

January 1964

LRP 12-64

STABILITE D'UNE COUCHE DE PLASMA CONFINEE
PAR UN CHAMP TOURNANT. MODELE ACOUSTIQUE.

F. Troyon

Abstract

The acoustic normal impedances of a half-plane and of a slab of gas taking into account the viscosity are calculated, using convenient boundary conditions at the second boundary for the slab. The analytical properties of the impedance in the complex frequency plane are investigated. It is then shown that for high enough frequency, assuming no penetration of the rotating magnetic field which confines the plasma, the surface is stable against small perturbations. The influence of thermal conductivity is briefly discussed. The problem of the accelerated plasma is also discussed.

Lausanne

Stabilité d'une couche de plasma confinée par un champ tournant.
Modèle acoustique.

F. TROYON

I. Introduction

Le problème de la stabilité d'un plasma confiné par un champ HF se réduit dans certaines approximations à l'examen des propriétés analytiques de l'impédance normale acoustique (réf. 1, 2). Comme premier pas vers l'examen du problème classique du demi-espace soutenu par un champ magnétique variable avec gravité, l'impédance acoustique du demi-espace sans gravité est considérée et ses propriétés analytiques essentielles déterminées.

Le plasma est assimilé à un fluide compressible et visqueux. La conductibilité thermique est négligée, bien qu'elle soit du même ordre de grandeur que la viscosité. Son influence sera discutée qualitativement.

Le problème du cylindre de plasma en utilisant le même modèle conduit à une expression extrêmement compliquée pour l'impédance, rendant l'analyse de ses propriétés analytiques presque sans espoir. Afin d'obtenir une idée de son comportement, l'impédance d'une couche de gaz visqueux et compressible est déterminée en imposant comme conditions aux limites à la deuxième surface les conditions analogues à celles rencontrées au centre du cylindre.

La stabilité de ce système confiné par un champ magnétique tournant est alors examinée, utilisant les résultats déjà donnés en réf. 3).

II. Détermination de l'impédance acoustique normale

Le gaz remplit le demi-espace $z \geq 0$; soit ρ_0 , p_0 , μ la densité, la pression et la viscosité du gaz respectivement. Le gaz est homogène. Définissons les deux grandeurs.

$$c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \quad , \quad \alpha = \frac{\mu}{\rho_0 c} \quad (1)$$

α a la dimension d'une longueur. Sa signification apparaîtra comme une longueur d'onde de coupure acoustique. Pour un gaz, α est de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen. c est la vitesse du son. Si u désigne la vitesse du gaz, les équations du mouvement sont après linéarisation

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\text{grad } p + \frac{\mu}{3} \text{grad } \text{div } u + \mu \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \text{div } u$$

Les ondes acoustiques ($\text{rot } u = 0$) et les ondes incompressibles ($\text{div } u = 0$) sont découplées à l'intérieur du fluide. Cherchons les solutions de la forme

$$u \sim e^{ihx + iny - kz + stc} \quad (3)$$

On trouve les relations de dispersion suivantes :

a) ondes longitudinales ($\text{rot } u = 0$)

$$k^2 = h^2 + n^2 + \frac{s^2}{1 + \frac{4s\alpha}{3}} \quad (4)$$

b) ondes transversales ($\text{div } u = 0$)

$$k_T^2 = \frac{s}{\alpha} + h^2 + n^2 \quad (5)$$

La solution s'écrit donc, omettant le facteur (3)

$$p = \gamma p_0 P$$

$$u_z = \frac{c k_L P}{s} \left(1 + \frac{4s\alpha}{3}\right) e^{-k_L z} + \frac{ih u_{0x} + in u_{0y}}{k_T} e^{-k_T z} \quad (6)$$

$$u_x = -\frac{ihc P}{s} \left(1 + \frac{4s\alpha}{3}\right) e^{-k_L z} + u_{0x} e^{-k_T z}$$

$$u_y = -\frac{inc P}{s} \left(1 + \frac{4s\alpha}{3}\right) e^{-k_L z} + u_{0y} e^{-k_T z}$$

La condition aux limites à $z = +\infty$ est automatiquement satisfaite. A la surface $z = 0$, on impose la continuité des composantes du tenseur des efforts, à savoir

$$P_{3x} = P_{3y} = 0 \quad (7)$$

puisque l'on admet que le champ magnétique n'exerce qu'une pression normale. A l'aide de ces conditions, on peut éliminer u_{ox} et u_{oy} donnant

$$p = \gamma p_0 P$$

$$v_z = \frac{R_L P c}{s} \left(1 + \frac{4\alpha s}{3}\right) \left\{ e^{-R_L z} - \frac{2 e^{-R_T z} (h^2 + n^2)}{R_T^2 + h^2 + n^2} \right\}$$

$$v_x = \frac{-ih P c}{s} \left(1 + \frac{4\alpha s}{3}\right) \left\{ e^{-R_L z} - \frac{2 R_L R_T}{R_T^2 + h^2 + n^2} e^{-R_T z} \right\} \quad (8)$$

$$v_y = \frac{-in P c}{s} \left(1 + \frac{4\alpha s}{3}\right) \left\{ e^{-R_L z} - \frac{2 R_L R_T}{R_T^2 + h^2 + n^2} e^{-R_T z} \right\}$$

La composante normale de la pression à la surface, P_{33} , est alors donnée par

$$P_{33} = p + \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} v - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (9)$$

ou

$$P_{33} = -\gamma p_0 P \left\{ \frac{4\alpha R_T R_L (h^2 + n^2)}{s(R_T^2 + h^2 + n^2)} \left(1 + \frac{4\alpha s}{3}\right) - \right.$$

$$\left. -1 - \frac{2\alpha}{3s} \left(1 + \frac{4\alpha s}{3}\right) (2R_L^2 + h^2 + n^2) \right\} \quad (10)$$

L'impédance normale à la surface $z = 0$ est donc

$$Z = \frac{P_{33}}{v_z} = \frac{4\alpha^2 (h^2 + n^2) p_0 c (R_T^2 - R_T R_L)}{s R_L} + \frac{p_0 c s}{R_L} \quad (11)$$

Considérons maintenant le cas de la couche de plasma comprise entre $z = 0$ et $z = D$. Comme conditions aux limites nous prenons pour $z = D$:

$$u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

Ces conditions sont choisies comme expliqué dans l'introduction, de façon à symétriser le problème autour de $z = D$, reproduisant ainsi une propriété du modèle cylindrique. Il suffit alors de remplacer e^{-kz} par $\text{sh } k(D-z)$ dans u_3 et par $\text{ch } k(D-z)$ dans u_x, u_y et p . On en déduit l'impédance

$$Z = \frac{4\alpha^2 \rho_0 c (h^2 + n^2) R_T^2}{s} \left(\frac{\text{ch } R_L D}{R_L \text{sh } R_L D} - \frac{\text{ch } R_T D}{R_T \text{sh } R_T D} \right) + \frac{\rho_0 c s \text{ch } R_L D}{R_L \text{sh } R_L D} \quad (13)$$

Lorsque D tend vers l'infini, (13) devient identique à (11) comme il se doit.

III. Propriétés analytiques de l'impédance

Nous allons examiner les propriétés de l'impédance comme fonction de la variable complexe s .

a) Impédance du demi-espace.

L'impédance est donnée par (11). Les seules singularités de Z sont en $k_T = 0$, $s = -\frac{3}{4\alpha}$ et $k_L = 0$. Ce sont des points de branchement. $s = 0$ n'est pas une singularité, les deux premiers termes se détruisant. $k_T = 0$ correspond à $s = -\alpha(h^2 + n^2)$. Cette singularité est donc toujours sur l'axe réel négatif et s'éloigne lorsque $h^2 + n^2$ croît. $k_L = 0$ donne deux racines données par

$$s_{\pm} = \frac{-2\alpha(h^2 + n^2)}{3} \pm \sqrt{\left[\frac{4\alpha^2}{9}(h^2 + n^2) - 1 \right] (h^2 + n^2)} \quad (14)$$

Pour $d^2(h^2 + n^2) \geq \frac{9}{4}$, les racines sont réelles et il n'y a plus de propagation d'ondes. α apparaît donc comme une longueur d'onde de coupure. Pour $d^2(h^2 + n^2) < \frac{9}{4}$, s_{\pm} décrivent un cercle centré en $s = -\frac{3}{4d}$ et de rayon $\frac{3}{4d}$. La fig. 1 montre les singularités de Z et leur lieu lorsque $(h^2 + n^2)$ varie.

Le point $s = -\frac{3}{4\alpha}$ est le point limite pour s_{\pm} lorsque $h^2 + n^2 \rightarrow \infty$. Les flèches indiquent le mouvement de s_{+} et s_{-} lorsque $(h^2 + n^2)$ croît. On a également

$$Z \rightarrow \frac{\rho_0 c s}{R_L} \sim \frac{2\sqrt{d}s}{\sqrt{3}} \quad \text{pour } s \rightarrow \infty \quad (15)$$

b) Impédance de la couche

L'impédance de la couche (13) possède des pôles seulement. On obtient leur position en faisant $k_T D = in\pi$ et $k_L D = in\pi$, soit

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad k_T^2 &= \frac{-n^2 \pi^2}{D^2} \\ \text{b)} \quad k_L^2 &= \frac{-n^2 \pi^2}{D^2} \end{aligned} \quad (16)$$

Les pôles correspondant à a) sont situés le long de l'axe réel négatif, équidistants et indiqués par des cercles sur la figure 1. $n = 0$ ne donne pas de pôle. Les points caractérisés par (16 b) sont situés sur le cercle de la figure 1 et sur l'axe réel négatif entre $s = -\frac{3}{4d}$ et $-\infty$. s_{+} et s_{-} correspondent à $n = 0$ et sont donc les pôles limites sur le cercle. Ces pôles sont marqués par des astérisques sur la figure 1. Le point $s = -\frac{3}{4d}$ est un point d'accumulation de pôles. Lorsque $D \rightarrow \infty$ les pôles deviennent de plus en plus denses et à la limite on obtient les coupures de Z données par (11). Le comportement asymptotique de Z (13) est également donné par (15). Les propriétés suivantes sont satisfaites pour $h^2 + n^2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad Z &\text{ analytique dans } \operatorname{Re} s \geq 0 \text{ et sur la frontière} \\ \text{b)} \quad \operatorname{Re} Z &> 0 \quad \text{pour } \operatorname{Re} s \geq 0 \\ \text{c)} \quad Z &\rightarrow s^{1/2} \quad \text{pour } s \rightarrow \infty \quad \operatorname{Re} s \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Les propriétés a) et c) ont déjà été démontrées. La propriété b) exprime que le gaz est dissipatif pour toutes les fréquences, ce qui est certainement vrai. Ces propriétés sont également vraies pour l'impédance du demi-espace.

Pour $h^2 + n^2 = 0$, on a

$$Z = \rho_0 c \sqrt{1 + \frac{4\alpha s}{3}} \coth \frac{sD}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha s}{3}}} \quad (18)$$

Z a un pôle à l'origine de résidu > 0 . Après soustraction de ce pôle Z satisfait aux propriétés (17).

Lorsque $h^2 + n^2 \rightarrow 0$ les deux pôles en $s+$ et $s-$ tendent vers l'origine. Pour déterminer le comportement de Z près de l'origine lors de ce passage à la limite, développons dans Z pour s petit.

$$\frac{Z}{\rho_0 c} \sim \frac{4\alpha + \frac{s}{h^2+n^2} + \frac{4\alpha^2 s}{3} + \frac{4\alpha s}{3(h^2+n^2)}}{D \left(1 + \frac{s^2}{h^2+n^2} + \frac{4}{3}\alpha s \right)} \quad (19)$$

Pour $s = 0$ $Z = \frac{4\alpha \rho_0 c}{D}$, qui est indépendant de $h^2 + n^2$. Le long de l'axe imaginaire, posant $s = iw$, on a

$$\frac{\operatorname{Re} Z}{\rho_0 c} \sim \frac{4\alpha \left[(h^2+n^2)^2 + \frac{w^4}{3} - w^2(h^2+n^2) \right]}{D \left[(h^2+n^2-w^2)^2 + \frac{16}{9}\alpha^2 w^2 (h^2+n^2)^2 \right]} \quad (20)$$

De cette relation, on tire

$$\operatorname{Re} Z \geq \frac{\alpha \rho_0 c}{D} \quad (21)$$

De l'expression (19) on voit clairement que les limites $s \rightarrow 0$ et $h^2 + n^2 \rightarrow 0$ ne sont pas permutable.

Une autre région intéressante est $\alpha^2 (h^2 + n^2) \gg 1$. On a

$$\frac{Z}{\rho_0 c} \sim \frac{4\alpha^2 (h^2+n^2) (R_T^2 - R_T R_L)}{s R_L} + \frac{s}{R_L} \quad (22)$$

Le long de l'axe imaginaire

$$\operatorname{Re} Z \geq \frac{d f_0 c \sqrt{h^2 + n^2}}{2} \quad (23)$$

Pour $s \gg \alpha (h^2 + n^2)$ on a la formule asymptotique (15).
 Pour $\frac{1}{\alpha} \ll s \ll \alpha (h^2 + n^2)$

$$Z \sim \frac{d f_0 c}{2} \sqrt{h^2 + n^2} \quad (24)$$

La figure 2 représente qualitativement le comportement de Z le long de l'axe imaginaire pour $\alpha (h^2 + n^2) \gg 1$ et $s \gg \frac{1}{\alpha}$. Notons que la courbe est entièrement dans le quadrant des deux diagonales.

Nous avons maintenant toutes les propriétés de l'impédance nécessaires pour pouvoir examiner le problème de la stabilité d'une couche de plasma apportée par un champ magnétique dans le cadre des hypothèses usuelles de la MHD (pas de pénétration du champ magnétique), mais avec viscosité.

IV. Stabilité de la couche de plasma supportée par un champ magnétique

Le champ magnétique $B(t)$ est compris entre les deux surfaces parfaitement conductrices $\mathfrak{z} = 0$ et $\mathfrak{z} = -a$. Une perturbation de la surface du plasma donnée par

$$\delta \mathfrak{z} = \varepsilon(n, h, t) e^{i h x + i n y}, \quad \frac{\varepsilon}{a} \ll 1 \quad (25)$$

produit une modification du champ magnétique $\delta B(\mathfrak{z}, t)$. On suppose que le champ est quasi stationnaire, de façon que

$$\begin{aligned} \delta B &= - \operatorname{grad} \Psi \\ \Delta \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Les conditions aux limites sont, au premier ordre

$$\begin{aligned} \zeta = -a & \quad \delta B_z = 0 \\ \zeta = 0 & \quad \delta B_z = (ihB_x + inB_y) \varepsilon(n, h, t) e^{ihx + iny} \end{aligned} \quad (27)$$

La solution de (26) et (27) est

$$\psi = \frac{-i(hB_x + nB_y) \operatorname{ch}\{\zeta + a\sqrt{h^2 + n^2}\}}{\sqrt{h^2 + n^2} \operatorname{sh}\{a\sqrt{h^2 + n^2}\}} \varepsilon(n, h, t) e^{ihx + iny} \quad (28)$$

On en tire, au premier ordre toujours, l'accroissement de pression magnétique sur la surface, δp_m .

$$\delta p_m = \frac{-(hB_x + nB_y)^2 \operatorname{ch} a\sqrt{h^2 + n^2}}{\sqrt{h^2 + n^2} \operatorname{sh} a\sqrt{h^2 + n^2}} \varepsilon(n, h, t) e^{ihx + iny} \quad (29)$$

Nous supposons maintenant que le champ est rotatif

$$\begin{aligned} B_x &= B \cos \omega t \\ B_y &= B \sin \omega t \end{aligned} \quad (30)$$

On a alors

$$\delta p_m = -p_0 \left(\sqrt{h^2 + n^2} + \frac{2hn}{\sqrt{h^2 + n^2}} \sin 2\omega t + \frac{h^2 - n^2}{\sqrt{h^2 + n^2}} \cos 2\omega t \right) \frac{\operatorname{ch} a\sqrt{h^2 + n^2}}{\operatorname{sh} a\sqrt{h^2 + n^2}} \varepsilon(n, h, t) \quad (31)$$

L'équation des petits mouvements de la surface est donc

$$\delta p_m = \int_0^t R(n, h, t-t') \dot{\varepsilon}(n, h, t') dt' \quad (32)$$

dans l'hypothèse que la surface est déformée à l'instant $t = 0$.

$R(h, n, t)$ est la transformée inverse de Laplace de l'impédance acoustique $Z(n, h, \frac{s}{c})$. Explicitement

$$\begin{aligned} \frac{p_0 \operatorname{ch} a\sqrt{h^2 + n^2}}{\operatorname{sh} a\sqrt{h^2 + n^2}} \left\{ \sqrt{h^2 + n^2} + \frac{2hn}{\sqrt{h^2 + n^2}} \sin 2\omega t + \frac{h^2 - n^2}{\sqrt{h^2 + n^2}} \cos 2\omega t \right\} + \\ + \int_0^t R(n, h, t-t') \dot{\varepsilon}(n, h, t') dt' = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Le problème de la stabilité des solutions d'équations de ce type est traité d'une façon approfondie dans une publication séparée³⁾ et seuls les résultats seront mentionnés ici.

Définissons la fonction $g(s)$

$$g(s) = \frac{-1}{p_0 \sqrt{h^2+n^2} \frac{ch a \sqrt{h^2+n^2}}{sh a \sqrt{h^2+n^2}} + s Z(\frac{s}{\xi})} \quad (34)$$

et

$$A = \frac{p_0 \sqrt{h^2+n^2} ch a \sqrt{h^2+n^2}}{sh a \sqrt{h^2+n^2}} \quad (35)$$

Pour h et n donnés les propriétés (17) sont suffisantes pour qu'il existe une fréquence Ω telle que pour $\omega \geq \Omega$ les solutions de (33) soient stables³⁾. Un critère simple et suffisant qui détermine Ω est

$$A^2 |g(s) g(s+2i\omega)| < 1 \quad \omega \geq \Omega \quad (36)$$

pour tout s dans $\text{Re } s \geq 0$ ^{et} sur sa frontière. En fait, comme $g(s) g(s+i\omega)$ est une fonction analytique de s il suffit de satisfaire à (36) le long de l'axe imaginaire. L'existence de Ω fini est basée sur le fait que $g_{\max}(s)$ est fini et que $g(s)$ décroît monotoni- quement à l'infini. Si, lorsque n et h varient, $g_{\max}(s)$ n'est pas borné Ω ne sera pas bornée non plus. C'est ce qui se produit lorsque $h^2 + n^2 \rightarrow 0$, bien que la valeur $h^2 + n^2 = 0$ elle-même ne produise aucune difficulté. C'est la conséquence de la discontinuité mention- née en section II (19). Ce problème est résolu simplement par l'em- ploi du critère énoncé en réf. 3) à la suite de la formule (46).

Rappelons le brièvement. Définissons les fonctions

$$D_l(s) = 1 + \sum_{\substack{\ell=1,3,5,\dots \\ n=-\ell}}^{\infty} (-1)^{\frac{\ell+1}{2}} \left(\frac{A}{2}\right)^{2\ell} g(s+2i\ell\omega) \dots g(s+2i\ell\omega+2i\ell\omega) \quad (37)$$

Le prime sur le signe sommation indique que les termes contenant $g(s)$ doivent être omis

$$D_2(s) = \sum_{\substack{\ell=0, \dots, \ell \\ \ell=1, 3, \dots}}^{+\infty} (-1)^{\frac{\ell+1}{2}} \left(\frac{A}{2}\right)^{2\ell} g(s-2i\ell w) \dots g(s-2iw) g(s+2iw) \dots g(s+2i(\ell-1)w) \quad (38)$$

Formons la fonction $G(s)$

$$G(s) = p_0 \sqrt{h^2+n^2} \frac{cha\sqrt{h^2+n^2}}{sha\sqrt{h^2+n^2}} + sZ\left(\frac{s}{c}\right) - \frac{D_2(s)}{D_1(s)} \quad (39)$$

Pour $a \sqrt{h^2+n^2} \ll 1$ on peut écrire

$$G(s) = \frac{p_0}{a} + sZ(s/c) - \frac{D_2(s)}{D_1(s)} \quad (40)$$

On peut choisir un Ω de façon que le critère (36) soit satisfait pour $s + ikw$ à l'extérieur d'un voisinage de l'origine, pour tout n et h . $D_1(s)$ et $D_2(s)$ sont alors analytiques dans le voisinage de l'origine et $D_1(s)$ n'y a pas de zéro. Pour s réel $D_1(s)$ et $D_2(s)$ sont réels et on a

$$\left| \Im_m \frac{D_2(s)}{D_1(s)} \right| \leq \left| \Im_{ms} \right| F(\omega) \quad (41)$$

avec
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) = 0 \quad (42)$$

choisissant Ω tel que

$$F(\omega) < \frac{\alpha \rho_0 c}{D} \quad \omega \geq \Omega \quad (43)$$

On a
$$\frac{\Im_m G(iy)}{y} > 0 \quad (44)$$

pour y dans le voisinage de l'origine, ce qui assure que la courbe représentant $G(iy)$ n'entoure pas l'origine (cf. réf. 3, fig. 2 et les explications attenantes). Comme ordre de grandeur de Ω , on trouve

$$\Omega \sim \left(\frac{cD}{a^2}\right)^{2/5} \left(\frac{c}{d}\right)^{3/5} \quad (45)$$

avec un coefficient qui ne peut être déterminé que numériquement. Asymptotiquement lorsque (45) devient très grand le coefficient est $\frac{3}{\sqrt{2}} \gamma^2$.

L'autre source d'ennui possible vient de ce que lorsque n et (ou) $h \rightarrow \infty$ $A \rightarrow \infty$ comme $p_0 \sqrt{h^2 + n^2}$.

A priori on peut donc penser que l'on doit prendre des valeurs de Ω de plus en plus grandes pour satisfaire (36) comme dans le cas du modèle des particules libres (réf. 2 et 3). En fait ce n'est pas le cas, puisque de (23) on déduit

$$|g(iy)| \leq \frac{c}{d\gamma p_0 |y| \sqrt{h^2 + n^2}} \quad (46)$$

et du fait que $\Im_m Z(iy) \leq \Re Z(iy)$

$$|g(iy)| < \frac{\sqrt{2} a}{p_0 \sqrt{h^2 + n^2}} \quad (47)$$

et la condition (36) est satisfaite pour

$$\omega \geq \frac{\sqrt{2} c}{d\gamma} \quad (48)$$

Le fait que Ω soit borné subsiste si A est multiplié par un facteur constant, ce qui est le cas dans la géométrie cylindrique.

En conclusion, il existe une fréquence Ω au-dessus de laquelle toutes les solutions de (33) sont stables pour tout n et h .

Il est utile de récapituler quelles sont les propriétés de l'impédance utilisées :

- 1) l'analyticité de $Z(s)$ dans $\Re s \geq 0$ et sur la frontière
pour tout n et h .
- 2) $\Re Z(iy) \geq M > 0$. M indépendant de n, h (49)
- 3) pour $h^2 + n^2 \rightarrow \infty$ $\text{Arg } Z(iy) \leq \frac{\pi}{4}$ et $\Re Z(iy) \geq \text{const} \sqrt{h^2 + n^2}$

V. Influence de la conductibilité thermique et d'une accélération du plasma

L'introduction de la conductibilité thermique ne peut qu'introduire un amortissement supplémentaire des ondes acoustiques. Or d'après les conditions (49) un accroissement de $\Re Z(iy)$ ne peut que favoriser la stabilité (conditions moins restrictives sur la fréquence).

L'introduction d'une accélération du plasma normale à la surface et d'amplitude g produit deux modifications. La première est l'introduction d'un terme additionnel dans l'équation (35) pour tenir compte du fait que p_{33} pour $\mathfrak{z} = \varepsilon$ et $\mathfrak{z} = 0$ sont différents. On écrira donc

$$\delta p_m = \int_0^t R(h, h, t-t') \dot{\varepsilon}(h, n, t') dt' + \rho_0 g \varepsilon(h, h, t) \quad (50)$$

où ρ_0 est la densité initiale en $\mathfrak{z} = 0$. Le terme additionnel est déstabilisant lorsque $g < 0$. Pour s'assurer que la face de rappel moyenne est opposée au déplacement, on doit donc avoir

$$g > \frac{-c^2}{\gamma^2 a} \quad (51)$$

La deuxième modification est un changement d'impédance Z . Les conditions (49.1), (49.2), sont certainement satisfaites. La condition (49.3) demande un examen. Utilisant l'index 0 pour désigner l'état initial à la surface et admettant que la viscosité cinématique est constante, ce qui revient à sous-estimer la dissipation, les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \beta v_z - \gamma \operatorname{div} v$$

$$\beta = \frac{\gamma g}{c^2} \quad (52)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta v_z - \operatorname{div} v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \vec{g}(p - \rho) - \frac{c^2}{\gamma} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{3\rho_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} v + \frac{\mu}{\rho_0} \operatorname{lap} v$$

où p et ρ sont définis par

$$p = \frac{\delta p}{\rho_0} e^{\beta z} \quad \rho = \frac{\delta \rho}{\rho_0} e^{\beta z} \quad (53)$$

Lorsque $h^2 + n^2 \rightarrow \infty$, les dérivées d'espace dominant et on voit ainsi que les termes en β deviennent tous négligeables. L'impédance devient donc identique à l'impédance sans gravité. On peut dire que la propriété (49.3) de l'impédance reste correcte. On en conclut la possibilité de trouver une fréquence Ω telle que pour $\omega \geq \Omega$ le système soit stable.

En fait, il est physiquement raisonnable d'admettre que dans le cadre du modèle acoustique, les propriétés (49) sont indépendantes de la géométrie.

On peut alors conclure avec le maximum de vraisemblance que dans le cadre du modèle acoustique avec dissipation il est possible de trouver une fréquence du champ magnétique confinant telle que le plasma soit stable si la force moyenne de rappel est opposée à tout déplacement de la surface.

Dans un autre rapport²⁾, le modèle des particules libres était considéré et on en tirait la même conclusion. On peut alors considérer comme acquise la possibilité d'obtenir un confinement stable d'un plasma confiné par un ou plusieurs champs alternatifs pour des géométries où le confinement statique serait instable ou même impossible. Un

exemple discuté en 2) est le pinch linéaire superposé sur un θ -pinch.

Le problème suivant à aborder est l'influence de la profondeur finie de pénétration du champ magnétique sur les résultats atteints jusqu'ici.

Références

- 1) E.S. Weibel : Phys. Fluids, 3, 946 (1960)
- 2) F. Troyon : Stabilité d'une colonne de plasma. Modèle des particules libres - LRP 10-63
- 3) F. Troyon : Sur la stabilité d'un système linéaire passif dont un élément change périodiquement - LRP 11-63.

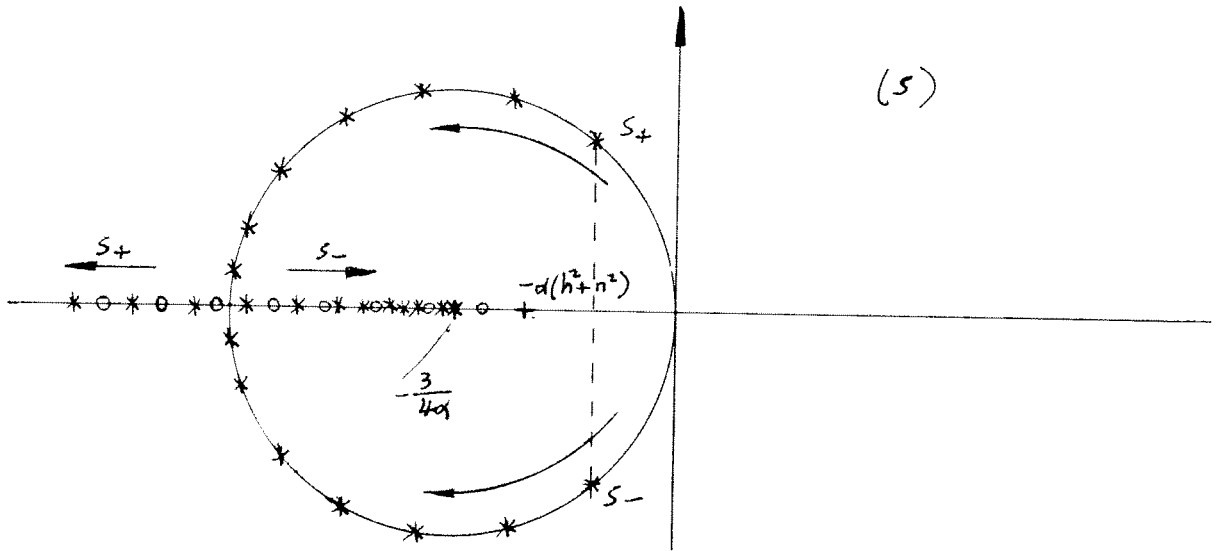


Figure 1
Les singularités de Z dans le plan complexe

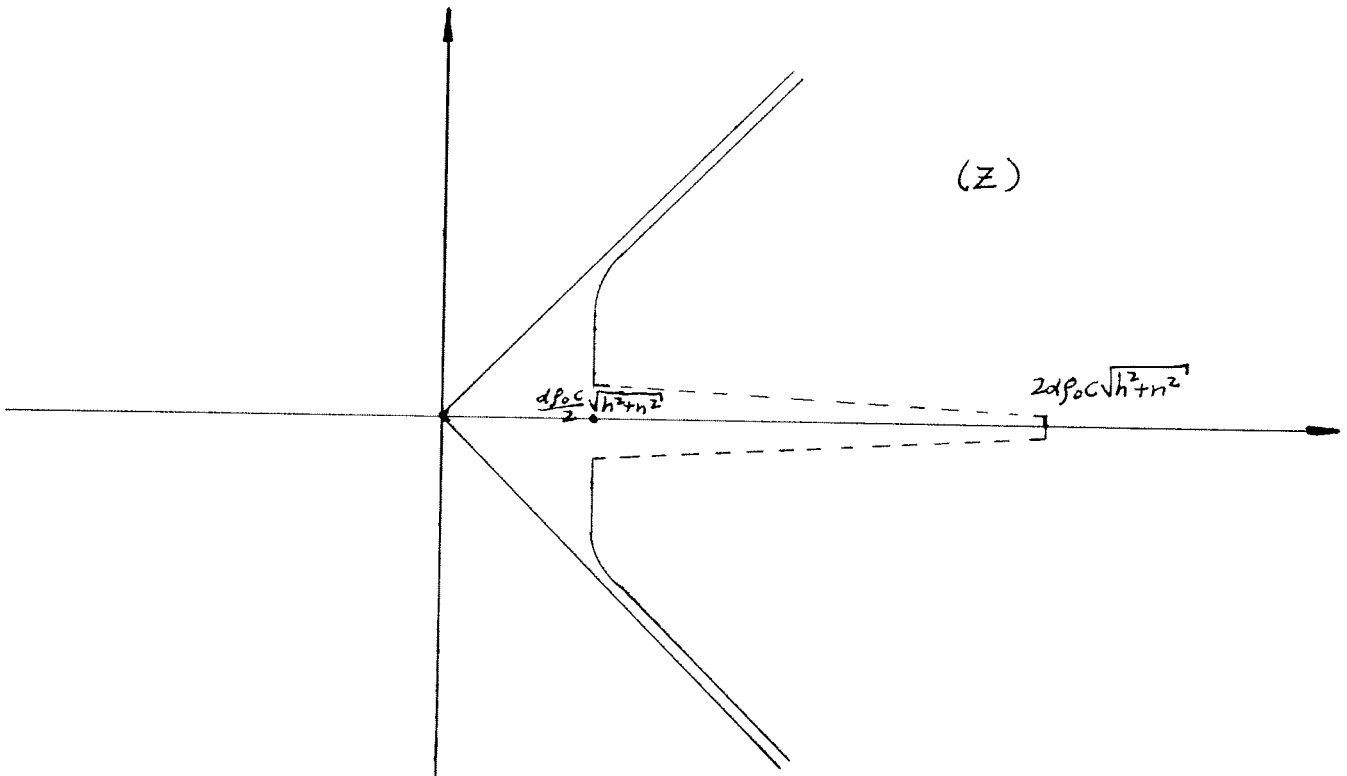


Figure 2
L'impédance de Z le long de l'axe imaginaire pour $d^2(h^2 + n^2) \gg 1$