

DECEMBRE 1980

LRP 179/80

SOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION
DE CONTINUITÉ

J.-Ch. Vittoz, K. Appert

L. Muschietti

SOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DE CONTINUITE

J.-Ch. Vittoz,* K. Appert, L. Muschietti

Centre de Recherches en Physique des Plasmas

Association Euratom - Confédération Suisse

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

CH - 1007 Lausanne / Switzerland

RESUME

On étudie les propriétés des solutions numériques qui résultent de l'intégration d'une équation de continuité à l'aide d'éléments finis du troisième degré de type Lagrange. Il est montré que l'adjonction d'un petit terme de diffusion artificielle diminue substantiellement les erreurs de phase inhérentes à la discrétisation. Après optimisation, une telle méthode approche les performances d'un schéma F.C.T. simple.

* travail pratique de diplôme d'ingénieur-physicien

I. INTRODUCTION

Les équations de continuité jouent un rôle central en physique, notamment en physique des fluides et des plasmas. De par cette situation, elles ont motivé, durant la dernière décennie, un effort considérable en vue de développer des méthodes numériques propres à les résoudre. Il faut dire aussi que, mis-à-part les méthodes spectrales et les méthodes avec caractéristiques, lesquelles sont difficiles à utiliser, voire carrément inapplicables, dans des problèmes physiques complexes, toutes les méthodes standards de différences et d'éléments finis produisent des erreurs numériques souvent intolérables dès que la convection domine la diffusion. Il en résulte des réponses non physiques: d'une part, des températures, des densités de masse ou d'autres quantités physiques définies positives prennent des valeurs négatives, d'autre part, dans nos problèmes de turbulence faible, il y a apparition d'ondes instables dues à des phénomènes numériques.

L'origine de tous ces ennuis réside dans ce que l'on appelle les erreurs de dispersion ou de phase. En effet, l'équation différentielle:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -V \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.1)$$

avec $V = \text{constante}$, engendre trivialement la relation de dispersion

$$\omega = k \cdot V$$

exprimant le fait que la vitesse de phase d'une perturbation sinusoidale de type $f \sim e^{i(kx - \omega t)}$ est donnée par la vitesse de convection V ,

ce qui, en général, n'est plus le cas après discrétisation du problème. Ordinairement, on trouve qu'une perturbation sinusoidale se propage avec une vitesse de phase qui dépend de la méthode de discrétisation et du réseau spatial sur lequel elle est appliquée.¹ Prenons par exemple une discrétisation simple en différences finies de l'équation (1.1)

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t)}{2 \Delta t} = -V \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t)}{2 \Delta x}$$

En limite $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega = V \cdot K \frac{\sin(K \cdot \Delta x)}{K \cdot \Delta x}$$

Ainsi les perturbations de courtes longueurs d'ondes par rapport au niveau se propagent à moindre vitesse. Il peut en résulter qu'un saut spatial d'origine physique (ondes de choc, etc.) est accompagné d'oscillations spatiales d'origine numérique.

L'effort en analyse numérique s'est concentré sur l'élimination de cette erreur de phase. Les problèmes de convection peuvent être traités au moyen de méthodes de différences finies, dites monotones, qui ne laissent apparaître aucun extremum numérique - et cela sans engendrer d'autres erreurs numériques "inacceptables".^{2,3,4}. Ce résultat est obtenu en ajoutant un terme de diffusion artificielle (numérique) dont le coefficient D_{art} , proportionnel à Δx , dépend d'une façon sophistiquée de la dérivée spatiale seconde de f . L'équation linéaire (1.1) est donc remplacée par une équation non linéaire de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -V \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} D_{art}(\Delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.2)$$

La diffusion artificielle agit localement aux endroits où il y a danger de création d'extrema sans affecter "gravement" la solution globale.

En matière d'éléments finis, malheureusement, la situation n'a pas encore été à ce point clarifiée, lors même que de nombreux travaux aient été consacrés à ce sujet.⁵ Aujourd'hui, seul le problème d'un flux stationnaire,⁶ décrit par l'équation

$$-Q = -V \frac{\partial f}{\partial x} + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

et soumis à des conditions aux bords appropriées a trouvé une solution satisfaisante.

Est-ce-à-dire que jamais les éléments finis ne pourront rivaliser avec les différences finies dans des problèmes d'évolution? Il se pourrait; mais cela serait-il, que les éléments finis ne seraient pas abandonnés, car ils offrent une méthode simple et automatique pour la transformation de n'importe quelle équation différentielle en équation aux différences.

Dans le contexte de nos études de turbulence faible⁷ - où nous utilisons les éléments finis du premier ordre -, nous avons trouvé que l'introduction d'une diffusion artificielle de la forme $D_{art} = \text{const.} \Delta X$ peut rendre les résultats à peu près satisfaisants. Il nous fut impossible cependant de trouver une méthode stable qui tienne compte localement de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Après avoir vu échouer également une tentative d'incorporer un schéma F.C.T. dans un programme quasilinéaire d'éléments finis, nous nous sommes tournés vers les éléments finis du troisième ordre.

Dans ce travail on étudie les propriétés des solutions de l'équation (1.1) approchées à l'aide des éléments finis du troisième ordre du type Lagrange.⁸ En expérimentant différents types de diffusion artificielle, nous mettons au point un schéma optimal utilisant des éléments de type Lagrange. Celui-ci est ensuite comparé à un schéma F.C.T. et aux schémas en éléments finis du premier ordre mentionnés ci-dessus.

Il faut souligner ici que notre optimisation ne tient compte que des erreurs numériques et non du temps de calcul.

Voici le plan de travail. Nous traiterons d'abord au chapitre 2 la discrétisation du problème différentiel soumis aux conditions initiales exposées au chapitre 3. Puis nous donnerons les résultats numériques, résultats obtenus au moyen d'un programme FORTRAN, au chapitre 4. Ce dernier traite d'une convection pure alors que le chapitre 5 rend compte de l'influence d'une diffusion artificielle. Enfin, au chapitre 6, nous établirons des comparaisons avec d'autres méthodes, pour conclure au chapitre 7.

2. DISCRETISATION

2.1 La forme faible de l'équation différentielle

Nous avons à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -V \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.1)$$

où $f(x,t)$ est la densité, V la vitesse de convection supposée constante et $D(x)$ le coefficient de diffusion; $\frac{\partial D}{\partial x}$ est continue par morceaux.

Le problème différentiel consiste à résoudre, dans un domaine donné $\Omega = \{(x,t) / 0 \leq x \leq L, 0 \leq t < T\}$, l'équation (2.1) à partir de conditions initiales et de conditions aux bords. Dans cette formulation, $f(x,t) \in C^1(\Omega)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue par morceaux pour tout $(x,t) \in \Omega$ pour autant que $f(x,t=0)$ satisfasse aux mêmes propriétés. Nous choisissons des conditions aux bords de type Neumann, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ pour $x = 0$ et $x = L$; physiquement cela veut dire qu'il n'y a pas de flux à travers les bords.

A ce problème différentiel on peut associer le problème variationnel suivant: déterminer $f \in G$ tel que

$$\int_0^L g \frac{\partial f}{\partial x} dx = -V \int_0^L g \frac{\partial f}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{\partial g}{\partial x} D(x) \frac{\partial f}{\partial x} dx \quad \forall g \in G \quad (2.2)$$

$$\text{où } G = \left\{ g \mid g \in C^0(\Omega), \frac{\partial g}{\partial x} \text{ continue par morceaux} \right\}$$

L'équation (2.2) est appelée forme faible de l'équation (2.1). Elle est obtenue par convolution de l'équation (2.1) avec $g \in G$ quelconque, sur l'intervalle I , et par l'utilisation des conditions aux bords lors de l'intégration par parties du terme diffusif. Dans la formulation (2.2), f peut appartenir à une classe plus grande que $C^1(\Omega)$; il suffit que $f \in G$ pour tout t . On peut démontrer rigoureusement au moyen de quelques hypothèses mathématiques que les deux

moyen de quelques hypothèses mathématiques que les deux équations (2.1) et (2.2) sont équivalentes.^{8,9}

2.2 Les fonctions de base

Soient $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ quatre nombres réels. Considérons les quatre polynômes suivants:

$$\beta_0(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_0 - \xi_1)(\xi_0 - \xi_2)(\xi_0 - \xi_3)}$$

$$\beta_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_0)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}$$

$$\beta_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_0)(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}$$

$$\beta_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi_0 - \xi_1)(\xi_0 - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_0)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}$$

$$\beta_j(\xi) : [\xi_0, \xi_3] \rightarrow \mathbb{R}$$

Ces quatre fonctions sont représentées sur la figure 1 pour $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = \frac{1}{3}$, $\xi_2 = \frac{2}{3}$, $\xi_3 = 1$. Connues sous le nom de fonctions de Lagrange du troisième degré, elles jouissent des propriétés suivantes :

$$\xi_0 = 0 \quad \xi_1 = \frac{1}{3} \quad \xi_2 = \frac{2}{3} \quad \xi_3 = 1$$

$\beta_0 =$	1	0	0	0
$\beta_1 =$	0	1	0	0
$\beta_2 =$	0	0	1	0
$\beta_3 =$	0	0	0	1

Divisons $I = [0, L]$ en n intervalles $[X_i, X_{i+1}]$ où $0 = X_0 < X_1 < \dots < X_n = L$, puis subdivisons chaque intervalle $[X_i, X_{i+1}]$ en trois "sous-intervalles" égaux :

$$X_i = x_{3i+1} x_{3i+2} x_{3i+3} x_{3(i+1)+1} = X_{i+1},$$

avec $x_{3i+q} = X_i + (q-1) \frac{X_{i+1} - X_i}{3}, \quad q = 1, 2, 3, 4.$

Dorénavant nous appellerons réseau l'ensemble des noeuds X_i ($i = 0, \dots, n$) et sous-réseau l'ensemble des sous-noeuds x_k ($k = 1, \dots, 3n+1$).

Soit $0 \leq i \leq n-1$ un entier donné. Appliquons les β_j , $j = 0, \dots, 3$ sur l'élément de réseau correspondant $[X_i, X_{i+1}]$ en posant $\int_{q-1} = x_{3i+q}$, $q = 1, 2, 3, 4$. Nous associons de la sorte à chacun des quatre sous-noeuds x_k une fonction $\phi_k(x)$:

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \beta_0(x) & \text{si } x \in [X_i, X_{i+1}] \text{ et } k = 3i+1 \\ \beta_1(x) & \text{" et } k = 3i+2 \\ \beta_2(x) & \text{" et } k = 3i+3 \\ \beta_3(x) & \text{" et } k = 3i+4 \\ 0 & \text{si } x \notin [X_i, X_{i+1}] \end{cases}$$

Il est courant de changer la coordonnée x par le système linéairement dépendant de coordonnées suivant⁵:

$$\int_1 = 1 - \frac{x - X_i}{X_{i+1} - X_i}$$

$$\int_2 = \frac{x - X_i}{X_{i+1} - X_i}$$

D'où les expressions

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \frac{9}{2} \xi_1 (\xi_2^2 - \xi_2 + 2/9) & \text{si } k = 3i+1 \\ \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (2 - 3\xi_2) & \text{si } k = 3i+2 \\ \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_2 - 1) & \text{si } k = 3i+3 \\ \frac{9}{2} \xi_2 (\xi_1^2 - \xi_1 + 2/9) & \text{si } k = 3i+4 \\ 0 & \text{si } x \notin [X_i, X_{i+1}] \end{cases} \text{ et } x \in [X_i, X_{i+1}]$$

En laissant i parcourir l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$, nous associons à tous les sous-noeuds x_k ($k = 1, \dots, 3i+1, \dots, 3n+1$) une fonction ϕ_k vérifiant les propriétés suivantes :

- elle admet comme support l'intervalle $[X_{i-1}, X_{i+1}]$ s'il s'agit d'une fonction associée à un noeud,
- elle admet comme support l'intervalle $[X_i, X_{i+1}]$ s'il s'agit d'une fonction associée à un sous-noeud compris entre X_i et X_{i+1} .
- $\phi_k \in C^0(I)$ et admet une dérivée continue par morceaux
- $\phi_k(x_m) = \delta_{km}$

Ainsi sont définies les $(3n+1)$ fonctions de base ϕ_k utilisées pour la discrétisation spatiale.

2.3 Discrétisation spatiale

Pour le sous-réseau de $3n+1$ points on définit un sous-espace G_d de dimension $3n+1$ de G :

$$G_d = \left\{ g_d \mid g_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g_d = \sum_{k=1}^{3n+1} a_k(t) \phi_k(x) \right\}$$

a_k est un paramètre représentant la valeur de la fonction g_d au sous-noeud x_k .

Notre but est toujours la détermination d'une solution de l'équation (2.1) ou ce qui est équivalent, résoudre le problème posé par l'équation (2.2). Pour y parvenir, nous cherchons une solution discrète, $f_d \in G_d$ de l'équation (2.2):

$$f_d(x, t) = \sum_{k=1}^{3n+1} f_k(t) \phi_k(x)$$

telle que

$$\int_0^L g_d \frac{\partial f_d}{\partial t} dx = -V \int_0^L g_d \frac{\partial f_d}{\partial x} - \int_0^L \frac{\partial g_d}{\partial x} D(x) \frac{\partial f_d}{\partial x} dx \quad \forall g_d \in G_d$$

C'est-à-dire:

$$\sum_e \int \phi_k \phi_e dx \dot{f}_e = - \sum_e V \int \phi_k \frac{d\phi_e}{dx} dx f_e - \sum_e \frac{d\phi_k}{dx} D(x) \frac{d\phi_e}{dx} dx f_e \quad \forall k \in [1, 3n+1]$$

ce qui peut s'écrire vectoriellement à l'aide des matrices :

$$\left. \begin{aligned} A_{ke} &= \int \phi_k \phi_e dx \\ B_{ke} &= -V \int \phi_k \frac{d\phi_e}{dx} dx - \int \frac{d\phi_k}{dx} D(x) \frac{d\phi_e}{dx} dx \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

On obtient ainsi un système d'équations différentielles linéaires ordinaires (en temps):

$$A_{ke} \cdot \dot{f}_e = B_{ke} f_e \quad (2.4)$$

La résolution de ce système nous fournit une solution approchée du problème, équation (2.1).

2.4 Discretisation temporelle

Nous sommes maintenant confrontés à un problème différentiel en temps. Nous le résolvons au moyen d'un schéma aux différences finies centré en $t + \Delta t/2$:

$$\dot{f}_e(t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{\hat{f}_e - f_e}{\Delta t} \quad \text{et} \quad f_e(t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{\hat{f}_e + f_e}{2}$$

où $f_e = f_e(t)$ et $\hat{f}_e = f_e(t + \Delta t)$

Le système d'équations (2.4) devient alors :

$$\underline{A} \frac{\hat{f} - f}{\Delta t} = \underline{B} \frac{\hat{f} + f}{2}$$

d'où

$$\left[\frac{\underline{A}}{\Delta t} - \frac{\underline{B}}{2} \right] \hat{f} = \left[\frac{\underline{A}}{\Delta t} + \frac{\underline{B}}{2} \right] f$$

Nous sommes ainsi arrivés à un système d'équations linéaires algébriques soluble par les moyens du calcul électronique. Pour peu que l'on dispose d'une solution initiale pour f, nous pourrions étudier son évolution au cours du temps.

3. Le choix des conditions initiales

Hormis l'exigence $f(x, t = 0) \in G$, nous avons toute latitude dans le choix de celles-ci. Une fonction initiale de type créneau (fig. 2) présente deux avantages: elle est "malsaine" numériquement car sujette aux erreurs de phase lors de la convection; d'autre part elle est "optiquement" simple donc la solution idéale ne sera pas difficile à imaginer en filigrane lors de la confrontation des résultats avec ceux d'autres méthodes de résolution. Aussi, tout au long de ce travail, utilisons-nous la fonction :

$$f(x, t = 0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq X_4 \\ p_1(x) & \text{pour } X_4 \leq x \leq X_5 \\ 1 & \text{pour } X_5 \leq x \leq X_9 \\ p_2(x) & \text{pour } X_9 \leq x \leq X_{10} \\ 0 & \text{pour } X_{10} \leq x \end{cases} \quad (3.1)$$

où $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont des polynômes du troisième degré possédant les propriétés suivantes :

$$p_1(x_4) = \left. \frac{dp_1}{dx} \right|_{x=X_4} = \left. \frac{dp_1}{dx} \right|_{x=X_5} = 0, \quad p_1(x_5) = 1,$$
$$p_2(x_9) = 1, \quad \left. \frac{dp_2}{dx} \right|_{x=X_9} = \left. \frac{dp_2}{dx} \right|_{x=X_{10}} = p_2(x_{10}) = 0.$$

Il est à noter qu'elle est la fonction la plus "raide" possible dans le cadre des éléments finis du troisième degré.

4. CONVECTION PURE

La figure 3 nous montre la solution numérique de l'équation (2.1) pour $V = 1$ et $D = 0$ à quatre instants différents, $t = 0, 1, 5, 10$. Les cercles représentent les points du réseau, tandis que le sous-réseau est figuré par l'ensemble des cercles et des points. Les intervalles $[X_i, X_{i+1}]$ ont une longueur de un et on a utilisé $\Delta t = 0.1$ comme pas temporel.

La figure montre bien le phénomène de dispersion. L'apparition des modes à courtes longueurs d'onde est due à la méthode de discrétisation, comme nous l'avons expliqué dans l'introduction. Ce sont eux qui motivent toute la suite de ce travail.

Néanmoins, il faut remarquer que le créneau se déplace bien à la vitesse voulue.

5. CONVECTION ACCOMPAGNEE D'UNE DIFFUSION ARTIFICIELLE

5.1 Diffusion uniforme

En différence finie, la convection, équation (1.1), peut être traitée au moyen d'un schéma monotone très simple, mais très diffusif; c'est le schéma "donor cell" ou "Godounov" donné par :

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = -V \frac{f(x, t) - f(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (5.1)$$

Ce schéma décentré peut être écrit d'une façon centrée; en effet l'équation (5.1) est équivalente à :

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = -V \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t)}{2 \Delta x} + \frac{V \Delta x}{2} \frac{f(x + \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

Le deuxième terme de droite représente un terme diffusif avec un coefficient de diffusion artificielle $D_{\text{art}} = \frac{V \Delta x}{2}$. Sachant que la solution donnée ci-dessus, équation (5.1), est monotone mais très diffusive, la quantité $\frac{V \Delta x}{2}$ constitue une limite supérieure à la diffusion artificielle que l'on introduit dans le traitement en éléments finis.

Le moyen le plus simple d'éliminer les extremas d'origine numérique consiste à ajouter une diffusion artificielle constante sur tout le réseau. La valeur du coefficient de diffusion qui lisse convenablement la fonction f est ensuite déterminée empiriquement. Une mesure du lissage apportée par ce coefficient est donnée par la notion de "sursaut"; le "sursaut" est défini par la différence maximale entre deux extrema numériques consécutifs (fig. 4). Notons que, vu que la fonction prend ses valeurs autour de 1 (cf. (3.1)), ces "sursauts" sont quasi normalisés.

Voici cinq cas qui mettent en évidence le rôle de la diffusion. Nous avons propagé le créneau de cent pas temporels d'une longueur $\Delta t = 0.1$. Après un déplacement égal à deux fois la largeur du créneau nous mesurons le "sursaut".

D	sursaut	
0.05	aucun	représenté en figure 5
0.03	aucun	représenté en figure 5
0.02	0.003	représenté en figure 5
0.01	0.010	
0.005	0.018	

Il faut remarquer que l'évaluation de ces "sursauts" après un déplacement de deux largeurs de créneau est complètement arbitraire.

Le schéma en éléments finis ne semble jamais être monotone dans le sens strict du terme. Il y a toujours des "sursauts" plus ou moins importants suivant le D utilisé après un pas en temps. Ce que nous cherchons à déterminer est simplement un schéma qui se comporte "convenablement". Notre choix s'est porté sur la valeur $D = 0.03$.

Le cas $D = 0.03$ est représenté sur la figure 5 ainsi que ses voisins $D = 0.05$ et $D = 0.02$. Le choix du meilleur D peut évidemment dépendre du contexte dans lequel il sera utilisé. Dans bien des cas, le schéma avec la valeur $D = 0.02$ pourrait être plus avantageux que celui avec $D = 0.03$. Ainsi c'est le schéma avec $D = 0.02$ qui rivalise le mieux avec un schéma F.C.T. et que l'on utilisera au paragraphe 6 pour cette comparaison, tout en sachant qu'il présente des "sursauts" de 3 ‰ après un déplacement de 10.

5.2 Diffusion localisée

Une façon un peu plus raffinée d'éliminer les extrema numériques consiste à limiter la diffusion artificielle aux seuls endroits où ils sont générés par la convection. Nous espérons ainsi éviter la diffusion globale de la solution qui grève la méthode précédente.

La localisation de la diffusion s'obtient par le choix d'un coefficient proportionnel à la courbure de f :

$$D(x) \sim \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right|$$

Or le schéma éléments finis du troisième ordre nous permet d'accéder précisément à la dérivée seconde de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{3n+1} f_k(t) \phi_k''(x) \quad (5.2)$$

Ainsi la diffusion artificielle s'introduit d'elle-même lors de l'évolution à l'instant t et à l'endroit x où elle s'avère nécessaire.

Il faut remarquer qu'il s'agit ici d'une astuce numérique. La dérivée deuxième n'a en effet aucun sens mathématique dans le cadre d'une équation de convection, ou même d'une équation de diffusion, si celle-ci est résolue à partir de la forme faible, où la dérivée deuxième n'intervient pas. Dans un cas pareil, la dérivée seconde ne possède aucune propriété de convergence. Néanmoins, elle nous donne une certaine mesure des ondulations dues à l'erreur de phase à l'intérieur des intervalles du réseau principal. Aux bornes de ces intervalles, c'est-à-dire, aux noeuds principaux, la dérivée deuxième est discontinue et ne fournit aucune indication. Cependant, comme on peut le constater à la figure 3, les points principaux ne semblent pas jouer de

rôles très différents de ceux joués par les "sous-noeuds". Il est alors permis d'espérer que la dérivée deuxième déterminée selon l'équation (5.2) nous donnera un coefficient de diffusion localisée convenable.

Les résultats obtenus avec un coefficient de diffusion localisée artificielle,

$$D_{art}(x,t) = d \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right| \quad (5.3)$$

sont montrés sur la figure 6.

Ceux-ci sont décevants et force nous est de constater qu'aucune amélioration n'a été apportée par cette astuce numérique. Au contraire, des "sursauts" sont apparus après quelques pas, et cela quelle que soit la valeur de d . La préférence va donc à la diffusion artificielle uniforme qui est plus simple et plus économique du point de vue temps de calcul.

Nous avons aussi essayé de définir le coefficient de diffusion localisée de deux autres manières. D'une part en posant

$$D_{art}(x,t) = d \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2$$

nous espérons donner plus de poids à notre astuce. Or, les résultats obtenus sont étonnamment semblables à ceux obtenus au moyen de l'équation (5.3), cf. figure 7. D'autre part, nous avons défini $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ par un schéma de différences finies moyenné sur un intervalle. Cette façon de faire nous a permis de tenir compte de la "dérivée deuxième aux noeuds principaux". Les résultats sont semblables à ceux des deux schémas précédents.

6. COMPARAISON AVEC D'AUTRES METHODES

Dans ce paragraphe, on compare les performances du schéma aux éléments finis du type Lagrange légèrement diffusif ($D = 0.02$) avec deux autres schémas. Le premier est un schéma aux éléments finis du premier ordre, dans lequel un terme diffusif a été introduit à la manière du paragraphe 5.1. A l'instar du schéma aux éléments finis du troisième ordre du type Lagrange, il n'est pas monotone; et il s'agit de choisir un coefficient de diffusion "convenable". Pour faciliter la comparaison, nous avons choisi $D = 0.02$ pour les deux schémas aux éléments finis, bien qu'il faille une valeur de D légèrement supérieure à 0.02 pour supprimer les "sursauts" dans le cas des éléments finis du type Lagrange. Le deuxième schéma qui nous servira de référence est le plus simple des schémas F.C.T., c'est-à-dire "SHASTA EXPLICIT FCT".² Ce schéma est plus diffusif que ses frères, plus compliqués.

Le résultat de ces calculs est représenté à la figure 8. On constate que le schéma aux éléments finis du troisième ordre est nettement meilleur que celui aux éléments finis du premier ordre et qu'à l'aspect il approche même les performances du schéma F.C.T. Cependant, il ne faut pas oublier que seul le schéma F.C.T. peut garantir la monotonie tout en consommant un temps de calcul bien moindre.

Si le traitement numérique d'un problème physique est facilité par une approximation au moyen d'une méthode aux éléments finis plutôt qu'aux différences finies, le choix entre les éléments du premier ordre et ceux du troisième ordre ne sera pas aisé. En effet, l'avantage des uns par rapport aux autres en ce qui concerne la précision ne contrebalance peut-être pas le désavantage du temps de calcul, le rapport étant un facteur 10.

7. CONCLUSION

Nous avons approximé une équation de convection par la méthode des éléments finis du troisième ordre du type Lagrange. Nous y avons ajouté des termes de diffusion artificielle de différents types pour supprimer une partie des erreurs de phase inhérentes à la méthode. L'étude numérique nous a montré qu'un coefficient de diffusion artificielle uniforme mais faible constitue le meilleur moyen de pallier aux erreurs de phase. Un tel schéma approche les performances d'un schéma F.C.T. simple. Cependant, il n'est pas monotone dans le sens strict du terme comme l'est le schéma F.C.T. De ce point de vue, nous n'avons donc pas atteint notre but qui était de trouver un schéma aux éléments finis monotones. Par contre, nous avons montré qu'un schéma simple et linéaire aux éléments finis peut approcher les performances d'un schéma F.C.T. qui, lui, est non linéaire.

REFERENCES

- 1 K.V. Roberts dans "Méthodes numériques en physique, Implantation sur ordinateur", XV^e Cours de perfectionnement de l'AVCP, Saas-Fee, mars 1973, page 155.
- 2 J.P. Boris and D.L. Book, in "Methods in Computational Physics", Vol. 16, J. Killeen Ed., Academic Press, New York (1970), page 85.
- 3 Bram van Leer, J. Comp. Phys. 14, 361 (1974).
- 4 K. Hain, NRL Memorandum Report 3713, Naval Research Laboratory, Washington D.C., February 1978.
- 5 A.J. Baker and M.O. Soliman, J. Comp. Phys. 32, 289 (1979).
- 6 O.C. Zienkiewicz and J.C. Heinrich, in "Finite Elements in Fluids", Vol. 3, R.H. Gallagher et al. Editors, John Wiley, Chichester (1978).
- 7 K. Appert and J. Vaclavic, LRP 161/79, CRPP, Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne, décembre 1979.
- 8 J.J. Goël, dans "Méthodes numériques en physique, Implantation sur ordinateur", XV^e Cours de perfectionnement de l'AVCP, Saas-Fee, mars 1973, page 113.

- 9 A.R. Michell and R. Wait, "The Finite Element Method in Partial Differential Equations", John Wiley, London (1977).
- 10 K.V. Roberts, Comput. Phys. Commun. 7, 237 (1974).

LEGENDES

- Fig. 1 Les quatre fonctions de base $\beta_i(x)$ du type Lagrange.
- Fig. 2 La fonction initiale, $f(x,t=0)$.
- Fig. 3 Comportement de la densité, $f(x,t)$, lors d'une convection pure, f est représentée en fonction de x à quatre instants différents.
- Fig. 4 Définition du "sursaut".
- Fig. 5 Comportement en convection de la densité après introduction d'une légère diffusion uniforme. La condition initiale et trois résultats en fonction de x correspondent à trois coefficients de diffusion D différents.
- Fig. 6 Comportement en convection de la densité, $f(x,t)$, résultant d'une diffusion localisée, $D = d \left| \frac{\partial f}{\partial x^2} \right|$.
- Fig. 7 Comportement en convection de la densité, $f(x,t)$, résultant du schéma avec une diffusion localisée, $D = d \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2$.
- Fig. 8 Comparaison entre les comportements en convections de trois schémas différents: éléments finis du premier ordre, éléments finis du troisième ordre, F.C.T.

FONCTIONS DE BASE (LAGRANGE)

Figure 1

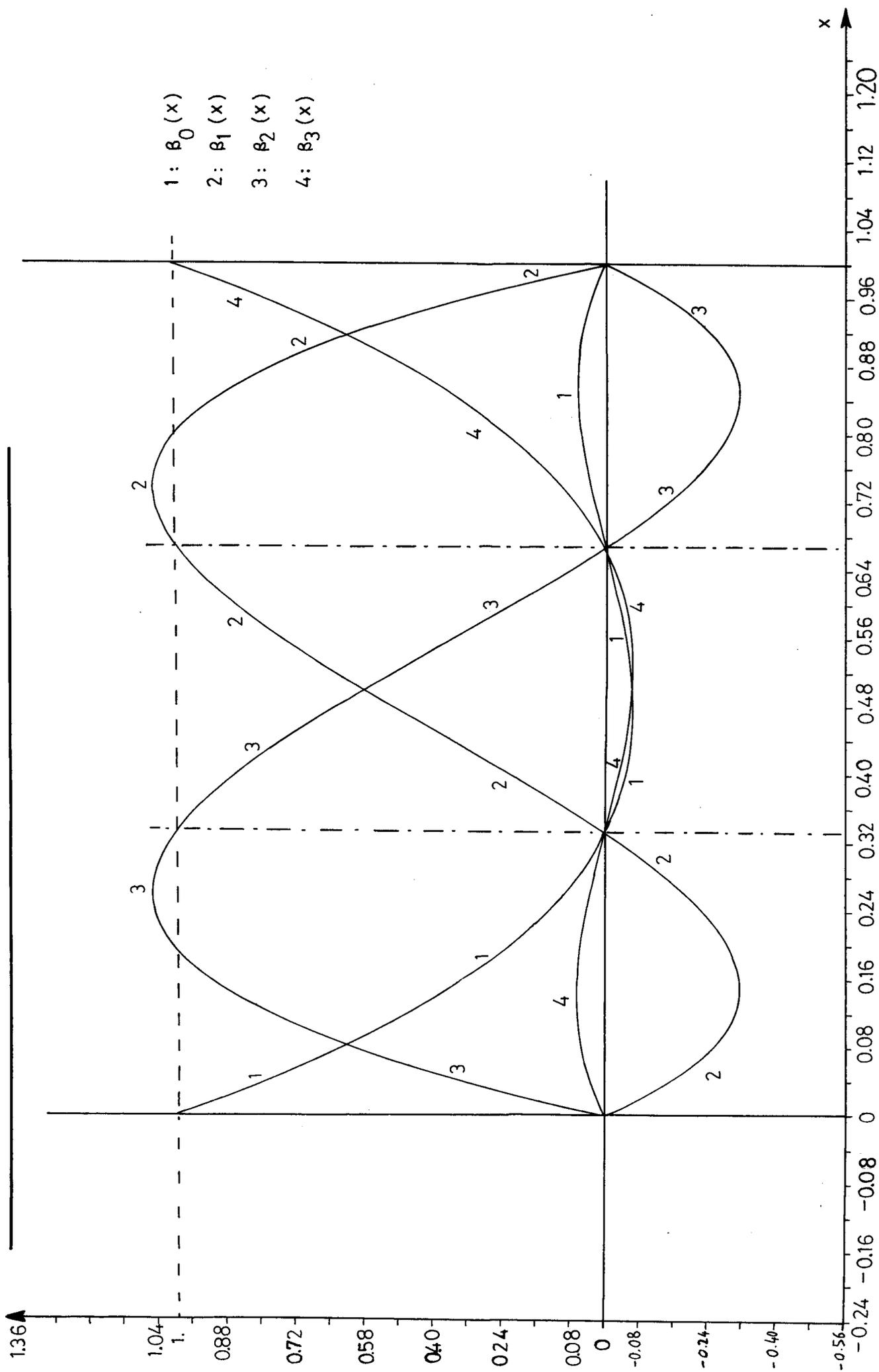


Figure 2

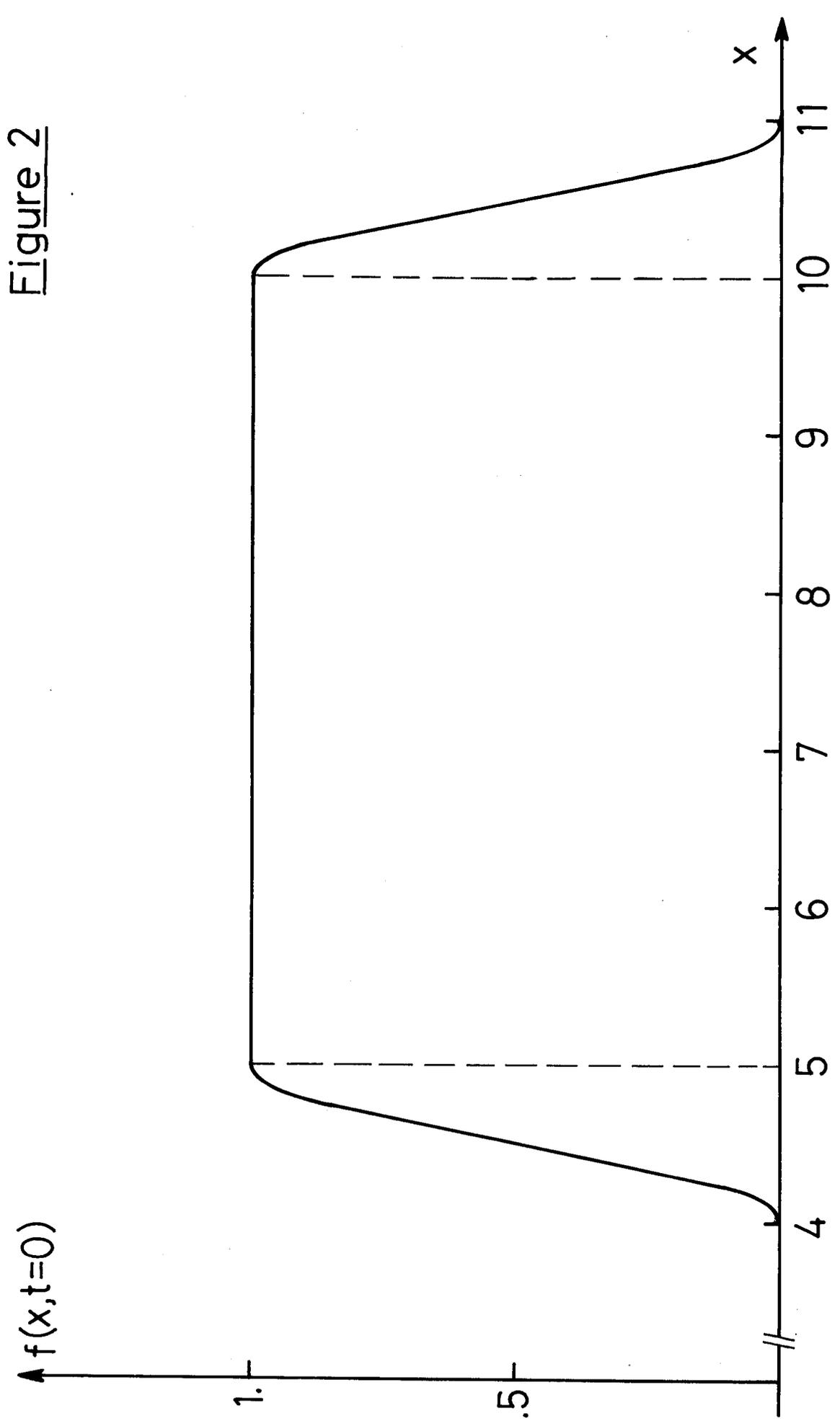


Figure 3

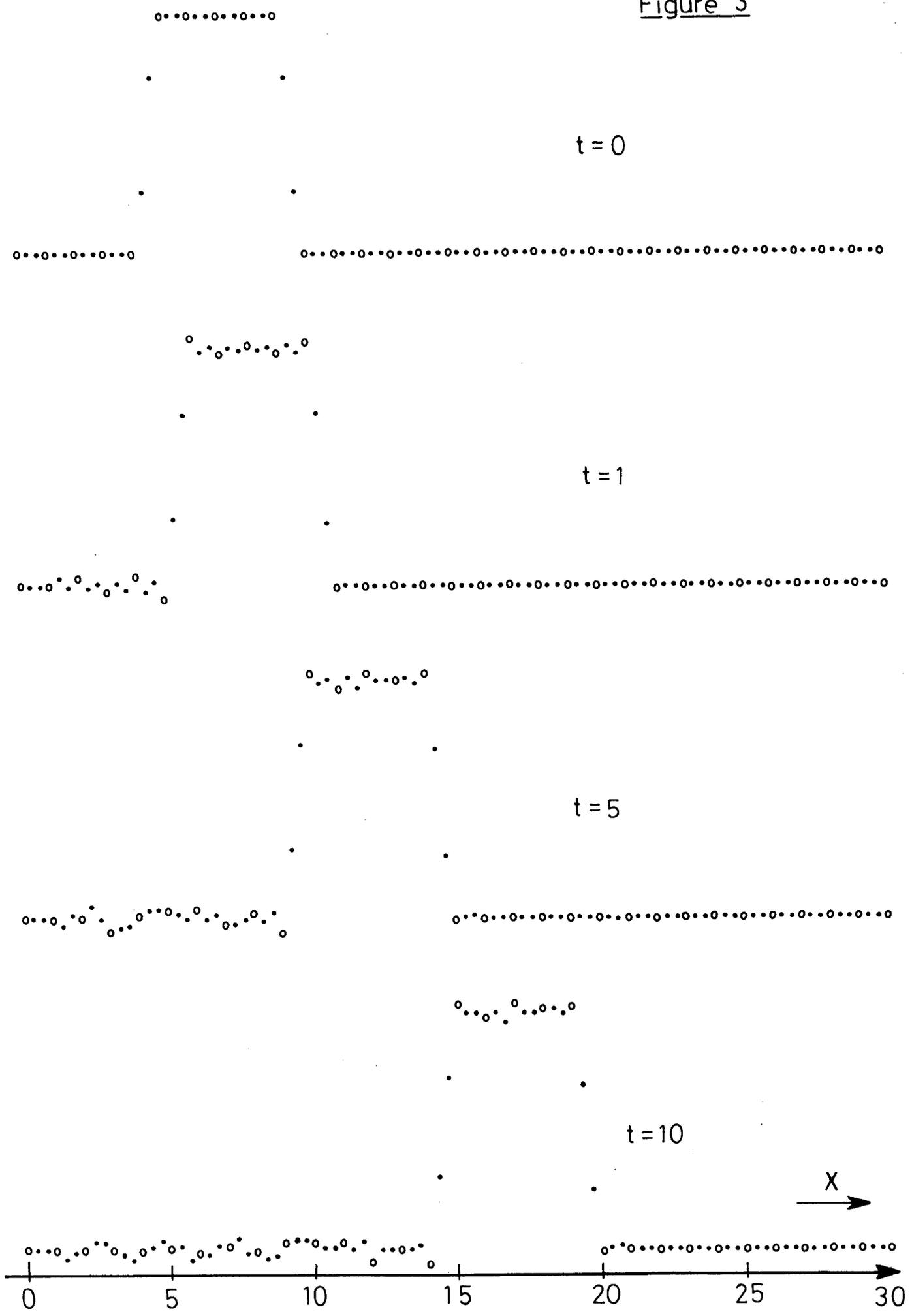


Figure 4

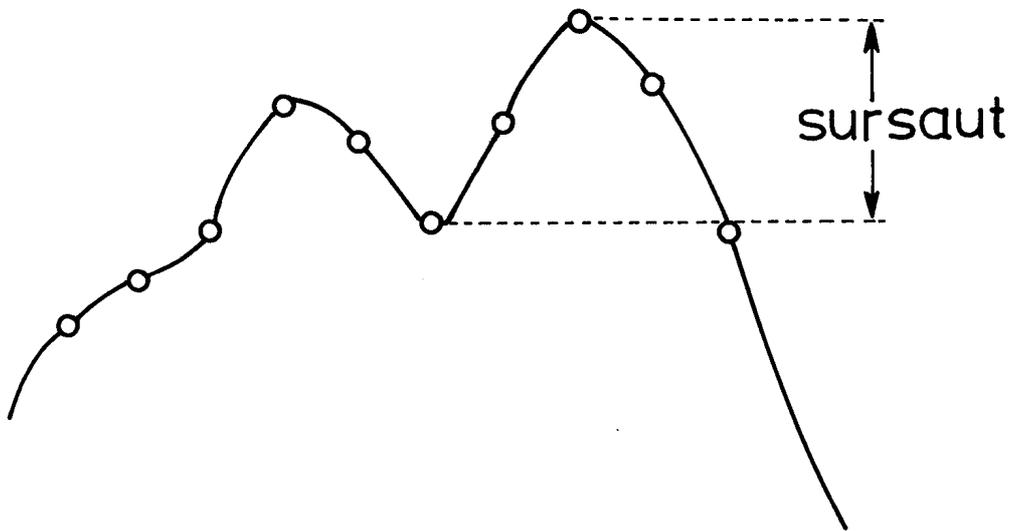
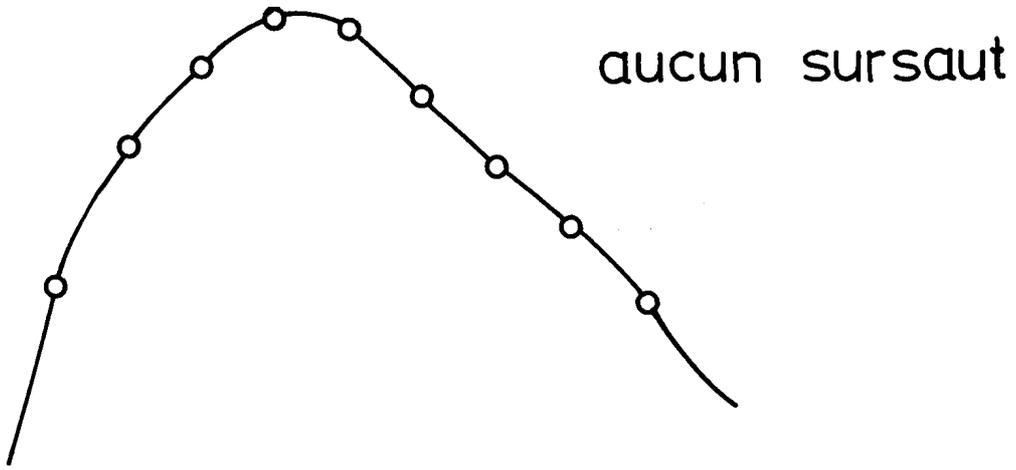


Figure 5

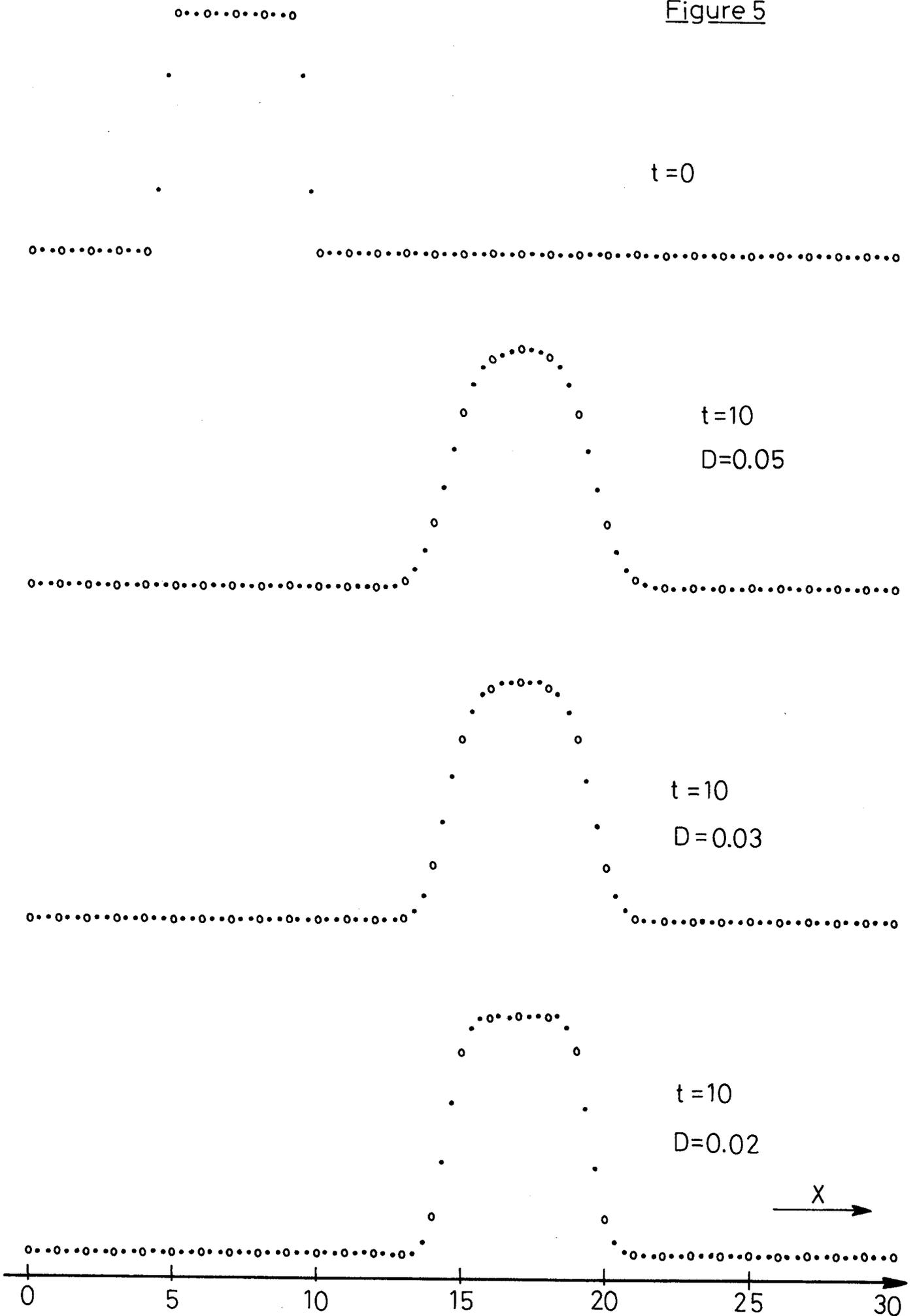


Figure 6

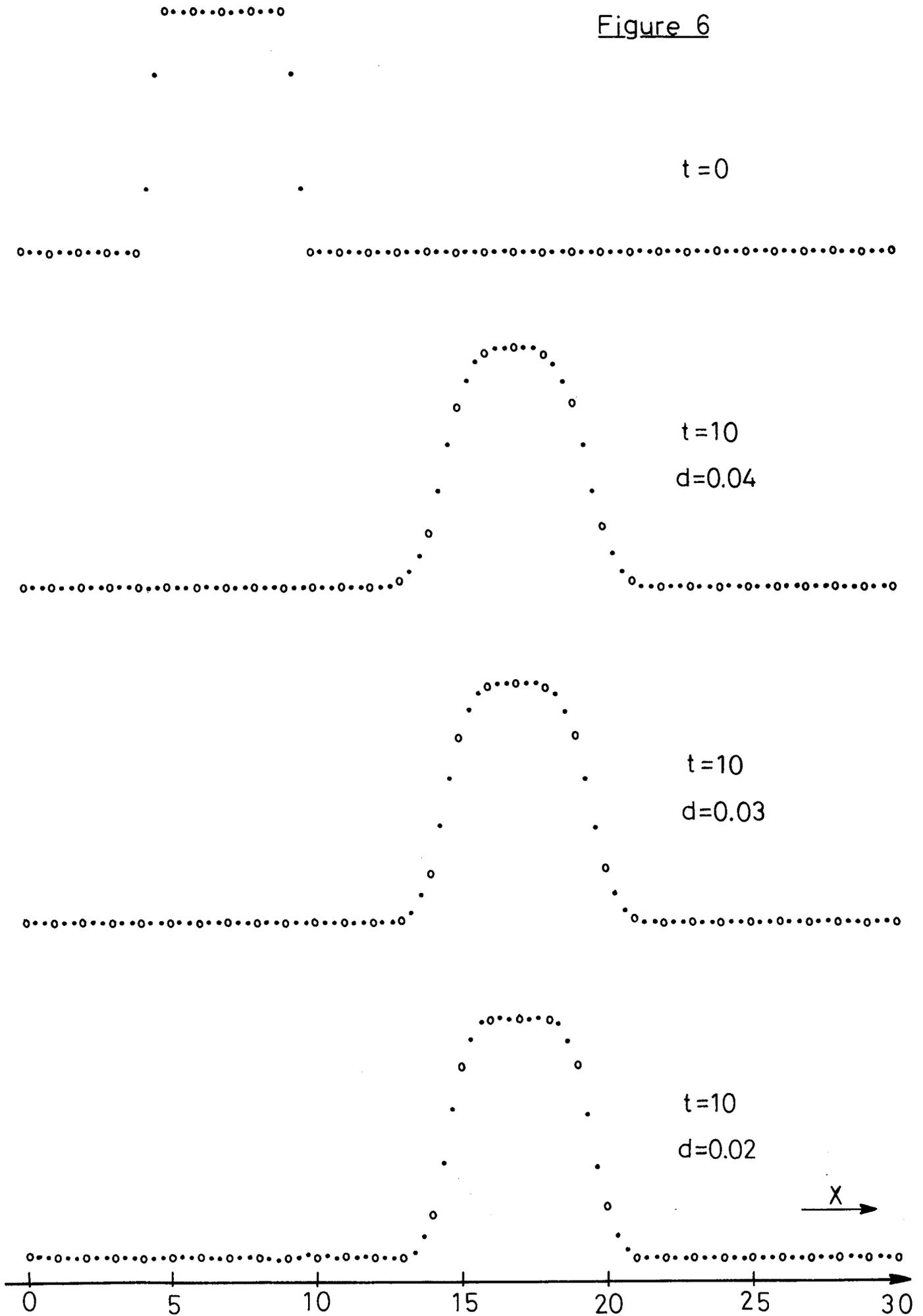
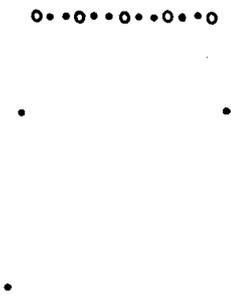
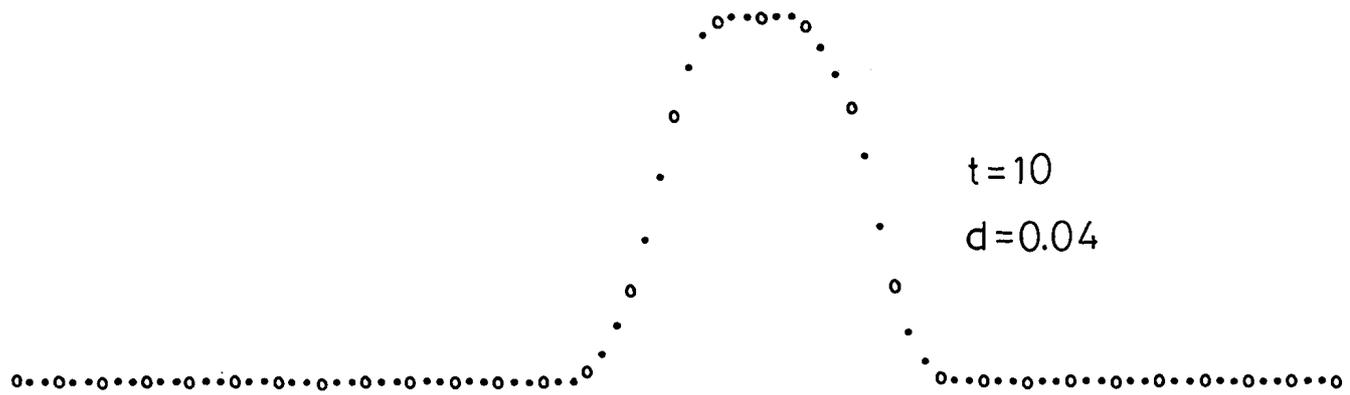


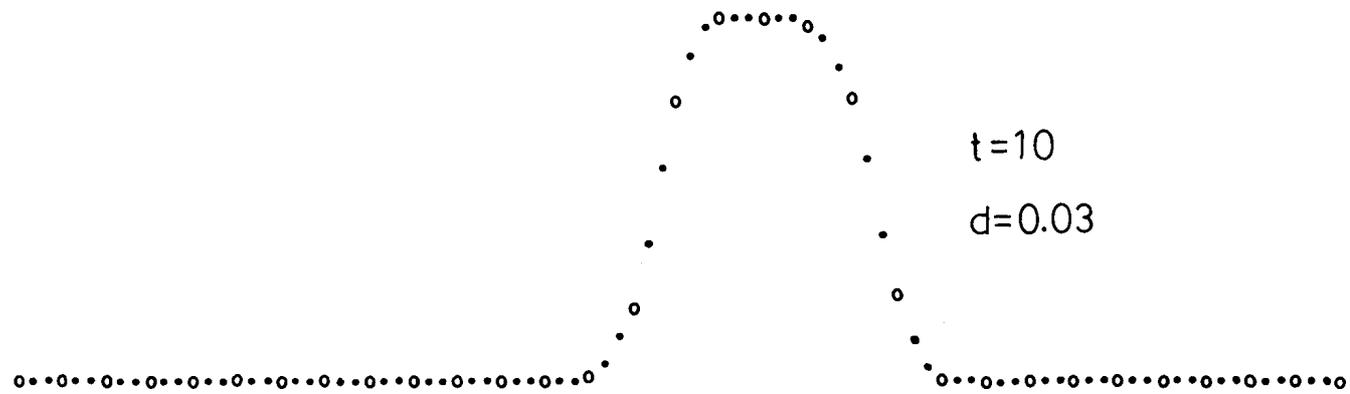
Figure 7



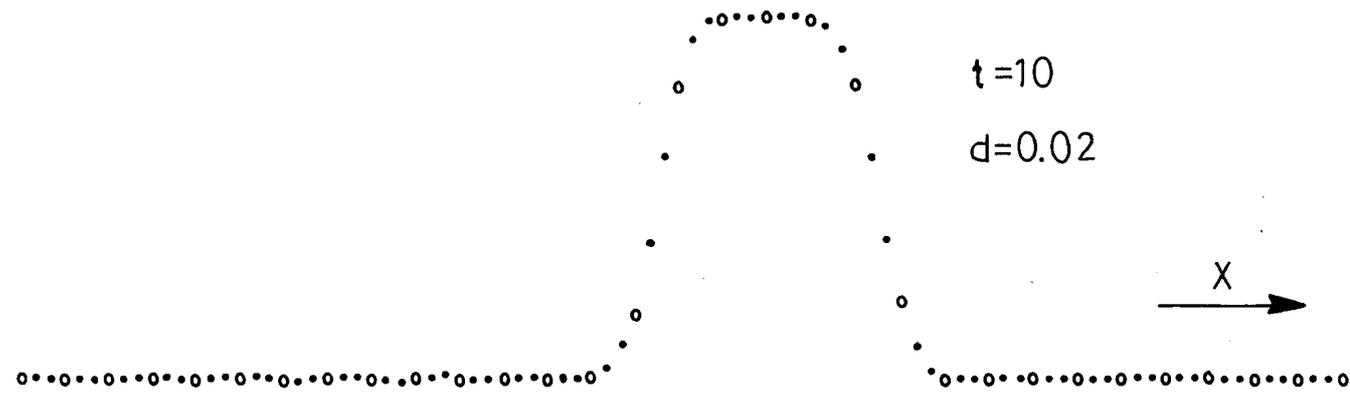
$t=0$



$t=10$
 $d=0.04$



$t=10$
 $d=0.03$



$t=10$
 $d=0.02$

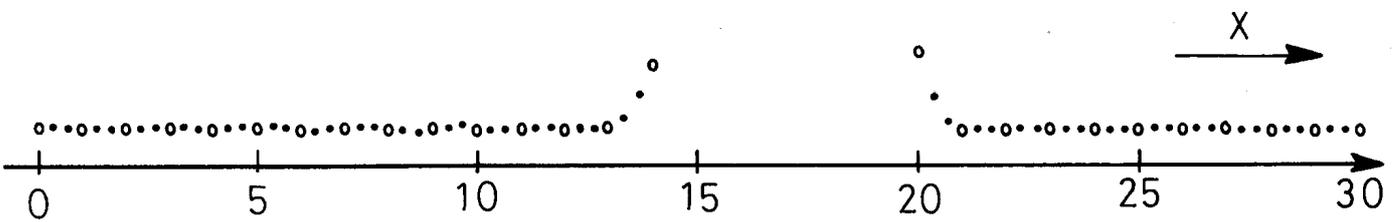
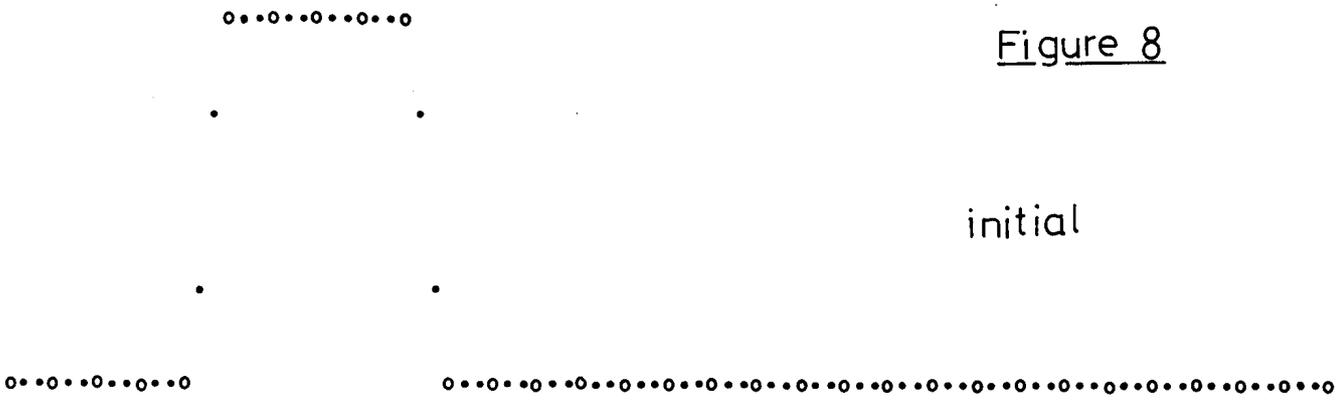


Figure 8

initial



Eléments finis du 1^{er} degré

$t=10$

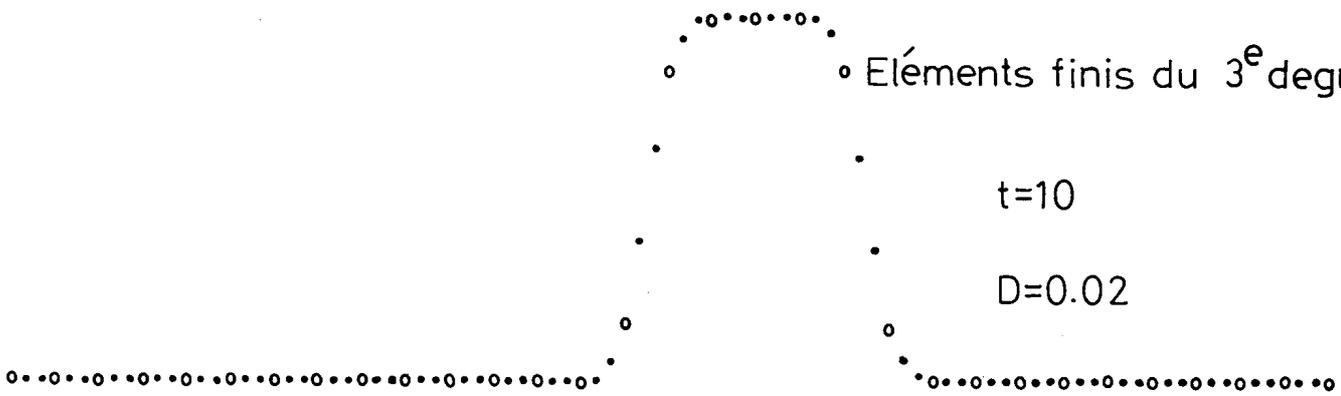
$D=0.02$



Eléments finis du 3^e degré

$t=10$

$D=0.02$



F.C.T

