta_y P}{h})\varepsilon e_y + C_s e_y\Big\}\varphi \, dx + \int_{\Sigma_\varepsilon^2} \Big\{\text{l'analogue}\Big\}\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}, \end{aligned} \tag{14}$$

avec

$$\mathcal{V} = \{z \in H^1(\Omega_\varepsilon)^2 \mid \text{div}\, z = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \ z \text{ est } L\text{−périodique en } x, z = 0 \text{ sur } S_\varepsilon \text{ et } z_y = 0 \text{ sur } y = \pm h/2\}.$$

Maintenant, il est claire que il faut choisir $C_+ = \dfrac{\Delta_x P}{L}\pi(x/\varepsilon, 1)\dfrac{\varepsilon^2}{h/2 - 2\varepsilon} = C_-$ et $C_s = -\dfrac{\Delta_x P}{L}\pi(x/\varepsilon, 1)\dfrac{\varepsilon(h/2 - \varepsilon)}{h/2 - 2\varepsilon}$ pour avoir une estimation optimale et l'approximation de la pression à moyenne zéro.

2EME ETAPE

Nous utilisons la fonction u^ε comme la fonction test dans l'équation (14) et nous avons

$$\mu \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dxdy \leqslant C\frac{\Delta_x P}{L}\int_{\Sigma_\varepsilon^1 \cup \Sigma_\varepsilon^2} |u_x^\varepsilon| \, dx \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\frac{\Delta_x P}{L}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(R^\varepsilon)^2} \tag{15}$$

En conséquence, nous arrivons au résultat suivant

THEOREM 0.1. – *Soit $\{v^{0,\varepsilon}, p^{0,\varepsilon}\}$ donné par (12)-(13). Alors les solutions du problème (1)-(3), satisferont les estimations suivantes :*

$$\|\nabla(v^\varepsilon - v^{0,\varepsilon})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^4} \leqslant C\frac{\Delta_x P}{L\mu}\sqrt{\varepsilon} \tag{16}$$

$$\|v^\varepsilon - v^{0,\varepsilon}\|_{L^2(R^\varepsilon)^2} \leqslant C\frac{\Delta_x P}{L\mu}\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \tag{17}$$

$$\|v^\varepsilon - v^{0,\varepsilon}\|_{L^2(\Sigma)^2} \leqslant C\frac{\Delta_x P}{L\mu}\varepsilon \tag{18}$$

$$\|v^\varepsilon - v^0\|_{L^2(\Omega_{1,\varepsilon}\cup\Omega_{2,\varepsilon})^2} \leqslant C\frac{\Delta_x P}{L\mu}\varepsilon \tag{19}$$

$$\|p^\varepsilon - p^0\|_{L^2(\Omega_{1,\varepsilon}\cup\Omega_{2,\varepsilon})} \leqslant C\frac{\Delta_x P}{L}\sqrt{\varepsilon} \tag{20}$$

Proof. – Les inégalités (17) et (18) sont une conséquence de l'inégalité de Poincaré dans R^ε.

Pour obtenir les estimations (19)-(20) nous utilisons le fait que $\{u^\varepsilon, c^\varepsilon\}$ est une solution pour le problème

$$\begin{cases} -\triangle u^\varepsilon + \nabla c^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_{1,\varepsilon}, \\ \text{div } u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_{1,\varepsilon}, \\ u^\varepsilon = \xi^\varepsilon \text{ sur } \Sigma_{1,\varepsilon}; & u^\varepsilon \text{ est L-périodique en } x, \\ u_y^\varepsilon = 0 = \dfrac{\partial u_x^\varepsilon}{\partial y} & \text{sur } y = h/2 \end{cases} \tag{21}$$

où $\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Sigma_{1,\varepsilon})^2} \leqslant C\varepsilon$, par (17).

La théorie des solutions très faibles pour le système de Stokes a été développée dans [1] et elle implique (19).

L'estimation (20) est déduite à partir de la première équation dans (21) et de l'inégalité de Nečas dans $\Omega_{1,\varepsilon}$. □

3IEME ETAPE

La contribution dominante dans l'équation variationnelle (14) était le terme intégrale surfacique $\int_{\Sigma_{1,\varepsilon}} \varphi_x$. En suivant l'approche de [3] et [4] , nous l'éliminons eliminate en utilisant les couches limites

$$\beta^{bl,\varepsilon}(x,y) = \varepsilon\beta^{bl}(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad \omega^{bl,\varepsilon}(x) = \omega^{bl}(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon}), \quad (x,y)\in\Omega_\varepsilon, \tag{22}$$

définies par le problème auxiliaire suivant :

Trouver $\{\beta^{bl}, \omega^{bl}\}$ satisfaisant

$$-\triangle\beta^{bl} + \nabla\omega^{bl} = 0 \quad \text{dans } Z^+ \cup Y; \qquad \text{div } \beta^{bl} = 0 \qquad \text{dans } Z_{bl} \tag{23}$$

$$\left[\beta^{bl}\right]_S(\cdot,0) = 0 \quad \text{et} \quad \left[\{2D(\beta^{bl}) - \omega^{bl} I\}\vec{e}_y\right]_S(\cdot,0) = 1 \;\text{ sur } S \tag{24}$$

$$\beta^{bl} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{B} \equiv \Big((-1/2,-b)\cup(1/2,b))\times\{1\}\Big) \cup \Big((\{-b\}\cup\{b\})\times(0,1)\Big), \tag{25}$$

$$\{\beta^{bl}, \omega^{bl}\} \text{ est } 1-\text{périodique en } x, \qquad \beta_y^{bl} = 0 = \frac{\partial\beta_x^{bl}}{\partial y} \quad \text{sur} \quad (-b,b)\times\{0\} \tag{26}$$

où $S = (-b,b)\times\{1\}$, $Z^+ = (-1/2,1/2)\times(1,+\infty)$, et $Z_{bl} = Z^+\cup S\cup Y$.

Soit $V = \{z \in L^2_{loc}(Z_{bl})^2 : \nabla z \in L^2(Z_{bl})^4;\ z = 0$ sur $\mathcal{B}$; div$z = 0$ dans Z_{bl} et z est 1-périodique en $x\}$. Le lemme de Lax-Milgram nous garantie l'existence d'un unique $\beta^{bl} \in V$ satisfaisant

$$\int_{Z_{bl}} \nabla\beta^{bl}\nabla\varphi\, dxdy = -\int_S \varphi_x\, dx, \qquad \forall\varphi \in V \tag{27}$$

En utilisant le théorême de De Rham, nous obtenons une fonction $\omega^{bl} \in L^2_{loc}(Z_{bl})$, unique modulo une constante et satisfaisant (23). D'après la théorie elliptique les solutions $\{\beta^{bl}, \omega^{bl}\}$ de (23)-(26) sont telles que $\{\beta^{bl}, \omega^{bl}\} \in V \cap C^\infty(Z^+ \cup Y)^2 \times C^\infty(Z^+ \cup Y)$ pour (23)-(26).

Alors on a

LEMME 0.1. – *([3], [2], [4]). Soient a, a_1 et a_2, $a_1 > a_2$, des constantes positives. Alors la solution $\{\beta^{bl}, \omega^\lambda\}$ satisfait*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \beta_y^{bl}(x,a)\, dx = 0, \\ \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \omega^{bl}(x,a_1)\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \omega^{bl}(x,a_2)\, dx, \\ \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \beta_x^{bl}(x,a_1) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \beta_x^{bl}(x,a_2) dx, \\ \displaystyle C^{bl} = \int_S \beta_x^{bl}\, dx = -\int_{Z_{bl}} |\nabla\beta^{bl}|^2\, dxdy < 0 \end{cases} \tag{28}$$

LEMME 0.2. – *([3], [2], [4]). Soit $\{\beta^{bl}, \omega^{bl}\}$ vérifiant le lemme précèdent. Alors il existe $\gamma_0 > 0$ tel que*

$$\begin{cases} |\ \beta^{bl}(x,y) - C^{bl}\ | \leqslant Ce^{-\gamma_0 y},\ y > 0 \\ |\ D^\alpha\beta^{bl}(x,y)\ | \leqslant Ce^{-\gamma_0 y},\ y > 0,\ \alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\ \omega^{bl}(x,y) - \int_{-1/2}^{1/2} \omega^{bl}(x,0)\, dx\ | \leqslant Ce^{-\gamma_0 y}, \qquad y > 0. \end{cases} \tag{29}$$

COROLLAIRE 0.3. – *Le système (23)-(26) définie une couche limite.*

Nous faisons le prolongement pair, pour $y < 0$, pour β_x^{bl} et ω^{bl} et un prolongement un-pair pour β_y^{bl}. De plus, β^{bl} est prolongée par 0 dans la partie solide.

Alors pour $\{\beta^{bl,\varepsilon}, \omega^{bl,\varepsilon}\}$ définis par (22) nous avons, pour tout $q \geqslant 1$ et $j = 1, 2$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\beta^{bl,\varepsilon} - \varepsilon C^{bl}\|_{L^q(\Omega)^2} + \|\omega^{bl,\varepsilon}\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla\beta^{bl,\varepsilon}\|_{L^q(\Omega)^4} = C\varepsilon^{1/q} \tag{30}$$

$$-\triangle\beta^{bl,\varepsilon} + \nabla\omega^{bl,\varepsilon} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus (\Sigma_{1,\varepsilon} \cup \Sigma_{2,\varepsilon}) \tag{31}$$

$$\text{div } \beta^{bl,\varepsilon} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \tag{32}$$

$$[\beta^{bl,\varepsilon}]_{\Sigma_{1,\varepsilon}\cup\Sigma_{2,\varepsilon}}(\cdot,0) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{1,\varepsilon} \cup \Sigma_{2,\varepsilon} \tag{33}$$

$$[\{2D(\beta^{bl,\varepsilon}) - \omega^{bl,\varepsilon}I\}e_y]_{\Sigma_{1,\varepsilon}\cup\Sigma_{2,\varepsilon}}(\cdot,0) = e_x \quad \text{sur } \Sigma_{1,\varepsilon} \cup \Sigma_{2,\varepsilon}, \tag{34}$$

i.e. notre couche limite correspond à la création de petits tourbillons par des rugosités.

4IEME ETAPE

On veut montrer maintenant que les quantités suivantes sont en $o(\varepsilon)$ pour la vitesse et en $O(\varepsilon)$ pour la pression :

$$\mathcal{U}^\varepsilon(x) = v^\varepsilon - v^{0,\varepsilon} - \frac{\Delta_x Ph}{2L\mu}\beta^{bl,\varepsilon} \tag{35}$$

$$\mathcal{P}^\varepsilon = p^\varepsilon - p^{0,\varepsilon} - \frac{\Delta_x Ph}{2L}\big(\omega^{bl,\varepsilon} - \int_{-1/2}^{1/2} \omega^{bl}(x,0)\, dx\big). \tag{36}$$

On a le résultat suivant

THEOREM 0.2. – *Soit* $\{v^{0,\varepsilon}, p^{0,\varepsilon}\}$ *donné par (12)-(13) et* $\{\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{P}^\varepsilon\}$ *par (35)-(36) . Alors on a les estimations suivantes :*

$$\|\nabla \mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^4} \leqslant C\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \tag{37}$$

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(R^\varepsilon)^2} \leqslant C\varepsilon^{5/2} \tag{38}$$

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)^2} \leqslant C\varepsilon^2 \tag{39}$$

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{1,\varepsilon}\cup\Omega_{2,\varepsilon})^2} \leqslant C\varepsilon^2 \tag{40}$$

$$\|\mathcal{P}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{1,\varepsilon}\cup\Omega_{2,\varepsilon})} \leqslant C\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \tag{41}$$

Proof. – Notons que

$$2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{-\Delta_x P h}{2L\mu} D(\beta^{bl,\varepsilon}) : D(\varphi)\, dxdy = -\int_{\Sigma^1_\varepsilon} \frac{\Delta_x P}{2L} h\varphi_x\, dx + \int_{\Sigma^2_\varepsilon} \Big\{\text{l'analogue}\Big\}\varphi_x\, dx,\ \forall\varphi\in\mathcal{V}, \tag{42}$$

Maintenant, nous trouvons que

$$\mu\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\mathcal{U}^\varepsilon|^2\, dxdy \leqslant C\varepsilon \int_{\Sigma^1_\varepsilon\cup\Sigma^2_\varepsilon} |\mathcal{U}^\varepsilon_x|\, dx \leqslant C\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\|\nabla\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(R^\varepsilon)^2} \tag{43}$$

et les estimations sont obtenus en même façon que dans la demonstration du Théorème 1. □

$\boxed{\text{5IEME ETAPE}}$

Soit $\Sigma_0 = (0, L)\times\{0\}$. Maintenant nous introduisons l'écoulement de Nicoud efficace par

Trouver la vitesse u^{eff} et la pression p^{eff} telles que

$$-\mu\triangle u^{eff} + \nabla p^{eff} = -\frac{\Delta_x P}{L}e_x - \frac{\Delta_y P}{h}e_y \quad \text{dans } \Omega\setminus\Sigma_0, \tag{44}$$

$$\text{div } u^{eff} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad u^{eff}_y = 0 = \frac{\partial u^{eff}_x}{\partial y} \ \text{ sur } y = \pm h/2, \tag{45}$$

$$u^{eff}_y(x, 0+) = 0 \quad \text{et} \quad u^{eff}_x(x, 0+) = -\varepsilon\big(1 + C^{bl}\big)\frac{\partial u^{eff}_x}{\partial y}(x, 0+), \ \text{ sur } \Sigma_0 \tag{46}$$

$$u^{eff}_y(x, 0-) = 0 \quad \text{et} \quad u^{eff}_x(x, 0-) = \varepsilon\big(1 + C^{bl}\big)\frac{\partial u^{eff}_x}{\partial y}(x, 0-), \ \text{ sur } \Sigma_0 \tag{47}$$

$$\{u^{eff}, p^{eff}\} \text{ est périodique en } x \text{ de période } L \tag{48}$$

Le problème (44)-(48) admet une solution unique

$$\begin{cases} u^{eff} = \dfrac{\Delta_x P}{2\mu L}\Big(y(y-h) + hC^{bl}\varepsilon + h\varepsilon\Big)e_x & \text{pour } (x,y)\in(0,L)\times(0,h/2) \\ u^{eff} = \dfrac{\Delta_x P}{2\mu L}\Big(y(y+h) + hC^{bl}\varepsilon + h\varepsilon\Big)e_x & \text{pour } (x,y)\in(0,L)\times(-h/2,0) \\ p^{eff} = -\dfrac{\Delta_y P}{h}y & \text{pour } x\in\Omega. \end{cases} \tag{49}$$

Nous estimons l'erreur faite en remplaçant $\{v^\varepsilon, p^\varepsilon, M^\varepsilon\}$ par $\{u^{eff}, p^{eff}, M^{eff}\}$, où le débit est donné par

$$M^{eff} = L\int_{-h/2}^{h/2} u^{eff}_x(y)\, dy = \frac{\Delta_x P h^2}{2\mu}(\frac{h}{12} + \varepsilon(1 + C^{bl})) \tag{50}$$

THÉORÈME 0.4. – *Sous les hypothèses du précedantes nous avons*

$$\|\nabla(v^\varepsilon - u^{eff})\|_{L^1(\Omega)^4} \leqslant C\varepsilon, \tag{51}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\|v^\varepsilon - u^{eff}\|_{L^2(\Omega)^2} + \|v^\varepsilon - u^{eff}\|_{L^1(\Omega)^2} \leqslant C\varepsilon^2 \tag{52}$$

$$|M^\varepsilon - M^{eff}| \leqslant C\varepsilon^2. \tag{53}$$

Proof. – Nous avons

$$v^\varepsilon - u^{eff} = \mathfrak{U}^\varepsilon + v^{0,\varepsilon} - u^{eff} + \frac{\Delta_x Ph}{2\mu L}\beta^{bl,\varepsilon} = \mathfrak{U}^\varepsilon + \frac{\Delta_x Ph}{2\mu L}\big(\beta^{bl,\varepsilon} - \varepsilon C^{bl} - \varepsilon^2\big) \quad \text{in } \Omega_{1,\varepsilon}.$$

Dans $\Omega_{2,\varepsilon}$ on a une expression analogue. Les estimations sont maintenant immédiates. □

References

[1] C. Conca, *Étude d'un fluide traversant une paroi perforée I. Comportement limite près de la paroi,* J. Math. pures et appl., 66 (1987), pp. 1-44. II. *Comportement limite loin de la paroi,* J. Math. pures et appl., 66 (1987), pp. 45-69.

[2] W.Jäger, A.Mikelić , *On the effective equations for a viscous incompressible fluid flow through a filter of finite thickness*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **Vol. LI** (1998), 1073–1121.

[3] W. Jäger, A. Mikelić : On the roughness-induced effective boundary conditions for a viscous flow , *Journal of Differential Equations* , Vol. 170 (2001) , p. 96-122.

[4] W. Jäger, A. Mikelić : Couette Flows over a Rough Boundary and Drag Reduction, *Communications in Mathematical Physics ,* Vol. 232 (2003), p. 429-455.