

**La décomposition en modes propres :
une approche nouvelle
pour caractériser le confinement
du plasma dans un tokamak**

Thèse présentée au Département de Physique
de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

par

Thierry Dudok de Wit
ingénieur physicien EPFL

octobre 1992

Résumé

Une nouvelle méthode d'analyse perturbative a été développée dans le but de caractériser le confinement de particules et d'énergie du plasma dans un tokamak. Au lieu de partir d'une modélisation empirique en termes de coefficients de transport, comme cela se fait habituellement, la méthode représente la dynamique du plasma à l'aide de modes propres, dont les caractéristiques se prêtent particulièrement bien à l'étude du confinement. Cette approche a été appliquée au tokamak TCA pour analyser la réponse dynamique du profil de la densité électronique à l'injection de glaçons.

La dynamique observée sur TCA est entièrement reproductible et décrite à l'aide de trois modes propres, révélant ainsi la possibilité de réduire toute l'évolution temporelle à trois constantes de temps seulement. Ces dernières sont disparates, ce qui permet à la densité d'évoluer sur des échelles de temps très variables. C'est la pondération des modes propres qui détermine en fin de compte la vitesse de relaxation de la perturbation induite par le glaçon.

La mesure des modes propres sous différentes conditions a révélé une dépendance des constantes de temps selon $\tau \sim I_p^{2-3} n_e^0$, alors que les fonctions propres restent inchangées. L'invariance envers la densité va de pair avec un comportement remarquablement linéaire de la réponse dynamique, ce qui indique le manque d'influence du glaçon sur le transport.

La représentation en modes propres convient particulièrement bien à l'étude de variables couplées. Un couplage a été mis en évidence entre la densité perturbée et une autre variable du plasma, qui est vraisemblablement la température électronique. Son intensité est insensible aux conditions du plasma excepté le niveau d'activité MHD. Une activité trop importante et le changement de couplage qui en résulte ont pour effet de modifier la pondération des modes propres excités, de façon à provoquer une relaxation accélérée de la densité qui explique ainsi la perte de confinement observée.

Le couplage entre les perturbations de la densité et de la température force les deux à avoir exactement le même spectre, montrant ainsi qu'ils résultent d'un même processus. Il est donc nécessaire d'interpréter simultanément leurs réponses dynamiques. Les contraintes qui en résultent nécessitent une approche synergétique si on veut modifier simultanément le confinement de particules et de chaleur à partir de conditions données.

Un des atouts de la représentation en modes propres est sa faculté de paramétriser la dynamique du plasma à l'aide de coefficients dont l'extraction est bien conditionnée et ne nécessite pas de connaissance détaillée des processus sous-jacents. Elle intègre dans un même formalisme le transport, les conditions du bord ainsi que les termes de source tels que le recyclage. Cela lui offre une approche plus cohérente de certains phénomènes physiques tels que l'effet du mode H sur le confinement, ou encore la cohérence de profil, qui peut être interprété à partir de la disparité des constantes de temps.

L'applicabilité des modes propres comprend la représentation de la réponse dynamique mais ne s'étend pas à la description des différents mécanismes de transport qui génèrent cette réponse. L'extraction des coefficients de transport demeure un problème mal conditionné en présence de modes propres quoique ceux-ci révèlent la possibilité d'améliorer cette extraction par l'excitation sélective de modes différents. Cette thèse montre qu'il est possible de mettre en évidence des aspects importants du confinement en se basant sur une représentation générale et pas seulement en recourant à une modélisation explicite du transport.

Abstract

A novel method of perturbation analysis has been developed to characterise particle and energy confinement in a tokamak plasma. Whereas the classical approach to confinement begins with an empirical model using transport coefficients, the present work uses eigenmodes to represent the dynamic response. The latter approach has been applied to density perturbations induced in the TCA tokamak by pellet injection.

The observed dynamic response can be entirely reproduced by a set of three eigenmodes, thereby reducing the temporal evolution of the density to three time constants only. The scatter of these time constants allows the density to evolve on quite different time-scales, with the relaxation of the density profile being determined by the nature of the eigenmodes.

Whilst a $\tau \sim I_p^{-2} n_e^0$ dependence is observed in the time constants, the eigenfunctions remain insensitive to plasma conditions. The density invariance is linked with a strong linearity in the dynamic response, indicating that the pellet has no significant impact on transport processes.

The eigenmode representation is particularly well suited to the study of coupled variables. A coupling has been identified between density perturbations and another variable which is very likely to be the electron temperature. The strength of this coupling does not depend on plasma conditions, although it varies with the level of MHD activity. High levels of activity change the interaction between particle and heat fluxes without affecting the eigenmodes. This results in an unfavourable weighting of the eigenmodes which accelerates the density relaxation and thereby explains the observed confinement degradation.

The coupling between density and temperature perturbations implies that both have exactly the same spectrum and therefore cannot be interpreted separately. Given these constraints, a synergetic approach is required if the results of a particular experiment are to be usefully employed in predicting the subsequent behaviour of energy and particle confinement.

One of the main advantages of the eigenmode representation lies in its ability to model the plasma dynamics in terms of coefficients whose extraction is well conditioned and moreover does not require a good knowledge of the

underlying transport processes. Its formalism includes not only transport, but also boundary conditions and source terms such as recycling. By including these different aspects of confinement, this representation provides a more coherent approach to phenomena such as the H-mode or profile consistency, both of which are easier to interpret in terms of eigenmodes.

Although this approach is valid for the representation of plasma dynamics, it cannot be used in describing transport processes. The eigenmode representation, like all other approaches, faces the ill-conditioned problem of transport coefficient extraction. It reveals, however, the possibility of improving this extraction with experiments designed to selectively excite various eigenmodes. This thesis demonstrates how important confinement features can be revealed by a global approach in which modelling of the transport processes is unnecessary.

Table des matières

1 Introduction

1.1	Le contexte : la recherche en fusion contrôlée	1
1.2	Le domaine : étudier expérimentalement le confinement	1
1.3	La problématique : caractériser le confinement	3
1.4	Une analogie : mouvement de la poutre rigide	4
1.5	La démarche : décomposer en modes propres	9

2 Modélisation du transport

2.1	La démarche suivie	11
2.2	Modèles du transport	12
2.3	Linéarisation des équations du transport	14
2.4	Conclusion	17

3 La décomposition en modes propres

3.1	La paramétrisation du transport	19
3.2	Formalisme de la décomposition en modes propres	20
3.3	Propriétés de la représentation en modes propres	23
3.4	Exemples d'opérateurs d'évolution	25
3.5	Lien avec le temps de confinement	33
3.6	Formalisme de la décomposition pour deux variables couplées	35
3.7	Conclusion	41

4 Validation de la décomposition

4.1	Choix de l'expérience	43
4.2	La linéarité	46
4.3	L'existence d'un spectre discret	47
4.4	La stationnarité du plasma	50
4.5	La structure du terme de source	53
4.6	Conclusion	55

5	Caractéristiques des modes propres	
5.1	Les modes propres de la densité	57
5.2	Dépendance paramétrique des modes propres	61
5.3	Discussion	66
5.4	Conclusion	69
6	Couplages avec d'autres variables	
6.1	L'existence de couplages	71
6.2	Identification du couplage	72
6.3	Caractérisation du couplage	72
6.4	Implications sur le confinement	77
6.5	Conclusion	81
7	Une approche complémentaire	
7.1	Des paramètres différents	83
7.2	Premier exemple : le rôle des conditions du bord	84
7.3	Discussion	86
7.4	Second exemple : la cohérence de profil	88
7.5	Conclusion	89
8	Conclusion	91

A1	Annexe 1 : Les conditions expérimentales	
A1.1	Le tokamak TCA	95
A1.2	Les diagnostics	96
A1.3	Reconstitution du profil de densité	97
A2	Annexe 2 : Origine des équations macroscopiques	
A2.1	Les équations de la MHD	99
A2.2	Plasma à deux composantes	100

A3	Annexe 3 : Expression linéarisée du transport	
A3.1	L'expression linéarisée	103
A3.2	Implications	106
A4	Annexe 4 : Techniques d'analyse	
A4.1	Analyse par identification de la fonction de transfert	109
A4.2	Procédure d'identification de la fonction de transfert	113
A4.3	Analyse par ajustement de fractions partielles	117
A4.4	Validation de l'analyse	119
A4.5	Autres approches	125
A5	Annexe 5 : Couplage et amplitude des modes propres	
A5.1	Expression de l'amplitude des modes propres	129
A5.2	Application à l'injection de glaçons	130
	Bibliographie	133
	Remerciements	135
	Curriculum vitae	137

1. Introduction

1.1 Le contexte : la recherche en fusion contrôlée

La réalisation de la fusion thermonucléaire contrôlée constitue un des objectifs prioritaires dans le développement de sources d'énergie nouvelles. Différentes filières sont actuellement étudiées et celle du tokamak [1] semble la plus apte relever ce défi. Même si la production rentable d'énergie ne relève désormais plus de l'impossible, de nombreux obstacles restent à franchir. Parmi ceux-ci, il y a la maîtrise du confinement. Ce terme désigne les moyens mis en oeuvre pour contenir et isoler thermiquement le plasma, conditions indispensables à l'amorce de réactions de fusion. L'étude du confinement vise essentiellement à trouver et à comprendre les conditions les plus favorables à la production de plasmas thermonucléaires.

Pour maîtriser le confinement, il faut d'abord comprendre le transport, c'est-à-dire les mécanismes de relaxation responsables des transferts de particules et d'énergie dans le plasma. Les modèles théoriques élaborés pour expliquer le transport sont hélas pour la plupart en désaccord avec les observations expérimentales, qui font état de pertes d'énergies beaucoup plus importantes que prévues. Ce désaccord justifie la quête d'une meilleure connaissance du plasma et l'étude expérimentale du transport a justement pour objectif de déterminer et de caractériser les mécanismes qui gouvernent le comportement du plasma. C'est dans ce domaine que va se situer notre démarche, dont le but premier est de fournir un moyen efficace de décrire le confinement.

1.2 Le domaine : étudier expérimentalement le confinement

L'étude expérimentale du confinement débute par une modélisation, généralement empirique, des observations [2]. Si le modèle mathématique

utilisé est adéquat, ses paramètres peuvent servir à caractériser le transport. Ils permettront de comparer différentes expériences, de prédire le confinement sous diverses conditions ou éventuellement de déterminer la nature des mécanismes sous-jacents.

La plupart des modèles s'élaborent à partir de lois de conservation telles que celle des particules, qui s'exprime comme

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot \Gamma = S \quad (1.1)$$

n , Γ et S sont respectivement la densité, le flux et la source de particules. L'étude de ce type d'équation constitue le point de départ des travaux expérimentaux sur la fusion. Ce qui nous intéresse n'est pas tant la valeur du flux mais la façon dont celui-ci est lié aux forces thermodynamiques. Le modèle diffusif, qui est l'un des plus couramment utilisés, lie le flux au gradient de la densité par un coefficient phénoménologique dit de diffusion

$$\Gamma = -D \nabla n \quad (1.2)$$

Le coefficient D est un des paramètres qui servent à caractériser le transport. Pour l'estimer, il existe principalement deux approches.

L'approche statique

Elle consiste à étudier le plasma en régime stationnaire. Dans ce cas, les dérivées temporelles s'annulent et le calcul du flux est immédiat. Cette approche est la plus fréquemment utilisée en raison de sa simplicité. Son principal défaut est de fournir des valeurs qui s'avèrent inaptes à reproduire les états transitoires du plasma. Différentes explications ont été avancées pour pallier ce désaccord. Nous en citerons deux :

- l'existence de mécanismes de transport supplémentaires, tels qu'une convection, ce qui donne $\Gamma = -D \nabla n - v n$ au lieu de $\Gamma = -D \nabla n$.
- l'existence de non linéarités dans l'équation du bilan, provenant d'une dépendance fonctionnelle des coefficients de transport envers les paramètres du plasma $D = D(n, \nabla n, \dots)$.

On remarquera que ces différentes explications ne peuvent pas être différenciées sur la base de mesures faites en régime stationnaire uniquement. Pour les séparer, une autre approche doit être suivie.

L'approche dynamique

En mesurant le bilan de particules en régime transitoire, on accède à l'information contenue dans l'évolution temporelle, ce qui permet de mieux définir le type de modèle nécessaire à la reproduction des observations. L'approche dynamique, aujourd'hui largement répandue [3,4], met en évidence des phénomènes insoupçonnés tels que des interactions entre flux de particules et de chaleur ou encore des dépendances fonctionnelles dans les coefficients de transport.

Tous les espoirs placés dans les avantages de l'approche dynamique ne semblent malheureusement pas être comblés. A mesure que la somme de connaissances s'accroît, de nouveaux paramètres doivent être inclus dans la modélisation pour reproduire les observations. Parallèlement à la complexité croissante des modèles requis, il devient toujours plus difficile de mesurer simultanément et sans ambiguïté les coefficients qui nous intéressent, à savoir D , v , etc.

1.3 La problématique : caractériser le confinement

La difficulté de mettre en évidence des phénomènes qui se dérobent à notre compréhension explique en partie la lenteur des progrès réalisés dans l'étude du confinement. La diversité actuelle des méthodes d'analyse, dont les résultats ne sont d'ailleurs pas toujours compatibles, est un reflet de ce problème.

Avec un peu de recul, on constate que la majeure partie des études expérimentales du transport procèdent par induction. Elles commencent par imposer un modèle mathématique des observations, c'est-à-dire par interpréter, pour ensuite seulement analyser. Les résultats obtenus sont donc inévitablement le reflet du type de modèle choisi. Il n'est pas étonnant que différentes méthodes d'analyse aboutissent à des résultats divergents étant donné que toutes éclairent différentes facettes d'une même réalité.

L'approche inductive est satisfaisante lorsque les données montrent des traits de comportement saillants. Ceci est rarement le cas dans l'étude du transport, et la validation d'un modèle devient problématique. Dans ce cas, n'est-il pas possible de suivre la procédure inverse, qui consiste à déduire les caractéristiques d'abord pour ensuite seulement les interpréter ? Cette

préoccupation va motiver la recherche d'une représentation qui met plus clairement en évidence les propriétés du confinement. Notre objectif sera donc de faciliter l'interprétation de la dynamique du plasma par l'utilisation d'une représentation bien adaptée. Pour donner un aperçu du type de démarche que nous allons suivre, nous commençons par étudier une analogie.

1.4 Une analogie : mouvement de la poutre rigide

La dynamique d'un bilan de particules perturbé peut être décrite par un formalisme applicable à d'autres systèmes, tels qu'un solide soumis à des déformations. L'exemple d'une poutre rigide soumise à des déformations permettra ici de mieux illustrer certains des problèmes rencontrés. Même si les deux systèmes se comportent différemment (une poutre déformée oscille alors qu'une perturbation de la densité est évanescence), les problèmes soulevés par leur caractérisation sont identiques.

Considérons une poutre rigide (figure 1) dont on désire connaître les propriétés afin de prévoir les déformations qu'elle subira sous différentes contraintes. Ce genre d'exercice est courant dans la construction de ponts ou de mâts pour voiliers. Qui dit caractériser pense immédiatement aux paramètres physiques qui spécifient les propriétés de la poutre, tels que la section, la densité ρ ou encore le module de torsion G . Ce dernier nous intéresse tout particulièrement parce qu'il détermine la flexibilité de la poutre. Pour simplifier les calculs, nous commencerons par supposer que tous ces paramètres sont constants.

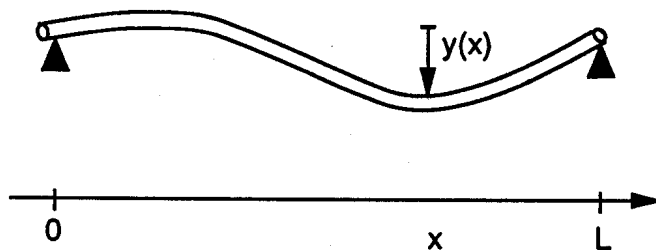


Fig. 1 La déformation subie par la poutre rigide.

Cas statique

Pour mesurer le module de torsion G , la méthode la plus simple consiste à poser la poutre sur des supports et à la soumettre à des contraintes continues $F(x)$. La poutre subira alors une légère déformation transversale $y(x)$ qui est donnée par l'expression

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial y}{\partial x} \right) + F(x) = 0 \quad (1.3)$$

En principe, il suffit de mesurer $y(x)$ et $F(x)$ pour résoudre cette équation. En pratique toutefois, la présence inévitable d'erreurs de mesure rend le calcul de G délicat. La situation empire lorsque G dépend de x . La figure 2 illustre cela en montrant comment deux profils différents de $G(x)$ peuvent donner lieu à des déformations quasiment indistinguables. Il faut donc s'attendre à ce que la méthode d'analyse statique fournisse des résultats sensibles aux erreurs de mesure.

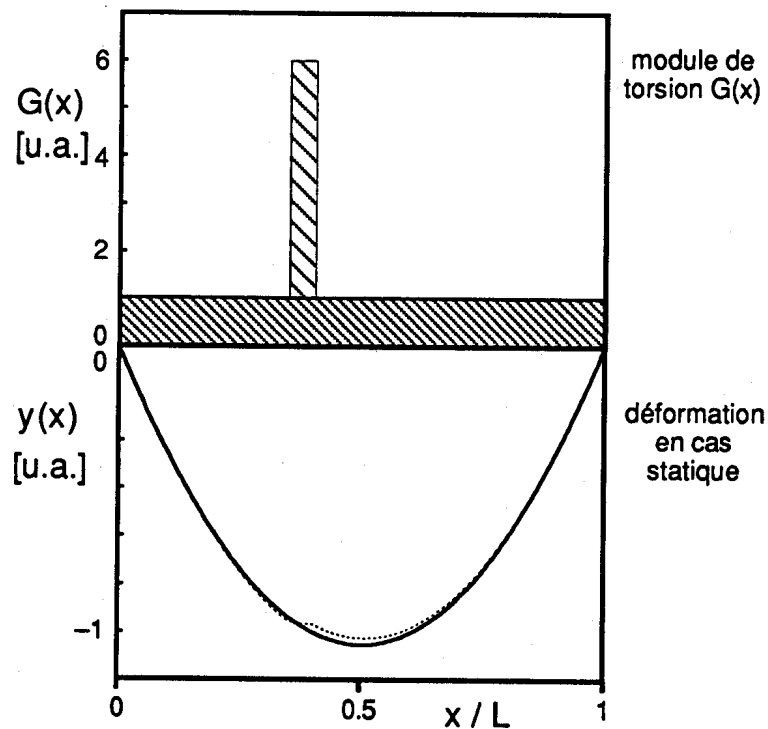


Fig. 2 Déformation d'une poutre rigide soumise à son propre poids. La déformation subie lorsque le module de torsion présente un défaut local (pointillé) est difficile à distinguer de celle observée en présence d'une poutre homogène (trait plein).

Cas dynamique

Considérons à présent une méthode dynamique, qui consiste à varier les contraintes au cours du temps. L'équation qui régit la déformation de la poutre devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial y}{\partial x} \right) + F(x,t) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Bien que cette expression fasse apparaître un paramètre supplémentaire à déterminer, elle est plus intéressante que la précédente. Nous pouvons en effet l'ajuster à plusieurs séries de données dans lesquelles les forces varient différemment au cours du temps. En accumulant davantage de données, la mesure de G devient moins sensible aux erreurs et par conséquent plus fiable. Il est même possible de perfectionner le modèle en lui ajoutant des effets supplémentaires tels que des non linéarités.

Malgré les avantages de l'approche dynamique, le problème d'extraction de $G(x)$ demeure tout aussi mal conditionné que dans le cas statique. Il suffit que $y(x)$ ou $F(x)$ soient mal déterminés pour que cette extraction échoue. Que la caractérisation de la poutre demeure à ce point inféodée à la précision des mesures (qui ne peut être toujours garantie) constitue un obstacle sérieux. N'existe-t-il pas une autre façon de procéder qui offre une représentation mieux conditionnée des propriétés de la poutre ?

Modes propres

Oublions momentanément le modèle (1.4) utilisé jusqu'ici. On remarquera tout d'abord que la poutre est capable d'osciller à des fréquences précises ω_k (dites fréquences de résonance) de façon tout à fait analogue à une corde de guitare. A chacune de ces fréquences correspond une déformation bien déterminée nommée fonction propre et notée ici $f_k(x)$. On peut montrer que toute déformation de la poutre se décompose en une série unique de modes propres

$$y(x,t) = \sum_k c_k(t) f_k(x) \quad (1.5)$$

Dans cette décomposition, les modes propres dépendent des propriétés de la poutre, mais pas des contraintes qui lui sont appliquées. La pondération $c_k(t)$ résulte en revanche de la façon dont la poutre a été déformée. Prenons le cas d'une poutre mise sous contrainte puis brusquement libérée; elle va subir un mouvement plus ou moins complexe qui peut se décomposer en une somme

d'oscillations simples

$$y(x,t) = \sum_k \alpha_k \cos(\omega_k t) f_k(x) \quad (1.6)$$

Nous voyons que la connaissance des modes propres et des fréquences de résonance suffit à déterminer le comportement de la poutre, puisque l'évolution temporelle peut être prédite. En pratique, les $f_k(x)$ et ω_k sont généralement aisément calculables, avec une marge d'incertitude nettement inférieure à celle du module de torsion G . Ils ont en plus l'avantage d'être directement liés aux propriétés de la poutre. La figure 3 montre que des défauts locaux de la poutre sont mieux mis en évidence par les fonctions propres que par la mesure de G effectuée à partir de méthodes statique ou dynamique.

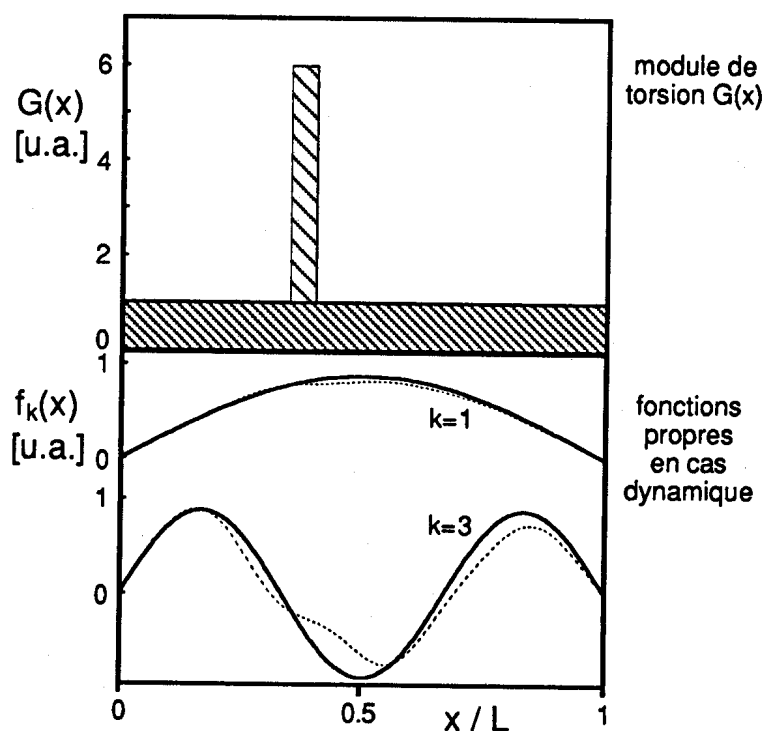


Fig. 3 Même cas que celui de la figure 2, avec cette fois-ci les fonctions propres du premier et du troisième ordre mesurées pour la poutre homogène (trait plein) et pour la poutre défectueuse (pointillé).

Nous avons donc trouvé une nouvelle caractérisation de la poutre sous la forme d'un ensemble de paramètres différents de ceux préconisés par le modèle physique. Son grand atout est de fournir une représentation de la poutre qui ne

nécessite pas d'interprétation préalable, étant donné que la connaissance du modèle physique sous-jacent n'intervient pas dans le calcul des modes propres. Une telle caractérisation n'est donc pas limitée par le degré de complexité du modèle physique, qui peut par exemple inclure des non linéarités ou des dérivées spatiales du troisième ordre. Pour avoir des modes propres, il faut avant tout que le comportement de la poutre soit linéaire. Nous verrons qu'une telle condition est aisément satisfaite pour de petites déformations.

Après le calcul des modes propres commence la phase interprétative des résultats. Différentes possibilités s'offrent alors à l'expérimentateur. Il est même possible de revenir à une description classique par le calcul du module de torsion qui, pour une poutre homogène, est lié aux modes propres par l'expression

$$\omega_k = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \frac{\pi k}{L} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \sin\left(\pi k \frac{x}{L}\right) \quad (1.7)$$

Analogie avec le transport

La plupart des problèmes liés à l'étude de la poutre resurgissent dans la caractérisation du plasma. Le module de torsion G peut être associé aux coefficients de transport D , v etc. qui sont eux aussi difficiles à mesurer. Les modes propres réapparaissent sous une forme évanescence et non oscillante. Le plasma se distingue cependant par un comportement sensiblement plus complexe que celui de la poutre. Sa description nécessite un nombre important de variables gouvernées par des mécanismes dont il n'existe généralement pas de modèle mathématique bien établi. A ces inconvénients s'ajoute la difficulté de mesurer certains paramètres tels que les termes de source (l'équivalent de la contrainte $F(x)$). L'étude du plasma ne fait donc qu'accentuer les problèmes rencontrés dans le cas de la poutre. C'est dans un tel contexte que la décomposition en modes propres révèle son utilité par une approche nettement plus déductive. En se basant directement sur des résultats expérimentaux, elle garantit la mesure de paramètres capables de caractériser la réponse dynamique et dont l'extraction est bien conditionnée.

La représentation en modes propres ne se résume pas seulement à une nouvelle expression du transport. Ce changement de représentation constitue aussi un changement de vision, dont nous verrons que la portée dépasse l'acquisition de quelques avantages supplémentaires. Elle donne accès à d'autres phénomènes tels que des conditions de bord variables ou des interactions entre différentes variables, qui sont souvent plus difficiles à traiter

par une approche classique.

1.5 La démarche : décomposer en modes propres

Le problème est à présent posé : il s'agit de trouver une représentation adéquate de la dynamique du plasma qui en facilite l'interprétation. Pour ce faire, nous ne suivrons pas la filière habituelle, qui consiste à partir d'un modèle préétabli du transport. Nous commencerons par décomposer le comportement du plasma en un ensemble de composantes simples dénommées modes propres, qui serviront ensuite de point de départ à l'interprétation. Une telle démarche peut s'appliquer à divers paramètres tels que le courant, la densité, la température ou encore la quantité de mouvement; nous nous concentrerons ici sur la densité électronique.

Comme notre démarche nécessite un changement de représentation, un effort important sera mis sur ce que cela implique. Le chapitre 2 prépare le terrain aux modes propres par l'obtention d'une expression générale de la réponse dynamique du plasma. Le chapitre 3 introduit la représentation en modes propres avec ses propriétés et divers exemples à l'appui. La validité de cette représentation est discutée dans le chapitre 4 pour le cas de la réponse dynamique de la densité électronique. Le chapitre 5 passe ensuite à la description puis à l'interprétation des modes propres mesurés. L'implication des résultats sur l'existence d'interactions entre la densité et d'autres variables du plasma est discutée dans le chapitre 6. Le chapitre 7 compare finalement l'approche avec celle, classique, basée sur la mesure des coefficients de transport. Il est suivi de la conclusion. A plusieurs reprises il sera fait appel à des connaissances préalables non indispensables qui ont été regroupées en annexe.

2. Modélisation du transport

L'étude du confinement d'un plasma débute habituellement par une modélisation des processus de transport. Ceux-ci nécessitent la connaissance des mécanismes d'interaction entre particules et suivant les hypothèses émises, on aboutit à divers modèles physiques du transport. Notre but sera de montrer que ces différents modèles conduisent à une seule expression de la réponse dynamique du plasma, dans laquelle l'évolution des variables perturbées est régie par un opérateur différentiel.

Le premier paragraphe commence par situer le contexte ainsi que la démarche suivie. Dans le second paragraphe est élaborée une représentation générale du transport qui regroupe les mécanismes proposés par les différents modèles actuellement connus. Le troisième paragraphe montre que la linéarisation de cette représentation permet d'aboutir à une expression simple des variables perturbées du plasma. Il est suivi de la conclusion. A ce chapitre se rattachent l'annexe 2 qui rappelle l'origine des équations macroscopiques et l'annexe 3 qui détaille la linéarisation des équations du transport.

2.1 La démarche suivie

La complexité et la multiplicité des interactions présentes dans un plasma magnétisé rendent la modélisation de ce dernier particulièrement difficile. Diverses théories ont été élaborées, mais aucune ne parvient à décrire tous les aspects du transport. Ces différentes théories conduisent cependant à des expressions semblables du transport, qui font habituellement intervenir des coefficients de diffusion et de convection. Nous commencerons par réunir les caractéristiques de ces modèles dans une seule expression générale du transport de particules et d'énergie. Le but de cette démarche, qui ne saurait évidemment être exhaustive, sera de montrer que des mécanismes différents peuvent s'intégrer naturellement dans une expression générale de la réponse dynamique de la densité et de la température.

2.2 Modèles du transport

Une description microscopique du plasma permet d'aboutir à des équations de conservation générales qui servent habituellement de point de départ à la modélisation du transport. Nous nous concentrerons ici sur la conservation de la densité de particules et de l'énergie. Les équations du bilan, dérivées dans l'annexe 2, sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma &= S \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n T \right) + \nabla \cdot q &= Q \end{aligned} \quad (2.1)$$

où Γ et q sont les flux et S et Q sont les termes de source des particules, respectivement de l'énergie. Ces équations, quoique importantes, ne nous apprennent rien sur le transport. Pour les rendre utiles, nous devons exprimer les flux en termes de variables thermodynamiques. Cela requiert un modèle physique qui explique les interactions sur les particules. Suivant le modèle retenu, on aboutira à des expressions différentes des flux.

Partant d'un modèle fondé sur l'existence exclusive de collisions élastiques entre particules, la théorie classique fournit une expression simple des flux, qui sont essentiellement diffusifs [5]

$$\begin{aligned} \Gamma &= -D \nabla n \\ q &= -n \chi \nabla T + \gamma \Gamma T \end{aligned} \quad (2.2)$$

où D et χ sont des coefficients de diffusion. Les théories classique et néoclassique du transport fournissent des coefficients dont la valeur est en profond désaccord avec les mesures expérimentales, qui les dépassent de plusieurs ordres de grandeur. Des théories plus récentes tiennent compte de la présence de microinstabilités liées au mouvement collectif ou chaotique des particules et permettent de réconcilier certains résultats. Ces différentes théories révèlent clairement l'existence de trois propriétés qui doivent obligatoirement être prises en compte dans la modélisation des flux.

1) Les flux sont diffusifs et convectifs

Les modèles théoriques [5] ainsi que divers résultats expérimentaux [6] suggèrent la présence d'une composante convective dans l'expression des flux. L'équation (2.2) doit donc être complétée, ce qui donne

$$\begin{aligned}\Gamma &= -D \nabla n - v n \\ q &= -n\chi \nabla T - u \frac{3}{2}nT + \gamma T\end{aligned}\quad (2.3)$$

2) Les flux sont couplés

Les lois de la thermodynamique ont fait connaître les effets Peltier et thermoélectrique, qui dans un solide couplent le flux de chaleur au courant. Des couplages semblables lient les différents flux du plasma. Un exemple de représentation est donné par l'expression suivante, dans laquelle les flux sont couplés par les coefficients c_{ij}

$$\begin{pmatrix} \Gamma_e \\ q_e \\ q_i \\ j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & n_e \chi_e & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & n_i \chi_i & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & \sigma_{//} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla n_e \\ \nabla T_e \\ \nabla T_i \\ \nabla \phi \end{pmatrix}\quad (2.4)$$

j est la densité de courant et ϕ le potentiel électrique. Une telle représentation illustre bien ce que signifie le couplage. La plupart des termes hors diagonaux sont habituellement négligés dans l'étude du confinement. Seuls quelques uns, tels que c_{41} qui est responsable du courant de bootstrap, ont été mesurés. D'autres couplages viennent vraisemblablement s'ajouter à l'expression (2.4). Des résultats récents ont révélé l'impact de la vitesse de rotation du plasma sur le confinement [7], et suggèrent la présence d'une interaction avec la quantité de mouvement. L'existence de couplages a d'importantes conséquences, puisqu'elle exclut une interprétation séparée des paramètres du plasma.

3) Les coefficients de transport ont une dépendance fonctionnelle

De nombreux modèles prévoient l'existence de dépendances fonctionnelles dans les coefficients de transport [5,8]. La théorie néoclassique par exemple fournit des coefficients de diffusion qui dépendent entre autres de la densité et de la température locales. Pour tenir compte de tels modèles, chacun des coefficients doit inclure une dépendance du type $D = D(r, n, \nabla n, T, \nabla T, \dots)$ [9]. De telles dépendances fonctionnelles rendent les équations du transport non linéaires. Elles apparaissent aussi dans l'expression de termes de source, à l'exception toutefois des gradients. Cela permet d'inclure des effets tels que la modification du chauffage ohmique causée par un changement de température, ou encore l'effet de la densité et du courant sur le recyclage au bord du plasma.

Ces différents résultats révèlent qu'en regroupant des modèles de transport, on obtient une expression générale mais compliquée

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma &= S \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n T \right) + \nabla \cdot q &= Q \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix} \Gamma \\ q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_{nn} & D_{nT} \\ D_{Tn} & D_{TT} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} n \\ T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{nn} & v_{nT} \\ v_{Tn} & v_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \frac{3}{2} n T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \Gamma T \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad D = D(r, n, \nabla n, T, \nabla T), \quad S = S(r, n, T) \quad \text{etc.}$$

Une telle expression ne prétend évidemment pas être complète. Elle offre cependant une description relativement générale qui permet de décrire des situations très variées. Notons que les paramètres D_{ij} n'ont pas tous la dimension de coefficients de diffusion. Il en va de même pour les v_{ij} qui ne sont pas toutes des vitesses convectives. Dans cette expression, nous nous sommes délibérément limités à la densité et à la température électroniques afin de simplifier les équations qui suivent. Ce choix ne contrevient pas à notre objectif; à tout moment, il sera possible de généraliser les résultats pour revenir à un modèle contenant davantage de variables couplées.

L'expression (2.5) est évidemment trop compliquée pour servir à l'étude expérimentale du transport. Pour la rendre utile, nous devons la simplifier. Une approximation consiste à réduire les équations tridimensionnelles du transport à la seule composante radiale [2]. Pour le tokamak TCA, dont la section est circulaire, les phénomènes qui nous intéressent peuvent être réduits à leur composante radiale en coordonnées cylindriques.

2.3 Linéarisation des équations du transport

Une simplification plus conséquente consiste à linéariser les équations du transport. Cela revient à en faire une expansion linéaire autour d'un état d'équilibre, avec omission des termes d'ordre supérieur à 1. Pour l'expression des variables du plasma, nous posons donc

$$\begin{pmatrix} n(r, t) \\ T(r, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_o(r) \\ T_o(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{n}(r, t) \\ \tilde{T}(r, t) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La linéarisation de la réaction du plasma à des stimulations connues constitue la réponse dynamique. Pour garantir la linéarisabilité de cette réaction, il suffit de se limiter à de petites perturbations

$$\begin{pmatrix} \tilde{n}/n \\ \tilde{T}/T \end{pmatrix} \ll 1 \quad (2.7)$$

Nous verrons par la suite que la réponse dynamique observée se prête fort bien à une description linéaire. La linéarisation des coefficients de transport donne, en tenant compte de leur dépendance fonctionnelle

$$D \equiv D_0 + \frac{\partial D}{\partial n} \tilde{n} + \frac{\partial D}{\partial T} \tilde{T} + \frac{\partial D}{\partial \nabla n} \nabla \tilde{n} + \frac{\partial D}{\partial \nabla T} \nabla \tilde{T} \quad (2.8)$$

Quant aux termes de source, ils deviennent

$$S \equiv S_0 + \frac{\partial S}{\partial n} \tilde{n} + \frac{\partial S}{\partial T} \tilde{T} + \tilde{S}(r) u(t) \quad (2.9)$$

Signalons qu'un terme de source additionnel avec dépendance explicite du temps a été introduit pour offrir la possibilité de perturber le plasma par des stimulations externes. Ce terme peut représenter diverses stimulations telles qu'une modulation de la puissance de chauffage ou de l'apport de particules, des injections d'impuretés ou de glaçons.

En insérant les différentes expressions dans l'équation (2.5), il vient une équation vectorielle qui peut se mettre sous une forme condensée

$$\mathcal{E} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \nabla \mathcal{D} \nabla \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} + \nabla \mathcal{V} \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} + \mathcal{A} \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{S} u_1 \\ \tilde{Q} u_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Les termes \mathcal{E} , \mathcal{D} , \mathcal{V} et \mathcal{A} sont des matrices 2×2 dont les éléments dépendent uniquement du rayon. La matrice \mathcal{D} caractérise le transport de type diffusif du système et \mathcal{V} la convection. Quant à \mathcal{A} , il provient uniquement de la dépendance fonctionnelle des termes de source et équivaut à un amortissement pur. La présence de dépendances fonctionnelles peut sensiblement modifier les caractéristiques du transport dès que le plasma quitte un état stationnaire. Elle peut par exemple engendrer des couplages ou des flux convectifs dont rien n'indique l'existence à l'état d'équilibre. Ces effets ainsi que le contenu exact des matrices sont détaillés dans l'annexe 3. En regroupant les différents opérateurs différentiels il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y} = \mathcal{L} \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad (2.11)$$

Cette expression compacte constitue l'objectif fixé au début de ce chapitre, à savoir le regroupement de divers modèles de transport dans une seule

expression de la réponse dynamique du plasma qui fait intervenir un opérateur différentiel. Ce dernier est défini par

$$\mathcal{L}(r) = \mathbb{E}^{-1} \nabla D \nabla + \mathbb{E}^{-1} \nabla V + \mathbb{E}^{-1} A \quad (2.12)$$

Les hypothèses émises font qu'il dépend uniquement du rayon et possède des propriétés bien définies telles que la linéarité et la stationnarité, c'est-à-dire l'invariance par rapport au temps. Notons en plus qu'il est du type de Sturm-Liouville, ce qui lui garantit des propriétés utiles [10]. La variable \mathbf{y} sur laquelle cet opérateur agit contient les quantités perturbées qui sont nos observables

$$\mathbf{y}(r,t) = \begin{pmatrix} \tilde{n}(r,t) \\ \tilde{T}(r,t) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Quant au terme non homogène \mathbf{x} , il est constitué des sources de particules et d'énergie qui perturbent le plasma

$$\mathbf{x}(r,t) = \mathbb{E}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{S}(r) u_1(t) \\ \tilde{Q}(r) u_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

L'opérateur \mathcal{L} n'est pas sans rappeler l'Hamiltonien rencontré en mécanique, puisqu'il régit le comportement du plasma perturbé. Il serait tentant de le qualifier d'opérateur de transport en raison des équations dont il découle. Une telle appellation est cependant inexacte parce qu'elle ne tient pas compte des termes de source, dont l'effet s'ajoute au transport au travers d'un terme d'amortissement. L'opérateur n'agit donc pas uniquement sur le transport, mais sur l'ensemble des bilans perturbés des particules et de l'énergie. Nous y incluons aussi les conditions aux limites, de telle sorte que le spectre de \mathcal{L} soit entièrement déterminé. Cet opérateur sera par la suite appelé opérateur d'évolution en raison du rôle qu'il joue dans la détermination de l'évolution temporelle du plasma.

Malgré la généralité des mécanismes de transport considérés jusqu'ici, l'opérateur d'évolution possède une structure bien déterminée. Nous pouvons sans autre le généraliser à des couplages multiples simplement en incluant davantage de variables dans l'équation (2.10). Rien ne nous empêche aussi de lui ajouter des mécanismes non évoqués ici, pour autant qu'il demeure stationnaire et linéaire. La généralité de cet opérateur est sans conteste un atout pour représenter des mécanismes dont la structure est mal connue au départ. En cherchant à représenter le confinement du plasma à l'aide des caractéristiques de l'opérateur d'évolution et non à partir des coefficients de transport qui le constituent, nous suivons une approche complémentaire qui convient mieux à l'étude de certains phénomènes.

2.4 Conclusion

La mise en commun des caractéristiques de différents modèles physiques du transport dans un plasma a permis d'obtenir une expression relativement générale du bilan d'énergie et de particules. La linéarisation de celle-ci autour d'un état d'équilibre a ensuite livré une équation condensée dans laquelle la réponse dynamique de la température et de la densité est régie par un opérateur d'évolution. On s'est restreint à ce que ce dernier possède des propriétés bien déterminées telles que la linéarité et la stationnarité.

La démarche entreprise dans ce chapitre équivaut à un changement de représentation. A l'approche classique, qui décrit le plasma en termes de coefficients de transport, nous avons substitué une représentation basée sur l'opérateur d'évolution du plasma. Celui-ci décrit le comportement dynamique du plasma pour un état donné et intègre dans une même expression le transport, la réaction des termes de source ainsi que les conditions de bord du plasma. Sa généralité est un atout pour traiter la réponse dynamique de façon unifiée sans nécessiter une connaissance détaillée des mécanismes qui la régissent. C'est cet opérateur qui va nous intéresser tout au long de notre étude. Nous chercherons à caractériser le confinement à partir de ses propriétés sans devoir passer par le calcul des éléments qui le constituent.

3. La décomposition en modes propres

Une expression linéaire a été développée, décrivant la réponse dynamique de la densité et de la température. Pour caractériser le confinement, il est nécessaire de paramétrer cette expression. L'approche classique consiste à introduire des coefficients de transport tels que des coefficients de diffusion. Nous adopterons ici une autre approche, basée sur des modes propres de l'opérateur d'évolution.

Le premier paragraphe traitera de l'importance du choix de l'approche. Le formalisme de la décomposition en modes propres et ses propriétés seront exposés dans les deux paragraphes qui suivent pour le cas monovarié. Le paragraphe 4 considérera quelques spectres obtenus pour des modèles de transport couramment utilisés. Ensuite, le lien sera fait entre le spectre et la notion de temps de confinement. Finalement, le paragraphe 6 généralisera le tout au cas où deux variables interagissent entre elles. Ce chapitre se veut essentiellement prospectif et l'argumentation des diverses hypothèses émises n'y est pas encore abordée.

3.1 La paramétrisation du transport

La façon de paramétrer le transport est étroitement liée aux aspects que l'on veut mettre en évidence. Une solution consiste à exprimer le transport en termes de coefficients de diffusion, de vitesse de convection, etc. Cette paramétrisation est fréquemment utilisée parce que ses coefficients découlent directement des modèles théoriques du transport. Elle présente deux inconvénients lorsqu'il s'agit de quantifier le transport. D'abord, le problème d'extraction des coefficients à partir des données expérimentales est mal conditionné. Comment rendre les résultats moins sensibles aux erreurs de mesure ? Ensuite, l'extraction de coefficients présuppose le choix d'un modèle. Or il est courant de voir plusieurs modèles reproduire les mêmes données.

En pratique, on peut toujours espérer réduire l'incertitude de mesure en améliorant la qualité des signaux. En revanche, il est beaucoup plus difficile de pallier l'incertitude physique liée au choix du modèle. Très peu d'auteurs font mention de cette erreur physique, qui pourtant peut être considérable.

On peut se faire une image du transport comme formant un espace multidimensionnel. La solution classique équivaut alors à choisir un référentiel dont les vecteurs sont quasiment colinéaires. Un tel référentiel produira évidemment des résultats ambigus. Pour faciliter la caractérisation du transport à partir de données expérimentales, une représentation doit répondre au mieux aux conditions suivantes; elle doit être

bijective : l'extraction de paramètres à partir de signaux expérimentaux ainsi que la procédure inverse doivent toutes deux être bien conditionnées. Les effets respectifs des éléments qui caractérisent la représentation doivent par conséquent être aisément dissociables.

complète : on désire avoir une idée claire du nombre minimum de paramètres qu'il faut pour reproduire les données.

instructive : la représentation doit être capable de fournir un complément d'information en mettant en évidence des aspects nouveaux du transport.

Le problème à résoudre est maintenant posé avec ses conditions. Une solution consiste à représenter le transport à l'aide de la réponse fréquentielle liant la sortie (la perturbation) à l'entrée (la stimulation). Cette approche a déjà été mise à profit sur TCA pour étudier la réponse dynamique du plasma [11]. Nous adopterons dans ce qui suit une approche toute différente, basée sur la décomposition de l'opérateur d'évolution en modes propres. Ces derniers sont orthogonaux par construction, donc aptes à mettre en évidence les traits saillants de l'opérateur. Cette approche a déjà été appliquée avec succès à l'étude du transport couplé de particules et de chaleur dans Tore Supra [12].

3.2 Formalisme de la décomposition en modes propres

Partons de l'équation générale du transport telle qu'elle a été exprimée dans le chapitre précédent et suivons une démarche semblable à celle exposée dans [12]. L'équation sera d'abord réduite au cas monovisible, ce qui revient à négliger les interactions entre différentes variables. Cette simplification

permettra d'alléger la notation et mettra mieux en évidence les propriétés des modes propres. La généralisation au cas multivariable se fera en fin de chapitre.

De (2.11), l'expression générale de la conservation d'une variable du plasma s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} y(r,t) = \mathcal{L} y(r,t) + x(r,t) \quad (3.1)$$

y peut représenter des quantités telles que la densité, le courant ou la température perturbés; \mathcal{L} est un opérateur différentiel linéaire et stationnaire. Le terme de source est choisi séparable

$$x(r,t) = x(r) u(t) \quad (3.2)$$

ce qui simplifiera le développement. Nous verrons par la suite que la condition de séparabilité n'est pas indispensable. La résolution de l'équation (3.1) est facilitée si nous en prenons la transformée de Laplace

$$s y(r,s) = \mathcal{L} y(r,s) + x(r) u(s) \quad (3.3)$$

Considérons maintenant le spectre de l'opérateur \mathcal{L} dont les valeurs propres p_i et les fonctions propres $f_i(r)$ sont définies par

$$\mathcal{L} f_i(r) = p_i f_i(r) \quad (3.4)$$

Admettons que ce spectre est discret et que l'ensemble des fonctions propres est complet. Ces hypothèses seront vérifiées ultérieurement. Elles permettent de décomposer la perturbation $y(r,t)$ et le terme de source $x(r)$ selon

$$\begin{aligned} y(r,s) &= \sum_i a_i(s) f_i(r) \\ x(r,s) &= \sum_i u(s) f_i(r) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Notons que la seconde équation a été utilisée pour déterminer l'amplitude des fonctions propres. En insérant l'expression (3.5) dans l'équation du bilan (3.3), il vient

$$s \sum_i a_i(s) f_i(r) = \sum_i p_i a_i(s) f_i(r) + u(s) \sum_i f_i(r) \quad (3.6)$$

ce qui donne

$$\sum_i f_i(r) [a_i(s)(s - p_i) - u(s)] = 0 \quad (3.7)$$

Pour que cette équation soit valable en tout r , le terme entre crochets doit être nul, ce qui laisse

$$a_i(s) = \frac{u(s)}{s - p_i} \quad i=1,2,3... \quad (3.8)$$

Ceci conduit finalement à la solution désirée

$$\begin{array}{l} y(r,s) = u(s) \sum_i \frac{f_i(r)}{s - p_i} \\ x(r,s) = u(s) \sum_i f_i(r) \\ p_i f_i(r) = \mathcal{L} f_i(r) \end{array} \quad (3.9)$$

Dans cette expression, la réponse dynamique du plasma a été décomposée en une série de composantes élémentaires qui sont constituées des fonctions propres et des valeurs propres de l'opérateur d'évolution. Une exemple simple aidera à illustrer ce résultat important. Considérons le cas où la variable y est perturbée par une source impulsionnelle $x(r,t) = x(r) \delta(t)$, comme c'est le cas pour l'injection de glaçons ou d'impuretés. Il vient alors

$$\begin{array}{l} y(r,t) = \sum_i e^{p_i t} f_i(r) \\ x(r,t) = \delta(t) \sum_i f_i(r) \end{array} \quad (3.10)$$

Cette expression montre que la perturbation a été décomposée en une série de modes propres dont le profil radial est celui de la fonction propre $f_i(r)$ de l'opérateur d'évolution. A chaque fonction propre correspond une constante de temps qui est liée au spectre de l'opérateur

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i} \quad (3.11)$$

Il existe plusieurs façons d'extraire les modes propres. Les méthodes d'extraction fournissent les valeurs de $f_i(r)$ et de τ_i directement à partir des mesures de $y(r,t)$ et de $u(t)$ sans imposer de contraintes autres que la validité de l'expression (3.9). Aucune connaissance préalable n'est donc requise sur les mécanismes régissant le comportement du plasma, qui doivent seulement être linéaires et stationnaires.

Voici donc en quoi consiste la représentation en modes propres : la réponse dynamique du plasma est paramétrisée en termes de fonctions propres $f_i(r)$ et de constantes de temps τ_i qui sont à leur tour définis par l'opérateur d'évolution. Grâce à cette représentation nouvelle, l'évolution temporelle du plasma est réduite à des constantes de temps. Il s'agit à présent de justifier ce choix en montrant ce que les modes propres nous apprennent de nouveau sur le transport et le confinement du plasma.

3.3 Propriétés de la représentation en modes propres

L'expression de la réponse dynamique (3.9) met en évidence diverses propriétés dont les implications sont importantes.

Les perturbations sont superposables

Considérons l'effet de la stimulation sur les modes propres. L'expression (3.9) montre que le terme de source n'influence pas l'opérateur de transport. Ni les fonctions propres, ni les constantes de temps ne dépendent de $x(r)$ qui détermine uniquement quels modes propres sont excités. Cela implique qu'il est possible de superposer plusieurs termes de source différents pour ensuite les analyser simultanément sans que cela n'affecte les résultats. On peut par exemple imaginer une modulation de la puissance de chauffage pendant laquelle sont injectés des glaçons. Pour un plasma dont la dynamique satisfait aux hypothèses émises sur l'opérateur d'évolution \mathcal{L} , les différentes perturbations doivent se superposer et fournir des modes propres identiques pour chaque terme de source. Cette propriété est d'une grande utilité pour étudier la réponse dynamique, car il est rare en pratique d'avoir affaire à une seule stimulation à la fois. Le principe de superposition peut aussi être pris dans l'autre sens pour déterminer si parmi plusieurs termes de source, il y en a qui modifient le transport. Dans un tel cas, on devrait observer des modes propres différents.

La mesure du profil de dépôt

La détermination du profil de dépôt $x(r)$ du terme de source qui perturbe le plasma est immédiate lorsqu'on dispose des modes propres; il suffit en effet d'additionner les fonctions propres mesurées, comme le révèle l'équation

(3.9). Ceci est un des grands avantages de la représentation en modes propres. Non seulement il n'est pas nécessaire de connaître le profil de dépôt pour paramétrer la réponse dynamique, mais en plus le profil est fourni directement comme produit accessoire de la décomposition.

Ce résultat contraste avec les approches classiques, dans lesquelles l'analyse des résultats est fréquemment conditionnée par une connaissance préalable du profil de dépôt [13]. Dans bien des cas, ce profil ne peut pas être mesuré avec précision et il faut le calculer à partir de modèles théoriques, avec leurs erreurs inhérentes. Lorsque le profil ne peut pas être déterminé, par exemple lors de disruptions internes, l'analyse doit se restreindre aux régions où les termes de source s'annulent. Cette dernière condition peut cependant aussi induire des problèmes d'analyse [14]. La représentation en modes propres montre qu'une mesure indépendante du profil de dépôt n'apporte pas forcément un complément d'information étant donné que ce profil est déjà contenu implicitement dans la réponse dynamique.

Les conditions de bord ne doivent pas être spécifiées

L'analyse de la réponse dynamique mesurée en termes de modes propres ne requiert aucune connaissance préalable des conditions aux limites du plasma. Cette propriété est particulièrement utile quand on connaît les difficultés rencontrées dans la modélisation du bord du plasma. Les conditions de bord jouent un rôle important dans le confinement [15] et beaucoup de méthodes d'analyse font justement appel à un modèle du bord comme condition nécessaire à l'interprétation des observations [16]. Une telle contrainte n'est plus indispensable pour analyser la réponse dynamique en termes de modes propres et il suffit de s'assurer que le spectre du plasma soit discret. L'effet des conditions aux limites sur le spectre sera considéré plus en détail dans le chapitre 7.

Pas de prétraitement des signaux

Un traitement préalable des signaux est habituellement entrepris avant l'analyse des données. Dans notre cas, la linéarité de la décomposition en modes propres permet d'effectuer des opérations linéaires sur les signaux aussi bien avant qu'après la décomposition. Ceci est évidemment favorable du point de vue statistique puisqu'on peut ainsi analyser directement des signaux bruts avant même d'appliquer des opérations telles que l'inversion d'Abel (cf. annexe 1) ou la calibration.

Bilan

Ces quelques exemples montrent que la représentation en modes propres complète les approches classiques par des propriétés utiles. Elle est moins dépendante de certaines connaissances préalables et en ce sens plus objective et plus déductive. Ces différentes propriétés n'ont pas été obtenues au prix de nouvelles contraintes. Elles découlent toutes de l'opérateur d'évolution, qui les contient implicitement. Leur utilisation devrait permettre d'observer des aspects insoupçonnés du transport.

3.4 Exemples d'opérateurs d'évolution

Nous allons maintenant examiner quatre modèles de transport courants et déterminer les modes propres associés. Ces différents exemples s'avéreront utiles par la suite pour interpréter les données expérimentales.

Premier exemple : transport purement diffusif

L'opérateur diffusif apparaît fréquemment dans la modélisation du transport. Dans le cas simple où le coefficient de diffusion D est constant et indépendant du rayon, l'opérateur d'évolution, exprimé en coordonnées cylindriques, devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (3.12)$$

Prenons les conditions de bord particulières

$$y(r=a,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial r} y(r=0,t) = 0 \quad (3.13)$$

Les fonctions propres sont alors des fonctions de Bessel de 1ère et de 2ème espèce

$$f(r) = a_1 J_0 \left(r \sqrt{\frac{-p}{D}} \right) + a_2 N_0 \left(r \sqrt{\frac{-p}{D}} \right) \quad (3.14)$$

En présence des conditions de bord (3.13) le spectre se discrétise et les fonctions propres deviennent

$$f_i(r) = J_0 \left(r \sqrt{\frac{-p_i}{D}} \right) \quad \text{avec} \quad p_i = -\frac{j_{0,i}^2 D}{a^2} \quad (3.15)$$

où $j_{0,i}$ sont les zéros de J_0 . Ces fonctions propres forment une base complète dans laquelle peut être décomposée la perturbation. Pour un terme de source impulsionnel $x(r,t) = x(r) \delta(t)$, la solution devient alors

$$y(r,t) = \sum_i a_i e^{-t/\tau_i} J_0 \left(j_{0,i} \frac{r}{a} \right) \quad \text{avec} \quad \tau_i = \frac{a^2}{j_{0,i}^2 D} \quad (3.16)$$

Les constantes de temps décroissent de façon monotone avec l'ordre i et sont toutes réelles et positives, excluant ainsi les solutions oscillantes ou divergentes. Le rapport entre constantes voisines donne une idée de la décroissance

τ_1/τ_2	τ_2/τ_3	τ_3/τ_4	τ_4/τ_5	τ_5/τ_6
5.27	2.46	1.86	1.60	1.46

Chaque constante de temps est par construction associée à une fonction propre qui s'annule i fois dans l'intervalle $0 \leq r \leq a$, figure 4.

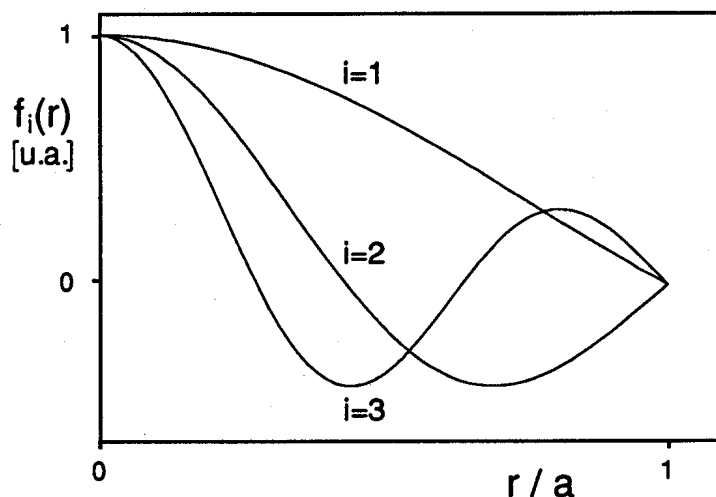


Fig. 4 Profil radial des trois premières fonctions propres obtenues pour un modèle de transport purement diffusif avec des conditions du bord données par (3.13).

L'effet d'une dépendance radiale de D sur les modes propres est illustré par la figure 5. Elle modifie la valeur du spectre et le profil des fonctions propres sans toutefois affecter l'ordre.

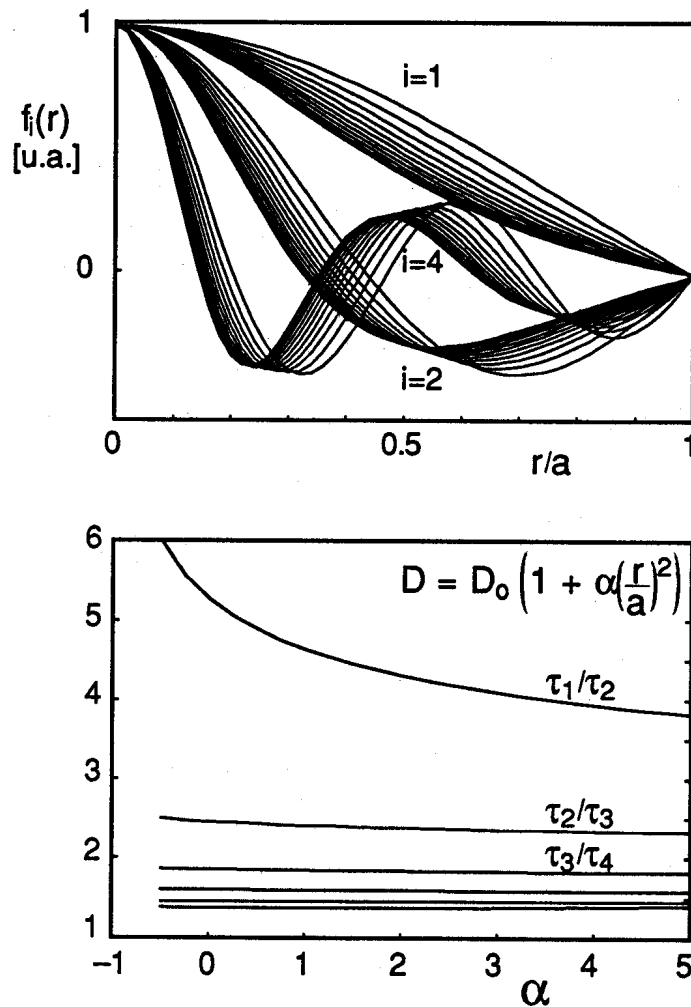


Fig. 5 Modes propres d'un opérateur diffusif dont le coefficient de diffusion a un profil parabolique variable. La figure du haut montre les fonctions propres du premier, second et quatrième ordre pour α variant de 0 à 5. Celle du bas montre l'écartement entre les constantes de temps voisines.

Second exemple : transport purement convectif

L'opérateur de convection est donné par

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v y) \quad (3.17)$$

Il mène à un type de solution tout à fait différent, qui pour une source impulsionnelle vaut

$$y(r,t) \sim \frac{1}{r v(r)} e^{p(t-t_0)} \quad \text{avec} \quad t_0(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{v(r')} \quad (3.18)$$

Cette solution correspond à la propagation d'une perturbation qui arrive à la position r au temps $t_0(r)$. En raison de ce délai, la convection ne peut agir instantanément en tout point du plasma, comme c'était le cas avec la diffusion. En revanche, à plus long terme, elle peut avoir une grande influence sur le bilan stationnaire du plasma.

Comme l'opérateur convectif ne contient que des dérivées du premier ordre, il ne possède pas forcément des fonctions propres capables de satisfaire simultanément les deux conditions aux limites du type de (3.13). L'existence d'un spectre ne peut donc plus être garantie.

Troisième exemple : transport à la fois convectif et diffusif

Un modèle de transport couramment utilisé est celui d'une diffusion constante additionnée d'une convection dont la vitesse vaut $v = -DSr/a^2$, où le paramètre sans dimension S détermine l'intensité relative de la convection. La perturbation s'exprime alors à l'aide de fonctions hypergéométriques confluentes

$$y(r,t) = \sum_1 a_1 e^{-t/\tau_1} M\left(-\frac{a^2}{2\tau_1 S D}, 1, \frac{Sr^2}{2a^2}\right) e^{-\frac{Sr^2}{2a^2}} \quad (3.19)$$

Diverses expériences ont révélé l'aptitude de ce modèle à reproduire le transport de particules pour des valeurs de S situées entre 1.5 et 3 [17]. Cela correspond à un flux convectif dirigé vers l'intérieur. Dans ces conditions, l'expression (3.19) est bien approximée par

$$y(r,t) \cong \sum_1 a_1 e^{-t/\tau_1} J_0\left(\frac{r}{a} \sqrt{\frac{a^2}{D\tau_1} + S}\right) e^{-\frac{Sr^2}{4a^2}} \quad (3.20)$$

$$\tau_1 \cong \frac{a^2}{D(j_{0,1}^2 - S)}$$

Cette expression met bien en évidence les modifications engendrées par l'adjonction d'un flux convectif à un transport purement diffusif ($S=0$). L'allure des fonctions propres change peu, hormis les modes les plus lents qui sont déformés, figure 6. Il en va de même avec les constantes de temps dont les plus lentes sont les plus affectées. Ce résultat reste valable pour des profils de

coefficients autres que ceux utilisés ici. Dans tous les cas, la convection agit essentiellement sur les modes de bas ordre. Lorsqu'elle est dirigée vers l'intérieur ($S > 0$), les constantes de temps les plus élevées s'allongent; dans le cas contraire, elles diminuent.

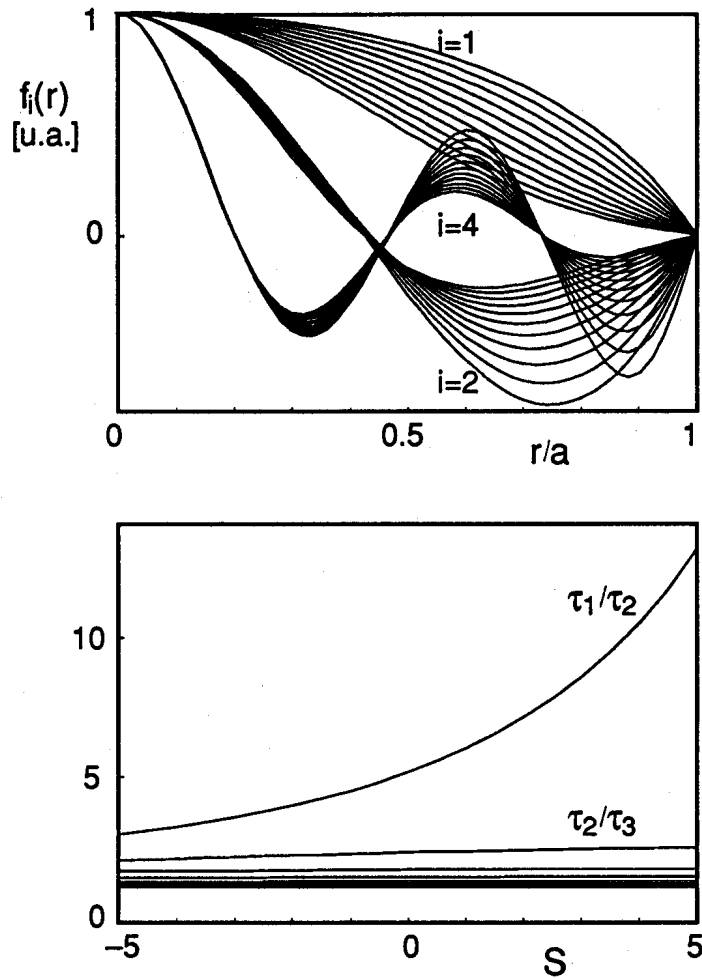


Fig. 6 Modes propres d'un opérateur diffusif accompagné d'une convection variable dont l'intensité est caractérisée par S . La figure du haut montre les fonctions propres du premier, second et quatrième ordre pour S variant de -5 à 5 . Celle du bas montre le rapport entre constantes de temps voisines.

Quatrième exemple : transport diffusif avec un terme d'amortissement

L'équation générale du transport (2.10) fait apparaître un terme d'amortissement au travers de la matrice \mathbb{A} . Les éléments de cette matrice ont la dimension de l'inverse du temps et sont habituellement exprimés par des constantes de temps. Cet amortissement ne résulte pas du transport mais provient de la dépendance fonctionnelle des termes de source. Considérons un opérateur d'évolution dont les fonctions propres sont $f_i(r)$ et les constantes de temps τ_i .

$$-\frac{1}{\tau_i} f_i = \mathcal{L} f_i \quad (3.21)$$

Ajoutons-lui un amortissement caractérisé par une constante de temps τ indépendante du rayon. L'équation aux valeurs propres devient

$$-\frac{1}{\tau_i} f_i = \mathcal{L} f_i - \frac{1}{\tau} f_i \quad (3.22)$$

Les fonctions propres de l'opérateur d'évolution ne sont point affectées par le terme d'amortissement. Le spectre est en revanche modifié puisque les constantes de temps deviennent

$$\frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau} \quad (3.23)$$

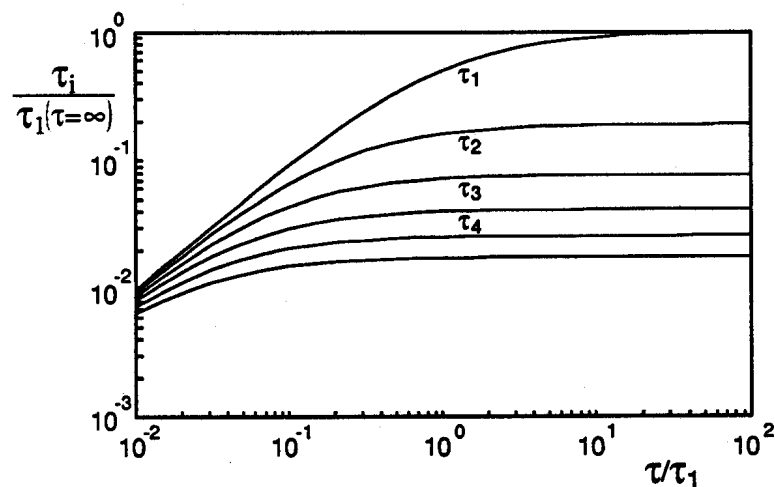


Fig. 7 Effet d'un terme d'amortissement sur le spectre d'un opérateur diffusif. Les axes ont été normalisés par rapport à la constante de temps la plus longue, calculée sans amortissement.

La figure 7 montre que l'amortissement comprime le spectre en affectant surtout les modes les plus lents. Son effet pourra donc être négligé chaque fois que $\tau \gg \tau_1$.

La nature du spectre

Les quatre exemples qui précèdent couvrent l'ensemble des mécanismes de transport qui constituent l'opérateur d'évolution \mathcal{L} tel qu'il a été exprimé dans (2.12). Tous ne conduisent pas forcément à un spectre discret. Or l'existence d'un spectre entièrement discret est indispensable pour pouvoir effectuer une décomposition en modes propres.

Il n'est pas possible a priori de démontrer formellement l'existence d'un spectre purement discret dans la réponse dynamique du plasma. Remarquons toutefois que parmi les quatre exemples évoqués plus haut, ceux dont l'opérateur possède un spectre discret sont aussi ceux qui contiennent une composante diffusive. Il faut en effet un opérateur du second ordre pour satisfaire simultanément les deux conditions de bord imposées au plasma et déterminer ainsi le spectre. Les deux derniers exemples ont montré que la convection et l'amortissement pur engendrent tous deux un spectre discret dès qu'ils sont accompagnés de diffusion. L'existence de modes propres semble donc être intimement liée à la présence de diffusion. Comme aucun modèle de transport ne supporte l'absence totale de diffusion dans le plasma, il est fort improbable que la réponse dynamique du plasma ne se prête pas à une décomposition en modes propres.

Un second argument peut être tiré de la nature des conditions aux limites. Les spectres continus ont tendance à apparaître lorsque ces conditions sont infinies, alors que celles du plasma sont finies. Il est par conséquent très peu probable de rencontrer des opérateurs d'évolution du plasma qui ne se prêtent pas à une décomposition en modes propres. Ce résultat essentiel à la poursuite de notre étude sera complété plus tard par des arguments expérimentaux.

Bilan

L'existence de modes propres possédant des constantes de temps bien déterminées est un résultat important dont nous observerons diverses implications insoupçonnées tout au long de notre étude. La disparité des constantes de temps permet au plasma de réagir sur des échelles de temps très différentes. C'est l'intensité avec laquelle les divers modes propres ont été

excités qui détermine la rapidité de la réponse dynamique du plasma. Ceci peut avoir des conséquences surprenantes. L'exemple qui suit montre comment l'ignorance de la distribution des modes propres peut complètement fausser l'interprétation de la réponse dynamique.

Considérons un plasma auquel sont appliqués deux termes de source quasiment identiques qui diffèrent uniquement par leurs profils de dépôt. Dans un tel cas on s'attend à ce que les deux stimulations produisent des réponses dynamiques semblables. La figure 8 illustre cet exemple et révèle au contraire des réponses tout à fait différentes.

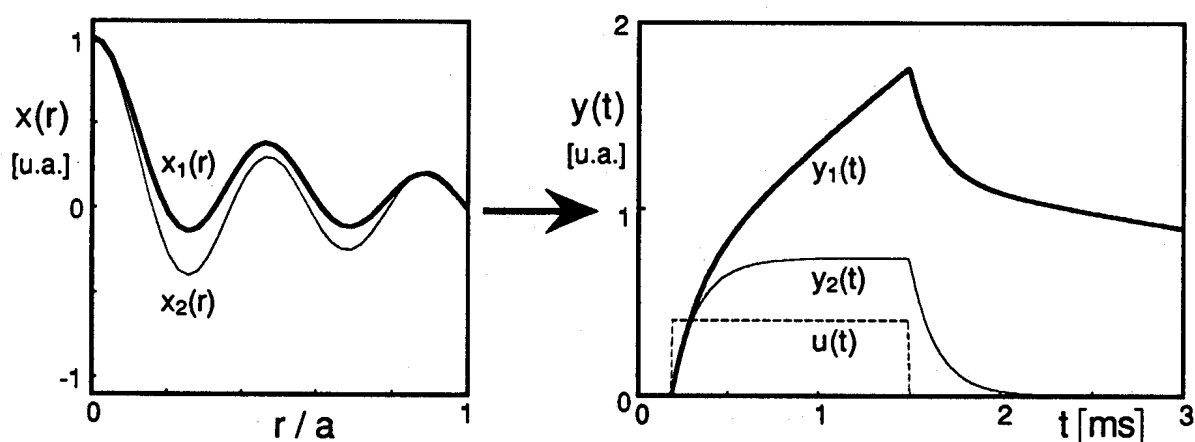


Fig. 8 Réponse dynamique d'un même système stimulé par deux termes de source (figure de gauche) semblables. La figure de droite montre qu'il en résulte des perturbations tout à fait différentes. $u(t)$ est la fonction en crêteau utilisée comme stimulation.

En considérant la figure 8, on serait tenté de croire que la réponse y_2 résulte d'un mécanisme de transport plus rapide que y_1 . Nous avons en effet une tendance innée à interpréter le temps de relaxation comme étant une mesure de la rapidité du transport sous-jacent. Or cette façon d'interpréter les données induit ici en erreur puisque le même opérateur d'évolution est à l'origine des deux réponses; la différence réside uniquement dans la pondération des modes propres excités. Le profil de dépôt x_2 excite uniquement un mode rapide du cinquième ordre, ce qui entraîne une relaxation rapide du signal y_2 . Le profil x_1 excite en plus une faible fraction du mode lent du premier ordre, dont la constante de temps élevée joue un rôle prépondérant. Il est par conséquent risqué de vouloir lier le temps de

relaxation du plasma à la rapidité du transport sous-jacent tant qu'on ne sait pas à quels modes propres on a affaire.

Ce simple exemple met en exergue les caractéristiques de la réponse dynamique qu'il faut connaître pour garantir une bonne interprétation du transport. Si on avait voulu interpréter la figure 8 en termes de coefficients de transport, il aurait été plus difficile de démontrer l'existence d'un même mécanisme de transport pour les deux cas.

3.5 Lien avec le temps de confinement

Le temps de confinement du plasma est un paramètre couramment utilisé dans l'étude du transport. Il est donc logique de vouloir déterminer ce qui l'unit aux constantes de temps du plasma. Signalons d'abord que les deux types de constantes de temps concernent des états distincts du plasma : le temps de confinement est défini pour un état d'équilibre alors que les modes propres sont par définition transitoires. Pour établir un lien entre les deux, nous sommes contraints d'utiliser une expression différente, dite incrémentale, du temps de confinement.

Considérons le temps qu'il faut au terme de source perturbateur pour renouveler le contenu en particules ou en énergie de la perturbation

$$\tau_{inc} = \frac{\int_0^a y r dr}{\int_0^a x r dr} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial t} y = \mathcal{L} y + x \quad (3.24)$$

Pour le transport de particules, τ_{inc} se note fréquemment par $\tau_{\#}$ [18]. Lorsque la stimulation appliquée au plasma est continue $x(r,t) = x(r)$, la solution stationnaire s'écrit

$$\begin{aligned} y(r) &= \sum_i f_i(r) \tau_i \\ x(r) &= \sum_i f_i(r) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Cette expression révèle que le profil stationnaire d'un plasma perturbé en continu est pondéré par les modes dominants et lents. Lorsque plusieurs modes sont excités avec des amplitudes semblables, c'est le plus lent de tous qui détermine l'allure du profil. Nous verrons que ce résultat peut être

connecté à la notion de cohérence de profil. L'expression du temps de confinement incrémental devient maintenant

$$\tau_{inc} = \frac{\sum e_i \tau_i}{\sum e_i} \quad \text{avec} \quad e_i = \int_0^a f_i(r) r dr \quad (3.26)$$

τ_{inc} n'est donc qu'une moyenne pondérée des constantes de temps naturelles du plasma. La pondération est directement liée à l'amplitude des fonctions propres qui dépend à son tour du profil de dépôt du terme de source. Le choix du terme de source a par conséquent un effet considérable sur le temps de confinement incrémental. La figure 9 compare trois profils de dépôt et montre les réponses impulsionnelles qui en résultent.

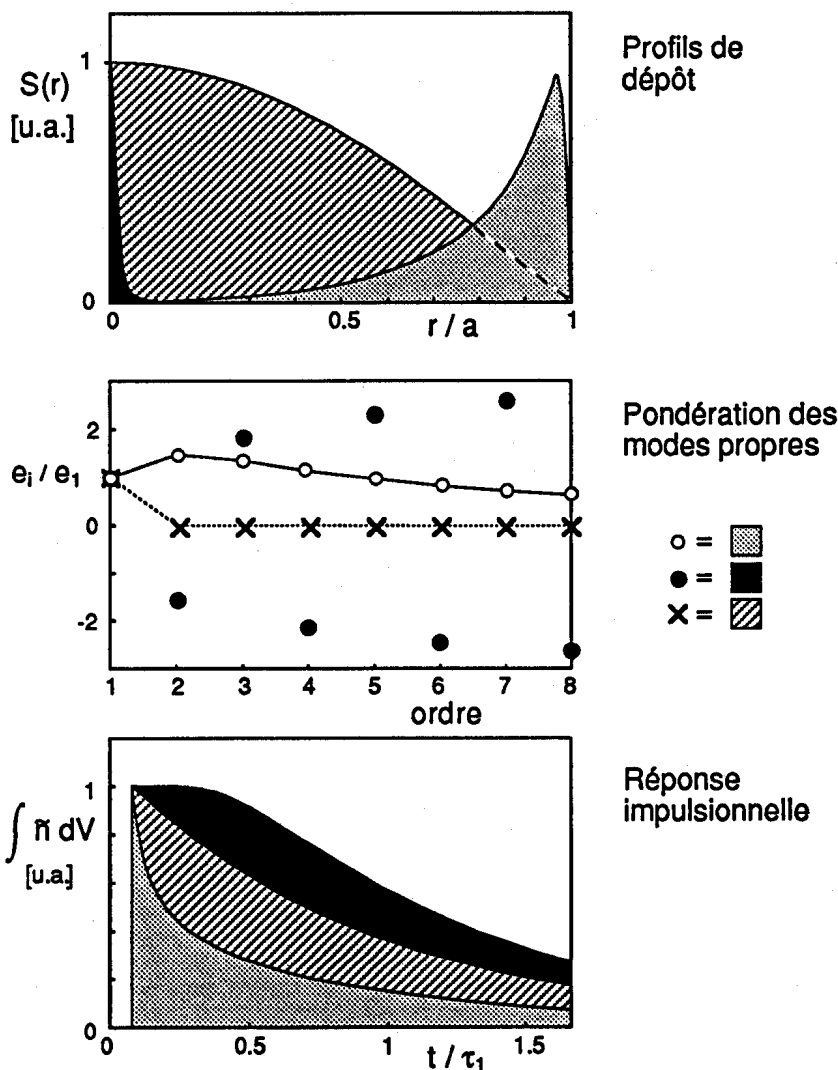


Fig. 9 Comparaison entre différents profils de dépôt (figure du haut) et la réponse impulsionnelle du contenu en particules qui en résulte (figure du bas). Au milieu sont représentés les coefficients de pondération des modes propres, définis par (3.26) et normalisés ici par rapport au mode le plus lent.

La rétention est maximale pour un dépôt entièrement placé au centre du plasma, quel que soit le mécanisme de transport. Lorsque le terme de source a le même profil que le mode propre le plus lent, on obtient $\tau_{inc} = \tau_1$ et la relaxation est un mode propre pur. Un profil de dépôt concentré au bord du plasma excite quant à lui un grand nombre de modes rapides, avec pour résultat une relaxation accélérée de la densité. Ce dernier cas est réalisé lorsque le plasma est alimenté en particules par le bord, comme lors d'injections de gaz. Un dépôt central de particules, tel que celui engendré par un glaçon, est en ce sens nettement plus efficace pour augmenter la densité du plasma.

3.6 Formalisme de la décomposition pour deux variables couplées

La représentation en modes propres a été utilisée pour développer une approche différente de la dynamique du plasma. La restriction au cas monovarié a facilité cette démarche que nous voulons à présent répéter pour le cas à deux variables qui interagissent entre elles. Les différentes propriétés discutées jusqu'ici resteront essentiellement les mêmes hormis quelques résultats nouveaux qui résultent du couplage.

Le modèle couplé

Généralisons l'équation du bilan (3.1) au cas à deux variables. Ces dernières peuvent être par exemple la densité et la température électroniques

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} y_1(r,t) \\ y_2(r,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11}(r) & \mathcal{L}_{12}(r) \\ \mathcal{L}_{21}(r) & \mathcal{L}_{22}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(r,t) \\ y_2(r,t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(r,t) \\ x_2(r,t) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Les \mathcal{L}_{ij} sont des opérateurs différentiels linéaires stationnaires et les x_i sont les termes de source séparables. Nous parlerons dorénavant de couplage chaque fois que les variables y_1 et y_2 sont liées par des opérateurs \mathcal{L}_{12} et \mathcal{L}_{21} non nuls. Comme dans le cas monovarié, nous prenons la transformée de Laplace de ce système

$$s \begin{pmatrix} y_1(r,s) \\ y_2(r,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11}(r) & \mathcal{L}_{12}(r) \\ \mathcal{L}_{21}(r) & \mathcal{L}_{22}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(r,s) \\ y_2(r,s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(r) u_1(s) \\ x_2(r) u_2(s) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

On procède ensuite à la diagonalisation de la matrice des opérateurs. Une telle opération est délicate à effectuer dans un cas aussi général, si bien que nous allons nous restreindre à une sous-classe d'opérateurs proportionnels les uns aux autres

$$\mathcal{L}_{ij} = \lambda_{ij} \mathcal{L} \quad (3.29)$$

Cette restriction n'est pas indispensable mais elle simplifiera l'algèbre. Nous verrons ultérieurement qu'elle approxime bien les observations. Pour l'instant, elle conduit à

$$s \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \mathcal{L} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

La diagonalisation de ce système est maintenant immédiate. Pour expliciter le couplage, nous paramétrisons les vecteurs propres de la matrice $\{\lambda_{ij}\}$ à l'aide de coefficients. Sans perte de généralité, nous définissons les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice de la façon suivante

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} &= \lambda_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} &= \lambda_\beta \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Les coefficients α et β déterminent l'intensité du couplage relatif. Ils représentent en quelque sorte une expansion à partir du cas sans couplage; nous verrons en effet que leur valeur est petite. Il vient l'équivalence suivante

$$\text{pas de couplage} \leftrightarrow \mathcal{L}_{12}=\mathcal{L}_{21}=0 \leftrightarrow \lambda_{12}=\lambda_{21}=0 \leftrightarrow \alpha=\beta=0$$

Comme dans le cas monovisible, nous introduisons le spectre de l'opérateur \mathcal{L} défini par

$$\mathcal{L} f_i(r) = p_i f_i(r) \quad (3.32)$$

L'opérateur qui nous concerne ici n'est pas exactement \mathcal{L} mais son produit avec la matrice $\{\lambda_{ij}\}$. Comme cette dernière possède deux valeurs propres, il est plus simple de considérer deux opérateurs qui ne diffèrent entre eux que d'une constante multiplicative

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L} \lambda_\alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\beta = \mathcal{L} \lambda_\beta \quad (3.33)$$

Dans ce cas, les équations aux valeurs propres deviennent

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha f_i(r) &= p_{\alpha,i} f_i(r) & \text{avec} & & p_{\alpha,i} &= \lambda_\alpha p_i \\ \mathcal{L}_\beta f_i(r) &= p_{\beta,i} f_i(r) & \text{avec} & & p_{\beta,i} &= \lambda_\beta p_i \end{aligned} \quad (3.34)$$

On décompose à présent la perturbation selon les fonctions propres $f_i(r)$. Il faut auparavant la projeter sur les vecteurs propres de la matrice $\{\lambda_{ij}\}$

$$\begin{pmatrix} y_1(r,s) \\ y_2(r,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} a(r,s) + \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} b(r,s) \quad (3.35)$$

ce qui donne ensuite

$$\begin{pmatrix} y_1(r,s) \\ y_2(r,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \sum_i a_i(s) f_i(r) + \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \sum_i b_i(s) f_i(r) \quad (3.36)$$

Il en va de même avec le terme de source

$$\begin{pmatrix} x_1(r,s) \\ x_2(r,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(r) u_1(s) \\ x_2(r) u_2(s) \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} u_1(s) c_i \\ u_2(s) d_i \end{pmatrix} f_i(r) \quad (3.37)$$

L'équation du transport devient alors

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \sum_i s a_i(s) f_i(r) + \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \sum_i s b_i(s) f_i(r) = \\ &\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \sum_i p_{\alpha,i} a_i(s) f_i(r) + \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \sum_i p_{\beta,i} b_i(s) f_i(r) + \sum_i \begin{pmatrix} u_1(s) c_i \\ u_2(s) d_i \end{pmatrix} f_i(r) \end{aligned} \quad (3.38)$$

qui est réarrangée pour donner

$$\begin{aligned} \sum_i [s a_i(s) + \beta s b_i(s) - a_i(s) p_{\alpha,i} - \beta b_i(s) p_{\beta,i} - u_1(s) c_i] f_i(r) &= 0 \\ \sum_i [\alpha s a_i(s) + s b_i(s) - \alpha a_i(s) p_{\alpha,i} - b_i(s) p_{\beta,i} - u_2(s) d_i] f_i(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Pour que ces équations soient valables en tout r , les termes entre crochets doivent être nuls quel que soit i , ce qui laisse

$$\begin{pmatrix} s - p_{\alpha,i} & \beta (s - p_{\beta,i}) \\ \alpha (s - p_{\alpha,i}) & s - p_{\beta,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i(s) \\ b_i(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(s) c_i \\ u_2(s) d_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.40)$$

Finalement, l'insertion de la solution de ce système dans l'équation (3.36) nous donne la solution générale

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} y_1(r,s) \\ y_2(r,s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{1-\alpha\beta} \sum_i \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \alpha & -\alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i u_1(s) \\ d_i u_2(s) \end{pmatrix} \frac{f_i(r)}{s-p_{\alpha,i}} \\
 &+ \frac{1}{1-\alpha\beta} \sum_i \begin{pmatrix} -\alpha\beta & \beta \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i u_1(s) \\ d_i u_2(s) \end{pmatrix} \frac{f_i(r)}{s-p_{\beta,i}} \\
 \begin{pmatrix} x_1(r,s) \\ x_2(r,s) \end{pmatrix} &= \sum_i \begin{pmatrix} c_i u_1(s) \\ d_i u_2(s) \end{pmatrix} f_i(r)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Cette solution est structurellement identique à celle obtenue dans le cas monovarié (3.9). Comme auparavant, chaque variable se décompose en une suite de modes propres dont la pondération est essentiellement déterminée par les termes de source. La nouveauté consiste en l'interaction entre les différents termes.

Le dédoublement des modes propres

Tant que les variables y_1 et y_2 sont indépendantes, leurs spectres respectifs n'ont rien en commun. En introduisant un couplage, nous forçons chaque variable à partager son spectre avec celle qui lui est appariée. Cela signifie que deux variables couplées possèdent exactement les mêmes modes propres, dont les constantes de temps valent

$$\tau_{\alpha,i} = -\frac{1}{p_{\alpha,i}} \quad \text{et} \quad \tau_{\beta,i} = -\frac{1}{p_{\beta,i}} \tag{3.42}$$

Seule la distribution des modes propres permet de les distinguer. Ce résultat est valable quelle que soit l'origine du couplage, qui peut aussi bien provenir d'une interaction entre les flux diffusifs que d'une dépendance fonctionnelle dans les termes de source. Le spectre d'un système possédant des interactions se reconnaît donc à des propriétés bien déterminées. Lorsqu'un nombre n de variables sont couplées, on doit observer au plus n fonctions propres du même ordre auxquelles correspondent des constantes de temps différentes, figure 10. Notons encore que le profil de dépôt des termes de source s'obtient toujours en sommant les fonctions propres, comme dans le cas monovarié.

Ce résultat reste valable lorsque les opérateurs d'évolution qui agissent sur les différentes variables ne sont pas proportionnels comme supposé dans (3.29). L'égalité des constantes de temps demeure dans le cas plus général, mais les fonctions propres de même ordre peuvent avoir des profils dissemblables.

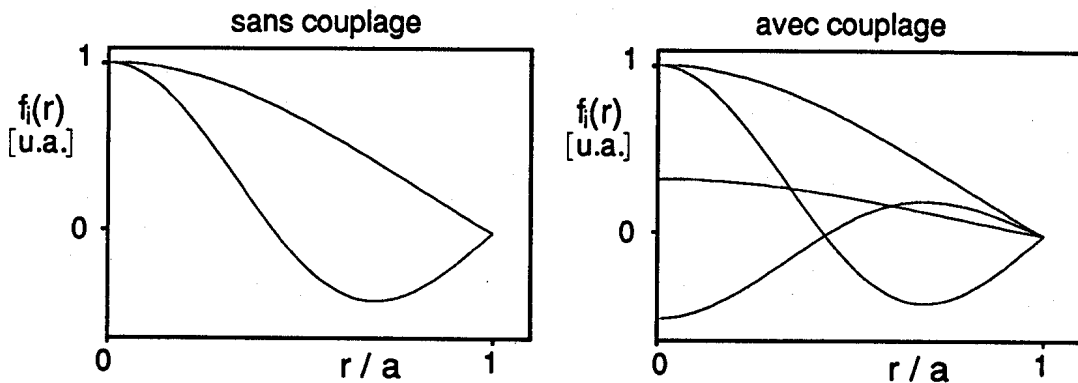


Fig. 10 Exemple de fonctions propres obtenues pour une réponse dynamique qui indique l'absence (à gauche) et la présence (à droite) d'un couplage.

Le couplage entre termes de source

Le couplage suscite des interactions qui modifient la dynamique du plasma. Ces interactions sont schématisées par le diagramme bloc de la figure 11. Dans le cas monovarié, nous pouvons établir un lien direct de cause à effet entre la stimulation et la perturbation qui en résultait. Cette façon de procéder n'est pas valable ici puisque toute stimulation peut désormais affecter l'ensemble des variables couplées.

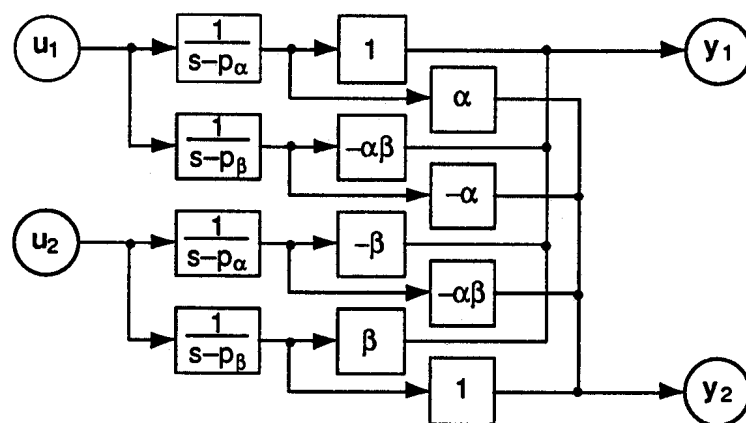


Fig. 11 Diagramme bloc illustrant les liens existant entre les termes de source et les variables, en un point du plasma. La sommation sur les fonctions propres $f_i(r)$ a été omise puisque le même schéma se répète pour chacune d'elles.

Couplage et confinement

La présence de couplages entraîne quelques modifications mineures dans l'expression du temps de confinement incrémental, telle qu'elle a été présentée dans §3.5. En présence de plusieurs variables, ce temps est défini par

$$\tau_{inc,j} = \frac{\int_0^a y_j r dr}{\int_0^a x_j r dr} \quad (3.43)$$

Pour chaque observable, τ_{inc} s'exprime à nouveau comme une moyenne pondérée des constantes de temps

$$\tau_{inc} = \frac{\sum e_i \tau_i^*}{\sum e_i} \quad (3.44)$$

La principale modification par rapport au cas monovariable (3.26) réside dans la valeur de constantes de temps τ_i^*

$$\begin{aligned} \text{pour } y_1 : \quad \tau_i^* &= \frac{\tau_{\alpha,1} - \alpha\beta\tau_{\beta,1}}{1 - \alpha\beta} \\ \text{pour } y_2 : \quad \tau_i^* &= \frac{\tau_{\beta,1} - \alpha\beta\tau_{\alpha,1}}{1 - \alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Le couplage apparaît donc au second ordre dans l'expression du temps de confinement. En pratique, la valeur des couplages relatifs s'avère suffisamment petite ($|\alpha\beta| \ll 1$) pour en négliger l'effet sur le temps de confinement incrémental.

Bilan

La présence d'un couplage entre des variables perturbées se reconnaît à l'existence de constantes de temps communes aux deux et à un dédoublement des modes propres. Ces résultats constituent des critères simples qui permettent de déduire directement l'existence d'une interaction à partir des modes propres sans avoir à déterminer les mécanismes de transport sous-jacents. Une mise en évidence aussi directe n'aurait pas été possible si nous avions recouru à une représentation en termes de coefficients de transport. Cette dernière aurait d'abord nécessité la détermination des coefficients en

partant d'un modèle comme celui exprimé par (2.4). Ensuite, c'est en étudiant la valeur de ces coefficients qu'il aurait été possible de supposer, mais non encore de prouver l'existence de couplages.

3.7 Conclusion

Une nouvelle représentation de la réponse dynamique du plasma a été élaborée afin de paramétriser cette dernière. Au lieu de partir d'une description en termes de coefficients de transport, comme cela se fait habituellement, nous avons directement recouru aux propriétés de l'opérateur d'évolution. La diagonalisation de celui-ci fournit un ensemble de fonctions propres et de constantes de temps particulièrement bien adaptées à la paramétrisation de la réponse dynamique. Parmi ses avantages, signalons

- Les caractéristiques du confinement sont déduites à partir des modes propres sans devoir passer par une modélisation des mécanismes qui constituent l'opérateur d'évolution.
- La linéarité de la décomposition en modes propres permet de traiter simultanément plusieurs perturbations, dont les profils de dépôt sont fournis directement par les fonctions propres.
- Il n'est pas nécessaire d'effectuer un prétraitement du signal (inversion d'Abel, calibration) pour extraire les modes propres.
- La représentation donne accès à des aspects importants du transport, tels que le couplage, dont la présence est déduite à partir de critères simples.

Ces avantages de la représentation découlent en grande partie de sa faculté à exploiter implicitement le lien causal qui unit les dépendances spatiales et temporelles de la réponse dynamique. Les comportements radial et temporel du plasma perturbé sont en effet intimement liés et gagnent de ce fait à être analysés simultanément; leur lien fait en quelque sorte office de contrainte physique grâce à laquelle l'évolution temporelle de la réponse dynamique peut être avantageusement paramétrisée par une série constantes de temps.

4. Validation de la décomposition

L'élaboration de cette nouvelle représentation doit être suivie d'une étape de validation. La décomposition en modes propres va donc devoir être confrontée aux données expérimentales afin d'étayer les différentes hypothèses émises jusqu'ici. Le choix de l'expérience se portera sur la réponse dynamique de la densité électronique à l'injection de glaçons. Il s'agira de vérifier la linéarisabilité de la réponse dynamique, l'existence de modes propres ainsi que le choix adéquat du terme de source.

Le premier paragraphe situe le contexte expérimental en donnant un premier aperçu des modes propres observés. Les paragraphes 2 à 3 traitent respectivement la linéarité de la réponse et l'existence d'un spectre discret dans celle-ci. La stationnarité du plasma ainsi que la structure que doivent posséder les termes de source sont discutées dans les paragraphes 4 et 5, qui sont suivis de la conclusion. Les techniques d'analyse mises en oeuvre pour extraire les modes propres sont présentées dans l'annexe 4.

4.1 Choix de l'expérience

Toute notre étude est basée sur un même type d'expérience, présentée brièvement ici. Le même cadre expérimental servira à la validation de la représentation en modes propres puis, dans les chapitres qui suivent, à l'analyse du confinement.

L'intérêt porté dans l'analyse perturbative du transport a suscité ces dernières années toute une variété d'expériences. Parmi celles menées sur TCA, signalons la modulation de la vanne de gaz, de la puissance de chauffage par ondes d'Alfvén, de la tension par tour ainsi que l'injection d'impuretés [11,19]. Pour étudier les modes propres, notre choix s'est porté sur l'injection de glaçons d'hydrogène solide, qui constitue un excellent moyen de perturber la densité et la température électroniques. Les diagnostics ainsi que les

conditions expérimentales sont décrits plus en détail dans l'annexe 1. TCA ne disposant malheureusement pas de mesure directe de température électronique résolue dans le temps, nous traiterons uniquement les modes propres de la densité. L'étude simultanée de la densité et de la température à partir de la réponse du flux des rayons X mous nécessite une analyse plus délicate qui est discutée dans [11].

Un des avantages de la perturbation par injection de glaçons est la courte durée de la stimulation. Le temps d'ablation du glaçon (environ 50 μ s) est sensiblement plus court que le temps d'échantillonnage de la mesure de densité (plus de 200 μ s) ce qui permet de modéliser la stimulation par une impulsion unique. Dans un cas pareil, la réponse impulsionnelle de la densité se réduit à une série d'exponentielles possédant des constantes de temps différentes (3.10). L'expression de la densité perturbée sera alors

$$\tilde{n}(r,t) = \sum_{i=1}^N f_i(r) e^{-t/\tau_i} \quad (4.1)$$

où les $f_i(r)$ sont les fonctions propres et les τ_i sont les constantes de temps à mesurer. La procédure d'extraction des modes propres est décrite dans l'annexe 4. Elle requiert comme données d'entrée la mesure résolue dans le temps et l'espace de la densité perturbée $\tilde{n}(r,t)$, le temps d'injection des glaçons ainsi que le nombre N de modes propres qu'on veut ajuster aux données. En retour, elle fournit pour chaque glaçon les fonctions propres $f_i(r)$ ainsi que les constantes de temps τ_i . La principale décision à prendre dans cette procédure est le choix du nombre N de modes à ajuster. Les critères nécessaires à ce choix sont présentés dans l'annexe 4. Dans la majorité des cas, seuls les trois modes les plus lents suffisent à reproduire les données. Ce résultat s'explique par l'évanouissement rapide des modes d'ordre élevé, dont la présence se manifeste uniquement dans les premiers échantillons qui suivent l'injection du glaçon. Grâce à la disparité des constantes de temps, il est possible de choisir un ordre N qui offre une excellente réjection du bruit tout en ménageant l'information contenue dans les données.

La reproduction de la réponse dynamique à l'aide de l'expression (4.1) implique la réduction de toute l'évolution temporelle de la densité à des constantes de temps. Il faut souligner que rien n'est spécifié concernant le profil des fonctions propres, qui sont directement déduites à partir des données expérimentales. De même, aucune contrainte n'est imposée sur la valeur des constantes de temps, qui peuvent sans autre être complexes ou négatives, ce qui équivaut respectivement à des solutions divergentes ou instables. La seule contrainte consiste en l'égalité des constantes de temps pour les différentes mesures spatiales de la densité.

La figure 12 montre une décharge dans laquelle la densité est perturbée par l'injection d'un glaçon. La réponse dynamique mesurée est comparée avec une simulation effectuée à l'aide de trois modes propres. L'excellent accord obtenu entre les deux suggère déjà que les modes propres conviennent à la représentation de ce genre de perturbation.

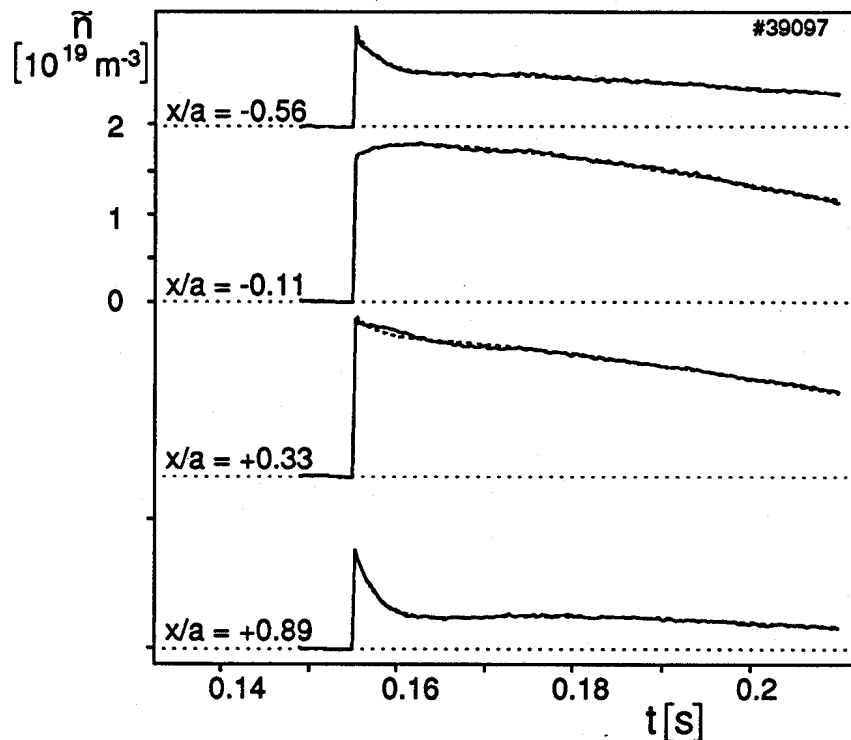


Fig. 12 Réponse dynamique de la densité à l'injection d'un glaçon, mesurée selon quatre cordes allant du bord interne du plasma au bord externe. La réponse simulée par trois modes propres est représentée en pointillé.

La validation de cette approche consiste à déterminer si la réponse dynamique de la densité se prête à une décomposition en modes propres. Pour cela, nous allons confronter les données expérimentales à différentes conditions :

- la réponse dynamique du plasma doit être linéaire;
- l'opérateur d'évolution du plasma doit posséder un spectre discret;
- le plasma doit rester stationnaire pendant la perturbation;
- la stimulation doit répondre à des critères tels que la séparabilité.

4.2 La linéarité

La linéarisabilité des équations du transport constitue assurément l'hypothèse la plus conséquente de notre représentation. Il suffit en principe de se limiter à de petites perturbations du plasma pour garantir un comportement linéaire de la réponse dynamique. L'essentiel est de savoir jusqu'à quel niveau d'amplitude la linéarité est vérifiée. Pour cela, nous proposons deux expériences complémentaires.

La première expérience consiste à vérifier l'absence de corrélation entre les constantes de temps de la densité et la taille relative \tilde{n}/n de la perturbation induite. L'injection dans TCA de glaçons de tailles et de vitesses différentes a permis de modifier les profils de dépôt et de faire varier \tilde{n}/n de 0 à plus de 150%. La corrélation statistique entre la taille relative et les constantes de temps est insignifiante, ce qui dément toute interdépendance. Cette insensibilité du spectre à l'égard du profil de dépôt constitue une première condition nécessaire à la linéarité de la réponse dynamique de la densité.

Une seconde expérience consiste à déterminer l'indépendance du profil des fonctions propres à l'égard de l'excitation. Si la réponse est linéaire, deux dépôts différents doivent donner lieu à un même ensemble de fonctions propres. Ceci a été vérifié en comparant les profils de fonctions propres obtenues dans des conditions semblables mais en présence d'excitations différentes, figure 13.

La figure 13 compare deux types d'excitation : l'une consiste en un glaçon ayant pénétré profondément dans le plasma, l'autre résulte d'un glaçon fragmenté, dont l'ablation rapide a provoqué un dépôt en périphérie du plasma. Malgré les réactions différentes de la densité, les profils des fonctions propres ainsi que les constantes de temps sont sensiblement les mêmes dans les deux cas. Cette figure ainsi que les suivantes montre le profil intégré des fonctions propres étant donné que le profil mesuré de la densité est lui aussi intégré (cf. annexe 1). Pour les distinguer des profils locaux $f_i(r)$ (dont la reconstitution nécessite une inversion d'Abel) nous les noterons par $\bar{f}_i(x)$.

L'indépendance des fonctions propres à l'égard de l'excitation constitue une seconde manifestation très claire de la linéarité de la réponse dynamique et montre en même temps que les modes propres sont les éléments irréductibles de la dynamique de la densité à partir desquels peut être reconstituée la réponse à différentes excitations.

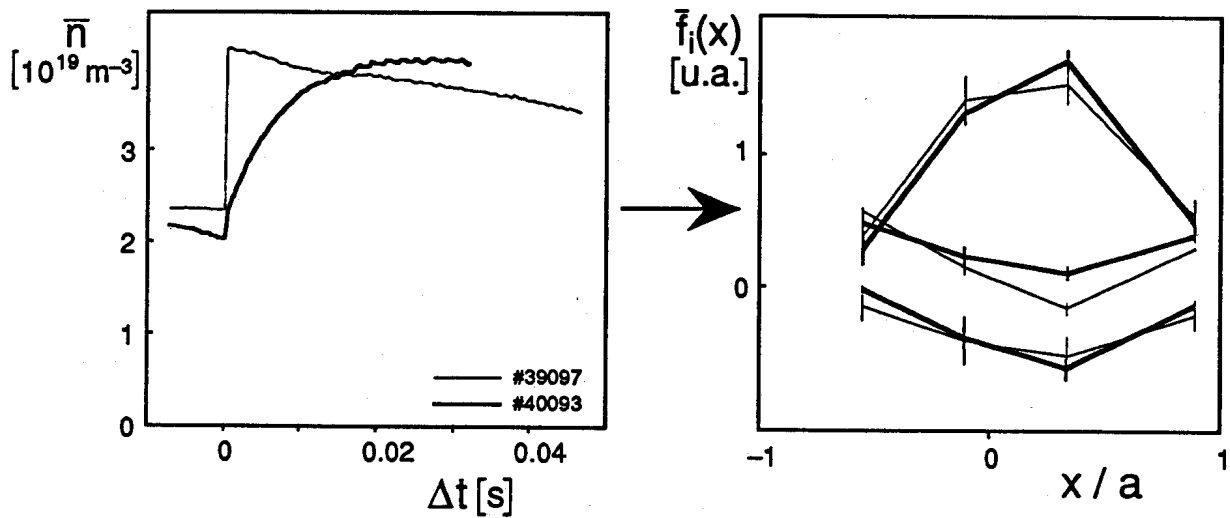


Fig. 13 Comparaison entre les fonctions propres obtenues pour deux décharges réalisées dans des conditions semblables ($I_p=115-128[\text{kA}]$, $\bar{n}=2.1-2.2[10^{19}\text{m}^{-3}]$) mais excitées par des glaçons de profils de dépôt différents. Les amplitudes des fonctions propres ont été ajustées dans le but de faciliter la comparaison.

4.3 L'existence d'un spectre discret

Un premier survol des propriétés de l'opérateur d'évolution (§3.4) a déjà révélé divers indices favorables à l'existence de modes propres dans la réponse dynamique de la densité. Ce résultat peut être complété par des observations expérimentales. Si le spectre de la densité est discret, les constantes de temps doivent être indépendantes du temps et de l'endroit où elles sont mesurées. L'invariance temporelle et spatiale des constantes de temps offre donc un indice supplémentaire susceptible de vérifier l'applicabilité de la décomposition en modes propres.

La détermination de l'invariance temporelle des constantes de temps s'est faite en analysant la réponse dynamique dans une fenêtre temporelle débutant en différents temps de la même décharge. Le mode le plus rapide s'évanouit peu de temps après l'injection du glaçon, ce qui limite à quelques millisecondes la durée pendant laquelle il peut être mesuré avec précision. Les deux modes lents se laissent en revanche extraire pendant une large fraction de la durée de

la décharge. La figure 14 montre qu'ils demeurent constants tout au long de la décharge. Ceci est un premier élément nécessaire à l'existence d'un spectre discret.

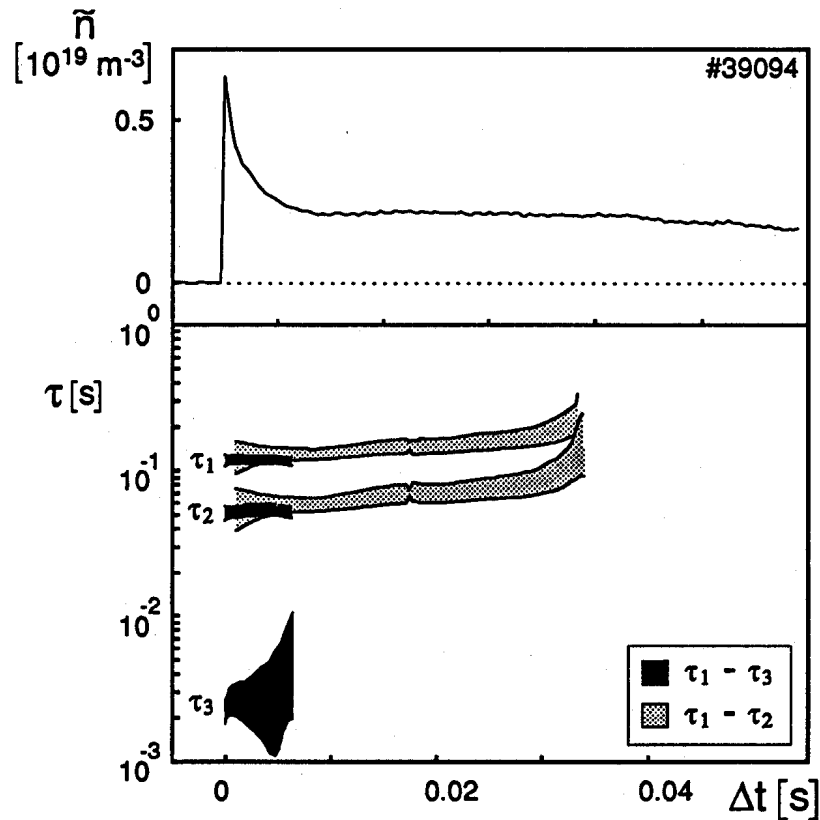


Fig. 14 Evolution des constantes de temps de la densité en fonction du temps à partir duquel elles sont mesurées. Les bandes foncées représentent la valeur, entourée de la marge d'incertitude, obtenue en ajustant trois modes propres. Les bandes grises concernent l'ajustement de deux modes propres.

La recherche d'une dépendance spatiale éventuelle s'est effectuée en déterminant les constantes de temps indépendamment pour différents rayons du profil reconstitué de la densité. La figure 15 montre que chaque rayon fournit sensiblement les mêmes constantes de temps, compte tenu de l'incertitude de mesure. Pour quantifier l'effet de l'imposition de constantes de temps communes aux mesures radiales, la fonction de coût, c'est-à-dire l'écart quadratique moyen entre le signal ajusté et mesuré a été calculé pour cet exemple. La figure 16 montre que la contrainte imposée n'entraîne aucune réduction sensible de la fonction de coût, ce qui soutient l'invariance spatiale des constantes de temps.

Si une dérive temporelle ou une variation spatiale des constantes de temps avait été détectée jusqu'ici, cela aurait immédiatement remis en question l'applicabilité de la décomposition en modes propres. Le fait qu'aucun des deux n'ait été observé, vient soutenir la validité de la méthode. Tous ces résultats ne permettent pas encore de prouver définitivement l'existence de modes propres dans la réponse dynamique de la densité; ils corroborent cependant à rendre le contraire très peu probable.

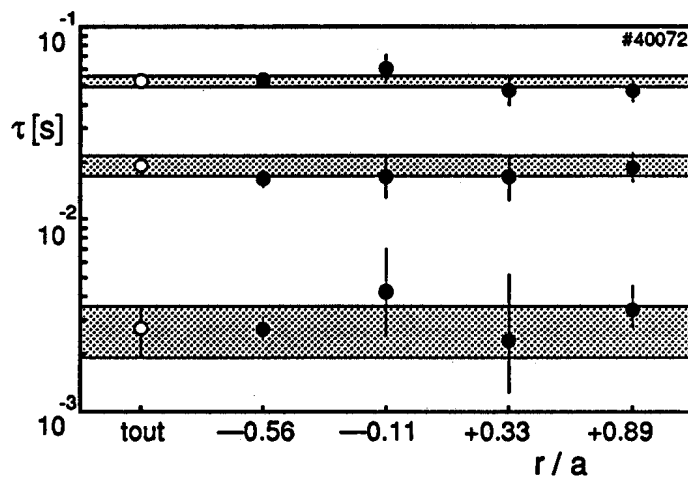


Fig. 15 La valeur des constantes de temps obtenues soit en imposant des constantes identiques aux quatre mesures radiales du profil reconstitué de la densité (cercles vides) soit en effectuant les mesures indépendamment pour chaque rayon (cercles pleins).

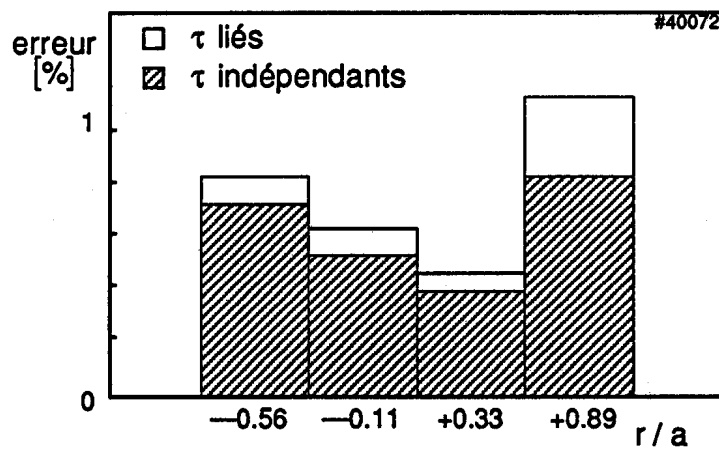


Fig. 16 Valeur de la fonction de coût obtenue pour les deux cas considérés dans la figure 15.

4.4 La stationnarité du plasma

Une troisième condition nécessaire à l'existence de modes propres est la stationnarité du plasma. Cette condition est aussi difficile à remplir qu'à définir. Elle revêt deux aspects. D'une part, il y a la stationnarité du plasma, dont les conditions ne doivent pas changer indépendamment de la perturbation. D'autre part, il faut connaître l'ensemble des stimulations appliquées au plasma si on veut distinguer les contributions de chacune à la réponse dynamique. Pour cela, il faut tenir compte de perturbations internes au plasma telles que les disruptions internes.

La stationnarité du plasma est en partie assurée par l'asservissement de paramètres tels que le courant et la position du plasma. La figure 17 montre une décharge dans laquelle sont injectés deux glaçons. Les paramètres les plus affectés sont évidemment la densité ainsi que les températures ionique et électronique. Le courant change peu en revanche et nous l'avons utilisé comme un des critères de stationnarité (cf. annexe 1). L'invariance temporelle des constantes de temps, présentée dans le paragraphe précédent, est une indication supplémentaire de la stationnarité du plasma.

Un problème tout aussi délicat à cerner que la stationnarité est la connaissance de termes de source. Il est indispensable de bien connaître l'évolution temporelle $u(t)$ des perturbations induites si on veut correctement interpréter les modes propres mesurés. Pour des termes de source externes, la connaissance de $u(t)$ ne pose généralement pas de problèmes. Nous avons vu qu'il s'agissait de fonctions de Dirac pour l'injection de glaçons. Il faut cependant aussi tenir compte des perturbations internes qui résultent d'instabilités macroscopiques propres au plasma. La plus connue et la plus importante de ces perturbations est la disruption interne ou dent-de-scie. Son caractère omniprésent et son impact sur la dynamique du profil de densité nous forcent à l'inclure comme perturbation à même titre qu'une injection de glaçon si on veut obtenir une meilleure compréhension des modes propres mesurés.

Les dents-de-scie jouent un rôle non négligeable dans le confinement en redistribuant périodiquement particules et énergie. Un simple changement de leur période de répétition suffit par exemple à modifier l'équilibre quasi-stationnaire du plasma [11]. La prise en compte des dents-de-scie dans l'étude du transport s'avère problématique parce que la période de répétition est habituellement du même ordre de grandeur que les temps de confinement. Cela signifie qu'elle est trop longue pour satisfaire une description statistique

mais aussi trop petite pour laisser au plasma le temps d'atteindre un état d'équilibre. Il est pourtant indispensable de tenir compte des disruptions internes si on veut étudier les perturbations rapides du plasma.

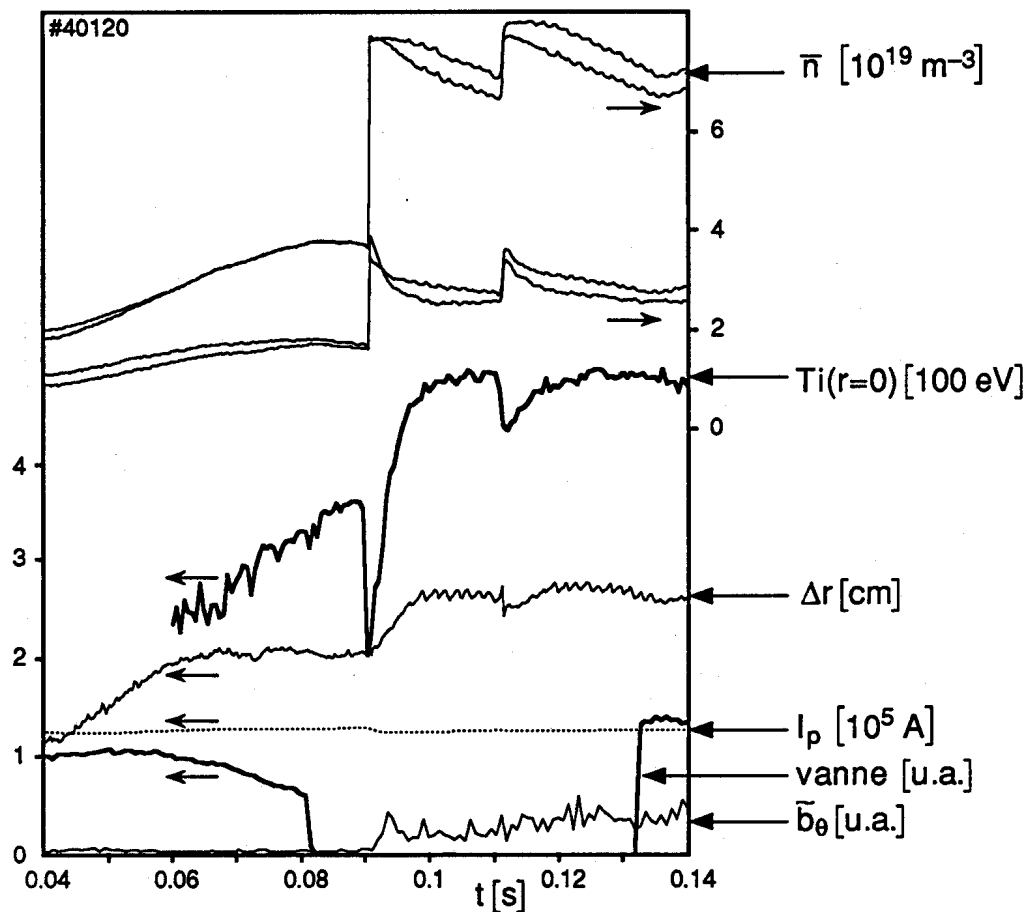


Fig. 17 Evolution temporelle de divers paramètres du plasma au cours d'une décharge dans laquelle sont injectés deux glaçons successifs. Sont représentés de haut en bas : les quatre cordes de la densité, la température ionique centrale, la position horizontale du centre de gravité de la densité, le courant, l'ouverture de la vanne de gaz (fermée pendant l'injection) et le niveau d'amplitude de l'activité MHD.

Pour les expériences menées sur TCA, les dents-de-scie n'ont pas pu être incluses dans l'analyse en raison de la résolution temporelle trop limitée de la mesure de densité. Ceci signifie que nos mesures de densité moyennent les dents-de-scie au cours du temps. Nos modes propres ne reflètent donc pas exactement les caractéristiques du transport et nous devrions les nommer modes propres effectifs. Il importe alors de savoir s'ils diffèrent des vrais modes propres. Pour répondre à cette question, nous avons recouru à un modèle permettant de simuler la réponse dynamique d'un plasma affecté par

des disruptions internes. Avec ce modèle, les modes propres ont été calculés pour des perturbations engendrées par plusieurs glaçons dont le temps d'injection était non corrélé avec les disruptions internes. Les modes vrais ont été obtenus en considérant l'effet de dents-de-scie comme étant dû à un terme de source périodique, qui a été simulé par un train d'impulsions synchrones avec les disruptions. Les résultats de cette analyse sont résumés par la figure 18.

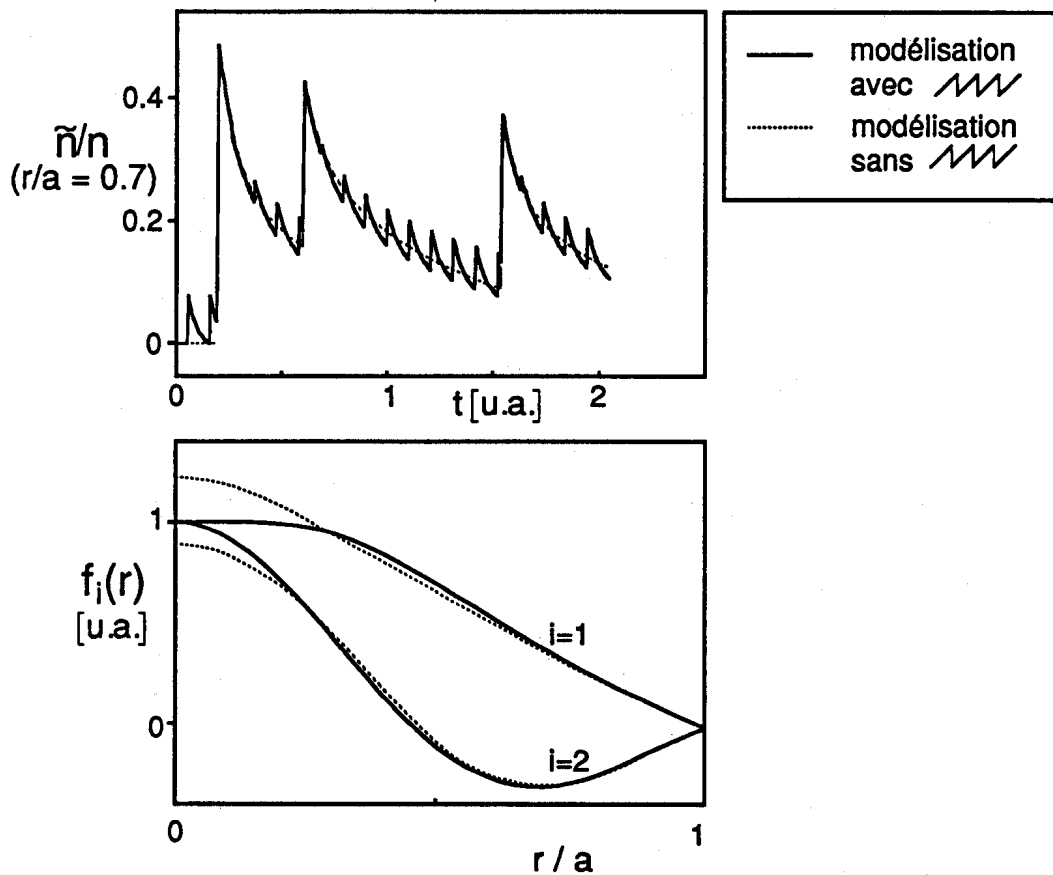


Fig. 18 Simulation de l'effet des dents-de-scie sur la réponse dynamique à l'injection de glaçons. La réponse a été décomposée en modes propres avec et sans tenir compte des disruptions internes. La figure du bas montre les fonctions propres obtenues dans les deux cas. Les constantes de temps sont sensiblement les mêmes.

On remarquera d'abord un forte ressemblance entre les modes propres vrais et effectifs, qui est d'autant meilleure pour les modes lents. Les modes rapides en revanche se déforment puis disparaissent en deçà d'un seuil donné. Cette limite d'observabilité est atteinte lorsque les constantes de temps égalent la période des dents-de-scie. Pour les données de TCA, ce seuil n'est jamais

atteint, si bien que les modes propres ne sont pas beaucoup affectés. Nous pouvons donc négliger l'effet des disruptions internes sur nos résultats. En revanche, les dents-de-scie doivent obligatoirement être incluses dans l'analyse de la réponse dynamique si on veut avoir accès à des modes propres plus rapides.

4.5 La structure du terme de source

Une quatrième condition nécessaire à la décomposition en modes propres est la séparabilité des termes de source, introduite dans §3.2. Pour une équation du bilan du type

$$\frac{\partial}{\partial t}y(r,t) = \mathcal{L} y(r,t) + x(r,t) \quad (4.2)$$

cette condition implique $x(r,t) = x(r) u(t)$. Elle est remplie par de nombreuses stimulations dont nous citerons l'injection de glaçons, la modulation de la vanne de gaz ou de la puissance de chauffage par ondes cyclotroniques électroniques. Comme contre-exemples, il y a la modulation de puissance de chauffage par ondes d'Alfvén ou la génération de courant par ondes hybrides dont le profil de dépôt change avec la densité, ou encore l'injection de glaçons observée avec une haute résolution temporelle, lorsque l'ablation ne peut plus être considérée comme un processus instantané. Pour ces cas où le terme de source n'est pas séparable, il reste la possibilité d'approximer son profil par une série de fonctions propres. Ces dernières sont par définition séparables et il vient

$$x(r,t) = f_1(r) u_1(t) + f_2(r) u_2(t) + \dots \quad (4.3)$$

Il suffit alors d'analyser les données comme un système multi-entrées. La séparabilité n'est donc pas un obstacle à la représentation en modes propres mais tout au plus un handicap surmontable par des approximations.

Un ultime test de validation consiste à comparer une mesure du profil de dépôt avec des résultats obtenus par d'autres moyens. La sommation des trois fonctions propres fournit en principe le profil d'ablation du glaçon après que les électrons aient déjà diffusé dans le plasma pendant une centaine de microsecondes. En dépit de la résolution radiale limitée des mesures, une corrélation est observée entre la forme des profils et la profondeur de pénétration des glaçons, comme le montre la figure 19.

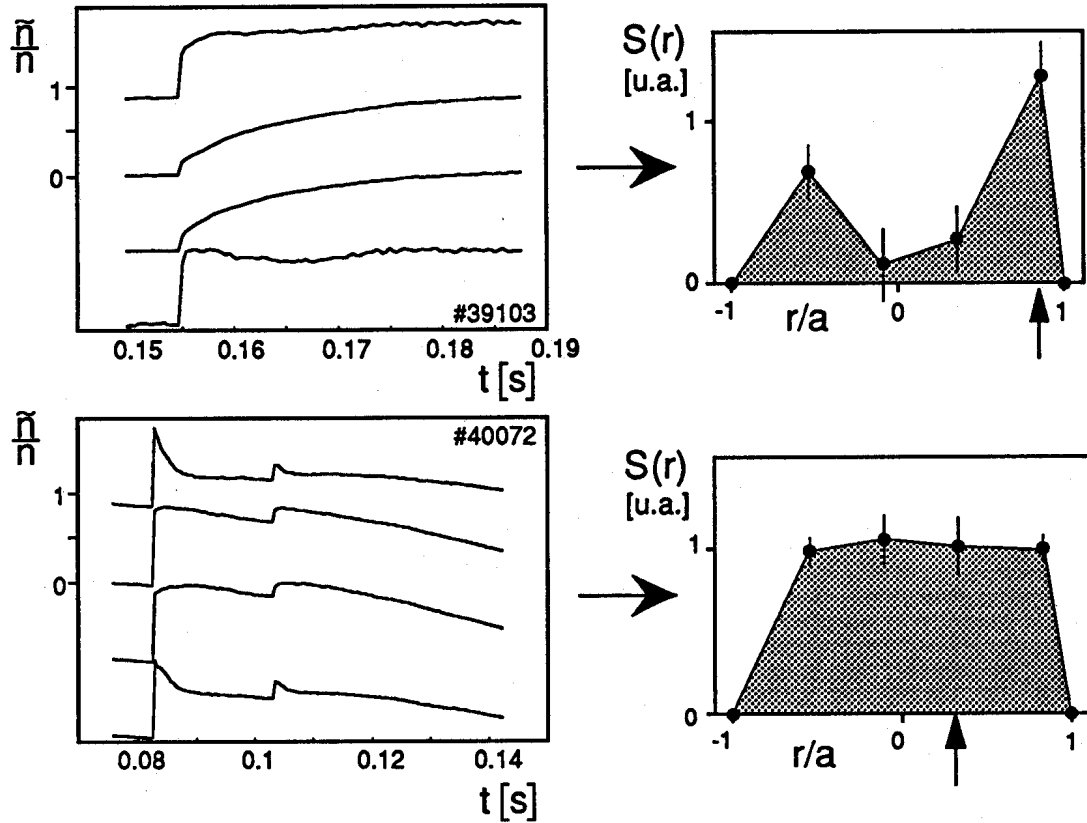


Fig. 19 Effet de la profondeur de pénétration (indiquée par une flèche) sur le profil reconstitué du terme de source, obtenu en sommant les modes propres. Les marges d'incertitude résultent de l'inversion d'Abel.

Le résultat de la figure 19 a été quantifié par comparaison du piquage des profils mesurés avec la profondeur à laquelle le maximum d'ablation est observé. Cette dernière est déduite du profil d'émission H_{α} mesuré lors de l'ablation. Le piquage est ici défini comme étant le rapport entre la valeur centrale et à mi rayon du profil reconstitué. La figure 20 révèle une forte corrélation entre les deux, qui ne dépend pas des conditions du plasma.

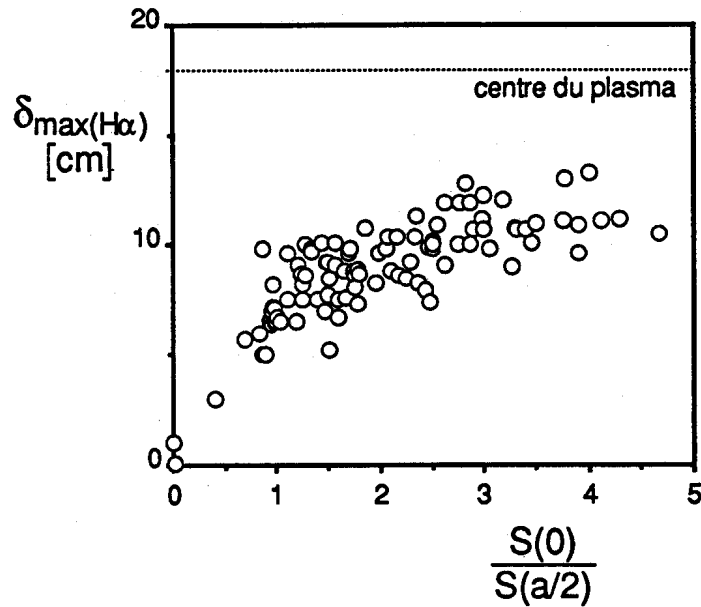


Fig. 20 Comparaison entre la distance du bord à laquelle s'observe le maximum d'ablation, et le piquage du profil du terme de source déduit à partir des modes propres. Les mesures ont été effectuées pour différents courants ($80 \leq I_p \leq 130$ [kA]) et densités ($1.5 \leq \bar{n} \leq 4$ [10^{19}m^{-3}]).

4.6 Conclusion

La réponse dynamique du profil de densité à l'injection de glaçons a été choisie comme cadre expérimental pour valider la décomposition en modes propres. Les résultats expérimentaux ont été utilisés pour vérifier différentes conditions suffisantes à l'existence de modes propres. Ces conditions sont, en partant des plus fermement remplies

- La séparabilité du terme de source est toujours vérifiée pour une stimulation impulsionnelle comme celle du glaçon.
- La linéarité de la réponse dynamique est soutenue par l'absence de corrélation entre le profil des fonctions propres et les constantes de temps d'une part, et le profil d'ablation d'autre part.

- L'existence d'un spectre entièrement discret est supportée par l'invariance temporelle et spatiale des constantes de temps mesurées.
- La stationnarité du plasma est soutenue par la constance de paramètres tels que le courant du plasma et les constantes de temps. L'effet perturbateur des disruptions internes n'a pas besoin d'être pris en compte dans l'extraction des modes propres.

Parmi ces quatre conditions, seule la première a été vérifiée de manière certaine. Il n'existe pas de preuve formelle pour les trois autres, qui sont cependant toutes fortement supportées par les résultats expérimentaux. L'existence d'un spectre entièrement discret est en plus soutenue par la structure de l'opérateur d'évolution (cf. §3.4). Par conséquent, nous supposerons dans ce qui suit que la réponse dynamique de la densité électronique se prête à une décomposition en modes propres.

5. Caractéristiques des modes propres

Suite à la validation de la décomposition en modes propres, nous sommes maintenant en mesure d'appliquer celle-ci à l'étude de la réponse dynamique de la densité électronique. La représentation en modes propres révélera plusieurs aspects importants du transport de particules. Elle mettra aussi en évidence le domaine d'applicabilité d'une telle représentation.

Le premier paragraphe commence par une description générale des modes propres de la densité tels qu'ils sont observés. Les résultats sont ensuite quantifiés dans le second paragraphe puis finalement discutés dans le troisième paragraphe, qui est suivi de la conclusion.

5.1 Les modes propres de la densité

La réponse dynamique de la densité a été analysée pour quelque 200 décharges réalisées avec des courants du plasma, des densités et des profils d'ablation différents. Les résultats obtenus dans le chapitre 4 nous autorisent à étudier les caractéristiques des modes propres et à déterminer leur comportement dans des conditions différentes. Nous commencerons par donner un premier aperçu qualitatif des résultats.

Les fonctions propres

Les fonctions propres constituent avec leurs constantes de temps une représentation très compacte de la réponse dynamique. La figure 21 montre un exemple représentatif dans lequel la réponse dynamique du profil intégré de la densité a été décomposée en trois modes propres. Pour identifier ces derniers, nous les classerons par rapidité croissante en mentionnant leur ordre, défini dans §3.4, qui indique la complexité de leur structure.

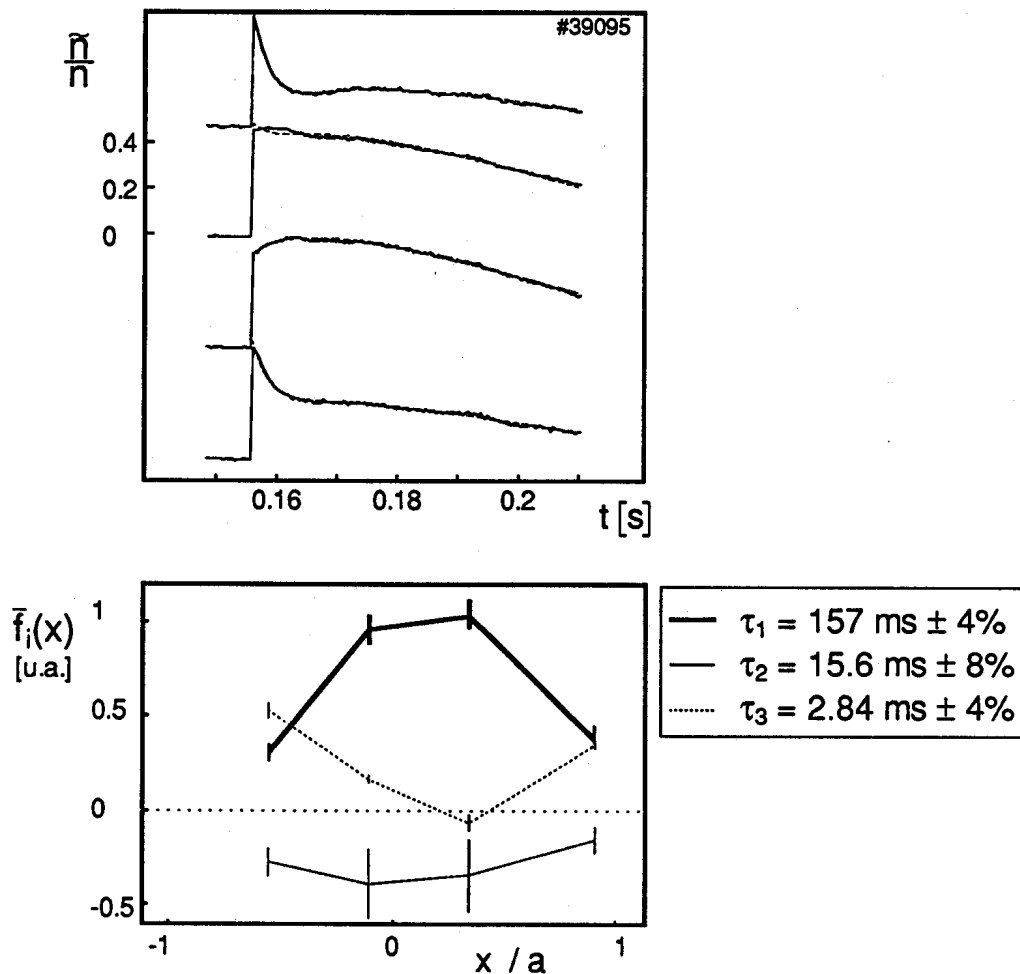


Fig. 21 La décomposition de la réponse dynamique du profil de densité intégré en modes propres. La figure du haut montre la densité perturbée avec, en pointillé, la réponse simulée par trois modes propres. La figure du bas représente le profil intégré des fonctions propres correspondantes.

La fonction propre associée à la constante de temps la plus courte est du second ordre et se démarque des autres par un profil plus structuré. La reconstitution de son profil local par inversion d'Abel révèle un changement de signe à mi rayon du plasma. Les deux modes lents possèdent au contraire des profils monotones. Ils se ressemblent toujours et ne sont manifestement pas orthogonaux. Nous verrons dans le chapitre 6 que cette non orthogonalité peut s'expliquer par l'existence d'une interaction entre la densité perturbée et une autre variable du plasma. Notons encore une forte ressemblance entre les profils du premier ordre et celui de la densité stationnaire, figure 22. Cela

signifie qu'il existe des relaxations lentes capables de modifier la densité sans pour autant modifier l'allure de son profil, qui reste semblable à celui observé à l'équilibre.

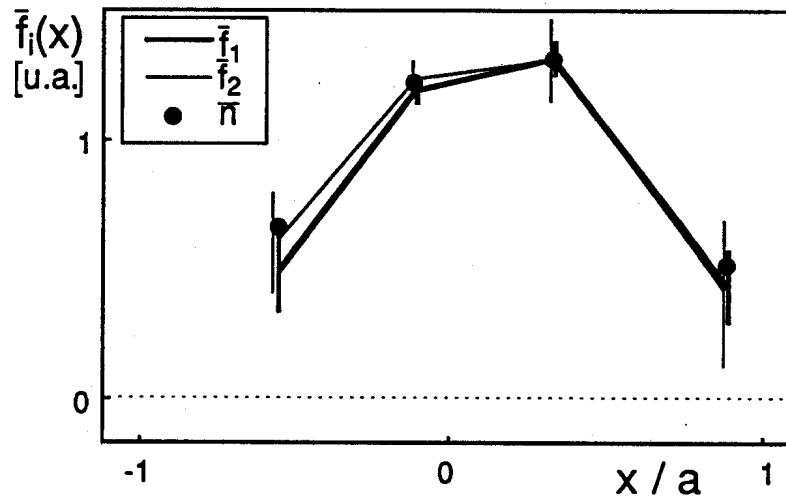


Fig. 22 Les profils des fonctions propres du premier ordre et celui de la densité stationnaire. Les amplitudes ont été ajustées pour faciliter la comparaison.

La répétition des mesures dans différentes conditions a révélé une très grande reproductibilité de ces observations. Ni l'ordre d'apparition des modes, ni le profil des fonctions propres ne change. L'invariance à l'égard du profil d'ablation est une propriété de la décomposition en modes propres. L'invariance envers les conditions du plasma trahit en revanche une insensibilité de la structure radiale de l'opérateur d'évolution envers le courant du plasma et la densité.

Les constantes de temps

Les résultats obtenus sur TCA frappent par la disparité des constantes de temps. La constante la plus longue égale la durée de la décharge et dépasse de loin les différents temps caractéristiques du plasma tels que les temps de confinement de particules et d'énergie. Le mode du second ordre est au contraire à peine plus rapide que la période des disruptions internes. Trois constantes de temps suffisent donc à couvrir plus deux décades dans l'échelle

des temps. Cette disparité permet à la densité perturbée de réagir en des temps très variables.

Les mesures effectuées dans différentes conditions révèlent d'importantes variations dans la valeur des constantes de temps. Le cas le plus frappant est observé lorsque l'injection du glaçon déclenche une intense activité MHD, qui désigne essentiellement les oscillations Mirnov (cf. annexe 1). Cette activité provoque une dégradation du confinement de particules qui s'observe clairement dans la comparaison entre deux perturbations similaires avec et sans activité MHD, figure 23. Les constantes de temps sont aussi affectées par le courant du plasma mais pas par la densité.

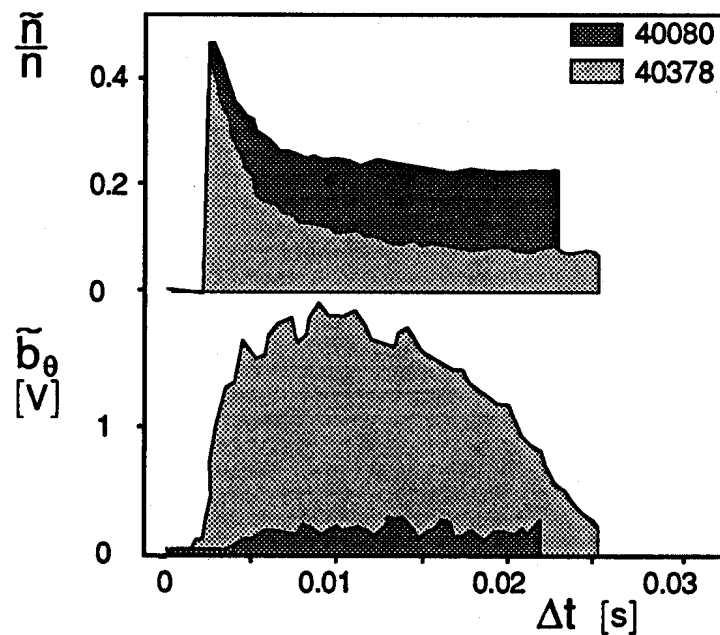


Fig. 23 Effet du niveau d'activité MHD, paramétrisé par \tilde{b}_θ , sur la réponse impulsionnelle de la densité. Les deux décharges ont été réalisées dans des conditions semblables (#40080 : $I_p=125$ [kA], $\bar{n} = 2.0$ [$10^{19}m^{-3}$], #40378 : $I_p=125$ [kA], $\bar{n} = 1.8$ [$10^{19}m^{-3}$]).

Ce premier survol montre que la réponse dynamique de la densité se décompose en des modes propres distincts et aisément identifiables. Ces modes possèdent des caractéristiques bien déterminées que nous allons maintenant quantifier.

5.2 Dépendance paramétrique des modes propres

La dépendance paramétrique des valeurs propres envers le courant I_p , la densité initiale n , l'amplitude relative des perturbations \tilde{n}/n et l'amplitude des oscillations Mirnov \tilde{b}_θ est illustrée par la figure 24. Cette figure laisse apparaître des traits de comportement mais révèle aussi une dispersion des résultats, dont l'ampleur ne saurait provenir uniquement de l'incertitude de mesure.

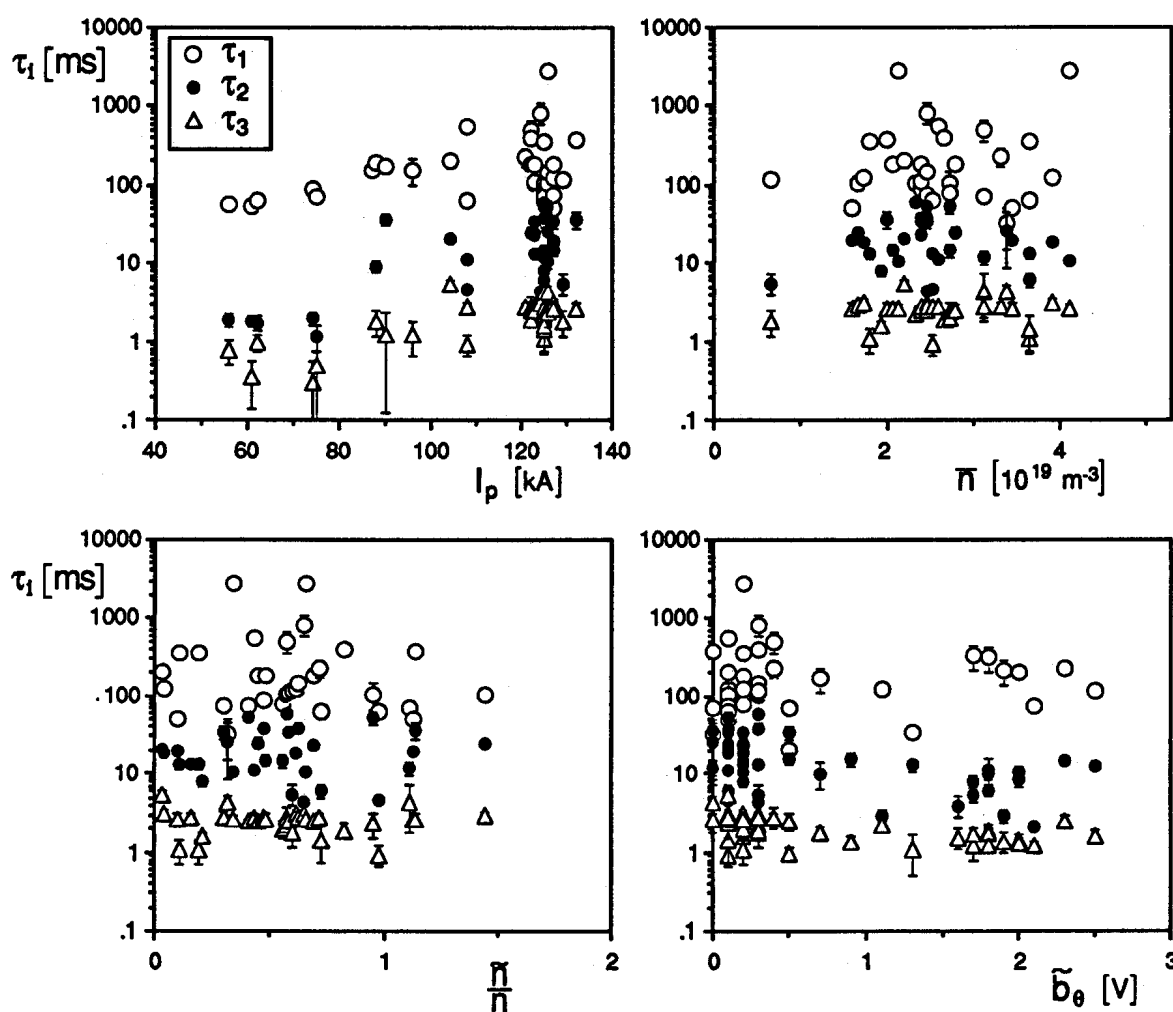


Fig. 24 Dépendance paramétrique des constantes de temps de la densité envers le courant, la densité initiale, la taille relative de la perturbation et le niveau d'activité MHD. Les conditions dans lesquelles ont été effectuées les mesures sont (en excluant le paramètre figurant en abscisse) : $100 \leq I_p \leq 130$ [kA] , $1.5 \leq \bar{n} \leq 4$ [10^{19} m^{-3}] , $0 \leq \tilde{n}/n \leq 0.6$, $0 \leq \tilde{b}_\theta \leq 0.4$ [V] .

Une loi d'échelle a été ajustée pour quantifier la dépendance paramétrique des constantes de temps. Notre choix se porte ici sur une loi simple

$$\tau_i \sim I_p^{\kappa_I} \cdot n^{\kappa_n} \cdot \left(\frac{\tilde{n}}{n}\right)^{\kappa_{\Delta n}} \cdot \left(1 + \kappa_b \frac{\tilde{b}_\theta}{I_p}\right) \quad (5.1)$$

L'amplitude \tilde{b}_θ a été normalisée puis mise sous une forme particulière pour tenir compte des décharges où sa valeur reste faible. La valeur des différents exposants ainsi que leurs incertitudes relatives figurent dans le tableau qui suit, dans lequel sont omis les termes dont l'erreur dépasse 150%.

	τ_1	τ_2	τ_3
κ_I	1.18 ± 61%	3.22 ± 20%	1.44 ± 24%
κ_n	-	-0.10 ± 120%	-
$\kappa_{\Delta n}$	-	-	-
κ_b	0.28 ± 48%	-1.30 ± 77%	-6.55 ± 36%

Ces exposants cachent vraisemblablement d'autres dépendances paramétriques par la variation simultanée de paramètres non mesurés, tels que la température électronique, dont la valeur stationnaire est fortement corrélée avec celle du courant.

Pour étudier la dépendance du profil des fonctions propres, il faut disposer d'une caractérisation de ce profil. Les fonctions propres du premier ordre possèdent un profil intégré monotone qui est adéquatement reproduit par une fonction gaussienne

$$y = y_0 e^{-\left(\frac{r-r_0}{\lambda}\right)^2} \quad (5.2)$$

Le paramètre λ fournit une estimation de la largeur caractéristique que nous utiliserons pour quantifier la forme du profil. L'asymétrie due à la non-concentricité des surfaces de flux magnétique est prise en compte par un paramètre libre r_0 généralement proche de 1/10 du petit rayon du plasma.

Dépendance à l'égard de la densité

De nombreuses lois d'échelle, telle que la loi d'Alcator font intervenir la densité dans l'expression des temps de confinement [7]. Il est donc particulièrement intéressant de connaître son influence sur les modes propres. La figure 24 et la valeur de l'exposant κ_n révèlent une nette invariance des constantes de temps envers la densité.

La figure 25 montre comment évolue la largeur caractéristique des profils du premier ordre à l'égard de la densité. Elle suggère une légère tendance au rétrécissement à haute densité qui s'observe aussi à bas courant; cette tendance est la même pour le profil stationnaire de la densité. Elle confirme l'absence de dépendance marquée entre la densité et ses fonctions propres.

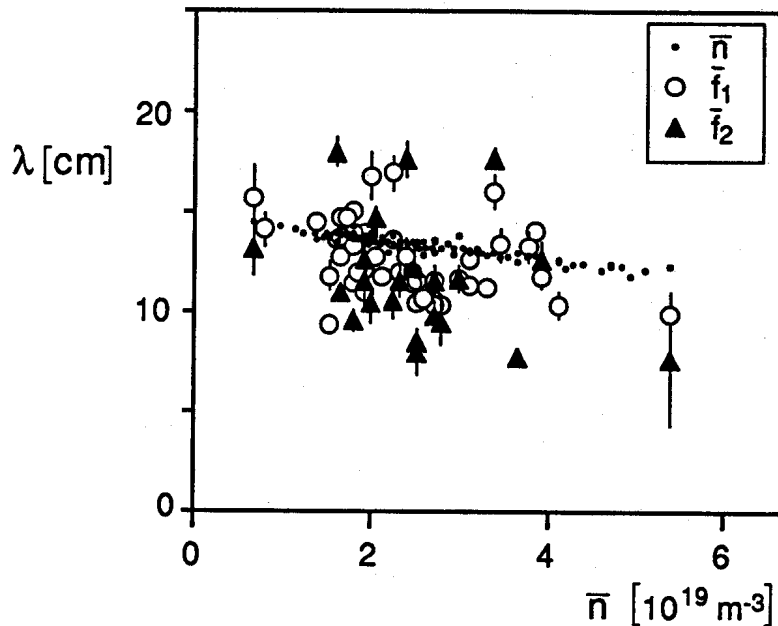


Fig. 25 Expression de la largeur du profil des fonctions propres du premier ordre ainsi que de la densité stationnaire en fonction de la densité du plasma. Toutes les mesures ont été effectuées à courant élevé ($100 \leq I_p \leq 130$ [kA]) .

Le rôle limité que joue la densité explique en partie l'excellente linéarité de la réponse dynamique du plasma, qui a été observée pour des perturbations de plus de 150%, figure 24. Ce résultat constitue une condition que devra satisfaire tout opérateur d'évolution susceptible de reproduire nos observations. Notons qu'un comportement aussi linéaire n'exclut pas l'existence de fonctionnalités dans les mécanismes qui le constituent; il se peut fort bien que les différents éléments de l'opérateur de transport dépendent de la densité ou de son gradient. Il faut en revanche que ces différentes dépendances se compensent.

Dépendance à l'égard du niveau d'activité MHD

La forte augmentation de l'activité MHD, quand elle est observée, débute immédiatement après l'injection du glaçon; cela nous permet d'approximer son effet sur le plasma par un changement de l'opérateur d'évolution préalable à la perturbation. Une hausse de l'activité MHD va de pair avec des pertes accrues en énergie et en particules. On s'attend donc à ce que la chute accélérée de la densité observée lors d'activité MHD résulte d'une diminution des constantes de temps. La figure 24 montre effectivement une légère décroissance qui est cependant nettement insuffisante pour expliquer la perte de confinement. Si le profil des fonctions propres et les constantes de temps ne changent pas, qu'est-ce qui provoque la relaxation accélérée du profil de densité ? La réponse à cette question se trouve dans la pondération des modes propres.

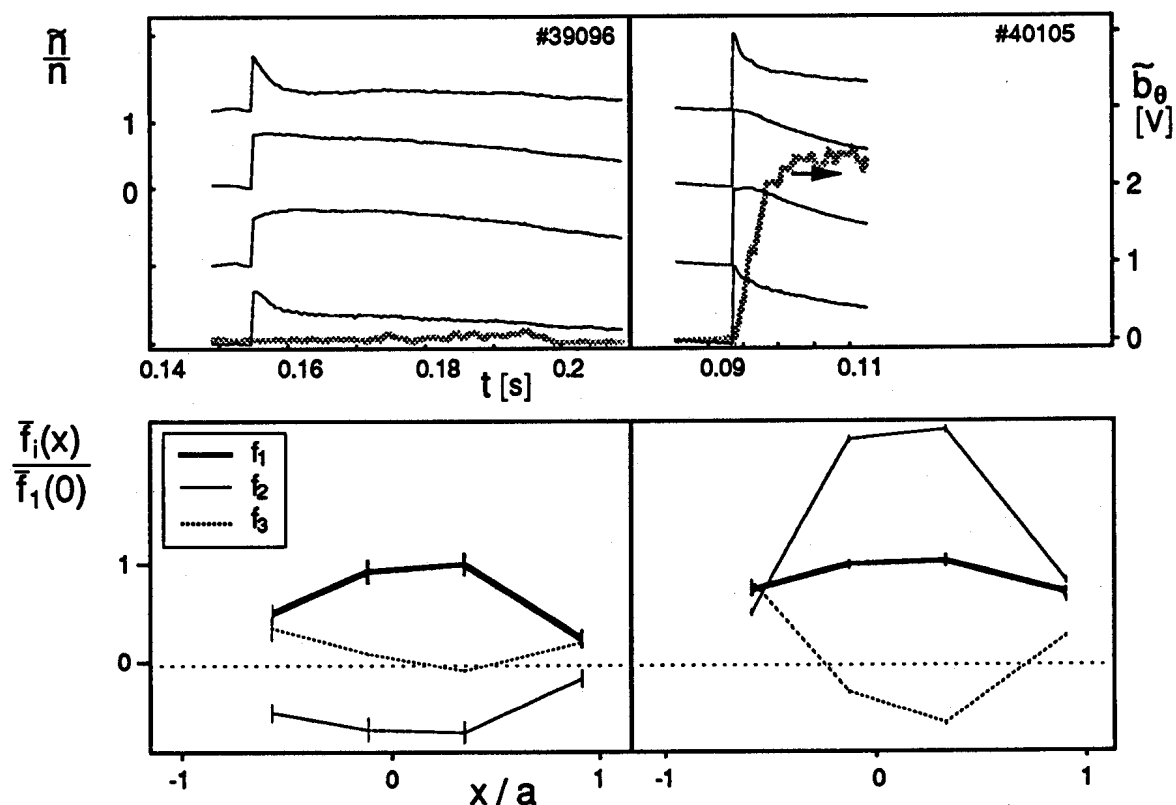


Fig. 26 Effet du niveau d'activité MHD sur la pondération des modes propres. Les deux décharges ont été réalisées dans des conditions semblables (#39096 : $I_p=126$ [kA], $\bar{n}=2.4$ [10^{19}m^{-3}], #40105 : $I_p=123$ [kA], $\bar{n}=2.0$ [10^{19}m^{-3}]).

La figure 26 compare deux décharges similaires excitées par des termes de source de profils semblables. L'une est affectée par une intense activité MHD alors que l'autre ne l'est pas. Ces décharges possèdent à peu près le même spectre et les mêmes fonctions propres. Ce qui les distingue est uniquement la pondération des modes. Le mode le plus lent domine généralement dans la relaxation de la densité mais en présence d'activité MHD, le second prévaut. Etant plus rapide que le premier, il s'en suit une relaxation accélérée de la densité.

La présence d'activité MHD se traduit donc par une modification de l'opérateur d'évolution qui conserve les constantes de temps et les fonctions propres mais change en revanche la façon dont l'opérateur pondère les modes de même ordre. Ce résultat porte à croire que l'activité MHD perturbe la densité comme s'il s'agissait d'un terme de source au même titre que l'ablation d'un glaçon, en excitant un spectre bien déterminé de modes propres. Ce spectre serait dominé par des modes rapides, ce qui explique la relaxation accélérée du profil de densité.

Dépendance à l'égard du courant

Le courant intervient fréquemment, comme la densité, dans l'expression des temps de confinement. Les résultats obtenus sur TCA montrent une très nette amélioration du confinement incrémental de particules à courant élevé. Signalons la dépendance plus accentuée de τ_2 qui laisse supposer une sensibilité différente des modes propres du premier ordre envers les mécanismes qui constituent l'opérateur d'évolution.

Bilan

L'étude de la dépendance fonctionnelle des modes propres met en exergue plusieurs propriétés importantes de la dynamique de la densité. Le profil des fonctions propres est très peu sensible aux conditions du plasma. Les constantes de temps varient nettement plus; elles augmentent avec la valeur du courant mais ne dépendent pas de la densité. L'effet de l'activité MHD se réduit à une repondération des modes propres comme le ferait un terme de source supplémentaire. Ces diverses caractéristiques sont à même de nous renseigner sur les propriétés de l'opérateur d'évolution dont elles découlent.

5.3 Discussion

L'opérateur d'évolution qui régit la dynamique du plasma ne comprend pas seulement les équations du transport mais aussi les conditions de bord du plasma ainsi que la réaction des termes de source aux perturbations. L'interaction permanente entre ces différents éléments rend leur séparation très délicate. Ceci peut être un handicap lorsqu'on désire étudier uniquement le transport, comme c'est souvent le cas.

Caractérisation du transport

La généralité de l'opérateur d'évolution constitue à la fois la force et la faiblesse de la représentation en modes propres. C'est un avantage parce qu'elle réduit le comportement d'ensemble du plasma à des paramètres dont l'extraction est bien conditionnée. L'inconvénient réside dans la difficulté d'accéder au transport, dont la détermination nécessite inévitablement une meilleure connaissance du bord et des termes de source. L'extraction des coefficients de transport à partir d'un même ensemble de données n'est pas mieux conditionnée si ces données ont été préalablement réduites sous la forme de modes propres. La représentation en modes propres aide cependant à déterminer le genre d'expériences susceptibles d'améliorer l'extraction.

Les différents modèles du transport considérés dans §3.4 ont montré que la sensibilité des fonctions propres à la structure spatiale de l'opérateur d'évolution croît avec l'ordre. Les profils du premier ordre sont relativement peu affectés par les éventuelles modifications pouvant survenir dans l'opérateur d'évolution. Ceci explique en partie la forte invariance des fonctions propres mesurées sur TCA et montre qu'il faut recourir à des modes d'ordre élevé pour bien observer les détails de l'opérateur. L'excitation sélective de modes propres par le choix de termes de source adéquats constitue une façon particulièrement efficace d'isoler les différentes caractéristiques de l'opérateur d'évolution. La représentation en modes propres montre ici quel genre d'expérience doit être menée pour extraire un maximum d'information à partir de la réponse dynamique du plasma. Cette propriété est utile pour augmenter la qualité d'extraction des coefficients de transport.

Implications sur le confinement

Un des résultats les plus frappants du spectre observé sur TCA est le nombre

réduit de modes propres nécessaire pour reproduire la réponse de la densité sur plus de deux décades de l'échelle du temps. L'existence de constantes de temps élevées rend le plasma capable de subir des relaxations très lentes. Le tout est d'exciter les modes propres adéquats. Si la valeur expérimentale du temps de confinement incrémental est habituellement inférieure à ce dont le plasma est capable, c'est parce que le mode le plus lent n'est jamais le seul à être excité. Il y a toujours une fraction des particules qui disparaît dans des modes rapides. On gagnerait donc à mieux maîtriser le profil de dépôt des termes de source pour exciter les modes propres de façon plus sélective.

La loi d'échelle des constantes de temps, qui va comme $\tau \sim I_p^{1-3} n^0$, a été mise en rapport avec le comportement remarquablement linéaire de la densité perturbée. Cette linéarité constitue un avantage certain dans l'analyse des signaux puisqu'elle autorise l'utilisation de perturbations de taille importante par rapport au niveau de bruit. Elle révèle simultanément la réticence de l'opérateur d'évolution à vouloir changer même lorsque le plasma est fortement perturbé. Ce résultat important contraste avec des observations faites sur d'autres tokamaks, où l'injection de glaçons a au contraire eu pour effet une modification durable de la dynamique du plasma [20]. Un tel comportement non linéaire n'est nullement soutenu par nos observations.

L'origine du spectre observé

Peu a été dit jusqu'ici concernant la signification du profil des fonctions propres, ainsi que la valeur absolue des constantes de temps. Bien que le spectre ne puisse être entièrement attribué à un des mécanismes qui constituent l'opérateur d'évolution, on peut néanmoins émettre certaines hypothèses concernant les processus dominants.

Commençons par considérer le transport, ce qui revient à négliger l'effet du bord et des termes de source. Les différents modèles étudiés dans §3.4 ont révélé l'existence d'un lien étroit entre les mécanismes de transport du plasma et les modes propres. La figure 27 montre que les profils mesurés des fonctions propres sont tout à fait analogues à ceux obtenus à partir d'un modèle de transport purement diffusif (3.15), ce qui soutient fortement la présence de diffusion dans l'opérateur d'évolution. Un tel modèle ne permet toutefois pas d'expliquer la disparité des constantes de temps, même si le coefficient de diffusion varie en fonction du rayon. Il n'est donc pas possible d'attribuer nos observations uniquement à un transport diffusif. L'existence de convection est plus difficile à détecter en raison de son manque d'impact sur les fonctions propres. La convection a cependant un effet prononcé sur les constantes de temps les plus longues (cf. figure 6), et un flux dirigé vers le

centre du plasma pourrait expliquer la disparité du spectre mesuré sur TCA. L'existence d'un tel flux a été suggérée par certains auteurs pour expliquer la propagation anormalement rapide de particules du bord vers l'intérieur du plasma [21].

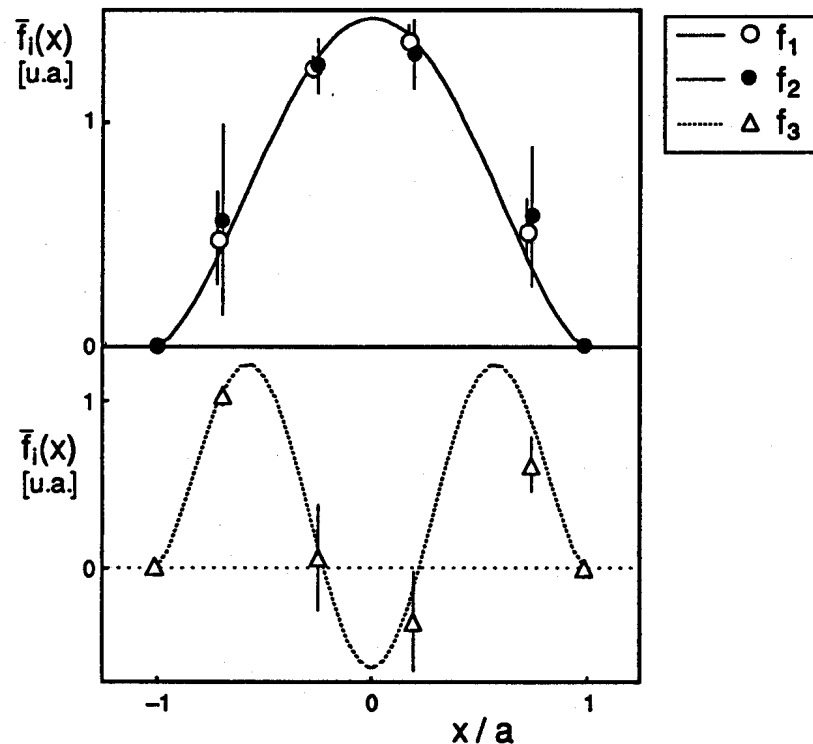


Fig. 27 Comparaison entre les fonctions propres mesurées (cercles) et les profils issus d'un modèle de transport diffusif dont le coefficient est constant. La figure du haut montre les fonctions propres du premier ordre; celle du bas la fonction du second ordre. Tous les profils sont intégrés (#39096, $I_p=125$ [kA], $\bar{n}=2.4$ [$10^{19}m^{-3}$]).

Les valeurs élevées de τ_1 et de τ_2 ne sont pas sans rappeler la constante de temps associée à la diffusion du flux magnétique poloïdal. Les trois sont du même ordre de grandeur, ce qui pourrait suggérer l'existence d'un couplage entre le courant et le flux de particules. Il existe des arguments théoriques en faveur d'une telle interaction; il est en revanche très difficile de lui attribuer la valeur du spectre mesuré. Le courant est en effet asservi pendant l'injection du glaçon, ce qui limite fortement l'impact qu'il peut avoir sur les variables perturbées du plasma. Pour mieux mettre à jour un éventuel couplage, il faudrait effectuer des expériences telles que de la modulation du courant.

Une troisième explication repose sur l'effet du bord. Les conditions aux bord

du plasma jouent un rôle décisif dans la détermination du spectre, qui sera abordé plus en détail dans le chapitre 7. Le plasma de TCA est affecté par un recyclage permanent des particules au bord, dont l'ampleur peut fortement influencer le confinement. Ce recyclage peut être comparé à un terme de source S quasiment nul sauf en périphérie du plasma. L'augmentation du nombre de particules recyclées avec la densité implique une dépendance fonctionnelle du type $\partial S/\partial n > 0$. En insérant cette dépendance dans l'équation du bilan (2.10), on obtient un terme d'amplification (c'est-à-dire un amortissement négatif, cf. A3.9) qui peut aisément expliquer la valeur si élevée de τ_1 et de τ_2 . Le recyclage a la particularité de se souvenir des décharges qui précèdent l'expérience et son hystérèse pourrait être à l'origine de la dispersion des valeurs des constantes de temps mesurées dans des conditions pourtant similaires. La répétition des expériences en présence de divers états de conditionnement des parois internes du tore apporterait un précieux complément d'information.

Les trois explications proposées jusqu'ici font intervenir des mécanismes très différents mais qui ne s'excluent pas mutuellement. L'impossibilité de mieux les distinguer montre que la représentation en modes propres ne convient pas à ce genre d'analyse. Signalons en revanche la facilité avec laquelle elle permet de comparer des réponses à différentes excitations et de mettre à jour des propriétés telles que la linéarisabilité sur une large gamme. Si différentes caractéristiques des modes propres ont déjà reçu une interprétation, divers aspects restent à traiter. Que signifie l'existence de deux modes propres non orthogonaux ? Par quel biais l'activité MHD agit-elle sur la pondération des modes propres ?

5.4 Conclusion

L'étude de la réponse dynamique de la densité a révélé l'existence de trois modes propres aisément identifiables qui se distinguent par des ordres différents et par des constantes de temps disparates. Leurs profils changent peu avec les conditions du plasma, ce qui trahit une invariance de la structure radiale de l'opérateur d'évolution mais révèle aussi la nécessité de recourir à des modes d'ordre élevé pour accéder aux détails de l'opérateur. Les constantes de temps manifestent une forte dépendance envers le courant $\tau \sim I_p^{1-3} n^0$, mais point envers la densité.

La réponse dynamique de la densité garde un comportement linéaire pour des

perturbations de plus de 100%. Aucune modification durable de l'opérateur d'évolution n'a pu être décelée suite à l'injection du glaçon comme cela a été le cas sur d'autres tokamaks [22]. La représentation en modes propres montre en revanche quels profils de dépôt doivent être utilisés pour garantir une bonne rétention des particules.

Ces différents résultats ont révélé l'utilité des modes propres pour isoler et traiter différents aspects du confinement. Ils ont l'avantage de décrire simultanément le transport, le bord et les termes de source à l'aide de paramètres bien conditionnés. Ils ne permettent pas en revanche de caractériser chacun de ces mécanismes indépendamment sans faire intervenir une modélisation. La difficulté de distinguer ces différents mécanismes responsables de la réponse dynamique du plasma nous incitera à les traiter simultanément.

6. Couplages avec d'autres variables

Les caractéristiques des modes propres observés sur TCA impliquent l'existence d'une interaction entre le profil de densité et un autre paramètre du plasma. Nous chercherons à identifier ce paramètre et à déterminer les conséquences d'un tel couplage sur l'opérateur d'évolution. Cette quête mettra à jour une contrainte importante qui limite l'accès à certains régimes intéressants sur le plan thermonucléaire. Elle rappellera aussi la nécessité d'une analyse simultanée pour interpréter correctement la dynamique de variables couplées.

Le premier paragraphe rappelle les conséquences du couplage. Dans le second paragraphe, un couplage est déduit puis identifié à partir des modes propres. Cette interaction est ensuite analysée dans le paragraphe 3 et ses implications sur le confinement sont discutées dans le paragraphe 4, qui est suivi de la conclusion.

6.1 L'existence de couplages

La théorie du transport prédit l'existence de différents types d'interaction entre les variables du plasma. Mentionnons d'abord le couplage explicite entre flux, comme par exemple celui qui lie le flux de densité au courant, engendrant ainsi la striction de Ware [23]. L'existence de dépendances fonctionnelles dans les coefficients de transport donne lieu à un autre type de couplage, dit implicite, qui apparaît seulement en régime transitoire (cf. annexe 3).

Le formalisme de la décomposition en modes propres se prête particulièrement bien à l'analyse de variables couplées. Les spectres de deux variables indépendantes sont normalement distincts. En présence de couplage, ils se chevauchent et chaque variable accapare les modes propres de la variable appariée. On assiste donc à un dédoublement du spectre puisque chaque mode propre apparaît simultanément dans les deux variables. Les conséquences

pratiques sont les suivantes :

- les variables couplées possèdent les mêmes constantes de temps;
- pour chaque ordre on observe non plus un mais deux modes propres ayant des constantes de temps différentes.

Ces critères simples permettent de déduire directement l'existence de couplages à partir des modes propres.

6.2 Identification du couplage

L'analyse de la réponse dynamique de la densité a révélé l'existence de deux modes lents de même ordre. Ce résultat semblait de prime abord être en contradiction avec la condition d'orthogonalité des modes propres. On peut maintenant l'interpréter en invoquant l'existence d'un couplage entre la densité perturbée et une autre variable du plasma. Nous avons déjà vu dans §5.3 que ce résultat n'est pas attribuable à un couplage avec le courant du plasma, étant donné que celui-ci est maintenu constant par asservissement. Comme second candidat, il y a la température électronique. Les théories du transport prédisent en effet d'importants couplages entre les flux de particules et de chaleur. Cette prédiction a été confirmée par l'étude de la propagation de disruptions internes [24,25] ainsi que par la réponse à l'injection de glaçons [12]. Nos observations découlent certainement elles aussi d'un couplage entre la densité et la température, même si le spectre de celle-ci n'est pas connu.

Il n'est pas exclu que la densité soit couplée avec d'autres variables du plasma telles que la température ionique. Si de tels couplages existent, ils sont soit trop faibles pour être détectés, soit mal mis en évidence par la stimulation du glaçon. Notons que rien ne nous permet de déterminer l'origine du couplage observé, qui peut être aussi bien implicite qu'explicite. Dans le premier cas, il résulterait d'une fonctionnalité des coefficients de transport et agirait uniquement lors de transitoires; dans le second cas, il lierait explicitement les différents flux. La levée de cette indétermination nécessite la répétition des mesures en variant indépendamment la densité et la température.

6.3 Caractérisation du couplage

L'étude du couplage demande préalablement à ce que soient identifiés les

éléments qui permettent de le caractériser dans les modes propres. Le diagramme bloc de la figure 11 nous a montré que le couplage agit directement sur la pondération des modes excités. C'est donc essentiellement en comparant les paires de modes de même ordre qu'on va trouver par quel biais le caractériser; s'il devient très faible, un des deux modes cesse d'apparaître.

Les deux modes du premier ordre ont des amplitudes dont le signe est, tout comme l'allure du profil, très reproductible d'une décharge à l'autre. Le mode le plus lent possède toujours une amplitude positive et se charge donc de l'évacuation hors du plasma des particules injectées. Le second mode est généralement négatif (cf. fig. 21) : il correspond à un flux de particules dirigé vers l'intérieur et contribue en ce sens à améliorer le confinement. La figure 28 montre l'évolution temporelle de la densité suite à l'injection d'un glaçon et illustre particulièrement bien l'effet de rétention du second mode propre. L'injection y est suivie d'une courte phase de relaxation qui correspond à l'évanescence du mode le plus rapide, dont la constante de temps est τ_3 . Cette phase est suivie d'une période d'environ 30ms pendant laquelle le contenu en particules reste stationnaire; le second mode vient alors compenser les pertes occasionnées par le premier mode propre. Une fois que le second mode est suffisamment amorti, l'effet du premier domine avec une relaxation caractérisée par τ_1 .

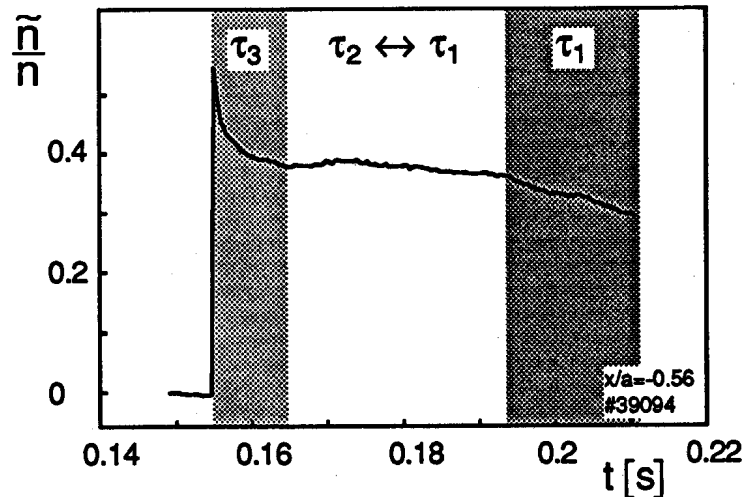


Fig. 28 Evolution temporelle d'une corde centrale de la densité, montrant l'influence successive des trois modes sur la relaxation ($I_p = 125$ [kA], $\bar{n} = 2.3$ [10^{19}m^{-3}]).

L'effet de rétention du second mode appelle deux remarques. D'abord, il modifie considérablement la vitesse de relaxation de la densité; son effet est donc loin d'être négligeable, même si son amplitude absolue est généralement plus faible que celle du premier mode. Ensuite, il implique l'existence d'un mécanisme de contre-réaction qui s'oppose au flux sortant de particules. Si la densité est couplée avec la température électronique, alors le comportement du second mode signifie que les pertes de particules sont réduites par une baisse de la température.

Pour quantifier ces observations, nous introduisons le paramètre ρ_{ij} qui est le rapport d'amplitude entre les i -ème et j -ème fonctions propres intégrées, mesuré au centre du plasma par interpolation

$$\rho_{ij} = \frac{\bar{f}_i(x=0)}{\bar{f}_j(x=0)} \quad (6.1)$$

Dans cette notation, ρ_{21} est le rapport d'amplitude entre les deux fonctions propres du premier ordre, qui ont des profils semblables mais des constantes de temps différentes. La figure 29 montre quel est l'impact simulé de ρ_{21} sur une réponse impulsionnelle.

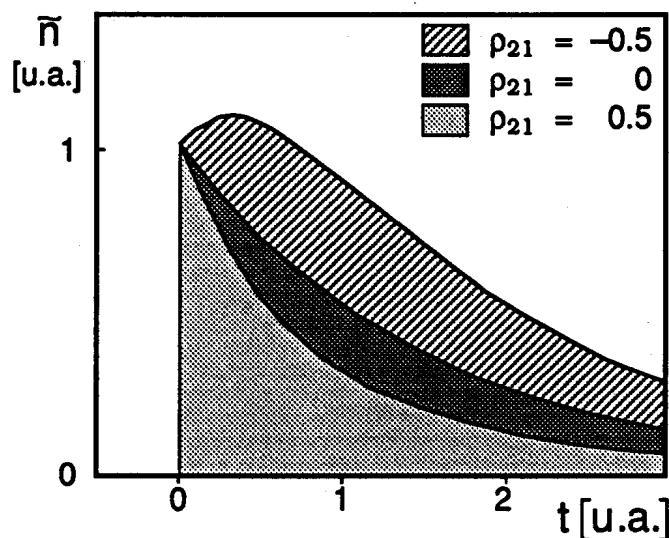


Fig. 29 Réponse impulsionnelle d'une corde centrale de la densité simulée pour trois rapports d'amplitude différents.

Un rapport positif entraîne une relaxation accélérée de la perturbation. Le

rapport ρ_{21} fournit donc une indication du confinement des particules. Il permet par exemple de faire le lien entre le niveau d'activité MHD et la dégradation du confinement qui l'accompagne. La valeur de ρ_{21} est d'ordinaire négative, mais nous avons vu qu'une activité MHD intense la fait changer de signe. Cette observation est en plein accord l'interprétation qui découle de la figure 29.

Le lien entre le rapport d'amplitude et les caractéristiques de l'opérateur d'évolution s'appuie sur l'expression de la densité perturbée (3.41). Le calcul du rapport ρ_{31} , détaillé dans l'annexe 5, mène à une expression qui dépend uniquement du profil d'ablation. La valeur de ρ_{31} doit par conséquent être indépendante de paramètres du plasma tels que le courant et la densité, à profil d'ablation fixe. L'expression du rapport ρ_{21} est tout à fait différente puisqu'elle fait intervenir des paramètres qui sont uniquement liés à l'intensité du couplage; ρ_{21} ne dépend donc pas du profil d'ablation. Nos observations doivent obligatoirement répondre à ces critères si nous voulons que notre représentation soit correcte.

La mesure du rapport ρ_{21} entre fonctions propres du premier ordre révèle une forte indépendance à l'égard du profil d'ablation, figure 30. La valeur très reproductible de ρ_{21} est généralement proche de -0.5 , sauf en présence d'activité MHD, où elle change de signe. Le rapport ρ_{31} est au contraire indépendant des conditions du plasma, mais varie en revanche avec le profil du terme de source. Sa dépendance confirme une propriété déjà dérivée dans le chapitre 3, à savoir l'amélioration du confinement de particules qui résulte d'un dépôt centré.

Ces résultats sont tous en excellent accord avec les propriétés que nous avons déduites de notre modèle. Ils soutiennent la validité de notre formalisme et fournissent en même temps une base très physique à l'interprétation du rapport d'amplitude.

Une mesure simultanée du spectre de la variable couplée permettrait ici d'en calculer l'amplitude et fournirait un complément précieux. Ceci n'a pu être réalisé. On peut néanmoins faire quelques remarques. L'invariance du rapport ρ_{21} à l'égard de la densité et du courant signifie que l'intensité des couplages relatifs entre la variable couplée et la densité varie peu quelles que soient les conditions du plasma. La seule exception à cette règle survient lors d'activité MHD, où le rapport change de signe. La dégradation du confinement qui en résulte a déjà été attribué à une pondération défavorable des modes propres. Nous découvrons à présent que cette repondération résulte d'un changement de couplage. L'activité MHD a donc pour effet une modification de l'intensité

des couplages entre la variable couplée et la densité, qui favorise une déperdition accélérée des particules et de l'énergie. Notons que le mécanisme responsable de ce changement obéit à des lois bien déterminées, puisqu'il modifie l'interaction entre opérateurs d'évolution tout en préservant leurs fonctions propres et leurs constantes de temps.

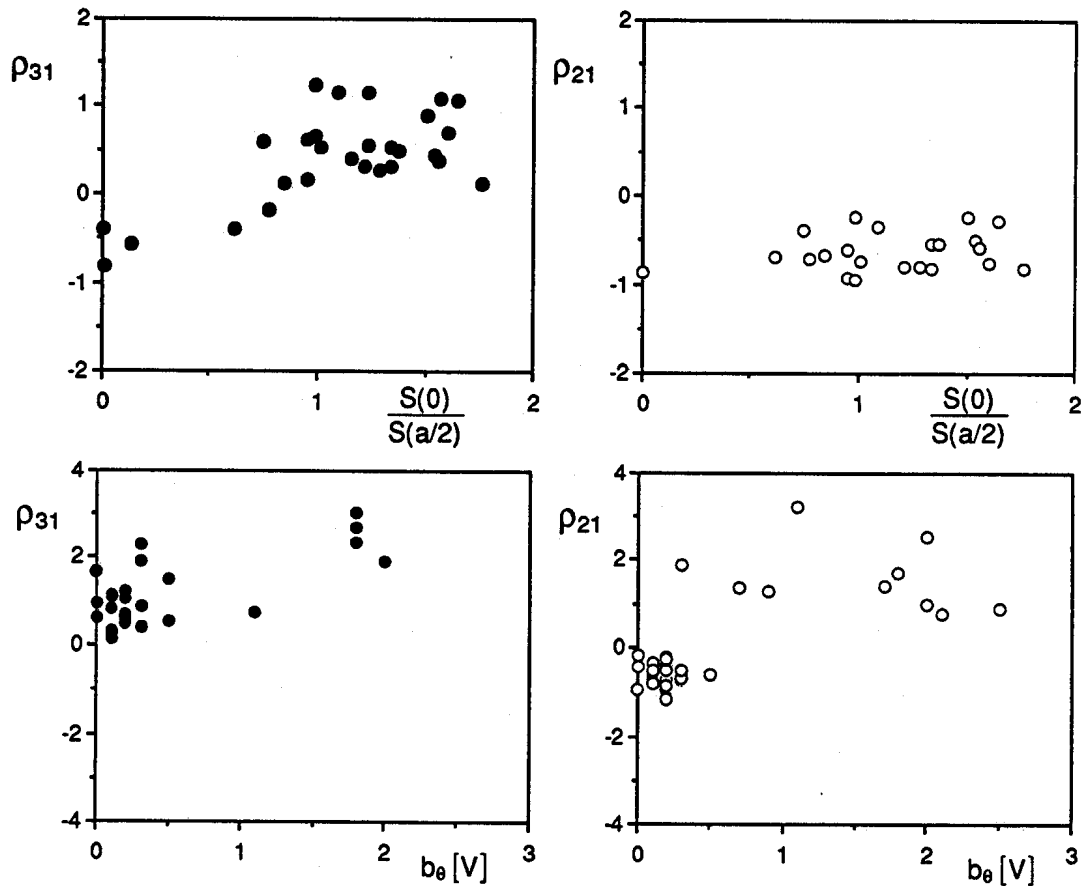


Fig. 30 Dépendance des rapports d'amplitude envers le piquage du profil de déposition du glaçon (figures du haut) et par rapport au niveau d'activité MHD (figures du bas). Les conditions de mesure sont $100 \leq I_p \leq 130$ [kA], $2 \leq \bar{n} \leq 4$ [$10^{19} m^{-3}$].

Ces quelques observations montrent qu'un paramètre anodin donne accès à des caractéristiques importantes du transport. Il serait souhaitable de mesurer la valeur du rapport d'amplitude sous d'autres conditions. On peut déjà voir si l'intensité du couplage relatif change d'un tokamak à l'autre. Une estimation du rapport ρ_{21} a été faite à partir de données expérimentales obtenues en régime ohmique sur les tokamaks JET, TEXT et Tore Supra. Pour les deux premiers, le rapport a été calculé à partir de la matrice de transport [26] alors que pour

Tore Supra, elle a été déduite directement des modes propres [12]. Le fait que ce rapport soit calculé sur la base de représentations différentes nous oblige à l'utiliser ici avec circonspection. Les différences observées entre les quatre tokamaks dépassent cependant la marge d'incertitude des mesures. La figure 31 présente les résultats en fonction de la taille des tokamaks. Le choix de la taille est évidemment arbitraire mais il met bien en évidence les changements de couplages entre différentes machines.

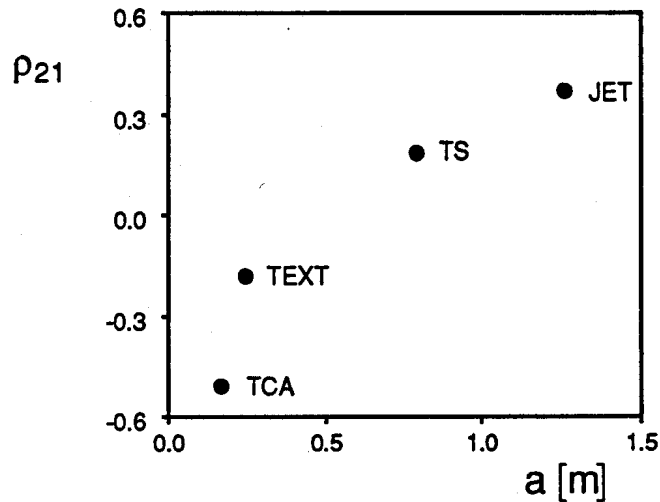


Fig. 31 Expression de la valeur du rapport d'amplitude mesurée sur différents tokamaks.

Cette figure montre que les interactions entre flux d'énergie et de particules changent considérablement d'un tokamak à l'autre. Ainsi, une même excitation peut donner lieu à des perturbations qui évoluent très différemment suivant le tokamak dans lequel elles sont excitées. Ce résultat a été confirmé indirectement par l'étude comparative des de la propagation des disruptions internes observées sur TEXT et sur JET [26]. Dans le premier, les perturbations de densité et de température se propagent simultanément alors que dans le second, la température précède la densité.

6.4 Implications sur le confinement

Suite à ces résultats, on se demandera évidemment quel est l'impact du couplage sur le confinement. Nous avons déjà dévoilé ici et là des résultats,

comme par exemple le lien existant entre le rapport d'amplitude ρ_{21} et le confinement de particules. Que peut-on dire de plus ?

Une des premières conséquences du couplage est l'apparition de liens entre l'évolution temporelle de la densité et celle, présumée, de la température. Les deux sont d'abord liées par un spectre identique. La température a donc la même capacité que la densité de subir des relaxations extrêmement lentes ou au contraire très rapides. Seule la pondération des modes propres permet de différencier les deux. Beaucoup d'auteurs tiennent pour acquis le fait que le transport de chaleur est plus rapide que celui de particules. Nous voyons qu'une telle affirmation est invérifiable. Si la température donne l'impression de réagir plus vite que la densité, c'est uniquement en raison d'une distribution différente des modes propres. Pour des profils de dépôt identiques, la pondération favorise généralement les modes lents pour la densité (c'est le cas pour TCA) et les modes rapides pour la température. Il existe cependant des exceptions. Il peut arriver que les distributions se ressemblent au point de provoquer des perturbations très semblables, comme sur TEXT, où les perturbations de densité et de température induites par les disruptions internes se propagent simultanément [24]. Pour ce dernier, l'existence d'un couplage a été déduite en interprétant les coefficients de transport obtenus par ajustement d'un modèle diffusif simple. En procédant par décomposition en modes propres, la même conclusion aurait été obtenue plus simplement et de façon plus déductive.

Une autre conséquence du couplage est l'apparition de contraintes sur l'amplitude des modes propres. Pour une variable non couplée, l'amplitude est uniquement déterminée par le profil de dépôt du terme de source. En présence de couplage, il demeure toujours possible de modifier les amplitudes de modes d'ordres différents; le lien entre modes de même ordre est en revanche fixé par l'opérateur d'évolution. Ce résultat a été illustré par la mesure du rapport d'amplitude. Nous avons vu que le rapport ρ_{31} entre fonctions propres du premier et du second ordre dépendait effectivement du profil d'ablation du glaçon alors que le rapport ρ_{21} entre fonctions de même ordre était au contraire insensible au profil de dépôt. Ces contraintes sur la distribution des modes propres empêchent l'accès à certaines combinaisons qui peuvent justement s'avérer intéressantes.

Un des objectifs prioritaires de la recherche en fusion est la réalisation d'un confinement énergétique aussi bon que possible. Cela équivaut entre autres à maximiser le temps de confinement de la température. L'obtention d'une bonne rétention des particules est moins désirable parce qu'un trop bon confinement des particules s'accompagne généralement d'une accumulation néfaste d'impuretés et de produits de fusion. Les modes propres ne

permettent pas de décrire l'état d'équilibre du plasma; ils montrent en revanche quel genre de source doit être appliquée au plasma pour maximiser le confinement incrémental à partir d'un état stationnaire donné. Il vient deux critères :

- 1) La perturbation de la température doit être dominée par des modes lents
- 2) La perturbation de la densité ne doit pas être dominée par des modes lents

Ces conditions sont aisément satisfaites simultanément pour des variables indépendantes. Les mêmes conditions peuvent en revanche devenir incompatibles pour des variables couplées et nécessitent alors des compromis. L'existence de contraintes dans la pondération des modes propres signifie donc que le choix du type de confinement ne peut se faire indépendamment pour la densité et pour la température.

Pour montrer comment manipuler de telles contraintes, on considère la solution générale de la densité et de la température perturbées (3.41). Nous nous limitons aux termes du premier ordre; ceci permet de simplifier considérablement l'expression sans affecter les propriétés qui nous intéressent ici. La solution devient pour un terme de source impulsionnel

$$\begin{aligned}\tilde{n}(r,t) &\sim [(c_1 - \beta d_1) e^{-t/\tau_\alpha} + \beta (-\alpha c_1 + d_1) e^{-t/\tau_\beta}] f_1(r) \\ \tilde{T}(r,t) &\sim [\alpha (c_1 - \beta d_1) e^{-t/\tau_\alpha} + (-\alpha c_1 + d_1) e^{-t/\tau_\beta}] f_1(r)\end{aligned}\quad (6.2)$$

Rappelons que les coefficients c_1 et d_1 sont les projections des termes de source sur les fonctions propres $f_i(r)$ selon

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n(r) &= \sum_i c_i f_i(r) \\ \tilde{S}_T(r) &= \sum_i d_i f_i(r)\end{aligned}\quad (6.3)$$

Quant aux paramètres α et β introduits dans (3.31), ils caractérisent l'intensité relative du couplage entre la densité et la température. Si ces dernières sont tout à fait indépendantes, on a $\alpha=\beta=0$ et l'expression (6.2) se réduit à celle du cas monovisible

$$\begin{aligned}\tilde{n}(r,t) &\sim c_1 e^{-t/\tau_\alpha} f_1(r) \\ \tilde{T}(r,t) &\sim d_1 e^{-t/\tau_\beta} f_1(r)\end{aligned}\quad (6.4)$$

Dans un tel cas, il suffit d'agir sur les termes de source pour exciter les modes propres à sa guise. Cette liberté se perd lorsqu'on introduit le couplage. L'expression (6.2) va même plus loin et montre qu'il est impossible de

modifier une des variables couplées sans affecter l'autre, quels que soient les termes de source utilisés (c'est-à-dire quels que soient c_1 et d_1). La densité et la température sont donc toujours perturbés simultanément, que l'excitation provienne d'un glaçon, d'un chauffage additionnel ou d'un autre terme de source. Il n'y a certainement pas d'expression plus évidente du couplage que celle-ci. Elle vient remettre en question la conception séparatiste selon laquelle les confinements de particules et de chaleur sont deux entités qui se traitent indépendamment.

Cette conclusion s'applique aussi à l'état d'équilibre bien que dans ce cas les couplages implicites cessent d'agir pour ne laisser que des couplages explicites. Il se peut donc que l'équilibre soit régi par des interactions différentes de celles observées lors de transitoires.

L'impact du couplage sur le confinement nous amène à nous demander s'il existe des critères permettant d'obtenir un temps de confinement incrémental intéressant sur le plan thermonucléaire. L'expression (6.2) fournit deux critères simples qui aident à trouver le meilleur compromis. Le premier et le plus évident implique le choix de termes de source qui maximisent le temps de confinement incrémental. Cela revient à choisir des sources dont le profil est centré. Le second critère est plus directement lié au couplage puisqu'il implique le choix d'un équilibre adéquat entre les termes de source. En prenant par exemple $\alpha c_1 = d_1$, on éliminera tant pour la densité que pour la température le mode propre dont la constante de temps est τ_β . Le choix final dépendra évidemment étroitement de la valeur des couplages relatifs α et β . Ces résultats montrent qu'il est utile d'agir à la fois sur la densité et sur la température pour réussir un bon confinement énergétique. Il y a donc lieu d'adopter une approche synergétique qui tire profit des divers mécanismes d'interaction existant dans le plasma. Des approches semblables ont déjà été proposées pour améliorer l'efficacité de plusieurs chauffages appliqués simultanément [27] ainsi que pour optimiser la configuration du plasma [28].

L'importance des différentes propriétés mises à jour jusqu'ici montre à quel point la représentation en modes propres est efficace pour aborder des aspects fondamentaux du confinement. On rappellera cependant que notre représentation est bâtie sur une description linéarisée. Comme la réalité ne saurait être totalement linéaire, il faut se garder d'extrapoler nos résultats vers des perturbations qui se démarquent trop de l'état stationnaire. Rien ne nous empêche toutefois d'approximer des fortes non linéarités ou des transitions par une série de linéarisations successives. Les caractéristiques des modes propres changeront avec le choix de l'état stationnaire, mais les propriétés telles que le lien avec le couplage resteront évidemment valables.

6.5 Conclusion

L'observation de modes propres de même ordre manifeste la présence d'un couplage entre la densité et une autre variable qui est vraisemblablement la température électronique. Une telle interaction entre les flux de chaleur et de particules forcerait les deux à avoir les mêmes constantes de temps, donc à avoir la même dynamique.

Le couplage observé est insensible aux conditions du plasma et au profil d'ablation du glaçon mais dépend en revanche du niveau d'activité MHD. L'effet défavorable de ce dernier sur le confinement peut s'expliquer par une modification de l'opérateur d'évolution qui préserve le spectre mais change en revanche les interactions entre flux de particules et de chaleur de façon à accélérer les pertes.

L'existence de couplages entre les variables du plasma entraîne des contraintes sur les perturbations pouvant être induites, dont la dynamique n'est plus entièrement déterminée par le profil des termes de source. Il devient alors nécessaire de faire des compromis si on veut obtenir un confinement intéressant sur le plan thermonucléaire. L'analyse de tels cas demande une approche synergétique.

Signalons enfin la simplicité avec laquelle un couplage a pu être déduit puis caractérisé à partir des modes propres sans devoir passer par la détermination des mécanismes de transport responsables de ce couplage. Ce résultat illustre bien la faculté des modes propres à mettre en évidence des aspects importants du confinement.

7. Une approche complémentaire

La façon de paramétriser un phénomène physique peut fortement influencer l'interprétation qui en résulte. En choisissant de représenter la dynamique de la densité en termes de modes propres, divers aspects nouveaux du confinement particulière ont pu être mis en évidence. Notre but est à présent de déterminer en quoi cette représentation se distingue de celle, habituelle, basée sur des coefficients de transport.

Le premier paragraphe montre qu'il peut exister deux classes de paramètres différents pour décrire les phénomènes physiques. Le paragraphe 2 introduit ensuite un exemple consacré à l'effet des conditions de bord sur les modes propres. Il est suivi d'une discussion puis, dans le paragraphe 4, d'un second exemple qui traite de la cohérence de profil.

7.1 Des paramètres différents

Les coefficients de transport utilisés dans la paramétrisation de la réponse dynamique sont généralement définis comme étant locaux, c'est-à-dire uniquement dépendants de l'endroit où ils agissent. Cette propriété facilite l'interprétation des modèles dont ils font partie. L'opérateur d'évolution a lui aussi été défini comme dépendant uniquement de la coordonnée radiale r . Il en va tout autrement avec les modes propres, qui dépendent des conditions régnant dans l'ensemble du plasma : ils sont par essence globaux. La distinction entre les deux classes de paramètres a l'avantage de permettre deux approches différentes mais néanmoins complémentaires de mêmes phénomènes physiques. Une telle diversification des approches est un atout dans la mesure où elle permet de réinterpréter certaines observations et parfois d'en fournir une explication simplifiée. Nous avons vu par exemple que la dégradation du confinement causée par l'activité MHD pouvait être expliquée

par un simple changement de pondération dans les modes propres. Les deux exemples qui suivent vont permettre de juxtaposer des approches différentes de mêmes phénomènes.

7.2 Premier exemple : le rôle des conditions de bord

Les conditions régnant au bord du plasma jouent un rôle essentiel dans la détermination des propriétés dynamiques du plasma. Les modes propres de l'opérateur d'évolution sont directement soumis aux conditions aux limites. On s'intéressera ici à établir un lien entre le bord, à caractère essentiellement local, et le confinement global du plasma. Les spectres obtenus pour deux modèles empiriques simples du bord seront présentés. On se limitera à un opérateur d'évolution en géométrie cylindrique qui ne comprend que du transport diffusif, ce qui simplifiera les résultats sans pour autant affecter la phénoménologie qui nous intéresse.

Plasma de taille variable

Comme cas le plus simple, prenons la condition de bord de Dirichlet déjà rencontrée dans §3.4, avec un plasma dont les perturbations s'annulent au petit rayon $r=a$. Dans ce cas, les fonctions propres sont des fonctions de Bessel et le spectre discret vaut

$$\tau_l = \frac{a^2}{j_{0,l}^2 D} \quad (7.1)$$

Une variation du petit rayon affecte le spectre mais pas l'allure des fonctions propres. Tout changement de diamètre du plasma se résume donc à une compression ou à une dilatation de l'échelle du temps, suivant que la taille diminue ou augmente, Fig. 32.

Piédestal variable au bord

Comme second modèle du bord, considérons celui d'un plasma doté d'un piédestal. Pour paramétriser ce dernier, il convient de choisir une normalisation. Le choix de l'amplitude du piédestal normalisée par rapport à la valeur centrale de la fonction propre a l'avantage de fournir une expression simple du spectre.

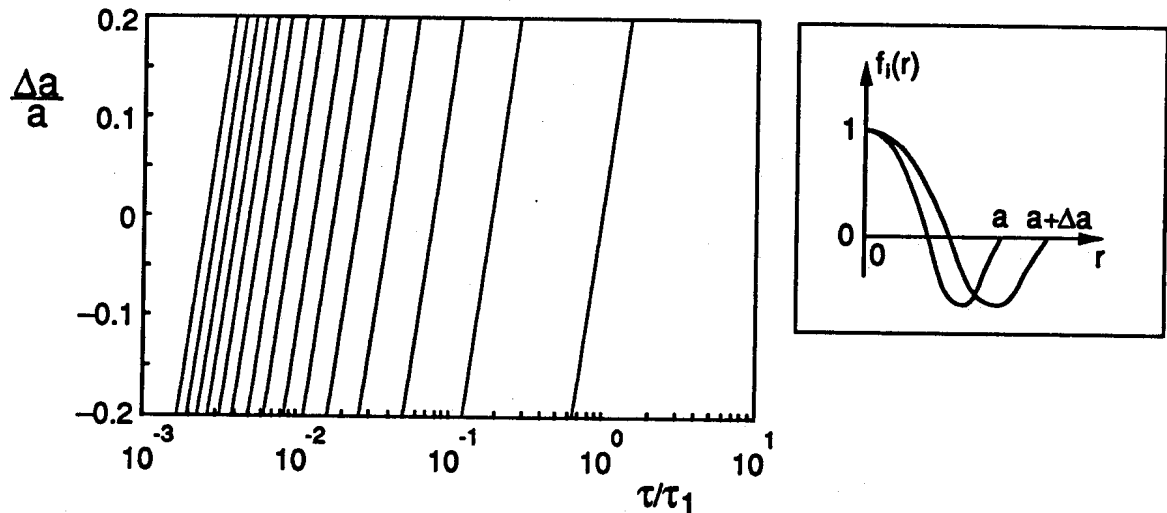


Fig. 32 Effet de la variation du petit rayon du plasma sur le spectre d'un opérateur diffusif. L'abscisse a été normalisée par rapport à la valeur de la constante de temps la plus élevée, à petit rayon fixe.

Nous définissons donc

$$\delta = \frac{f_i(r=a)}{f_i(r=0)} \quad (7.2)$$

ce qui permet d'extraire les constantes de temps de l'expression

$$J_0\left(\frac{a}{\sqrt{\tau_1 D}}\right) = \delta \quad (7.3)$$

La figure 33 montre comment évolue le spectre en fonction de l'amplitude relative du piédestal. On observe d'abord une modification de l'écart entre constantes de temps puis une disparition progressive des modes rapides à mesure que croît δ . Ce dernier résultat remet évidemment en question la validité du modèle choisi étant donné que l'ensemble des fonctions propres cesse d'être complet. Il montre néanmoins que l'existence d'un piédestal au bord du plasma peut engendrer une amélioration du temps de confinement incrémental, dans la mesure où le mode le plus lent est ralenti.

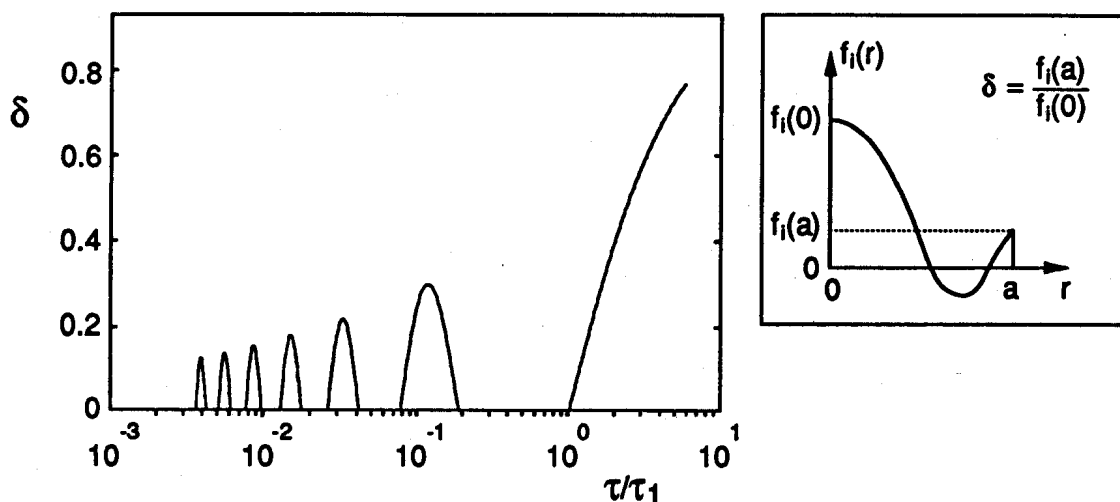


Fig. 32 Effet d'un piédestal au bord du plasma sur le spectre d'un opérateur diffusif. L'abscisse a été normalisée par rapport à la valeur de la constante de temps la plus élevée, calculée sans piédestal.

Ces deux exemples ne donnent qu'un faible aperçu du rôle joué par les conditions aux limites sur la dynamique du plasma. Ils montrent cependant qu'une légère modification du bord aura des répercussions sur le plasma entier. Ce résultat signifie qu'on ne saurait bien interpréter la réponse dynamique d'une portion du plasma sans connaître ce qui se passe en dehors de la région étudiée.

7.3 Discussion

Différents travaux ont montré la nécessité de prendre en compte les conditions au bord dans l'interprétation de la dynamique du plasma [4]. L'exemple le plus frappant du lien qui les unit est celui de la transition entre modes L et H [29,30], dans lequel une hausse du piédestal au bord du plasma va de pair avec une nette amélioration du confinement particulaire et énergétique. Plusieurs modèles ont été avancés pour reproduire l'effet de cette transition L-H. Ils s'accordent pour la plupart sur une modification locale des coefficients de transport au bord du plasma. Ces modèles reproduisent

généralement bien les états du plasma précédant et suivant la transition. La transition elle-même demeure en revanche mal comprise. Des expériences ont montré qu'elle induit une modification très rapide des caractéristiques du plasma entier, dont l'effet apparaît bien avant le réajustement des profils observé [31]. Une telle réaction instantanée de l'ensemble du plasma est difficile à comprendre lorsqu'elle est exprimée en termes de coefficients de transport locaux uniquement. L'approche classique a ici pour inconvénient de ne pas révéler clairement le lien entre un phénomène local (le bord) et un comportement global (le confinement). Diverses études ont tenté, sans succès, de mettre la main sur un paramètre clé permettant de lier les deux [32].

Pour revenir à l'approche développée jusqu'ici, représentons la transition L-H à l'aide de modes propres. Nous venons de voir qu'un changement des conditions de bord entraîne une modification du spectre et des fonctions propres du plasma. En pratique, une telle modification se traduira par un réajustement des profils stationnaires du plasma, comme si ce dernier était perturbé par un terme de source fictif situé au bord et synchrone avec la transition. Ce réajustement ne sera pas immédiat, puisqu'il est dicté par les constantes de temps du plasma; la modification du spectre sera en revanche instantanée. Autrement dit, les propriétés dynamiques de l'ensemble du plasma réagiront immédiatement au bord, avant même qu'un nouvel état d'équilibre ne soit atteint. Tout ce scénario est très proche de celui observé en pratique, montrant ainsi que la phénoménologie de la transition L-H serait simple à exprimer en termes de modes propres. En particulier, la rapidité du changement de confinement pourrait être attribuée au fait que le spectre du plasma soit directement lié aux conditions de bord. Dans cet exemple, l'utilité de la représentation en modes propres réside dans la facilité avec laquelle elle permet de paramétriser l'effet du bord sur le plasma. Notons cependant qu'elle ne nous renseigne pas directement sur les mécanismes physiques en cause, dont l'interprétation présuppose inévitablement une modélisation plus poussée.

D'autres expériences en rapport avec le bord peuvent être envisagées avec le formalisme des modes propres à l'appui : comparaison entre décharges effectuées avec différents conditionnements internes des parois du tore ou encore opération avec un diverteur. Dans chacun des cas, la connaissance des modes propres apporte un jeu de paramètres utiles pour étudier l'effet du bord sur le plasma.

7.4 Second exemple : la cohérence de profil

La cohérence de profil [33] désigne la forte réticence de certains paramètres du plasma à changer de profil quand on les perturbe, même très localement. Ce phénomène a été abondamment étudié dans le cas de la température électronique, quoique d'autres paramètres tels que la densité le mettent aussi en évidence. D'un point de vue dynamique, la cohérence de profil implique la tendance d'un profil perturbé à récupérer l'allure qu'il possède à l'équilibre en un temps nettement inférieur à celui auquel on s'attend, à savoir le temps de confinement. Cette rapidité surprenante a suscité diverses explications.

Nous allons dans ce qui suit comparer deux expressions différentes de la cohérence de profil. On considérera le profil de densité d'un plasma dans lequel a lieu un dépôt localisé de particules, suite par exemple à l'injection d'un glaçon.

L'approche classique

Différentes explications de la cohérence de profil reposent sur l'existence d'un mécanisme qui s'oppose à toute modification de l'état d'équilibre du plasma. Ceci peut par exemple impliquer la présence d'une contre-réaction qui réagit à l'injection de particules par un transport localement accru. Un tel processus de transport non linéaire peut être modélisé à l'aide d'un opérateur diffusif dont le coefficient de diffusion possède une dépendance fonctionnelle du type

$$\frac{\partial D}{\partial n} > 0 \quad (7.4)$$

Ce modèle permet effectivement de reproduire de nombreuses observations. Signalons en passant que sa dépendance fonctionnelle suscitera dans la réponse dynamique un flux convectif implicite dirigé vers le centre du plasma (cf. annexe 3). Diverses expériences ont effectivement signalé l'existence d'un tel flux lors de transitoires [21].

L'approche basée sur les modes propres

Reprenons le même exemple et décomposons la perturbation de la densité en modes propres comme cela a été fait sur TCA. Nous avons vu que le mode le plus lent possède un profil similaire à celui de la densité stationnaire. L'excitation du mode d'ordre un ne permet donc pas de modifier l'allure du

profil stationnaire. Pour déformer ce dernier, il faut nécessairement recourir à des modes d'ordre supérieur à un. Or ces modes sont rapides; les résultats de TCA ont montré que même le plus lent d'entre eux (celui du second ordre) s'évanouit en un temps caractéristique plus court que le temps de confinement incrémental. L'existence de modes propres aux constantes de temps disparates permet donc d'expliquer l'amortissement rapide de perturbations engendrées par des termes de source localisés. Ce résultat rejoint la notion de cohérence de profil et montre ainsi que l'effet de ce phénomène non linéaire peut être expliqué en termes de modes propres. La cohérence de profil sera d'autant plus forte que l'écart entre constantes de temps est grand. Nous avons vu dans §3.4 qu'une façon d'augmenter la disparité entre constantes voisines consiste à introduire un flux convectif dirigé vers l'intérieur. Or un tel flux peut tout à fait être expliqué par une dépendance fonctionnelle du coefficient de diffusion du type (7.4).

Bilan

L'approche classique présentée en premier part d'une modélisation empirique et purement locale du transport. Elle a l'avantage de fournir une description à la fois physique et détaillée du mécanisme en cause. Le modèle avancé est cependant loin d'être unique et par conséquent difficile à valider a priori. Il demande à être appliqué dans d'autres situations (en régime stationnaire, avec des perturbations différentes). La représentation en modes propres offre en comparaison une expression unique qui ne requiert pas de modélisation détaillée des mécanismes de transport et qui s'applique sans autre à un grand nombre de situations. Sa généralité et sa simplicité sont cependant compensés par un pouvoir descriptif relativement limité : les modes propres nous informent peu sur la nature des mécanismes responsables de la cohérence de profil. Ceux-ci peuvent avoir pour origine une dépendance non linéaire des coefficients de transport, comme nous l'avons vu, mais peuvent aussi provenir d'un flux convectif explicite ou de conditions de bord particulières.

7.5 Conclusion

Deux exemples pratiques ont mis en évidence les avantages et les inconvénients liés à deux approches complémentaires d'un même phénomène physique. Dans le premier exemple, il s'agissait d'établir un lien entre les caractéristiques de bord du plasma et le confinement. Ce lien est délicat à

traiter en termes de coefficients de transport. Il s'intègre en revanche de façon naturelle dans la représentation en modes propres qui permet d'associer directement le spectre aux conditions aux limites du plasma. Le second exemple a montré que la cohérence de profil peut trouver une interprétation simplifiée lorsqu'elle est exprimée à l'aide de paramètres globaux.

L'intégration dans un même formalisme de mécanismes aussi différents que le transport et les conditions de bord est un des atouts majeurs de la représentation en modes propres. Cette propriété lui permet de traiter avec plus de cohérence des phénomènes faisant intervenir plusieurs de ces mécanismes, comme par exemple la transition entre modes L et H. La représentation en termes de coefficients de transport locaux ne permet pas toujours un traitement aussi aisé, ce qui explique certaines difficultés rencontrées dans la façon classique de caractériser le confinement.

Si le formalisme des modes propres est utile pour reproduire et prédire le comportement du plasma, son pouvoir descriptif reste limité. L'approche classique permet au contraire de décrire directement les processus physiques, pour autant que ceux-ci soient connus. Nous disposons donc de deux représentations différentes de la dynamique du plasma, dont la complémentarité est un atout pour étudier le confinement du plasma.

8. Conclusion

Les progrès réalisés dans la recherche en fusion contrôlée sont incontestablement liés à une meilleure compréhension du confinement. Notre étude puise l'essentiel de sa motivation dans le contraste qui oppose l'enjeu de cette quête à la difficulté d'obtenir une description claire et cohérente des observations.

L'analyse de la réponse dynamique constitue un excellent moyen de sonder les mécanismes de transport du plasma. L'approche classique consiste à paramétriser cette réponse en partant d'une modélisation du transport. Nous avons élaboré une approche différente basée sur la décomposition de la réponse dynamique en modes propres. Celle-ci a été appliquée sur TCA à l'étude de perturbations de densité induites par l'injection de glaçons.

Trois modes propres ont suffi à reproduire entièrement la réponse dynamique du profil de densité. Ces modes sont tout à fait indépendants du profil d'ablation du glaçon et sont caractérisés par des constantes de temps très disparates, ce qui facilite leur identification. Les trois constantes de temps manifestent une dépendance selon $\tau \sim I_p^{1-3} n^0$, dans laquelle l'indifférence à l'égard de la densité peut être mis en rapport avec le comportement fortement linéaire de la densité perturbée. Les fonctions propres sont en comparaison insensibles aux conditions du plasma, ce qui suggère une invariance de la dépendance radiale du transport.

Les caractéristiques des modes propres ont clairement révélé l'existence d'un couplage entre la perturbation de la densité et celle, présumée, de la température électronique. Ce couplage lie l'évolution des deux paramètres par un même spectre, montrant ainsi qu'ils ne peuvent être traités séparément. Son intensité change peu d'une décharge à l'autre mais réagit en revanche à la présence d'activité MHD. Lorsque cette dernière devient trop importante, le couplage entre flux de particules et de chaleur change sans pour autant affecter le transport. Ce changement suffit à engendrer des pertes accrues qui expliquent la dégradation de confinement observée. De tels couplages peuvent avoir un impact important sur le confinement et requièrent une approche

synergétique si on veut améliorer les performances d'un régime à partir de conditions données.

L'extraction des modes propres à partir de données expérimentales a nécessité l'élaboration de deux méthodes d'analyse qui utilisent la notion de fonction de transfert entre signaux. L'imposition de modes propres, c'est-à-dire de constantes de temps communes aux mesures de la densité effectuées en différents endroits du plasma, est une contrainte importante qui permet d'analyser des signaux bruités. Les deux méthodes ont été appliquées avec succès à l'analyse de réponse impulsionnelle de la densité et peuvent sans autre s'étendre à des stimulations différentes, telles que de la modulation ou des sauts indicels.

L'utilité des modes propres provient d'un choix de paramètres qui représentent bien la dynamique du plasma et dont l'extraction ne conduit pas à des problèmes mal conditionnés comme c'est le cas pour les coefficients de transport. Les modes propres exploitent le lien causal qui lie l'évolution temporelle des perturbations à leur structure spatiale. Cela leur permet de réduire toute l'information temporelle en un nombre réduit de constantes de temps, facilitant ainsi l'interprétation des observations. Ils offrent en outre un formalisme qui en plus du transport, intègre des aspects du confinement tels que les conditions du bord et les réactions des termes de source. Cette approche est particulièrement apte à révéler des phénomènes qui demandent un traitement global du plasma. Nous l'avons vu dans le cas du couplage, où les modes propres ont pu apporter divers compléments d'information. Un autre exemple caractéristique est l'interaction entre les conditions de bord et le confinement. L'effet du mode H est reconnu difficile à comprendre en termes de coefficients de transport; le même phénomène se laisse plus aisément représenter par des modes propres.

Si cette nouvelle approche possède des avantages certains, elle a aussi ses limites. Elle offre une représentation compacte qui permet de prédire mais non de décrire la réponse dynamique. Son applicabilité se réduit à une représentation condensée et linéarisée du comportement du plasma autour d'un état stationnaire. Elle n'a aucun pouvoir d'extrapolation pour prédire les caractéristiques du plasma dans d'autres tokamaks et nécessite un modèle pour analyser le transport. L'extraction des coefficients de transport à partir d'un ensemble de données est aussi mal conditionné en présence de modes propres qu'avec d'autres approches. La décomposition en modes propres révèle toutefois la possibilité d'améliorer l'extraction par le choix d'expériences dans lesquelles les modes sont excités de façon sélective.

Ces résultats montrent avant tout qu'il est possible de mettre en évidence des aspects importants du confinement sans devoir passer par une modélisation du transport. Ils mettent ainsi en exergue l'utilité de disposer de différentes approches pour caractériser les multiples aspects que revêt le confinement du plasma dans un tokamak. La complémentarité de ces approches est un avantage certain pour parvenir à une meilleure compréhension des observations.

Annexe I

Les conditions expérimentales

A1.1 Le tokamak TCA

TCA est l'acronyme de "Tokamak à Chauffage par ondes d'Alfvén" [34]. C'est un tokamak de taille moyenne dont les principaux paramètres sont

grand rayon	$R = 0.61 \text{ m}$
petit rayon	$a = 0.18 \text{ m}$
champ magnétique	$B_\phi \leq 1.51 \text{ T}$
courant du plasma	$I_p \leq 170 \text{ kA}$
densité électronique moyenne	$\bar{n} < 10^{20} \text{ m}^{-3}$
durée d'une décharge	$\tau_{pl} < 300 \text{ ms}$

L'analyse de la réponse dynamique s'est effectuée dans des conditions semblables, pour lesquelles la gamme de variation des paramètres du plasma était

densité	$\bar{n} = 1 - 8 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$
courant du plasma	$I_p = 55 - 130 \text{ kA}$
champ magnétique	$B_\phi = 1.51 \text{ T}$
température électronique	$T_e = 400 - 800 \text{ eV}$
température ionique	$T_i = 200 - 350 \text{ eV}$

Pour garantir un ensemble de données aussi homogène que possible, une sélection a dû être faite parmi les quelque 1500 décharges dans lesquelles ont été injectées des glaçons. Ont été retenues celles qui se sont faites dans du deutérium, sans chauffage additionnel ni conditionnement particulier des parois du tore.

L'injecteur de glaçons dont est équipé TCA [35], permet d'injecter jusqu'à deux glaçons par décharge. Ses principales caractéristiques sont :

nature du glaçon	hydrogène solide
gamme de vitesses	200-800 m/s
tailles possibles	$3 \cdot 10^{18} - 3 \cdot 10^{19}$ particules

Le nombre de particules contenu dans le glaçon est du même ordre de grandeur que celui contenu dans le plasma. Les glaçons de taille élevée sont

par conséquent capables de modifier substantiellement les caractéristiques du plasma, pouvant même conduire à une dégradation irréversible du confinement. Ce genre de cas a évidemment été exclu de l'analyse, un des critères de sélection étant la stationnarité du courant du plasma dont la variation maximale admise est de 5%.

Le plasma de TCA est normalement alimenté en particules par l'injection de gaz au bord. La stimulation de la densité induite par la vanne de gaz ne s'analyse malheureusement pas aussi facilement que celle d'un glaçon en raison de la réponse non linéaire de la vanne qui, de surcroît, est dotée d'une hystérèse. L'absence de mesure précise du débit de gaz nous a amené à exclure l'effet de la vanne en limitant la plage d'analyse à la durée pendant laquelle le plasma ne subissait aucun apport externe de particules autre que le glaçon et le recyclage au bord. Ceci signifie que tous nos résultats ont été obtenus dans des plasmas dont la densité était non contrôlée.

A1.2 Les diagnostics

Les diagnostics utilisés font partie de l'équipement standard dont dispose tout tokamak [23]. Parmi ceux-ci, signalons la mesure de la densité électronique et celle du niveau d'activité MHD.

Mesure de la densité électronique

La densité électronique est mesurée par un interféromètre à quatre canaux opérant dans l'infrarouge lointain ($\lambda = 447 \mu\text{m}$). Les mesures sont effectuées selon quatre cordes verticales dont les positions sont, en partant du centre du tore, $x/a = -0.56, -0.11, 0.33$ et 0.89 (figure 34). La résolution temporelle de la mesure est d'environ 2 kHz, ce qui exclut malheureusement l'observation de disruptions internes.

Mesures magnétiques

La mesure de l'activité MHD est en réalité une mesure de l'amplitude de la composante poloidale \tilde{b}_θ des fluctuations du champ magnétique, qui est filtrée pour ne laisser passer que les fréquences situées entre 7 et 20 kHz. Cette plage de fréquence donne accès aux oscillations Mirnov qui sont une des

principales instabilités macroscopiques rencontrées dans TCA.

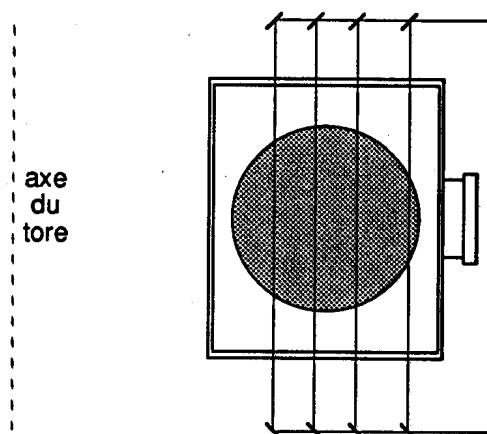


Fig. 34 Section verticale du tore illustrant la position des cordes de visée de l'interféromètre FIR par rapport au plasma.

A1.3 Reconstitution du profil de la densité

La densité mesurée par interférométrie est en réalité la densité intégrée le long de la corde de visée, figure 35, qui peut s'exprimer comme [23]

$$\bar{n}(x) = 2 \int_x^a \frac{r n(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr \quad (\text{A1.1})$$

Pour accéder à sa valeur locale, une transformation est nécessaire, qui est communément appelée inversion d'Abel

$$n(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^a \frac{d\bar{n}(x)}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx \quad (\text{A1.2})$$

La reconstitution du profil radial est, comme toute déconvolution, sensible aux erreurs de mesure. L'inversion d'Abel doit par conséquent être utilisée avec beaucoup de retenue. Dans notre cas, il est exclu d'obtenir une mesure locale précise de la densité à partir quatre cordes seulement.

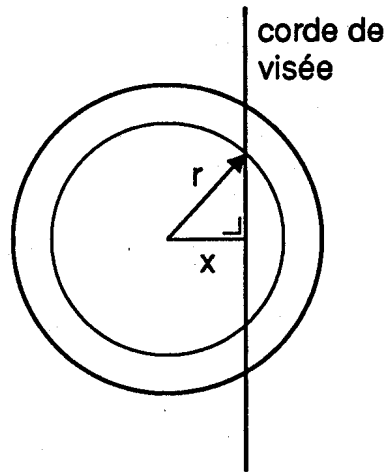


Fig. 35 Section verticale du plasma illustrant la géométrie de la mesure de la densité électronique.

La procédure d'inversion (A1.2) a cependant l'avantage d'être linéaire. Cela signifie que l'ordre d'exécution peut être permuté sans autre avec d'autres opérations linéaires. Sachant que la décomposition en modes propres est elle aussi linéaire, nous avons analysé les données brutes directement sans reconstruire le profil de la densité. Par conséquent, tous nos résultats sont exclusivement basés sur des mesures intégrées et non locales de la densité. Ceci n'affecte nullement les conclusions qui en sont tirées. Pour faire la distinction entre les deux représentations du profil, nous utilisons la coordonnée r pour le signal reconstitué $n(r)$ et x pour le signal intégré le long d'une corde $\bar{n}(x)$.

Annexe II

Origine des équations macroscopiques

La modélisation du transport local dans le plasma débute généralement par une description statistique des moments de l'équation de Boltzmann. C'est ainsi que sont dérivées les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) qui fournissent les équations macroscopiques. Cette dérivation a déjà été abondamment traitée [5,23] et nous nous concentrerons plus sur la signification des termes rencontrés que sur leur obtention.

A2.1 Les équations de la MHD

Partons d'une description du plasma à l'aide de sa fonction de distribution $f(r,v,t)$. Celle-ci permet de définir la moyenne d'une variable $g(r,v,t)$ de la manière suivante

$$\langle g \rangle(r,t) = \frac{\int g(r,v,t) f(r,v,t) dv}{\int f(r,v,t) dv} \quad (\text{A2.1})$$

avec la définition de la densité de particules

$$n(r,t) = \int f(r,v,t) dv \quad (\text{A2.2})$$

En multipliant la relation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_r f + \frac{F}{m} \nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (\text{A2.3})$$

par g et en moyennant sur l'espace des vitesses, diverses lois de conservation sont obtenues suivant la fonction attribuée à g . Le choix $g=1$ fournit l'équation de continuité

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = S \quad (\text{A2.4})$$

alors que pour la densité d'énergie, il vient

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \nabla \cdot (p \frac{\Gamma}{n}) + nT \nabla \cdot (\frac{\Gamma}{n}) + \Pi : \nabla \cdot \frac{\Gamma}{n} + \nabla \cdot q = Q \quad (\text{A2.5})$$

où Π est le tenseur des contraintes, q est le flux d'énergie lié au mouvement aléatoire des particules, Γ est le flux de particules et Q est la densité de puissance due aux collisions entre particules. La pression $p=nT$ est définie par la trace du tenseur Π . L'expression de ces différents termes en fonction de f donne

$$S(r,t) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} dv \quad (\text{A2.6})$$

$$Q(r,t) = \int \frac{mv^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} dv \quad (\text{A2.7})$$

$$\Gamma(r,t) = \int v f(r,v,t) dv \quad (\text{A2.8})$$

$$q(r,t) = \int \frac{mv^2}{2} v_r f(r,v,t) dv \quad (\text{A2.9})$$

où la vitesse v_r liée au mouvement aléatoire a été introduite $v \equiv \langle v \rangle(r,t) + v_r$. Jusqu'ici, nous avons uniquement imposé le fait que toute perturbation de la fonction de distribution reste lente par rapport au temps d'interaction entre particules.

A2.2 Plasma à deux composantes

Pour les besoins de notre analyse, nous décomposons ici le plasma en une population d'ions de charge Z ainsi qu'une d'électrons. Les équations (A2.4) et (A2.5) donnent pour un plasma à deux composantes, sans apport externe de particules ou d'énergie

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_e = S_e \quad (\text{A2.10})$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_i = S_i \quad (\text{A2.11})$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_e T_e) = -\nabla \cdot q_e - Q_{ie} + P_{ce} + P_{adde} + P_{\Omega} \quad (\text{A2.12})$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (n_i T_i) = -\nabla \cdot q_i + Q_{ie} + P_{ci} + P_{addi} \quad (\text{A2.13})$$

Les termes de source ou de perte sont respectivement P_{Ω} la densité de puissance ohmique, Q_{ie} le transfert de puissance entre électrons et ions et P_{add} qui regroupe différents termes tels que le rayonnement des particules et l'échange de charge. Quant à P_c , il contient toutes les pertes d'énergie liées au mouvement convectif des particules.

Les équations du bilan (A2.10) à (A2.13) constituent le point de départ de l'étude expérimentale du transport. Elles sont très générales puisqu'un minimum d'hypothèses a été émis sur la nature du transport. Autant leur généralité est un atout, autant elle en réduit l'utilité pratique. Pour fournir une image du transport, il faut maintenant exprimer les flux à partir de variables mesurables. Rappelons que les flux font intervenir la vitesse aléatoire v_r des particules. Pour calculer cette dernière, une connaissance préalable des mécanismes d'interaction entre particules est nécessaire. C'est donc ici que débute réellement la modélisation du transport étant donné qu'il faut avancer des modèles pour expliquer ces interactions.

Annexe III

Expression linéarisée du transport

La linéarisation des équations du transport de particules et de chaleur permet de reformuler celles-ci sous une forme particulièrement condensée. Derrière cette forme simple se cache cependant une phénoménologie complexe qui a plusieurs incidences importantes sur l'interprétation des résultats. Le but de cet annexe est d'en présenter quelques unes.

A3.1 L'expression linéarisée

L'expression du transport qui sert de point de départ à la linéarisation est celle obtenue dans le chapitre 2 (cf. équation (2.6))

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma &= S \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n T \right) + \nabla \cdot q &= Q \end{aligned} \tag{A3.1}$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix} \Gamma \\ q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_{nn} & D_{nT} \\ D_{Tn} & D_{TT} \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} n \\ T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{nn} & v_{nT} \\ v_{Tn} & v_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \frac{3}{2} n T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \Gamma T \end{pmatrix}$$

A cette expression s'ajoutent des dépendances fonctionnelles des coefficients de transport du type $D = D(r, n, \nabla n, T, \nabla T)$ et des termes de source $S = S(r, n, T)$. Cette expression générale peut être linéarisée en effectuant une expansion autour d'un état d'équilibre. Cela conduit à une équation longue caractérisée par 73 paramètres. En regroupant ces derniers nous obtenons une équation vectorielle

$$\mathbb{E} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} = \nabla \mathcal{D} \nabla \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} + \nabla \mathcal{V} \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} + \mathcal{A} \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{S} u_1 \\ \tilde{Q} u_2 \end{pmatrix} \tag{A3.2}$$

Les coefficients des matrices \mathcal{D} , \mathcal{V} et \mathcal{A} se répartissent en deux groupes. D'abord, il y a ceux qui résultent de l'expansion autour de l'état d'équilibre, dont l'effet apparaît uniquement lors de perturbations. Nous les appellerons

coefficients dynamiques parce qu'ils agissent uniquement sur la réponse dynamique. Ensuite viennent les termes dits statiques qui correspondent à la valeur des coefficients obtenue à l'état d'équilibre. Les coefficients statiques agissent sur le plasma à l'état stationnaire et lors de transitoires. La distinction entre ces deux types de coefficients est illustrée par la figure 36, qui montre une expression du flux de particules dans laquelle le coefficient de diffusion dépend du gradient de la densité.

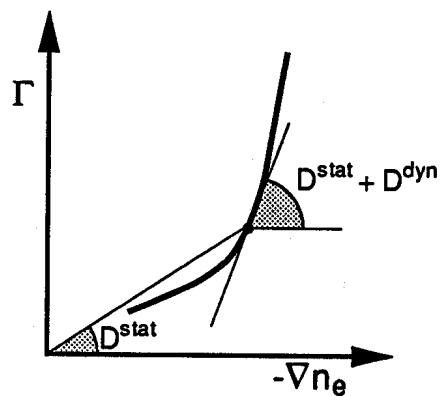


Fig. 36 Effet d'une dépendance fonctionnelle dans le coefficient de diffusion sur le flux de particules qui en résulte.

La séparation des coefficients en termes dynamiques et statiques entraîne

$$\begin{aligned} D &= D^{\text{stat}} + D^{\text{dyn}} \\ V &= V^{\text{stat}} + V^{\text{dyn}} \\ A &= A^{\text{stat}} + A^{\text{dyn}} \end{aligned} \tag{A3.3}$$

sachant qu'à l'équilibre, les bilans de particules et de l'énergie sont uniquement déterminés par les termes statiques. L'expression détaillée de ces matrices donne

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2}T_0 & \frac{3}{2}n_0 \end{pmatrix} \tag{A3.4}$$

$$\begin{aligned}
D_{11}^{\text{stat}} &= D_{nn} \\
D_{12}^{\text{stat}} &= D_{nT} \\
D_{21}^{\text{stat}} &= D_{Tn} + \gamma D_{nn} T_0 \\
D_{22}^{\text{stat}} &= D_{TT} + \gamma D_{nT} T_0
\end{aligned} \tag{A3.5}$$

$$\begin{aligned}
D_{11}^{\text{dyn}} &= \frac{\partial D_{nn}}{\partial \nabla n} \nabla n_0 + \frac{\partial D_{nT}}{\partial \nabla n} \nabla T_0 + \frac{\partial v_{nn}}{\partial \nabla n} n_0 + \frac{\partial v_{nT}}{\partial \nabla n} \frac{3}{2} n_0 T_0 \\
D_{12}^{\text{dyn}} &= \frac{\partial D_{nn}}{\partial \nabla T} \nabla n_0 + \frac{\partial D_{nT}}{\partial \nabla T} \nabla T_0 + \frac{\partial v_{nn}}{\partial \nabla T} n_0 + \frac{\partial v_{nT}}{\partial \nabla T} \frac{3}{2} n_0 T_0 \\
D_{21}^{\text{dyn}} &= \frac{\partial D_{Tn}}{\partial \nabla n} \nabla n_0 + \frac{\partial D_{TT}}{\partial \nabla n} \nabla T_0 + \frac{\partial v_{Tn}}{\partial \nabla n} n_0 + \frac{\partial v_{TT}}{\partial \nabla n} \frac{3}{2} n_0 T_0 + \gamma T_0 D_{11}^{\text{dyn}} \\
D_{22}^{\text{dyn}} &= \frac{\partial D_{Tn}}{\partial \nabla T} \nabla n_0 + \frac{\partial D_{TT}}{\partial \nabla T} \nabla T_0 + \frac{\partial v_{Tn}}{\partial \nabla T} n_0 + \frac{\partial v_{TT}}{\partial \nabla T} \frac{3}{2} n_0 T_0 + \gamma T_0 D_{12}^{\text{dyn}}
\end{aligned} \tag{A3.6}$$

$$\begin{aligned}
V_{11}^{\text{stat}} &= v_{nn} + v_{nT} \frac{3}{2} T_0 \\
V_{12}^{\text{stat}} &= v_{nT} \frac{3}{2} n_0 \\
V_{21}^{\text{stat}} &= v_{Tn} + v_{TT} \frac{3}{2} T_0 + \gamma v_{nn} T_0 + \gamma v_{nT} \frac{3}{2} T_0^2 \\
V_{22}^{\text{stat}} &= v_{TT} \frac{3}{2} n_0 + \gamma v_{nT} \frac{3}{2} n_0 T_0 + D_{nn} \nabla n_0 + D_{nT} \nabla T_0 + v_{nn} n_0 + v_{nT} T_0
\end{aligned} \tag{A3.7}$$

$$\begin{aligned}
V_{11}^{\text{dyn}} &= \frac{\partial v_{nn}}{\partial n} n_0 + \frac{\partial v_{nT}}{\partial n} \frac{3}{2} n_0 T_0 + \frac{\partial D_{nn}}{\partial n} \nabla n_0 + \frac{\partial D_{nT}}{\partial n} \nabla T_0 \\
V_{12}^{\text{dyn}} &= \frac{\partial v_{nn}}{\partial T} n_0 + \frac{\partial v_{nT}}{\partial T} \frac{3}{2} n_0 T_0 + \frac{\partial D_{nn}}{\partial T} \nabla n_0 + \frac{\partial D_{nT}}{\partial T} \nabla T_0 \\
V_{21}^{\text{dyn}} &= \frac{\partial v_{Tn}}{\partial n} n_0 + \frac{\partial v_{TT}}{\partial n} \frac{3}{2} n_0 T_0 + \frac{\partial D_{Tn}}{\partial n} \nabla n_0 + \frac{\partial D_{TT}}{\partial n} \nabla T_0 + \gamma T_0 V_{11}^{\text{dyn}} \\
V_{22}^{\text{dyn}} &= \frac{\partial v_{Tn}}{\partial T} n_0 + \frac{\partial v_{TT}}{\partial T} \frac{3}{2} n_0 T_0 + \frac{\partial D_{Tn}}{\partial T} \nabla n_0 + \frac{\partial D_{TT}}{\partial T} \nabla T_0 + \gamma T_0 V_{12}^{\text{dyn}}
\end{aligned} \tag{A3.8}$$

$$A^{\text{dyn}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial n} & \frac{\partial S}{\partial T} \\ \frac{\partial Q}{\partial n} & \frac{\partial Q}{\partial T} \end{pmatrix} \quad A^{\text{stat}} = 0 \tag{A3.9}$$

A3.2 Implications

L'expression détaillée des matrices de transport fait apparaître plusieurs résultats intéressants.

Différence entre état perturbé et état d'équilibre

Si les coefficients de transport et les termes de source possèdent réellement une dépendance fonctionnelle telle que l'avons introduite, il doit apparaître une différence entre les coefficients qui déterminent l'état d'équilibre et ceux qui régissent la dynamique du plasma. Une mesure du bilan d'énergie ou de particules révélera uniquement les termes statiques. Une mesure de la réponse dynamique fera apparaître en plus les termes dynamiques dont la valeur peut fortement différer des premiers.

Diverses expériences ont effectivement montré que les coefficients mesurés dans les deux cas ne sont pas forcément les mêmes [34]. Plusieurs auteurs ont invoqué l'existence de dépendances fonctionnelles pour expliquer ces résultats. Dans beaucoup de cas, une augmentation de la diffusion est observée lors de transitoires [3], ce qui impliquerait $D^{\text{dyn}} > 0$. Il existe cependant des contre-exemples, notamment sur Tore Supra où la diffusion de chaleur lors d'injection de glaçons serait caractérisée par $D^{\text{dyn}} \cong -D^{\text{stat}}$ [12].

Apparition de nouveaux mécanismes de transport

L'existence de dépendances fonctionnelles dans les coefficients de transport génère dans notre modèle linéarisé des coefficients à des emplacements inhabituels. Considérons par exemple le cas d'un flux de particules purement diffusif $\Gamma = -D \nabla n$ dont le coefficient possède la dépendance $D=D(n)$. L'expression (A3.8) nous révèle qu'une telle dépendance induit dans la réponse dynamique de la densité un terme convectif dont rien auparavant ne trahissait l'existence. L'observation d'un comportement convectif dans la dynamique du plasma n'implique donc pas forcément l'existence formelle de convection dans l'expression des flux (A3.1). Autrement dit, elle ne permet pas de conclure que le flux de particules soit toujours régi par une équation du type $\Gamma = -D \nabla n - v n$.

Cet exemple montre une nuance importante entre les analyses statiques et dynamique du confinement. Diverses expériences ont révélé des flux convectifs

de particules et d'énergie dont la valeur anormalement élevée était uniquement observée lors de transitoires. Ces résultats ont conduit plusieurs auteurs à inclure un terme convectif explicite dans leur expression du flux [6,37], comme nous l'avons fait plus haut. Cela leur permettait de réconcilier les observations avec un modèle de transport raisonnablement simple. Ce même modèle ne permettait toutefois pas d'expliquer l'absence quasi totale de convection dans l'expression du bilan stationnaire. Grâce à notre formalisme, cette contradiction apparente peut être résolue en incluant une dépendance fonctionnelle dans les coefficients de transport.

Apparition de couplages

Deux variables perturbées interagissent dès qu'apparaît un terme hors diagonal dans une des matrices de l'équation (A3.2). Nous avons déjà introduit explicitement un terme de couplage dans l'expression des flux de particules et de chaleur (A3.1). La présence de dépendances fonctionnelles engendre elle aussi une interaction que nous qualifierons de couplage implicite, étant donné qu'elle n'apparaît pas dans l'expression (A3.1). Ce type d'interaction agit uniquement lors de transitoires alors que le couplage explicite intervient tant à l'état d'équilibre qu'en régime perturbé.

Une des conséquences directes du couplage, qu'il soit implicite ou explicite, est la présence d'un lien entre l'évolution temporelle de la densité et celle de la température. Ces deux variables ne sont plus des modes propres de la matrice de transport, dans le sens où il n'est pas possible de les perturber et de les analyser séparément. Ceci a pour conséquence l'impossibilité de caractériser univoquement le transport de particules ou de chaleur sans la mesure simultanée des deux quantités. L'existence d'une telle contrainte n'a été suggérée [38,39] puis démontrée [12,25] que récemment. La présence de couplages à l'équilibre n'a pas encore été clairement révélée.

Implications sur le confinement

L'existence de dépendances fonctionnelles dans les coefficients de transport a aussi pour conséquence un asservissement des mécanismes de transport à la taille des perturbations engendrées. Le plasma se comporte donc comme un système non linéaire, ce qui a une implication directe sur le temps de confinement incrémental τ_{inc} . Ce paramètre, défini dans §3.5, sert à quantifier la capacité de rétention en particules ou en énergie du plasma pour une stimulation donnée. Si le plasma est purement linéaire, τ_{inc} ne doit pas dépendre de l'amplitude du terme de source. Considérons l'expression du

temps de confinement incrémental pour un modèle diffusif simple dont le coefficient possède la dépendance fonctionnelle suivante

$$D \sim y^\alpha |\nabla y|^\beta \quad (\text{A3.10})$$

On aboutit alors à une expression qui dépend du terme de source selon

$$\tau \sim \tilde{S}^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma = -\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \quad (\text{A3.11})$$

Pour un plasma linéaire $\alpha=\beta=0$ et le temps de confinement est effectivement constant. De nombreuses observations confèrent cependant une valeur négative à γ . Citons par exemple un résultat obtenu sur TFTR pour le transport de chaleur, où deux mesures indépendantes ont fourni $\alpha=1.5-2.5$, $\beta=0$ et $\gamma=-0.6$ [40].

Ces quelques exemples montrent qu'une dépendance fonctionnelle des coefficients de transport peut considérablement modifier l'interprétation de la dynamique du plasma. Divers résultats expérimentaux semblent confirmer la validité du modèle linéarisé utilisé ici. Un des avantages de la représentation en modes propres est d'inclure les dépendances fonctionnelles de façon naturelle sans avoir à spécifier explicitement leur provenance.

Annexe IV

Techniques d'analyse

L'extraction de modes propres nécessite la mise en oeuvre de techniques d'analyse de la réponse dynamique. Il en existe toute une variété, mais peu d'entre elles sont bien adaptées aux problèmes rencontrés dans l'analyse de la réponse dynamique du plasma. Pour les besoins de notre étude, nous avons développé deux techniques complémentaires. Il s'agit de l'identification de la fonction de transfert et de l'ajustement de fractions partielles. Les deux ont été appliquées avec succès à l'analyse de la réponse impulsionnelle du profil de densité.

Le premier paragraphe introduit la méthode d'analyse de la fonction de transfert en recourant aux transformations de Laplace et en z . La mise en oeuvre de cette méthode est présentée dans le second paragraphe. Le troisième paragraphe aborde l'autre méthode qui est basée sur l'ajustement de fractions partielles. Il est suivi d'une discussion de divers aspects pratiques tels que la validation d'un modèle, le choix du nombre de modes propres à ajuster etc. Le paragraphe 5 conclut cet annexe en présentant une approche tout à fait différente, la représentation dans l'espace d'état. Une partie de ce qui suit a déjà été traité dans [41] si bien que l'accent sera davantage mis sur des aspects spécifiques aux expériences réalisées sur TCA.

A4.1 Analyse par identification de la fonction de transfert

L'analyse de la réponse dynamique du plasma a montré que la réponse dynamique de la densité et de la température peut se mettre sous la forme d'une série de Laurent en la variable de Laplace

$$y(s) = \sum_i \frac{c_i u(s)}{s - p_i} \quad (\text{A4.1})$$

Il s'agit maintenant de tirer profit des propriétés de cette solution pour en extraire les paramètres qui nous intéressent, à savoir les résidus c_i et les pôles p_i . Pour faire le lien entre cette solution et les données expérimentales, nous

partirons d'un cas général qui permettra de jeter un regard plus large sur l'équation (A4.1). Dans un deuxième temps, le lien sera fait avec la transformée en z , qui tient compte de la nature échantillonnée des signaux.

Un grand nombre de systèmes physiques sont bien décrits par une équation différentielle du type

$$\alpha_0 y + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + \alpha_N \frac{d^N y}{dt^N} = \beta_0 u + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \dots + \beta_M \frac{d^M u}{dt^M} \quad (\text{A4.2})$$

où $u(t)$ est la stimulation et $y(t)$ est le signal perturbé. Les trois restrictions liées à ce type de représentation sont la linéarité, la causalité et l'invariance des coefficients par rapport au temps. La résolution de cette équation est simplifiée si nous en prenons la transformée de Laplace, ce qui donne

$$\alpha_0 y + \alpha_1 s y + \alpha_2 s^2 y + \dots + \alpha_N s^N y = \beta_0 u + \beta_1 s u + \beta_2 s^2 u + \dots + \beta_M s^M u \quad (\text{A4.3})$$

Ceci mène à la notion de fonction de transfert liant la sortie y à l'entrée u

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^N \alpha_i s^i} \quad (\text{A4.4})$$

Cette fonction de transfert détermine entièrement le comportement dynamique du système car elle exprime $y(t)$ en fonction de $u(t)$. On peut la factoriser, ce qui donne

$$H(s) = G \frac{\prod_{i=1}^M (s - q_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} \quad (\text{A4.5})$$

Les q_i et p_i sont appelés respectivement zéros et pôles de la fonction de transfert. Les seconds caractérisent le comportement interne du système alors que les premiers déterminent comment le système réagit à une stimulation externe. Pour être physique, ce système doit satisfaire $N > M$, ce qui permet de décomposer (A4.5) en une série de fractions partielles

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{s - p_i} \quad (\text{A4.6})$$

Nous avons supposé ici que les pôles sont tous distincts, ce qui allégera la notation sans poser de restrictions. On remarquera que cette expression de la

fonction de transfert et celle de la réponse dynamique du plasma (A4.1) sont identiques

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{s - p_i} \leftrightarrow y(s) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i u(s)}{s - p_i} \quad (\text{A4.7})$$

Cela signifie que la solution cherchée se place dans un contexte beaucoup plus général. Le fait d'avoir trouvé plusieurs différentes expressions nous permet de choisir celle qui convient le mieux aux données expérimentales. En principe, chacune des expressions (A4.2 - A4.6) peut être ajustée aux données. Malheureusement, aucune d'elles ne tient compte de la nature discrète des signaux utilisés.

Comme les signaux expérimentaux que nous utilisons sont forcément échantillonnés et non continus, nous introduisons la transformée en z , qui est au cas discret ce que la transformation de Laplace est au cas continu. La transformation en z est abondamment utilisée dans le traitement numérique du signal [42]. En comparaison avec la transformation de Laplace, elle est définie par

$$\begin{array}{ll} \text{Transformation} & \mathcal{L}[y(t)] = y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt \\ \text{de Laplace} & \\ \text{Transformation} & Z[y(k)] = y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \\ \text{en } z & \end{array} \quad (\text{A4.8})$$

Les deux expressions sont liées par la relation

$$y(s) = y(z \equiv e^{sT}) \quad (\text{A4.9})$$

où T est la période d'échantillonnage du signal. La transformation en z a l'avantage de fournir une expression simple du retard

$$Z[y(k-n)] = z^{-n} Z[y(k)] \quad (\text{A4.10})$$

qui est fréquemment transcrite de la façon suivante

$$y(k-n) = z^{-n} y(k) \quad (\text{A4.11})$$

La réponse dynamique d'un système échantillonné peut s'exprimer à l'aide d'une fonction de transfert de façon tout à fait analogue à celle d'un système continu

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^i}{\sum_{i=0}^N a_i z^i} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (\text{A4.12})$$

qui se décompose elle aussi en une série de fractions partielles

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{1 - z_{\infty,i} z^{-1}} \quad (\text{A4.13})$$

Différentes transformations permettent de passer du cas discret au cas continu. Parmi celles-ci, la transformation d'invariance impulsionnelle fait le lien entre les pôles et les résidus

$$\begin{aligned} z_{\infty,i} &\leftrightarrow e^{p_i T} \\ r_i &\leftrightarrow c_i^* \end{aligned} \quad (\text{A4.14})$$

Cette transformation est exacte pour la plupart des signaux utilisés dans l'analyse de la réponse dynamique, à savoir les impulsions, les sauts indicels, les modulations harmoniques et en créneaux. Son atout est de fournir les paramètres physiques qui nous intéressent directement à partir de la fonction de transfert obtenue pour les signaux échantillonnés, sans devoir passer cette dernière dans l'espace de Laplace.

Le calcul des pôles et des résidus de la fonction de transfert se réduit à la résolution de problèmes linéaires ou bien conditionnés. En développant (A4.12), il vient

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_N y(k-N) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_M u(k-M) \quad (\text{A4.15})$$

ce qui peut être mis sous la forme d'une relation récurrente

$$y(k) = \sum_{i=0}^M b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i) \quad (\text{A4.16})$$

pour laquelle la condition de normalisation $a_0=1$ a été utilisée. Chacun des coefficients a_i et b_i peut être calculé pour autant que les valeurs instantanées et au moins N valeurs passées des signaux soient disponibles. Une fois que les coefficients sont connus, on décompose la fonction de transfert en fractions partielles pour en déduire les pôles et les résidus selon (A4.14).

Signalons enfin qu'il est possible de représenter la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel pour obtenir des diagrammes de Bode, en utilisant la relation

$$z = e^{j\omega T} \quad (\text{A4.17})$$

A4.2 Procédure d'identification de la fonction de transfert

Un modèle mathématique, la fonction de transfert $H(z)$, a été élaboré pour représenter la réponse dynamique. Il s'agit maintenant de déterminer comment ajuster ce modèle aux données expérimentales. Il existe un vaste éventail de méthodes capables de traiter un tel problème [43]. Le choix d'un modèle optimal part toujours d'une minimisation des écarts entre la réponse vraie $y(k)$ et l'estimation de la réponse $\hat{y}(k)$ fournie par le modèle. Ces écarts valent

$$\begin{aligned} e(k) &= y(k) - \hat{y}(k) \\ &= y(k) - H(z) u(k) \\ &= y(k) - (B(z) u(k) + (1-A(z)) \hat{y}(k)) \end{aligned} \quad (\text{A4.18})$$

Le meilleur modèle est généralement choisi en ajustant les coefficients des polynômes $A(z)$ et $B(z)$ jusqu'à minimiser l'écart quadratique moyen, aussi appelé fonction de coût, défini comme

$$J = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^2(k) \quad (\text{A4.19})$$

où K est le nombre d'échantillons utilisés. L'écart $e(k)$ ne s'exprime malheureusement pas comme une fonction linéaire des coefficients des polynômes, ce qui rend la minimisation difficile. On peut toutefois en modifier légèrement la définition en posant

$$e'(k) = y(k) - (B(z) u(k) + (1-A(z)) y(k)) \quad (\text{A4.20})$$

Dans ce cas, la forme quadratique devient facile à minimiser. Le modèle correspondant porte le nom de modèle ARX ou série-parallèle. On peut montrer que ses coefficients s'obtiennent en résolvant le système linéaire généralement surdéterminé

$$\begin{pmatrix} \sum u(k)^2 & \sum u(k)u(k-1) & \dots & \sum u(k)u(k-M) & \sum u(k)y(k-1) & \dots & \sum u(k)y(k-N) \\ \sum u(k-1)u(k) & \sum u(k-1)^2 & \dots & \sum u(k-1)u(k-M) & \sum u(k-1)y(k-1) & \dots & \sum u(k-1)y(k-N) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum u(k-N)u(k) & \sum u(k-N)u(k-1) & \dots & \sum u(k-N)u(k-M) & \sum u(k-N)y(k-1) & \dots & \sum u(k-N)y(k-N) \\ \sum y(k-1)u(k) & \sum y(k-1)u(k-1) & \dots & \sum y(k-1)u(k-M) & \sum y(k-1)^2 & \dots & \sum y(k-1)y(k-N) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum y(k-N)u(k) & \sum y(k-N)u(k-1) & \dots & \sum y(k-N)u(k-M) & \sum y(k-N)y(k-1) & \dots & \sum y(k-N)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum u(k)y(k) \\ \sum u(k-1)y(k) \\ \vdots \\ \sum u(k-M)y(k) \\ \sum y(k-1)y(k) \\ \vdots \\ \sum y(k-N)y(k) \end{pmatrix}$$

(A4.21)

Le modèle ARX est souvent utilisé en raison de sa simplicité. Il pour inconvénient de fournir des résultats qui sont sensibles à la présence de bruit. On remarquera en effet que les estimateurs sont biaisés, puisque la minimisation ne se fait pas sur l'écart vrai mais sur sa valeur filtrée

$$e'(k) = A(z) e(k) \quad (\text{A4.22})$$

Pour remédier à ce problème, il existe une variante itérative du modèle. Celle-ci part du fait que la connaissance préalable d'un polynôme $F(z) \equiv A^{-1}(z)$ permet de préfiltrer les écarts et de s'affranchir ainsi partiellement du biais

$$F(z) e'(k) = F(z) A(z) e(k) \equiv e(k) \quad (\text{A4.23})$$

La première estimation du polynôme $F(z)$ est tirée de la solution fournie par le modèle ARX. Les données sont ensuite filtrées par $F(z)$ puis réutilisées pour obtenir une nouvelle estimation. A chaque itération, de nouveaux polynômes $A(z)$ et $B(z)$ sont obtenus, qui convergent d'autant plus rapidement vers une solution que les données sont bien reproduites par le modèle. La solution ainsi obtenue est nettement moins sensible au bruit et aux erreurs de modélisation que celle fournie par le modèle ARX. Cette méthode, dite de Steiglitz-McBride a été appliquée à l'analyse de la réponse dynamique du plasma sur Tore Supra [41]. Malgré ses bonnes propriétés de convergence, elle ne garantit pas toujours la minimisation de la fonction de coût J . Pour affiner la recherche du minimum, nous recourons à une descente le long du gradient de J en utilisant une méthode de Gauss-Newton. Cette dernière converge d'autant plus rapidement qu'on lui fournit des conditions initiales proches du minimum.

Chacune des trois méthodes précitées comprend la résolution d'une série de systèmes linéaires, ce qui facilite considérablement l'extraction des modes propres. De plus, le formalisme et les outils mathématiques nécessaires sont désormais bien établis [43]. En pratique, on commencera toujours par le modèle ARX, suivi d'un nombre restreint d'itérations permettant de réduire l'écart quadratique moyen. La fin de la convergence est ensuite assurée par quelques itérations de la méthode de Gauss-Newton. La figure 37 illustre ces

trois étapes pour un cas expérimental. Dans cet exemple, quatre itérations suffisent déjà à obtenir la valeur quasi définitive des pôles de la fonction de transfert.

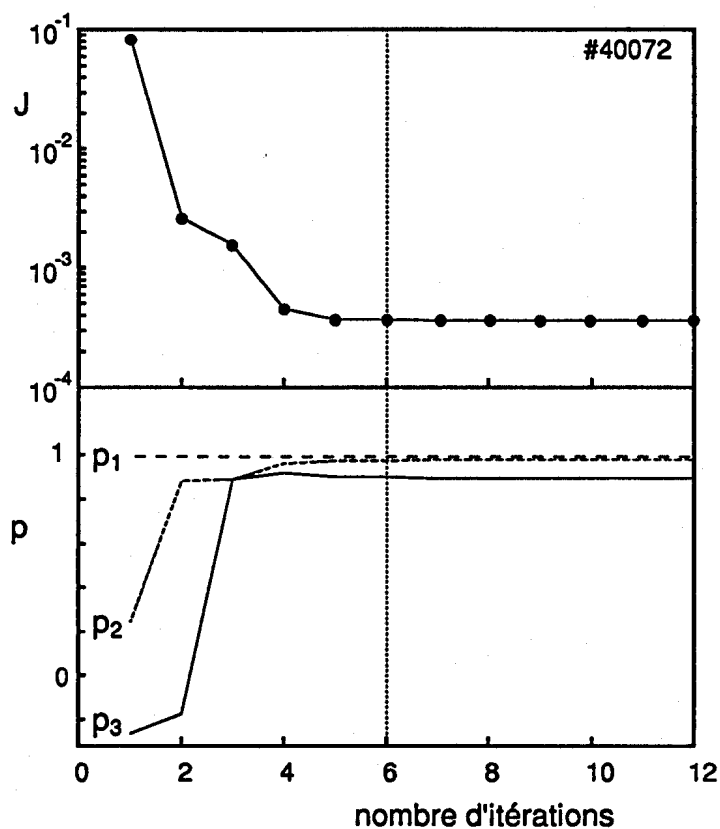


Fig. 37 Illustration de la convergence dans la recherche de modes propres. La figure du haut montre la réduction progressive de la fonction de coût; celle du bas indique la convergence des pôles. La première estimation est obtenue par la méthode ARX; dès la sixième itération, la convergence est effectuée par une méthode de Gauss-Newton (# 40072)

Tout ce qui précède concerne uniquement le cas à une entrée et à une sortie, mais la généralisation au cas multivariable se fait sans grandes modifications. Il suffit de convertir les polynômes en z en des matrices de polynômes

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}(z) & \cdots & A_{1,ny}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{ny,1}(z) & \cdots & A_{ny,ny}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_{ny}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1}(z) & \cdots & B_{1,nu}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{ny,1}(z) & \cdots & B_{ny,nu}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_{nu}(k) \end{pmatrix} \quad (\text{A4.24})$$

Ce système très général ne tient pas du tout compte de l'existence de modes propres. Nous pouvons réduire le nombre de degrés de liberté sachant que les sorties y_i se partagent les mêmes constantes de temps, c'est-à-dire les mêmes pôles. La matrice A peut par conséquent être réduite à un seul et unique polynôme. Le système à résoudre devient alors

$$A(z) \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_{ny}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1}(z) & \cdots & B_{1,nu}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{ny,1}(z) & \cdots & B_{ny,nu}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_{nu}(k) \end{pmatrix} \quad (\text{A4.25})$$

Cette simplification a un effet très bénéfique sur l'analyse de signaux expérimentaux car l'imposition de pôles communs réduit considérablement la variance des estimateurs.

L'identification de la fonction de transfert permet donc d'établir un lien entre plusieurs signaux même si ceux-ci sont affectés par du bruit. Parmi les avantages de cette approche, signalons :

- elle est bien adaptée à la structure du problème de décomposition en modes propres;
- aucune restriction n'est imposée sur la forme des signaux, qui peut être arbitraire;
- la modélisation du système étudié se fait avec un minimum de paramètres, ce qui est favorable du point de vue statistique;
- la méthode fournit directement les paramètres physiques du système que sont les pôles et les résidus, c'est-à-dire les constantes de temps et les fonction propres.

L'approche est particulièrement utile lorsqu'il n'existe aucune connaissance préalable du système à analyser. On remarquera cependant que les problèmes à résoudre, tout en étant linéaires, peuvent prendre des dimensions importantes. Pour un modèle du Nième ordre appliqué à ny sorties et nu entrées de K échantillons chacune, le système à résoudre à chaque itération (A4.21) comprendra $N(1+nu-ny)$ inconnues et $K \cdot ny$ équations. Bien que cette résolution fasse intervenir des matrices éparées, la taille du système peut devenir excessivement grande lorsque plusieurs excitations sont analysées simultanément. Pour y remédier, une autre méthode d'analyse a été utilisée conjointement avec celle-ci.

A4.3 Analyse par ajustement de fractions partielles

Cette méthode consiste littéralement à ajuster aux données la solution de la réponse dynamique, exprimée sous la forme d'une série de fractions partielles

$$y(k) = \sum_{i=1}^N \frac{r_i u(k)}{1 - z_{\infty,i} z^{-1}} \quad (\text{A4.26})$$

Cet ajustement se fait en deux temps. D'abord, les signaux d'entrée sont filtrés successivement par chacune des fractions partielles. Pour un système à une entrée et à une sortie, cela donne N signaux

$$u_i(k) = \frac{1}{1 - z_{\infty,i} z^{-1}} u(k) \quad (\text{A4.27})$$

dont la combinaison linéaire fournit la sortie

$$y(k) = \sum_{i=1}^N r_i u_i(k) \quad (\text{A4.28})$$

Un algorithme de minimisation de la fonction de coût est ensuite utilisé pour améliorer à chaque itération la valeur des pôles $z_{\infty,i}$ alors que les résidus r_i sont obtenus en résolvant le système linéaire (A4.28).

Pour illustrer cette méthode, nous considérons un cas monovarié où l'entrée est une impulsion de Dirac $u(k) = \delta(k)$. Dans ce cas, chaque signal filtré est assimilable à une exponentielle

$$u_i(k) = e^{-\frac{kT}{\tau_i}} \quad \text{avec} \quad \tau_i = -\frac{1}{p_i} = -\frac{T}{\ln z_{\infty,i}} \quad (\text{A4.29})$$

dont la somme constitue le signal de sortie

$$y(k) = \sum_{i=1}^N r_i e^{-\frac{kT}{\tau_i}} \quad (\text{A4.30})$$

Le problème se réduit ici simplement à l'ajustement d'une série d'exponentielles. La figure 38 illustre cette décomposition pour un signal expérimental modélisé par 3 constantes de temps ($N=3$) et excité par 3 impulsions successives ($nu=3$). L'ajustement d'une série d'exponentielles est un problème reconnu difficile; il faut par conséquent s'attendre à ce que sa généralisation soit elle aussi délicate à mettre en oeuvre.

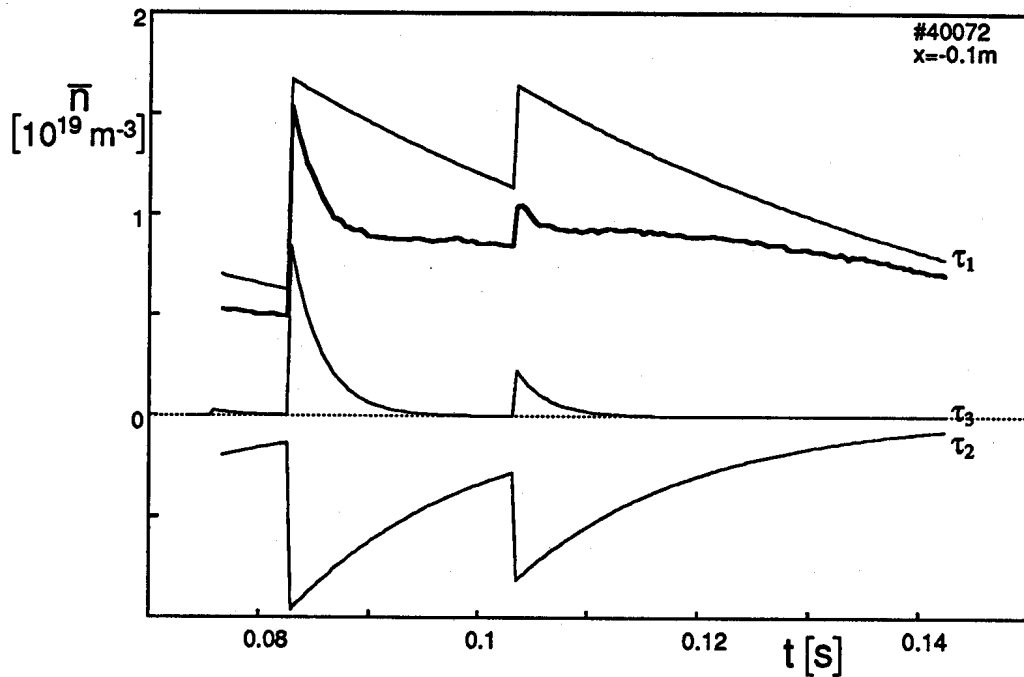


Fig. 38 Réponse impulsionnelle de la densité à l'injection de deux glaçons successifs et les trois exponentielles utilisées pour la reproduire.

Le premier obstacle est celui de la non linéarité. La recherche itérative des pôles conduit en effet à une série de problèmes non linéaires, où le choix de l'algorithme de minimisation de la fonction de coût revêt une grande importance. Notre choix s'est porté sur la méthode des gradients conjugués [44], dont la rapidité de convergence est nettement supérieure à celle des méthodes de Newton. Malgré cela, il lui faut un nombre d'itérations typiquement 5 à 20 fois supérieur à celui de la méthode d'identification de la fonction de transfert pour converger vers la solution.

Un autre défaut de la méthode est sa sensibilité à l'égard des conditions initiales. Lorsque ces dernières sont trop éloignées de la véritable solution, il arrive que la convergence aboutisse à un minimum local sans qu'on s'en aperçoive. Il est donc nécessaire a priori de disposer d'une bonne estimation de la solution.

Ces deux inconvénients sont compensés par plusieurs avantages. D'une part, les systèmes à résoudre possèdent des dimensions inférieures à ceux de la méthode précédente. L'ajustement de fractions partielles convient donc particulièrement bien à l'analyse de cas multivariables. D'autre part, les résidus sont obtenus par la résolution d'un système linéaire, ce qui permet d'imposer des contraintes sur les fonctions propres. On peut par exemple imposer des profils de fonctions propres similaires aux différentes excitations afin d'augmenter la qualité statistique des modes propres. Cela revient à choisir les mêmes résidus, à un facteur multiplicatif près, pour les différentes entrées. Une telle contrainte est très difficile à implémenter dans l'identification de la fonction de transfert, où les résidus sont des fonctions non linéaires des coefficients des polynômes en z . En revanche, elle s'insère facilement dans l'ajustement de fractions partielles.

En pratique, l'identification de la fonction de transfert et l'ajustement de fractions partielles se complètent. La première des deux est préférable en l'absence d'estimation préalable des pôles ou quand le nombre de signaux à traiter est restreint. La seconde est plus rapide lorsqu'il existe une bonne estimation des constantes de temps. Pour les décharges analysées sur TCA, nous avons généralement préféré la première méthode afin d'assurer la convergence vers un minimum absolu.

A4.4 Validation de l'analyse

Les deux méthodes décrites jusqu'ici ont été élaborées spécialement dans le but de modéliser des signaux dont les constantes de temps sont identiques. Elles nous fournissent la combinaison de valeurs qui pour le modèle choisi reproduit au mieux la réponse dynamique du plasma. On aimerait maintenant savoir si les résultats obtenus sont proches de la vraie réponse. Ceci nous amène au concept de validation, qui consiste à déterminer à posteriori l'adéquation entre le modèle utilisé et les données analysées. Dans notre cas, il s'agira essentiellement de déterminer l'ordre de modèle, c'est-à-dire le nombre de constantes de temps à ajuster. Auparavant, il faudra trouver un critère qui permet de faire une sélection parmi différents modèles.

Critères de validation

Le test de validation le plus évident consiste à comparer la réponse simulée

par un modèle \hat{y} avec la réponse vraie y . Pour quantifier cette comparaison, on recourt généralement à la fonction de coût J définie par (A4.19) ou encore au coefficient de corrélation entre \hat{y} et y . Une autre approche consiste à déterminer la distribution asymptotique des paramètres physiques issus du modèle. Les méthodes que nous avons proposées donnent accès à une estimation de l'incertitude de mesure sur les constantes de temps et les fonctions propres. Celle-ci est très utile pour juger la qualité des résultats.

Pour illustrer la sensibilité des modes propres au bruit, nous avons simulé la réponse dynamique de la densité à l'injection d'un glaçon en considérant différents niveaux de bruit blanc, figure 39.

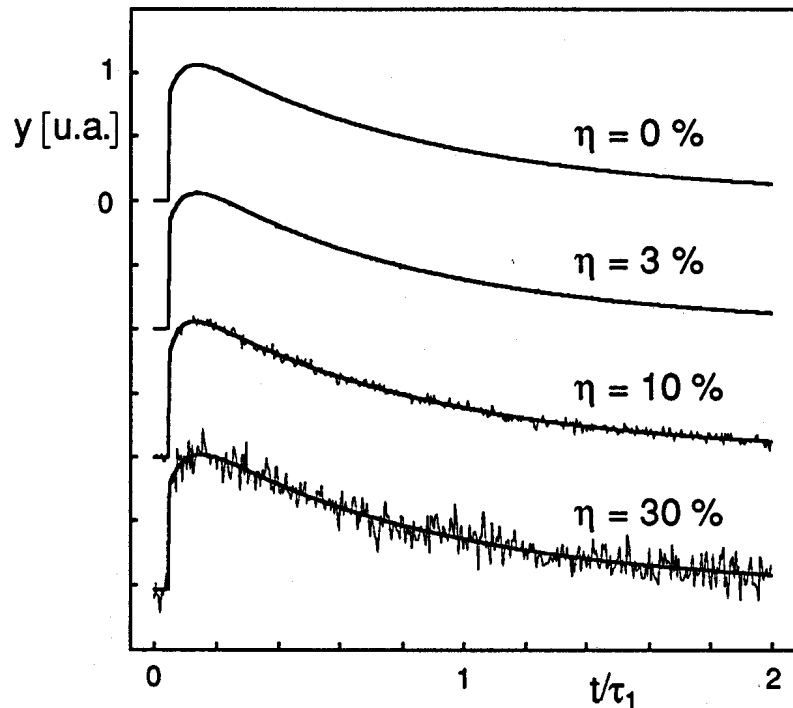


Fig. 39 Simulation de la réponse impulsionnelle d'un système du troisième ordre avec adjonction de différents niveaux de bruit blanc.

Le tableau qui suit présente la valeur des modes propres avec l'incertitude fournie par le modèle.

η %	τ_1	σ_{τ_1} %	τ_2	σ_{τ_2} %	τ_3	σ_{τ_3} %	J	ρ
0	40.0	0	20.0	0	2.00	0	0	1.0000
3	38.0	5	16.5	23	2.00	4	0.001	0.9996
10	301.4	>100	31.4	14	1.58	10	0.01	0.9958
30	32.5	6	5.5	>100	2.43	>100	0.1	0.9607
4*30	43.1	8	18.8	8	2.18	12	0.1	0.9610

η %	f_1	σ_{f_1} %	f_2	σ_{f_2} %	f_3	σ_{f_3} %
0	1.00	0	0.50	0	-0.50	0
3	1.16	10	0.35	>100	-0.51	28
10	0.05	>100	1.41	15	-0.48	71
30	1.47	7	0.14	>100	-0.65	>100
4*30	0.92	10	0.61	23	-0.52	87

Valeurs des constantes de temps τ , des fonctions propres au centre du plasma, de la fonction de coût J et du coefficient de corrélation ρ obtenus pour le système simulé dans la figure 39 avec différents niveaux η de bruit blanc. Les paramètres sont accompagnés de leur incertitude relative fournie par le modèle. La dernière ligne donne les résultats pour un cas où 4 signaux différents sont ajustés, avec des constantes de temps communes.

Le conditionnement du problème d'extraction des modes propres est clairement indiqué par la valeur des incertitudes relatives. Pour un signal non bruité, la solution est évidemment exacte et l'incertitude nulle. Il suffit de 3% de bruit blanc dans les données pour créer une incertitude non négligeable qui affecte plus particulièrement les fonctions propres. A 10%, l'extraction échoue, comme l'indique la valeur irréaliste de τ_1 . Au-delà de 10%, les résultats ne sont plus du tout fiables. Peu de bruit suffit donc à mettre en échec l'extraction des modes propres à partir d'un seul signal. Notons en passant qu'il est impossible de se faire une idée de la qualité des résultats en se basant uniquement sur des critères tels que le coefficient de corrélation ρ . Ce dernier indique un excellent ajustement des données alors que le modèle mathématique est en réalité très mal déterminé. Nous voyons qu'une connaissance de la distribution asymptotique des paramètres physiques est essentielle à la validation des résultats.

Les mêmes données ont été analysées en utilisant non plus un seul signal, mais quatre signaux différents simulés et analysés avec les mêmes constantes de temps, comme cela a été fait sur TCA. La dernière ligne du tableau fournit les résultats obtenus pour un niveau de bruit de 30%. Ces résultats montrent que

les modes propres ont pu être extraits avec une incertitude tout à fait raisonnable en dépit du niveau de bruit important. Nous voyons que l'imposition de constantes de temps communes aux quatre signaux robustifie considérablement l'analyse à l'égard des erreurs de mesure. L'obtention de résultats de si bonne qualité aurait été impensable si nous avions analysé un seul signal à la fois. Cet exemple montre combien le recours aux modes propres, c'est-à-dire à des constantes de temps communes aux différents signaux, est profitable à l'analyse de signaux expérimentaux.

Le tableau met aussi à jour un problème concernant la séparabilité des modes propres. Les deux modes lents observés sur TCA ont des constantes de temps généralement proches, ce qui rend leur extraction sensible aux erreurs de mesure. Le tableau révèle en effet des incertitudes plus élevées pour les deux premiers modes que pour le troisième. Le problème de la séparabilité surgit plus particulièrement lorsque les signaux sont de qualité médiocre ou quand la fenêtre d'analyse est insuffisamment longue par rapport à la valeur des constantes de temps en question. Il arrive alors que les modes coalescent pour former une paire de modes complexes conjugués, ce qui équivaut à une oscillation amortie. Un tel résultat peut évidemment égarer l'interprétation.

Le problème de la séparabilité peut être illustré par un exemple simple. Considérons un système du second ordre dont les constantes de temps sont τ_1 . Ajustons-lui un modèle du même ordre ayant des constantes $\hat{\tau}_1$ différentes des premières. Exprimons ensuite le désaccord entre système et modèle par la fonction de coût $J(\hat{\tau}_1)$. Celle-ci apparaît comme une surface, figure 40, dont les minima correspondent exactement aux solutions $\hat{\tau}_1 = \tau_1$. Tant que les constantes τ_1 sont bien distinctes, ces minima restent bien déterminés et la convergence vers la solution se fait sans encombre. Dès qu'elles se rapprochent trop, les minima se rejoignent en formant une vallée étroite dont le fond plat entrave la convergence. Si en plus nous additionnons du bruit aux données, le tout s'émousse et la convergence n'aboutit plus aux solutions exactes. Dans ce cas, il arrive fréquemment que le point le plus bas de la surface $J(\hat{\tau}_1)$ soit celui où les deux constantes de temps τ_1 coalescent, ce qui génère des modes propres complexes. La meilleure façon d'éviter ce problème revient à augmenter la durée de la mesure ou à inclure davantage de signaux dans l'analyse.

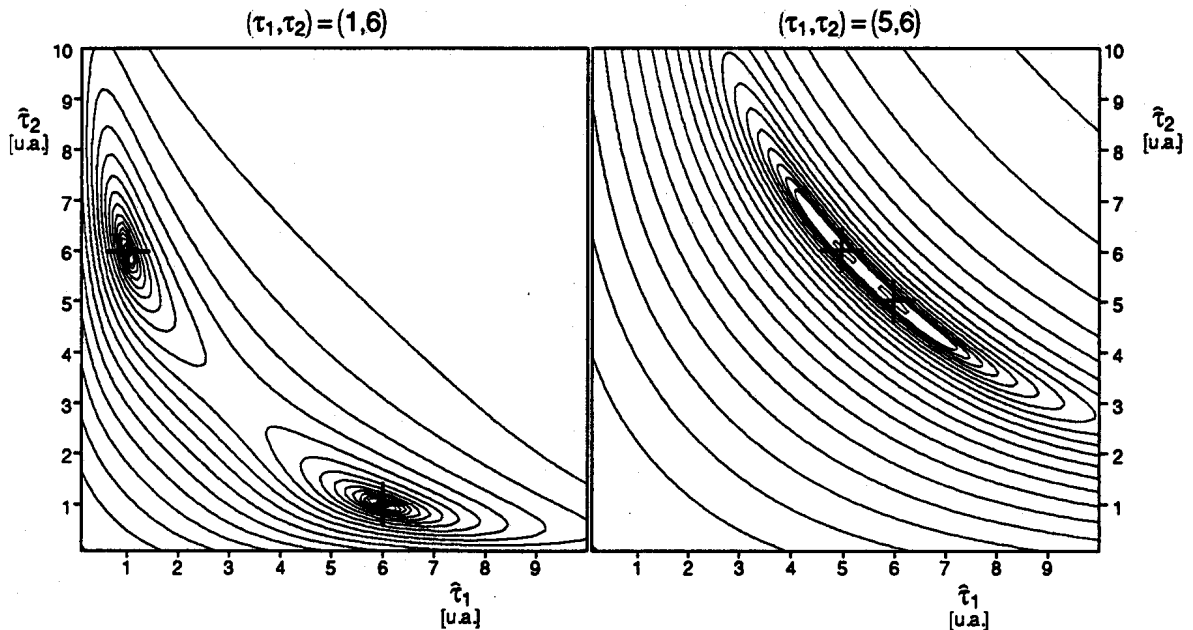


Fig. 40 Représentation de la fonction de coût calculée en ajustant deux modes propres de constantes $\hat{\tau}_1$ à un modèle dont les constantes sont τ_1 . Les croix correspondent au minimum de la fonction de coût, en l'occurrence l'emplacement de la solution exacte.

L'ordre du système

L'ordre N du modèle que l'on veut ajuster aux données est un des seuls paramètres libres dont la valeur doit être spécifiée avant d'extraire les modes propres. Si l'ordre est trop élevé, les données sont reproduites fidèlement, mais les modes propres obtenus ne sont pas tout à fait indépendants. Cela équivaut à choisir un modèle surdéterminé. Un trop petit ordre négligera au contraire des informations importantes comme le montre la figure 41; il en résultera une fonction de coût J élevée. Un des meilleurs compromis consiste à choisir un ordre après lequel la valeur de J cesse de décroître sensiblement. Ceci est illustré par la figure 42, qui représente la valeur de la fonction de coût calculée pour différents ordres. On remarquera que l'ajustement cesse de s'améliorer notablement au-delà du troisième ordre. En cherchant à ajuster plus de trois modes propres on aboutit à des modes qui sont soit complexes soit sensiblement plus courts que le temps d'échantillonnage. Dans ce cas précis le choix le plus raisonnable revient à prendre $N=3$.

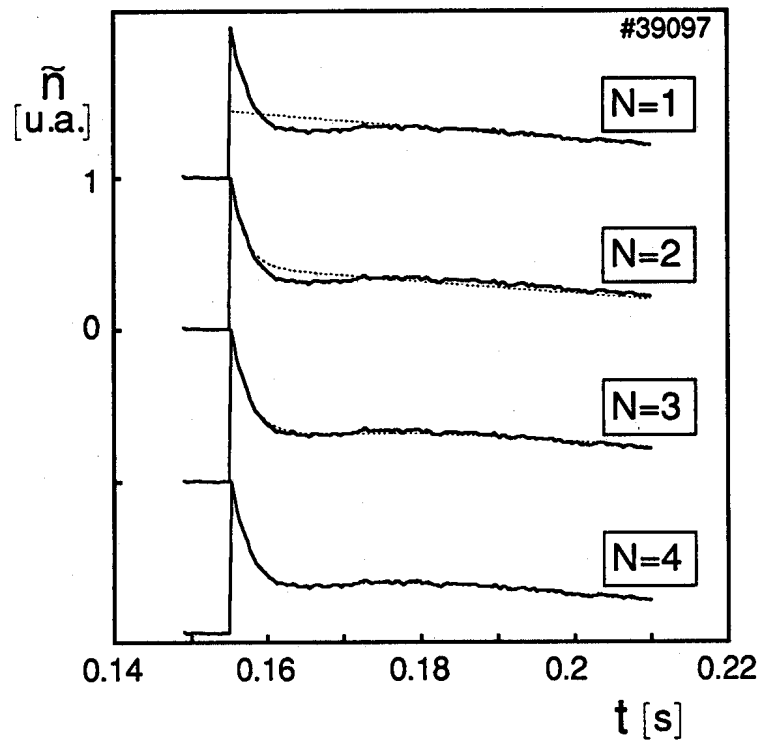


Fig. 41 Qualité d'ajustement d'un signal expérimental en fonction de l'ordre du modèle utilisé. Aucune amélioration sensible n'est observée au-delà du troisième ordre.

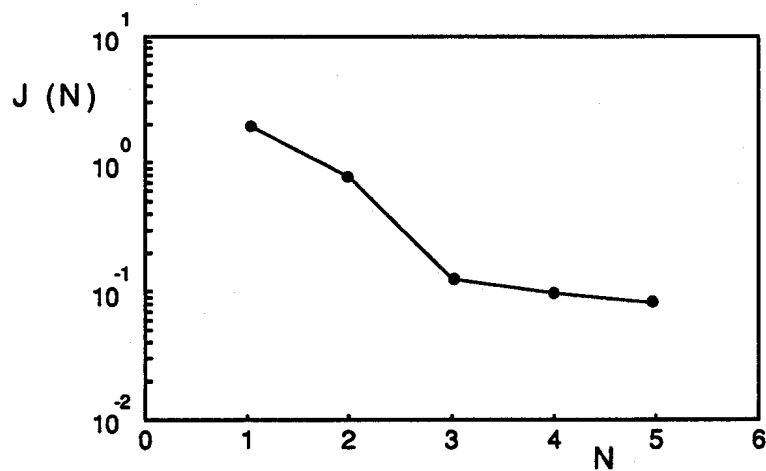


Fig. 42 Fonction de coût calculée pour les différents cas de la figure 41.

A4.5 Autres approches

Les deux méthodes d'analyse présentées au début de ce chapitre se distinguent uniquement par l'approche suivie; la méthode d'ajustement de constantes de temps est relativement transparente parce qu'elle s'attaque directement au problème d'extraction alors que la méthode d'identification de la fonction de transfert gagne en généralité ce qu'elle perd en transparence. Parmi les autres approches envisageables, il y en a une qui met particulièrement bien en évidence la notion de modes propres d'un système; c'est la représentation dans l'espace d'état.

La représentation dans l'espace d'état est habituellement utilisée pour étudier l'observabilité et la contrôlabilité de systèmes linéaires régis par des équations différentielles. Elle s'applique donc aussi au transport couplé de particules et de chaleur. La clarté avec laquelle elle met en évidence la notion de modes propres justifie une brève introduction au sujet. Une analyse plus détaillée pourra être trouvée dans [42,45].

Considérons un système linéaire échantillonné à une entrée et à une sortie. Nous avons vu que la fonction de transfert est l'une des représentations possibles d'un tel système

$$H(z) = \frac{y}{u} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^i}{\sum_{i=0}^N a_i z^i} \quad (\text{A4.31})$$

La représentation dans l'espace d'état part de la définition d'un ensemble de variables d'état $\{x_i(k)\}$, que nous représenterons par un vecteur d'échantillons. Le système en question peut alors être mis sous la forme

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k) \end{aligned} \quad (\text{A4.32})$$

Les matrices Φ , Γ , C et D définissent entièrement ce système. Les variables d'état ne sont pas uniques et n'ont pas forcément de sens physique. Leur choix (et par conséquent le contenu des matrices) est généralement dicté par les propriétés que l'on veut mettre en évidence : observabilité, commandabilité, canonicité. Nous partirons ici du modèle observable canonique, qui a l'avantage de contenir les coefficients des polynômes en z de l'équation (A4.31).

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_N & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \quad D = (b_0)$$
(A4.33)

Avec ces quatre matrices, le système (A4.32) est tout à fait équivalent à celui de (A4.31). Le vecteur d'état contient autant d'éléments qu'il y a de pôles dans la fonction de transfert. Tel qu'il est défini ci dessus, il est difficile de lui attribuer un sens physique. On peut toutefois réarranger les variables d'état par des transformations linéaires, sans affecter la dynamique. En définissant une nouvel ensemble de variables d'état donné par $\tilde{x} = M x$, les quatre matrices deviennent

$$\tilde{\Phi} = M \Phi M^{-1} \quad \tilde{\Gamma} = M \Gamma$$

$$\tilde{C} = C M^{-1} \quad \tilde{D} = D$$
(A4.34)

Parmi les différentes transformation linéaires, prenons celle qui diagonalise la matrice Φ . Si les pôles de la fonction de transfert sont tous distincts, il existe une matrice M telle que

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} z_1 & & & \\ & z_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & z_N \end{pmatrix} \quad \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \quad \tilde{D} = (r_0)$$
(A4.35)

Pour chacune des variables d'état, il vient

$$\tilde{x}_i(k+1) = z_i \tilde{x}_i(k) + r_i u(k)$$
(A4.36)

ce qui donne

$$\tilde{x}_i(k) = \frac{r_i}{1 - z_i z^{-1}} u(k)$$
(A4.37)

Autrement dit, chaque variable d'état correspond à un mode propre dont le pôle est z_i . La sortie y du système n'est plus que la somme de ces modes. En normalisant chacun des éléments de C à 1, ceux de Γ déterminent l'amplitude des modes propres; ce sont les résidus ou fonctions propres du système. Une simple transformation linéaire suffit donc à mettre directement en évidence les modes propres. La représentation ainsi obtenue est dite canonique de

Jordan parce qu'elle permet de caractériser le système avec un minimum de paramètres. La généralisation au cas multivariable est immédiate [43]. Elle transforme les vecteurs Γ et C en des matrices et D en un vecteur. La matrice Φ reste en revanche inchangée puisque les modes propres constituent l'élément constitutif du système, quelle que soit sa dimension.

La représentation dans l'espace d'état convient particulièrement bien à l'étude des propriétés dynamiques d'un système. Elle trouve de nombreuses applications dans les études de controllabilité et offre une expression élégante de la notion de modes propres. Elle est en revanche mal adaptée à l'identification de systèmes, pour laquelle elle nécessite la mise en oeuvre de méthodes non linéaires. Nous ne l'avons pas utilisée parce que le calcul de la fonction de transfert donne plus directement accès à la valeur des modes propres.

Annexe V

Couplage et amplitude des modes propres

Le but de cet annexe est de montrer par quel biais l'amplitude des modes propres est liée à la notion de couplage. Nous verrons que la connaissance des amplitudes relatives offre un moyen de caractériser non seulement les termes de source agissant sur le plasma mais aussi les couplages entre variables.

A5.1 Expression de l'amplitude des modes propres

L'amplitude des modes propres est un paramètre qui est intimement lié au profil du terme de source. Son expression exacte a été dérivée dans §3.6. Lorsque plusieurs variables sont couplées, il apparaît une dépendance supplémentaire envers le couplage. Pour connaître l'amplitude dans de telles circonstances, il faut reprendre l'expression détaillée de la réponse dynamique de la densité exprimée sous la forme de modes propres (3.41). Comme nous ne mesurons sur TCA que les trois premiers modes propres, l'expression sera limitée à trois termes. Pour un terme de source impulsionnel correspondant à l'injection d'un glaçon, la densité perturbée s'exprime comme une somme d'exponentielles

$$\begin{aligned} \tilde{n}(r,t) \sim & (c_1 - \beta d_1) f_1(r) e^{-t/\tau_{\alpha,1}} \\ & + (-\alpha\beta c_1 + \beta d_1) f_1(r) e^{-t/\tau_{\beta,1}} \\ & + (c_2 - \beta d_2) f_2(r) e^{-t/\tau_{\alpha,2}} \end{aligned} \quad (\text{A5.1})$$

Rappelons que les coefficients c_i et d_i sont les projections des termes de source sur les fonctions propres $f_i(r)$ selon la relation

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(r) &= \sum_i c_i f_i(r) \\ \tilde{S}_2(r) &= \sum_i d_i f_i(r) \end{aligned} \quad (\text{A5.2})$$

Les couplages relatifs α et β ont été introduits dans (3.31). Ils caractérisent les liens existant entre les opérateurs d'évolution. La valeur de α indique l'intensité du couplage qui lie la température à la densité, alors que β

représente le lien inverse, entre la densité et la température. Ces deux paramètres donnent donc une indication générale des interactions existant entre les variables étudiées. La comparaison de la solution (A5.1) avec les modes propres mesurés offre un moyen d'estimer ces différents paramètres.

Pour éviter des confusions, nous indiquerons ici par $g_i(r)$ les modes propres mesurés pour les distinguer de ceux issus du modèle théorique. La solution de la densité obtenue sur TCA s'exprime alors comme

$$\tilde{n}(r,t) = g_1(r) e^{-t/\tau_1} + g_2(r) e^{-t/\tau_2} + g_3(r) e^{-t/\tau_3} \quad (\text{A5.3})$$

Ceci permet d'établir les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \tau_1 &\leftrightarrow \tau_{\alpha,1} & g_1 &\leftrightarrow (c_1 - \beta d_1) f_1 \\ \tau_2 &\leftrightarrow \tau_{\beta,1} & g_2 &\leftrightarrow (-\alpha\beta c_1 + \beta d_1) f_1 \\ \tau_3 &\leftrightarrow \tau_{\alpha,2} & g_3 &\leftrightarrow (c_2 - \beta d_2) f_2 \end{aligned} \quad (\text{A5.4})$$

Pour nous affranchir des problèmes de dimensionalité, nous recourons au rapport d'amplitude tel qu'il est défini par (6.1). Ceci nous amène finalement au résultat désiré

$$\begin{aligned} \rho_{21} &= \frac{g_2(r=0)}{g_1(r=0)} = -\beta \frac{\alpha c_1 - d_1}{c_1 - \beta d_1} \\ \rho_{31} &= \frac{g_3(r=0)}{g_1(r=0)} = \frac{c_2 - \beta d_2}{c_1 - \beta d_1} \end{aligned} \quad (\text{A5.5})$$

A5.2 Application à l'injection de glaçons

Les expressions (A5.5) peuvent être simplifiées dans le cas où la stimulation appliquée au plasma est un glaçon. Le temps d'ablation de ce dernier est si court que le plasma reste essentiellement adiabatique pendant l'injection

$$\frac{d}{dt}(nT) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{n}}{n} \cong -\frac{\tilde{T}}{T} \quad (\text{A5.6})$$

La validité de cette approximation a été confirmée par les mesures réalisées sur des tokamaks disposant de mesures simultanées de la densité et de la température [12]. Elle nous permet de poser $c_1 \cong -d_1$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\rho_{21} &= -\beta \frac{1+\alpha}{1+\beta} \\ \rho_{31} &= \frac{c_2}{c_1}\end{aligned}\tag{A5.7}$$

Ces deux expressions montrent que les rapports d'amplitude ρ_{21} et ρ_{31} donnent accès à des paramètres totalement différents. Le premier est uniquement lié aux caractéristiques du transport puisqu'il dépend des couplages relatifs. Le second ne dépend pas du transport mais uniquement du profil d'ablation du glaçon.

Si des mesures de la température avaient été disponibles sur TCA, nous aurions pu utiliser l'expression du rapport d'amplitude des modes de la température, ce qui aurait donné

$$\begin{aligned}\rho_{21,T} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{1+\alpha}{1+\beta} \\ \rho_{31,T} &= \frac{d_2}{d_1}\end{aligned}\tag{A5.8}$$

La mesure combinée de ces rapports avec ceux de la densité offre un moyen simple de calculer les couplages relatifs α et β du plasma sans même passer par une modélisation du transport. On rappellera cependant que l'expression des couplages relatifs a été obtenue au prix d'une simplification par l'imposition de la proportionnalité entre les opérateurs d'évolution (cf. équation (3.29)). Les paramètres α et β constituent donc une approximation du couplage.

Bibliographie

- 1 Wesson, J., *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford, 1987.
- 2 Hawryluk, R.J., *An empirical Approach to Tokamak Transport*, Proceedings International School of Plasma Physics, Varenna (1979) doc. EUR FU BRU/XII/476/80.
- 3 Lopes Cardozo, N.J., de Haas, J.C.M., et al., *Plasma Phys. Contr. Fusion* **32** (1990) 983.
- 4 Simonen, T.C., Brower, D.L., *Comments Plasma Phys. Contr. Fusion* **14** (1991) 57.
- 5 Woods, L.C., *Principles of Magnetoplasma Dynamics*, Clarendon Press, Oxford (1987).
- 6 Christiansen, J.P., Callen, J.D., et al., *Nuclear Fusion* **28** (1988) 817.
- 7 Callen, J.D., Burrell, K., et al., *Physics Fluids B* **2** (1990) 2869.
- 8 Rebut, P.H., Lallia, P.P., Watkins, M.L., *Proceedings 12th IAEA Conference, Nice*, **2** (1988) 191.
- 9 Gentle, K.W., *Physics Fluids* **31** (1988) 1105.
- 10 Dautray, R., Lions, J.-L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, (1987), volumes 5, 7 et 8.
- 11 Moret, J.-M., Dudok de Wit, T., et al., *The Dynamic Response of the Plasma as a Tool for investigating Transport Processes*, rapport LRP 451/92, CRPP, Lausanne (1992), accepté dans *Nuclear Fusion*
- 12 Moret, J.-M. and Equipe Tore Supra, *Nuclear Fusion* **32** (1992) 1241.
- 13 Gambier, D.J., Evrard, M.P., et al., *Nuclear Fusion* **30** (1990) 23.
- 14 Frederickson, E.D., McGuire, K., et al., *Phys. Rev. Letters* **65** (1990) 2869.
- 15 Goedheer, W.J., *Nuclear Fusion* **26** (1986) 1043.
- 16 Riedel, K.S., Eberhagen, A., et al., *Nuclear Fusion* **28** (1988) 1509.
- 17 Gentle, K.W., Richards, B., Waelbroeck, F., *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **29** (1987) 1077.
- 18 Stangeby, P.C., McCracken, G.M., *Nuclear Fusion* **30** (1990) 1225.
- 19 de Chambrier, A., Duval, B.P., et al., *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **31** (1989) 527.
- 20 Watkins, M.L., Balet, B., et al., *Plasma Phys. Contr. Fusion* **31** (1989) 1713.
- 21 Gentle, K.W., Gehre, O., Krieger, K., *Nuclear Fusion* **32** (1992) 217.

- 22 Hugon, M., van Milligen, B., et al, *Nuclear Fusion* **32** (1992) 33.
- 23 Miyamoto, K., *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, MIT Press, London (1989).
- 24 Kim, S.K., Brower, D.L., et al., Proceedings 12th IAEA conference, Nice, **1** (1988) 281.
- 25 de Haas, J.C.M., O'Rourke, J., et al., *Nuclear Fusion* **31** (1991) 1261.
- 26 Sips, A.C.C., Hogeweij, G.M.D., et al., *Nuclear Fusion* **31** (1991) 1545.
- 27 Wagner, F., Söldner, F.X., et al., *Plasma Physics Contr. Fusion* **28** (1986) 1225.
- 28 Furth, H.P., *Plasma Physics Contr. Fusion* **28** (1986) 1305.
- 29 Wagner, F., Becker, G., et al., *Phys. Rev. Letters* **49** (1982) 1408.
- 30 Mertens, V., Bessenrodt-Weberpals, M., et al., *Plasma Phys. Contr. Fusion* **32** (1990) 965.
- 31 Kurki-Suonio, T.K., Groebner, R.J., Burrell, K.H., *Nuclear Fusion* **32** (1992) 133.
- 32 Becker, G., *Nuclear Fusion* **30** (1990) 2377.
- 33 Waltz, R.E., Wong, S.K., et al., *Nuclear Fusion* **26** (1986) 1729.
- 34 Cheetham, A.D. et al., Proceedings 11th Symposium on Fusion Technology, Oxford, **1** (1980) 601.
- 35 Drakakis, M., Dutch, M., Proceedings 18th Europ. Conference on Contr. Fusion and Plasma Physics, Berlin, **1** (1991) 329.
- 36 Lopes Cardozo, N.J., Tubbing, B.J.D., et al., *Nuclear Fusion* **28** (1988) 1173.
- 37 Luce, T.C., Petty, C.C., de Haas, J.C.M., *Phys. Rev. Letters* **68** (1992) 52.
- 38 Hossain, M., Kress, M., et al., *Physics Rev. Letters* **58** (1987) 487.
- 39 Bishop, C.M., Connor, J.W., *Plasma Phys. Contr. Fusion* **32** (1990) 203.
- 40 Efthimion, P.C., Mansfield, D.K., Stratton, B.C., *Phys. Rev. Letters* **66** (1991) 421.
- 41 Moret, J.-M., *Identification of Systems with Distributed Parameters*, rapport EUR-CEA-FC-1409, CEA, Cadarache (1990).
- 42 Aström, K.J., Wittenmark, B., *Computer Controlled Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1990).
- 43 Ljung, L., *System Identification*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1987).
- 44 Dennis, J.E., Schnabel, R.B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimisation and Nonlinear Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1983).
- 45 Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1980).

Remerciements

Les différentes étapes de ce travail de thèse ont été jalonnées par la présence de personnes qui m'ont chacune, à leur façon, fourni un apport précieux.

En 1987, alors que je venais de terminer mes études à l'EPFL, le professeur Troyon m'offrit la possibilité de venir travailler au CRPP. C'est lui que j'aimerais remercier en premier de ces cinq années que j'ai pu y passer.

Après avoir passé quelques années à dépouiller des résultats, le besoin commença à se faire sentir de se concentrer sur un sujet mieux défini. C'est alors qu'un jour, Jean-Marc Moret eut l'humour de me proposer la poursuite de ce qui avait servi de base à son travail de thèse, à savoir l'étude de la réponse dynamique du plasma. Je ne me rappelle plus comment j'ai fait pour accepter un sujet qui me semblait à l'époque plutôt hermétique. Je me souviendrai longtemps en revanche de l'aide et de l'encouragement de Jean-Marc dont j'ai pu bénéficier dès ce moment jusqu'à la fin de mon travail. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance pour son soutien irremplaçable.

Jo Lister, en tant que directeur de thèse, a dû encourager, dissuader, lire et relire... Je lui suis très reconnaissant pour son oreille attentive et l'aide précieuse qu'il a apportée à l'achèvement de ce travail.

Les Dr A. Bondeson et L. Laurent ont mis un grand soin dans l'accomplissement de leur rôle d'experts; qu'ils soient remerciés du temps qu'ils y ont consacré.

Ces quelques noms devraient être suivis de nombreux autres. Je pense en particulier à Bernard Joye, qui pendant des années a su nous fournir des décharges sur demande; Yves Martin, mon collègue de bureau sans qui TCA n'aurait pas connu d'injection de glaçons.

Comment ne pas remercier Susanne d'avoir accepté un envahissement progressif de la vie de famille par le travail de rédaction. Qu'elle sache combien j'ai apprécié sa compréhension et sa patience.

Finalement, j'aimerais dire ma reconnaissance à Celui qui, en nous créant, a suscité cette envie perpétuelle de découvrir et qui a été un soutien toujours fidèle tout au long de ces années.

Curriculum vitae

Né le 1er avril 1964 à Laren (Pays-Bas), j'y ai entamé la scolarité obligatoire. Celle-ci s'est poursuivie dès l'âge de dix ans à l'Ecole Nouvelle de Paudex (Vaud) jusqu'à l'obtention de la maturité fédérale en section scientifique. Mes études se sont ensuite poursuivies à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, avec accomplissement de la troisième année d'études à l'Université de Carnegie-Mellon (USA). Depuis l'obtention de mon diplôme d'ingénieur physicien en 1987, je travaille comme assistant au Centre de Recherches en Physique des Plasmas à Lausanne.

Les années 1987 à 1989 ont été consacrées à l'installation puis à l'utilisation d'une mesure de la masse effective du plasma. Celle-ci a entre autres permis de contrôler en temps réel le mélange D-H du plasma ainsi que de caractériser le transport d'hydrogène dans un plasma de deutérium.

De 1989 à 1991 j'ai étudié la réponse du flux des rayons X mous à des stimulations telles que la modulation de la puissance de chauffage par ondes d'Alfvén, la modulation de la vanne de gaz ou encore l'injection d'impuretés. Toute l'interprétation se faisait alors encore sur la base de la réponse fréquentielle qui a pourtant permis de mettre en évidence des aspects intéressants du transport de particules et de chaleur.

L'année 1991 a vu le développement de la méthode de décomposition en modes propres, qui a trouvé un débouché idéal dans la stimulation de la densité par injection de glaçons.