

ÉTUDE DES FONDEMENTS PHYSIQUES POSSIBLES DES CONCEPTS NUMÉRIQUES UTILISÉS DANS LES MÉTHODES D'ACOUSTIQUE GÉOMÉTRIQUE

THÈSE N° 3679 (2006)

PRÉSENTÉE LE 13 DÉCEMBRE 2006

À LA FACULTÉ SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR
Laboratoire d'électromagnétisme et acoustique
SECTION DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET ÉLECTRONIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Thomas GUIGNARD

ingénieur électricien diplômé EPF
de nationalité suisse et originaire de Le Lieu (VD)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. H. Bourlard, président du jury
Prof. J. R. Mosig, Prof. V. Martin, directeurs de thèse
Dr C. Faller, rapporteur
Prof. J.-D. Polack, rapporteur
Prof. M. Vorländer, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Lausanne, EPFL

2006

Version abrégée

Résumé

Le travail présenté ici propose l'étude de la méthode des rayons acoustiques. Celle-ci décrit le champ de pression à l'aide d'une analogie avec les rayons lumineux : le concept d'onde est ainsi remplacé par celui de « rayon acoustique », dont on décrit le chemin dans l'espace étudié à l'aide de réflexions sur les obstacles rencontrés. On postule une réflexion spéculaire, c'est à dire que seul l'entourage immédiat du point de réflexion (le point où le rayon rencontre la paroi) est pris en compte. Une éventuelle absorption par cet obstacle est représentée par une impédance acoustique localisée en ce point.

Une telle méthode, aussi dite d'acoustique géométrique, est largement utilisée lorsque l'on désire calculer les caractéristiques acoustiques d'un local : temps de réverbération dans une salle de concert, etc. Dans ce cas où le domaine acoustique étudié est de dimensions importantes par rapport à la longueur d'onde et où l'information recherchée réside avant tout dans les premières réflexions, la qualité de prédiction fournie par la méthode des rayons est suffisante et se vérifie expérimentalement. En revanche, dans des géométries plus petites où l'on recherche une solution faisant intervenir un grand nombre de réflexions, on constate l'imprécision (notamment en terme de position de pics de résonance) des résultats de l'acoustique géométrique par rapport à une solution obtenue par un autre biais, comme les éléments finis. Cette différence est en particulier sensible à proximité des limites du domaine étudié (proche des parois).

S'inscrivant tout d'abord dans une volonté à long terme d'étudier si une amélioration de la méthode des rayons est possible, le travail présenté ici propose de substituer une approche rigoureuse (issue d'une résolution de l'équation de Helmholtz par méthode intégrale) au parallèle intuitif avec les rayons lumineux.

En effet, avant de pouvoir prétendre améliorer une méthode, il est important d'en connaître les fondements. On se propose ici de séparer deux phénomènes intervenant dans les problèmes de réflexion, et d'en étudier les effets sur la qualité de prédiction du champ acoustique par méthode géométrique.

Dans un premier temps, on étudie le concept de sources images donnant naissance aux rayons acoustiques. Ce faisant, on propose une description a priori inédite qui souligne le lien étroit existant entre la représentation du champ acoustique par une somme de rayons issus de sources images, et celle obtenue par résolution intégrale.

Dans un second temps, on étudie l'effet de la non localité que présuppose l'emploi

de la réflexion spéculaire. Pour ce faire, on remplace le coefficient (local), classiquement utilisé pour décrire la réflexion sur un obstacle, par un coefficient (non local) identifié à partir d'une méthode intégrale tenant compte de toute l'étendue de l'obstacle rencontré.

Les méthodes ainsi proposées sont évaluées numériquement dans des géométries de complexité croissante : une seule paroi, puis deux, avant de finir avec un espace fermé par plusieurs parois. Ceci permet d'en étudier les effets sur un nombre de réflexions de plus en plus important.

Mots-clefs

Acoustique géométrique, méthode des rayons, méthode des sources-images, méthode intégrale, développement en série, coefficient de réflexion, réflexion spéculaire, réflexion non-locale, diffusion acoustique, diffraction acoustique, réflexion acoustique

Abstract

The subject of the work presented here is the study of the acoustical ray method, which aims at describing a pressure field by an analogy with light rays. The concept of a wave is therefore replaced by the concept of "acoustical rays", whose paths through the domain under study are described by their reflections off the obstacles they encounter. The postulate of specular reflection is made : only the direct neighborhood of the point where the incoming ray meets the obstacle is taken into account. When absorption is considered at that particular point, it is represented by a localized acoustic impedance.

Such a method, also called geometrical acoustics, is widely used for the computation of the acoustical characteristics of a room, for example the reverberation time in a concert hall, etc. In this case, the dimensions of the domain under study are several orders of magnitude larger than the considered wavelengths. Moreover, the information sought resides mostly in the first reflections. In these circumstances, the quality of prediction obtained is satisfactory, and is experimentally verified. Conversely, in geometries of smaller size and when a solution combining a greater number of reflections is required, simulations show a discrepancy between results obtained with the geometrical solution and those obtained via another method, such as finite elements. These differences, mostly in terms of frequency shifts of resonance peaks, are particularly visible in positions near the walls of the domain under study.

With the aim of eventually finding ways to improve the prediction quality of the geometrical method, the work proposes a substitute for the intuitive origin of image sources. In fact, a parallel with a form of a solution of the Helmholtz equation by the integral method is shown. With this novel representation, image sources appear to have a more rigorous base than with the optical analogy.

Before being able to improve a method, a deep understanding of its foundations is required. Here, the study of two phenomena occurring in reflection problems is proposed, and their influence on the results obtained with the geometrical method is observed.

First, the very concept of image sources, which give rise to acoustical rays, is studied.

By doing this, an a priori new description of image sources is proposed, which shows a close parallel between the representation of the acoustical field by a sum of rays emitted by image sources and a solution obtained by the integral method.

Secondly, the validity of non locally reacting wave reflection, which is implied in geometrical acoustical methods, is studied. This is achieved by replacing the specular (local) coefficient classically used to describe reflection upon an obstacle with a non local coefficient, obtained by identification from an integral representation.

Both methods are evaluated in geometries of growing complexity : spaces bounded by one, then two walls, and finally closed by several walls. This enables the study of an increasing number of reflections.

Keywords

Geometrical acoustics, ray-method, image-sources method, mirror-sources method, integral method, series development, reflection coefficient, specular reflection, non-local reflection, sound diffusion, sound diffraction, sound reflection

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet fédéral CTI/KTI 6604.2 et 7294.1 de collaboration entre le Laboratoire d'Électromagnétisme et d'Acoustique (LEMA) de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) et l'entreprise *Rieter Automotive Management AG*, à Winterthur.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier ici mon directeur de thèse, le Prof. Vincent Martin, directeur de recherche au Laboratoire de Mécanique Physique à l'Université Pierre et Marie Curie de Paris. Durant plus de trois ans de travail commun, il a guidé et soutenu ma recherche, m'a transmis son savoir et sa méthode et surtout m'a accordé sa confiance.

Merci ensuite au Prof. Juan Ramon Mosig, directeur du Laboratoire d'Électromagnétisme et d'Acoustique (LEMA) de l'EPFL de m'avoir accueilli dans son équipe et d'avoir assumé la responsabilité de mon travail en acceptant d'être mon directeur de thèse administratif. Grâce à ses remarques, j'ai pu à plusieurs reprises profiter d'un regard extérieur au domaine précis de ma recherche, et apprécier concrètement les liens étroits qui relient l'acoustique à l'électromagnétisme, justifiant leur présence au sein d'un même laboratoire.

Ce travail n'aurait pu se réaliser sans le concours de l'entreprise *Rieter Automotive Management AG* à Winterthur, partenaire de deux projets de recherche fédéraux CTI/KTI. Merci avant tout au Dr. Théophile Courtois, qui a suivi mon travail avec intérêt durant ces deux projets, pour son aide et son amitié. Je ne veux également pas oublier l'équipe de recherche chez *Rieter*, que j'ai eu plaisir à côtoyer lors de mes séjours répétés dans leur entreprise.

Merci au Prof. Michael Vorländer, directeur de l'Institut für Technische Akustik de l'université d'Aix-la-Chapelle (Aachen), au Prof. Jean Dominique Polack, directeur du Laboratoire d'Acoustique Musicale à l'université Pierre et Marie Curie à Paris et au Dr. Christof Faller, associé de recherche et chargé de cours au Laboratoire de Communications Audiovisuelles de l'EPFL d'avoir porté leur jugement sur ce travail.

Je ne saurais oublier de saluer toute l'équipe du LEMA et son directeur pour leur aide, leur amitié et tous les bons moments passés ensemble. Merci au Prof. Mario Rossi, ancien directeur du groupe acoustique, pour son accueil.

Je remercie particulièrement l'équipe des acousticiens passés et présents du LEMA : Xavier, Pierre-Jean, Hervé, Philippe, Romuald, Delphine, Patrick, Roland, Romain et François pour leurs compétences scientifiques, techniques, musicales et amicales.

Enfin, je ne pourrai jamais assez remercier pour leur patience et leur soutien toutes celles et ceux qui m'ont accompagné tout au long de ce travail : mes parents, ma famille, mes amis d'ici et d'ailleurs, et tout particulièrement Florence, dont la présence compréhensive fut précieuse durant les derniers mois de ce travail. Tumhare pyār aur prōtsāhan ke liye bahut bahut dhan'yavād.

Table des matières

Version abrégée	i
1 Introduction	1
1.1 Contexte scientifique et état de l'art	2
1.1.1 La méthode intégrale	2
1.1.2 Les méthodes par éléments finis	3
1.1.3 Les méthodes géométriques ou méthodes des rayons	4
1.2 Contexte industriel	7
1.3 Objectifs et définition des objets d'étude	8
1.4 Plan du mémoire	12
2 Méthode intégrale	13
2.1 Établissement du problème	13
2.1.1 Source de pression ponctuelle	14
2.1.2 Fonction de Green en espace bidimensionnel infini	15
2.2 Résolution dans l'espace semi-infini	15
2.2.1 Méthode de résolution	17
2.2.2 Une propriété du potentiel de double couche	18
2.2.3 Établissement de la pression sur la paroi	19
2.2.4 Résolution	20
2.3 Généralisation au cas de l'espace quart-infini et du secteur ouvert	22
2.3.1 Pression sur les parois	23
2.3.2 Résolution	24
2.4 Mise en oeuvre logicielle	26
2.4.1 Espace semi-infini	26
2.4.2 Secteur ouvert	29
Première partie : Diffraction acoustique et justification de la présence de sources images	31
3 Méthode des Sources Images	33
3.1 Principe	33

3.2	Simplifications	34
3.3	Mise en oeuvre	36
3.3.1	Étapes de la méthode	36
3.3.2	Programmes utilisés	38
3.4	Exemples d'application	41
3.4.1	Secteur ouvert	41
3.4.2	Cavité fermée	43
3.5	Inconvénients	43
4	Justification analytique des sources images	47
4.1	Préalables	47
4.2	Secteur ouvert à parois réverbérantes	49
4.3	Interprétation via le principe de Huygens	50
4.4	Extension au cas de parois absorbantes	52
4.5	Extension à l'intérieur du domaine	57
5	Étude numérique de l'influence des sources images	63
5.1	Situation d'étude	63
5.2	Critère de convergence	65
5.3	Convergence dans le cas de l'espace quart-infini	66
5.4	Effet d'une source supplémentaire	67
5.4.1	Convergence faible	69
5.4.2	Convergence forte	70
5.5	Bilan	73
6	Ajustement de position de la source complémentaire	77
6.1	Démarche	77
6.2	Remarque sur l'ordre des termes	78
6.3	Fonction d'erreur	80
6.3.1	Optimisation par la distance	81
6.3.2	Optimisation par les coordonnées	82
6.3.3	Singularités	84
6.4	Choix des points d'optimisation	86
6.5	Résultats dans le secteur ouvert	87
6.5.1	Optimisation sur la fréquence	90
6.5.2	Discussion et possibilités d'utilisation	90
7	Prise en compte de la diffraction pour le calcul en cavité	95
7.1	Comment intervenir ?	95
7.2	Séparation du problème en cavité	96
7.2.1	Extraction des termes améliorables au premier ordre	97
7.2.2	Extension au second ordre	98
7.2.3	Remarque sur l'utilisation d'une source de coin	102
7.3	Milieu absorbant	103

7.4	Étude numérique	107
7.4.1	Solution de référence en cavité	107
7.4.2	Travail préalable aux abords des angles	109
7.4.3	Ajout de la diffraction au premier ordre	112
7.4.4	Ajout de la diffraction au deuxième ordre	112
7.5	Bilan	119
 Seconde partie : Diffusion acoustique et réflexion spéculaire		121
8	Coefficient de réflexion identifié	123
8.1	Introduction	123
8.2	Une variante de la méthode intégrale en espace semi-infini	124
8.2.1	Noyau de Green en espace semi-infini	125
8.2.2	Résolution intégrale	125
8.3	Définition du coefficient identifié	127
8.3.1	Réflexion spéculaire	128
8.3.2	Identification dans la solution intégrale	130
8.3.3	Forme discrétisée	131
8.4	Comparaison avec un coefficient spéculaire en espace semi-infini	132
9	Application à la méthode des sources images	135
9.1	Obtention du coefficient identifié	136
9.2	Stockage du coefficient	136
9.3	Intégration au sein d'une méthode géométrique	140
10	Étude numérique	145
10.1	Espace semi-infini	145
10.2	Espace quart-infini	146
10.3	Cavité fermée	148
10.4	Bilan	149
11	Synthèse	153
11.1	Séparation des objets d'étude	153
11.2	Effet dans une cavité fermée	155
11.3	Conclusion et ouverture	156
 Bibliographie		159
 A Conventions et nomenclature		165
 B Résultats numériques supplémentaires au chapitre 7		167
B.1	Travail aux abords des angles de la cavité	167
B.2	Ajout de la diffraction en cavité au second ordre	167

Table des figures

1.1	Situations type	9
1.2	Exemple de résultats en cavité	10
2.1	Situation générale en espace semi-infini	13
2.2	Situation générale du secteur ouvert	22
2.3	Construction de la matrice dans l'espace semi-infini	27
2.4	Construction des matrices dans le secteur ouvert	29
3.1	Principe d'une source image	33
3.2	Définition des zones de visibilité des sources	35
3.3	Exemple de calcul des premières source images en cavité carrée	36
3.4	Algorithme du calcul par sources images	39
3.5	Sous-routine de calcul des sources images.	40
3.6	Sous-routine de calcul de la contribution d'un rayon	41
3.7	Méthode des sources images appliquée au secteur ouvert	42
3.8	Premiers rayons en cavité	42
3.9	Effets de l'invisibilité d'une source	44
4.1	Interprétation des matrices \mathbf{A}_{12} et \mathbf{A}_{21}	49
4.2	Principe de Huygens	50
5.1	Situation d'étude générale	64
5.2	Vitesse de convergence en fonction de l'angle d'ouverture	66
5.3	Produit matriciel nul pour le cas quart-infini	67
5.4	Convergence faible	70
5.5	Convergence forte (angle aigu)	72
5.6	Convergence forte (quart-infini)	73
5.7	Convergence forte (angle obtus)	74
5.8	Sources images dans l'espace quart-infini	76
6.1	Comparaison terme à terme des contributions des sources et de termes de la série	80
6.2	Optimisation de la distance $r \in \mathbb{C}$	83
6.3	Distance complexe en fonction de l'emplacement du point récepteur	85

6.4	Variation de la partie réelle et imaginaire de la distance complexe	86
6.5	Radiation sonore due à une source ponctuelle à coordonnées complexes	87
6.6	Détermination du nombre de points d'optimisation	88
6.7	Pression ajustée	91
6.8	Spectre ajusté	92
6.9	Variation des coordonnées de la sources supplémentaire	93
7.1	Cavité fermée vue comme l'extension d'un problème en secteur ouvert	97
7.2	Ajout de la diffraction au 1 ^{er} ordre	98
7.3	Ajout de la diffraction au 2 ^e ordre	100
7.4	Spectre du rapport améliorable sur non améliorable en cavité	105
7.5	Étude d'une vitesse de propagation complexe	106
7.6	Situation étudiée	107
7.7	Comparaison de différentes solutions par éléments finis	108
7.8	Représentation graphique de la qualité de prédiction	110
7.9	Qualité de la prédiction aux abords d'angles aigus et obtus	111
7.10	Ajout de la diffraction au 1 ^{er} ordre dans un milieu absorbant	113
7.11	Contributions des parois au second ordre	116
7.12	Correction amenée par la paroi Γ_4	118
8.1	Situation type en espace semi-infini	127
8.2	Réflexion spéculaire	129
8.3	Différence entre un coefficient de réflexion identifié et spéculaire	132
9.1	Grandeurs variables pour la définition des configurations	137
9.2	Pourcentage de rayons calculés par réflexion spéculaire	138
9.3	Répartition des configurations en fonction de la fréquence	139
9.4	Comparaison entre différentes méthodes d'interpolation	140
9.5	Identification de situations équivalentes pour le coefficient identifié	141
9.6	Sous-routine de calcul de la contribution d'un rayon	143
10.1	Résultats en espace semi-infini	146
10.2	Résultats en espace quart-infini	147
10.3	Résultats en cavité fermée	150
10.4	Rayon rasant caché	151
B.1	Contributions des parois au second ordre	169
B.2	Contributions des parois au second ordre	170
B.3	Correction amenée par la paroi Γ_3	172
B.4	Correction amenée par la paroi Γ_5	173
B.5	Total des contributions des parois au second ordre	174
B.6	Correction amenée par les parois Γ_a	175

Liste des tableaux

3.1	Table de stockage des sources images	36
4.1	Récapitulation des matrices d'auto- et d'inter-influence	60
4.2	Récapitulation des schémas d'interprétation ($\beta = 0$)	61
5.1	Détail des situations A à E	68
6.1	Correspondance entre termes et sources images	79
6.2	Situation F	89
B.1	Détail des points récepteurs aux abords d'angles aigus et obtus	168

Chapitre 1

Introduction

Le présent rapport propose d'étudier la méthode des rayons acoustiques, dite aussi d'acoustique géométrique. Dans celle-ci, le concept d'onde est remplacé par celui de « rayon acoustique ». Un tel rayon peut être compris comme la portion d'une onde sphérique (ou cylindrique en deux dimensions) dont l'angle d'ouverture est infiniment petit. Le champ acoustique en un point précis du domaine étudié est alors obtenu en additionnant les contributions de tous les rayons issus d'une source ponctuelle, en tenant compte des réflexions de ceux-ci sur les obstacles rencontrés.

La méthode des rayons a fait l'objet de plusieurs études et est largement utilisée pour la prédiction de champs sonores dans des géométries complexes. Dans ce cas où le domaine acoustique étudié est de dimensions importantes par rapport à la longueur d'onde et où l'information recherchée réside avant tout dans les premières réflexions, la qualité de prédiction fournie par la méthode des rayons est suffisante et se vérifie expérimentalement. En revanche, dans des géométries plus petites où l'on recherche une solution faisant intervenir un grand nombre de réflexions, on constate l'imprécision (notamment en terme de position de pics de résonance, cf. fig. 1.2) des résultats de l'acoustique géométrique par rapport à une solution obtenue par un autre biais, comme les éléments finis. Cette différence est en particulier sensible à proximité des limites du domaine étudié (proche des parois).

Le travail présenté ici aborde certaines simplifications inhérentes à la méthode des rayons (réflexion spéculaire, absence de diffraction, etc.) et propose d'en étudier les effets dans le but à long terme d'une amélioration possible de la prédiction. Dans la mesure du possible, on a chaque fois cherché à isoler un paramètre potentiel d'erreur, afin d'étudier son impact sur la solution globale. Pour ce faire, on s'est concentré sur des cas relativement sobres (cavités bidimensionnelles, parois parfaitement réfléchissantes) pour lesquelles on sait maîtriser le plus de paramètres possibles, au lieu de chercher à se rapprocher de situations réelles.

Le but de cette introduction est de rappeler brièvement le contexte scientifique et industriel de la prédiction acoustique dans des cavités fermées, de situer la présente recherche au sein des méthodes actuellement utilisées, et d'en aborder les enjeux.

1.1 Contexte scientifique et état de l’art

1.1.1 La méthode intégrale

Les équations intégrales permettent en théorie de résoudre en n’importe quel point du domaine étudié certains problèmes posés à l’aide d’équations différentielles agrémentées de conditions aux limites. A la différence de l’opérateur différentiel seul, les équations intégrales permettent de réunir en une équation de champ la formulation de propagation (différentielle) tout en incluant explicitement les conditions aux limites. La formulation ainsi obtenue représente ainsi la totalité du problème physique dans le domaine étudié.

La méthode générale est de procéder par correction de la solution d’un problème voisin, que l’on sait décrire par une fonction analytique : le noyau. La facilité de calcul de cette correction, faisant en général intervenir des opérations de dérivation et d’intégration, dépend du choix du noyau. De cette manière, il est en théorie possible de résoudre un problème harmonique de propagation acoustique dans une géométrie quelconque [cf. 5, p. 1331 *sq.*].

Avant l’avènement des ordinateurs, le noyau choisi se devait d’être disponible sous forme analytique, qui pouvait alors (dans la mesure du possible) être dérivé et intégré à la main lors de la démarche de correction. Il existe ainsi une série de noyaux définis comme des fonctions analytiques [p. ex. 4, p. 890-894], tels les noyaux de Green qui seront utilisés plus loin. Depuis la seconde moitié du XX^e siècle, différentes méthodes numériques, dont certaines sont brièvement présentées ci-dessous, permettent de résoudre directement des problèmes à géométrie complexe. La méthode intégrale semble alors à première vue passer au second plan devant ces nouvelles méthodes permettant de résoudre directement n’importe quel problème, au prix uniquement d’un temps de calcul qui va s’amenuisant avec la puissance des calculateurs

Cependant, l’usage, ou tout du moins l’architecture de la méthode intégrale reste fort utile, notamment lors de l’étude de problèmes couplés [15]. Dans ce cadre, il est possible de résoudre un problème non parfaitement posé (par exemple en l’absence d’une représentation exacte des conditions aux limites) en résolvant le problème erroné (par exemple avec une admittance inexacte) puis en le corrigeant via la méthode intégrale. Dans ce cadre, le choix du noyau est déterminant sur la complexité du problème. On peut en effet limiter la correction à apporter si le noyau choisi réduit le contour sur lequel on apporte la correction, ou en ne faisant intervenir dans la représentation intégrale que des termes dits de simple couche (évitant une dérivation du noyau).

Dans les cavités acoustiques telles que les salles de concert ou les habitacles de véhicules, les descriptions numériques des champs sonores classiques — ceux qui satisfont l’équation de Helmholtz en régime harmonique — font appel à diverses méthodes pour l’obtention d’un tel noyau. Le choix de la méthode dépend avant tout du rapport entre la longueur d’onde et les dimensions de la cavité étudiée, selon des raisons qui sont soit conceptuelles soit pratiques. Chaque méthode possède ses propres avantages et inconvénients dans un contexte bien déterminé.

1.1.2 Les méthodes par éléments finis

Éléments finis de volume

Tout d'abord destinée à résoudre des problèmes structuraux [42], la méthode par éléments finis de volume (souvent abrégée FEM pour Finite Elements Method) est également utilisée avec succès pour la résolution d'autres problèmes (diffusion, flux, etc.) depuis les années 1960 [43]. Elle repose sur la décomposition de la solution recherchée en une somme de fonctions de base N_i , dont l'amplitude respective a_i est obtenue en résolvant une formulation intégrale variationnelle issue de la forme faible de l'équation en jeu. Cette forme intégrale est appliquée à l'ensemble du domaine étudié, discrétisé ensuite en une somme d'éléments liés les uns aux autres par l'expression de la variable recherchée sur leurs frontières (deux éléments voisins requièrent l'égalité de cette variable sur leur frontière commune).

L'usage de fonctions de base dont la somme doit approcher la solution recherchée permet de s'affranchir de la recherche de solutions analytiques de l'équation régissant le domaine étudié. Ainsi, il est possible de résoudre des équations non-linéaires complexes. Cependant, le nombre de coefficients a_i est très important, car ils caractérisent aussi bien une discrétisation du domaine que des frontières.

Éléments finis de frontière

Dans une telle démarche, les coefficients a_i appliqués aux fonctions de base permettent d'approcher au mieux (« best fit ») la forme recherchée, résultant en une approximation obtenue par une discrétisation de tout le domaine, via une forme variationnelle appliquée à l'opérateur différentiel régissant ce dernier. Cependant, si les fonctions de base sont choisies de manière à résoudre analytiquement cet opérateur, on peut résoudre le problème en ne discrétisant que les limites du domaine. Autrement dit, le problème est résolu par la méthode intégrale : la solution se présente sous la forme d'un noyau corrigé par des intégrales de contour, auxquelles on applique une forme faible et qui seront discrétisées pour la résolution du problème. Pour cette raison, on nomme cette seconde approche méthode des éléments finis de frontière (abrégée BEM pour Boundary Elements Method).

L'application de la méthode intégrale repose sur la linéarité des solutions du problème dans le domaine, ce qui limite a priori son utilisation à la résolution de problèmes linéaires. Il est possible de l'étendre à l'étude des problèmes non-linéaires en la couplant avec d'autres méthodes [44]. En revanche, puisque la discrétisation n'est effective que sur les frontières, cette méthode requiert de plus petites matrices d'inconnues. Cette diminution des degrés de liberté a cependant un prix : les matrices à traiter ne comportent pas d'éléments nuls. A l'inverse, les matrices intervenant dans les calculs par éléments finis de volume comportent de nombreux éléments nuls (matrices « creuses ») puisque chaque élément n'interagit qu'avec un faible nombre d'autres éléments.

Cependant, l'une et l'autre méthode sont limitées du côté des fréquences élevées car la discrétisation nécessairement fine des frontières (ou du domaine) conduirait alors à des matrices de très grandes dimensions. En général, les méthodes par éléments finis

peuvent être appliquées dans n'importe quelle géométrie et délivrent des résultats de grande précision, sous réserve de convergence de la solution numérique, et au prix de systèmes matriciels nécessitant de longs temps de calcul.

L'auteur a eu l'occasion de se familiariser avec la méthode des éléments finis de volume appliquée à un problème de mécanique vibratoire en développant lui-même un code de calcul élémentaire dans le cadre d'un autre projet [48] à l'aide de [9, chap. 8].

1.1.3 Les méthodes géométriques ou méthodes des rayons

Dans la gamme dite des moyennes fréquences audibles (de 500 à 4000 Hz) et pour des cavités de dimensions supérieures à un petit multiple de la longueur d'onde (plusieurs mètres), les méthodes d'acoustique géométriques sont les plus usitées. Quel que soit le modèle utilisé pour décrire les réflexions, que ce soit en traçant un nombre fini de « rayons acoustiques » et en poursuivant chacune de leurs réflexions (*tir de rayons*) ou en représentant chaque réflexion par une *source image*, ces méthodes ont en commun qu'elles reposent toutes deux sur le postulat que l'on peut décrire les fronts d'onde acoustique par des « rayons » obéissant aux mêmes lois que les rayons lumineux. On peut donc réunir ces deux approches sous le terme générique de *méthodes des rayons*.

Lorsqu'une onde sonore rencontre un obstacle, une partie de l'onde est défléchie de sa course initiale. Les effets subis par l'onde ainsi perturbée se nomment réflexion, diffusion et diffraction. La partie *réfléchie* prend la forme d'une nouvelle onde se propageant, d'un point de vue macroscopique, dans une nouvelle direction définie par l'angle que formait l'onde incidente avec l'obstacle rencontré. L'angle d'incidence, mesuré entre le vecteur directif de l'onde incidente et la normale à la paroi, est égal à celui de l'onde ré-émise, vérifiant ainsi la loi de Snell-Descartes également utilisée pour les rayons lumineux.

Le terme *diffusion* (du latin *diffusio*, action de répandre) est utilisé pour décrire une répartition spatiale de l'énergie acoustique en provenance d'une ou plusieurs « sources » localisées. Un milieu de propagation non homogène ou une réflexion sur une surface possédant des irrégularités permettent classiquement de décrire une partie diffusée du champ sonore. Une équivalence optique permet d'appréhender cet effet : en photographie, il est courant d'utiliser un éclairage indirect obtenu en éclairant violemment une surface blanche qui *diffuse* la lumière vers l'objet à photographier, plutôt que d'éclairer directement cet objet. La *diffraction* (du latin *diffRACTUS*, mis en morceaux) traduit la déviation qu'encourt une onde sonore lorsqu'elle rencontre un obstacle ou une ouverture [1, chap. 7] [3, chap. 8].

La méthode des rayons se limite à la description des champs créés par réflexion spéculaire. Plusieurs méthodes tentent d'insérer les effets de la diffraction et de la diffusion, mais ne sont valables que pour des géométries particulières (voir plus loin). La réflexion spéculaire, issue des idées de l'optique géométrique dont les applications ont été nombreuses, appliquée aux ondes sonores aériennes est citée au plus tard dans les années 1940–50 (voir par exemple [8, chap. 4] pour un aperçu de la méthode et [7] pour les applications). Selon la situation étudiée, les résultats obtenus par cette méthode s'avèrent plus ou moins précis. Dans le cas d'une cavité parallélépipédique à parois réfléchissantes, la solution obtenue par la méthode des rayons est exacte, et peut être dérivée de la so-

lution obtenue par théorie modale [11]. D'autres travaux montrent que la méthode des rayons permet d'obtenir une bonne approximation du champ acoustique pour des cavités de géométries diverses [20, 15].

Pour l'acoustique architecturale, il est admis que la méthode des rayons peut décrire les champs sonores à partir de 100Hz pour les grands auditoriums [24]. Ici le calcul du champ en des points particuliers du domaine n'exige pas le calcul du champ ni dans tout le domaine (contrairement aux éléments finis de volume) ni sur l'intégralité des frontières (contrairement aux éléments finis de frontières). Mais l'on doit se souvenir que la méthode n'est pas rigoureuse et que la réaction locale lors des réflexions n'est qu'une approximation des réactions non-locales correctement décrites par la représentation intégrale. Ceci pourrait expliquer pourquoi le calcul sur l'intégralité des frontières n'est pas nécessaire pour les méthodes géométriques.

La méthode des rayons, bien développée pour l'acoustique des salles dans les années 1960–90 environ, est revisitée depuis une dizaine d'années pour son usage dans les habitacles à des fins de description des champs sonores dans les moyennes fréquences audibles [22, 15].

Tir de rayons

La méthode de tir de rayons (en anglais *ray-tracing*) calcule un nombre prédéterminé (en théorie une infinité) de rayons, jusqu'à un ordre de réflexion donné [24]. Pour chacun de ces rayons, l'on recherche son point d'impact sur l'une des parois, de là le point d'impact suivant sur une autre paroi, etc. Se donnant un point de réception R dans le domaine étudié, les rayons issus de la source qui, après un certain nombre de réflexions, passent par R , forment l'histoire sonore en R (réponse impulsionnelle, histogramme, échogramme). Les rayons étant nécessairement divergents, l'ensemble du volume n'est pas couvert par les rayons réfléchis. Leur chance de rencontrer le point R est ainsi d'autant plus faible que l'on s'impose un nombre limité de réflexions (*ordre* de réflexion maximal). Si le point R se trouve sur un « trou » du volume couvert par les rayons, le niveau sonore calculé à ce point sera erroné. Il est donc nécessaire de définir un certain volume autour du point R et l'on obtient la valeur désirée en additionnant les rayons qui traversent ce voisinage. Pour résoudre le problème des rayons divergents, on remplace parfois les rayons par des cônes ou des pyramides triangulaires [19].

Dans ces conditions le processus peut être assez rapide mais au prix d'une certaine imprécision. Malgré tout, le fait de pouvoir traiter des domaines non convexes et des parois diffusantes (à cause de leur relief ou à cause de leur matériau) est un atout important de la méthode de tir de rayons.

Sources images

La méthode des sources images (en anglais *image sources*, parfois *mirror sources* ou MS) est basée sur le principe qu'il est géométriquement équivalent de remplacer une paroi donnant naissance à une réflexion spéculaire par une seconde source, image virtuelle de la source réelle, construite par effet miroir (loi de Snell-Descartes). Cette

procédure est répétée sur chacune des parois, puis avec les images sources ainsi calculées, etc. On obtient ainsi un nombre potentiellement infini de sources images, dont on limite le nombre en fixant un ordre de réflexion maximal [8, 11, 30]. Dans le cas d'une cavité rectangulaire (parallélépipédique en 3D), toutes les sources images ainsi calculées interviennent dans la résolution du problème, quel que soit le point récepteur étudié. En revanche, lorsque la cavité est de forme quelconque, seules certaines sources doivent être considérées [14]. On verra plus loin que cette distinction vient du fait qu'à chaque source prise en compte lors du calcul du champ sonore doit correspondre un chemin de propagation entre celle-ci et le point de réception étudié ; cette propriété est dite de visibilité.

Notons que le processus peut aussi être appliqué « à l'envers », en cherchant les points récepteurs images et en rétro-propageant les rayons issus de R jusqu'à atteindre la source [14]. Enfin, il est difficile ici de tenir compte des effets de diffusion. La méthode des sources images est très précise quant aux rayons utiles qui sortent de la source pour rencontrer le point R mais la discrimination des visibilités est très contraignante en temps de traitement. Pour réduire le nombre de sources en jeu, une proposition originale [30] consiste à réunir toute la série de sources issues des réflexions multiples dans un secteur angulaire par une seule « source de coin », munie d'une directivité particulière.

La méthode des sources images, qui sera décrite dans le détail au chapitre 3, est ici privilégiée, à cause notamment de sa précision et de la grande sobriété de sa mise en oeuvre.

Propositions d'amélioration

Pour tenter de résoudre les problèmes liés à l'acoustique géométrique évoqués au début de ce chapitre, différentes voies ont été explorées dont on ne donnera ici qu'un aperçu non exhaustif.

Comme on le verra plus loin au chapitre 3, la méthode des sources images requiert le calcul d'un grand nombre de sources, dont on ne peut savoir qu'a posteriori si elles sont utiles à la résolution du problème ou non. En effet, certaines sources ne peuvent pas représenter une réflexion possible, on parle alors de source invisible. Le calcul par tir de rayons, en revanche, permet de ne considérer que les réflexions possibles, intervenant à chaque fois qu'un rayon rencontre une paroi. Pour combiner cet avantage algorithmique à la précision accrue de la méthode par sources images, une variation de cette dernière a été proposée [40]. L'idée est d'utiliser un tir de rayons pour calculer la position des sources images : un premier calcul fait courir un faisceau de rayons dans la cavité étudiée et place pour chaque réflexion observée une source image, placée de sorte à émettre un rayon identique au rayon réfléchi. Toutes les sources images ainsi calculées représentent ainsi une réflexion possible, et on s'affranchit de la détermination a posteriori de la validité des sources images. Une fois les sources ainsi choisies, elles sont alors utilisées de la même manière que dans la méthode classique.

En général, l'acoustique géométrique néglige certains effets importants intervenant dans tout problème de propagation : la diffusion et la diffraction. La théorie géométrique classique admet que la propagation d'une onde est un phénomène local. Les lois de l'op-

tique géométrique sont ainsi appliquées à l'acoustique. Pour tenir compte des effets de diffraction, on peut utiliser la théorie générale de la diffraction de Keller (parfois abrégée GTD en anglais, voir [41] et [1, § 7.2.7]). Celle-ci est une généralisation de la théorie géométrique classique, permettant de tenir compte de certains phénomènes de diffraction. L'hypothèse qui est faite est que les rayons diffractés par un obstacle forment avec la tangente à l'arrêt de l'obstacle le même angle que le rayon incident et se répartissent sur la surface d'un cône [36, 39].

Pour aller plus loin, un motif de diffusion peut être obtenu soit expérimentalement [33], soit en se basant sur certains principes de la théorie des nombres [38]. Plusieurs travaux [21, 27] se penchent sur la diffraction causée par les sauts d'impédance ou les in-homogénéités de surface.

Des valeurs expérimentales sont également utilisées par Lafarge et al. [26]. Ces mesures donnent accès à une impédance en fonction de l'angle d'incidence. Cette impédance modifiée, remplaçant la loi de Snell-Descartes, permet un meilleur traitement des rayons rasants (à condition qu'ils soient identifiés comme tels, cf. la remarque que l'on fera plus loin à la section 10.4).

Makita et Hidaka [28] proposent de remplacer la loi de Snell-Descartes par une « fonction d'orientation moléculaire » $M_\lambda(\theta)$, dépendante de la longueur d'onde et de l'angle d'incidence. Cette dernière est obtenue par la théorie cinétique des gaz, il s'agit donc d'une approche microscopique ramenée à un coefficient macroscopique.

La méthode utilisée par le programme ODEON [32, 37] remplace chaque point de contact entre un rayon et une surface par une « source secondaire », que l'on utilise ensuite pour un nouveau tir de rayons. Cette méthode permet de prendre en considération les réflexions tardives, qui ont tendance à disparaître lorsque l'on limite le calcul de rayons à un certain ordre de réflexion (*tail-correction*).

Les limites de la localisation de la réflexion sont connues, et ont été quantifiées par exemple par une analyse de causalité [12]. Cependant, à notre connaissance, il n'existe actuellement aucune méthode considérant une impédance de paroi non localisée et applicable au calcul en cavité de l'ordre de grandeur nous concernant. Cet aspect des méthodes géométriques nous paraît bien être un de ces points faibles fondamentaux et suscite notre intérêt dans cette étude.

1.2 Contexte industriel

A l'origine de ce projet se trouve le problème rencontré par les fabricants automobiles lors du traitement acoustique d'un véhicule. D'une part, des normes internationales imposent une émission sonore maximale d'un véhicule en marche (*pass-by noise*). Il est donc nécessaire d'atténuer par des absorbants judicieusement placés le bruit provenant des différentes sources sonores à bord d'un véhicule (moteur, bruit des pneus sur la route, écoulement de l'air). D'autre part, l'habitacle doit être conçu de façon à offrir un confort maximal au conducteur et aux passagers. Le bruit du moteur doit être perceptible sans être gênant, le bruit extérieur doit être atténué et l'intelligibilité au sein de l'habitacle optimale.

Différents absorbants sont à disposition des constructeurs pour arriver à leurs fins : moquettes, mousses et feutres. Le placement de ces matériaux dans l'habitacle doit être optimisé de manière à atteindre les objectifs de qualité acoustique désirés tout en minimisant le poids et le coût engendrés par l'utilisation des absorbants [29]. Pour ce faire, une simulation la plus rapidement précise que possible du comportement d'une onde sonore au sein de la cavité moteur ou de l'habitacle est nécessaire. Parmi les outils à disposition, les méthodes géométriques présentent un attrait particulier : la rapidité, fondamentale lors de tout processus d'optimisation.

Parallèlement à la démarche d'optimisation de l'absorption, un intérêt accru est actuellement porté sur la prédiction du champ acoustique à proximité ou à la surface des parois d'une cavité. En effet, les méthodes géométriques traditionnelles (dont la théorie générale de la diffraction, évoquée plus haut) ne décrivent qu'imparfaitement l'effet des fentes et interstices présentes sur un capot moteur, par exemple. Ces dernières permettent non seulement au son de s'échapper du compartiment moteur, mais elles ont un effet de diffraction important (leur taille est largement inférieure aux longueurs d'ondes rencontrées) et il semble que cet effet ne soit pas correctement décrit par les méthodes de rayons courantes. L'idée de modéliser le rayonnement dû à ces fentes en les remplaçant par autant de sources secondaires a été suggéré par le partenaire industriel de ce projet. Selon cette hypothèse, un calcul à l'intérieur du capot renseignerait dans un premier temps sur les valeurs de pression à l'emplacement des interstices. Dans un second temps, ces valeurs serviraient à modéliser des sources de pression intervenant dans un second calcul de propagation, à l'extérieur du véhicule cette fois.

Dans le cas d'une telle utilisation, dont l'efficacité reste à prouver, de l'information de pression proche des parois, la qualité des résultats est non seulement importante en terme d'amplitude, mais la relation de phase entre la pression calculée aux emplacements des sources secondaires est également précieuse, afin de reconstituer au plus proche le champ diffracté à l'extérieur de la cavité.

Ces considérations ont motivé dans ce travail un intérêt accru pour la qualité de prédiction du champ sonore à proximité ou à la surface des parois. Ce faisant, et comme on le verra plus loin, on s'est aperçu qu'en cherchant à obtenir la pression acoustique à proximité d'une paroi, on se place dans des situations particulières illustrant bien les limitations des méthodes géométriques. Ce sont en effet dans des situations de ce type qu'interviennent des rayons rasants (cf. § 10.4) ou des sources images « invisibles » (cf. § 3.5) dont la contribution incorrectement prise en compte peut compromettre la qualité du champ total.

1.3 Objectifs et définition des objets d'étude

On explicite ici quelles situations seront principalement étudiées dans le cadre de ce travail, et pourquoi.

1. La situation la plus triviale est celle d'une source S et d'un point récepteur R dans l'espace infini, en l'absence de tout autre objet pouvant influencer le champ acoustique émis. On nomme cette situation *l'espace infini* (fig. 1.1(a)).

2. Si l'on rajoute à la situation précédente une paroi de longueur infinie, celle-ci coupe l'espace en deux et la partie dans laquelle s'applique l'équation de Helmholtz et dans laquelle on place les points S et R est nommée *espace semi-infini* (fig. 1.1(b)).
3. En ajoutant une seconde paroi perpendiculaire à la première, l'espace utile est réduit à *l'espace quart-infini* (fig. 1.1(c)).
4. On peut généraliser la situation précédente en choisissant un angle $\theta \neq \pi/2$ entre les deux parois. On appelle la situation ainsi obtenue *secteur ouvert* (fig. 1.1(d)).
5. Enfin, si l'espace utile est limité de tout côtés par un minimum de trois parois, on parle de *cavité* (fig. 1.1(e)).

La cavité qui sera étudiée au cours de ce travail, et qui sera présentée au chapitre 3, est identique à celle utilisée dans une autre étude [15]. On dispose ainsi d'une situation de référence, pour laquelle on connaît déjà les caractéristiques, ce qui permettra de mieux comparer les résultats obtenus ici. Cette cavité reprend schématiquement les proportions d'un compartiment automobile, on reste ainsi proche des motivations industrielles à l'origine de cette étude, tout en disposant d'un outil suffisamment schématique pour pouvoir être précisément décrit.

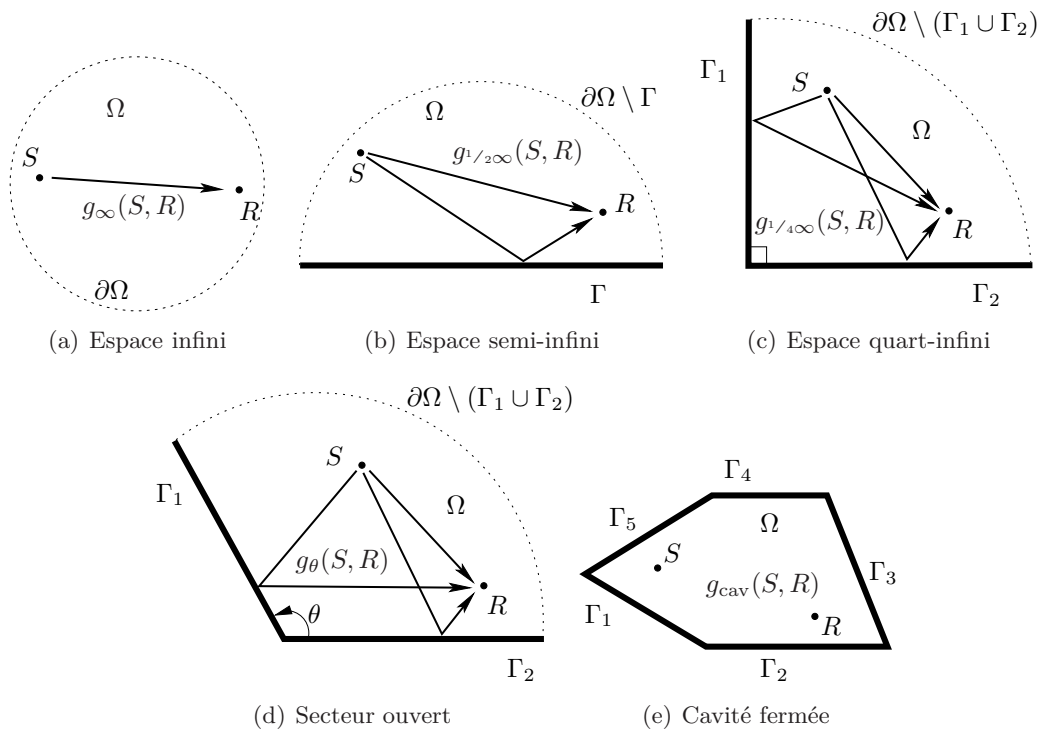


Fig. 1.1 – Situations type étudiées dans ce rapport. L'équation de Helmholtz est à chaque fois résolue dans l'espace Ω , délimité par un nombre variable de parois Γ_i et (le cas échéant) une limite virtuelle à l'infini $\partial\Omega$ sur laquelle s'applique la condition de radiation de Sommerfeld.

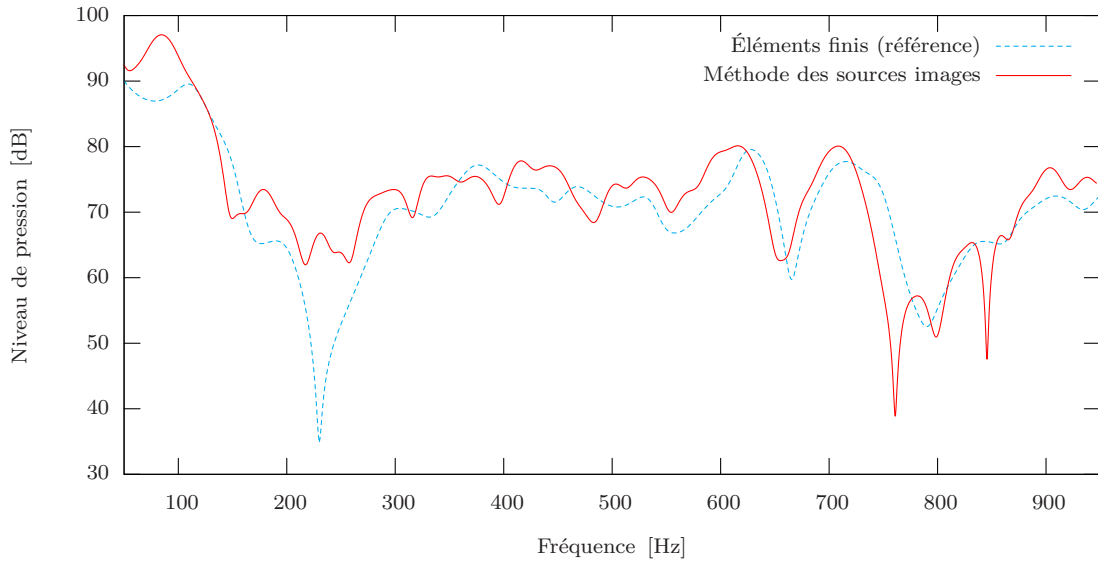


Fig. 1.2 – Exemple de qualité spectrale obtenue par la méthode des sources images dans une cavité bidimensionnelle à parois absorbantes. On trouvera plus de détails concernant la situation particulière présentée ici au chapitre 10, où elle sera à nouveau étudiée.

L'étude du champ sonore dans une cavité de type automobile a donc été la motivation première de ce travail. Cependant, le degré de généralité des formalismes développés ici, en particulier l'étude d'un secteur ouvert, permet une application en dehors du contexte initial. De surcroît, l'étude des rayons rasants (en seconde partie) aura sans doute plus d'impact dans une configuration où ceux-ci sont majoritaires, par exemple dans un guide d'ondes, voire en propagation rasante à proximité du sol.

Qualité spectrale de la prédiction en cavité

Pour illustrer les erreurs dont on désire étudier la provenance dans ce travail, et peut-être corriger, la figure 1.2 présente le spectre obtenu dans une cavité bidimensionnelle à parois absorbantes ($Z_r = 9$) par une méthode géométrique par sources images. On considère ici une résolution par éléments finis pour la solution de référence. Des écarts entre les résultats obtenus par les deux méthodes sont surtout observables dans le décalage en fréquence de certains pics de résonance.

Limitations volontaires

Les objectifs principaux de ce travail sont d'une part l'identification des raisons calculatoires résultant dans certaines erreurs au sein des méthodes géométriques (dont la figure 1.2 est une illustration), et d'autre part l'établissement d'une justification rigoureuse de concepts à priori intuitifs (sources images). Il est donc nécessaire de travailler dans un contexte où l'on sait maîtriser le plus de paramètres possibles. Dans cet esprit,

on s'est volontairement limité au cas bidimensionnel, pour lequel les algorithmes de calculs peuvent être suffisamment sobres pour être effectués « à la main ». Les sources de pression considérées sont toutes ponctuelles¹ et omnidirectionnelles.

On se concentre également sur deux sources potentielles d'erreur dans les méthodes géométriques :

1. la conception de sources images « visibles » et « invisibles » ne rend pas correctement l'influence de la diffraction dans certaines situations particulières (Première partie, chapitres 2 à 7)
2. la réflexion spéculaire ne prend pas en compte la non localité de la réflexion et la finitude des parois (Seconde partie, chapitres 8 à 10)

Afin de pouvoir étudier séparément les effets de ces deux limitations, on se propose de simplifier le problème en se concentrant sur l'effet que l'on veut observer. Ainsi, dans un premier temps et pour mettre en lumière les problèmes dus principalement aux limitations géométriques, on restreint l'étude aux réflexions sur des parois parfaitement réfléchissantes (sans absorption) dans des géométries dont on introduit progressivement la complexité : partant d'une situation en présence d'une seule paroi, on ajoutera une seconde paroi (formant un angle droit, puis quelconque) dans une situation de secteur ouvert, pour finalement appliquer la méthode proposée dans la cavité fermée.

Une autre erreur inhérente à la méthode géométrique encourage l'étude de réflexions sans absorption. Lorsqu'une absorption est prise en compte par une méthode géométrique, cette dernière intervient sous la forme d'un coefficient de réflexion $R(\phi)$ exprimé, entre autres paramètres, selon l'angle d'incidence ϕ des rayons réfléchis. Une source image dont les contributions sont multipliées par un tel coefficient n'est ainsi plus omnidirectionnelle, mais présente un schéma de directivité. Or si ce schéma de directivité est erroné, ce qui est le cas lorsque le coefficient de réflexion est local, comme on le verra plus loin, cette erreur se propage lors de chaque réflexion supplémentaire. La prise en compte de parois totalement réfléchissantes permet de s'affranchir de ce problème.

Dans un second temps, on travaille dans des géométries simples : espace semi-infini puis quart-infini, en terminant par une brève étude des effets de la méthode proposée dans la cavité fermée pour terminer. Dans ce cadre, on se consacre à l'étude de la réflexion par une paroi absorbante de dimensions infinies, ceci en fonction de la position relative des points source et récepteur. On espère ainsi isoler les problèmes dus à la localité de la réflexion. Lorsque l'on prend en compte une réflexion spéculaire sur une paroi, limitée ou infinie, on considère certaines valeurs privilégiées de l'impédance réduite. Ces valeurs ont été proposées par le partenaire industriel de l'étude comme des valeurs à la fois simples à utiliser (scalaires ou nombres complexes) et réalistes.

Tout au long de l'étude, on aura un intérêt particulier pour le champ sonore à proximité des parois, voire sur ces parois elles-mêmes. La motivation vient à nouveau du

¹Par mesure de simplification, on nommera « sources ponctuelles » les sources représentées en deux dimensions par un point et rayonnant uniformément dans l'espace bidimensionnel les entourant. Rigoureusement, la forme de rayonnement d'une telle source est cependant celle d'un monopole linéique de longueur infinie, perpendiculaire au plan observé. Vu que seul le cas d'un domaine bidimensionnel est abordé ici, aucune confusion est possible et on se permet de nommer une telle source comme ponctuelle.

partenaire industriel, soucieux d'obtenir une bonne qualité de prédiction sur les parois, en particulier à proximité d'interstices. L'intérêt scientifique n'est pas en reste, vu qu'en se concentrant sur les parois, on fait apparaître des cas de géométrie particulière pour lesquels l'importance de la diffraction ne peut plus être négligée.

Enfin, le choix du travail en deux dimensions repose sur d'évidentes simplicités algorithmiques. Le prix à payer est une décroissance naturelle du champ sonore en $1/\sqrt{r}$ au lieu de $1/r$, ce qui a des conséquences non négligeables sur la rapidité de convergence des séries qui seront évoquées plus loin.

1.4 Plan du mémoire

On débute dans le chapitre 2 par l'élaboration du formalisme conduisant à une résolution par méthode intégrale de l'équation de Helmholtz dans différentes situations : espace infini borné par une seule paroi puis extension au problème en présence d'une seconde paroi. Les équations ainsi obtenues pour la pression en tout point de ces domaines sont alors résolues numériquement par discrétisation des parois. La mise en oeuvre logicielle de cette résolution est également abordée.

Conformément au choix d'étudier séparément les effets de la diffraction et de la diffusion, on débute dans la première partie de ce rapport par un travail sur le concept de sources images sous-jacent à la méthode géométrique. Le chapitre 3 présente plus en détail cette méthode, explicite les étapes nécessaires à sa mise en oeuvre et soulève un premier problème de probable invalidité de source. Dans le chapitre 4, on établit un formalisme pour relier le concept de sources images à un développement en série d'une solution par la méthode intégrale.

Ensuite, l'intuition qu'il existe au sein de la méthode géométrique des sources invalidées à tort est vérifiée au cours du chapitre 5. On constate l'importance de ces sources dans des situations particulières, mais aussi que leur rétablissement ne suffit pas à rétablir correctement l'information de pression.

On propose alors dans le chapitre 6 d'ajuster la position de ces sources supplémentaires, en s'aidant du parallèle trouvé au chapitre 4. On montre ainsi qu'il est possible de représenter l'information manquante sous la forme d'une source image convenablement placée, en des coordonnées pouvant être complexes. Pour clore la partie consacrée à la diffraction, le chapitre 7 étudie le moyen de transposer l'ajout de la diffraction ainsi démontré dans des situations simples au sein d'un calcul en cavité fermée.

Dans la seconde partie de ce travail, on propose d'étudier les effets de la non localité de la réflexion en introduisant au chapitre 8 un coefficient de réflexion identifié à partir de la méthode intégrale. Ce dernier est alors appliqué au cas de l'espace semi-infini pour constater son utilité lors de la considération de certains rayons particuliers (dits rasants). Le chapitre 9 présente alors un moyen de faire usage de ce nouveau coefficient de réflexion non local au sein d'un calcul géométrique en cavité. Pour ce faire, une méthode d'identification et d'interpolation doit être développée. Cette dernière est appliquée au chapitre 10.

Enfin, le chapitre 11 résume les résultats obtenus au cours de ce travail.

Chapitre 2

Méthode intégrale

On présente ici l'établissement du problème acoustique bidimensionnel dans une situation particulière, celle de l'espace semi-infini tel que décrit à la section 1.3 et représenté sur la figure 2.1. Une solution à ce problème est présentée, en utilisant la méthode intégrale. Enfin, le problème sera généralisé aux autres cas-type, ainsi que sa solution tant qu'il est possible de faire.

2.1 Établissement du problème

Dans un milieu homogène, l'équation des ondes (homogène) décrit la propagation d'une onde de pression $p_t(t, R)$ en un temps t et un point R de l'espace $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p_t(t, R) = 0 \quad R \in \Omega \quad (2.1)$$

Si on considère une solution *harmonique* de l'équation des ondes, elle sera de la forme

$$p_t(t, R) = \Re \mathfrak{e} (p(R)e^{i\omega t}) \quad (2.2)$$

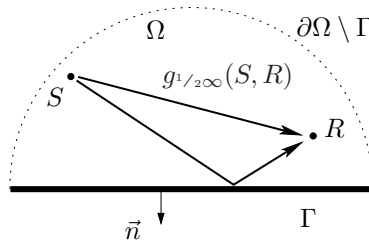


Fig. 2.1 – Situation générale en espace semi-infini

avec une pulsation $\omega = 2\pi f$. En insérant 2.2 dans 2.1, on obtient l'équation que doit vérifier la fonction de forme $p(R)$, soit l'équation de Helmholtz homogène

$$[\Delta + k^2] p(R) = 0 \quad R \in \Omega \quad (2.3)$$

avec $k = \omega/c$. Pour que le problème soit correctement posé, il faut tenir compte des conditions aux limites du domaine étudié Ω . Lorsque le domaine s'étend à l'infini, on pose une condition de radiation aux « limites » du domaine $\partial\Omega$, soit la condition de Sommerfeld qui stipule que le champ s'étend à l'infini (non-retour de l'onde) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) p(r) = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) \quad R \in \partial\Omega \quad (2.4)$$

soit une évanescente prenant la forme $1/\sqrt{r}$, r étant la distance entre le centre du repère et le point récepteur R considéré.

Si le domaine est fini par une (ou plusieurs, comme on le verra plus loin) paroi Γ , une autre condition doit être respectée sur cette paroi. Si cette paroi peut être caractérisée par une impédance (ou une admittance) réduite localisée $z_r = 1/\beta$, l'équation d'Euler doit être vérifiée sur Γ :

$$\partial_n p(R) = -ik\beta p(R) \quad R \in \Gamma \quad (2.5)$$

où la dérivation ∂_n se fait selon un vecteur \vec{n} normal à la paroi et *dirigé vers l'extérieur du domaine* [1, éq. 1.71]. Si la paroi est parfaitement réfléchissante, ce qui sera le cas dans les développements présentés dans la deuxième partie de ce rapport, on a $\beta = 0$. Le problème homogène correctement posé est donc finalement l'opérateur

$$\begin{cases} \Delta p(R) + k^2 p(R) = 0 & R \in \Omega \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) p(r) = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) & R \in \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \partial_n p(R) = -ik\beta p(R) & R \in \Gamma \end{cases} \quad (2.6)$$

2.1.1 Source de pression ponctuelle

On introduit maintenant dans le problème homogène 2.6 une source ponctuelle située au point $S \in \Omega$. Cette source, rayonnant une pression harmonique en ω avec une amplitude unitaire de manière uniforme dans le plan \mathbb{R}^2 (source cylindrique) introduit une inhomogénéité dans 2.6. On obtient alors l'opérateur inhomogène

$$\begin{cases} \Delta p(R) + k^2 p(R) = -\delta(R - S) & R \in \Omega \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) p(r) = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) & R \in \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \partial_n p(R) = -ik\beta p(R) & R \in \Gamma \end{cases} \quad (2.7)$$

2.1.2 Fonction de Green en espace bidimensionnel infini

Pour résoudre ce genre de problèmes, on peut s'appuyer [cf. 2, chap.9] sur le fait que

1. la solution de l'équation des ondes est linéaire par rapport au second membre. Ainsi, à condition que les conditions aux limites restent les mêmes, si p_1 est une solution de l'opérateur 2.7, alors la solution du problème avec une source d'amplitude (complexe) f_s située au même endroit sera $f_s \cdot p_1$.
2. toute modification des conditions aux limites (donc l'ajout d'une ou plusieurs parois, réfléchissantes ou absorbantes) peut se traduire par un terme de correction apporté à la solution élémentaire p_1

Ainsi, on commence par résoudre le problème inhomogène en l'absence de la paroi Γ , soit dans l'espace infini, la méthode des équations intégrales nous permettant par la suite de tenir compte d'une ou plusieurs parois. Une telle solution élémentaire (ou noyau) dans le domaine fréquentiel est connue (voir [1, p. 126, éq. 3.50] ou [3, p. 366, éq. 7.3.17] avec un signe différent résultant d'une détermination différente que 2.2) :

$$g_\infty(r) = -\frac{i}{4} H_0^-(kr) \quad (2.8)$$

avec $r = |R - S|$ la distance entre le point d'observation R et le point source S . Cette fonction, que l'on nomme *fonction de Green dans l'espace infini bidimensionnel* est solution de l'opérateur en espace infini défini comme

$$\begin{cases} \Delta g_\infty(R) + k^2 g_\infty(R) &= -\delta(R - R') \quad R, R' \in \Omega \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) g_\infty &= 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) \quad R \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

La fonction $H_0^-(z)$ est la fonction de Hånkeli de deuxième espèce [cf. 4, p. 624] à l'ordre zéro, dont une définition moderne possible est

$$H_n^-(z) = J_n(z) - iN_n(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\frac{z}{2})(u - \frac{1}{u})}}{u^{(n+1)}} du \quad (2.10)$$

où $J_n(z)$ et $N_n(z)$ sont les fonctions de Bessel respectivement du 1^{er} et du 2^e ordre [47].

2.2 Résolution dans l'espace semi-infini

Pour obtenir une expression de la pression en n'importe quel point de l'espace semi-infini Ω (cf. fig. 2.1), et en particulier sur la paroi Γ , on choisit donc de partir de la solution élémentaire 2.8 et de la corriger pour tenir compte de Γ . Pour ceci, on utilise la méthode des équations intégrales (cf. [2, chap. 9] et [10, chap. 3.1 et 3.2]).

On définit un terme $h(R)$ via

$$h(R) = \iint_{\Omega} (g_{\infty}(R, R') \mathbf{H}p(R) - p(R') \mathbf{H}g_{\infty}(R, R')) d(R' \in \Omega) \quad (2.11)$$

avec \mathbf{H} représentant l'équation de Helmholtz. Appliquant à p et à g_{∞} les opérateurs respectifs 2.7 et 2.9 qu'ils résolvent, on obtient

$$\begin{aligned} h(R) &= \iint_{\Omega} (g_{\infty}(R, R') \underbrace{\mathbf{H}p(R')}_{-\delta(R'-S)} - p(R') \underbrace{\mathbf{H}g_{\infty}(R, R')}_{-\delta(R-R')}) d(R' \in \Omega) \\ &= - \underbrace{\iint_{\Omega} g_{\infty}(R, R') \delta(R' - S) d(R' \in \Omega)}_{-g_{\infty}(R, S)} + \underbrace{\iint_{\Omega} p(R') \delta(R - R') d(R' \in \Omega)}_{p(R)} \quad (2.12) \\ &= -g_{\infty}(R, S) + p(R) \end{aligned}$$

Parallèlement à cela, si on développe l'équation de Helmholtz dans 2.11, on constate que les termes en k^2 s'annulent, en effet

$$\begin{aligned} h(R) &= \iint_{\Omega} (g_{\infty}(R, R') \underbrace{\mathbf{H}p(R')}_{\Delta p(R') + k^2 p(R')} - p(R') \underbrace{\mathbf{H}g_{\infty}(R, R')}_{\Delta g_{\infty}(R, R') + k^2 g_{\infty}(R, R')}) d(R' \in \Omega) \\ &= \iint_{\Omega} (g_{\infty}(R, R') \Delta p(R') + \cancel{g_{\infty}(R, R') k^2 p(R')} \\ &\quad - p(R') \Delta g_{\infty}(R, R') - \cancel{p(R') k^2 g_{\infty}(R, R')}) d(R' \in \Omega) \quad (2.13) \\ &= \iint_{\Omega} (g_{\infty}(R, R') \Delta p(R') - p(R') \Delta g_{\infty}(R, R')) d(R' \in \Omega) \end{aligned}$$

Si on applique maintenant la formule de Green

$$\iint_{\Omega} (g \Delta f - f \Delta g) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (g \partial_n f - f \partial_n g) d(\partial\Omega) \quad (2.14)$$

à l'équation 2.13, on obtient

$$h(R) = \oint_{\partial\Omega} (g_{\infty}(R, R') \partial_n p(R') - p(R') \partial_n g_{\infty}(R, R')) d(R' \in \partial\Omega) \quad (2.15)$$

En réunissant enfin les équations 2.12 et 2.15. on obtient

$$\begin{aligned} h(R) &= -g_{\infty}(R, S) + p(R) \\ &= \oint_{\partial\Omega} (g_{\infty}(R, R') \partial_n p(R') - p(R') \partial_n g_{\infty}(R, R')) d(R' \in \partial\Omega) \quad (2.16) \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'expression corrigée de la pression sur R

$$\begin{aligned} p(R) &= g_\infty(S, R) + h(R) \\ &= g_\infty(S, R) + \oint_{\partial\Omega} (g_\infty(R, R') \partial_n p(R') - p(R') \partial_n g_\infty(R, R')) d(R' \in \partial\Omega) \end{aligned} \quad (2.17)$$

La fonction de Green g_∞ étant solution du problème en espace infini (en l'absence de paroi), la condition aux limites de Sommerfeld 2.4 s'y applique sur $\partial\Omega$. On peut vérifier cette équation en imaginant que p soit également une solution du problème en espace infini. Dans ce cas, la condition de radiation s'y applique aussi et l'intégrale s'annule totalement : étant soumises aux mêmes conditions aux limites, les deux termes p et g_∞ sont identiques sur cette limite et le terme de correction disparaît par soustraction.

Introduction d'une paroi

Si on considère maintenant le cas semi-infini de la figure 2.1, l'intégrale sur le contour de Ω est partagée entre la paroi Γ et la limite virtuelle à l'infini $\partial\Omega \setminus \Gamma$ qui « ferme » le domaine semi-infini.

$$\begin{aligned} p(R) &= g_\infty(S, R) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \underbrace{(g_\infty(R, R') \partial_n p(R') - p(R') \partial_n g_\infty(R, R'))}_{\rightarrow 0} d(R' \in \partial\Omega \setminus \Gamma) \\ &\quad + \int_{\Gamma} (g_\infty(R, R') \underbrace{\partial_n p(R')}_{-ik\beta p(R')} - p(R') \partial_n g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sur le contour $\partial\Omega \setminus \Gamma$, les deux solutions p et g_∞ doivent satisfaire la condition de radiation 2.4 et la première intégrale disparaît. Sur Γ , la solution p doit satisfaire à la condition aux limites de Neumann telle que stipulée dans l'opérateur 2.7, alors que la solution g_∞ n'a aucune condition particulière à satisfaire. On obtient finalement l'expression suivante

$$p(R) = g_\infty(S, R) - \int_{\Gamma} p(R') (\partial_n g_\infty(R, R') + ik\beta g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma) \quad (2.19)$$

qui représente bien la solution g_∞ dans l'espace infini, corrigée par un terme tenant compte de la paroi Γ . Dans le cas d'une paroi parfaitement réfléchissante qui nous occupera plus loin, β est nul et le second terme de l'intégrale s'annule.

2.2.1 Méthode de résolution

On constate que pour résoudre l'équation 2.19 en n'importe quel point $R \in \Omega$, il est nécessaire de connaître la pression sur tous les points R' de la paroi Γ . La résolution

du problème dans le domaine passe par une discrétisation de la surface et se déroule en deux étapes

1. Dans un premier temps, l'équation 2.19 est appliquée à une série de points sur Γ , l'idée étant d'obtenir une expression $p(R_i)$ des deux côtés de l'équation, ce qui permettra de la résoudre.
2. Disposant alors d'une solution (discrétisée) sur la paroi, il sera alors possible de calculer la valeur du champ dans le reste du domaine.

Limitations

Cette méthode n'est réalisable pratiquement qu'au prix de certaines simplifications. Premièrement, dans le problème de l'espace semi-infini qui nous occupe, la paroi Γ est de longueur infinie. Un découpage de cette paroi produit donc une infinité de facettes et l'expression matricielle que l'on tirera de l'équation 2.19 fera apparaître des matrices de dimensions infinies. Lors de la résolution numérique, il sera nécessaire de choisir une longueur finie pour la paroi Γ . On fera attention à choisir cette longueur comme étant suffisamment grande par rapport à la longueur d'onde maximale prise en considération. De plus, il faudra garder à l'esprit que la solution ainsi obtenue ne sera pas valable aux abords des « extrémités » que l'on impose ainsi à la paroi Γ , celle-ci devant être considérée comme infinie.

Deuxièmement, afin de pouvoir sortir le terme $p(R_i)$ de l'intégrale, il faut faire le choix de facettes suffisamment petites pour que l'on puisse considérer la pression comme constante sur chacune des facettes. Cette simplification est acceptable à condition que la taille des facettes soit bien plus petite que la longueur d'onde minimale prise en considération. La valeur de pression choisie sur chacune des facettes est la valeur au centre de chacune de ces facettes.

La longueur des parois et la taille des facettes délimitent un domaine fréquentiel dans lequel on peut considérer la solution comme correcte.

2.2.2 Une propriété du potentiel de double couche

Dans un espace euclidien \mathbb{R}^n de dimension n , soit une surface lisse fermée S enfermant un domaine G^+ avec $\partial G^+ = S$. Le domaine extérieur non fermé est $G^- = \mathbb{R}^n \setminus (G^+ \cup S)$. Selon la théorie des potentiels, en présence d'un potentiel de densité constante, on a l'expression générale dans \mathbb{R}^n pour un potentiel de double couche

$$-\iint_S \partial_{n_s} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in G^+ \\ \frac{1}{2} & \mathbf{x} \in S \\ 0 & \mathbf{x} \in G^- \end{cases} \quad (2.20)$$

où la dérivation s'effectue selon la normale n dirigée vers l'extérieur du domaine G^+ [46].

2.2.3 Établissement de la pression sur la paroi

En reprenant l'équation 2.19 et en faisant tendre le point récepteur R vers un point Q sur la paroi Γ , on obtient

$$p(Q) = g_\infty(S, Q) - \int_{\Gamma} p(R') (\partial_n g_\infty(Q, R') + ik\beta g_\infty(Q, R')) d(R' \in \Gamma) \quad Q \in \Gamma \quad (2.21)$$

où l'intégrale est à prendre au sens de $\lim_{R \rightarrow Q}$. L'intégrale de double couche conduira à la somme de $1/2p(R')$ et de la valeur principale, laquelle sera nulle présentement [cf. 1, § 6.2.3].

Discrétisation de la surface

Avec les précautions exprimées plus haut, on définit un découpage de la paroi Γ en une infinité de facettes Γ_j d'égale longueur

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Gamma_j) \quad (2.22)$$

L'expression de la pression sur la paroi 2.21 peut alors s'écrire

$$p(Q) = g_\infty(S, Q) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\Gamma_j} p(R') (\partial_n g_\infty(Q, R') + ik\beta g_\infty(Q, R')) d(R' \in \Gamma) \right) \quad Q \in \Gamma \quad (2.23)$$

toujours au sens de $\lim_{R \rightarrow Q}$. Si l'on considère les facettes comme suffisamment petites pour que la pression $p(R')$ puisse être vue comme constante sur chacune de ces facettes, on peut remplacer le terme $p(R')$ dans l'intégrale par la valeur de la pression $p(X_j)$ au centre de chaque facette. On obtient alors

$$\begin{aligned} p(Q) &= g_\infty(S, Q) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\Gamma_j} p(X_j) (\partial_n g_\infty(Q, R') + ik\beta g_\infty(Q, R')) d(R' \in \Gamma_j) \right) \\ &= g_\infty(S, Q) - \sum_{j=1}^{\infty} p(X_j) \left(\int_{\Gamma_j} (\partial_n g_\infty(Q, R') + ik\beta g_\infty(Q, R')) d(R' \in \Gamma_j) \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

En appliquant maintenant cette équation aux points de collocation $p(X_j)$, on obtient l'expression matricielle suivante

$$\{p(X_i)\} = \{g_\infty(S, X_i)\} + \mathbf{A} \cdot \{p(X_i)\} \quad (2.25)$$

où la matrice \mathbf{A} est la matrice de dimensions $(\infty \times \infty)$ issue de l'intégrale et formée des termes

$$a_{ij} = - \int_{\Gamma_j} (\partial_n g_\infty(X_i, R') + ik\beta g_\infty(X_i, R')) d(R' \in \Gamma_j) \quad (2.26)$$

2.2.4 Résolution

L'équation 2.25 peut être réorganisée

$$[\mathbf{I} - \mathbf{A}] \cdot \{p(X_i)\} = \{g_\infty(S, X_i)\} \quad (2.27)$$

avec \mathbf{I} la matrice unité de dimensions $(\infty \times \infty)$. Enfin, à condition que la matrice $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ soit inversible (soit en l'absence de résonances), on peut résoudre

$$\{p(X_i)\} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \{g_\infty(S, X_i)\} \quad (2.28)$$

Disposant ainsi de l'information de pression sur la paroi Γ , le problème peut être résolu dans le domaine via une forme matricielle de l'équation 2.19

$$p(R) = g_\infty(S, R) + \mathbf{b}^T \cdot \{p(X_i)\} \quad (2.29)$$

avec

$$\mathbf{b}^T = \langle \dots - \int_{\Gamma_i} (\partial_n g_\infty(R, R') + ik\beta g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma_i) \dots \rangle \quad (2.30)$$

vecteur ligne de dimensions $(1 \times \infty)$.

Il faut noter que lorsque l'on s'attélera à la résolution numérique de ce problème, on considérera évidemment un nombre fini de points sur les parois Γ_i . On s'appliquera également à choisir le même nombre de facettes de que points de collocation, rendant ainsi la matrice \mathbf{A} carrée et permettant ainsi l'inversion de $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ dans 2.28 (la matrice unité \mathbf{I} est alors également carrée). On s'appuie sur le fait que la probabilité que $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ ne soit pas inversible est très faible. En effet, ce cas se présenterait dans des situations résonnantes, or toutes les géométries traitées ici par la méthode intégrale permettent une perte d'énergie par rayonnement à l'infini, évitant ainsi ce problème. La section 2.4 reviendra sur ces aspects numériques.

Cas particulier : paroi parfaitement réfléchissante

En appliquant la propriété 2.20 de l'intégrale du potentiel de double couche à l'expression de la pression sur un point Q de Γ 2.21

$$p(Q) = g_\infty(S, Q) - \int_\Gamma \underbrace{p(R')(\partial_n g_\infty(Q, R') + ik\beta g_\infty(Q, R'))}_{\rightarrow -\frac{1}{2}p(Q)} d(R' \in \Gamma) \quad Q \in \Gamma \quad (2.31)$$

on dérive

$$\begin{aligned} p(Q) &= g_\infty(S, Q) + \frac{1}{2}p(Q) - ik\beta \int_\Gamma g_\infty(Q, R') d(R' \in \Gamma) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}p(Q) &= g_\infty(S, Q) - ik\beta \int_\Gamma g_\infty(Q, R') d(R' \in \Gamma) \\ \Leftrightarrow p(Q) &= 2g_\infty(Q, S_0) - 2ik\beta \int_\Gamma g_\infty(Q, R') d(R' \in \Gamma) \quad Q \in \Gamma \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dans le cas où $\beta = 0$, l'expression de la pression au point Q se simplifie en

$$p(Q) = g_\infty(Q, S) - \int_\Gamma \underbrace{p(R')\partial_n g_\infty(Q, R')}_{\rightarrow -\frac{1}{2}p(Q)} d(R' \in \Gamma) \quad Q \in \Gamma \quad (2.33)$$

ce qui peut également être écrit

$$p(Q) = 2g_\infty(Q, S) \quad Q \in \Gamma \quad (2.34)$$

Reprenant l'écriture matricielle 2.25, les coefficients de la matrice \mathbf{A} deviennent

$$a_{ij} = - \int_{\Gamma_j} \left(\underbrace{\partial_n g_\infty(X_i, R')}_{\rightarrow -\frac{1}{2}} + \underbrace{ik\beta}_{=0} g_\infty(X_i, R') \right) d(R' \in \Gamma_j) = \frac{1}{2} \quad (2.35)$$

en d'autres termes

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{I} \quad (2.36)$$

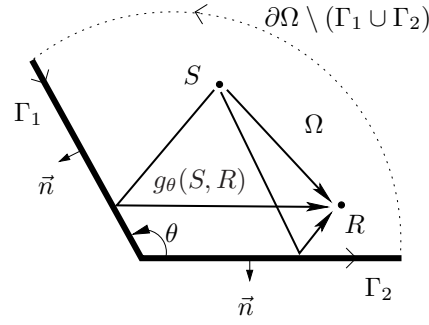


Fig. 2.2 – Situation générale avec deux parois (secteur ouvert). Les flèches sur les limites indiquent le sens d'intégration. Dans le cas particulier où $\theta = \pi/2$, on parle alors d'espace quart-infini.

2.3 Généralisation au cas de l'espace quart-infini et du secteur ouvert

On généralise l'équation 2.18 en ajoutant deux parois au cas de l'espace infini, selon la figure 2.2. L'intégrale de contour est cette fois partagée entre

1. une paroi Γ_1 définie comme une demi-droite avec son extrémité à l'origine ; dans le cas d'une description de la réflexion sonore sur cette paroi, on considère une admittance β_1 et l'expression de la pression sur cette surface doit satisfaire les conditions aux limites en conséquence
2. une seconde paroi Γ_2 définie comme une demi-droite avec son extrémité à l'origine, rejoignant ainsi la paroi Γ_1 et formant avec elle un angle $\theta \in]0, \pi[$; elle peut être décrite par une admittance β_2
3. la limite virtuelle à l'infini $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ qui « ferme » le domaine Ω enserré par les deux parois ; il s'y applique la condition de radiation à l'infini.

L'expression de la pression dans le domaine Ω devient alors

$$\begin{aligned}
 p(R) &= g_\infty(S, R) \\
 &+ \int_{\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} \underbrace{\left(g_\infty(R, R') \partial_{n_{\partial\Omega}} p(R') - p(R') \partial_{n_{\partial\Omega}} g_\infty(R, R') \right)}_{-0} d(R' \in \partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)) \\
 &+ \int_{\Gamma_1} \left(g_\infty(R, R') \underbrace{\partial_{n_1} p(R')}_{-ik\beta_1 p(R')} - p(R') \partial_{n_1} g_\infty(R, R') \right) d(R' \in \Gamma_1) \\
 &+ \int_{\Gamma_2} \left(g_\infty(R, R') \underbrace{\partial_{n_2} p(R')}_{-ik\beta_2 p(R')} - p(R') \partial_{n_2} g_\infty(R, R') \right) d(R' \in \Gamma_2)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

La première intégrale (sur $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$) disparaît sous l'effet de la condition de radiation, à laquelle p et g_∞ doivent souscrire. Les conditions aux limites sont appliquées aux deux intégrales sur Γ_1 et Γ_2 pour obtenir

$$\begin{aligned} p(R) = g_\infty(S, R) & - \int_{\Gamma_1} p(R') (\partial_{n_1} g_\infty(R, R') + ik\beta_1 g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma_1) \\ & - \int_{\Gamma_2} p(R') (\partial_{n_2} g_\infty(R, R') + ik\beta_2 g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma_2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.3.1 Pression sur les parois

L'expression de la pression dans le domaine 2.38 dépend de la pression sur chacune des parois, on applique la même méthode que précédemment pour obtenir cette pression et résoudre le problème, qui passera cette fois par un système d'équations à deux ensembles d'inconnues (deux vecteurs).

On choisit deux points Q_1 sur Γ_1 et Q_2 sur Γ_2 où l'on applique l'équation 2.38 pour obtenir

$$\begin{aligned} p(Q_1) = g_\infty(S, Q_1) & - \int_{\Gamma_1} p(R') (\partial_{n_1} g_\infty(Q_1, R') + ik\beta_1 g_\infty(Q_1, R')) d(R' \in \Gamma_1) \\ & - \int_{\Gamma_2} p(R') (\partial_{n_2} g_\infty(Q_1, R') + ik\beta_2 g_\infty(Q_1, R')) d(R' \in \Gamma_2) \end{aligned} \quad Q_1 \in \Gamma_1 \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} p(Q_2) = g_\infty(S, Q_2) & - \int_{\Gamma_1} p(R') (\partial_{n_1} g_\infty(Q_2, R') + ik\beta_1 g_\infty(Q_2, R')) d(R' \in \Gamma_1) \\ & - \int_{\Gamma_2} p(R') (\partial_{n_2} g_\infty(Q_2, R') + ik\beta_2 g_\infty(Q_2, R')) d(R' \in \Gamma_2) \end{aligned} \quad Q_2 \in \Gamma_2 \quad (2.40)$$

Discrétisation

Les parois Γ_1 et Γ_2 sont discrétisées chacune en une infinité de facettes de longueur identique

$$\Gamma_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Gamma_{1j}) \quad (2.41)$$

$$\Gamma_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\Gamma_{2j}) \quad (2.42)$$

En considérant les facettes comme assez petites pour que la pression sur chacune d'entre elles puisse être vue comme constante et égale à la pression en leur centre $p(X_{1j})$, resp. $p(X_{2j})$, on obtient

$$\begin{aligned}
p(Q_1) = g_\infty(S, Q_1) - \sum_{j=1}^{\infty} p(X_{1j}) \left(\int_{\Gamma_{1j}} (\partial_{n_1} g_\infty(Q_1, R') + ik\beta_1 g_\infty(Q_1, R')) d(R' \in \Gamma_1) \right) \\
- \sum_{j=1}^{\infty} p(X_{2j}) \left(\int_{\Gamma_{2j}} (\partial_{n_2} g_\infty(Q_1, R') + ik\beta_2 g_\infty(Q_1, R')) d(R' \in \Gamma_2) \right)
\end{aligned}$$

$Q_1 \in \Gamma_1$ (2.43)

$$\begin{aligned}
p(Q_2) = g_\infty(S, Q_2) - \sum_{j=1}^{\infty} p(X_{1j}) \left(\int_{\Gamma_1} (\partial_{n_1} g_\infty(Q_2, R') + ik\beta_1 g_\infty(Q_2, R')) d(R' \in \Gamma_1) \right) \\
- \sum_{j=1}^{\infty} p(X_{2j}) \left(\int_{\Gamma_2} (\partial_{n_2} g_\infty(Q_2, R') + ik\beta_2 g_\infty(Q_2, R')) d(R' \in \Gamma_2) \right)
\end{aligned}$$

$Q_2 \in \Gamma_2$ (2.44)

et, en appliquant ces équations aux points de collocation $p(X_{1j})$ et $p(X_{2j})$, on obtient le système matriciel suivant

$$\begin{cases} \{p(X_{1i})\} = \{g_\infty(S, X_{1i})\} + \mathbf{A}_{11} \cdot \{p(X_{1i})\} + \mathbf{A}_{12} \cdot \{p(X_{2i})\} \\ \{p(X_{2i})\} = \{g_\infty(S, X_{2i})\} + \mathbf{A}_{21} \cdot \{p(X_{1i})\} + \mathbf{A}_{22} \cdot \{p(X_{2i})\} \end{cases} \quad (2.45)$$

avec les matrices de dimensions $(\infty \times \infty)$

$$\mathbf{A}_{11} = [a_{11ij}] = \left[- \int_{\Gamma_{1j}} (\partial_{n_1} g_\infty(X_{1i}, R') + ik\beta_1 g_\infty(X_{1i}, R')) d(R' \in \Gamma_{1j}) \right] \quad (2.46)$$

$$\mathbf{A}_{12} = [a_{12ij}] = \left[- \int_{\Gamma_{2j}} (\partial_{n_2} g_\infty(X_{1i}, R') + ik\beta_2 g_\infty(X_{1i}, R')) d(R' \in \Gamma_{2j}) \right] \quad (2.47)$$

$$\mathbf{A}_{21} = [a_{21ij}] = \left[- \int_{\Gamma_{1j}} (\partial_{n_1} g_\infty(X_{2i}, R') + ik\beta_1 g_\infty(X_{2i}, R')) d(R' \in \Gamma_{1j}) \right] \quad (2.48)$$

$$\mathbf{A}_{22} = [a_{22ij}] = \left[- \int_{\Gamma_{2j}} (\partial_{n_2} g_\infty(X_{2i}, R') + ik\beta_2 g_\infty(X_{2i}, R')) d(R' \in \Gamma_{2j}) \right] \quad (2.49)$$

2.3.2 Résolution

On introduit ici une notation simplifiée des vecteurs considérés, afin d'alléger les équations. Soit

$$\mathbf{p}_1 = \{p(X_{1i})\} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{p}_2 = \{p(X_{2i})\} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{g}(\Gamma_1) = \{g_\infty(S, X_{1i})\} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{g}(\Gamma_2) = \{g_\infty(S, X_{2i})\} \quad (2.53)$$

Le système 2.45 devient

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = \mathbf{g}(\Gamma_1) + \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{g}(\Gamma_2) + \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{p}_2 \end{cases} \quad (2.54)$$

ou, après réorganisation et sous réserve d'inversibilité des matrices (cf. . section 2.2.4)

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_1) + \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12}}_{\mathbf{D}_{12}} \cdot \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_2 = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_2) + \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21}}_{\mathbf{D}_{21}} \cdot \mathbf{p}_1 \end{cases} \quad (2.55)$$

avec les notations \mathbf{D}_{12} et \mathbf{D}_{21} pour simplifier l'écriture. En résolvant ce système, on obtient

$$\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{D}_{21}]^{-1} \cdot [[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_1) + \mathbf{D}_{12} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_2)] \quad (2.56)$$

$$\mathbf{p}_2 = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12}]^{-1} \cdot [[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_2) + \mathbf{D}_{21} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_1)] \quad (2.57)$$

Enfin, disposant ainsi de la pression sur les deux parois, le problème peut être résolu en un point quelconque $R \in \Omega$ via une forme matricielle de l'équation 2.38

$$p(R) = g_\infty(S, R) + \mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{p}_2 \quad R \in \Omega \quad (2.58)$$

avec

$$\mathbf{b}_1^T = \langle \dots - \int_{\Gamma_{1i}} (\partial_n g_\infty(R, R') + ik\beta_1 g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma_{1i}) \dots \rangle \quad (2.59)$$

$$\mathbf{b}_2^T = \langle \dots - \int_{\Gamma_{2i}} (\partial_n g_\infty(R, R') + ik\beta_2 g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma_{2i}) \dots \rangle \quad (2.60)$$

Cas particulier : parois parfaitement réfléchissantes

De manière équivalente à 2.36, les matrices se simplifient et \mathbf{A}_{11} et \mathbf{A}_{22} prennent des valeurs particulières pour $\beta = 0$

$$\mathbf{A}_{11} = [a_{12ij}] = \left[- \int_{\Gamma_{1j}} \underbrace{(\partial_{n_1} g_\infty(X_{1i}, R'))}_{\rightarrow -\frac{1}{2}} + \underbrace{ik\beta_1}_{=0} g_\infty(X_{1i}, R') d(R' \in \Gamma_{1j}) \right] = \frac{1}{2} \mathbf{I} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{A}_{22} = [a_{22ij}] = \left[- \int_{\Gamma_{2j}} \underbrace{(\partial_{n_2} g_\infty(X_{2i}, R'))}_{\rightarrow -\frac{1}{2}} + \underbrace{ik\beta_2}_{=0} g_\infty(X_{2i}, R') d(R' \in \Gamma_{2j}) \right] = \frac{1}{2} \mathbf{I} \quad (2.62)$$

et le système des équations de pression sur les parois 2.55 peut être simplifié :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1}}_{=2\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_1) + \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12}}_{2\mathbf{A}_{12}} \cdot \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_2 = \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1}}_{=2\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_2) + \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21}}_{2\mathbf{A}_{21}} \cdot \mathbf{p}_1 \end{cases} \quad (2.63)$$

qui se résout en

$$\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21}]^{-1} \cdot 2\mathbf{g}(\Gamma_1) + [\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21}]^{-1} \cdot 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{g}(\Gamma_2) \quad (2.64)$$

$$\mathbf{p}_2 = [\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{21} \cdot 2\mathbf{A}_{12}]^{-1} \cdot 2\mathbf{g}(\Gamma_2) + [\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{21} \cdot 2\mathbf{A}_{12}]^{-1} \cdot 2\mathbf{A}_{21} \cdot 2\mathbf{g}(\Gamma_1) \quad (2.65)$$

2.4 Mise en oeuvre logicielle

On présente ici rapidement les choix algorithmiques qui ont été faits pour obtenir une résolution numérique des problèmes évoqués ici, en utilisant la méthode intégrale discrétisée. On précise également les différences pouvant exister entre les différents programmes intervenus dans le cadre de ce travail, ainsi que leur provenance.

2.4.1 Espace semi-infini

Pour résoudre le problème en espace semi-infini, la formulation matricielle suivante est à traiter (cf. éq. 2.29) pour obtenir la pression acoustique en un point R du domaine traité :

$$\begin{aligned} p(R) &= g_\infty(S, R) + \mathbf{b}^T \cdot \{p(X_i)\} \\ \{p(X_i)\} &= \{g_\infty(S, X_i)\} + \mathbf{A} \cdot \{p(X_i)\} \end{aligned} \quad (2.66)$$

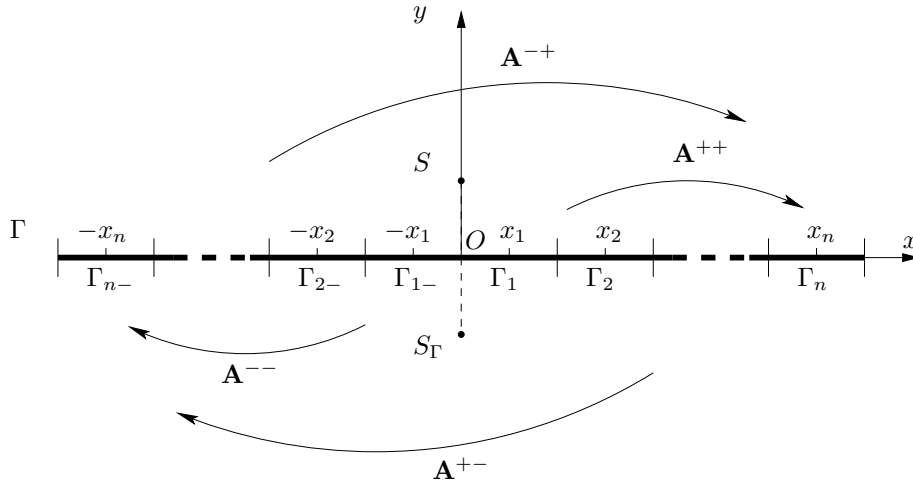


Fig. 2.3 – Construction de la matrice \mathbf{A} d'auto-influence (intervenant dans le calcul du champ sur la paroi).

Dans un premier temps, le vecteur $\{p(X_i)\}$, représentant la valeur de pression aux points de collocation situés sur la paroi Γ est calculé. On choisit de placer le repère du plan Oxy de manière à ce que l'abscisse du point source soit nulle et l'ordonnée de la paroi soit nulle (la paroi est confondue avec l'axe x), selon la figure 2.3. Dans cette configuration, les coordonnées des points de collocation X_i peuvent s'exprimer par leur seule abscisse x_i .

La surface Γ est discrétisée en $2n$ éléments Γ_i de longueur l_Γ . On exploite en effet la symétrie du problème par rapport à l'axe y si celui-ci est choisi comme passant par la source S . La paroi discrétisée de longueur $2nl_\Gamma$ est ainsi centrée sous la source S et la matrice d'auto-influence \mathbf{A} devient symétrique. Cette matrice, de dimensions $(2n \times 2n)$ est divisée en quatre sous matrices de taille $(n \times n)$ selon le schéma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{--} & \mathbf{A}^{-+} \\ \mathbf{A}^{+-} & \mathbf{A}^{++} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

s'appliquant au vecteur des points de collocation

$$\{p(X_i)\} = \begin{Bmatrix} p(-x_n) \\ \vdots \\ p(-x_1) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

Ainsi, la matrice \mathbf{A}^{--} applique l'influence des points situés sur $-x$ sur eux-mêmes, \mathbf{A}^{-+}

applique l'influence de ces points sur ceux situés sur $+x$, et ainsi de suite. En raison de la symétrie du problème, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{--} &= \mathbf{A}^{++} \\ \mathbf{A}^{-+} &= \mathbf{A}^{+-}\end{aligned}\tag{2.69}$$

Les composantes de \mathbf{A} proviennent de

$$a_{ij} = - \int_{\Gamma_j} (\partial_n g_\infty(X_i, R') + ik\beta g_\infty(X_i, R')) d(R' \in \Gamma_j)\tag{2.70}$$

et contiennent donc la valeur d'impédance (ou d'admittance) sur la paroi Γ . Outre de la situation étudiée (hauteur de la source et caractéristiques de discrétisation de la paroi), ces composantes dépendent également de la fréquence étudiée. On se rappelle que dans le cas de parois totalement réfléchissantes, cette matrice est simplement $\mathbf{A} = 1/2$.

Pour obtenir la valeur de la pression aux points de collocation, on applique l'inverse de la matrice unité moins la matrice \mathbf{A} au vecteur de la fonction de Green appliquée aux points de collocation :

$$\{p(X_i)\} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \{g_\infty(S, X_i)\}\tag{2.71}$$

Afin de réduire le temps de calcul lorsque l'on revient à des situations déjà étudiées, les matrices inverses $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ sont stockées pour chaque configuration de source, d'impédance et de fréquence et peuvent ainsi être réutilisées au besoin.

Enfin, pour obtenir la valeur recherchée de pression au point R , le vecteur des points de collocation ainsi obtenu est multiplié au vecteur ligne \mathbf{b}^T de dimensions $(1 \times 2n)$ dont les composantes sont définies par

$$\mathbf{b}^T = \langle \dots - \int_{\Gamma_i} (\partial_n g_\infty(R, R') + ik\beta g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma_i) \dots \rangle\tag{2.72}$$

Programme InTG1 Un premier programme que l'on nomme ici INTG1, écrit avec le langage MATLAB, applique une légère variante de cette méthode dans le cas semi-infini (corrigeant la fonction de Green en espace semi-infini, selon le développement menant aux expressions figurant à la section 8.3.3) et sera utilisé pour le calcul d'un coefficient de réflexion identifié. Il sera présenté dans la seconde partie de ce travail. Les paramètres de discrétisation utilisés par ce programme sont $l_\Gamma = 5/f$ et $n = 1000$ (f représente la fréquence étudiée).

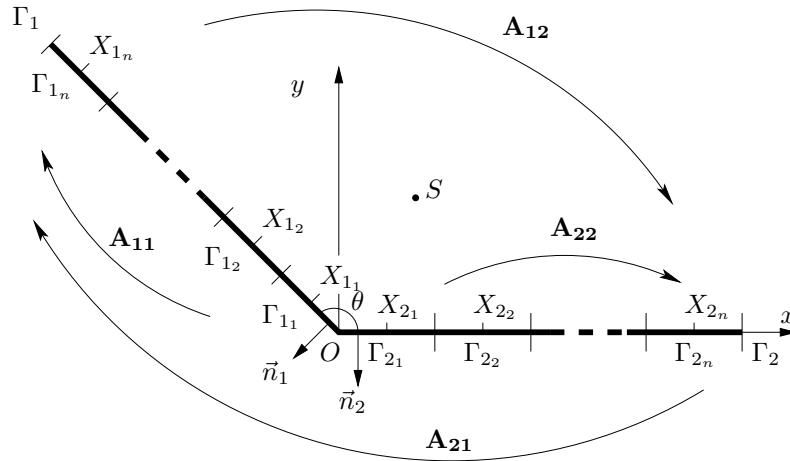


Fig. 2.4 – Construction des matrices d’auto-influence (\mathbf{A}_{11} et \mathbf{A}_{22}) et d’inter-influence (\mathbf{A}_{12} et \mathbf{A}_{21}) dans le cas du secteur ouvert.

2.4.2 Secteur ouvert

Le problème en secteur ouvert, représenté sur la figure 2.4, implique la résolution d’un système plus complexe, représenté par la formulation matricielle suivante (cf. éq. 2.45 et éq. 2.58) :

$$\begin{aligned}
 p(R) &= g_{\infty}(S, R) + \mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{p}_2 \\
 \begin{cases} \{p(X_{1i})\} \\ \{p(X_{2i})\} \end{cases} &= \begin{cases} \{g_{\infty}(S, X_{1i})\} \\ \{g_{\infty}(S, X_{2i})\} \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{A}_{11} \cdot \{p(X_{1i})\} \\ \mathbf{A}_{21} \cdot \{p(X_{1i})\} \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{A}_{12} \cdot \{p(X_{2i})\} \\ \mathbf{A}_{22} \cdot \{p(X_{2i})\} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (2.73)$$

On commence par calculer les vecteurs $\{p(X_{1i})\}$ et $\{p(X_{2i})\}$, représentant la valeur de pression aux points de collocation X_{1i} sur la paroi Γ_1 et X_{2i} sur Γ_2 . La discrétisation des parois est telle que la taille des éléments d’intégration Γ_{1i} et Γ_{2i} est identique sur les deux parois, elles-mêmes de longueur égale. Ainsi, les deux vecteurs de points de collocation sont de même longueur n . Les matrices d’auto-influence \mathbf{A}_{11} et \mathbf{A}_{22} , ainsi nommées car elles représentent l’effet d’une paroi sur elle-même, ainsi que les matrices d’inter-influence \mathbf{A}_{12} et \mathbf{A}_{21} , qui représentent l’effet des parois l’une sur l’autre, sont toutes carrées de dimensions $(n \times n)$.

On constate qu’en choisissant d’orienter les points de collocation de sorte à ce que leur numérotation parte de l’origine en direction des extrémités des parois, la situation est symétrique si la source S se trouve sur la bissectrice de l’angle formé par les deux parois. Dans ce cas, et en respectant le sens d’intégration sur Γ_1 , on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{11} &= -\mathbf{A}_{22} \\
 \mathbf{A}_{12} &= -\mathbf{A}_{21}
 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Cette symétrie divise par deux le temps de calcul des matrices, mais n’est valable a priori que dans les situations particulières où la source est située sur la bissectrice.

Cependant, dans une première version du programme, on a fait le choix de conserver cette symétrie également pour des situations où la source est située dans une zone proche de la bissectrice. Des tests numériques ont montré la validité de cette approximation. Une seconde version du programme n'en fait pas usage et résout ainsi le problème de manière rigoureuse. A l'inverse du cas en espace semi-infini, les matrices d'inter-influence ne présentent en revanche aucune symétrie intérieure.

Les composantes des matrices \mathbf{A}_i proviennent d'une intégration de la dérivée de la fonction de Green sur les parois respectives, plus un terme multiplié par l'admittance sur chacune de ces parois. Elles dépendent ainsi de la situation de la source, de l'angle formé par les parois (via la direction des vecteurs de dérivation \vec{n}_1 et \vec{n}_2 normaux aux parois), de la valeur d'impédance (ou d'admittance) et de la fréquence étudiée. Pour chacune de ces configurations, les matrices sont stockées, de sorte à réduire le temps de calcul lorsque des situations identiques sont étudiées.

La valeur de pression aux points de collocation est obtenue par inversion matricielle et résolution du système reliant les deux parois, tel qu'exposé plus haut dans ce chapitre. Enfin, ces valeurs sont multipliées par les vecteurs ligne \mathbf{b}_1^T et \mathbf{b}_2^T , tous deux de dimensions $(1 \times n)$ lorsque les deux parois sont discrétisées de même façon.

Programme InTG2 Ce programme, écrit par l'auteur avec le langage MATHEMATICA implémente cette méthode dans le cas général du secteur ouvert. En accord avec les buts fixés à la section 1.3, les deux parois sont considérées parfaitement réfléchissantes, soit avec des valeurs d'admittance nulles $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Les parois Γ_1 et Γ_2 sont d'une longueur finie de 5 m, avec des extrémités en $(0, 0)$ m et $(5, 0)$ m pour Γ_1 et $(0, 0)$ m et $(-5 \sin(\theta), 5 \cos(\theta))$ m pour Γ_2 . Ces parois sont discrétisées en $n = 250$ éléments, d'une longueur de $l_\Gamma = 0.02$ m chacun.

Programme InVM A un moment délicat de la démarche, il est apparu nécessaire de confirmer que le programme utilisé pour le calcul de la solution intégrale donne des résultats corrects. Celui-ci a été écrit par le Prof. Vincent Martin avec le langage MATHEMATICA pour corroborer les résultats de l'auteur. Il repose sur le même développement que celui développé ici, avec une expression rigoureuse des matrices d'inter et d'auto-influence (sans symétrie). Intervenant dans le cas d'une intégration de cette méthode au sein d'un problème en cavité (cf. chap. 7), les parois Γ_1 et Γ_2 présentent des longueurs différentes, afin de s'étaler sur 5 fois la longueur des parois correspondantes dans la cavité. La discrétisation est également différente sur les deux parois. On a ici $n_1 = 55$ avec $l_{\Gamma_1} = 0.101$ m sur Γ_1 , soit une longueur totale de paroi de 5.590 m, et $n_2 = 50$ avec $l_{\Gamma_2} = 0.100$ m sur Γ_2 , soit une longueur totale de 5.000 m.

PREMIÈRE PARTIE:

Étude des aspects non spéculaires :
Justification des sources images,
problèmes dus à l'absence de sources
et propositions de résolution.

Chapitre 3

Méthode des Sources Images

3.1 Principe

On se propose ici avant tout de définir la méthode des sources images telle qu'utilisée dans ce rapport. Il s'agit également d'établir une nomenclature qui nous permettra d'étudier un parallèle possible entre cette méthode et une solution intégrale au chapitre suivant.

La méthode que l'on entend étudier ici identifie les sources images de la source réelle par effet miroir (voir fig. 3.1) sur chacune des parois en présence. Ces images sont ensuite soumises au même traitement, définissant ainsi les images des images, auxquelles on applique à nouveau ce principe, à priori jusqu'à l'infini.

On conçoit rapidement la justification géométrique de cette méthode, en effet, un rayon provenant de la source image respecte la loi de Snell-Descartes (l'angle d'incidence ϕ est égal à l'angle réfléchi). De plus, la distance de propagation S_1R est égale à la distance SQR qu'aurait un rayon réfléchi sur Γ_1 .

Les sources images issues de cette méthode sont nommées en accord avec la convention suivante. La source « mère » est nommée sans indice (ou avec l'indice 0 dans certains cas particuliers, voir plus loin) : S . L'image d'une telle source par une paroi Γ_k sera notée S_k . L'image de cette dernière par une paroi Γ_n sera notée S_{kn} et ainsi de suite. De

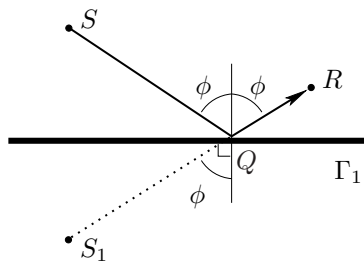


Fig. 3.1 – Principe d'une source image

manière générale, une source image sera notée

$$S_{\underbrace{\dots kn}_{\ell \text{ indices}}} \quad (3.1)$$

pour indiquer qu'elle donne naissance à ℓ réflexions, la dernière d'entre elles sur la paroi n , l'avant-dernière sur la paroi k et ainsi de suite. On dit également que cette source est d'ordre ℓ .

Chaque image source, sous réserve de visibilité à un point récepteur donné, participe à l'établissement du champ acoustique total au point considéré. Pour ce faire, on applique la fonction de propagation en vigueur dans le milieu considéré, dans ce cas la solution de l'équation de propagation en espace infini soit la fonction de Green en espace infini bidimensionnel

$$g_{\infty}(S_j, R) = g_{\infty}(r_j) = -\frac{i}{4} (J_n(kr_j) - iY_n(kr_j)) \quad (3.2)$$

comme on l'a vu à la section 2.1.2. La contribution d'une série de sources images S_j à un point récepteur R est alors

$$p(R) = \sum_j g_{\infty}(S_j, R) \quad (3.3)$$

sous réserve de visibilité des sources. Si l'on désire tenir compte de l'absorption sur les parois, on multiplie chaque rayon par un coefficient de réflexion qui lui est propre, composé en multipliant les coefficients calculés sur chacune des parois rencontrées, en fonction de l'angle d'incidence. Un tel coefficient sera présenté au chapitre 8. Ici en revanche, pour les raisons exprimées précédemment, on ne tient pas compte d'une quelconque absorption par les parois (le coefficient de réflexion est 1).

3.2 Simplifications

En pratique, on choisit un ordre maximum pour lequel on calcule la position des images. Si la situation étudiée est une cavité convexe fermée, l'ordre requis est autour de 20 dans les dimensions et les fréquences prises en compte dans ce travail et avec une absorption sur les parois, ce qui correspond à 8300 sources. Ce choix simplifiant le problème est soumis à un test de convergence lorsqu'il s'agira d'additionner les contributions des sources ainsi calculées. Lors de l'addition des contributions des sources ainsi calculées, on décide de ne plus tenir compte des contributions qui tombent en deçà d'un seuil prédéterminé (1×10^{-6} Pa dans le cas étudié ici). Si ce seuil est atteint, l'ordre choisi est suffisamment élevé. Si ce n'est pas le cas, il est nécessaire de recalculer les images sources en utilisant un ordre maximum supérieur.

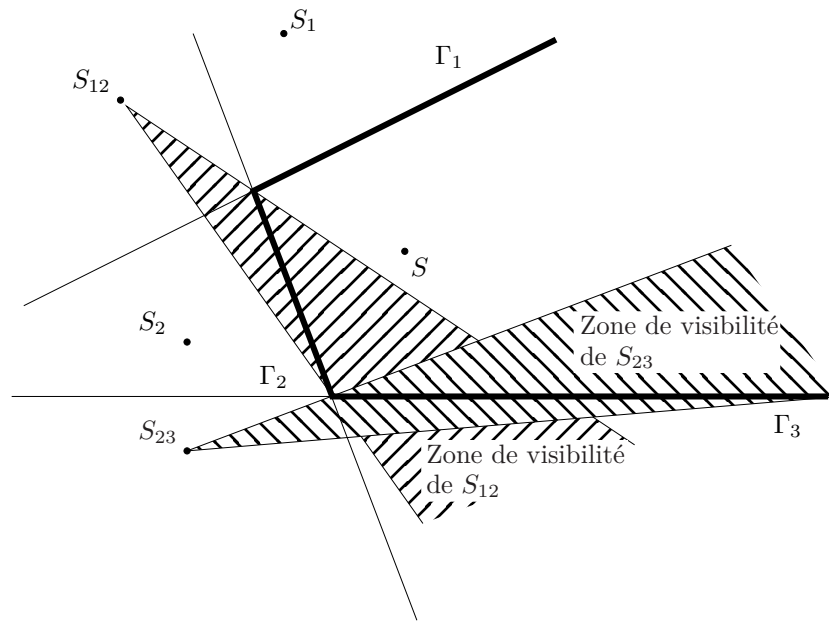


Fig. 3.2 – Zones de visibilité des sources images. Ici, on constate que les zones de visibilité des sources S_{12} et S_{23} n’incluent pas la paroi Γ_1 . Il est donc inutile, dans ce cas, de considérer les images suivantes de ces deux sources par la paroi Γ_1 .

En revanche, toujours au sein d’une cavité et lorsque les parois sont considérées totalement réfléchissantes, un très grand nombre de sources images est requis pour satisfaire ce critère de convergence. On réduit ce nombre en introduisant un facteur absorbant dans le milieu de propagation, ce qui sera discuté plus loin, à la section 7.3. Cet artifice n’est pas nécessaire si la situation étudiée génère un faible nombre de sources actives, comme c’est le cas en secteur ouvert, qui représente du reste un domaine absorbant puisqu’il y a perte d’énergie par rayonnement.

A l’exception de situations particulières (en présence de parois parallèles, comme dans une cavité rectangulaire), toutes les sources calculées ne sont que potentiellement utiles à l’établissement du champ acoustique. En effet, afin de limiter le nombre d’images à considérer, il convient de ne conserver que les sources pouvant donner naissance à une réflexion (cf. fig. 3.2). En effet, dans l’algorithme classique, à chaque source image doit correspondre un « chemin » de réflexion sur les parois. Si un tel chemin n’est pas possible, la source n’est pas « visible » et doit donc être retirée.

On verra par la suite à la section 3.5 qu’à proximité d’angles obtus l’invisibilité de certaines sources conduit à des erreurs de prédiction du champ acoustique. On étudiera alors les méthodes à utiliser pour restaurer l’information manquante, tout d’abord en restaurant artificiellement la présence de certaines sources (section 5.4) puis en optimisant leur position (chapitre 6).

3.3 Mise en oeuvre

On désire ici discuter brièvement de la mise en oeuvre logicielle d'un programme utilisant la méthode des sources images pour une résolution en cavité (vu le faible nombre de sources en jeu, une résolution en secteur ouvert ne nécessite pas l'aide de programmes complexes). Un tel programme doit effectuer les étapes suivantes, également représentées sur la figure 3.4 sous la forme d'un diagramme inspiré de la représentation d'une des premières applications numériques de la méthode [25].

3.3.1 Étapes de la méthode des sources images

Gestion de la géométrie du problème

La situation dans laquelle on veut calculer le champ acoustique (espace ouvert ou fermé) est définie selon les parois en jeu, elles-mêmes décrites par leurs extrémités (et leur impédance si celle-ci est prise en compte). Chaque paroi est en outre identifiée par un numéro unique. Les points source et récepteur sont également définis par leurs coordonnées.

Calcul des sources images

Les sources images sont ensuite calculées jusqu'à un ordre maximal défini au préalable, qui doit être choisi suffisamment grand pour que le critère de convergence puisse être atteint en toute situation. Leur construction se fait par symétrie par rapport à chacune des parois, et l'opération se fait de manière récursive sur toutes les parois et pour tous les ordres considérés. Chaque source image reçoit un numéro d'identification unique qui est stocké dans une table contenant en outre ses coordonnées, son ordre, le numéro de la source dont elle est issue ainsi que le numéro de la paroi ayant fonctionné comme axe de symétrie.

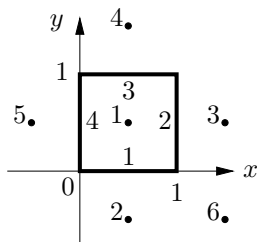


Fig. 3.3 – Cavité carrée

N° de source précédente	coord. x	coord. y	ordre	N° de paroi	N° de source
0	0.5	0.5	0	0	1
1	0.5	-0.5	1	1	2
1	1.5	0.5	1	2	3
1	0.5	1.5	1	3	4
1	-0.5	0.5	1	4	5
2	1.5	-0.5	2	2	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tab. 3.1 – Table de stockage des sources images. La situation présentée ici correspond aux premières sources issues de la situation simple présentée sur la figure 3.3.

Pour illustrer cette opération, la table 3.1 présente un exemple simplifié d'informations stockées pour les premières sources intervenant dans une cavité carrée, telle que présentée sur la figure 3.3 (les coordonnées des sources images sont ainsi faciles à se représenter).

Notons que la source d'origine (portant le numéro 1) est définie comme étant d'ordre 0. Aucune source et aucune paroi ne portant le numéro 0, la valeur correspondant au numéro de la source d'origine dans la première colonne indique qu'elle n'est issue d'aucune symétrie.

Pour une position de source et une géométrie particulière, il est judicieux de sauvegarder la liste de sources ainsi calculée, de sorte à pouvoir s'épargner cette longue étape lors d'une prochaine utilisation. L'opération de calcul des sources images est représentée sur le diagramme de la figure 3.5.

Construction géométrique des rayons

Pour construire les rayons, on considère dans l'ordre toutes les sources calculées à l'étape précédente. Sous réserve de leur visibilité par rapport au point récepteur (un test géométrique permet de déterminer si le point récepteur R « voit » la source S_n en vérifiant que le segment RS_n coupe la paroi d'où est issue S_n , cf. fig. 3.2), on construit les rayons qui y correspondent :

- Le rayon direct correspond à la source d'ordre zéro, soit la source réelle, et relie directement cette dernière au point récepteur, sans aucune réflexion.
- Les sources d'ordre 1 correspondent à des rayons réfléchis une seule fois (les sources considérées sont issues directement de la source réelle).
- Les sources d'ordre 2 correspondent à des rayons réfléchis deux fois (elles sont issues de sources d'ordre 1).
- ... et ainsi de suite

Les rayons sont également numérotés et stockés dans une matrice. Pour chaque rayon, on stocke les coordonnées des points le composant, la valeur totale du coefficient de réflexion associé à ce rayon, son ordre et sa longueur.

Calcul du coefficient de réflexion

Au fur et à mesure de la construction des rayons, il s'agit de calculer le coefficient correspondant à chaque réflexion sur une paroi. Dans le cas de la réflexion spéculaire, ce coefficient ne dépend que de l'angle d'incidence est déterminé par construction géométrique et la loi de Snell-Descartes est appliquée. Une fois le rayon complètement construit, les coefficients de réflexions calculés sur son parcours sont additionnés. La contribution de ce rayon à la pression totale s'obtient en multipliant le coefficient ainsi obtenu à la fonction de propagation correspondant à la longueur de ce rayon.

Lorsque l'on considère toutes les parois parfaitement réfléchissantes, cette étape est superflue, le coefficient prenant une valeur unitaire pour tous les rayons.

Atteinte du critère de convergence

La complexité du calcul peut être limitée en définissant un critère de convergence. Le calcul est ainsi interrompu lorsque la contribution d'un rayon à la pression totale tombe sous un seuil prédéfini. Si ce dernier n'est pas atteint, le programme s'arrête lorsque toutes les sources images visibles ont été prises en compte. Dans ce derniers cas, il est important d'observer quelle fut la contribution du dernier rayon à la pression totale. Si cette contribution est importante, il importe de recommencer l'opération avec un plus grand nombre de sources images. La valeur de ce critère est de 10^{-6} dB pour les calculs présentés dans ce travail.

Lors de l'étude du problème en cavité à parois réfléchissantes, le critère de convergence n'est jamais atteint, même avec un très grand nombre de sources (calculées jusqu'à l'ordre 35, correspondant à plus de 41'000 sources). Afin d'obtenir une convergence des rayons, on introduit alors une absorption dans le milieu de propagation.

Addition des rayons

La pression totale au point récepteur est enfin obtenue en additionnant tous les rayons calculés.

3.3.2 Programmes utilisés

Afin de maîtriser complètement les détails du code de tir de rayons, le choix de développer un code personnel pour l'étude du problème en cavité a été fait dans un premier temps. Celui-ci n'est certainement pas aussi performant, ni abouti que les codes commerciaux ou didactiques existants, mais il permet à son auteur de savoir en tout temps à quelles simplifications il a affaire.

Programme SiTG Ce premier programme, écrit dans le langage MATLAB , reprend les étapes de la démarche précisées ci-dessus. Développé avant tout pour comprendre les détails de la méthode, il calcule la contribution des rayons une fois pour chaque fréquence, ce qui le rend peu performant lors de l'étude du spectre dans une cavité. Il a servi avant tout pour développer l'introduction d'un coefficient de réflexion identifié au sein de la méthode des sources images, une démarche qui sera évoquée plus en détail dans la seconde partie de ce travail.

Les résultats obtenus par ce programme se sont révélés identiques à ceux obtenus par un autre programme, qui a déjà fait ses preuves :

Programme SiTC Écrit en MATLAB par Th. Courtois dans le cadre de l'étude d'une fonction de Green numérique au sein de cavités couplées [15], ce programme reprend le schéma discuté ci-dessus, mais s'avère plus performant lors d'un calcul de spectre (la contribution de chaque rayon est calculé pour toutes les fréquences considérées). Pour cette raison, ce second programme a été préféré pour l'étude des effets de la diffraction en cavité présentée au chapitre 7, et plus loin dans l'introduction d'un coefficient identifié au chapitre 9. En collaboration avec son

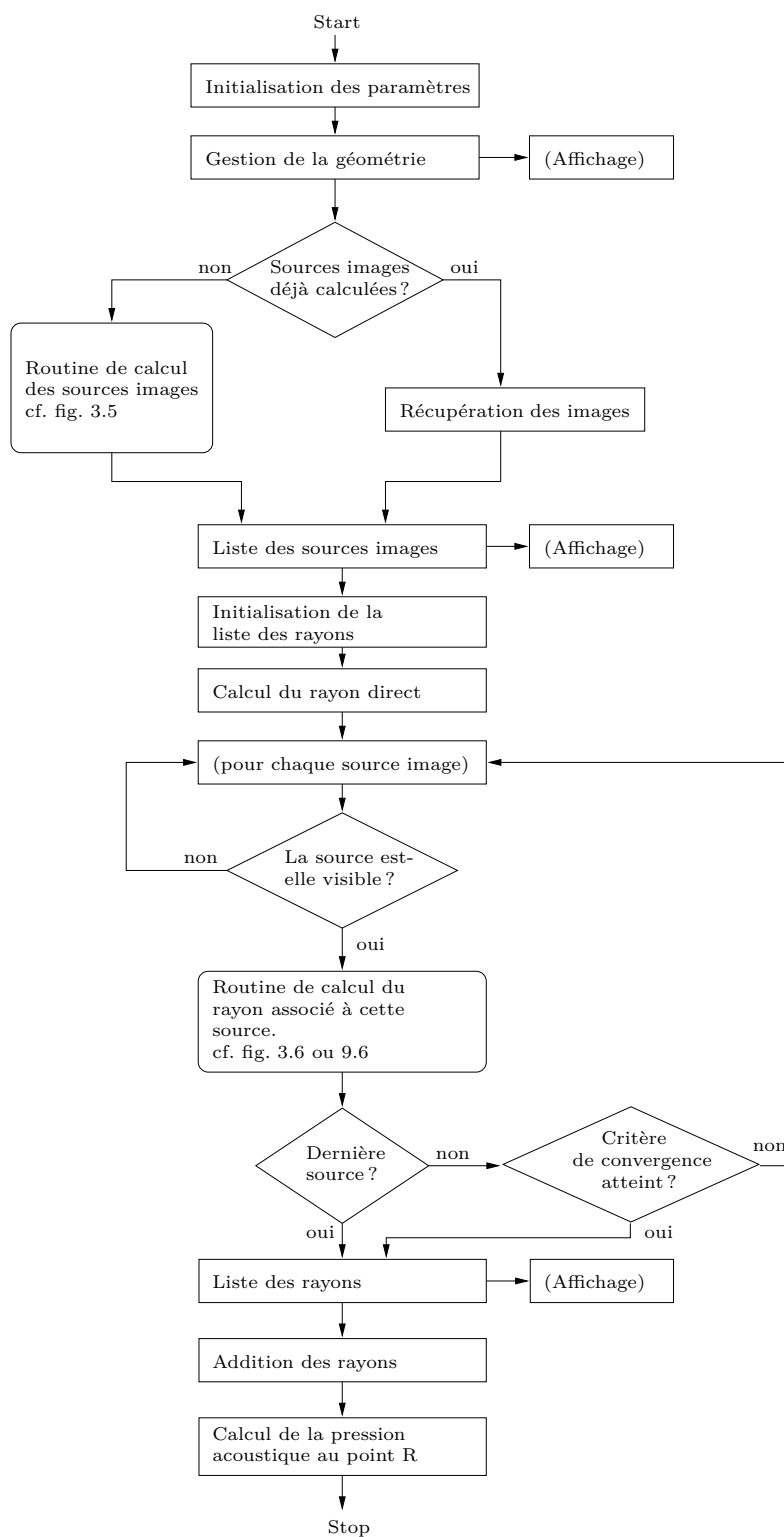


Fig. 3.4 – Diagramme représentant le fonctionnement schématique de l’algorithme utilisé pour le calcul par sources images. Le programme représenté ici est S1TG .

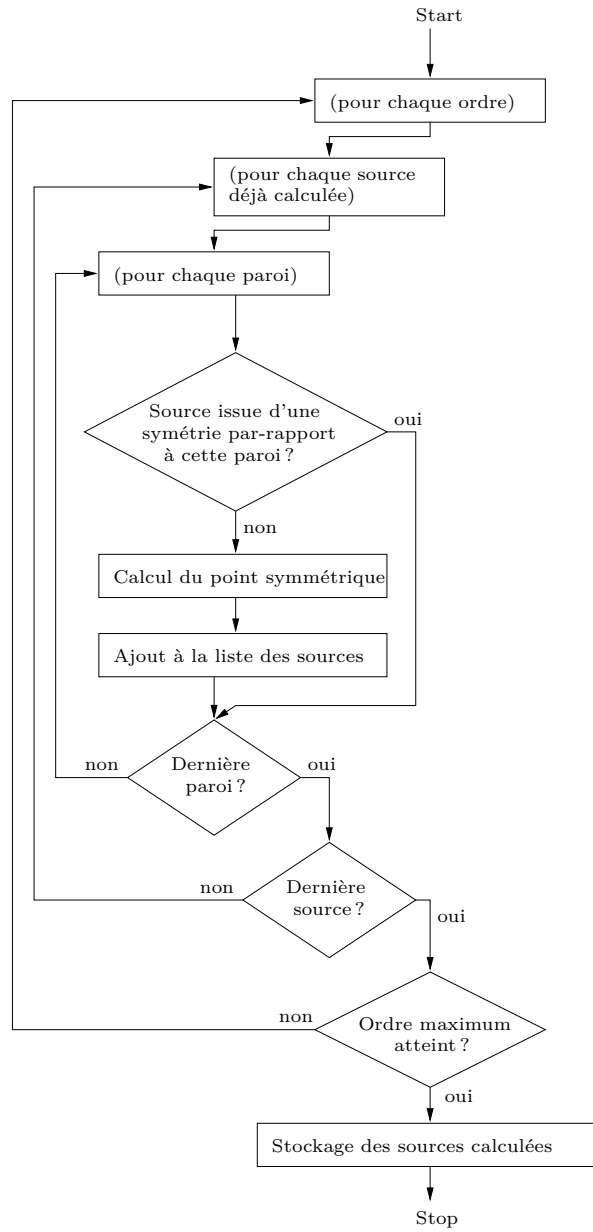


Fig. 3.5 – Sous-routine de calcul des sources images.

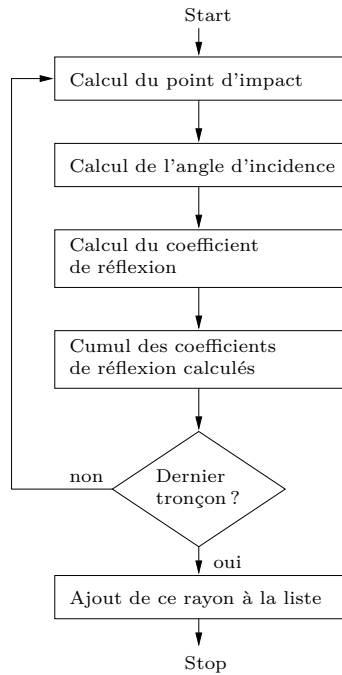


Fig. 3.6 – Sous-routine de calcul de la contribution d'un rayon, en employant la réflexion spéculaire : le coefficient de réflexion ne dépend que de l'angle d'incidence. On y substituera plus tard une autre sous-routine (cf. fig. 9.6) pour tenir compte d'un coefficient non-local.

créateur, l'auteur y a apporté plusieurs modifications, notamment pour automatiser le processus de résolution (prise en compte d'un fichier contenant les variables d'initialisation), ainsi que pour y ajouter la prise en considération du coefficient identifié déjà évoqué.

L'application de la méthode des sources images au sein d'une situation simple telle celle du secteur ouvert ne nécessite aucun calcul compliqué. Dans les comparaisons entre cette méthode et la méthode intégrale, les deux méthodes sont appliquées par le programme du calcul intégral dans le secteur ouvert, appelé INTG2 (cf. § 2.4.2).

3.4 Exemples d'application

On rappelle maintenant les deux situations qui seront étudiées dans les chapitres qui vont suivre en y appliquant la méthode discutée ici.

3.4.1 Secteur ouvert

La situation type qui sera étudiée s'apparente à celle qui est représentée sur la fig. 3.7. Les deux parois Γ_1 et Γ_2 délimitent un secteur du plan d'ouverture θ . En théorie, ces deux parois sont des demi-droites depuis le point de contact O , situé à l'origine, et sont donc de longueur infinie. Le milieu acoustique dans lequel s'applique l'équation de

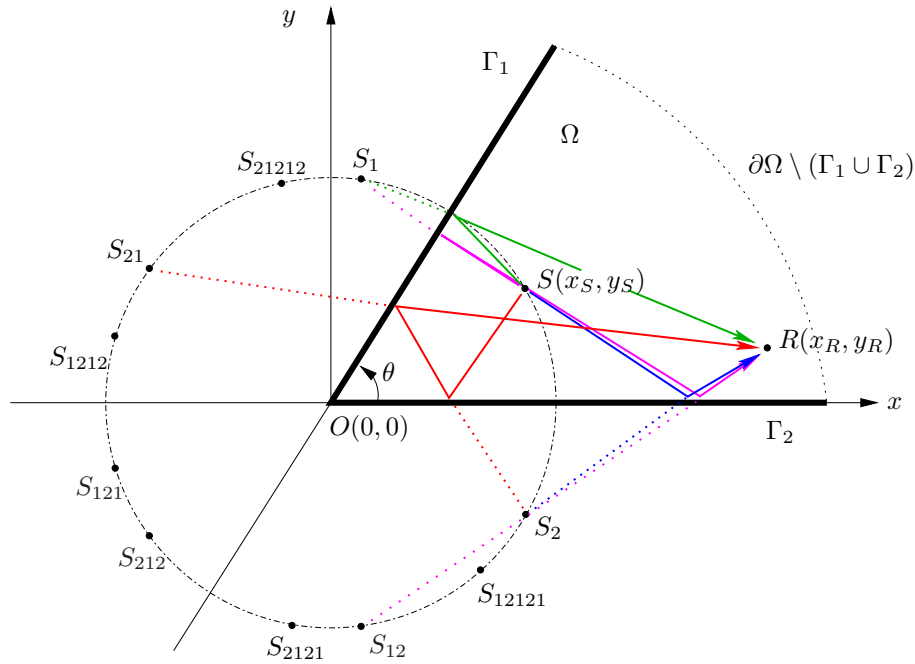


Fig. 3.7 – Méthode des sources images appliquée au secteur ouvert : la réflexion sur les parois Γ_1 et Γ_2 est rendue en additionnant la contributions des sources images par ces parois. Dans le cas présenté ici, le nombre total de sources est de 11 : une source primaire S et 10 sources images S_i , qui s'arrange sur un cercle ayant l'origine pour centre (on ne représente ici que les rayons jusqu'à l'ordre 2 pour conserver une certaine clarté).

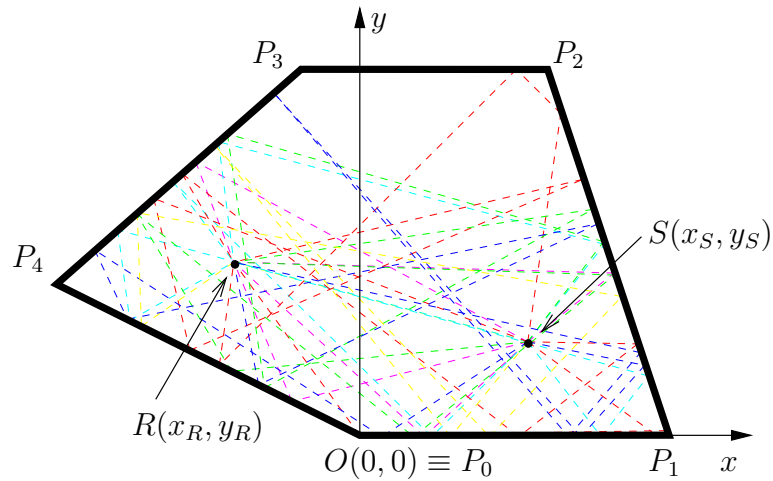


Fig. 3.8 – Cavité 2D étudiée. Les dimensions sont en mètres. Les rayons sont ici montrés jusqu'à l'ordre de réflexion 8.

Helmholtz est contenu dans le domaine Ω , délimité par les deux parois $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et « fermé » théoriquement à l'infini par $\delta\Omega \setminus \Gamma$. La paroi Γ_1 est confondue avec l'axe des x positifs.

Une source ponctuelle S (parfois aussi indiquée avec un indice 0 lorsqu'il est important de la différencier des sources images : S_0) est située aux coordonnées (x_S, y_S) . Selon l'algorithme présenté à la section 3.3, elle donne naissance à une série de sources images S_1, S_2, S_{12} , etc. Dans une configuration avec deux parois non parallèles comme c'est le cas ici, la source S produit une série finie de sources images. On verra plus loin que la quantité de sources images générées dans un secteur ouvert est une fonction de l'angle d'ouverture θ . Dans le cas présenté sur la figure 3.7, les sources images sont au nombre de 10. Le niveau de pression est évalué au point R situé aux coordonnées (x_R, y_R) .

3.4.2 Cavité fermée

La cavité étudiée reprend une géométrie pouvant rappeler un habitacle automobile et rejoint la situation étudiée en détail par l'auteur du programme de calcul par sources images [15]. Cette situation est représentée sur la figure 3.8, où l'on indique également le trajet des rayons acoustiques étudiés, jusqu'à l'ordre de réflexion 8. Les coordonnées (en mètres) des extrémités des parois sont $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 0)$, $P_2(0.6, 1.2)$, $P_3(-0.2, 1.2)$ et $P_4(-1, 0.5)$.

3.5 Inconvénients de la méthode des sources images

Comme on l'a vu en introduction, la méthode des sources images est largement utilisée en acoustique géométrique. Les raisons de son application sont avant tout intuitives, et proviennent d'un parallèle – osé mais qui a porté ses fruits – avec les méthodes utilisées en optique. Cependant, une comparaison entre le champ décrit en certains points d'un domaine convexe décrit par la méthode des éléments finis et par la méthode des sources images fait apparaître des différences notables (cf. fig. 1.2).

Il est su qualitativement que la méthode des rayons ne tient pas compte des diffractions et/ou diffusions et que la solution obtenue ne sera en général pas exacte. Mais, même en ne traitant que du champ sonore issu des réflexions spéculaires, que sait-on au juste de l'aptitude des sources-images à le décrire ? L'existence de ces sources ne peut être justifiée uniquement par un raisonnement géométrique, aussi propre soit-il. Plus encore, si l'on considère une situation du type de celle qui est présentée à la figure 3.9, on constate que le concept de visibilité des sources utilisé dans la méthode des rayons peut induire des erreurs importantes.

On présente ici deux situations, ne différant que par la position de la source. Dans la situation décrite à la figure 3.9(a), les deux parois Γ_1 et Γ_2 forment entre elles un angle d'ouverture de $\theta = 5\pi/8$, la source est située aux coordonnées $(1.0, 2.0)$ m et l'on considère la pression sur tous les points de la paroi Γ_1 . Les deux sources images de premier ordre S_1 et S_2 sont visibles en tous les points de cette paroi et la courbe des niveaux de pression obtenus par la méthode des sources images et par la méthode

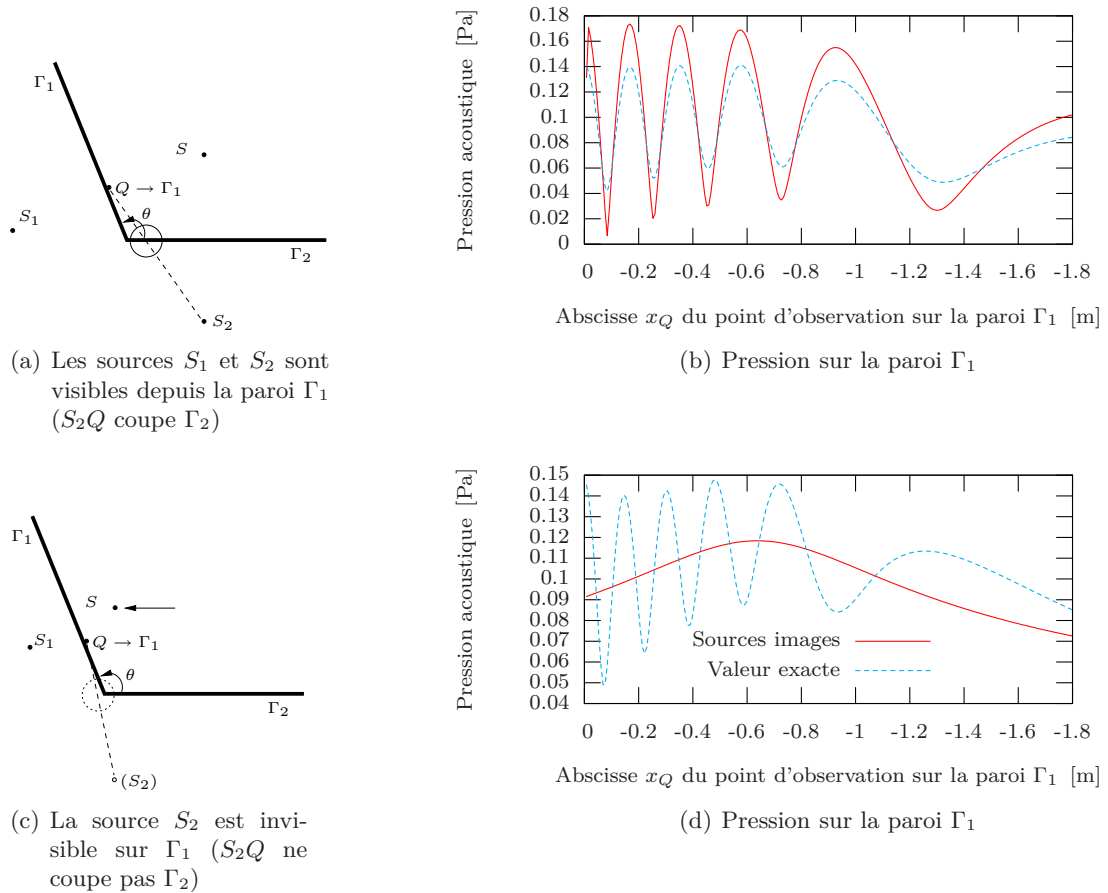


Fig. 3.9 – Effets de l’invisibilité d’une source : lorsque l’on déplace la source S vers la droite, la source image S_2 cesse d’être visible en tout point de la paroi Γ_1 . La qualité de la prédiction sonore sur cette paroi s’en ressent.

intégrale (solution de référence) montrent une bonne adéquation des résultats sur la figure 3.9(b).

En revanche, lorsque l’on déplace la source S sur la droite pour la placer en des coordonnées (0.5, 2.0) m, la source image S_2 devient invisible sur Γ_1 (un rayon reliant un point Q quelconque de la paroi Γ_1 à S_2 ne croise pas la paroi Γ_2 dont est issue cette source). Intuitivement, cette invisibilité choque déjà l’entendement, car elle présupposerait dans ce cas précis, que la présence de la paroi Γ_2 n’aurait aucun effet sur la pression mesurée sur l’autre paroi. Or, étant donné la proximité des deux parois, il est attendu qu’elles jouent toutes deux un rôle important sur le niveau de pression, à plus forte raison à proximité de l’angle formé par les deux parois. Les résultats obtenus dans cette situation, présentés à la figure 3.9(d), corroborent cette intuition. La source manquante S_2 provoque bien un appauvrissement de la qualité de la prédiction sonore obtenue par la méthode des rayons !

L'identification de telles sources images « manquantes » soulève encore plus la question de la légitimité de la méthode des sources images appliqué à l'acoustique. Or, avant de pouvoir proposer des méthodes pour corriger ce genre d'erreurs, il est indispensable d'élaborer une justification rigoureuse du concept de sources images. Leur unique provenance intuitive n'est pas suffisante, car elle ne peut expliquer les situations telles que celle que l'on vient d'observer. Existe-t-il alors un lien entre la formulation par des sources images et une solution analytique ? Si un tel lien existe, on dispose ainsi d'un moyen pour mieux cerner la contribution de chaque source image au champ acoustique total.

Chapitre 4

Une justification analytique possible de la méthode des sources images

Le développement qui va suivre vise à établir un parallèle entre les contributions d'une série de sources images et la solution exacte dans le secteur ouvert, obtenue grâce à la méthode intégrale présentée au chapitre 2, que l'on reprend ici brièvement avant de s'en servir pour un nouveau développement.

On commence par traiter le cas de réflexions sur des parois totalement réfléchissantes, en accord avec le but que l'on s'est fixé (cf. § 1.3), mais également parce que le développement est ainsi plus clair et les parallèles avec les sources images apparaissent plus rapidement. Cependant, la justification analytique présentée ici s'applique également aux parois absorbantes, comme le montre la généralisation présentée à la section 4.4.

4.1 Préalables

Dans une situation d'un demi-espace borné par une paroi Γ totalement réfléchissante (cf. fig. 2.1), une source ponctuelle nommée ici S_0 rayonne une pression acoustique. Cette pression, évaluée en un point R du domaine est égale à (cf. éq. 2.19 avec $\beta = 0$)

$$p(R) = g_\infty(R, S_0) - \int_\Gamma \partial_{n_M} g_\infty(R, M) p(M) dM \quad (4.1)$$

Si l'on fait tendre le point R vers un point Q situé sur la paroi Γ , on obtient (cf. éq. 2.34)

$$p(Q) = 2g_\infty(Q, S_0) \quad Q \in \Gamma \quad (4.2)$$

Dans ce cas précis, on voit déjà que la représentation de l'effet de la paroi Γ par la présence d'une source image S_1 est exacte, en effet le facteur 2 peut être décomposé comme

$$\begin{aligned} p(Q) &= 2g_\infty(Q, S_0) = g_\infty(Q, S_0) + g_\infty(Q, S_0) \\ &= g_\infty(Q, S_0) + g_\infty(Q, S_1) \end{aligned} \quad Q \in \Gamma \quad (4.3)$$

vu que la distance $\|Q - S_0\|$ est égale à la distance $\|Q - S_1\|$.

À partir d'ici, on utilise les notations simplifiées suivantes. L'égalité 4.3 étant vraie pour tout Q appartenant à Γ , on note dorénavant $p(\Gamma) = 2g_0(\Gamma)$ à la place de $p(Q) = 2g_\infty(Q, S_0)$. L'indice 0 sur la fonction de Green se rapporte à celui de la source S_0 d'où est issue la pression que l'on considère.

Reprenant la démarche de discrétisation de la section 2.2.3, on peut représenter la pression sur les points de collocation $\mathbf{p}(\Gamma)$ de la paroi Γ par l'équation matricielle (cf. 2.28)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\Gamma) &= \mathbf{g}_0(\Gamma) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}(\Gamma) \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma) \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec pour $\beta = 0$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{I} \quad (4.5)$$

La matrice multipliant la fonction de Green sur la paroi Γ dans l'équation 4.4 décrit l'effet de la paroi sur le champ libre (la fonction de Green) émise par la source S_0 . Si l'on développe cette matrice en série, on obtient sous réserve de convergence

$$\mathbf{p}(\Gamma) = [\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots] \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma) \quad (4.6)$$

On peut noter que pour $\beta = 0$ avec 4.5, la convergence est vérifiée car on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\Gamma) &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots)\mathbf{I} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma) \\ &= 2\mathbf{g}_0(\Gamma) \end{aligned} \quad (4.7)$$

qui rejoint 2.34 et qui peut être compris comme la contribution de la source S_0 plus celle d'une source image S_1 qui prend en compte la présence de la paroi Γ et dont la contribution identique à celle de S_0 révèle une réflexion totale sur la paroi.

Par ailleurs, la matrice \mathbf{A} représente la radiation d'une source de pression sur elle-même via le terme intégral qu'elle applique. Ainsi dans le développement en série de 4.6, une valeur de pression sur la paroi soumise à l'action de la matrice \mathbf{A} devient une nouvelle source de pression, laquelle est à nouveau modifiée par \mathbf{A} etc. La pression de source converge ainsi vers une pression de paroi $\mathbf{g}_1(\Gamma) = 1/2\mathbf{p}(\Gamma)$. Cette interprétation peut être vue comme un cas particulier du développement présenté plus loin à la section 4.4, qui tiendra alors compte d'une absorption sur la paroi.

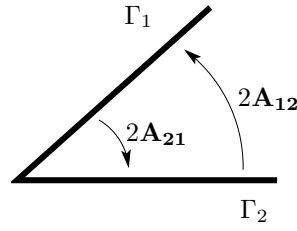


Fig. 4.1 – Interprétation des matrices : \mathbf{A}_{12} et \mathbf{A}_{21} transfèrent respectivement l'information de pression de la paroi Γ_1 à Γ_2 et réciproquement.

4.2 Secteur ouvert à parois réverbérantes

On repart du système d'équations 2.63 décrivant l'effet des deux parois Γ_1 et Γ_2 parfaitement réfléchissantes sur la pression totale sur celles-ci :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = \underbrace{2\mathbf{I} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_1)}_{\equiv \mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)} + 2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_2 = \underbrace{2\mathbf{I} \cdot \mathbf{g}(\Gamma_2)}_{\equiv \mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2)} + 2\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{p}_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

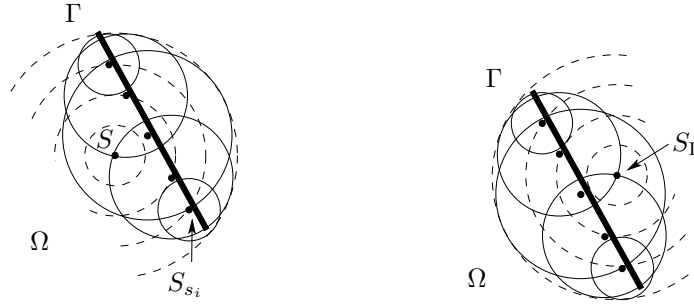
En accord avec l'interprétation du facteur 2 qu'on a faite pour la réflexion sur une paroi dans l'équation 4.3, on peut ici identifier les contributions des sources images S_1 et S_2 issues des deux parois dans le premier terme des équations du système 4.8. Ces contributions sont, avec la notation abrégée déjà utilisée,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0(\Gamma_1) &= g_\infty(S_0, Q_i \in \Gamma_1) \\ \mathbf{g}_1(\Gamma_1) &= g_\infty(S_1, Q_i \in \Gamma_1) \\ \mathbf{g}_0(\Gamma_2) &= g_\infty(S_0, Q_i \in \Gamma_2) \\ \mathbf{g}_2(\Gamma_2) &= g_\infty(S_2, Q_i \in \Gamma_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Les matrices $2\mathbf{A}_{12}$ et $2\mathbf{A}_{21}$ peuvent être interprétés comme des matrices de transfert de pression d'une paroi vers l'autre (fig. 4.1). Les indices sont choisis de manière à être consistants avec ceux utilisés pour les sources images, et doivent par conséquent se lire de droite à gauche : la matrice $2\mathbf{A}_{12}$ transfère la pression de la paroi Γ_2 vers Γ_1 de même qu'une source image S_{12} décrit une réflexion sur la paroi Γ_2 , puis Γ_1 , et ainsi de suite (cf. chap. 3). On se reportera à la table 4.1 en fin de chapitre pour un résumé de la provenance des différentes matrices intervenant dans les développements présentés ici.

Ce système une fois résolu donne accès à

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= [\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21}]^{-1} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)) \\ &\quad + [\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21}]^{-1} \cdot 2\mathbf{A}_{12} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2)) \end{aligned} \quad (4.10)$$



- (a) La présence de la source S peut être rendue par une série de sources virtuelles S_{s_i} situées sur Γ .
 (b) Ces sources virtuelles représentent de la même manière une source S_Γ située symétriquement par rapport à Γ .

Fig. 4.2 – Principe de Huygens appliqué au lieu géométrique Γ .

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 = & [\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{21} \cdot 2\mathbf{A}_{12}]^{-1} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2)) \\ & + [\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{21} \cdot 2\mathbf{A}_{12}]^{-1} \cdot 2\mathbf{A}_{21} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

On développe l'expression matricielle inversée en série de manière analogue à 4.6

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 = & \mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1) + 2\mathbf{A}_{12} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2)) \\ & + 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)) \\ & + 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21} \cdot 2\mathbf{A}_{12} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2)) + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 = & \mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2) + 2\mathbf{A}_{21} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)) \\ & + 2\mathbf{A}_{21} \cdot 2\mathbf{A}_{12} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2)) \\ & + 2\mathbf{A}_{21} \cdot 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)) + \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3 Interprétation via le principe de Huygens

Le principe de Huygens (fig. 4.2) postule qu'il est possible de représenter le champ émis par une source S comme la somme des champs émis par une série de sources virtuelles S_{s_i} situées sur un front d'onde entre cette source et un point récepteur [6, chap. 1, § 4]. Ce postulat, qui reste pour le moment qualitatif, permet d'avancer une interprétation des termes apparaissant dans les équations 4.12 et 4.13.

En effet, si l'on observe l'expression de \mathbf{p}_1 dans 4.12, on observe que le terme $2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2)$ est la pression rayonnée par la source S_0 sur Γ_2 et transférée vers Γ_1 via la matrice $2\mathbf{A}_{12}$, selon l'interprétation ayant conduit à la figure 4.1. Les valeurs de pression sur le lieu géométrique occupé par Γ_2 reflètent la présence de la source S_0 via les valeurs aux points du vecteur $\mathbf{g}_0(\Gamma_2)$. Par construction géométrique, ces valeurs peuvent

rendre compte de la même manière d'une source S_2 située à une position symétrique à S_0 par rapport à Γ_2 . Si l'on accepte le principe de Huygens, ces valeurs de pression aux points de collocation sur Γ_2 , exprimées par le vecteur $\mathbf{g}_2(\Gamma_2)$, peuvent également être considérées comme révélant un front d'onde provenant de la source S_2 . Via la multiplication par $2\mathbf{A}_{12}$, cette pression est enfin transférée sur Γ_1 . On obtient ainsi le schéma d'interprétation suivant

Schéma A

$$\begin{array}{l}
 \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2)}_{\equiv \mathbf{g}_2(\Gamma_2)} \rightarrow \text{pression semblant provenir de } S_2 \text{ sur } \Gamma_2 \\
 \underbrace{\quad}_{\equiv \mathbf{g}_2(\Gamma_1)} \rightarrow \text{pression issue de } S_2 \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } \mathbf{transférée} \text{ sur } \Gamma_1 \\
 \qquad \qquad \qquad \text{via } 2\mathbf{A}_{12} \text{ et le principe de Huygens}
 \end{array} \tag{4.14}$$

Ce raisonnement est qualitatif et une application correcte du principe de Huygens nécessiterait la connaissance de la pression issue de S_2 en chaque point de la paroi infinie Γ_2 . Or le vecteur $\mathbf{g}_0(\Gamma_2)$ ne renseigne que sur la valeur de la pression aux points de collocation sur Γ_2 . De plus, lorsque la méthode est appliquée numériquement, ce vecteur doit nécessairement être de dimensions finies, donc refléter une paroi Γ_2 finie, et ne peut donc parfaitement rendre compte d'un front d'onde infini. Cependant, les résultats numériques qui seront présentés au chapitre 5 montreront la pertinence de ce raisonnement.

Si l'on observe maintenant le terme $2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_2(\Gamma_2)$ dans 4.12, on voit qu'il représente la pression issue de S_2 sur Γ_2 , transféré sur Γ_1 via $2\mathbf{A}_{12}$. Appliquant à nouveau le principe de Huygens (avec les mêmes réserves que ci-dessus), ce terme peut être vu comme étant la contribution d'une source S_{21} sur Γ_1 , soit le schéma d'interprétation

Schéma B

$$\begin{array}{l}
 \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_2(\Gamma_2)}_{\equiv \mathbf{g}_2(\Gamma_1)} \rightarrow \text{pression issue de } S_2 \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } \mathbf{transférée} \text{ sur } \Gamma_1 \\
 \qquad \qquad \qquad \text{via } 2\mathbf{A}_{12} \text{ et le principe de Huygens} \\
 \equiv \mathbf{g}_{21}(\Gamma_1) \rightarrow \text{pression semblant provenir de } S_{21} \text{ sur } \Gamma_1
 \end{array} \tag{4.15}$$

Appliquant ces deux raisonnements aux équations 4.12 et 4.13 on peut identifier les

termes

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 = & \mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1) + \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2)}_{\equiv \mathbf{g}_2(\Gamma_1) \text{ via 4.14}} + \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_2(\Gamma_2)}_{\equiv \mathbf{g}_{21}(\Gamma_1) \text{ via 4.15}} \\
& + \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \underbrace{2\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_1)}_{\equiv \mathbf{g}_1(\Gamma_2) \text{ via 4.14}}}_{\equiv \mathbf{g}_{12}(\Gamma_1) \text{ via 4.14}} + \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \underbrace{2\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{g}_1(\Gamma_1)}_{\equiv \mathbf{g}_{12}(\Gamma_2) \text{ via 4.15}}}_{\equiv \mathbf{g}_{121}(\Gamma_1) \text{ via 4.15}} \\
& + \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \underbrace{2\mathbf{A}_{21} \cdot \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2)}_{\equiv \mathbf{g}_2(\Gamma_1) \text{ via 4.14}}}_{\equiv \mathbf{g}_{21}(\Gamma_2) \text{ via 4.14}}}_{\equiv \mathbf{g}_{212}(\Gamma_1) \text{ via 4.14}} + \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \underbrace{2\mathbf{A}_{21} \cdot \underbrace{2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_2(\Gamma_2)}_{\equiv \mathbf{g}_{21}(\Gamma_1) \text{ via 4.15}}}_{\equiv \mathbf{g}_{212}(\Gamma_2) \text{ via 4.15}}}_{\equiv \mathbf{g}_{2121}(\Gamma_1) \text{ via 4.15}} + \dots
\end{aligned} \tag{4.16}$$

et similairement pour \mathbf{p}_2 . En réunissant les termes de même ordre (défini ici par le nombre de multiplications par les matrices $2\mathbf{A}_{12}$ et $2\mathbf{A}_{21}$), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 = & \underbrace{[\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)]}_{\text{termes d'ordre 0}} + \underbrace{[\mathbf{g}_2(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{21}(\Gamma_1)]}_{\text{termes d'ordre 1}} \\
& + \underbrace{[\mathbf{g}_{12}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{121}(\Gamma_1)]}_{\text{termes d'ordre 2}} + \underbrace{[\mathbf{g}_{212}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{2121}(\Gamma_1)]}_{\text{termes d'ordre 3}} + \dots
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_2 = & \underbrace{[\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2)]}_{\text{termes d'ordre 0}} + \underbrace{[\mathbf{g}_1(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{12}(\Gamma_2)]}_{\text{termes d'ordre 1}} \\
& + \underbrace{[\mathbf{g}_{21}(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{212}(\Gamma_2)]}_{\text{termes d'ordre 2}} + \underbrace{[\mathbf{g}_{121}(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{1212}(\Gamma_2)]}_{\text{termes d'ordre 3}} + \dots
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Les deux schémas d'interprétation utilisés ici sont résumés dans la table 4.2 en fin de chapitre.

4.4 Extension au cas de parois absorbantes

La formulation avec des parois parfaitement réfléchissantes décrite à la section précédente est suffisante pour l'étude des effets de limitation de la méthode qu'on se propose de faire (cf. § 1.3). Elle permet également d'utiliser un formalisme plus simple, ce qui n'est pas négligeable lorsqu'il s'agit de procéder à l'interprétation des termes. Cependant, il apparaît que l'étude du même problème mais avec une admittance $\beta_1 \neq 0$ sur Γ_1 et $\beta_2 \neq 0$ sur Γ_2 permet une interprétation similaire.

Précision de nomenclature

Avant de développer, il est nécessaire d'adapter la nomenclature introduite en début de chapitre pour tenir compte de l'absorption. On reprend l'équation matricielle de la pression dans un domaine borné par une paroi absorbante

$$p(R) = \mathbf{g}_0(R) + \mathbf{b}^T \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma) \quad (4.19)$$

obtenue en combinant les équations 2.28 et 2.29 et à laquelle on applique les notations définies plus haut. Le terme $\mathbf{g}_0(\Gamma)$ représente la pression issue de la source S_0 rayonnée sur le lieu géométrique occupé par la paroi Γ . Cette pression est soumise d'une part à une éventuelle impédance propre de la source Z_{S_0} et d'autre part à une impédance de rayonnement Z_{rad_Ω} . Une notation plus précise de cette pression pourrait alors être

$$\mathbf{g}_0(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}_\Omega}, \Gamma^{\text{géo.}}) \quad (4.20)$$

La multiplication de ce terme par la matrice $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ lui applique les effets de l'impédance sur Γ . On peut alors noter la pression sur la paroi (cf. 2.28)

$$\mathbf{p}(\Gamma) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}_\Omega}, \Gamma^{\text{géo.}}) = \mathbf{g}_0(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}_\Omega}, \Gamma(Z_\Gamma)) \quad (4.21)$$

où l'on indique clairement qu'il ne s'agit plus ici de la pression simplement au lieu géométrique défini par Γ , mais bien sur une paroi, avec son impédance Z_Γ . Cette pression va elle-même rayonner à nouveau dans l'espace et prendre le rôle d'une « source » avec l'équivalent d'une impédance propre Z_Γ . Une charge de rayonnement Z_{rad_Ω} lui est appliquée par le domaine Ω dans lequel elle rayonne.

Vu de cette manière, il apparaît que l'on peut également considérer $\mathbf{p}(\Gamma)$ comme étant issue d'une source image S_1 , le rôle de la paroi étant correctement décrit¹ par la prise en compte de « l'impédance propre » Z_Γ de $\mathbf{g}_0(\Gamma)$.

Si l'on remplace finalement l'expression ainsi obtenue dans l'équation 4.19, on peut interpréter $p(R) - \mathbf{g}_0(R)$ comme la pression à un point particulier du domaine et provenant de l'image source S_1 , et on écrit

$$\mathbf{b}^T \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma) = \mathbf{g}_1(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}_\Omega}, Z_\Gamma \cup Z_{\text{rad}_\Gamma}, R) \quad (4.22)$$

Cette notation révèle l'émission sonore d'une source image S_1 vers un point R du domaine, en tenant compte

- que S_1 est en fait l'image d'une source S_0 qui possède sa propre impédance propre Z_{S_0} et est chargée par l'impédance de rayonnement Z_{rad_Ω}
- que l'image se fait par réflexion sur une paroi Γ d'impédance Z_Γ

¹sous réserve bien sûr de l'opportunité de l'impédance localisée pour décrire un réflexion, ce qui sera discuté plus avant dans la deuxième partie de ce travail.

– que la ré-émission de la paroi vers le point R est soumise à l'impédance de rayonnement $Z_{\text{rad}\Gamma}$.

Cette notion d'une paroi vue comme une source linéique disposant de sa propre valeur de pression et de son impédance propre et soumise à une impédance de rayonnement (charge) pour rayonner vers un point du domaine (y compris vers le lieu géométrique d'une autre paroi) est la clef de l'interprétation présentée ici.

Application au cas du secteur ouvert

On reprend maintenant les équations matricielles 2.56 et 2.57 de la pression sur deux parois d'un secteur ouvert, cette fois sans les simplifications amenées par $\beta = 0$

$$\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{D}_{21}]^{-1} \cdot [[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{D}_{12} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2)] \quad (4.23)$$

$$\mathbf{p}_2 = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12}]^{-1} \cdot [[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{D}_{21} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_1)] \quad (4.24)$$

Les matrices

$$\mathbf{D}_{12} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12} \quad (4.25)$$

et

$$\mathbf{D}_{21} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21} \quad (4.26)$$

généralisent ainsi les matrices $2\mathbf{A}_{12}$ et $2\mathbf{A}_{21}$ de l'équation 4.8. À nouveau, les indices sont choisis de façon à correspondre avec la notation utilisée pour les sources images, ainsi \mathbf{D}_{21} décrit le transfert de pression de la paroi Γ_1 vers Γ_2 et ainsi de suite.

Un analyse détaillée de \mathbf{D}_{21} fait apparaître tout d'abord la matrice \mathbf{A}_{21} qui, on l'a vu plus haut, représente le transfert de la pression sur le lieu géométrique occupé par Γ_1 (cette fois-ci avec une impédance $Z_1 = 1/\beta_1$) rayonnée vers le lieu occupé par Γ_2 . La multiplication avec la matrice $[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1}$ modifie la pression rayonnée par Γ_2 pour y appliquer l'impédance $Z_2 = 1/\beta_2$ sur cette paroi.

Selon ce même principe, on peut noter

$$[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_1) = \mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1, \beta_1) \quad (4.27)$$

$$[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2) = \mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2, \beta_2) \quad (4.28)$$

où une expression de type $\mathbf{g}_1(\Gamma_1, \beta_1)$ indique la radiation d'une source S_1 sur la paroi Γ_1 en prenant en compte l'admittance β_1 de cette paroi. On obtient alors

$$\mathbf{p}_1 = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{D}_{21}]^{-1} \cdot [\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1, \beta_1) + \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2, \beta_2))] \quad (4.29)$$

$$\mathbf{p}_2 = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12}]^{-1} \cdot [\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2, \beta_2) + \mathbf{D}_{21} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1, \beta_1))] \quad (4.30)$$

En développant maintenant les matrices inversées, on obtient une généralisation de 4.12 et 4.13 :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 = & \mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1, \beta_1) + \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2, \beta_2)) \\ & + \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{D}_{21} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1, \beta_1)) \\ & + \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2, \beta_2)) + \dots \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 = & \mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2, \beta_2) + \mathbf{D}_{21} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1, \beta_1)) \\ & + \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2, \beta_2)) \\ & + \mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{D}_{21} \cdot (\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1, \beta_1)) + \dots \end{aligned} \quad (4.32)$$

Les termes des équations 4.31 et 4.32 peuvent être interprétés comme suit. Le vecteur $\mathbf{g}_0(\Gamma_1)$ représente la pression aux points de collocation situés sur le lieu géométrique occupé par la paroi Γ_1 issue de la source S_0 , en tenant compte de l'impédance propre de la source et de la charge par le milieu :

$$\mathbf{g}_0(\Gamma_1) = \mathbf{g}_0(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, \Gamma_1^{\text{géom.}}) \quad (4.33)$$

et de même sur Γ_2

$$\mathbf{g}_0(\Gamma_2) = \mathbf{g}_0(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, \Gamma_2^{\text{géom.}}) \quad (4.34)$$

Pour interpréter la multiplication avec les matrices \mathbf{D}_{12} et \mathbf{D}_{21} , on se rappelle qu'elles ont été définies comme

$$\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2) \quad (4.35)$$

et similairement pour \mathbf{D}_{21} . Le terme \mathbf{A}_{12} appliqué au vecteur $\mathbf{g}_0(\Gamma_2)$ provient de l'expression continue (cf. éq. 2.47)

$$- \int_{\Gamma_2} \underbrace{(\partial_{n_2} g_\infty(X_1, R') + ik\beta_2 g_\infty(X_1, R'))}_{(*)} g_0(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, \Gamma_2^{\text{géom.}}(R')) d(R' \in \Gamma_2) \quad (4.36)$$

où g_0 est un abus de notation pour la fonction de Green entre la source S_0 et le point d'intégration R' sur Γ_2 , correspondant ainsi au vecteur $\mathbf{g}_0(\Gamma_2)$. Ce même terme pourrait être vu comme une source linéique située sur le lieu géométrique occupé par Γ_2 et rayonnant dans le domaine (et spécifiquement sur les points de la paroi Γ_1), munie d'une impédance propre et d'une impédance de rayonnement. Par le principe de Huygens déjà utilisé à la section 4.3, une telle source linéique pourrait également être révélée par la présence d'une source image S_2 construite par réflexion sur cette même paroi Γ_2 . Dans cette optique, le terme (*) dans l'équation 4.36 aurait pour effet de combiner les impédances propres et de rayonnement pour obtenir

$$\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, \Gamma_2^{\text{géom.}}) \equiv \mathbf{g}_2(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, Z_2 \cup Z_{\text{rad}\Gamma_2}, \Gamma_1^{\text{géom.}}) \quad (4.37)$$

On interprète à nouveau la multiplication par $[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1}$ comme une modification de la pression rayonnée par la source linéique virtuelle sur le lieu occupé par Γ_1 pour y ajouter l'effet d'une paroi à cet endroit en appliquant l'impédance $Z_1 = 1/\beta_1$:

$$\mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, \Gamma_2^{\text{géom.}}) \equiv \mathbf{g}_2(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, Z_2 \cup Z_{\text{rad}\Gamma_2}, \Gamma_1(Z_1)) \quad (4.38)$$

qui est bien l'interprétation que l'on cherchait. Poursuivant la démarche selon les mêmes principes, on peut maintenant interpréter le terme $\mathbf{D}_{21} \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2)$. L'application du principe de Huygens permet de voir la pression $\mathbf{g}_2(\Gamma_1)$ comme provenant d'une source image de S_2 par rapport à Γ_1 , soit S_{21} . Ainsi

$$\underbrace{\mathbf{g}_2(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, Z_2 \cup Z_{\text{rad}\Gamma_2}, \Gamma_1(Z_1))}_{\text{pression de paroi}} \equiv \underbrace{\mathbf{g}_{21}(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, Z_2 \cup Z_{\text{rad}\Gamma_2}, \Gamma_1(Z_1))}_{\text{pression de source}} \quad (4.39)$$

On se rappelle que la matrice \mathbf{D}_{21} fait intervenir tout d'abord une multiplication par \mathbf{A}_{21} , soit un transfert de Γ_1 vers Γ_2 en prenant en compte l'impédance propre Z_1 de la « source » en Γ_1 et l'impédance de rayonnement $Z_{\text{rad}\Gamma_1}$:

$$\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{g}_{21}(\dots, \Gamma_1(Z_1)) \equiv \mathbf{g}_{21}(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, Z_2 \cup Z_{\text{rad}\Gamma_2}, Z_1 \cup Z_{\text{rad}\Gamma_1}, \Gamma_2^{\text{géom.}}) \quad (4.40)$$

Enfin, la multiplication par $[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1}$ applique l'impédance « interne » sur Γ_2

$$[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{g}_{21}(\dots, \Gamma_2^{\text{géom.}}) \equiv \mathbf{g}_{21}(Z_{S_0} \cup Z_{\text{rad}\Omega}, Z_2 \cup Z_{\text{rad}\Gamma_2}, Z_1 \cup Z_{\text{rad}\Gamma_1}, \Gamma_2(Z_2)) \quad (4.41)$$

Chaque groupement d'impédance est ainsi lié à un chemin de propagation particulier. De plus, le nombre de groupements est lié au nombre de réflexions : à chaque réflexion correspond un groupement, plus celui relevant de l'émission de la source originale S_0 .

Dans la dernière expression, par exemple, il y a trois groupements : le premier relève la charge à l'émission de la source originale, les deux suivants correspondent chacun à une réflexion, sur Γ_1 puis sur Γ_2 . La procédure s'applique de la même manière pour l'interprétation de tous les autres termes.

Cependant, et même si ces conclusions permettent de donner un sens physique aux images sources et aux réflexions qui leur sont associées, l'interprétation donnée ici n'est pas démontrée formellement. Le point faible de l'interprétation qui vient d'être faite est qu'une impédance de paroi semble intervenir *deux fois* lors de chaque réflexion. En effet, si l'on considère à nouveau le dernier terme $\mathbf{g}_{21}(\dots\Gamma_2(Z_2))$ de l'équation 4.41, on constate que l'impédance Z_2 de la paroi Γ_2 s'y applique deux fois :

1. le terme $\mathbf{g}_2(\dots\Gamma_1^{\text{géom.}})$ provient d'une multiplication par l'opérateur \mathbf{A}_{12} qui a fait intervenir l'impédance Z_2 par le biais du terme (*) de l'équation 4.36, qui combine Z_2 avec une impédance de rayonnement. \mathbf{g}_2 est alors vu comme une pression de source $\mathbf{g}_{21}(\dots\Gamma_1(Z_1))$ sur Γ_1 qui rayonne sur $\Gamma_2^{\text{géom.}}$ via \mathbf{A}_{21} (équation 4.40)
2. la multiplication par $[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1}$ applique une seconde fois Z_2 en tant qu'impédance « interne » sur Γ_2 (équation 4.41).

Pourtant, l'interprétation qu'on fait du terme $\mathbf{g}_{21}(\dots\Gamma_2(Z_2))$ est celle d'une image source S_{21} donnant lieu à une réflexion sur Γ_2 et Γ_1 , donc ne faisant intervenir qu'une seule fois l'impédance sur chacune des parois.

4.5 Extension à l'intérieur du domaine

Le développement présenté jusqu'ici propose une interprétation possible des termes d'un développement en série de la pression de paroi issue de la méthode intégrale discrétisée comme autant de sources images pouvant amener à cette pression. Jusqu'ici on s'est contenté d'observer la pression sur les parois, mais on sait que via les vecteurs \mathbf{b}_1^T et \mathbf{b}_2^T issus de

$$- \int_{\Gamma} (\partial_n g_{\infty}(R, R') + ik\beta g_{\infty}(R, R')) d(R' \in \Gamma) \quad (4.42)$$

(sur chacune des parois Γ_1 et Γ_2), la pression en un point R du domaine peut être obtenue (cf. équation 2.58) :

$$p(R) = g_{\infty}(S_0, R) + \mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{p}_2 \quad R \in \Omega \quad (4.43)$$

Par souci de clarté, on présente ici le développement pour des parois parfaitement réfléchissantes ($\beta = 0$). Dans ce cas précis, on obtient une formulation simplifiée pour l'expression de la pression sur les parois (résolution du système 4.8) avec l'interprétation faite en 4.3 du facteur 2 devant $\mathbf{g}(\Gamma_2)$ comme la contribution de la source primaire et

celle d'une source image par Γ_2 (et similairement pour $\mathbf{g}(\Gamma_1)$). Les développements en séries obtenus (équations 4.17 et 4.18) sont appliqués à l'équation 4.43 pour obtenir

$$\begin{aligned}
p(R) = & g_\infty(S_0) \\
& + \mathbf{b}_1^T \cdot \left(\begin{array}{l} \mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1) + \mathbf{g}_2(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{21}(\Gamma_1) \\ + \mathbf{g}_{12}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{121}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{212}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{2121}(\Gamma_1) + \dots \end{array} \right) \\
& + \mathbf{b}_2^T \cdot \left(\begin{array}{l} \mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2) + \mathbf{g}_1(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{12}(\Gamma_2) \\ + \mathbf{g}_{21}(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{212}(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{121}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{1212}(\Gamma_1) + \dots \end{array} \right)
\end{aligned} \quad (4.44)$$

On constate que chaque terme identifié apparaît deux fois dans 4.44. L'interprétation que l'on fait de ces termes comme étant autant de sources images est donc en apparence désaccord avec le nombre de termes intervenant ici. Cependant, on peut également compter les termes de l'équation 4.44 par paires en inversant le raisonnement qui a conduit à la séparation du facteur 2 dans l'équation 4.3. Ainsi, deux termes révélant des sources $S_{\dots k}$ de part et d'autre d'une paroi Γ_k sont réduits à un seul terme (muni d'un facteur 2), soit dans le cas du secteur ouvert qui nous intéresse

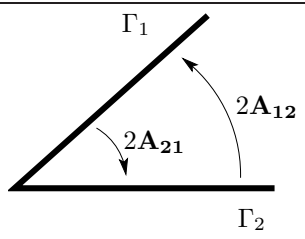
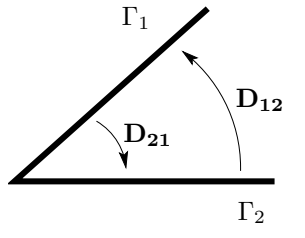
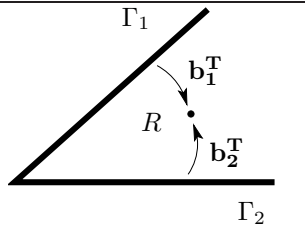
$$\begin{aligned}
p(R) = & g_\infty(S_0, R) \\
& + \mathbf{b}_1^T \cdot \left(\begin{array}{l} \underbrace{\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)}_{2\mathbf{g}_1(\Gamma_1)} + \underbrace{\mathbf{g}_2(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{21}(\Gamma_1)}_{2\mathbf{g}_{21}(\Gamma_1)} \\ + \underbrace{\mathbf{g}_{12}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{121}(\Gamma_1)}_{2\mathbf{g}_{121}(\Gamma_1)} + \underbrace{\mathbf{g}_{212}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{2121}(\Gamma_1)}_{2\mathbf{g}_{2121}(\Gamma_1)} + \dots \end{array} \right) \\
& + \mathbf{b}_2^T \cdot \left(\begin{array}{l} \underbrace{\mathbf{g}_0(\Gamma_2) + \mathbf{g}_2(\Gamma_2)}_{2\mathbf{g}_2(\Gamma_2)} + \underbrace{\mathbf{g}_1(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{12}(\Gamma_2)}_{2\mathbf{g}_{12}(\Gamma_2)} \\ + \underbrace{\mathbf{g}_{21}(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{212}(\Gamma_2)}_{2\mathbf{g}_{212}(\Gamma_2)} + \underbrace{\mathbf{g}_{121}(\Gamma_2) + \mathbf{g}_{1212}(\Gamma_2)}_{2\mathbf{g}_{1212}(\Gamma_2)} + \dots \end{array} \right)
\end{aligned} \quad (4.45)$$

(le rassemblement par paires réunit les termes de même ordre). Après réorganisation, on obtient l'expression finale de la pression en un point R du domaine

$$\begin{aligned}
p(R) = & \underbrace{g_\infty(S_0, R)}_{g_0(R)} + \underbrace{2\mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{g}_1(\Gamma_1)}_{g_1(R)} + \underbrace{2\mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{g}_2(\Gamma_2)}_{g_2(R)} \\
& + \underbrace{2\mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{g}_{12}(\Gamma_2)}_{g_{12}(R)} + \underbrace{2\mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{g}_{21}(\Gamma_1)}_{g_{21}(R)} + \underbrace{2\mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{g}_{121}(\Gamma_1)}_{g_{121}(R)} \\
& + \underbrace{2\mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{g}_{212}(\Gamma_2)}_{g_{212}(R)} + \underbrace{2\mathbf{b}_1^T \cdot \mathbf{g}_{2121}(\Gamma_1)}_{g_{2121}(R)} + \underbrace{2\mathbf{b}_2^T \cdot \mathbf{g}_{1212}(\Gamma_2)}_{g_{1212}(R)} + \dots
\end{aligned} \quad R \in \Omega \quad (4.46)$$

en choisissant de classer ces termes selon l'ordre de la suite des sources images à laquelle on les fait correspondre. Il est important de voir que l'ordre présenté ici n'est pas le

seul possible, néanmoins si l'on veut comparer chacun de ces termes à la contribution de la source image correspondante, il faut s'assurer que l'ordre des termes corresponde à l'ordre des sources. La question de l'ordre des termes sera reprise à la section 6.2.

	Schéma	Terme	Origine en forme continue	Rôle	cf. équ.
$\beta = 0$		$\mathbf{A}_{11} = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ $\mathbf{A}_{22} = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{21} $2\mathbf{A}_{12}$ $2\mathbf{A}_{21}$	$-\int_{\Gamma_{1j}} \partial_{n_1} g_\infty(X_{1i}, R') d(R' \in \Gamma_{1j})$ $-\int_{\Gamma_{2j}} \partial_{n_2} g_\infty(X_{2i}, R') d(R' \in \Gamma_{2j})$ $-\int_{\Gamma_{2j}} \partial_{n_2} g_\infty(X_{1i}, R') d(R' \in \Gamma_{2j})$ $-\int_{\Gamma_{1j}} \partial_{n_1} g_\infty(X_{2i}, R') d(R' \in \Gamma_{1j})$	Matrice d'auto-influence sur Γ_1 . Matrice d'auto-influence sur Γ_2 . Matrice d'inter-influence entre Γ_2 et Γ_1 . Matrice d'inter-influence entre Γ_1 et Γ_2 . Transfert de pression de Γ_2 à Γ_1 . Transfert de pression de Γ_1 à Γ_2 .	2.46 2.49 2.47 2.48 4.14 4.15
$\beta \neq 0$		\mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{22} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{21} $\mathbf{D}_{12} =$ $[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{12}$ $\mathbf{D}_{21} =$ $[\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21}$	$-\int_{\Gamma_{1j}} (\partial_{n_1} g_\infty(X_{1i}, R') + ik\beta_1 g_\infty(X_{1i}, R')) d(R' \in \Gamma_{1j})$ $-\int_{\Gamma_{2j}} (\partial_{n_2} g_\infty(X_{2i}, R') + ik\beta_2 g_\infty(X_{2i}, R')) d(R' \in \Gamma_{2j})$ $-\int_{\Gamma_{2j}} (\partial_{n_2} g_\infty(X_{1i}, R') + ik\beta_2 g_\infty(X_{1i}, R')) d(R' \in \Gamma_{2j})$ $-\int_{\Gamma_{1j}} (\partial_{n_1} g_\infty(X_{2i}, R') + ik\beta_1 g_\infty(X_{2i}, R')) d(R' \in \Gamma_{1j})$	Matrice d'auto-influence sur Γ_1 . Matrice d'auto-influence sur Γ_2 . Matrice d'inter-influence entre Γ_2 et Γ_1 . Matrice d'inter-influence entre Γ_1 et Γ_2 . Transfert de pression de Γ_2 à Γ_1 . Transfert de pression de Γ_1 à Γ_2 .	2.46 2.49 2.47 2.48 4.25 4.26
		\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_2^T	$-\int_{\Gamma_{1i}} (\partial_n g_\infty(R, R') + ik\beta_1 g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma_{1i})$ $-\int_{\Gamma_{2i}} (\partial_n g_\infty(R, R') + ik\beta_2 g_\infty(R, R')) d(R' \in \Gamma_{2i})$	Vecteur de transfert de la pression de Γ_1 vers un point $R \in \Omega$. Vecteur de transfert de la pression de Γ_2 vers un point $R \in \Omega$.	2.59 2.60

Tab. 4.1 – Récapitulation des matrices d'auto- et d'inter-influence

	Formulation générale	Interprétation	Étape 1	Étape 2	Étape 3
Schéma A (cf. éq. 4.14)	$2\mathbf{A}_{ij} \cdot \underbrace{\mathbf{g}_{...k}(\Gamma_j)}_{\equiv \mathbf{g}_{...kj}(\Gamma_j)}$ $\equiv \mathbf{g}_{...kj}(\Gamma_i)$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Pression issue de $S_{...k}$ sur Γ_j 2. Pression sur Γ_j issue de l'image $S_{...kj}$ de $S_{...k}$ par rapport à Γ_j 3. Transfert de la pression issue de $S_{...kj}$ sur Γ_i via $2\mathbf{A}_{ij}$ (p. de Huygens) 			
Schéma B (cf. éq. 4.15)	$2\mathbf{A}_{ij} \cdot \underbrace{\mathbf{g}_{...kj}(\Gamma_j)}_{\equiv \mathbf{g}_{...kj}(\Gamma_i)}$ $\equiv \mathbf{g}_{...kji}(\Gamma_i)$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Pression issue de $S_{...kj}$ sur Γ_j 2. Transfert de la pression issue de $S_{...kj}$ sur Γ_i via $2\mathbf{A}_{ij}$ (p. de Huygens) 3. Pression sur Γ_i issue de l'image $S_{...kji}$ de $S_{...kj}$ par rapport à Γ_i 			

Tab. 4.2 – Récapitulation des schémas d'interprétation ($\beta = 0$)

Chapitre 5

Étude numérique de l'influence des sources images

Si le raisonnement présenté au chapitre précédent permet de donner une explication plausible à la provenance des sources images dans un problème bidimensionnel, il reste grandement basé sur des interprétations intuitives des différents termes multiplicatifs en jeu. Une vérification formelle reste donc à établir. Dans un premier temps, il est cependant possible de vérifier la pertinence du raisonnement par une série de simulations numériques.

Plus encore, l'étude numérique de certaines situations permet de vérifier si l'absence de sources « cachées » telles que discutées à la section 3.5 se traduit bien par un appauvrissement de l'information de pression aux endroits où de telles sources sont invisibles.

5.1 Situation d'étude

La situation étudiée ici est celle du secteur ouvert déjà évoqué, composé de deux parois parfaitement réfléchissantes Γ_1 et Γ_2 . Pour rappel, on choisit à dessein une admittance β nulle sur ces parois afin d'être en mesure de différencier les effets de la présence ou de l'absence de certaines sources images des effets dus à la réflexion spéculaire, intervenant lorsqu'on considère des valeurs localisées d'admittance (cf. § 1.3).

Enfin, on est intéressé principalement par la valeur sur une des parois, pour trois raisons principales :

1. ce sont pour des positions de récepteurs proches ou sur les parois que l'on peut observer le plus souvent des cas de sources « invisibles » (cf. § 3.5),
2. il est numériquement plus intéressant de se contenter d'observer la pression sur les parois, on s'épargne ainsi la multiplication finale par les vecteurs \mathbf{b}_i^T (cf. éq. 2.58) nécessaire à l'obtention de la pression dans le domaine; plus qu'un réel avantage numérique (les temps de calcul restent abordables avec les ordinateurs d'aujourd'hui), on échappe ainsi à un effet supplémentaire des limitations que l'on a du s'imposer pour la résolution numérique (finitude des parois, points de

collocation, intégration numérique, etc.).

- il existe un intérêt particulier pour la pression de paroi (cf. § 1.3).

Longueur des parois

Pour les simulations présentées ici, le programme INTG2 est utilisé, avec les valeurs numériques suivantes. Théoriquement de longueur infinie, les parois Γ_1 et Γ_2 prennent ici une longueur de 5 m. Elles sont discrétisées en 250 facettes d'une longueur de 0.002 m chacune. On choisit de s'intéresser à l'information de pression pour une fréquence $f = 500$ Hz, correspondant à une longueur d'onde d'environ 0.7 m. Les parois sont ainsi environ 7 fois plus longues que la longueur d'onde, et les facettes sur les parois 350 fois plus courtes.

Diverses situations d'études

Une série de situations, présentée dans la table 5.1, est proposée à l'étude. Pour chacune d'entre elles, on a choisi une valeur de l'angle d'ouverture θ entre les deux parois, ainsi qu'une position de source $S(x_S, y_S)$. Dans tous les cas on présente la valeur de pression sur la paroi Γ_1 .

Solution de référence

Dans chacun des cas, la solution obtenue est comparée à la solution de référence issue de la méthode intégrale avec la discrétisation précisée ci-dessus. Cette solution peut être considérée comme exacte, mais en tenant compte de l'approximation amenée par la discrétisation et la finitude des parois. Par abus de langage, on nommera ci-après cette solution « exacte ».

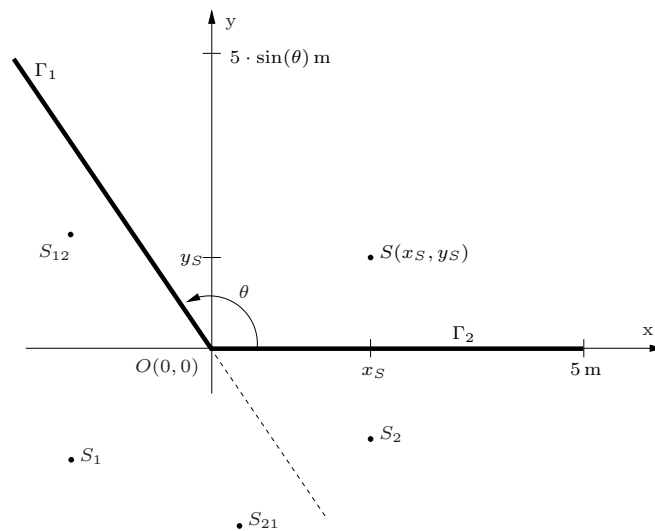


Fig. 5.1 – Situation d'étude générale pour les tests numériques. La situation représentée ici est un exemple et ne reflète pas la position relative de l'angle d'ouverture, de la source primaire et des sources images tels que choisis dans les différentes situations de la table 5.1.

5.2 Critère de convergence

On recherche donc une manière d'observer s'il y a bel et bien une correspondance entre d'une part les termes du développement en série donnant naissance aux expressions de la pression sur les parois 4.12 et 4.13, et d'autre part les contributions des images sources intervenant dans le problème traité.

Un premier indice provient d'une constatation intuitive : le nombre de sources images augmente à mesure que l'angle d'ouverture diminue. Dans le cas d'un angle aigu (où toutes les sources images sont visibles) et si l'angle d'ouverture θ est un sous-multiple entier de π , le nombre de ces sources est de $2\pi/\theta$ [13]. Ainsi donc, un grand nombre de sources images est attendu pour un angle d'ouverture $\theta < \pi/2$ (aigu). De plus, dans ce cas, une construction géométrique simple nous indique que toutes les sources images sont visibles de n'importe quel point du domaine Ω ainsi formé. À mesure que l'on ouvre l'angle θ , et à plus forte raison lorsque celui-ci devient $\theta > \pi/2$ (obtus), un plus petit nombre de sources est attendu.

Une première vérification consiste donc à étudier l'importance des termes du développement en série présenté au chapitre précédent lorsque l'on fait varier l'angle d'ouverture θ . Si un comportement identique aux sources images apparaît (plus l'angle est ouvert, moins de termes sont nécessaires à atteindre la solution finale), alors les chances que les sources images puissent provenir des termes de cette série sont importantes.

Pour ce faire, on définit une distance entre la valeur de pression obtenue par méthode intégrale (valeur « exacte ») avec la valeur obtenue avec un nombre fini N_t de termes de la série :

$$d(N_t) = \int_{\Gamma_1} |p_{\text{série}}(N_t, X) - p_{\text{exacte}}(X)|^2 d(X \in \Gamma_1) \quad (5.1)$$

De même, on définit une distance entre la valeur exacte et celle obtenue par un nombre N_s de sources images :

$$d(N_s) = \int_{\Gamma_1} |p_{\text{sources}}(N_s, X) - p_{\text{exacte}}(X)|^2 d(X \in \Gamma_1) \quad (5.2)$$

La figure 5.2 compare la valeur de ces deux distances en fonction du nombre de sources et de termes pour différentes valeurs de θ . On constate que la somme des contributions des sources images converge de manière similaire à la somme des termes du développement en série et que la convergence est plus rapide pour des angles largement ouverts (se rapprochant de, ou dépassant $\pi/2$). Cette observation vérifie donc la similitude espérée entre le comportement des sources images et celui des termes de la série.

Le nombre de sources images considérées dans chaque cas est par nature fini. Par contre, quelque soit l'angle d'ouverture θ , l'inversion de la matrice $[\mathbf{I} - 2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21}]$ donne naissance à une infinité de termes multipliés par $2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21}$ (et ses produits) (cf. éq. 4.12). Il apparaît sur la figure 5.2 que les termes supplémentaires du développement en série (ceux pour lesquels il n'y a pas de source image équivalente) sont de contribution faible à négligeable par rapport aux autres termes.

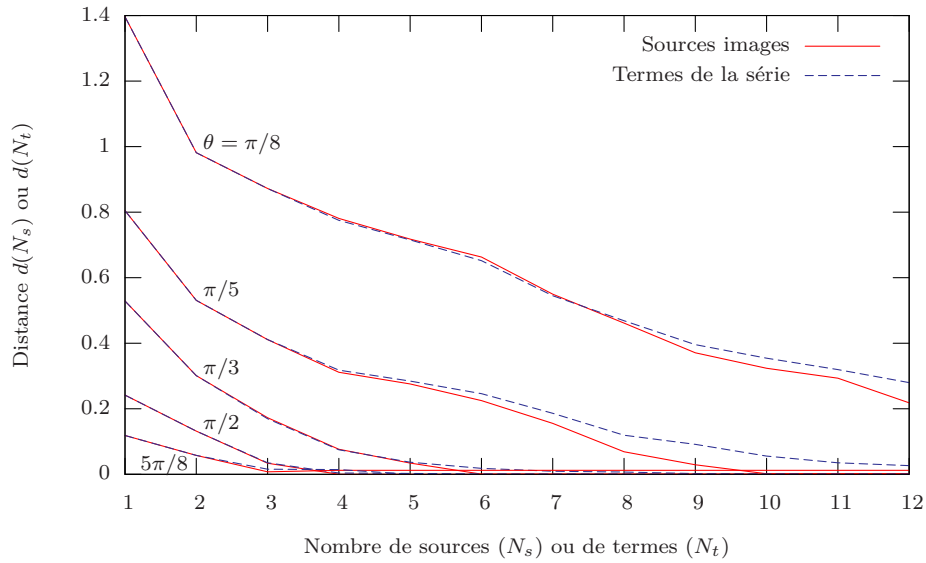


Fig. 5.2 – Vitesse de convergence pour diverses valeurs de l'angle d'ouverture θ

La convergence d'une série de termes ou de sources calculée via les distances 5.1 et 5.2 sera nommée ci-après « convergence faible ». En effet, les distances $d(N_t)$ et $d(N_s)$ tentent de prendre en compte la forme des contributions par intégration sur l'entier de la paroi considérée. On verra plus loin, que deux courbes présentant un profil similaire mais aux oscillations décalées peuvent ne pas être détectées comme voisines par $d(N_t)$ et $d(N_s)$. On observera donc plus loin une « convergence forte » en appréciant directement le profil des courbes de pression sur la paroi considérée.

5.3 Convergence dans le cas de l'espace quart-infini

Le cas de l'espace quart-infini ($\theta = \pi/2$) représente une situation particulière. On constate en effet dans ce cas une très bonne adéquation de la méthode des sources images, que les parois soient totalement réfléchissantes ou munie d'une admittance localisée. Cela signifie que les seules quatre sources existantes dans le cas quart-infini (la source primaire et trois images, dont une double) suffisent à établir la pression. En conséquence, on s'attend à ce que quatre termes du développement en série suffisent à converger.

On remarque en effet sur la figure 5.2 que la solution de référence est atteinte en quatre termes par le développement en série et par les sources images. Cependant, une attention plus poussée (qui sera mise en avant lorsque l'on observera la convergence forte, cf. figure 5.6) montre que la série de termes converge légèrement plus lentement que la somme des contributions des sources images. Cette différence s'explique vraisemblablement par l'approximation numérique de la solution de référence (discrétisation). Le cas de l'espace quart infini avec absorption, sera abordé à nouveau dans la seconde partie de ce rapport, à la section 10.2.

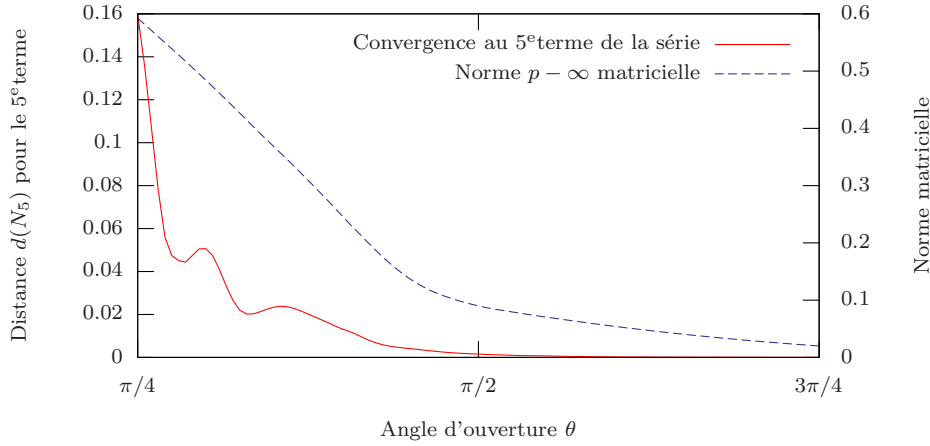


Fig. 5.3 – Diminution de la contribution de la matrice $\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{21}$ en se rapprochant du cas quart-infini ($\theta \rightarrow \pi/2$)

Pour que notre modèle soit cohérent avec ce fait particulier, seuls quatre termes du développement en série doivent avoir une contribution non nulle pour $\theta = \pi/2$. Une analyse de l'équation 4.12 indique que tel pourrait être le cas si le produit des matrices $\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{21}$ était nul pour $\theta = \pi/2$ sans pour autant que ni \mathbf{A}_{12} ni \mathbf{A}_{21} ne le soient.

Sur la figure 5.3, on constate que la convergence (selon l'éq. 5.1) du cinquième terme de la série (soit $2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_1)$) disparaît bien pour $\theta \geq \pi/2$ (à une petite différence près, déjà discutée plus haut). En revanche, il apparaît difficile de définir une norme pour laquelle on observe bien la disparition du produit matriciel $\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{21}$. La valeur affichée ici représente la norme $p - \infty$ du produit matriciel, défini pour une matrice \mathbf{A} carrée de dimensions ($n \times n$) comme

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}} \quad (5.3)$$

avec la norme vectorielle $p - \infty$ définie pour un vecteur \mathbf{x} de longueur n comme

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (5.4)$$

soit le plus grand terme du vecteur \mathbf{x} en valeur absolue. La norme $p - \infty$ de la matrice \mathbf{A} représente ainsi l'expansion maximale que \mathbf{A} peut appliquer à un vecteur quelconque \mathbf{x} . La norme euclidienne présente ici une forme similaire à la norme $p - \infty$, et n'est pas représentée sur la figure.

5.4 Effet d'une source supplémentaire

La convergence faible présentée sur la figure 5.2 illustre ainsi la cohérence de l'interprétation des termes du développement en série du chapitre précédent pour des angles

Nom	Esquisse	Détails	Voir fig.
A		$\theta = 5\pi/8$ $S(x_S, y_S) = (0.5, 2.0) \text{ m}$ Visible : S_1 Invisibles : S_2, S_{12}, S_{21}	5.4(a) 5.7(a)
B		$\theta = 5\pi/8$ $S(x_S, y_S) = (-0.5, 2.0) \text{ m}$ Visible : S_1 Invisibles : S_2, S_{12}, S_{21}	5.4(b) 5.7(b)
C		$\theta = 7\pi/8$ $S(x_S, y_S) = (0.1, 0.3) \text{ m}$ Visible : S_1 Invisibles : S_2, S_{12}, S_{21}	5.7(c)
D		$\theta = \pi/6$ $S(x_S, y_S) = (3.0, 3.0 \cdot \tan(\theta/2)) \text{ m}$ Visibles : toutes (voir la note à la p. 71)	5.5
E		$\theta = \pi/2$ $S(x_S, y_S) = (3.0, 3.0) \text{ m}$ Visibles : toutes	5.6

Tab. 5.1 – Détail des situations étudiées. L'échelle n'est pas respectée d'une figure à l'autre.

aigus ($\theta \leq \pi/2$) et laisse entrevoir une justification formelle de la présence d'une série de sources images, mais n'apporte aucune amélioration à cette méthode, puisque les termes supplémentaires (ne correspondant pas à une source visible) sont de contribution négligeable.

On se consacre alors à l'étude des situations A à C de la table 5.1. En effet, pour des angles obtus ($\theta > \pi/2$), on a déjà constaté (cf. § 3.5) que certaines sources deviennent invisibles lorsque l'on considère un point de réception suffisamment proche des parois. Concrètement, la source S_2 est invisible depuis la paroi Γ_1 dans les situations A à C. Or, si l'algorithme de choix des sources de la section 3.3 nous interdit de considérer une contribution venant de S_2 , le terme du développement en série lui correspondant n'est pas nul. La contribution de cette source ne doit donc pas être négligée. Que se passe-t-il si, sans encore s'occuper de savoir si cette contribution reflète bien le terme correspondant, on restaure artificiellement la présence de la source « invisible » S_2 ?

5.4.1 Convergence faible

La figure 5.4 présente tout d'abord la convergence faible dans les situations A et B lorsque l'on rajoute la source « invisible » S_2 . On constate que cette source supplémentaire améliore clairement la convergence dans le premier cas (figure 5.4(a)) en stabilisant la distance autour de 0.003 Pa^2 alors que les seules images visibles se stabilisent à une distance proche de 0.015 Pa^2 . On constate même que dans ce cas, le seul ajout d'une source supplémentaire en S_2 conduit plus rapidement à une solution proche de la solution de référence que les trois termes qu'il faudra à la série pour atteindre une distance comparable.

Cette différence laisse supposer que, malgré le fait que l'interprétation des termes comme la contribution de sources images semble conforté par les résultats numériques présentés ici, la contribution d'une source construite selon le procédé géométrique classique ne constitue pas l'exact équivalent du terme de la série qu'on lui fait correspondre. Cette différence sera encore plus flagrante dans les cas exposés ci-dessous, et motive un travail plus approfondi sur la position optimale des sources images « supplémentaires », comme on le verra au chapitre 6.

À cela s'ajoute le fait que les distances définies par 5.1 et 5.2 ne révèlent pas un apport d'information sous la forme d'une oscillation décalée. En effet, on voit que pour la situation B, la distance $d(N_s)$ dans la figure 5.4(b) semble indiquer qu'en ajoutant une source supplémentaire en S_2 on s'éloigne de la solution de référence (on passe d'une distance de 0.013 Pa^2 pour les sources visibles à une distance supérieure à 0.05 Pa^2). Cependant, si l'on observe la forme de la pression obtenue (la convergence « forte » présentée plus loin sur la figure 5.7(b)), on constate l'ajout d'une oscillation, décalée il est vrai, mais représentant un ajout d'information par rapport à la contribution des seules sources visibles. Cet ajout n'est pas relevé par $d(N_s)$, ce qui remet cette distance en question pour l'observation des changements apportés par une source supplémentaire.

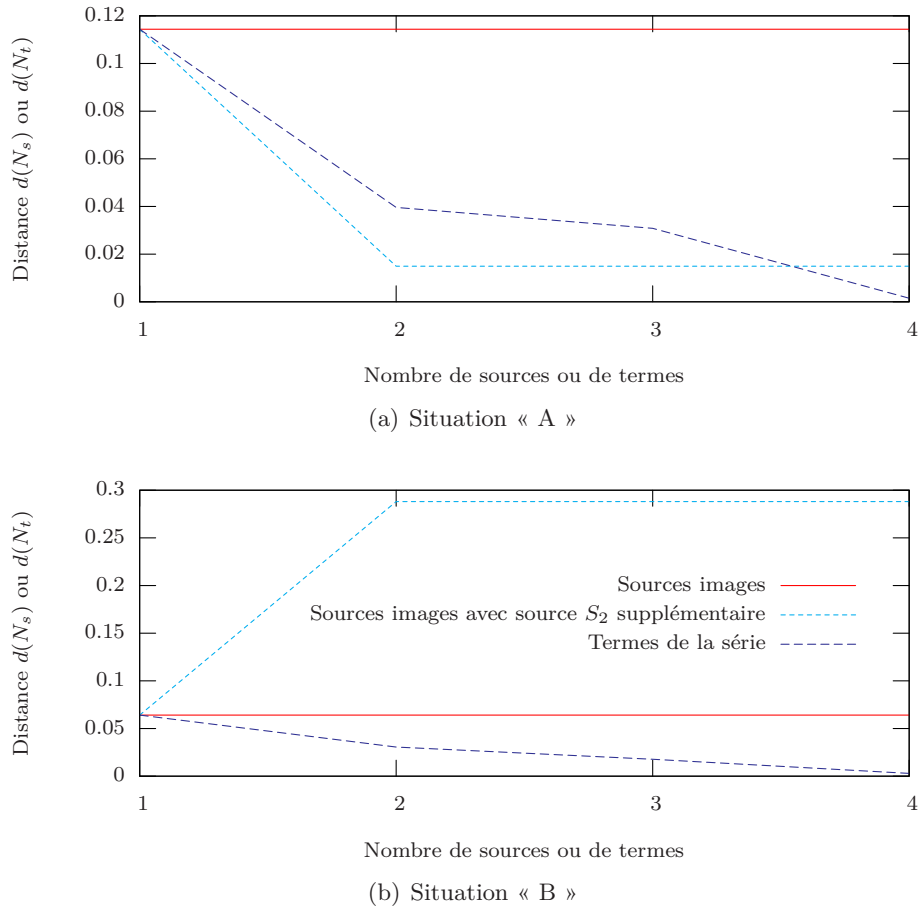


Fig. 5.4 – Convergence faible sur la paroi Γ_1 . Des lignes horizontales apparaissent lorsqu'il n'y a plus de sources supplémentaires à considérer (stabilisation de la convergence).

5.4.2 Convergence forte

Cette constatation nous pousse à l'observation de la convergence « forte », soit la comparaison visuelle directe des niveaux de pression sur la paroi Γ_1 et non plus d'une moyenne sur toute la paroi.

Angle aigu

Avant de s'intéresser aux situations A à C et à l'information apportée par une source supplémentaire, il convient de revenir sur le cas de l'angle aigu. La convergence faible de la figure 5.2 laisse présupposer une très bonne adéquation entre la contribution des termes du développement en série et celle des sources images. La figure 5.5 vient confirmer ceci en présentant la convergence forte pour la situation « D » (pour laquelle

$\theta = \pi/6$). Dans cette situation, toutes les sources existantes¹, au nombre de 12, sont visibles. Tout d'abord, sur la figure 5.5(a) on voit les dix premiers termes du développement en série converger vers la solution de référence. La figure 5.5(b) montre l'adéquation entre ces termes et les contributions correspondantes des sources images. Par souci de clarté, on n'y représente que les six premiers termes, mais l'adéquation entre les deux valeurs se poursuit pour les termes d'ordre supérieur.

Cette cohérence quasi parfaite était attendue pour les deux premiers termes, étant donné qu'ils sont conceptuellement identiques (ils proviennent tous deux de la fonction de Green en espace infini $g_\infty(S_0, R)$, le dédoublement provenant de l'interprétation du facteur 2 amené par la réflexion totale, cf. 4.3). L'adéquation des termes d'ordre supérieur, en revanche, est significatif de la validité de l'interprétation du chapitre précédent.

Espace quart-infini

Comme on l'a dit plus haut, dans le cas quart-infini ($\theta = \pi/2$), les termes du développement en série convergent plus lentement que la somme des contributions des sources images. La figure 5.6 vient corroborer cette observation. En effet, on constate que seules quatre sources images suffisent à atteindre la solution de référence. En revanche, six termes du développement en série sont nécessaires, même si quatre termes conduisent déjà à un résultat acceptable.

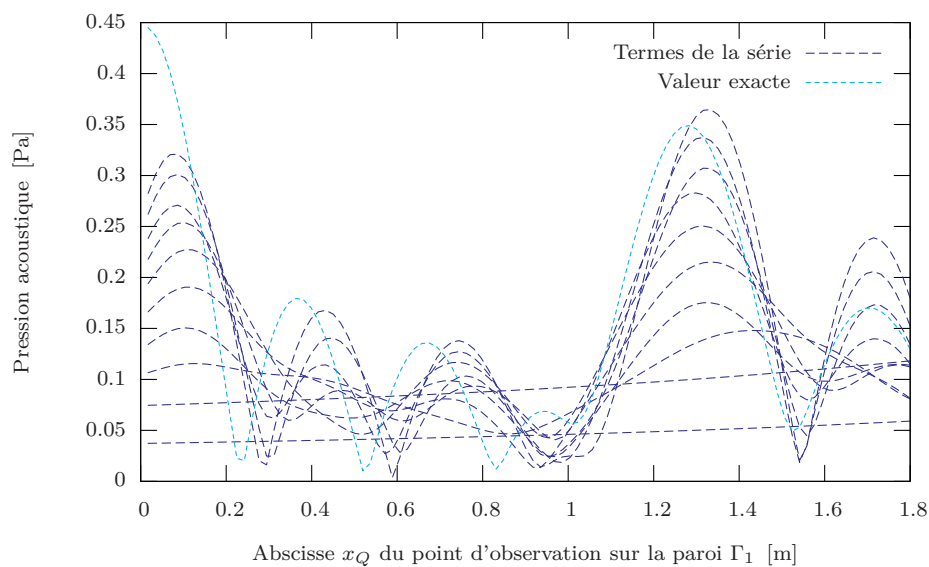
Angle obtus et sources invisibles

Enfin, sur la figure 5.7, on observe la valeur de pression sur la paroi Γ_1 pour trois situations (A à C) pour lesquelles on restaure artificiellement la présence de la source cachée S_2 .

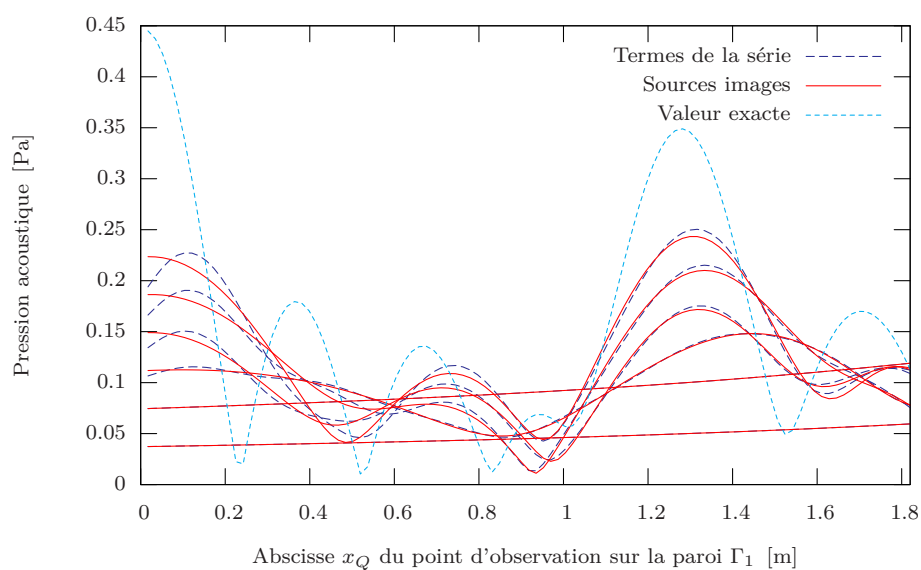
Pour les situations « A » (fig. 5.7(a)) et « B » (fig. 5.7(b)), on constate que la source supplémentaire restaure une information manquante sous la forme d'une oscillation autour de la valeur des seules sources visibles. Cependant, on voit que si cette oscillation permet de rejoindre la solution de référence sur la figure 5.7(a) (ce qui avait déjà été rendu apparent par la convergence faible sur la figure 5.4(a)), elle apparaît en revanche décalée sur la figure 5.7(b), ce qui explique le score défavorable de la convergence faible sur la figure 5.4(b).

Enfin, pour la situation « C » (fig. 5.7(c)), l'ajout d'une source supplémentaire fait apparaître encore un autre cas de figure. Dans ce cas en effet, la source supplémentaire améliore le résultat pour des points récepteurs situés sur l'extrémité extérieure de la paroi Γ_1 (à partir d'une distance d'un mètre de l'angle et en direction de l'extrémité de la paroi) tout en ajoutant une erreur d'amplitude de presque 35% à proximité de l'angle formé par les deux parois.

¹On remarque que des deux sources confondues, seule S_{212121} est visible sur Γ_1 (et sur les points situés entre la bissectrice de θ et Γ_1). Sur l'autre paroi, une source intervient au même endroit, mais elle provient de la construction d'un autre chemin, il s'agit alors de S_{121212} . Un cas particulier intervient lorsque l'on considère un point situé sur la bissectrice, mais son étude dépasse le cadre de ce travail, voir par exemple [13].



(a) 10 premiers termes de la série



(b) 6 premier termes de la série et les contributions des 6 images sources correspondantes

Fig. 5.5 – Convergence forte sur la paroi Γ_1 dans un secteur d'angle aigu (situation « D »). Par mesure de clarté, tous les termes ne sont pas affichés.

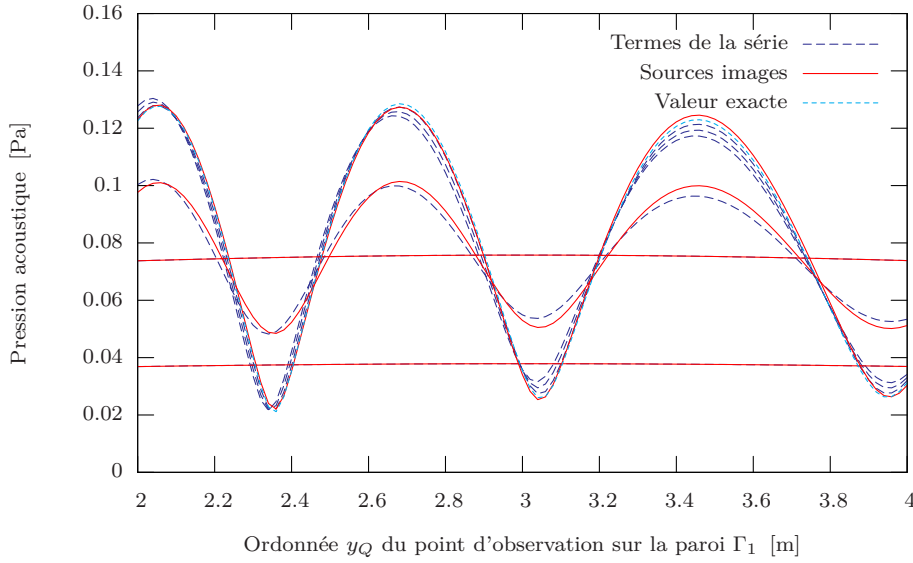


Fig. 5.6 – Convergence forte pour la situation « E » en espace quart-infini ($\theta = \pi/2$). On constate l'adéquation quasiment parfaite entre les termes du développement en série et les contributions des sources images correspondantes.

5.5 Bilan

L'analyse d'une solution du problème de Helmholtz dans un domaine bidimensionnel formé de deux parois — parfaitement réfléchissantes dans un premier temps, puis avec une admittance localisée — a permis d'envisager une justification formelle de la méthode des sources images en acoustique. Qui plus est, les termes ainsi formés semblent généraliser la notion de source image : certains termes correspondent à des sources images qu'un algorithme de choix répondant à de stricts principes géométriques considère comme illégales. Or, il apparaît (cf. § 3.5) que la contribution de ces sources « invisibles » ne devrait pas être négligeable dans certaines situations.

Avant même de faire un bilan du travail réalisé en régime fréquentiel, on peut se demander quelle influence auraient les sources cachées révélées ici sur un champ en régime temporel. Dans ce cas, la série des sources images visibles conduit à l'historique habituel et les sources cachées de position réelle devraient alors également y participer. Cependant, si ces sources sont de position complexe (comme on le supposera au chapitre suivant), leur interprétation est alors plus délicate, pouvant probablement révéler un comportement évanescent, donc d'amortissement.

De même, la question de l'influence de ces sources cachées non pas aux abords des parois mais au sein du domaine peut se poser. Or, la représentation intégrale indique clairement qu'un champ mieux décrit sur le contour aura des répercussions favorables dans le domaine. On peut donc s'attendre à une amélioration globale.

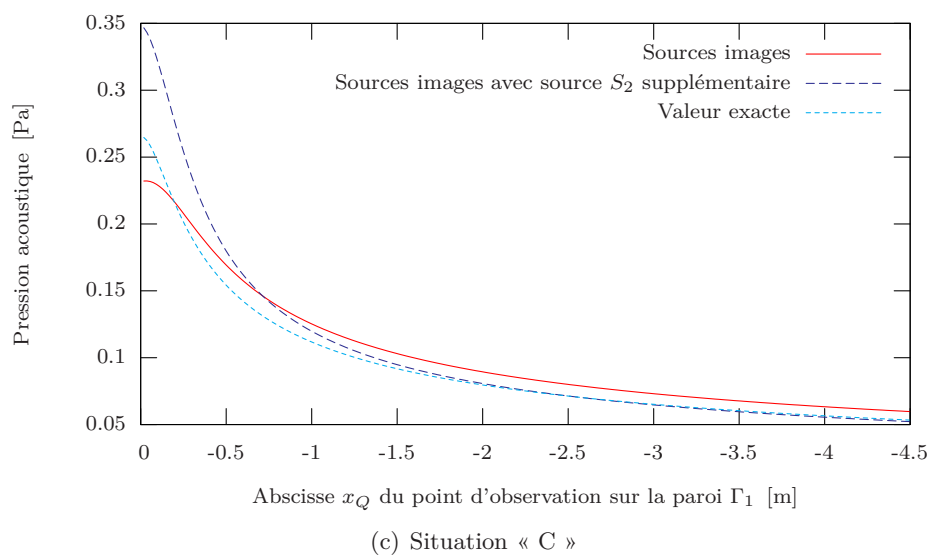
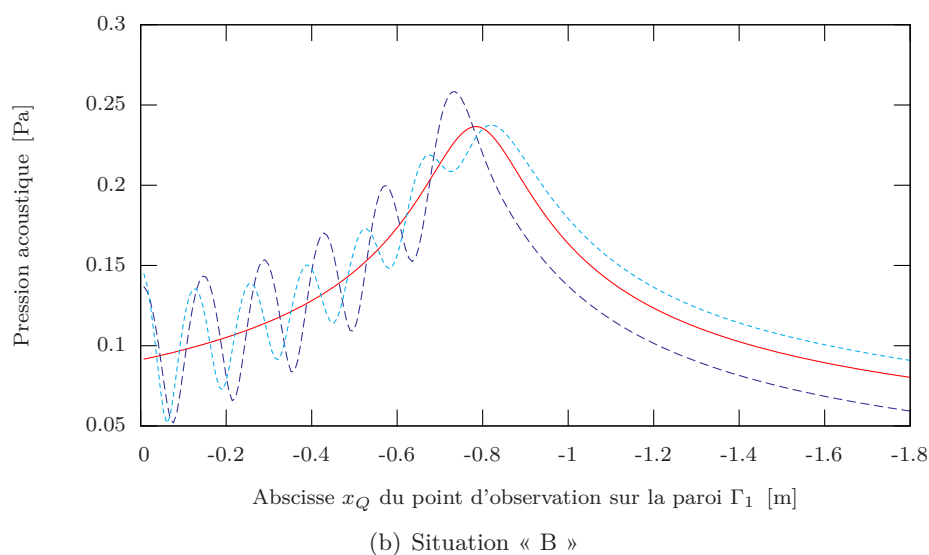
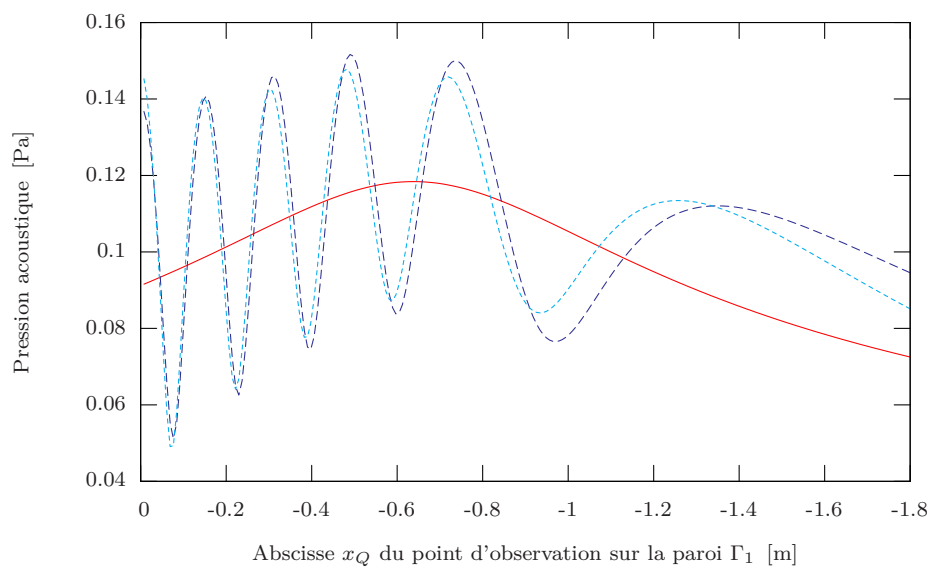


Fig. 5.7 – Convergence forte sur la paroi Γ_1 dans un secteur d'angle obtus, pour plusieurs configurations (cf. table 5.1)

Confirmation de l'interprétation de l'origine des sources images

Dans l'interprétation qu'on en fait, les premiers termes d'un développement en série de la méthode intégrale peuvent représenter la contribution des sources images que fait apparaître la méthode classique des rayons. Les termes suivants pourraient alors représenter des sources images supplémentaires, apportant l'information manquante dans le cas classique.

Les résultats numériques présentés ici, toujours en l'absence d'absorption sur les parois, sont d'un intérêt double. Premièrement, ils montrent la pertinence de l'interprétation faite au chapitre 4 des termes du développement en série de la méthode intégrale comme une série de contributions de sources images. Un critère faible, accessible via une distance définie dans R^2 , a tout d'abord permis de constater que la contribution des termes convergeait selon le même modèle général que la contribution d'autant de sources images. L'observation de la valeur de la pression sur la paroi considérée a ensuite montré que la contribution de chaque terme pouvait être rapproché de la contribution d'une des sources de la série (convergence forte).

Effets d'une source supplémentaire ajoutée à l'algorithme classique

En deuxième lieu, on a vu que dans certains cas, la restitution d'une image invisible apporte un supplément d'information (visible grâce à la distance choisie, ou appréciable directement sur une courbe de pression) à la solution obtenue via la méthode des sources images classique. Cependant, l'information supplémentaire ne semble être pertinente que dans des cas bien particuliers : on constate un décalage de l'oscillation apportée qui va jusqu'à empirer la résolution dès qu'on s'éloigne suffisamment des situations « optimales ».

La source supplémentaire considérée jusqu'ici est une source considérée comme illégale par un algorithme classique qui a été restaurée artificiellement. Il n'est donc pas étonnant que l'information qu'elle apporte soit erronée dans la plupart des situations, les critères de l'algorithme de choix, bien que basés sur des principes intuitifs, ont une raison d'être lorsqu'on considère les réflexions spéculaires des « rayons » acoustiques. La contribution de la partie spéculaire de la réflexion (qui semble correctement décrite par les sources images dans le cas de parois absorbantes) est clairement prépondérante sur la partie diffractée que l'on espère corriger.

Il est donc indispensable d'étudier plus précisément l'origine de ces sources supplémentaires, issues des termes du développement en série auxquels ne correspondent pas des sources visibles. Puisque l'on dispose de la valeur numérique de ces termes, tout du moins dans une situation en secteur ouvert, il apparaît possible d'étudier une position optimale de ces sources supplémentaires, afin de restaurer correctement l'information que l'on suppose provenir des effets de diffraction.

Ordre d'apparition et nombre de termes

Lorsque l'on évoque la « première » source image manquante, cela implique que l'on a défini une distance permettant d'établir une relation d'ordre au sein des contributions

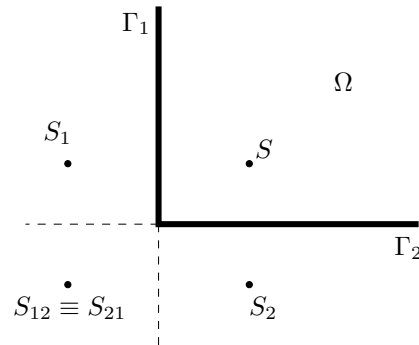


Fig. 5.8 – Sources images dans l'espace quart-infini : les sources S_{12} et S_{21} sont superposées, résultant en une source double.

des images sources. Dans la configuration étudiée jusqu'ici, la distance (définie en 5.1 et 5.2) utilisée considère comme première source manquante le premier terme du développement en série auquel aucune source image visible au point de réception considéré ne correspond.

Cette question de l'ordre des termes aura son importance si l'on désire appliquer la méthode d'interprétation des termes à la pression acoustique à l'intérieur du domaine (selon le développement proposé à la section 4.5). Contrairement au cas de la pression sur les parois, l'ordre des termes n'est pas directement accessible ici et doit être étudié plus précisément. Ce problème est directement lié avec la classification de l'influence relative des deux parois (cf. § 6.2).

Une autre question en suspens concerne le nombre de termes non nuls du développement en série. Idéalement, la contribution de chaque source image devrait apparaître comme étant concentrée dans un seul terme du développement en série. Or, comme il apparaît clairement pour le cas quart-infini (figure 5.6), un plus grand nombre de termes de la série semble nécessaire pour converger vers une solution que les sources images atteignent en quatre termes uniquement.

Une explication possible de ce phénomène pourrait provenir du fait que la quatrième source apparaissant dans le cas quart-infini soit en fait une source double : elle peut provenir aussi bien de la réflexion par la paroi Γ_1 de la source S_2 que de la réflexion par Γ_2 de la source S_1 (voir figure 5.8). Cette source possède ainsi une provenance « double », mais elle n'intervient qu'une seule fois dans l'établissement de la pression en un point précis du domaine, révélant un chemin $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ si la paroi Γ_2 se trouve entre cette source et le point récepteur considéré, ou l'inverse si c'est l'autre paroi. Néanmoins, si l'on accepte que l'existence des sources images puisse provenir d'un développement en série de la formulation intégrale, cette dualité d'existence pourrait impliquer que certaines sources ont une provenance faisant intervenir plus de termes que l'on ne le propose au chapitre 4.

Chapitre 6

Ajustement de position de la source complémentaire

Les résultats expérimentaux du chapitre précédent ont montré qu'il était pertinent de vouloir restaurer la contribution de certaines sources invisibles aux yeux de la méthode des sources images classique. Cependant, on a aussi vu que — sauf cas particuliers — il ne suffit pas de restaurer la source supplémentaire à sa position déterminée par l'algorithme géométrique, au risque de dégrader le résultat.

Bien avant d'entamer la recherche d'une démarche analytique permettant de calculer les coordonnées des sources supplémentaires devant être ajoutée pour tenir compte de la diffraction, il est encourageant de prouver numériquement qu'une telle source existe, c'est à dire qu'il est possible d'ajouter les termes supplémentaires de la série sous la forme de sources images supplémentaires.

Or on dispose, via la méthode du chapitre 4, de la valeur du terme du développement en série correspondant à chaque source invisible pour le cas du secteur ouvert. On se propose donc de trouver à partir de ce terme les coordonnées où l'on pourrait placer une source dont la contribution se rapprocherait au mieux du terme manquant recherché.

Il est évident que cette démarche comporte une certaine absurdité : elle nécessite de connaître la solution du problème pour être appliquée. Ainsi, dans un sens purement pratique, l'identification des coordonnées optimales telle que présentée ici est inutile. Dans le sens d'une recherche *d'interprétation* de la solution connue, en revanche, cette démarche s'inscrit dans la continuité de l'identification des sources images du chapitre 4. On montre en effet qu'il est possible de représenter les termes de la série n'ayant pas d'équivalent dans les sources images par des sources supplémentaires.

6.1 Démarche

Les résultats du chapitre précédent ont montré que si la restauration d'une source invisible ne conduit pas forcément à une amélioration, la contribution de cette source apporte néanmoins une information proche de celle que l'on recherche (l'oscillation apportée par la source supplémentaire par exemple sur la figure 5.7(b) permet aisément

de s'en convaincre). Il apparaît donc possible de partir des coordonnées de cette source et de les ajuster pour arriver à nos fins. On se consacre ici à l'optimisation d'une seule source supplémentaire, afin de mieux en mesurer les conséquences. La démarche peut néanmoins être également appliquée à plus d'une source.

On remarque que du moment que la position d'une source image après ajustement n'a plus de véritable sens physique, rien ne nous empêche de définir cette position comme complexe. Comme on le verra plus loin, l'emploi d'une distance complexe entre le point source et le récepteur permet de corriger efficacement les déphasages induits par les sources supplémentaires.

L'idée d'employer des sources de coordonnées complexes n'est pas nouvelle. Par exemple en électromagnétisme, où une source image de position complexe est utilisée pour modéliser un plan composé de plusieurs milieux superposés, voir par exemple [16]. En acoustique, la méthode des sources images équivalentes utilise également des sources de positions complexes, voir [34, 35] discutés plus loin. Des sources *images* de positions complexes sont également utilisées lorsqu'il s'agit de modéliser les effets de la proximité d'une paroi absorbante : on trouve ainsi des méthodes de correction de la fonction de Green en demi-espace en champ proche [17] et dans des guides d'ondes [18].

Ici, dans la logique d'une méthode pour retrouver des contributions manquantes dans la méthode des sources images, on se contente de trouver une position de source optimale, de coordonnées pouvant être complexes. L'objet étant d'étudier l'effet d'une amélioration de la contribution des sources ajoutées, on ne présente ni une généralisation de la méthode, ni une expression analytique de ces coordonnées ajustées.

6.2 Remarque sur l'ordre des termes

Dans l'optique de travailler sur la contribution d'une source précise et de la corriger pour qu'elle rejoigne celle d'un terme précis de la série, il devient nécessaire de pouvoir identifier quelle source correspond à quel terme de la série. En cela, l'interprétation utilisant le principe de Huygens introduite à la section 4.3 propose un parallèle possible entre chacun des termes de la série et une source image précise, qui doit encore être démontré. On rappelle ici l'expression 4.17 de la pression sur Γ_1

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 = & \underbrace{[\mathbf{g}_0(\Gamma_1) + \mathbf{g}_1(\Gamma_1)]}_{\text{termes d'ordre 0}} + \underbrace{[\mathbf{g}_2(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{21}(\Gamma_1)]}_{\text{termes d'ordre 1}} \\ & + \underbrace{[\mathbf{g}_{12}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{121}(\Gamma_1)]}_{\text{termes d'ordre 2}} + \underbrace{[\mathbf{g}_{212}(\Gamma_1) + \mathbf{g}_{2121}(\Gamma_1)]}_{\text{termes d'ordre 3}} + \dots \end{aligned} \quad (6.1)$$

L'étude de cette correspondance termes-sources s'est avéré délicat, et l'on ne présente ici que quelques conclusions qualitatives qui nous permettront cependant d'ajuster avec succès la contribution d'une source supplémentaire, comme on le verra plus loin.

Source	Terme correspondant	Expression
S_i	T_i	
S_0	T_1	$\mathbf{g}_0(\Gamma_1)$
S_1	T_2	$\mathbf{g}_1(\Gamma_1)$
S_2	T_3	$2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_2)$
S_{21}	T_4	$2\mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{g}_2(\Gamma_2)$
S_{12}	T_5	$2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{g}_0(\Gamma_1)$
S_{121}	T_6	$2\mathbf{A}_{12} \cdot 2\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{g}_1(\Gamma_1)$

Tab. 6.1 – Correspondance entre termes et sources images sur la paroi Γ_1 .

Sur les parois

Au chapitre précédent, on a montré numériquement le parallèle existant entre la contribution des sources images et celle des termes du développement en série de la solution exacte. On a comparé les résultats obtenus en considérant le même nombre de sources que de termes (fig. 5.2) puis on a observé la convergence forte dans certains cas (fig. 5.5) pour en déduire l'adéquation entre les termes du développement en série et la contribution d'autant de sources images.

Or, ces résultats ne sanctionnent pas uniquement l'interprétation de l'expression 6.1 en terme de nombre de sources et de termes, il reflètent également que l'*ordre* des termes tels qu'ils apparaissent est correct. En effet, le fait que les courbes de convergence faible révélant les termes ou les sources images soient parallèles révèle que l'ordre d'importance de ces termes est respecté. Pour illustrer ceci, la figure 6.1 présente quelques cas d'identification de termes dans la situation « D » du chapitre précédent. La correspondance entre sources et termes de la série ainsi définie est reprise sur la table 6.1.

On remarque en passant que les termes présentés à la figure 6.1 s'arrangent deux par deux : les contributions de S_0 et S_1 , par exemple, sont identiques, de même que celles de T_1 et T_2 , et ainsi de suite. Dans le premiers cas, c'est à dire en ce qui concerne les sources images, cela s'explique par le fait que les sources étudiées par couple sont situées à chaque fois de part et d'autre de la paroi sur laquelle on observe la pression. Ainsi, S_0 est située à la même distance de chacun des points de Γ_1 que S_1 , de même pour S_2 et S_{21} , et ainsi de suite. Il est donc normal que leurs contributions soient identiques. Dans le second cas, concernant les termes du développement en série, leur équivalence provient de l'interprétation du facteur 2 qui a été faite dans les équations 4.8, et plus loin 4.17, résultant à chaque fois en deux termes identiques.

Dans le domaine

L'expression de la pression sur les parois est multipliée par les vecteurs \mathbf{b}_i^T pour obtenir la pression en un point du domaine (cf. éq. 4.43). De plus, comme l'on a identifié la présence de chacune des sources images pour l'expression de la pression sur chacune des parois, chaque source interviendra autant de fois qu'il y a de parois dans l'expression ainsi obtenue. On a vu à la fin de la section 4.5 que l'on pouvait réunir les termes de

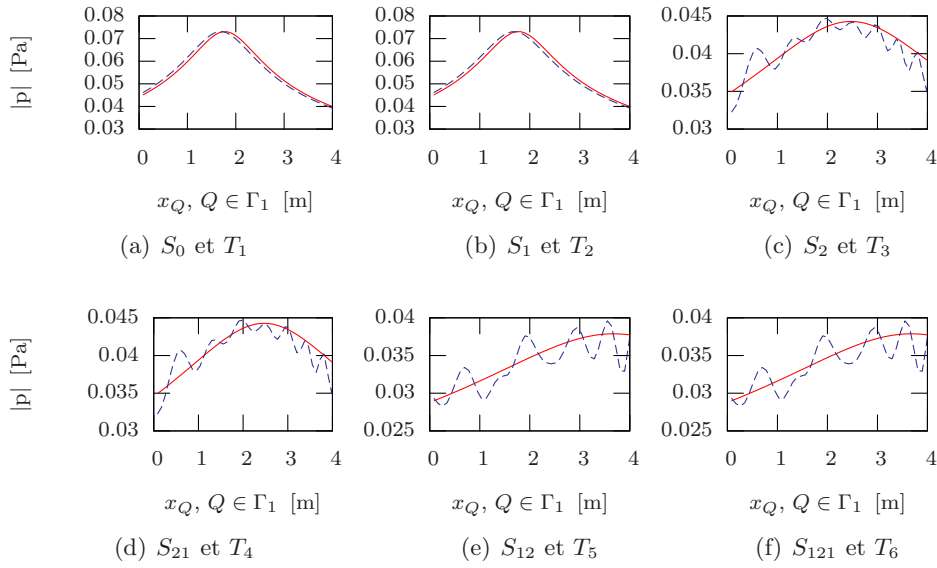


Fig. 6.1 – Comparaison terme à terme des contributions des premières sources et des termes de la série correspondants dans un secteur d'angle aigu (situation « D ») :

- Contribution des sources images
- - - Contribution des termes de la série

même ordre afin de n'avoir plus qu'un seul terme pour chacune des sources.

Cependant, la complexité de l'expression ainsi obtenue rend délicat l'identification de chacune des contributions. Des expériences numériques (que l'on renonce à présenter ici) ont montré qu'aux abords des parois il était possible d'identifier les contributions des sources tel qu'on l'a fait ci-dessus, mais que plus le point de réception considéré est éloigné des parois, plus le jeu d'influence des deux parois est complexe. Il devient alors difficile d'identifier avec certitude les termes obtenus en utilisant la méthode présentée ici.

Une vérification numérique de cette interprétation pour l'expression de la pression à l'intérieur de la cavité (loin des parois) reste à obtenir. Cependant, les résultats obtenus sur les parois permettent de croire à la non-absurdité de l'interprétation des termes comme on la présente ici.

6.3 Fonction d'erreur

La contribution de chaque source S_i à un point de réception R est calculée avec la fonction de Green en espace infini bidimensionnel (cf. 2.8) :

$$g_\infty(S_i, R) = g_\infty(r_i) = -\frac{i}{4}(J_0(kr_i) - iY_0(kr_i)) \quad (6.2)$$

avec les fonctions de Bessel du premier et du second type J_n et Y_n . La distance r_i est définie comme la distance euclidienne entre S_i et R :

$$r_i = r(S_i, R) = \sqrt{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_S)^2} \quad (6.3)$$

où les coordonnées ajustées de la source (x_S, y_S) peuvent être complexes, comme on le verra plus bas. On peut définir une fonction d'erreur entre la contribution d'une source particulière et celle d'un des termes du développement en série de la solution intégrale. Le terme en question T_i est choisi en accord avec l'interprétation qui en a été faite au chapitre 4, et en étudiant l'ordre d'importance des termes, comme on l'a vu à la section 6.2. Dans le cas qui nous intéresse ici, la source supplémentaire étudiée est S_2 , à laquelle correspond le troisième terme de la série, noté T_3 dans la table 6.1.

6.3.1 Optimisation par la distance

Dans un premier temps, on définit une fonction d'erreur employant la distance r comme paramètre :

$$\epsilon^2(r) = (g_\infty(r) - T_i) \cdot \overline{(g_\infty(r) - T_i)} \quad (6.4)$$

avec \bar{z} dénotant le conjugué complexe de z . L'optimisation de l'emplacement d'une source image se fait alors en minimisant $\epsilon^2(r)$ sur $r \in \mathbb{C}$. On recherche ici à ajuster la contribution de la source ajoutée pour un point récepteur R précis, pour lequel on a une valeur de T_i et une distance initiale r_i .

Un minimum local r_{opt} autour de la distance initiale r_i est recherché en considérant les valeurs $\Re(r) \in [r_i - r_i/2, r_i + r_i/2]$ et $\Im(r) \in [-1, 1]$ m. De cette manière, l'emplacement optimisé de la source est obtenu en plaçant celle-ci aux coordonnées S_{opt} de telle sorte que $\|S_{opt}R\| = r_{opt}$. Cette relation ne définissant que la norme de la distance (complexe) entre les deux points S_{opt} et R , un degré de liberté est conservé pour la position de la source optimisée S_{opt} .

Dans l'espace réel bidimensionnel, la partie réelle de cette distance définit un cercle de diamètre $\Re(r_{opt})$ autour du point R . On choisit alors de fixer la partie réelle des coordonnées de S_{opt} de manière à ce que $\Re(S_{opt})R$ soit dans le prolongement de S_iR . On évite également que la partie réelle du nouvel emplacement se situe à l'intérieur du domaine étudié.

Pour les simulations suivantes, l'optimisation est faite pour l'image S_2 , reconnue comme invisible dans les situations « A », « B » et « C » du chapitre précédent (cf. tab. 5.1), et le terme de la série correspondant T_3 . Dans un premier temps, on recherche une position de source optimisée *pour chaque point R* pour lequel on recherche une solution, dans ce cas les points de collocation sur la paroi Γ_1 . Les résultats sont présentés sur la figure 6.2.

Nous avons vu que dans le cas de la situation « A », le rétablissement (sans ajustement) de la source invisible S_2 permettait de rejoindre la solution exacte. Après ajustement, on constate dans la figure 6.2(a) que la forme (oscillation), qui était déjà bonne,

reste inchangée alors que l'amplitude chute de 10%. Un tel résultat est attendu, vu que l'on s'attelle ici à faire correspondre à la source S_2 la contribution du terme T_3 . Or ce terme n'est pas le seul à entrer en compte ici, donc on ne s'attend pas à rejoindre la solution exacte avec cette seule contribution supplémentaire.

En revanche dans le cas de la situation « B », l'amélioration apportée par l'optimisation de la position de source est flagrante : la figure 6.2(b) montre que bien que l'amplitude globale reste trop basse (encore une fois, cela vient du fait qu'un seul terme supplémentaire est considéré), la forme de la source supplémentaire est corrigée : le décalage des oscillations s'estompe.

Cependant, faire une optimisation pour chaque point récepteur auquel on est intéressé n'est pas réaliste. En effet, le but ici est d'obtenir une seule position de source optimisée de sorte à avoir une information de pression corrigée sur la totalité de la paroi. On peut toujours rechercher une distance r_{opt} optimisée pour un certain groupe de points récepteurs, mais on se heurte rapidement à des problèmes géométriques. Il est ainsi rarement possible de définir une position optimisée S_{opt} satisfaisant une distance r_{opt} avec plus de deux points récepteurs. Pour résoudre ce problème, l'optimisation doit être faite directement sur les coordonnées de la source, ce qui impose une révision de la définition de la fonction d'erreur.

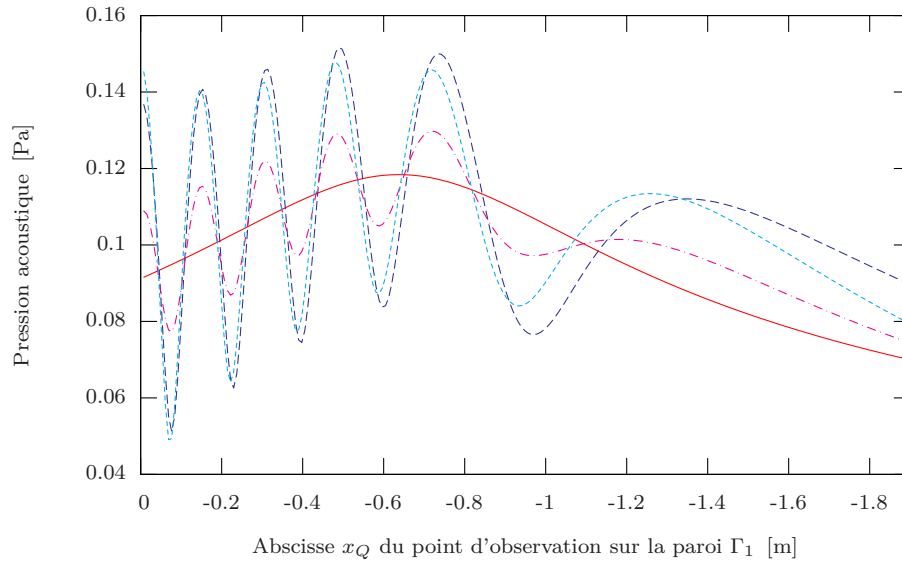
Il apparaît en outre qu'en utilisant une optimisation par la distance, on se heurte dans certains cas à des situations pour lesquelles il n'est pas possible de définir une position de source adéquate. Cela se manifeste sur la figure 6.2(b) pour les points de Γ_1 dont l'abscisse est située entre -1.2 m et -1.8 m.

6.3.2 Optimisation par les coordonnées

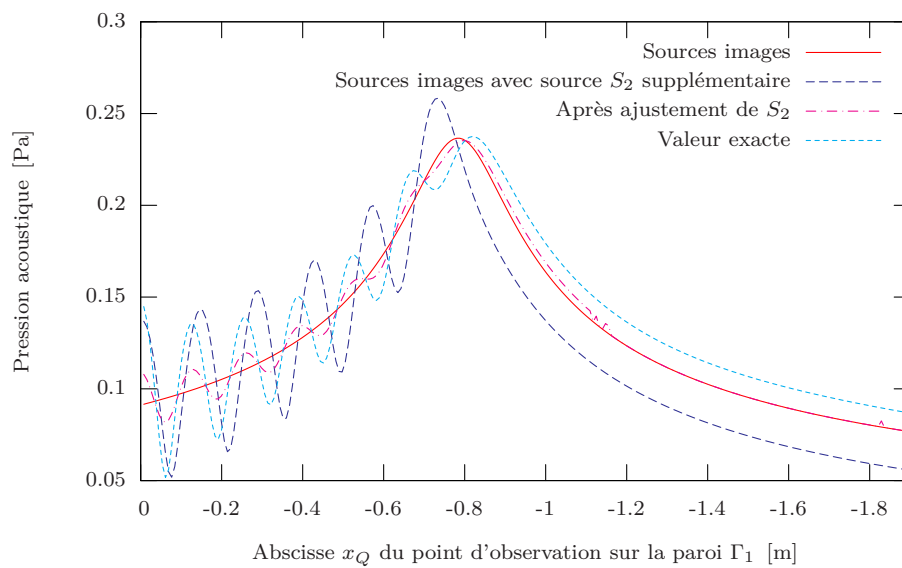
La fonction d'erreur $\epsilon^2(r)$ est maintenant minimisée sur les coordonnées de la source supplémentaire $x_{S_i} \in \mathbb{C}$ et $y_{S_i} \in \mathbb{C}$, avec $r(x_S, y_S) = \sqrt{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_S)^2}$. On obtient ainsi un set de coordonnées bidimensionnelles complexes, pour lesquelles la position de la source est optimisée. En définissant en outre une fonction d'erreur composée

$$\epsilon_k^2(r_1, r_2, \dots, r_\ell) = \sum_{k=1}^{\ell} \epsilon^2(r_k) \quad (6.5)$$

il devient possible d'obtenir une position de source optimisée pour plusieurs points récepteurs R_1 à R_ℓ . Pratiquement, l'optimisation est réalisée en choisissant le premier minimum local sur $\Re(x_S)$ et $\Re(y_S)$. Le minimum de la partie complexe des coordonnées $\Im(x_S)$ et $\Im(y_S)$ est choisi en faisant varier cette partie complexe sur $\Im(x_S) \in [-10, 1]$ m (et similairement pour $\Im(y_S)$). Ces valeurs sont choisies grandes à dessein, afin d'augmenter les chances d'obtenir une position optimisée. En pratique, les valeurs obtenues pour les modifications de coordonnées sont de l'ordre de $\Im(x_S) \in [-1.5, 0.5]$ m.



(a) Situation « A »



(b) Situation « B »

Fig. 6.2 – Résultats de l'optimisation faite sur la distance $r \in \mathbb{C}$ pour chaque point de la paroi Γ_1 .

6.3.3 Singularités

L'introduction d'une position de source complexe doit être menée avec précaution, car elle fait apparaître des singularités nouvelles. En effet, la fonction de Green en deux dimensions 6.2 possède une singularité en $r_i = r = 0$. Dans le cas habituel du monopole de coordonnées réelles, cette singularité intervient lorsque le point R est confondu avec la source S . En revanche, lorsque des coordonnées complexes sont considérées, la distance $r = r_r + Ir_c$ devient nulle sur un cercle dans le plan complexe, comme on va le voir dans les paragraphes suivants. Voir à ce sujet les travaux de Kaiser [23] sur les potentiels à distances complexes, et par exemple Ochmann [35, 34], qui se heurte au même problème en utilisant des sources virtuelles de coordonnées complexes pour la méthode des sources équivalentes. On se contente ici de reprendre les conclusions de ces travaux qui nous intéressent, adaptés à la situation bidimensionnelle.

On se trouve donc en présence d'un point récepteur de coordonnées réelles $R = (x_R, y_R) = \vec{x}_R$ et d'un point source aux coordonnées de départ réelles $S = (x_S, y_S) = \vec{x}_S$, auxquelles on ajoute une correction disposant d'une partie réelle \vec{w} et d'une partie imaginaire \vec{q}

$$\vec{x}_{S_c} = (x_S + x_w - ix_q, y_S + y_w - iy_q) = \vec{x}_S + \vec{w} - i\vec{q} \quad (6.6)$$

avec $\vec{w} = (x_w, y_w)$ et $\vec{q} = (x_q, y_q)$. La raison du choix du signe du vecteur \vec{q} sera expliqué plus loin.

La distance r , définie en 6.3, comporte alors une partie réelle et une partie imaginaire

$$r = r_r + ir_c \quad (6.7)$$

En deux dimensions, les singularités de cette distance r apparaissent sur une droite perpendiculaire au vecteur \vec{q} et passant par le point S (voir la fig. 6.3), soit en notation vectorielle sur la droite \mathcal{E} telle que

$$\mathcal{E} = \{\vec{x}_R \mid (\vec{x}_R - (\vec{x}_S + \vec{w})) \cdot \vec{q} = 0\} \quad (6.8)$$

Les singularités sont placées sur la droite \mathcal{E} de part et d'autre du point S à une distance $q = |\vec{q}|$ correspondant à la norme de la partie imaginaire de S_c . Entre ces deux pôles, la distance r est purement imaginaire ; de part et d'autre de ces pôles elle est purement réelle :

$$\vec{x}_R \in \mathcal{E} \mid |\vec{x}_R - (\vec{x}_S + \vec{w})| < q \Rightarrow \Re(r) = 0 \quad (6.9)$$

$$\vec{x}_R \in \mathcal{E} \mid |\vec{x}_R - (\vec{x}_S + \vec{w})| > q \Rightarrow \Im(r) = 0 \quad (6.10)$$

Cet effet est visible par la position des singularités sur la figure 6.3, ou en observant la variation de $\Im(r)$ et $\Re(r)$ le long de la droite \mathcal{E} , comme le montre la figure 6.4. La

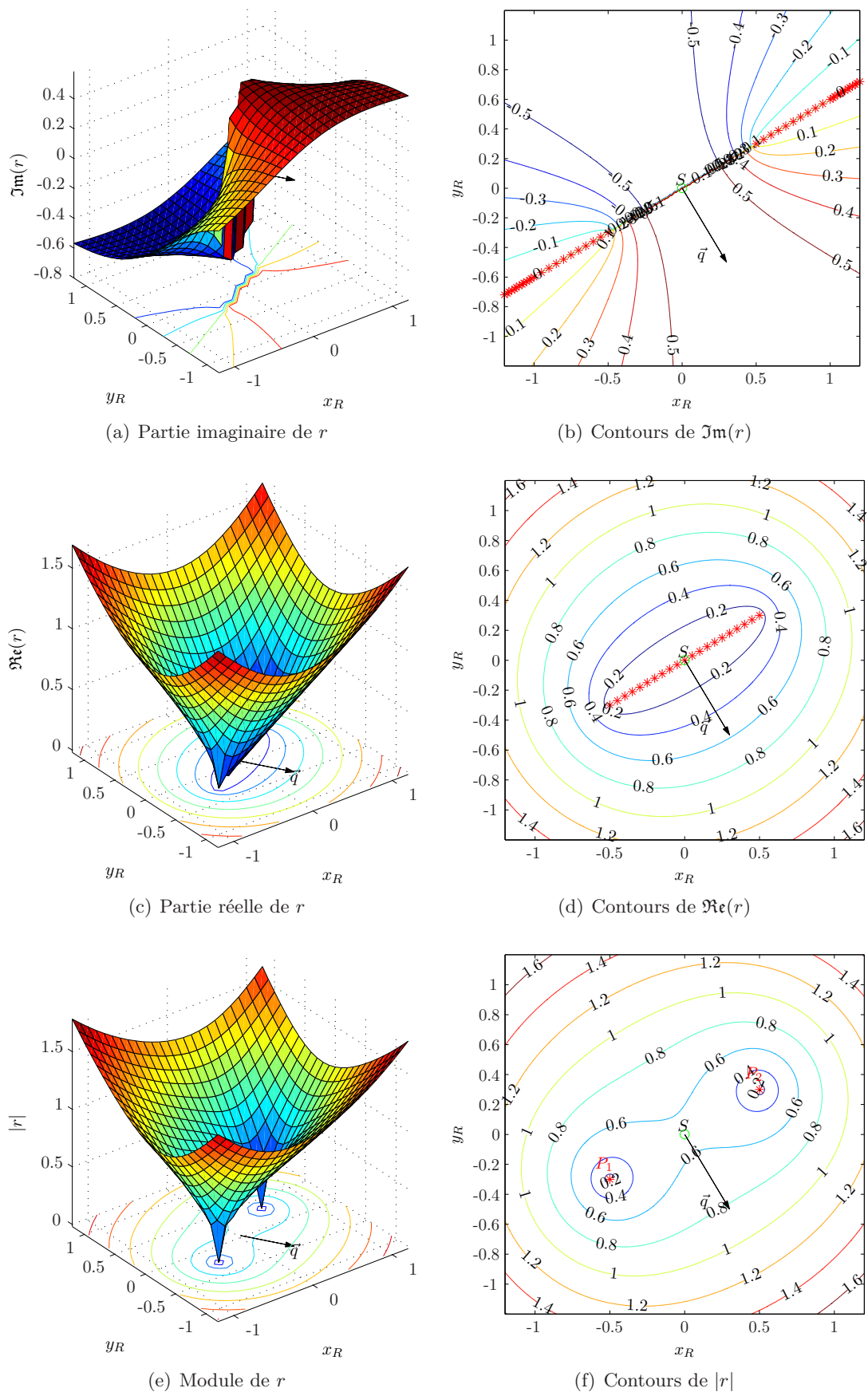


Fig. 6.3 – Expression de la distance complexe r en fonction de l'emplacement du point récepteur. Ici, $S = (0,0)$, $\vec{w} = (0,0)$ et $\vec{q} = (0.3, -0.5)$. Les étoiles rouges dénotent les singularités ($r = 0$).

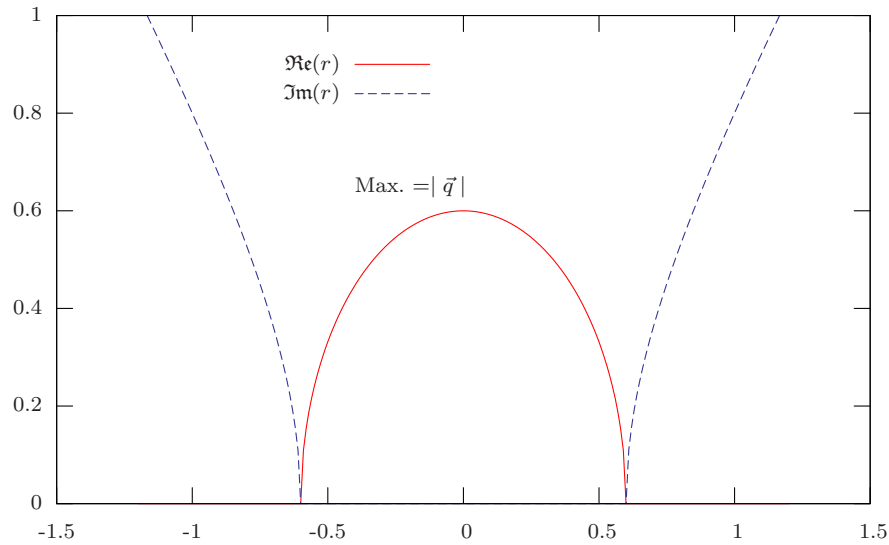


Fig. 6.4 – Variation de la partie réelle et imaginaire de la distance complexe r sur la droite \mathcal{E} . Pour simplifier les notations, on a choisi ici $\vec{q} = (0, 0.6)$, la droite \mathcal{E} correspond donc à l'axe x .

partie réelle de la source étant ici située à l'origine, la valeur de la distance à l'origine correspond logiquement à la valeur de la partie complexe ajoutée. Hors singularités, il faut en outre choisir une seule valeur pour la racine complexe. Afin de conserver la condition de radiation, la partie réelle de la distance doit être nulle ou positive (la direction de propagation est inversée si $r_r < 0$) [23].

La droite \mathcal{E} délimite le plan en deux régions. Selon la définition 6.6, dans la région vers laquelle pointe le vecteur \vec{q} (région I), la partie imaginaire de r est négative. Dans l'autre demi-plan (région II), elle est positive. L'expression de la fonction de Green étant proportionnelle à e^{-ikr} , on voit que la radiation sera amplifiée par e^{kr_c} dans la région I et atténuée par e^{-kr_c} dans la région II. Couplé à l'atténuation par $1/\sqrt{r}$, ce schéma provoque un comportement de radiation fortement directif.

La figure 6.5 compare la forme de la radiation lorsque les coordonnées de la source sont purement réelles (a) et lorsqu'on y ajoute une composante complexe (b). On voit que la radiation s'oriente dans la direction du vecteur \vec{q} lorsqu'il est défini comme apportant une partie imaginaire négative, tel qu'en 6.6.

6.4 Choix des points d'optimisation

En faisant attention à éviter les singularités évoquées à la section précédente, une minimisation de la fonction d'erreur 6.5 sur plusieurs points permet d'obtenir une position de source optimisée. Une série de tests numériques nous montre qu'une optimisation sur deux points est suffisante pour obtenir de bons résultats (voir figure 6.6). Du reste,

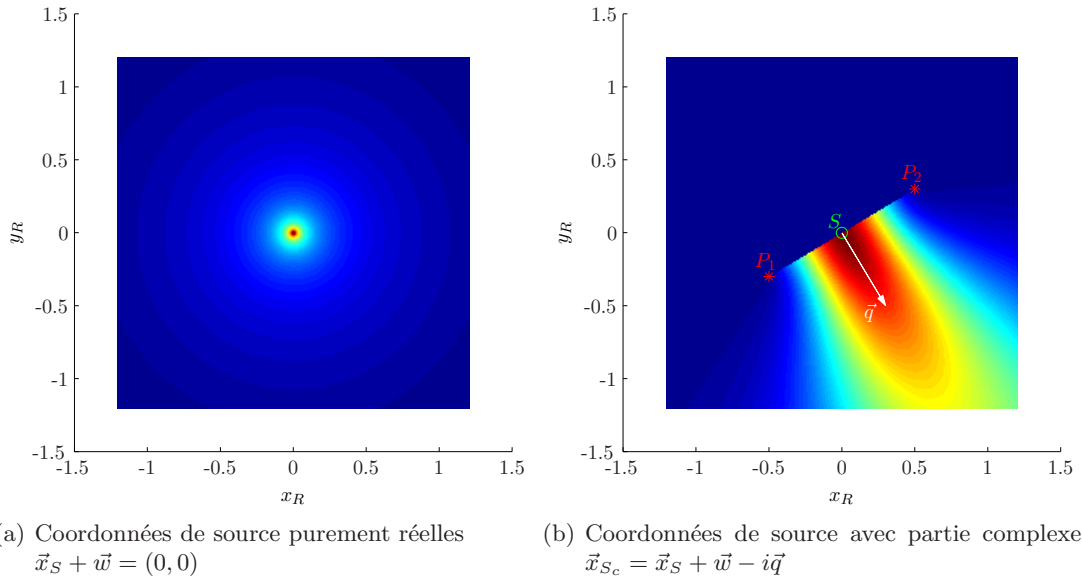


Fig. 6.5 – Radiation sonore due à une source ponctuelle à coordonnées complexes, pour une fréquence de 500 Hz.

la forme générale de la contribution d'une source dépendra toujours de la fonction de propagation utilisée, quel que soit le nombre de points sur lesquels on fera l'optimisation. On peut observer ceci sur la figure 6.6(b) : il est inutile d'ajouter des points d'optimisation car la forme de la contribution de la source restera identique.

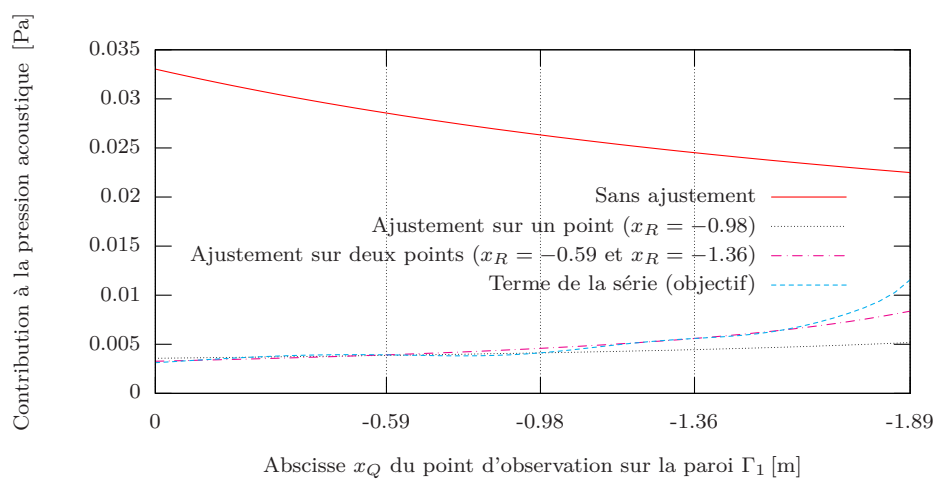
Les meilleurs résultats sont en outre obtenus lorsque l'on choisit deux points distribués également sur la longueur de la paroi réceptrice (1/3 et 2/3 de sa longueur).

Les résultats présentés sur la figure 6.6 ont été obtenus dans la situation « F » présentée à la section suivante. On obtient des courbes analogues à celles-ci lorsque l'on étudie d'autres situations.

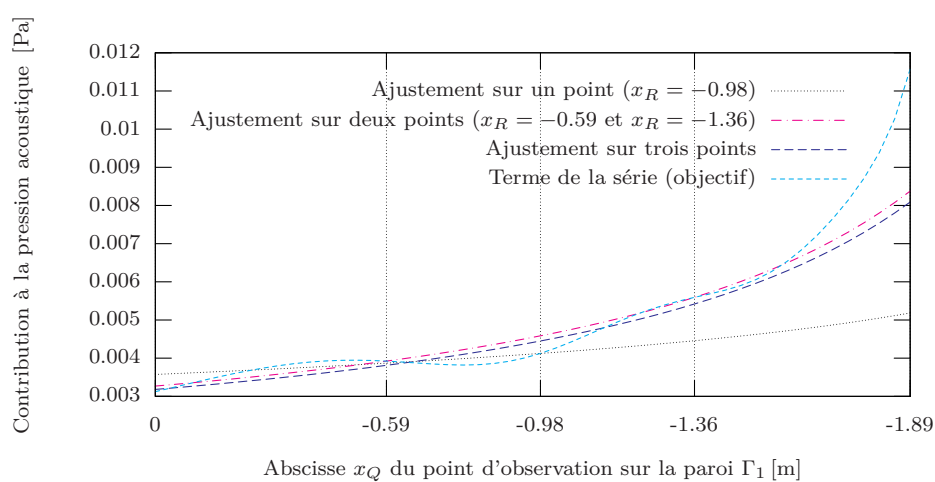
6.5 Résultats dans le secteur ouvert

Pour étudier les effets de l'ajout d'une source optimisée, on reprend la situation « B » déjà étudiée au chapitre précédent (cf. table 5.1) et pour laquelle on a déjà montré l'effet de l'optimisation de la position d'une source supplémentaire à la section 6.3.1. Pour faire apparaître au mieux la correction apportée à la forme de la pression en paroi, on y ajoute une seconde situation que l'on nomme « F ». Cette dernière, dont les détails sont donnés dans la table 6.2, présente en effet un cas dans lequel un comportement oscillant important est observé sur Γ_1 , que l'on espère pouvoir approcher au mieux avec une source optimisée.

On rappelle que dans ces configurations, la longueur des parois est de 5 m. Dans



(a) Comparaison avec la contribution de la source non ajustée



(b) Détail des contributions ajustées

Fig. 6.6 – Détermination du nombre de points d'optimisation : Valeurs de la contribution de la source supplémentaire, avant et après ajustement, au point d'observation sur Γ_1 à 500 Hz, situation « F ».

Nom	Esquisse	Détails
F		$\theta = 5\pi/8$ $S(x_S, y_S) = (-0.65, 3.85) \text{ m}$ Visible : S_1 Invisibles : S_2, S_{12}, S_{21}

Tab. 6.2 – Situation supplémentaire « F »

les deux cas étudiés ici, la source « invisible » que l'on cherche à réintroduire est la source S_2 . Les sources d'ordres supérieur, également invisibles, ne sont pas prises en considération.

Un premier résultat obtenu lors de la recherche des points d'optimisation apporte déjà un encouragement important. Si l'on compare en effet sur la figure 6.6(a) la contribution de la source S_2 avant et après ajustement de ses coordonnées, il est immédiatement visible qu'on se rapproche grandement du terme correspondant, même si la forme générale de cette contribution sur les points de la paroi n'est pas parfaitement atteinte.

Si l'on observe maintenant la pression totale sur la paroi Γ_1 sur la figure 6.7 à 500 Hz, on retrouve les résultats du chapitre précédent : la source supplémentaire non optimisée ajoute une information de pression manquante, un comportement oscillant, mais de manière inexacte. En revanche, lorsque les coordonnées de cette sources sont optimisées, la forme de la pression sur la paroi est rétablie. On remarque également sur la figure 6.7 qu'une optimisation sur un seul point de la paroi n'est pas suffisant, ce qui apparaissait déjà dans l'observation de la seule contribution de la source optimisée à la figure 6.6(a). On constate enfin à nouveau une chute d'environ 10% dans l'amplitude du comportement oscillant, due au fait que seul un terme est pris en compte pour l'ajustement, comme on l'a vu plus haut.

Les valeurs de modification des coordonnées pour les deux situations étudiées ici sont, pour la situation « B »

$$\begin{aligned}
\vec{x}_{S_c} &= \vec{x}_S + \vec{w} - i\vec{q} \\
\vec{w} &= (-0.83, 0.17) \quad \text{m} \\
\vec{q} &= (-0.57, 0.04) \quad \text{m}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

et pour la situation « F »

$$\begin{aligned}\vec{x}_{S_c} &= \vec{x}_S + \vec{w} - i\vec{q} \\ \vec{w} &= (-1.68, 0.08) \quad \text{m} \\ \vec{q} &= (-1.01, -0.13) \quad \text{m}\end{aligned}\tag{6.12}$$

Des résultats similaires sont obtenus sur la figure 6.8 en considérant le spectre de la pression sur un point particulier de Γ_1 situé entre les deux points qui ont servi à l'optimisation. On constate ici aussi que l'ajustement des coordonnées de la source supplémentaire permet de corriger le déphasage. La correction est du même ordre si l'on étudie le spectre sur d'autres points de la paroi, sauf pour les points proches des extrémités où la solution de référence est de toute façon incorrecte puisqu'elle prévoit des parois de longueur infinie.

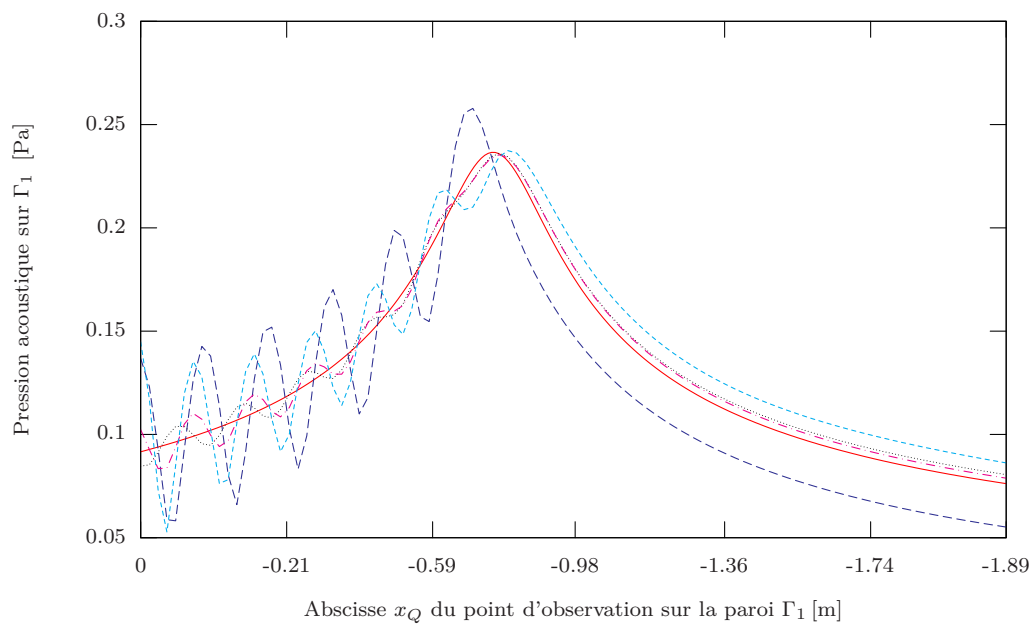
6.5.1 Optimisation sur la fréquence

Il est à noter que pour les résultats présentés ici, la position de source optimisée a été calculée séparément pour chaque fréquence. En effet, on s'attend à une forte dépendance de la fréquence, vu que la fonction de propagation comporte un terme en e^{-ikr} . La variable k (proportionnelle à la fréquence) multiplie la distance r entre source et point récepteur que l'on modifie ici. Cependant, si l'on observe les valeurs de la variation de coordonnées que l'on a du apporter à la source S_2 sur la figure 6.9, on constate qu'à part une légère tendance oscillante (probablement due au fait que l'optimisation se fait en recherchant un minimum local sur une fonction oscillante), les coordonnées optimales restent stables sur une certaine gamme de fréquence. Il apparaît donc possible de calculer une position optimisée valable pour plusieurs fréquences.

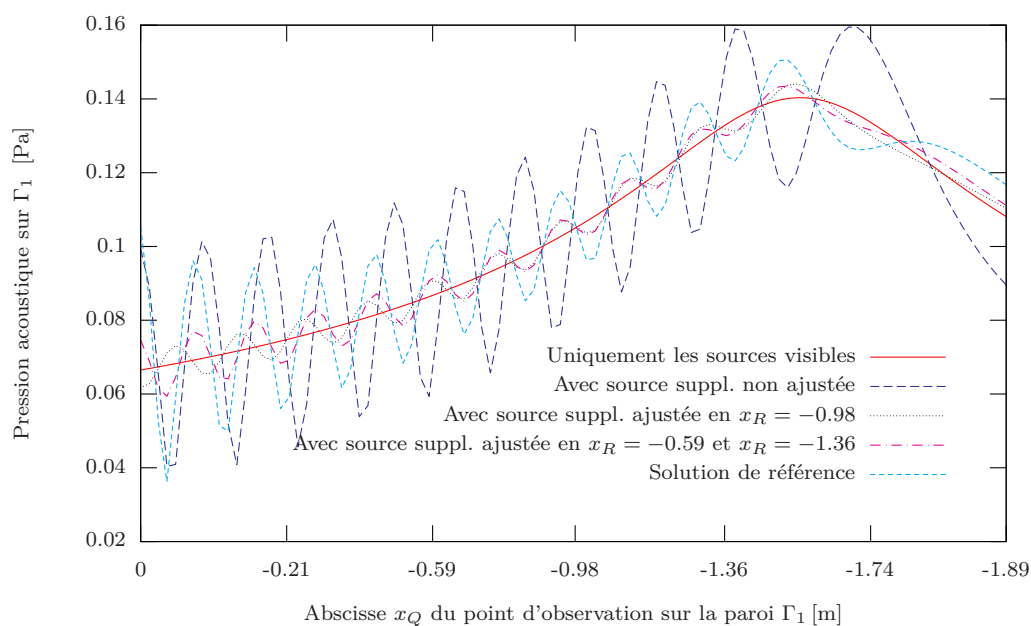
6.5.2 Discussion et possibilités d'utilisation

On a vu en conclusion du chapitre 5 qu'à proximité de parois formant un angle obtus entre elles, certaines sources images invisibles à certains points, et en particulier sur les parois, provoquent une information de pression incomplète. Si l'on restaure artificiellement ces images invisibles, l'information manquante est rétablie, mais imparfaitement (cf. fig. 5.7). Cependant, si l'on optimise la position de ces sources supplémentaires en faisant en sorte que leur contribution se rapproche de celle du terme du développement en série qui leur correspond, l'information de pression manquante est rétablie sans erreur de phase (figures 6.7 et 6.8). L'amplitude de la pression ainsi obtenue n'est en revanche pas rétablie avec une seule source supplémentaire.

L'inconvénient le plus flagrant de cette méthode est qu'elle nécessite une connaissance a priori d'une solution analytique (à la discrétisation près). Or, il est évident que lorsqu'une solution analytique est disponible et calculée, le problème est d'ores et déjà résolu. Cependant, s'il est possible d'obtenir une telle solution pour des situations simples, comme le secteur ouvert, il est en revanche impossible de développer une telle solution pour des cavités fermées. On pourrait donc imaginer appliquer la méthode présentée



(a) Situation « B »



(b) Situation « F »

Fig. 6.7 – Pression sur Γ_1 à 500 Hz avec l'ajout d'une source supplémentaire, avant et après son ajustement (cf. tab. 5.1 et tab. 6.2 pour les détails des situations étudiées).

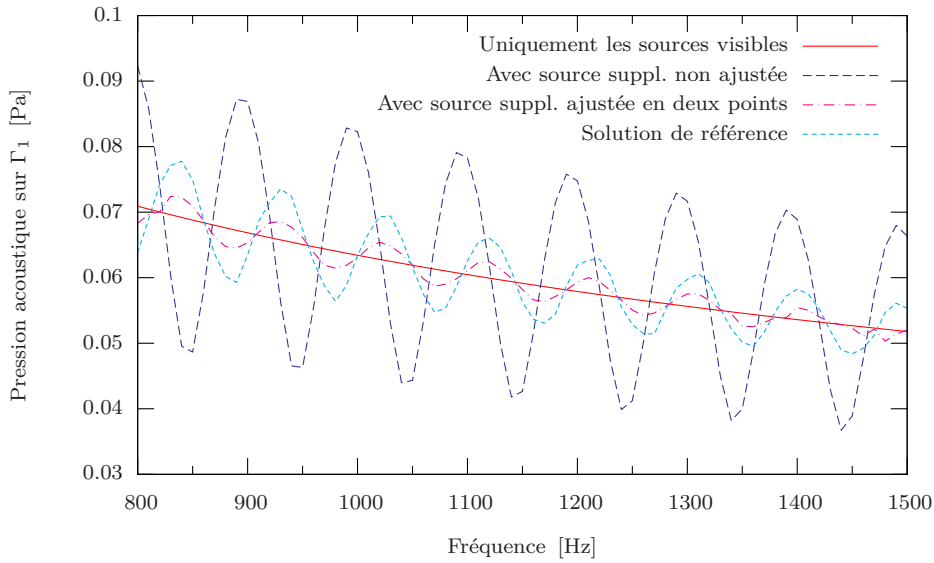


Fig. 6.8 – Spectre de la pression ajustée sur un point $(-1.24m, 3.00m)$ de Γ_1

ici à certaines sources intervenant dans un problème en cavité fermée, en extrapolant le problème en secteur ouvert : chaque angle obtus intervenant dans un calcul en cavité serait traité à part selon la méthode présentée ici, puis les sources optimisées ainsi obtenues seraient introduites dans le calcul en cavité.

À terme, une relation purement géométrique permettant d'établir la position des sources supplémentaires est désirable, mais entre-temps il apparaît possible de calculer des positions de sources supplémentaires optimisées pour une série de situations types (angle d'ouverture, position relative de la source, etc.) puis d'interpoler au besoin entre ces valeurs pour le problème en cavité fermée. Un tel schéma d'interpolation a été développé pour prendre en compte des valeurs d'impédance non localisées. Il sera présenté dans la deuxième partie de ce travail, au chapitre 9. Le même schéma pourrait être utilisé ici.

On est en droit de se demander quel pourrait être le sens physique d'une source de position imaginaire. Une interprétation plausible est qu'une telle source révèle un champ évanescents plutôt que propagatif, champ auquel contribue la diffraction par les parois et non la réflexion spéculaire.

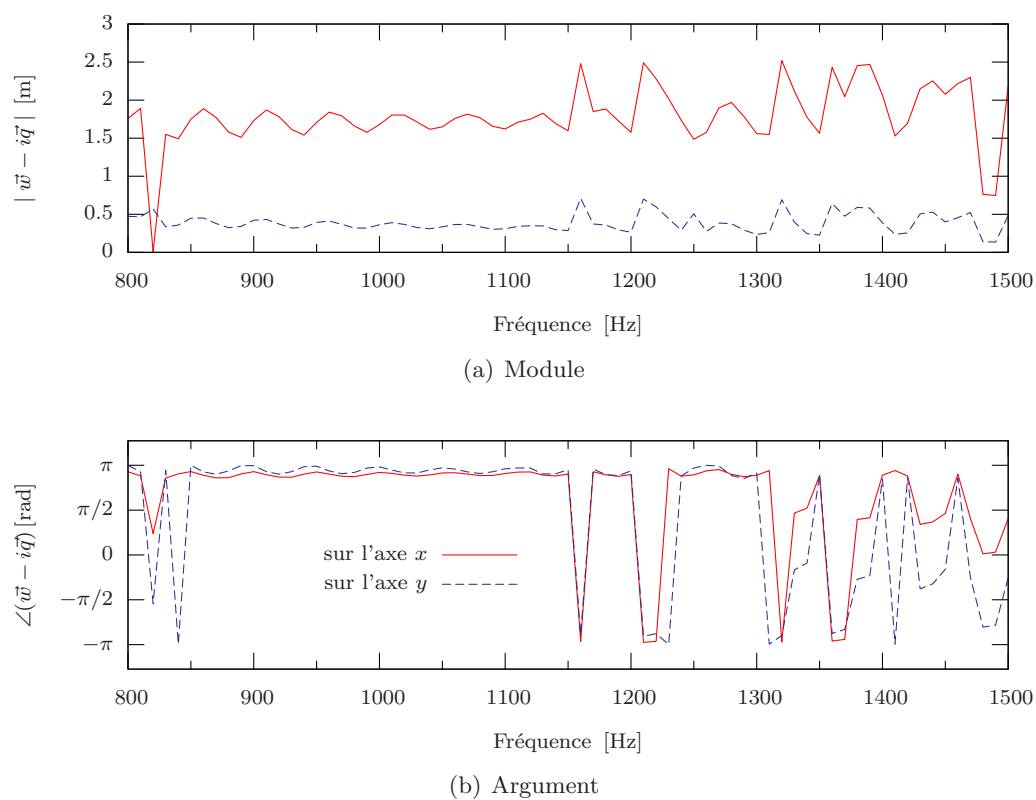


Fig. 6.9 – Variation des coordonnées de la source supplémentaire S_2 en fonction de la fréquence

Chapitre 7

Prise en compte de la diffraction pour le calcul en cavité

7.1 Comment intervenir ?

On a vu au chapitre 4 que dans le cas d'un secteur angulaire la pression acoustique due à la contribution des sources réelle et images dans une méthode de rayons, avait son équivalent dans les premiers termes d'une série issue de la méthode exacte des équations intégrales, sous réserve d'une interprétation correcte du principe de Huygens. Les démarches expérimentales numériques ont montré la pertinence de cette interprétation au chapitre 5. Les autres termes de la série (qui n'ont pas d'équivalent parmi les sources visibles) décriraient donc le champ diffracté absent de la méthode des rayons, qui ne considère que la réflexion spéculaire.

Par ailleurs, la représentation intégrale de la solution exacte dans une cavité fermée peut s'écrire avec n'importe quel noyau. La méthode des rayons classique emploie la fonction de Green en espace bidimensionnel infini g_∞ (cf. éq. 3.2) comme noyau. Si l'on choisit à la place la solution exacte du secteur angulaire g_θ (de préférence pour l'angle le plus obtus de la cavité), pour lequel on sait maintenant quels sont les termes correctement pris en compte par les sources images et lesquels doivent être ajoutés, serait-il possible d'améliorer l'information de pression au sein de la cavité ?

Dans le cas du secteur angulaire, on a mis en évidence à l'aide du principe de Huygens que la partie spéculaire équivalente aux premiers termes d'un développement en série de la solution intégrale du même problème provient d'abord de la source réelle et de sources images via les parois du secteur angulaire, puis de l'image de ces sources par rapport aux autres parois. Cette démarche peut sans doute être étendue jusqu'à atteindre les contributions de toutes les sources images de la méthode des rayons.

La méthode de l'identification et de l'ajustement des termes est séduisante, mais elle a un coût : elle nécessite le calcul préalable du noyau de secteur angulaire g_θ , l'identification des termes manquants, l'optimisation des sources à ajouter et finalement une éventuelle interpolation pour d'autres situations. Pratiquement, l'emploi du noyau g_θ est-il susceptible d'engendrer, à faible coût, une amélioration des résultats fournis ?

Remplacer les contributions spéculaires de *tous* les groupes de sources par leur équivalent identifié via la méthode du chapitre 2 (soit cette fois les contributions spéculaires plus celles provenant de la diffraction) reviendrait à la mise en oeuvre de la méthode intégrale dans son entier et n'apporterait alors rien de nouveau. En revanche, remplacer les contributions spéculaires des *premiers* groupes de sources ne suffirait-il pas pour améliorer la méthode des rayons ? Or les premières contributions, correspondant à ces premiers groupes de sources, sont les plus importantes dans l'établissement de la pression en cavité, comme on le verra au chapitre 10 et selon un travail antérieur [45].

7.2 Séparation du problème en cavité

La méthode des sources images permet de représenter la pression totale en un point de réception R au sein d'une cavité fermée comme la somme des contributions des sources images issues des parois, soit

$$p^{\text{rayon}}(R) = g_{\infty}(S_0, R) + \sum_{\text{im. } \Gamma_i} g_{\infty}(S_i, R) + \sum_{\text{im.}} \sum_{\text{im. } \Gamma_j} g_{\infty}(S_j, R) + \dots \quad (7.1)$$

où le terme $\sum_{\text{im. } \Gamma_i}$ représente la somme des images de la source S_0 par rapport aux parois de la cavité (réflexions au 1^{er} ordre) et $\sum_{\text{im.}} \sum_{\text{im. } \Gamma_j}$ la somme des images des images (2^e ordre), etc.

Cependant, le travail accompli dans le secteur ouvert a permis de montrer qu'aux termes strictement issus de la méthode des sources images on peut ajouter des termes supplémentaires pour tendre vers la solution exacte. En d'autres termes, il existe dans le secteur ouvert une fonction de Green g_{θ} valable dans le secteur, composée d'une partie \tilde{g}_{θ} correspondant à la fonction obtenue par sources images (réflexion seule) et d'une partie δg_{θ} (les « termes manquants ») que l'on suppose correspondre à la diffraction par les parois :

$$g_{\theta}^{\text{exact}}(S, R) = \tilde{g}_{\theta}(S, R) + \delta g_{\theta}(S, R) \quad (7.2)$$

Or, on peut considérer une situation en cavité comme une extension d'un problème en secteur ouvert (figure 7.1). Les parois Γ_1 et Γ_2 , que l'on peut noter $\Gamma_{\theta} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, sont traitées par le problème en secteur ouvert. Les autres parois, que l'on note $\Gamma_a = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \dots$, font intervenir toutes les autres réflexions conduisant à la solution du problème en cavité fermée.

Sur la figure 7.1, on représente en rouge les sources intervenant dans le calcul spéculaire de \tilde{g}_{θ} (seules Γ_1 et Γ_2 sont prises en compte). Les sources colorées en vert sont ajoutées lorsque l'on considère la contribution au premier ordre des autres parois Γ_3 à Γ_5 . Les sources colorées en noir, enfin, ne sont pas visibles du point R . Bien que S_2 ne soit pas visible du point R , elle intervient dans la construction des rayons provenant des sources de second ordre (S_{23} , etc.), d'où son inclusion aux sources colorées en vert.

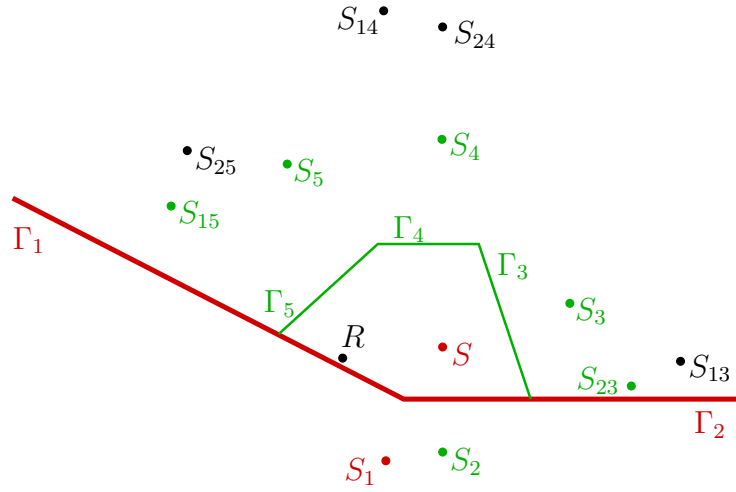


Fig. 7.1 – Cavité fermée vue comme l’extension d’un problème en secteur ouvert. On ne représente ici que les sources images visibles jusqu’à l’ordre 2. La coloration en rouge représente l’effet des parois Γ_1 et Γ_2 uniquement. La coloration en vert dénote l’introduction de la contribution au premier ordre des autres parois.

Autrement dit, S_2 intervient dans le calcul non pas pour elle-même, mais via les sources « filles » qu’elle engendre.

Si l’on parvient à séparer dans l’équation 7.1 les effets des parois Γ_θ , que l’on sait améliorer, il apparaît possible d’enrichir la solution en cavité en tenant compte d’une partie des effets de diffraction. Il est vrai qu’en procédant ainsi on ne parvient qu’à ajouter la diffraction sur Γ_θ , mais si cette démarche porte ses fruits, il est toujours possible de traiter chaque paire de paroi (en premier lieux celles formant un angle obtus entre elles) de la même manière.

On procède ici en deux étapes. Dans un premier temps (§ 7.2.1), on cherche à ajouter les effets de la diffraction au premier ordre uniquement, c’est à dire les effets de la diffraction sur Γ_θ uniquement et non « l’image » de ces effets par rapport aux autres parois. Les résultats numériques ayant montré que l’influence des termes amélioré étant dans ce cas trop faible, on se propose alors dans un deuxième temps d’étendre l’amélioration au deuxième ordre (§ 7.2.2), ce qui nécessitera un travail plus important.

7.2.1 Extraction des termes améliorables au premier ordre

S’appuyant sur une démarche analogue, qui sera discutée plus loin à la section 7.2.3, on sépare tout d’abord dans l’équation 7.1 la contribution des parois $\Gamma_\theta = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ du secteur de celle des autres parois $\Gamma_a = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$:

$$p^{\text{rayon}}(R) = \underbrace{\sum_{\text{im.}\Gamma_\theta} g_\infty(S_0, R)}_{\tilde{g}_\theta(S, R)} + \underbrace{\sum_{\text{im.}\Gamma_a} g_\infty(S_\theta, R) + \sum_{\text{im.}\Gamma_\theta} \sum_{\text{im.}\Gamma_a} \dots + \dots}_{\tilde{\mathcal{A}}} \quad (7.3)$$

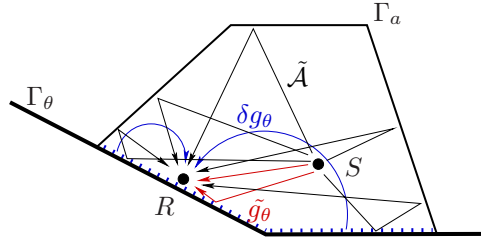


Fig. 7.2 – Représentation schématique des composants de l'équation 7.5. La contribution \tilde{g}_θ représente la pression réfléchie spéculairement sur Γ_θ . Les effets de la diffraction δg_θ sur Γ_θ sont ajoutés au premier ordre uniquement. Le reste des contributions spéculaires amenées par les parois Γ_a sont représentés par $\tilde{\mathcal{A}}$.

Le premier signe somme représente la somme des contributions des sources images selon Γ_θ , soit la partie purement spéculaire de g_θ , notée \tilde{g}_θ en accord avec 7.2. Le reste, noté $\tilde{\mathcal{A}}$ représente l'effet des parois Γ_a , que l'on ne peut pas à ce stade directement améliorer même en connaissance de la solution exacte dans le secteur ouvert g_θ^{exact} .

On constate rapidement que, disposant d'une part de $p^{\text{rayon}}(R)$ via la méthode classique des sources images et d'autre part des sources issues uniquement des parois Γ_θ (soit S et S_1 dans la situation de la figure 7.1) que l'on nomme ici sources S_θ^{ol} , il devient possible d'isoler $\tilde{\mathcal{A}}$ par calcul :

$$\tilde{\mathcal{A}}(R) = p^{\text{rayon}}(R) - \sum_{S_i \in S_\theta^{\text{ol}}} g_\infty(S_i, R) \quad (7.4)$$

Remplaçant alors \tilde{g}_θ par g_θ^{exact} , on obtient une version améliorée de la pression totale

$$\begin{aligned} p^{\text{rayon, améliorée}} &= g_\theta^{\text{exact}} + \tilde{\mathcal{A}} \\ &= \tilde{g}_\theta(S, R) + \delta g_\theta(S, R) + \tilde{\mathcal{A}}(R) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Comme on le voit, cette première démarche se résume à ajouter au calcul spéculaire original le terme $\delta g_\theta(S, R)$, soit uniquement ce que l'on considère comme l'influence de la diffraction au premier ordre.

Une série de simulations sur la cavité bidimensionnelle, abordées plus en détail à la section 7.4.3, montrent que si $\delta g_\theta(S, R)$ influe bien sur g_θ , en revanche les modifications apportées restent minimes si l'on considère la pression totale en cavité. Il apparaît en effet que g_θ et $\tilde{\mathcal{A}}$ sont du même ordre de grandeur, sur quoi on peut influencer en modifiant l'atténuation due au rayonnement, comme on le verra à la section 7.3.

7.2.2 Extension au second ordre

Il apparaît donc possible d'apporter une amélioration au sein de la méthode des sources images en cavité. Cependant, si cette amélioration se limite au premier ordre

de réflexion, elle sera d'une importance trop faible pour influencer le résultat global. Il est donc nécessaire d'approfondir la démarche afin d'explorer les moyens d'influence aux ordres supérieurs.

On note g_θ la solution du problème de propagation dans le cas d'un secteur ouvert en tenant parfaitement compte des parois Γ_θ . Par une démarche similaire à celle qui a conduit à l'expression de pression en espace semi-infini 2.19, s'y ajoute un terme de correction pour tenir compte des autres parois Γ_a pour obtenir la formulation rigoureuse suivante :

$$p(R) = g_\theta(S, R) - \int_{\Gamma_a} p(R') \partial_{n_{R'}} g_\theta(R, R') d(R' \in \Gamma_a) \quad (7.6)$$

Vu que g_θ tient déjà compte des parois Γ_θ , l'intégration ne porte que sur les parois restantes Γ_a . Reprenant l'écriture matricielle déjà utilisée avec les simplifications qui vont avec (cf. éq. 2.29), on peut écrire

$$p(R) = g_\theta(S, R) + \langle \dots - \int_{\Gamma_j} \partial_{n_{R'}} g_\theta(R, R') d(R' \in \Gamma_j) \dots \rangle \cdot \{p(\Gamma_a)\} \quad (7.7)$$

avec (cf. éq. 2.28)

$$\{p(\Gamma_a)\} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \{g_\theta(\Gamma_a, S)\} \quad (7.8)$$

$$\{p(\Gamma_a)\} = [\mathbf{I} + \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots] \cdot \{g_\theta(\Gamma_a, S)\} \quad (7.9)$$

En substituant maintenant 7.9 dans 7.7 on obtient

$$\begin{aligned} p(R) = & g_\theta(S, R) \\ & + \langle \dots - \int_{\Gamma_j} \partial_{n_{R'}} g_\theta(R, R') d(R' \in \Gamma_j) \dots \rangle \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots] \cdot \{g_\theta(\Gamma_a, S)\} \end{aligned} \quad (7.10)$$

ou, en décomposant g_θ en sa partie spéculaire et diffractive selon 7.2

$$\begin{aligned} p(R) = & \tilde{g}_\theta(S, R) + \delta g_\theta(S, R) \\ & + \langle \dots - \int_{\Gamma_j} \partial_{n_{R'}} (\tilde{g}_\theta(R, R') + \delta g_\theta(R, R')) d(R' \in \Gamma_j) \dots \rangle \\ & \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots] \cdot \{\tilde{g}_\theta(\Gamma_a) + \delta g_\theta(\Gamma_a)\} \end{aligned} \quad (7.11)$$

On sépare le vecteur de transfert de Γ_a vers le domaine en deux vecteurs lignes

$$\underbrace{\langle \dots - \int_{\Gamma_j} \partial_{n_{R'}} \tilde{g}_\theta(R, R') d(R' \in \Gamma_j) \dots \rangle}_{\tilde{b}_j} - \underbrace{\int_{\Gamma_j} \partial_{n_{R'}} \delta g_\theta(R, R') d(R' \in \Gamma_j) \dots}_{\delta b_j} = \tilde{\mathbf{b}}^T + \delta \mathbf{b}^T \quad (7.12)$$

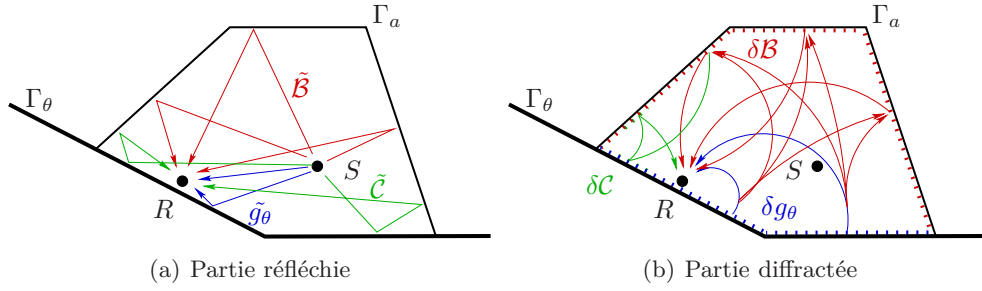


Fig. 7.3 – Représentation schématique des composantes de l'équation 7.13. Les termes surmontés d'un tilde représentent des contributions provenant d'une réflexion seule, celles précédées de la lettre δ les contributions de la diffraction sur les parois. Le terme g_θ représente la contribution des parois Γ_θ uniquement, la partie \mathcal{B} l'effet des parois Γ_a au premier ordre, et le terme \mathcal{C} les effets d'ordres supérieurs.

Ainsi, en réorganisant 7.11, on obtient

$$\begin{aligned}
 p(R) = & \tilde{g}_\theta(S, R) + \delta g_\theta(S, R) && \left. \begin{array}{l} \} g_\theta(S, R) \\ \} \tilde{\mathcal{B}} \\ \} \delta \mathcal{B} \end{array} \right\} \mathcal{B} \\
 & + \tilde{\mathbf{b}}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \{ \tilde{g}_\theta(\Gamma_a) \} \\
 & + \tilde{\mathbf{b}}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \{ \delta g_\theta(\Gamma_a) \} + \delta \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \{ \tilde{g}_\theta(\Gamma_a) \} + \delta \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \{ \delta g_\theta(\Gamma_a) \} \\
 & + \tilde{\mathbf{b}}^T \cdot [\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots] \cdot \{ \tilde{g}_\theta(\Gamma_a) \} \\
 & + \tilde{\mathbf{b}}^T \cdot [\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots] \cdot \{ \delta g_\theta(\Gamma_a) \} \\
 & + \delta \mathbf{b}^T \cdot [\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots] \cdot \{ \tilde{g}_\theta(\Gamma_a) \} \\
 & + \delta \mathbf{b}^T \cdot [\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots] \cdot \{ \delta g_\theta(\Gamma_a) \} && \left. \vphantom{\begin{array}{l} \} g_\theta(S, R) \\ \} \tilde{\mathcal{B}} \\ \} \delta \mathcal{B} \end{array}} \right\} \mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} + \delta \mathcal{C}
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

où l'on note \mathcal{B} et \mathcal{C} les produits respectifs de \mathbf{I} et de $[\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots]$ avec $g_\theta = \tilde{g}_\theta + \delta g_\theta$, composés d'une partie réfléchie et d'une partie diffractée, comme on va le voir.

On désire maintenant mettre cette expression en parallèle avec celle de la pression calculée par la méthode des sources images 7.1, en séparant la contribution des parois Γ_θ du secteur de celle des autres parois Γ_a :

$$p^{\text{rayon}}(R) = \sum_{\text{im. } \Gamma_\theta} g_\infty(S_0, R) + \sum_{\text{im. } \Gamma_a} g_\infty(S_\theta, R) + \sum_{\text{im. } \Gamma_\theta} \sum_{\text{im. } \Gamma_a} \dots + \dots \tag{7.14}$$

Premièrement, \tilde{g}_θ est défini comme la partie purement spéculaire de g_θ , soit

$$\tilde{g}_\theta(S_0, R) = \sum_{\text{im. } \Gamma_\theta} g_\infty(S_0, R) \tag{7.15}$$

Ensuite, la pression spéculaire \tilde{g}_θ tenant compte des parois Γ_θ et réfléchié par les parois

restantes Γ_a , que l'on représente

$$\sum_{\text{im. } \Gamma_a} \sum_{\text{im. } \Gamma_\theta} g_\infty(S_0, R) = \sum_{\text{im. } \Gamma_a} \tilde{g}_\theta(S_0, R) \quad (7.16)$$

peut également être comprise (via le principe de Huygens) comme la pression \tilde{g}_θ au lieu géométrique des parois Γ_a et transférée vers R via l'expression

$$- \int_{\Gamma_a} \tilde{g}_\theta(S, R') \partial_{n_{R'}} \tilde{g}_\theta(R', R) d(R' \in \Gamma_a) \quad (7.17)$$

soit sous forme matricielle

$$\sum_{\text{im. } \Gamma_a} \sum_{\text{im. } \Gamma_\theta} g_\infty(S_0, R) = \sum_{\text{im. } \Gamma_a} \tilde{g}_\theta(S_0, R) \mapsto \tilde{\mathbf{b}}^{\mathbf{T}} \cdot \{\tilde{g}_\theta(\Gamma_a)\} = \tilde{\mathcal{B}} \quad (7.18)$$

et de même si l'on considère la partie δg_θ diffractée par Γ_θ

$$\tilde{\mathbf{b}}^{\mathbf{T}} \cdot \{\delta g_\theta(\Gamma_a)\} + \delta \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \cdot \{\tilde{g}_\theta(\Gamma_a)\} + \delta \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \cdot \{\delta g_\theta(\Gamma_a)\} = \delta \mathcal{B} \quad (7.19)$$

Enfin, la contribution des produits de $[\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots]$ dans 7.13, notée \mathcal{C} , est composée d'une partie purement réfléchive $\tilde{\mathcal{C}}$ et d'une partie provenant de la diffraction sur toutes les parois de la cavité $\delta \mathcal{C}$, qu'il est impossible de séparer formellement à ce stade. Néanmoins, cette séparation nous permet finalement d'identifier la partie réfléchie de la partie diffractée dans l'équation rigoureuse de la pression en cavité 7.13 :

$$\begin{aligned} p(R) = & \underbrace{\tilde{g}_\theta(S, R)}_{\text{réfl. par } \Gamma_\theta} + \underbrace{\delta g_\theta(S, R)}_{\text{diff. par } \Gamma_\theta} + \underbrace{\tilde{\mathcal{B}}}_{\text{réfl. par } \Gamma_a} + \underbrace{\delta \mathcal{B}}_{\text{diff. par } \Gamma_\theta \text{ et refl. par } \Gamma_a} \\ & \text{entres autres} \\ & + \underbrace{\tilde{\mathcal{C}}}_{\text{réfl. par } \Gamma_\theta \cup \Gamma_a} + \underbrace{\delta \mathcal{C}}_{\text{diff. par } \Gamma_\theta \cup \Gamma_a} \end{aligned} \quad (7.20)$$

La pression obtenue selon la méthode des sources images 7.14 ne comprend que la partie réfléchie de l'expression 7.20, soit

$$\begin{aligned} p^{\text{rayon}}(R) = & \underbrace{\tilde{g}_\theta(R, S)}_{\downarrow} + \underbrace{\tilde{\mathcal{B}}}_{\downarrow} + \tilde{\mathcal{C}} \\ & \sum_{\text{im. } \Gamma_\theta} g_\infty(S_i, R) \quad \sum_{\text{im. } \Gamma_a} \sum_{\text{im. } \Gamma_\theta} g_\infty(S_i, R) \\ & \text{via 7.15} \quad \text{via 7.18} \end{aligned} \quad (7.21)$$

On dispose donc d'une formulation équivalente pour tous les termes de l'expression, excepté pour $\tilde{\mathcal{C}}$. Or, en identifiant les sources qui sont responsables du terme $\tilde{g}_\theta + \tilde{\mathcal{B}}$ (soit $S, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_{15}$ et S_{23} dans la situation de la figure 7.1), que l'on nomme ici sources $S_\theta^{\circ 2}$ (en référence au fait que l'on considère maintenant les réflexions d'ordre 2), on peut obtenir le terme manquant par calcul en soustrayant ces sources au problème résolu avec toutes les sources visibles :

$$\tilde{\mathcal{C}}(R) = p^{\text{rayon}}(R) - \sum_{S_i \in S_\theta^{\circ 2}} g_\infty(S_i, R) \quad (7.22)$$

On peut donc enfin ajouter au calcul par sources images les effets de la diffraction au premier et second ordre en remplaçant dans 7.21 \tilde{g}_θ par g_θ et $\tilde{\mathcal{B}}$ par \mathcal{B} (tous deux disponibles analytiquement) pour obtenir

$$p_{\text{amélioré}}^{\text{rayon}}(R) = g_\theta(S, R) - \int_{\Gamma_a} g_\theta(S, R') \partial_n g_\theta(R', R) d(R' \in \Gamma_a) + \tilde{\mathcal{C}} \quad (7.23)$$

En résumé, les étapes à effectuer pour ajouter au calcul spéculaire les effets de la diffraction au premier et second ordre sont

1. Identifier les sources $S_\theta^{\circ 2}$ responsables de $\tilde{g}_\theta + \tilde{\mathcal{B}}$, soit les réflexions jusqu'au second ordre.
2. Calculer $\tilde{\mathcal{C}}(R)$ via 7.22 en calculant la pression totale au point R avec un code de sources images, une fois avec toutes les sources utiles et une seconde fois en ne considérant que les sources $S_\theta^{\circ 2}$.
3. Calculer $g_\theta(S, R)$ et $\tilde{\mathcal{B}} + \delta\mathcal{B} = - \int_{\Gamma_a} g_\theta(S, R') \partial_n g_\theta(R', R) d(R' \in \Gamma_a)$ par la méthode intégrale (discretisée).
4. Additionner les résultats des étapes 2 et 3 pour obtenir une version améliorée de la pression en cavité $p_{\text{amélioré}}^{\text{rayon}}(R)$

7.2.3 Remarque sur l'utilisation d'une source de coin

Le développement présenté ci-dessus trouve une justification supplémentaire si on le compare à la proposition [30, 31] de remplacer l'ensemble des sources actives dans un secteur par une *source de coin*¹ S^c . Remplaçant toutes les sources nécessaires à rendre compte de la présence de deux parois, cette source de coin peut se substituer à la source primaire et aux parois dont elle est issue. Ainsi, le calcul des sources images pourrait être poursuivi en calculant l'image de cette nouvelle source, ceci sans plus tenir compte des deux parois dont elle représente désormais l'effet. Ceci n'est qu'une hypothèse, car on ne dispose pour l'heure d'aucun argument permettant de certifier que des images de la source S^c pourraient exister et représenter justement l'effet des autres parois.

¹Cependant, celle-ci ne tiendra alors pas compte des contributions non-spéculaires, contrairement au développement proposé ici.

Cependant, en acceptant cette hypothèse, ce raisonnement conduirait au même constat qu'à la section 7.2.1, à savoir qu'il apparaîtrait possible de séparer la contribution de certaines parois du reste des contributions dans une cavité fermée. La pression calculée par la méthode des sources images selon l'équation 7.1 pourrait alors également s'écrire

$$p^{\text{rayon}}(R) = g_{\infty}(S^c, R) + \sum_{\text{im. } \Gamma_a} g_{\infty}(S_i^c, R) + \sum_{\text{im. } \Gamma_a} \sum_{\text{im. } \Gamma_a} g_{\infty}(S_i^c, R) + \dots \quad (7.24)$$

où le terme $\sum_{\text{im. } \Gamma_a} g_{\infty}(S_i^c, R)$ représente la somme des contributions des images de la source de coin S^c par rapport aux parois $\Gamma_a = \delta\Omega \setminus \Gamma_{\theta}$ restantes lorsque l'on retire celles ayant donné naissance à S^c .

L'expression 7.24 ne tient toujours pas compte de la diffraction (elle repose sur les postulats de la réflexion spéculaire) mais ce nouveau raisonnement permet de séparer la contribution de certaines parois de la contribution des autres parois. En revanche, il vient à l'idée d'obtenir une contribution de la source de coin S^c tenant cette fois compte de la diffraction sur les parois Γ_{θ} (par exemple en optimisant sa position, comme on l'a vu au chapitre 6). Remplaçant alors la contribution de S^c par la contribution améliorée d'une source $S_{\text{opt.}}^c$, on disposerait peut être d'un moyen de tenir compte de la diffraction sur les parois Γ_{θ} et de « l'image » de cette diffraction par rapport aux autres parois (au premier ordre), à condition à nouveau que la position optimisée de S^c puisse être répercutée dans des sources images :

$$p_{\text{amélioré}}^{\text{rayon}}(R) = g_{\infty}(S_{\text{opt.}}^c, R) + \sum_{\text{im. } \Gamma_a} g_{\infty}(S_{i,\text{opt.}}^c, R) + \sum_{\text{im. } \Gamma_a} \sum_{\text{im. } \Gamma_a} g_{\infty}(S_{i,\text{opt.}}^c, R) + \dots \quad (7.25)$$

Par ailleurs, on note que la méthode des sources de coins s'apparente à l'idée défendue ici de rétablir des sources supplémentaires, invisibles selon la méthode géométrique classique. En effet, cette méthode permet de tenir compte des effets d'angles convexes (du point de vue du domaine étudié), où peuvent intervenir des effets de sources invisibles. L'étude de l'effet des angles convexes dépasse cependant le cadre du présent rapport.

7.3 Milieu absorbant

Jusqu'ici le choix de ne considérer que des parois totalement réfléchissantes ($\beta = 0$) permettait de s'affranchir des effets de la non-localité des réflexions lorsqu'il s'agissait de comparer la contribution de sources images et de termes correspondants dans le développement de la solution intégrale. La seule atténuation intervenant ici provient du rayonnement (terme en $1/\sqrt{r}$ en deux dimensions). Pour une cavité de la taille considérée ici (de l'ordre du mètre, donc de une à cinq fois la longueur d'onde considérée), cette absorption est très faible. Ainsi, un très grand nombre de rayons sont nécessaires dans un calcul par sources images pour atteindre le critère de convergence de la solution, en l'occurrence nécessitant le calcul des sources images jusqu'à un ordre supérieur

à 35. Dans de nombreux cas, cette convergence ne peut être atteinte avec une quantité raisonnable de sources images calculées, et les résultats obtenus sont tronqués. En l'absence d'absorption par les parois, il apparaît donc indispensable d'introduire une autre forme d'atténuation pour obtenir des résultats utilisables. On se reportera à la section 3.3 pour plus de détails sur la méthode des sources images et sur l'importance du critère de convergence discuté ici.

Par ailleurs, la solution en régime établi apporté par la méthode des éléments finis ne peut être considérée comme solution de référence. En effet, en l'absence d'absorption, les pics d'amplitude correspondant aux modes propres de la cavité étudiée sont théoriquement de valeur infinie.

Une autre conséquence de ce grand nombre de rayons en présence de parois réfléchissantes est que la contribution des premiers rayons, pour lesquels on ajoute la part de diffraction selon la procédure décrite plus haut, est faible par rapport à celle des rayons restants. Afin de résoudre le problème du nombre de sources images nécessaire et de faire ressortir la contribution de la diffraction, on imagine alors un milieu de propagation ayant une absorption intrinsèque.

Pour ce faire, on introduit une valeur complexe de la vitesse de propagation c . En effet, l'introduction d'une valeur complexe $c_c = c_r + ic_i$ dans l'expression de $k_c = 2\pi f/c_c$ va résulter en $k_c = k_r - ik_i$ et ainsi introduire un terme exponentiel décroissant dans la fonction de propagation

$$e^{-ik_c r} = e^{-ik_r r} \cdot e^{-k_i r} \quad (7.26)$$

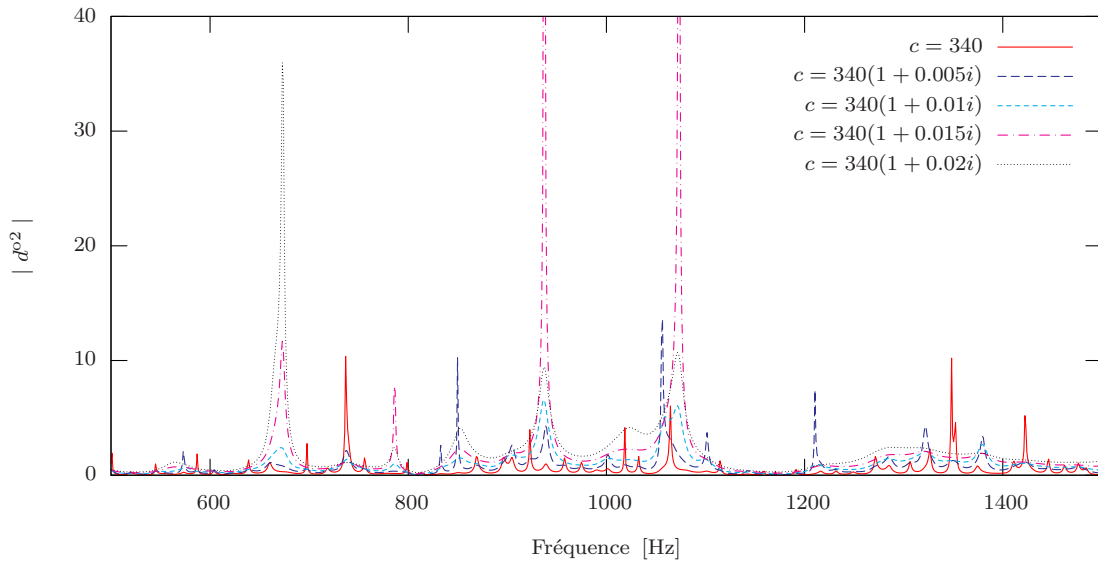
équivalant à une absorption dans le milieu de propagation. La partie imaginaire du nombre d'onde k_i présent dans le terme absorbant $e^{-k_i r}$ reste une fonction de la fréquence, l'absorption ainsi obtenue sera donc fortement dépendante de la fréquence, comme on peut le voir dans les figures présentées ci-après. La valeur de c_c à utiliser est déterminée expérimentalement en étudiant le rapport entre la partie améliorable de la pression calculée par la méthode des source images et la partie non améliorable. Dans le cas d'une amélioration au premier ordre uniquement (cf. éq. 7.5), ce rapport est

$$d^{o1}(R, f) = \left| \frac{\tilde{g}_\theta}{\tilde{\mathcal{A}}} \right| \quad (7.27)$$

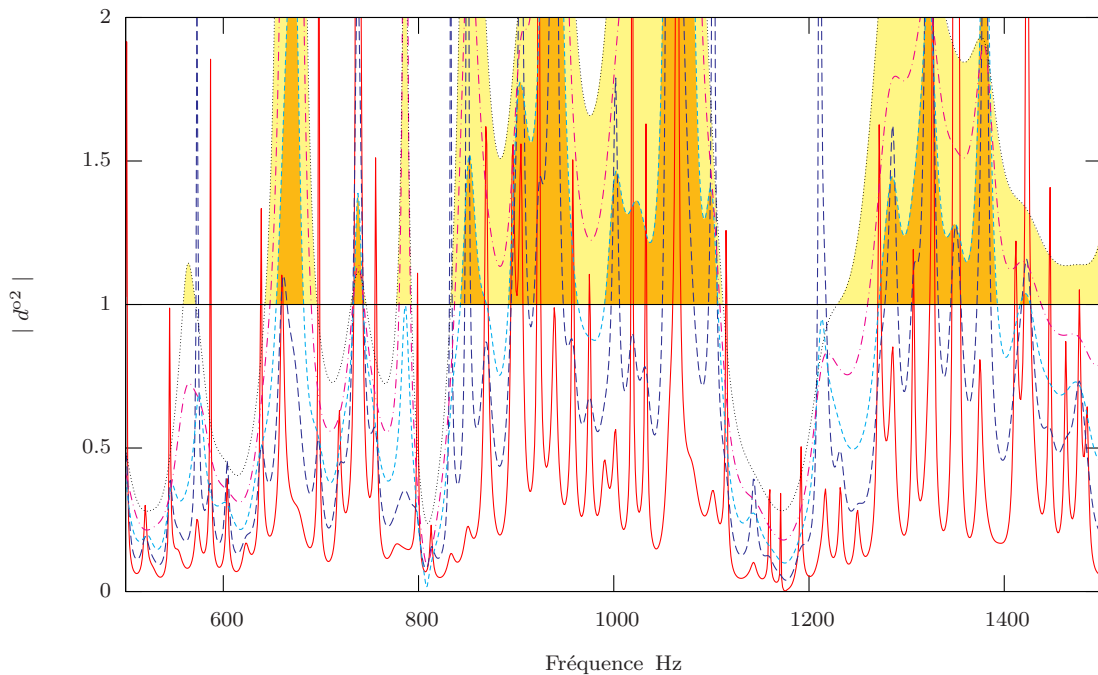
et dans le cas d'une amélioration au second ordre (cf. éq. 7.21)

$$d^{o2}(R, f) = \left| \frac{\tilde{g}_\theta + \tilde{\mathcal{B}}}{\tilde{\mathcal{C}}} \right| \quad (7.28)$$

On est intéressé à trouver quelle valeur de c utiliser pour que d^{o2} soit proche de 1 pour le plus grand nombre de fréquences possibles. Dans ce cas, en effet la partie potentiellement améliorable de la pression sera de même poids que la partie non améliorable. La figure 7.4 représente le spectre de d^{o2} dans la cavité de la figure 7.1 au point



(a) Spectre du rapport d^{o2} pour un point R (résolution : 1 Hz). Les pics interviennent en présence de noeuds de pression.



(b) Détail des valeurs hors pics.

Fig. 7.4 – Spectre du rapport de la partie améliorable selon la section 7.2.2 de la pression en cavité sur la partie non améliorable \tilde{C} . Une valeur supérieure à 1 pour une valeur précise de c indique qu'à cette fréquence particulière on peut espérer améliorer la pression. Sur la figure (b) la surface sous les courbes pour $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s (en orange) et $c = 340(1 + 0.02i)$ m/s (en jaune) a été colorée pour faire apparaître les bandes de fréquences dans lesquelles le rapport d^{o2} est constamment supérieur à 1 et dans lesquelles on peut par conséquent espérer influencer sur la valeur de pression. Pour $c = 340(1 + 0.02i)$ m/s, ces bandes sont en particulier $f \in [830, 1110]$ Hz et $f \geq 1230$ Hz

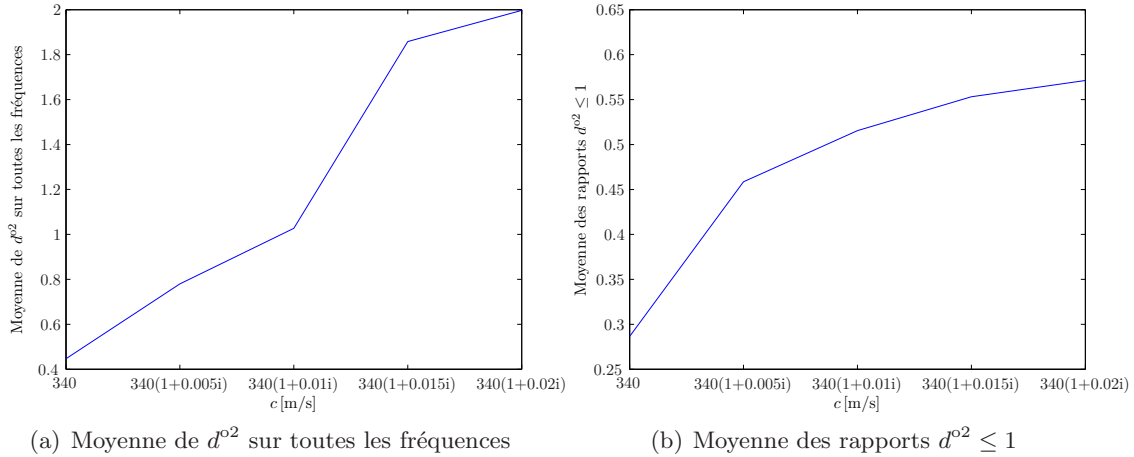


Fig. 7.5 – Moyenne du rapport d^{o2} sur toutes les fréquences de la figure 7.4. Les valeurs extrêmes (dues à la présence de noeuds de pression) faussent la moyenne.

$R = (-0.5, 0.3)$ proche de la paroi Γ_1 (voir plus loin pour une description plus précise des cas étudiés). Les pics importants pour certaines fréquences sont dûs à la présence de noeuds de pression à ces fréquences, correspondant à des modes propres dus aux zéros des termes $\tilde{\mathcal{A}}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$, et d'autant plus fortement marqués qu'il n'y a pas d'absorption sur les parois. En présence de noeuds, la division par $\tilde{\mathcal{C}}$ (de faible valeur) provoque des pics importants pour d^{o2} .

Si l'on regarde les valeurs de d^{o2} autour de 1 (figure 7.4(b)), on constate une grande disparité de valeurs quelle que soit la valeur de c choisie. Il est néanmoins possible d'identifier des bandes de fréquences favorables, ainsi on a coloré la surface sous les courbes pour $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s (en orange) et $c = 340(1 + 0.02i)$ m/s (en jaune) pour faire apparaître ces bandes. Si le rapport d^{o2} est constamment supérieur à 1 dans une bande de fréquence judicieusement choisie, on peut espérer influencer sur la valeur de pression. Par exemple, en choisissant $c = 340(1 + 0.02i)$ m/s, deux bandes de fréquences favorables apparaissent : entre 830 et 1110 Hz et à partir de 1230 Hz.

La figure 7.5 présente la valeur obtenue en établissant la moyenne du rapport d^{o2} sur l'ensemble des fréquences considérées (500 à 1500 Hz ici). On constate qu'à partir d'une valeur de $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s, la moyenne du rapport d^{o2} est supérieure ou égale à 1. Cependant, la moyenne est faussée par la présence des pics dus aux noeuds de pression, et si l'on observe la moyenne des valeurs inférieures à 1, on constate qu'à $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s, cette moyenne n'atteint que 0.5, ce qui veut dire que la partie non améliorable ($\tilde{\mathcal{C}}$ dans l'équation 7.21) reste deux fois plus importante que la partie améliorable.

En conséquence, on remarque que dans le cas d'une cavité à parois réfléchissantes, il est indispensable de considérer un milieu fortement absorbant pour avoir une chance de modifier la valeur de pression dans une bande de fréquences donnée. Cette absorption

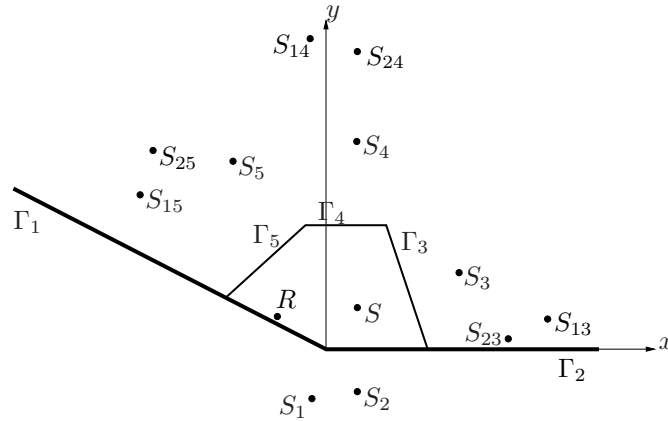


Fig. 7.6 – Situation étudiée

ne sera pas sans conséquence sur la forme du spectre ainsi obtenu. Sur la figure 7.4 on constate déjà un aplanissement lorsque l'on augmente la partie imaginaire de c que l'on retrouvera sur les courbes présentées ci-après à la section 7.4.4. Lorsque l'absorption dans le milieu devient plus importante, le jeu des interférences provoquées par les parois de la cavité (effet des réflexions tardives) s'estompe et la courbe de pression s'aplanit. Cet effet est visible en comparant le niveau de pression obtenu par éléments finis sans absorption (figure 7.7(a)) et le niveau obtenu en milieu absorbant (figure 7.7(b)).

7.4 Étude numérique

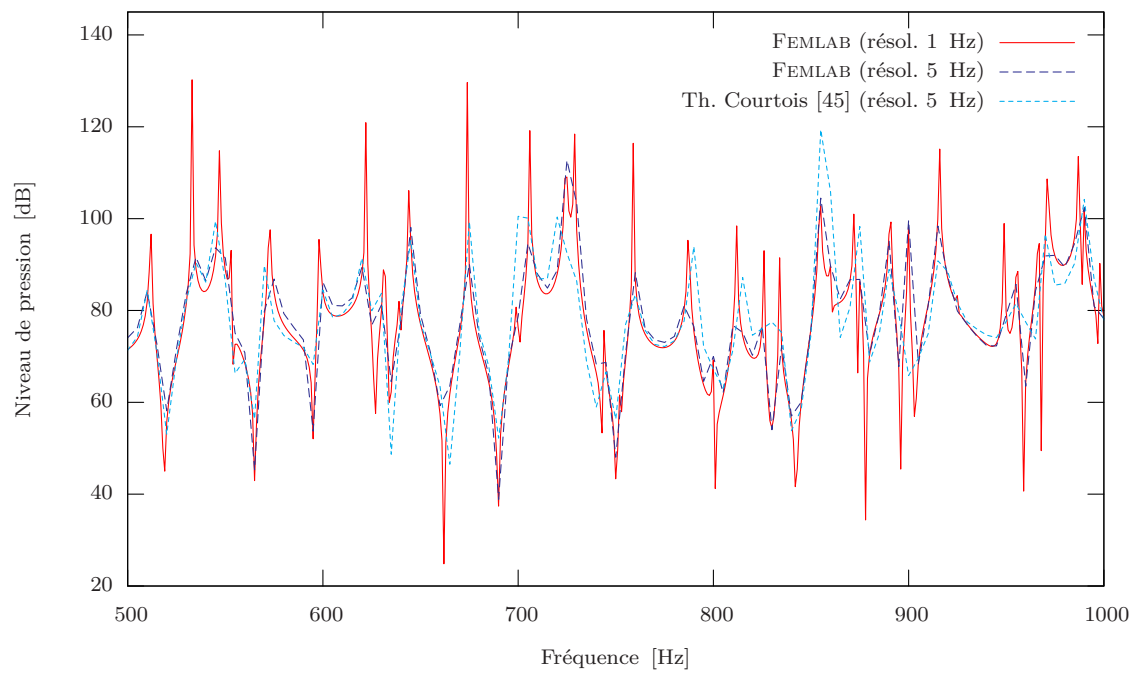
La cavité bidimensionnelle étudiée dans ce cadre est représentée sur la figure 7.6. Elle est formée de 5 parois numérotées de Γ_1 à Γ_5 dans le sens trigonométrique, dont les extrémités ont les coordonnées $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.6, 1.2)$, $(-0.2, 1.2)$ et $(-1, 0.5)$. Toutes les unités de distance sont en mètres.

On superpose à cette configuration celle du secteur ouvert, formalisée à la section 2.3 et déjà étudiée numériquement aux chapitres 5 et 6. Aux parois Γ_1 et Γ_2 de la cavité correspondent respectivement les parois (en théorie infinies) Γ_{θ_1} et Γ_{θ_2} du secteur ouvert.

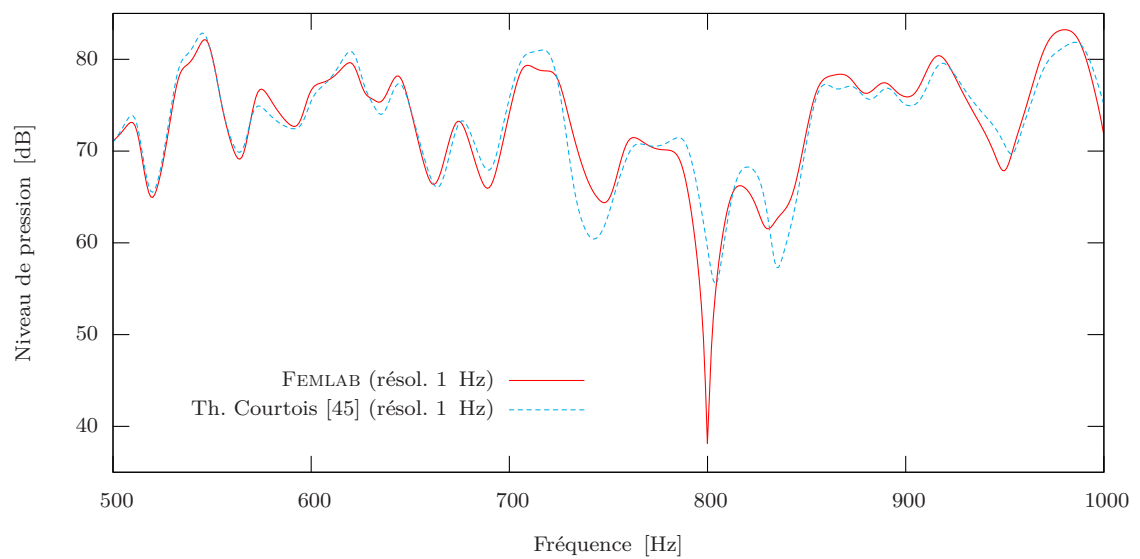
La source ponctuelle et d'amplitude unitaire S est située en $(0.3, 0.4)$ et on considère la pression à un point récepteur R en $(-0.5, 0.3)$, proche de la paroi Γ_1 . Dans cette configuration, la source S_2 est cachée du point R et la contribution de la paroi Γ_2 est donc négligée au premier ordre par la méthode classique des sources images. En revanche, S_2 donne naissance à des images d'ordre supérieur qui sont, elles, visibles (telles S_{23} et S_{24}).

7.4.1 Solution de référence en cavité

Le champ de référence utilisé ici provient d'une méthode de calcul par éléments finis. Cette méthode, qui résout exactement l'opérateur acoustique dans son ensemble, à la



(a) Sans absorption par le milieu ($c = 340$ m/s)



(b) En milieu absorbant ($c = 340(1 + 0.01i)$ m/s)

Fig. 7.7 – Comparaison des différentes solutions par éléments finis.

discrétisation près, est universellement reconnue comme approchant au mieux la solution exacte dans n'importe quelle situation, à condition d'employer un maillage suffisamment fin et de respecter les conditions aux limites. Cependant, il est délicat d'avoir foi en un programme dont on ne maîtrise pas intimement le fonctionnement. Afin d'acquérir une certaine confiance dans la validité du champ de référence, deux programmes distincts ont été utilisés : d'une part le programme commercial COMSOL (anciennement FEMLAB) et d'autre part un programme développé par Th. Courtois à des fins de validation [45].

Programme EfTC Écrit par Th. Courtois avec le langage MATLAB, ce programme est utilisé pour le calcul de la solution de référence dans ce chapitre. L'auteur, qui dispose d'une connaissance pratique de la méthode des éléments finis en l'appliquant à un cas de mécanique vibratoire lors d'un précédent travail [48], s'est contenté ici d'adapter cette méthode pour y apporter certaines modifications nécessaires à son travail : prise en compte d'une vitesse de propagation complexe (voir plus loin), et une certaine automatisation dans le processus de résolution (choix des noeuds source et récepteurs, etc.). Dans la cavité observée ici, le maillage utilisé comporte 9038 éléments triangulaires.

La très bonne concordance des résultats obtenus avec les deux méthodes (voir la figure 7.7) nous encourage à considérer ces résultats comme solution de référence dans la cavité étudiée ici. Par ailleurs, ces figures font d'ores et déjà apparaître l'importance du choix de la résolution en fréquence : une résolution trop faible ne fait pas apparaître correctement les ventres et noeuds de pression trahissant la présence des modes propres de la cavité. L'effet de l'introduction d'un milieu absorbant apparaît également (figure 7.7(b)) en atténuant les ventres et noeuds.

7.4.2 Travail préalable aux abords des angles

La constatation intuitive du chapitre 4 et les résultats obtenus dans le cas du secteur ouvert au chapitre 5 prévoient que les résultats de la méthode des sources images soient moins précis aux abords d'angles obtus que d'angles aigus. Cette dégradation est en outre encore plus grande si l'invisibilité de sources images ne rend pas l'effet au premier ordre de paroi proches. Pour s'assurer de cela, il est intéressant de comparer les résultats obtenus par la méthode des sources images à la solution de référence pour une série de points aux abords des angles de la cavité. Tous les résultats numériques présentés dans ce cadre tiennent compte d'une absorption par le milieu de propagation en considérant une vitesse de propagation complexe $c = 340(1 + 0.01i)$.

On choisit à cet effet une série de points aux abords des angles de la cavité. Ces points sont représentés sur la figure 7.8(a) par des couleurs différentes selon qu'ils se situent près d'un angle aigu (R_1 à R_5 , etc.) ou d'un angle obtus (R_6 à R_{10} , etc.). Dans certaines situations, une source image de premier ordre est invisible, ce qui conduit à la non prise en compte de la paroi correspondante au premier ordre. Ainsi, pour les situations R_6 et R_7 , la paroi Γ_1 n'est pas prise en compte au premier ordre de par l'invisibilité de la source S_1 . Pour les situations R_9 et R_{10} , la source S_2 est invisible ; pour R_{19} , il s'agit de la source S_5 .

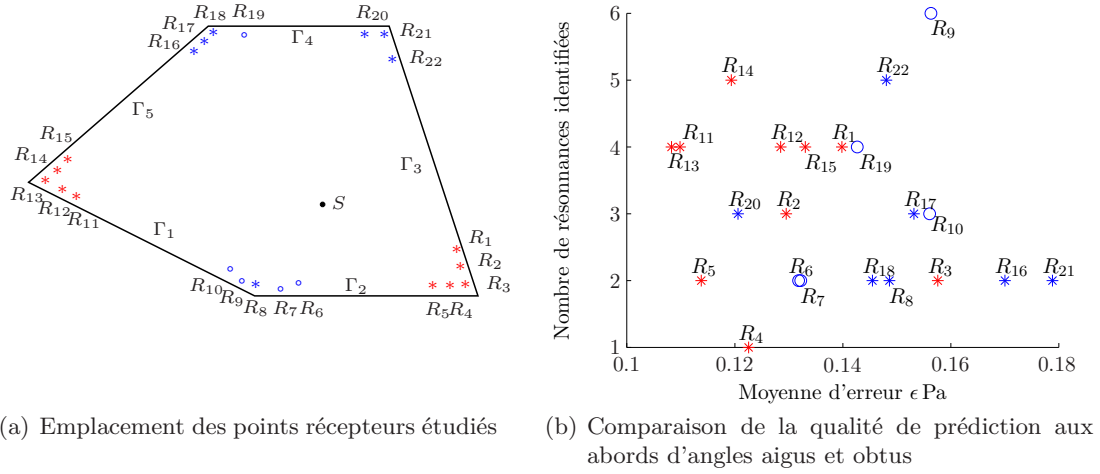


Fig. 7.8 – Représentation graphique de la qualité de prédiction. Situations considérées :

- * Points à proximité d'un angle aigu
- * Points à proximité d'un angle obtus
- o Points dans une situation d'invisibilité partielle de source.

Selon la métrique utilisée ici, les points situés sur la partie supérieure gauche de la figure en (b) représentent une bonne adéquation de la méthode des sources images avec la solution de référence. La tendance est inversée pour les points se rapprochant de la partie inférieure droite. L'identification des résonances se fait avec une tolérance de 2 Hz.

L'étude visuelle du spectre de pression obtenue à ces points ne permet pas à première vue de conclure à une nette dégradation de la qualité de prédiction aux abords d'angles obtus (voir la figure 7.9). Il apparaît donc judicieux de définir des critères objectifs de qualité. Les résonances sur les spectres obtenus sont identifiés à l'aide d'une recherche de maxima locaux (identifiés par des petits cercles sur les courbes de la figure 7.9). Le premier critère de qualité choisi ici dénombre les maxima qui sont identifiés par la méthode des sources images sur une bande de fréquence allant de 500 à 1500 Hz, avec une tolérance de 2 Hz. On espère ainsi obtenir une indication du nombre de résonances correctement identifiées dans la bande de fréquences considérée.

La seconde métrique est la moyenne sur la même bande de fréquence de la différence entre le résultat obtenu par la méthode des sources images et la solution de référence :

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{f_i=f_1}^{f_N} |p_{\text{rayon}}(f_i) - p_{\text{référence}}(f_i)| \quad (7.29)$$

avec f_i courant de $f_1 = 500$ Hz à $f_N = 1500$ Hz avec une résolution de 1 Hz (N est donc égal à 1001). On utilise les valeurs de la pression acoustique en Pascals pour ce calcul.

Un classement de la qualité de la prédiction aux points R_1 à R_{22} est présenté sous la forme d'un nuage de points sur la figure 7.8(b). En ordonnée, on représente le nombre de fréquences identifiées (première métrique, avec une tolérance de 2 Hz) et en abscisse la valeur de ϵ selon 7.29 (seconde métrique). De cette manière, un point situé dans la partie

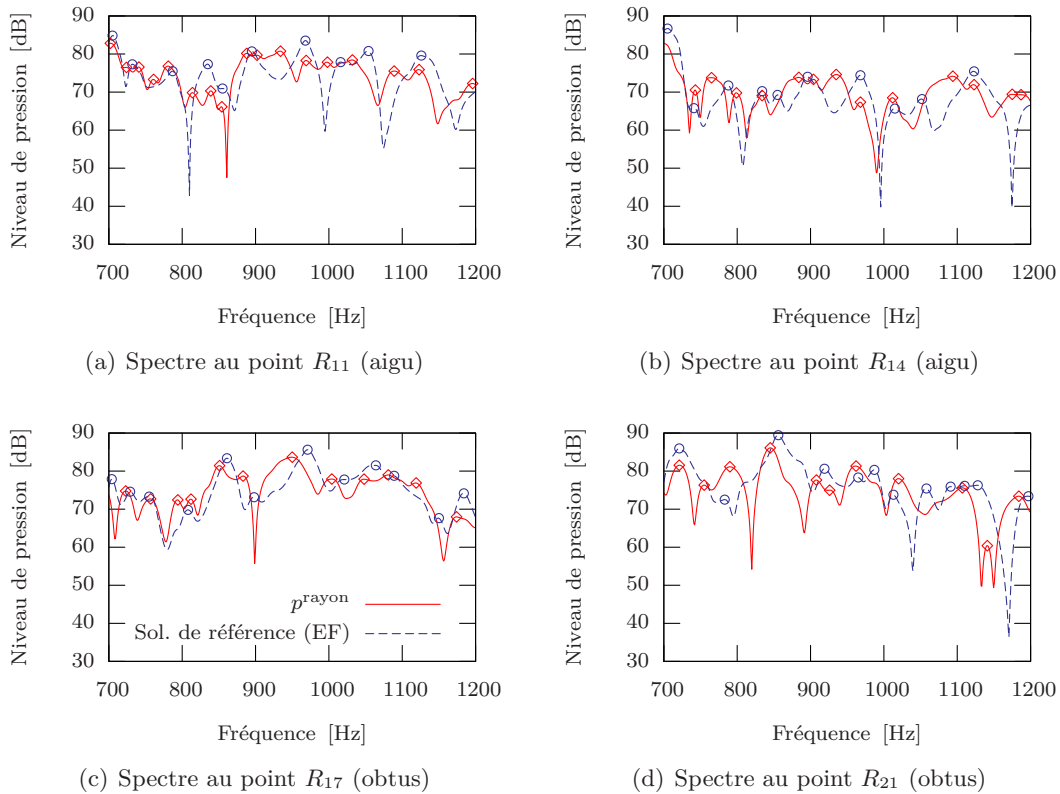


Fig. 7.9 – Qualité de la prédiction aux abords d’angles aigus et obtus : on représente ici les spectres obtenus aux points où la métrique utilisée à la figure 7.8(b) prévoit une prédiction particulièrement bonne (points R_{11} et R_{14} en angle aigu) ou mauvaise (points R_{17} et R_{21} en angle obtus). On tient ici compte d’une absorption supplémentaire par le milieu de propagation ($c = 340(1 + 0.01i)$).

supérieure gauche de la figure (plus de résonances identifiées et une erreur moyenne plus faible) représente une situation pour laquelle la méthode des sources images produit un meilleur résultat que pour les points situés dans la partie inférieure droite. Par exemple, la pression calculé au point R_{14} (proche d’un angle aigu) par la méthode des sources images identifie 5 résonances pour une erreur moyenne de 0.12 Pa. En revanche, la pression calculée au point R_{21} (proche d’un angle obtus) n’identifie que 2 résonances pour une erreur moyenne de 0.18 Pa.

Tendance observée

Les résultats présentés sur la figure 7.8(b) ne sont pas en nombre suffisant pour présenter une preuve statistique, mais ils permettent néanmoins de distinguer une certaine tendance, qui va bien dans le sens d’un appauvrissement de la qualité de prédiction aux

abords d'angles obtus. Il apparaît ainsi justifié de s'intéresser de près à une amélioration de la méthode des sources images dans ces situations particulières.

En revanche, les situations dans lesquelles des sources invisibles sont identifiées (représentées par un cercle) ne semblent pas présenter une qualité de prédiction particulièrement mauvaise, ce qui va à l'encontre des constatations intuitives, théoriques et numériques effectuées dans le cas du secteur ouvert aux chapitres précédents. Les effets observés dans le secteur ouvert laissent prévoir une dégradation de la qualité de la pression calculée par la méthode des sources images lorsque de telles sources invisibles sont en jeu. Or cet effet semble être de peu d'influence sur la pression totale en cavité. Cette constatation s'avèrera vérifiée par les autres résultats en cavités présentés ici.

Le tableau B.1, présenté en annexe, reprend par le détail les coordonnées des points étudiés, ainsi que les valeurs de comparaison utilisées pour la figure 7.8(b).

7.4.3 Ajout de la diffraction au premier ordre

Conformément aux méthodes proposées aux sections 7.2.1 et 7.2.2, on veut étudier les effets sur la pression totale au point $R = (-0.5, 0.3)$ de l'ajout de la diffraction δg_θ sur les parois Γ_1 et Γ_2 , d'abord sans tenir compte de l'action des autres parois sur la pression diffractée, puis en considérant l'effet des autres parois.

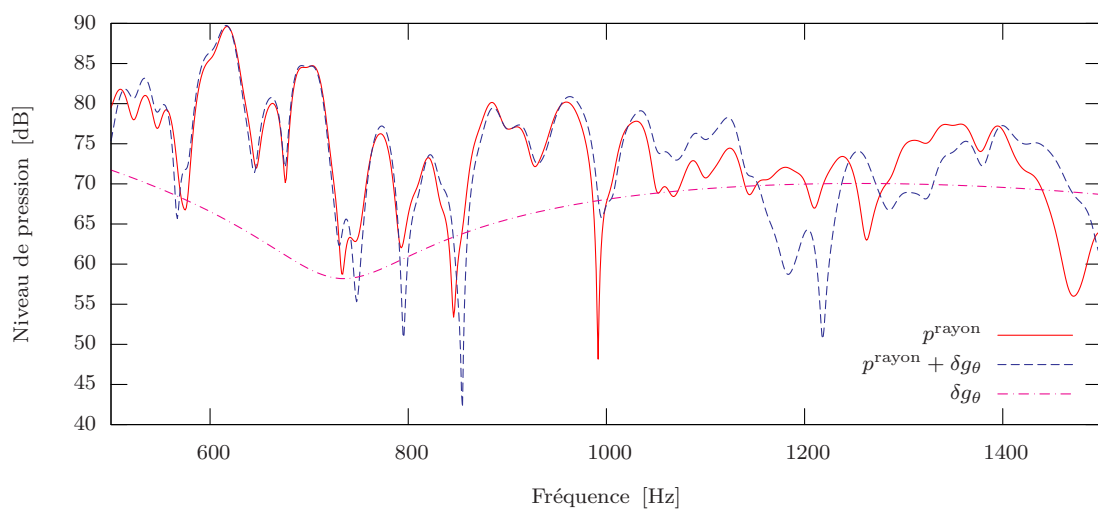
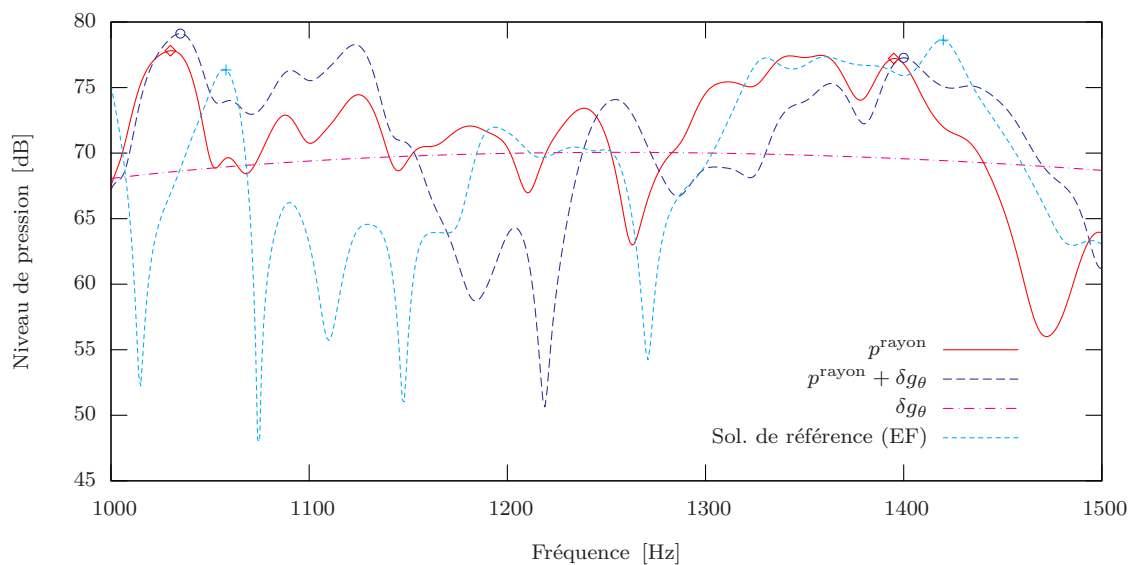
La figure 7.10 montre les effets de l'ajout de δg_θ dans la cavité étudiée, dans un milieu de propagation muni d'une absorption intrinsèque décrit par une vitesse de propagation complexe $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s. La différence observée est particulièrement flagrante pour des fréquences supérieures à 1000 Hz, une bande de fréquence reconnue, entre autres, comme favorable sur la figure 7.4(b).

Cependant, cette différence ne provoque pas d'amélioration à première vue du résultat obtenu par la méthode des sources images dans le sens d'un rapprochement global vers la solution de référence ou d'une meilleure identification des fréquences de résonance. Tout au plus peut on constater un léger décalage en fréquence, par exemple vers 1050 Hz ou vers 1400 Hz sur la figure 7.10(b). Dans l'optique d'un rapprochement vers le pic présenté par la solution de référence vers 1420 Hz (indiqué par + sur la figure), on constate une amélioration de 5 Hz entre un pic correspondant de solution par sources images (indiqué par \diamond) et la solution enrichie par le terme de diffraction (indiqué par \circ). Malgré cela, les changements constatés sur l'ensemble de la bande de fréquence étudiée ici conduisent plutôt à conclure à une modification n'allant pas dans le sens d'une amélioration représentative de la solution géométrique. Un comportement similaire peut être également observé dans d'autres situations, non représentées ici.

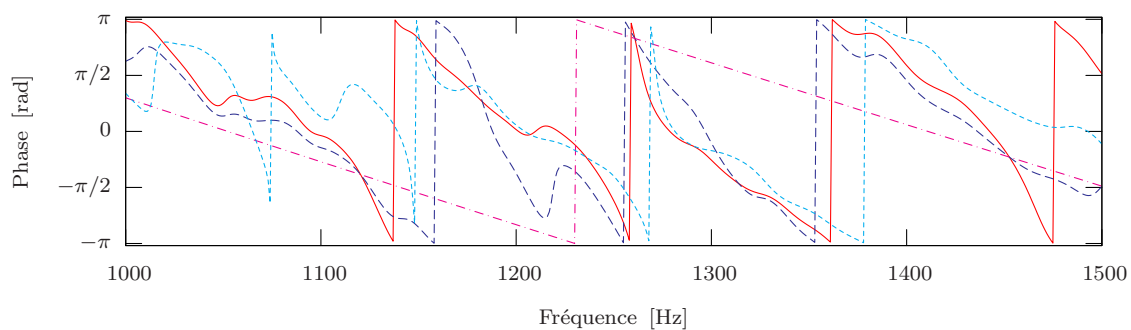
7.4.4 Prise en compte des effets des parois de la cavité sur la diffraction (diffraction au 2^e ordre)

Préalable : équivalence avec des points récepteurs-image

Les spectres de pression présentés ici sont calculés au point récepteur R_7 , situé aux abords de l'angle obtus que l'on modélise avec g_θ et identifié à la section 7.4.2 comme une

(a) Spectre au point R 

(b) Détail du spectre, avec solution de référence



(c) Phase

Fig. 7.10 – Ajout de la diffraction au 1^{er} ordre dans un milieu absorbant ($c = 340(1 + 0.01i)$ m/s). Les modifications apportées par l'ajout du terme δg_{θ} sont plus importantes, surtout à partir de 1000 Hz (résolution du calcul : 1 Hz).

situation défavorable pour le calcul par sources images (peu de résonances identifiées). Pour ces deux raisons, on s'attend à influencer favorablement les résultats de la méthode des sources images en ce point.

A ce point délicat de la démarche, il est apparu nécessaire de confirmer que le programme utilisé pour le calcul de la solution intégrale donne des résultats corrects. En effet, la dérivation et l'intégration de la fonction de Green g_θ sur chacune des parois Γ_a

$$- \int_{\Gamma_a} g_\theta(S, R') \partial_n g_\theta(R', R) d(R' \in \Gamma_a) \quad (7.30)$$

intervenant dans l'équation 7.23 de la pression que l'on veut améliorer est une opération délicate dont l'issue est cruciale.

Les calculs suivants ont donc été effectués avec deux programmes distincts, écrits par deux personnes différentes, mais prenant le même développement (celui du chapitre 2 et celui de la section 7.2.2 du présent chapitre). Ces deux programmes sont discutés avec plus de détail à la section 2.4.2. Bien que présentant de faibles différences, les deux programmes conduisent à un résultat sensiblement identique dans le cas présent. Pour les exemples suivants, le programme INVM est utilisé.

Une autre façon de s'assurer, dans une certaine marge d'erreur, que la contribution de l'effet des parois Γ_a sur la solution exacte g_θ est correctement calculée est de la comparer à celle obtenue par une construction géométrique. On cherche en effet à calculer le terme $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} + \delta\mathcal{B}$, qui s'exprime en 7.30 sous forme continue (cf. éq. 7.11 et 7.13) et qui après discrétisation prend la forme du produit vectoriel

$$\mathcal{B} = \underbrace{\langle \dots - \int_{\Gamma_j} \partial_{n_{R'}} g_\theta(R, R') d(R' \in \Gamma_a) \dots \rangle}_{\mathbf{b}^T(\Gamma_a)} \cdot \{g_\theta(\Gamma_a)\} \quad (7.31)$$

Si l'on sépare la contribution de chacune des parois formant Γ_a , on obtient l'expression

$$\mathcal{B} = \sum_{i=3}^5 \mathbf{b}^T(\Gamma_i) \cdot \{g_\theta(\Gamma_i)\} = \mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_5 \quad (7.32)$$

avec la numérotation des parois telle que présentée sur la figure 7.1. Les termes de la somme 7.32 peuvent recevoir une interprétation physique donnant une première idée de ce que l'on peut attendre de leur contribution. En effet, selon une interprétation similaire à celle utilisée à plusieurs reprises au chapitre 4 et en particulier à la section 4.3, l'intégrale

$$b_j = - \int_{\Gamma_{aj}} g_\theta(S, R') \partial_{n_{R'}} g_\theta(R', R) d(R' \in \Gamma_{aj}) \quad (7.33)$$

peut représenter la pression issue de $g_\theta(S, R')$ sur la paroi Γ_{aj} retransmise au point R . Le même terme peut se comprendre comme la contribution de l'image de la source S et de son environnement (formé des parois Γ_θ) par rapport à Γ_{aj} . Exploitant la réciprocité de la fonction de Green, ce même terme peut également être compris comme la contribution de la source S tenant compte de Γ_θ à un point R_j image de R par rapport à la paroi Γ_{aj} (ce qui revient en fait à réfléchir l'ensemble de la situation S et Γ_θ par rapport à Γ_{aj}). Cette pression transmise au point R pourrait correspondre au terme \mathcal{B}_j de l'équation 7.32 pour autant que la paroi Γ_{aj} soit infinie, ce qui n'est pas le cas. Cependant, on s'attend à ce que le rayonnement $g_\theta(S, R_j)$ de S vers R_j soit une approximation suffisante du terme \mathcal{B}_j .

La figure 7.11 compare la contribution des trois parois formant Γ_a , utilisant d'une part l'intuition physique $g_\theta(S, R_j)$ exposée ci-dessus et d'autre part le calcul « exact » de \mathcal{B}_j . Une absorption dans le milieu de propagation est prise en compte avec $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s. On constate que le calcul rejoint très bien l'intuition pour la contribution de la paroi Γ_4 , aussi bien en amplitude qu'en phase. En revanche, le parallèle n'apparaît pas aussi évident pour les contributions des parois Γ_3 et Γ_5 , malgré une cohérence en phase à partir de 1200 Hz et 800 Hz respectivement, ce qui correspond aux fréquences où intervient l'inflexion visible sur les spectres 7.11(a) et 7.11(e), laissant présupposer un changement de signe à cet endroit.

Limites logicielles

Cette différence incite à la méfiance. La bonne adéquation pour Γ_4 en utilisant deux approches différentes permet une confiance relative en ces résultats, mais pour les deux autres parois, il est difficile à ce stade d'incriminer une méthode à l'avantage d'une autre lorsqu'elles donnent des résultats divergents. Lors de l'ajout de ces contributions au problème en cavité, on aura donc le souci d'étudier séparément l'effet de chacun des termes \mathcal{B}_j .

Par ailleurs, vu la complexité des programmes mettant en oeuvre la démarche à ce stade, un problème logiciel n'est pas impossible. Le développement des équations ayant conduit à la forme que l'on étudie ici a été effectué avec soin. Une erreur dans cette démarche n'est pas impossible, mais les résultats pour Γ_4 présentés sur la figure 7.11(c) ne sauraient relever du hasard. En revanche, de nombreuses étapes logicielles sont délicates et peuvent dépendre d'une erreur de signe. Celle-ci peut avoir été introduite par inadvertance dans le programme, mais comme les résultats présentés ici se retrouvent dans deux programmes développés séparément par deux personnes différentes, cette possibilité est faible.

Force est de constater que la méthode proposée ici est trop délicate pour avoir pu être convenablement étudiée dans le laps de temps imparti à cette étude. Les résultats présentés ici représentent donc l'état actuel des connaissances, acquises au terme d'un travail mené conjointement par l'auteur et par son directeur de thèse, le Prof. V. Martin, et dont l'issue reste à trouver.

Les réserves émises ci-dessus conduisent à préférer dans la suite de l'étude de n'observer que les effets de la diffraction sur la paroi Γ_4 , avec la définition de r ayant conduit

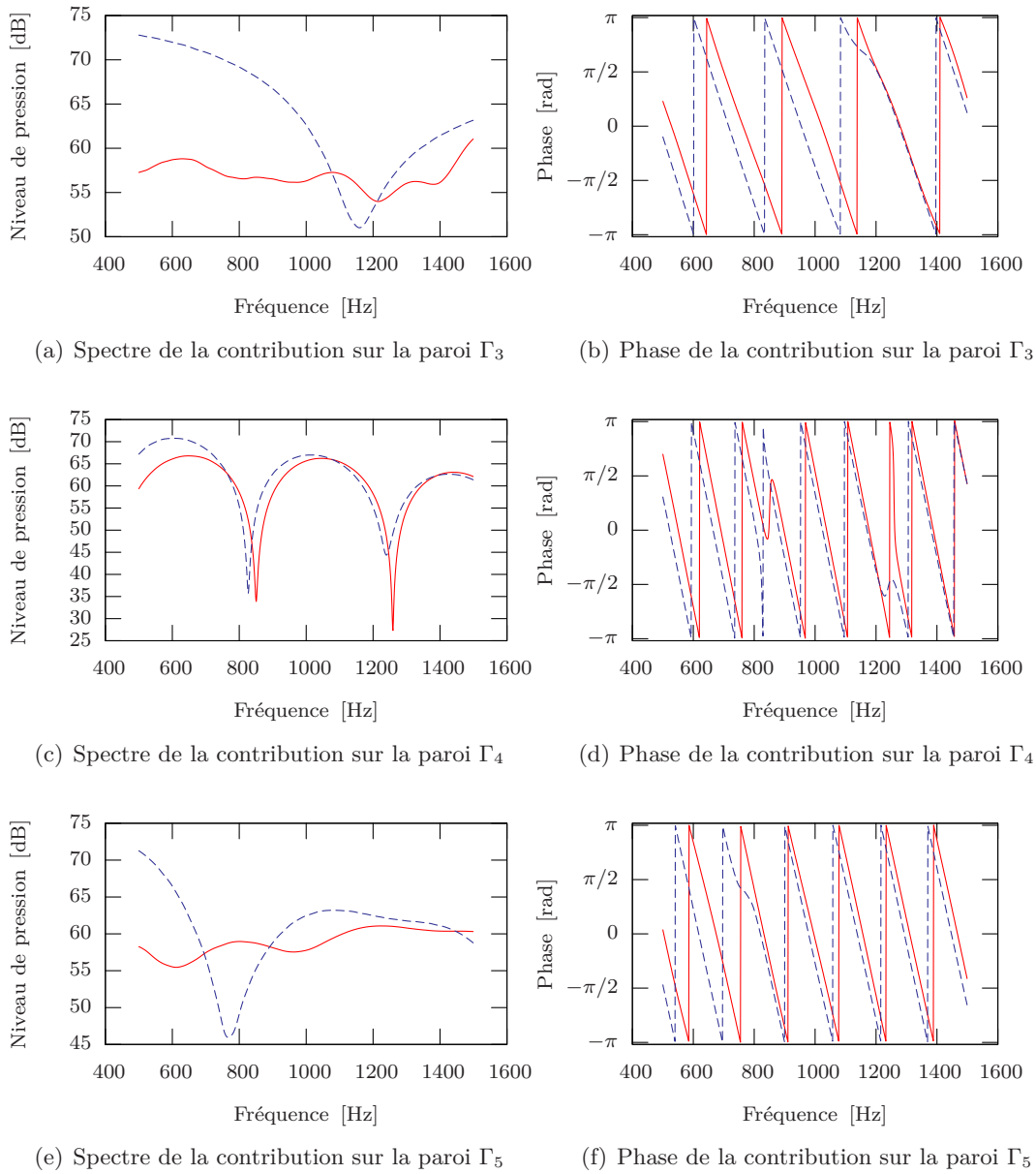


Fig. 7.11 – Contributions des parois au second ordre : comparaison des niveaux de pression obtenus au point R_7 de la figure 7.8(a) en milieu absorbant, $c = 340(1+0.01i)$ m/s, résolution 1 Hz.

— $g_\theta(S, R_j)$ (intuition physique via des récepteurs images) et
 - - \mathcal{B}_j (valeur analytique obtenue par dérivation et intégration sur les parois) .

aux résultats de la figure 7.11(c). Pour ce faire, il convient avant tout d'identifier séparément pour chaque paroi Γ_{aj} les sources $S_{\theta_j}^{o2}$ responsables des réflexions jusqu'au second ordre. En soustrayant la contribution de ces sources à la solution totale par la méthode des sources images, on obtient la partie « non maîtrisable » $\tilde{\mathcal{C}}_j$ selon l'expression 7.22. Pour obtenir la pression en cavité en tenant compte des effets au premier ordre de la paroi Γ_{aj} considérée, on ajoutera à $\tilde{\mathcal{C}}_j$ la valeur exacte $g_\theta(S, R)$ de la contribution des parois Γ_θ , ainsi que le terme \mathcal{B}_j de la contribution au premier ordre de la paroi Γ_{aj} considérée, tel que défini à la sous-section précédente.

Contribution de la paroi Γ_4

La figure 7.12(a) présente la situation étudiée ici si l'on ne considère que les parois du secteur ouvert $\Gamma_\theta \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, ainsi que la paroi supplémentaire Γ_4 dont on étudie l'effet au premier ordre (réflexion simple et transfert de la diffraction). Dans un premier temps, on identifie les sources qui interviennent dans le calcul par sources images en tenant compte de ces parois :

$$S_{\theta_4}^{o2} = [S, S_1, S_2, S_4, S_{14}, S_{24}] \quad (7.34)$$

Cette liste comprend la source S_1 qui, bien qu'invisible du point R , conduit à l'établissement de la source S_{14} qui est, elle, visible. Les sources $S_{\theta_4}^{o2}$ permettent ainsi d'obtenir la partie purement spéculaire des parois Γ_1 , Γ_2 et Γ_4 au premier ordre, ce qui correspond à l'expression $\tilde{g}_\theta + \tilde{\mathcal{B}}$ selon 7.21. En faisant la différence entre cette expression et la solution complète en cavité par sources images, on obtient la partie « non maîtrisable » $\tilde{\mathcal{C}}_4$ dans cette situation.

On substitue maintenant à $\tilde{g}_\theta + \tilde{\mathcal{B}}$ la valeur exacte de la contribution de ces trois parois au premier ordre, et ceci selon les deux méthodes présentées à la section précédente. Le calcul rigoureux de la contribution des trois parois donne $g_\theta(S, R) + \mathcal{B}$, et l'équivalence utilisant le point récepteur image R_4 donne $g_\theta(S, R) + g_\theta(S, R_4)$. La contribution spéculaire est comparée à celles obtenues par ces deux méthodes sur la figure 7.12(b).

On constate que la contribution de la paroi Γ_4 obtenue par l'équivalence physique (point récepteur image) ne change que légèrement celle des parois Γ_θ , et en particulier ne provoque pas de déphasage. En revanche, si l'on emploie la valeur \mathcal{B} obtenue analytiquement obtenue par dérivation et intégration sur Γ_4 , on constate un décalage en fréquence de l'ordre de 100 Hz, que la relative cohérence en phase de la figure 7.11(d) ne laissait pas prévoir. On observe également une diminution de l'amplitude des ventres de pression, mais qui semble s'inscrire dans l'enveloppe accompagnant une diminution exponentielle de l'amplitude vers les hautes fréquences. Cette diminution dépendante de la fréquence est une conséquence de l'atténuation de rayonnement (terme en $e^{-k_c r}$).

Le même travail effectué sur la contribution des autres parois, Γ_3 et Γ_5 , présente des résultats similaires d'influence sur la pression totale en cavité, malgré la différence plus marquée entre la valeur de \mathcal{B}_j et celle de l'équivalence par récepteur image $g_\theta(S, R_j)$. En raison des réserves évoquées plus haut, ces résultats ne sont pas présentés ici car leur contenu ne peut être vérifié. Ils sont toutefois réunis dans l'annexe B.2 pour référence.

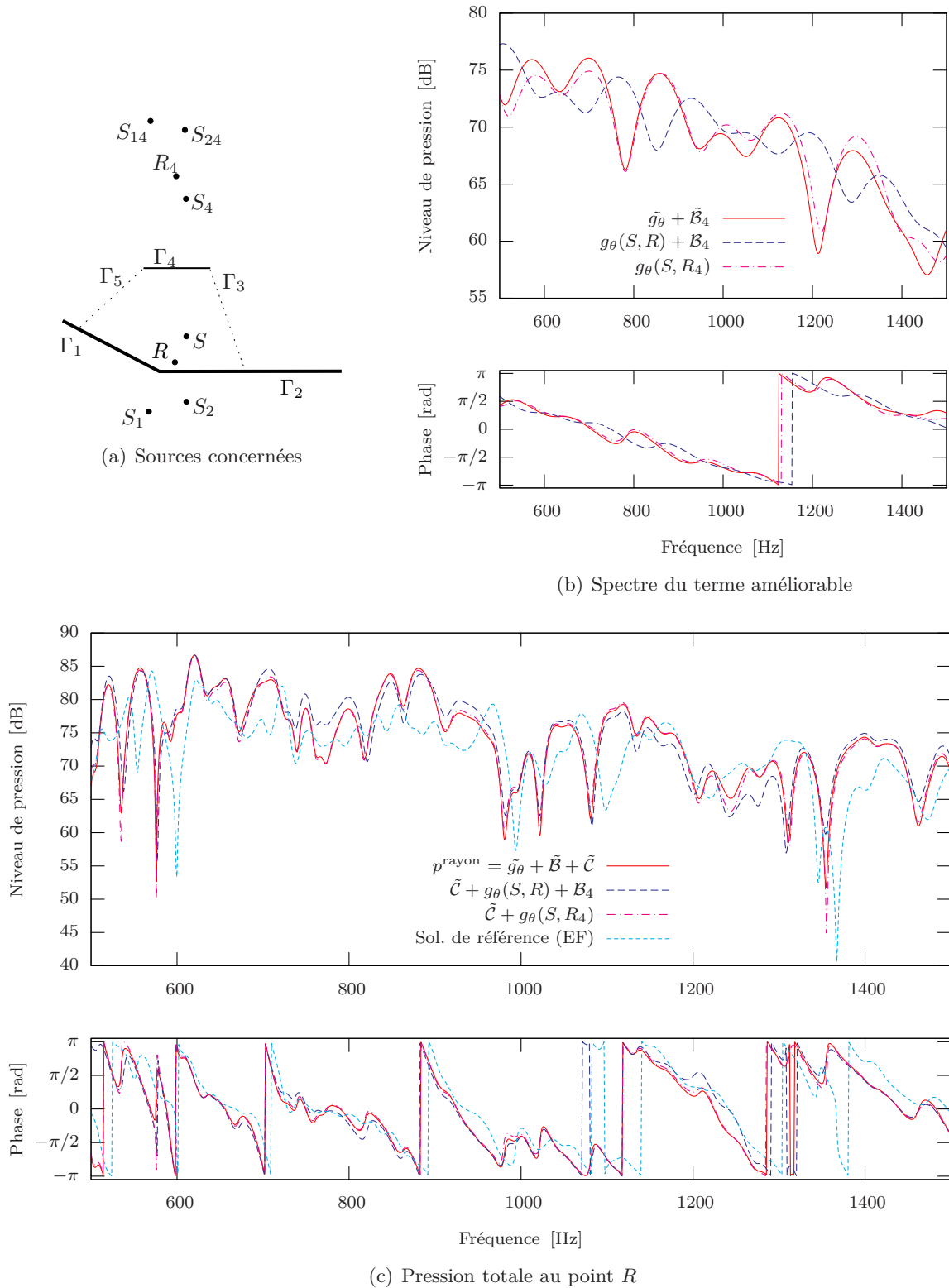


Fig. 7.12 – Correction amenée par la paroi Γ_4 (en milieu absorbant, $c = 340(1+0.01i)$ m/s, résolution 1 Hz)

- Calcul purement spéculaire (contributions des sources images)
- - Avec ajout de la diffraction sur Γ_1 et Γ_2 et l'effet de Γ_4 sur cette diffraction via l'expression analytique 7.31
- · - Avec ajout de la diffraction sur Γ_1 et Γ_2 et l'effet de Γ_4 par intuition physique (point récepteur image R_4)

7.5 Bilan

Le rétablissement de la contribution de diffraction dans des géométries simples (secteur ouvert), inspiré de la meilleure compréhension du rôle des sources images obtenue grâce au formalisme du chapitre 4, a montré des résultats prometteurs. On a alors développé une méthode permettant la transposition de ce travail au sein d'une cavité fermée. Il a alors été nécessaire d'identifier dans les contributions des nombreux rayons intervenant dans ce type de géométries ceux qu'il est possible de modifier pour tenir compte de la diffraction. Le formalisme ainsi développé est rigoureux et doit, en théorie, permettre l'intégration au sein d'un programme de calcul par sources images des contributions de diffraction apportées par deux parois, contribution calculée par méthode intégrale discrétisée.

Or, cette méthode s'est avérée plus délicate à mettre en oeuvre que prévu, et le temps imparti à ce travail n'a pas été suffisant pour effectuer toutes les vérifications permettant de conclure formellement sur l'influence de cette diffraction au sein d'une cavité fermée. Cependant, dans une perspective de travail à plus long terme que ce rapport, certaines étapes parmi les plus importantes de la démarche ont été faites.

On dispose ainsi d'un formalisme permettant l'ajout de la diffraction en cavité au premier ordre, c'est à dire sans l'influence des autres parois sur cette diffraction (éq. 7.5). Étendue au second ordre, la méthode permet également d'étudier l'influence de ces mêmes parois sur une contribution diffractée (éq. 7.13). Une équivalence spéculaire par point récepteurs images permet de s'assurer de la pertinence du calcul de ces contributions. On sait en outre comment travailler au sein d'une cavité aux parois sans absorption tout en s'affranchissant des problèmes liés aux modes propres d'une telle cavité réfléchissante et en rétablissant un rapport favorable entre les contributions de rayons potentiellement améliorables par rapport à la pression totale (cf. § 7.3).

Enfin, bien qu'ils ne permettent pas de conclure sur une réelle influence sur la position des résonances de la pression totale, les résultats montrant la contribution partielle de la diffraction en cavité font apparaître des différences non négligeables. Les problèmes techniques de mise en oeuvre de la méthode proposée ici une fois surmontés, il peut ainsi être possible d'influencer favorablement les résultats globaux.

Afin de ne pas mélanger les influences de divers paramètres, on s'est limité ici à l'étude de parois totalement réfléchissantes. Une autre démarche aurait pu consister à travailler avec des parois absorbantes, et il est tout à fait possible que les progrès réalisés quant au formalisme auraient dans cette situation présenté des améliorations plus tangibles. Intuitivement, une absorption moyenne par les parois eût sans doute permis d'envisager un moins grand nombre de sources dans la série « virtuelle » des sources images, et une action sur les premières d'entre elles aurait alors peut être eu plus d'importance. Corrélativement, si l'on décide de continuer à ne traiter que des parois réfléchissantes, il apparaît que ce n'est qu'en améliorant progressivement *tous* les termes que l'on prendrait alors pleinement conscience de la force de ce qui a été présenté ici. En conséquence, il semble que ces deux voies pourraient également contribuer à des conclusions plus générales que celles avancées ici.

SECONDE PARTIE:

Étude de la diffusion acoustique :
Problèmes dus à la réflexion spéculaire
et proposition de résolution à l'aide
d'un coefficient de réflexion identifié

Chapitre 8

Coefficient de réflexion identifié

8.1 Introduction

Dans la partie précédente, on a étudié les effets de diffraction révélés ou non par la présence ou l'absence de sources images dans la méthode des rayons, et établi en même temps un parallèle possible entre ces sources images et autant de termes d'un développement en série d'une solution analytique. Conformément aux buts qui ont été posés à la section 1.3, on se propose maintenant d'étudier les effets de la non-localité de la réflexion.

La méthode des rayons repose sur la réflexion dite spéculaire, c'est à dire que chaque front d'onde est représenté par son vecteur directeur (ou rayon) qui se réfléchit sur chaque surface en un point de mesure nulle. Cette vision ne permet pas de décrire l'influence des points voisins sur la réflexion. Dans le cas général, la réaction d'une surface à une pression acoustique incidente est de se mettre elle-même en mouvement (ou, si ce n'est le matériau de la surface lui-même, tout du moins le fluide situé dans des pores de la surface). En effet, si un mouvement du fluide perpendiculaire à la surface est possible (onde dans le fluide), alors un mouvement existe également dans le matériau formant cette surface. Ainsi, le mouvement de la surface en un point sera relié au mouvement en chacun des autres points de la surface [voir 3, p. 259 *sq.*]. Or, la caractérisation d'une surface par une impédance localisée va à l'encontre de cet état de fait et doit postuler qu'il n'y a pas de couplage entre les différentes parties de la surface réfléchissante. Cette simplification permet de décrire par réflexion spéculaire la majeure partie des effets de réflexion (principalement lorsque l'on est intéressé au champ acoustique loin des parois), mais elle ne traite pas les effets dus à la non-localité. D'expérience, l'erreur de prédiction est alors principalement importante si l'angle d'incidence de l'onde est élevé (rayon rasant).

De plus, une réflexion spéculaire, laissant de côté la géométrie même de la surface réfléchissante, ne permet pas de tenir compte des spécificités de cette dernière. En effet, si on accepte intuitivement que l'on puisse ramener la réflexion d'une onde au centre d'une surface à la situation d'un espace semi-infini (surface infinie) avec une marge d'erreur acceptable, cela ne vaut plus lorsque la réflexion a lieu sur une surface moins étendue

ou à proximité d'accidents géométriques (angle dans la paroi, saut d'impédance).

Dans les chapitres qui vont suivre, le choix s'est porté sur le développement d'une méthode permettant de remplacer le coefficient de réflexion spéculaire classiquement utilisé par un coefficient décrivant mieux la non-localité du phénomène de réflexion. Comme on le verra plus loin, cette approche fait effectivement apparaître une amélioration de la prédiction dans un espace semi-infini, voire dans une bonne partie de l'espace quart-infini. En revanche, l'amélioration ainsi obtenue reste marginale dans le cas plus complexe d'un calcul du champ acoustique dans une cavité, rendant ainsi nécessaire l'étude d'autres paramètres pouvant influencer la qualité de prédiction par la méthode des rayons.

On se propose ici de reprendre les conclusions d'un travail récemment paru [15] traitant de problèmes de couplage de cavités acoustiques. Afin d'introduire au sein de la méthode des rayons la prise en compte non localisée de la réflexion comme elle apparaît dans un calcul par méthode intégrale, ses auteurs proposent l'introduction d'un coefficient de réflexion identifié par cette dernière.

Selon ce schéma, la méthode intégrale est utilisée dans un premier temps pour résoudre le problème dans l'espace semi-infini, puis à partir de ce résultat on identifie un coefficient de réflexion, que l'on substitue alors dans la méthode des rayons au coefficient localisé habituellement utilisé, qui est fonction de l'impédance localisée et de l'angle d'incidence. Par comparaison entre le coefficient localisé et le coefficient identifié dans la méthode intégrale, on peut alors faire apparaître la différence introduite par la non-localité dans le cas de rayons à incidence rasante, et ainsi souligner la faiblesse de la réflexion spéculaire dans le cas de ces rayons particuliers.

Dans le cas qui nous intéresse ici, on se propose d'étudier cette différence au sein d'un calcul en cavité. Pour ce faire, l'identification du coefficient de réflexion doit être étendue de manière à pouvoir prendre en compte toute les situations intervenant dans un calcul en cavité. Plutôt que de résoudre chacune de ces situations par la méthode intégrale, on se propose de n'en résoudre que certaines, selon une série de *situations type* ayant comme paramètres les hauteurs respectives du point source et du point de réception considéré. Pour obtenir la valeur du coefficient de réflexion pour les situations non calculées, on procède par interpolation.

8.2 Une variante de la méthode intégrale en espace semi-infini

En préalable à la définition d'un coefficient de réflexion identifié à partir de la méthode intégrale, on présente une variante de l'application de cette méthode ayant conduit aux formulations utilisées dans la première partie de ce rapport. Le développement présenté au chapitre 2 faisait usage d'une correction de la solution en espace infini (via le noyau de Green en espace infini g_∞). On se propose ici de partir de la solution en espace semi-infini à paroi parfaitement réfléchissante, que l'on notera $g_{1/2\infty}$, la correction visant alors à ajouter les effets de l'absorption sur la paroi Γ .

On recherche la solution $p(R)$ du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta p(R) + k^2 p(R) = -\delta(R - S) & R \in \Omega \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) p(r) = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) & R \in \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \partial_n p(R) = -ik\beta p(R) & R \in \Gamma \end{cases} \quad (8.1)$$

8.2.1 Noyau de Green en espace semi-infini

Pour résoudre ce problème, on considère le noyau de Green en espace semi-infini borné par une paroi totalement réfléchissante ($\beta = 0$), défini comme solution de l'opérateur suivant

$$\begin{cases} \Delta g^{1/2\infty}(R, R') + k^2 g^{1/2\infty}(R, R') = -\delta(R - R') & R \in \Omega \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) p(r) = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) & R \in \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \partial_n g^{1/2\infty}(R, R') = 0 & R \in \Gamma \end{cases} \quad (8.2)$$

On sait disposer de la propriété suivante pour l'expression de la solution de ce problème sur un point de la paroi $Q \in \Gamma$ (cf. éq. 2.34) :

$$g^{1/2\infty}(Q, S) = 2g_\infty(Q, S) \quad Q \in \Gamma \quad (8.3)$$

que l'on a déjà interprétée comme pouvant révéler une source image S_Γ située symétriquement à S par rapport à Γ .

Pour la valeur de $g^{1/2\infty}$ dans un point R n'appartenant pas à Γ , on peut utiliser une construction similaire en s'appuyant sur le principe de Huygens, comme cela a déjà été fait à la section 4.3. Selon ce principe, en prenant en compte une paroi Γ de longueur infinie et parfaitement réfléchissante, on peut représenter l'effet de cette paroi par une source image S_Γ . En effet, les valeurs de pression sur Γ , révélant un front d'onde issu de S peuvent également être vus comme révélant une source située en S_Γ (cf. fig. 4.2). On a ainsi

$$g^{1/2\infty}(R, S) = g_\infty(R, S) + g_\infty(R, S_\Gamma) \quad R \in \Omega \quad (8.4)$$

8.2.2 Résolution intégrale

Pour tenir compte de l'absorption sur Γ , on définit une différence entre la solution sans absorption (via $g^{1/2\infty}$) et la solution recherchée p similairement à l'équation 2.11, à l'aide d'un terme

$$h(R) = \iint_{\Omega} (g^{1/2\infty}(R, R')Hp(R) - p(R')Hg^{1/2\infty}(R, R')) d(R' \in \Omega) \quad (8.5)$$

En appliquant les opérateurs dont les termes $g^{1/2\infty}$ et $p(R)$ sont solution, on obtient

$$\begin{aligned}
h(R) &= \iint_{\Omega} \left(g^{1/2\infty}(R, R') \underbrace{\mathbb{H}p(R')}_{-\delta(R'-S)} - p(R') \underbrace{\mathbb{H}g^{1/2\infty}(R, R')}_{-\delta(R-R')} \right) d(R' \in \Omega) \\
&= - \underbrace{\iint_{\Omega} g^{1/2\infty}(R, R') \delta(R' - S) d(R' \in \Omega)}_{-g^{1/2\infty}(R, S)} + \underbrace{\iint_{\Omega} p(R') \delta(R - R') d(R' \in \Omega)}_{p(R)} \quad (8.6) \\
&= -g^{1/2\infty}(R, S) + p(R)
\end{aligned}$$

Suivant le même raisonnement que celui ayant conduit à l'équation 2.15, on développe l'équation de Helmholtz dans 8.5, puis on applique la formule de Green pour obtenir finalement

$$h(R) = \oint_{\partial\Omega} (g^{1/2\infty}(R, R') \partial_n p(R') - p(R') \partial_n g^{1/2\infty}(R, R')) d(R' \in \partial\Omega) \quad (8.7)$$

En réunissant enfin les équations 8.6 et 8.7. on obtient

$$h(R) = -g^{1/2\infty}(R, S) + p(R) = \oint_{\partial\Omega} (g^{1/2\infty}(R, R') \partial_n p(R') - p(R') \partial_n g^{1/2\infty}(R, R')) d(R' \in \partial\Omega) \quad (8.8)$$

d'où l'on tire l'expression corrigée de la pression sur R

$$\begin{aligned}
p(R) &= g^{1/2\infty}(S, R) + h(R) \\
&= g^{1/2\infty}(S, R) + \oint_{\partial\Omega} (g^{1/2\infty}(R, R') \partial_n p(R') - p(R') \partial_n g^{1/2\infty}(R, R')) d(R' \in \partial\Omega) \quad (8.9)
\end{aligned}$$

Séparant maintenant la surface d'intégration $\partial\Omega$ en $\Gamma \cup \partial\Omega \setminus \Gamma$, on obtient

$$\begin{aligned}
p(R) &= g^{1/2\infty}(S, R) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \underbrace{(g^{1/2\infty}(R, R') \partial_n p(R') - p(R') \partial_n g^{1/2\infty}(R, R'))}_{\rightarrow 0} d(R' \in \partial\Omega \setminus \Gamma) \\
&\quad + \int_{\Gamma} (g^{1/2\infty}(R, R') \underbrace{\partial_n p(R')}_{=-ik\beta p(R')} - p(R') \underbrace{\partial_n g^{1/2\infty}(R, R')}_{=0}) d(R' \in \Gamma) \\
p(R) &= g^{1/2\infty}(S, R) - ik\beta \int_{\Gamma} p(R') g^{1/2\infty}(R, R') d(R' \in \Gamma) \quad (8.10)
\end{aligned}$$

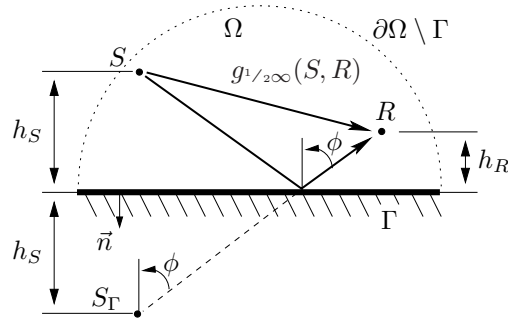


Fig. 8.1 – Situation type en espace semi-infini

Sur la paroi $\partial\Omega \setminus \Gamma$ « fermant » l'espace Ω à l'infini, la condition de radiation s'applique aux deux solutions $g^{1/2\infty}$ et p et la première intégrale disparaît. Dans la seconde intégrale, on applique la condition sur la paroi Γ telle que stipulée dans les opérateurs 8.1 et 8.2 respectivement.

Si l'on applique maintenant à l'expression ainsi obtenue l'expression du noyau de l'espace semi-infini comme une somme de deux noyaux de l'espace infini (obtenu rigoureusement sur Γ par l'éq. 8.3 et via le principe de Huygens dans l'espace par l'éq. 8.4), on obtient

$$\begin{aligned} p(R) &= g^{1/2\infty}(S, R) - ik\beta \int_{\Gamma} p(R') g^{1/2\infty}(R, R') d(R' \in \Gamma) \\ &= g_{\infty}(S, R) + g_{\infty}(S_{\Gamma}, R) - 2ik\beta \int_{\Gamma} p(R') g_{\infty}(R, R') d(R' \in \Gamma) \end{aligned} \quad (8.11)$$

8.3 Définition du coefficient identifié

La situation de référence, que l'on utilise pour identifier le coefficient de réflexion et à laquelle on ramènera chacune des réflexions lors du calcul en cavité est l'espace *semi-infini* tel que défini à la section 1.3 et que l'on rappelle ici brièvement. Ensuite, par comparaison entre le coefficient de réflexion classiquement utilisé dans la méthode des rayons et la solution intégrale en espace semi-infini, un nouveau coefficient non localisé est défini.

La figure 8.1 présente à nouveau la situation en espace semi-infini que l'on se propose d'étudier ici. On rappelle que la paroi Γ est supposée de longueur infinie. La situation relative du système point source-point de réflexion-point récepteur est totalement défini avec les trois grandeurs suivantes

- la hauteur du point source h_S
- la hauteur du point récepteur h_R
- l'angle d'incidence ϕ

Le champ acoustique mesuré au point récepteur R se compose d'une part du champ direct émis de la source S et d'autre part du champ dit réfléchi, reflétant la présence de

la paroi Γ :

$$p(R) = p_{\text{dir.}}(R) + p_{\text{réfl.}}(R) \quad (8.12)$$

Le champ direct ainsi défini représente le champ acoustique qui aurait été mesuré au point R en l'absence de Γ , soit le noyau de l'espace infini g_∞ . Reprenant la formulation de la pression en espace semi-infini 8.11, on identifie

$$p(R) = \underbrace{g_\infty(S, R)}_{p_{\text{dir.}}^{\text{exact}}(R)} + \underbrace{g_\infty(S_\Gamma, R) - 2ik\beta \int_\Gamma p(R')g_\infty(R, R')d(R' \in \Gamma)}_{p_{\text{réfl.}}^{\text{exact}}(R)} \quad (8.13)$$

Pour éviter toute confusion avec le coefficient de réflexion, habituellement noté R , on utilisera par la suite le symbole X pour indiquer le point du domaine où l'on désire obtenir la pression (point récepteur).

8.3.1 Réflexion spéculaire

Dans les méthodes d'acoustique géométrique, la théorie de la réflexion spéculaire est utilisée. Ainsi, une onde réfléchi $p_{\text{réfl.}}$ est une onde de même nature que l'onde directe (incidente) dont le vecteur de propagation est calculé selon la loi de Snell-Descartes. De plus, la variation d'amplitude et de phase encourue par l'onde réfléchi est exprimée *au point d'impact* $X_{\text{réfl.}}$ par un coefficient de réflexion dépendant du point d'impact, de la valeur d'impédance en ce point de la paroi et de l'angle d'incidence $R(X_{\text{réfl.}}, Z_r(X_{\text{réfl.}}), \phi)$. On note qu'on préfère ici utiliser l'expression d'une impédance réduite localisée au lieu d'une admittance, les deux grandeurs étant réunies par

$$\beta = \frac{1}{Z_r} \quad (8.14)$$

Le coefficient de réflexion R est défini comme la modulation à apporter au champ acoustique incident pour obtenir le champ réfléchi

$$p_{\text{réfl.}}^{\text{spéc.}}(X) = R(Z_r, \phi, X_{\text{réfl.}})p_{\text{inc.}} \quad (8.15)$$

La valeur de ce coefficient est dérivée à partir de la définition de la condition à respecter sur la surface Γ , soit l'équation d'Euler telle que stipulée dans l'opérateur 8.1 à traiter

$$\partial_n p(X) |_{X=X_{\text{réfl.}}} = -ik\beta p(X_{\text{réfl.}}) = -\frac{ik}{Z_r} p(X_{\text{réfl.}}) \quad (8.16)$$

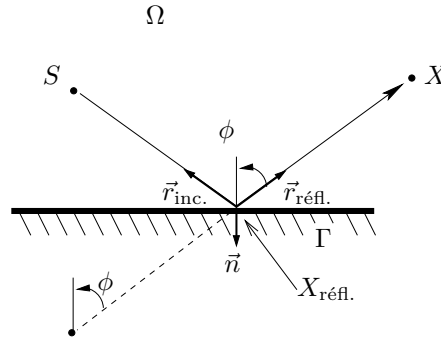


Fig. 8.2 – Réflexion spéculaire

où l'on rappelle que la dérivation sur la paroi se fait selon le vecteur \vec{n} , normal à la paroi et dirigé vers l'extérieur du domaine à traiter. La pression totale au point $X_{\text{réfl.}}$ doit vérifier cette condition localement, soit si l'on sépare la pression en une onde incidente et une onde réfléchie

$$\partial_n (p_{\text{inc.}}(X) + p_{\text{réfl.}}(X)) |_{X=X_{\text{réfl.}}} = -\frac{ik}{Z_r} (p_{\text{inc.}}(X_{\text{réfl.}}) + p_{\text{réfl.}}(X_{\text{réfl.}})) \quad (8.17)$$

Par hypothèse, la nature de l'onde acoustique prise en considération est préservée durant la réflexion. On définit ainsi

$$\begin{aligned} p_{\text{inc.}}(X) &= A_{\text{inc.}} F(kr_{\text{inc.}}) \\ p_{\text{réfl.}}(X) &= A_{\text{réfl.}} F(kr_{\text{réfl.}}) \end{aligned} \quad (8.18)$$

où $F(kr)$ représente la fonction de propagation considérée, en fonction du nombre d'onde k multiplié par une distance r dépendant du point X du domaine où l'on considère la pression. Les distances en question sont définies comme

$$\begin{aligned} r_{\text{inc.}} &= l - r \\ r_{\text{réfl.}} &= l + r \end{aligned} \quad (8.19)$$

avec $l = \|S - X_{\text{réfl.}}\|$ et $r = \|X - X_{\text{réfl.}}\|$. En considérant les vecteurs de propagation tels que définis dans la figure 8.2, on peut utiliser la forme vectorielle suivante pour les ondes incidente et réfléchie

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{inc.}} &= p_{\text{inc.}} \cdot \vec{r}_{\text{inc.}} \\ \vec{p}_{\text{réfl.}} &= -p_{\text{réfl.}} \cdot \vec{r}_{\text{réfl.}} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Selon ces définitions, l'équation d'Euler 8.17 s'écrit finalement

$$-\cos(\phi) \left[-kA_{\text{inc.}} \frac{\partial}{\partial x} F(x) + kA_{\text{réfl.}} \frac{\partial}{\partial x} F(x) \right]_{x=kl} = -\frac{ik}{Z_r} (A_{\text{inc.}} + A_{\text{réfl.}}) F(kl) \quad (8.21)$$

et enfin pour le coefficient de réflexion

$$R = \frac{Z_r \cos(\phi) \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x} F(x)}{F(x)} \right]_{x=kl} - 1}{Z_r \cos(\phi) \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x} F(x)}{F(x)} \right]_{x=kl} + 1} \quad (8.22)$$

Selon la fonction de propagation considérée, le coefficient prend l'expression

$$R_{\text{pl.}} = \frac{Z_r \cos(\phi) - 1}{Z_r \cos(\phi) + 1} \quad \text{pour une onde plane avec } F(x) = e^{-ix} \quad (8.23)$$

$$R_{\text{cyl.}} = \frac{Z_r \cos(\phi) \frac{H_1^-(kl)}{iH_0^-(kl)} - 1}{Z_r \cos(\phi) \frac{H_1^-(kl)}{iH_0^-(kl)} + 1} \quad \text{pour une onde cylindrique } F(x) = H_0^-(x) \quad (8.24)$$

En résumé, le champ réfléchi est représenté par le champ incident modulé par ce coefficient de réflexion

$$p_{\text{réfl.}}^{\text{spéc.}}(X) = R(Z_r, \phi, X_{\text{réfl.}}) \cdot p_{\text{inc.}} = R(Z_r, \phi, X_{\text{réfl.}}) \cdot g_{\infty}(S_{\Gamma}, X) \quad (8.25)$$

où, on le voit, l'onde incidente est représentée par la fonction de Green en espace infini provenant de la source image S_{Γ} pour tenir compte du trajet du rayon réfléchi. On rappelle que dans ce cas, la réaction de réflexion est *locale*, car elle ne concerne qu'un seul point de la paroi : $X_{\text{réfl.}}$.

8.3.2 Identification dans la solution intégrale

Reprenant maintenant l'expression 8.13 de la pression obtenue par la méthode intégrale, on peut définir un coefficient de réflexion non-local par identification :

$$p_{\text{réfl.}}^{\text{exact}}(X) = R_{\text{id.}}(X) p_{\text{inc.}} = R_{\text{id.}}(X) g_{\infty}(S_{\Gamma}, X) \quad (8.26)$$

On a alors

$$\begin{cases} p_{\text{réfl.}}^{\text{exact}}(X) = R_{\text{id.}}(X) g_{\infty}(S_{\Gamma}, X) & \text{par définition} \\ p_{\text{réfl.}}^{\text{exact}}(X) = g_{\infty}(S_{\Gamma}, X) - 2ik\beta \int_{\Gamma} p(X') g_{\infty}(X, X') d(X' \in \Gamma) & \text{par identification} \\ & \text{dans 8.13} \end{cases} \quad (8.27)$$

On obtient ainsi finalement l'expression suivante pour le coefficient de réflexion identifié

$$R_{\text{id.}}(X) = 1 - 2ik\beta \frac{\int_{\Gamma} p(X') g_{\infty}(X, X') d(X' \in \Gamma)}{g_{\infty}(S_{\Gamma}, X)} \quad (8.28)$$

8.3.3 Forme discrétisée

On reprend maintenant l'expression 8.10 que l'on applique à un point $Q \in \Gamma$. On peut alors y appliquer la forme rigoureuse 8.3 de la fonction de Green en espace semi-infini pour obtenir

$$p(Q) = 2g_\infty(S, Q) - 2ik\beta \int_\Gamma p(R')g_\infty(Q, R')d(R' \in \Gamma) \quad Q \in \Gamma \quad (8.29)$$

Reprenant alors la même démarche de discrétisation de la surface Γ telle qu'utilisée au chapitre 2, on obtient l'expression matricielle suivante pour un vecteur de pression sur la paroi

$$\{p(X_i)\} = 2\{g_\infty(S, X_i)\} - 2ik\beta\mathbf{A} \cdot \{p(X_i)\} \quad (8.30)$$

avec les termes de la matrice \mathbf{A}

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_j} g_\infty(X_i, R')d(R' \in \Gamma) \quad (8.31)$$

On remarquera qu'ici la matrice \mathbf{A} , provenant d'une correction de la solution en espace semi-infini, n'est pas composée des mêmes éléments qu'au chapitre 2, où elle provenait d'une correction de la solution en espace infini. De plus, la matrice \mathbf{A} telle que définie ici tient déjà compte de la propriété du potentiel de double couche 2.20 de par le facteur 2 intervenant dans la définition de la fonction de Green en espace semi-infini (cf. éq. 8.3). Par inversion matricielle, on obtient l'expression de la pression de paroi

$$\{p(X_i)\} = 2[\mathbf{I} + 2ik\beta\mathbf{A}]^{-1} \cdot \{g_\infty(S, X_i)\} \quad (8.32)$$

et enfin à la pression en tout point du domaine

$$p(X) = 2g_\infty(S, Q) + \mathbf{b}^T \cdot \{p(X_i)\} \quad X \in \Omega \quad (8.33)$$

avec

$$\mathbf{b}^T = \langle \dots - 2ik\beta \int_{\Gamma_i} g_\infty(Q, R')d(R' \in \Gamma) \dots \rangle \quad (8.34)$$

Grâce à cette formulation, il est possible d'obtenir par calcul la valeur du coefficient identifié 8.28 en utilisant l'expression ci-dessus pour obtenir la pression sur la surface $p(X')$.

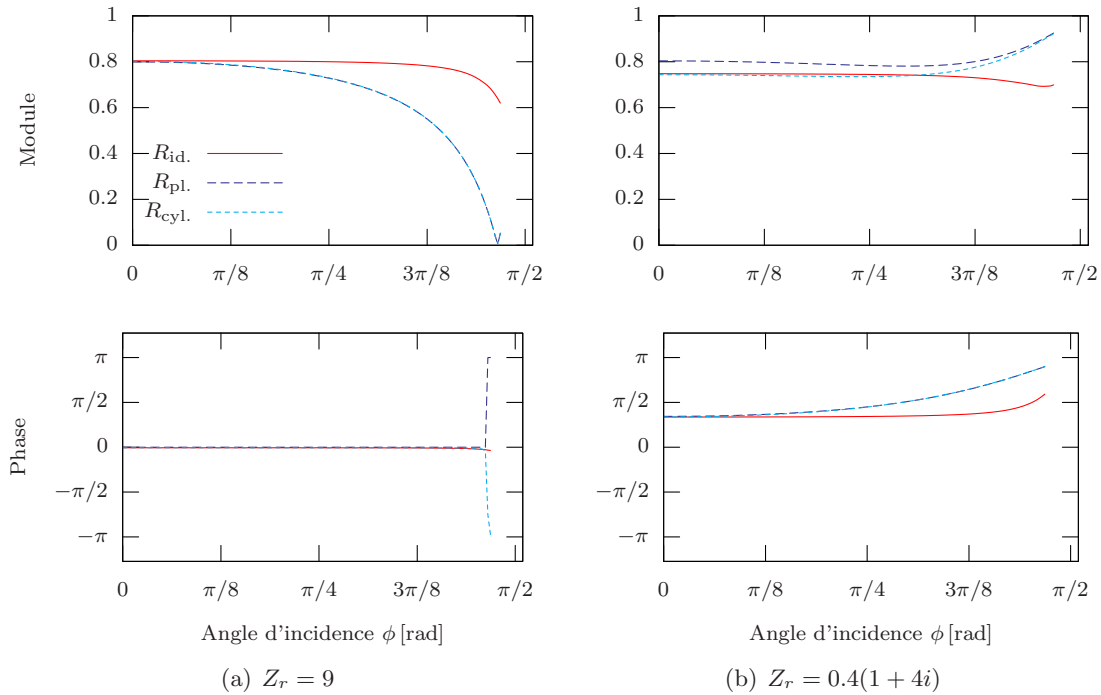


Fig. 8.3 – Différence entre un coefficient de réflexion identifié et le coefficient spéculaire : plus l'angle d'incidence est ouvert (incidence rasante), plus le coefficient spéculaire s'écarte de son équivalent identifié à partir de la solution intégrale.
Valeurs utilisées : $f = 500$ Hz, $h_S = 0.7\lambda$, $h_R = 0.2\lambda$.

8.4 Comparaison avec un coefficient spéculaire en espace semi-infini

La figure 8.3 compare les valeurs du coefficient identifié défini en 8.28 avec celles de deux coefficients spéculaires pour ondes planes 8.23 et ondes circulaires 8.24. La situation étudiée est similaire à celle représentée sur la figure 8.1 : le point source et le point récepteur sont situés à une hauteur fixe et l'on varie l'angle d'incidence ϕ en éloignant progressivement le point récepteur. La paroi Γ est considérée comme infinie. Dans ces conditions, le coefficient de réflexion identifié représente une valeur de référence, étant issu de la solution intégrale (exacte) en espace semi-infini.

On constate que les divergences les plus importantes entre ce coefficient « exact » et ses contrepoints spéculaires interviennent lorsque l'angle d'incidence est grand ($\phi \rightarrow \pi/2$), ce que l'on nomme incidence rasante. En revanche, la différence est faible lorsque le vecteur directeur de l'onde incidente se rapproche de la normale à la paroi ($\phi \rightarrow 0$). Cette différence est plus importante lorsque l'impédance réduite considérée prend une valeur complexe, ce qui est le cas dans la figure 8.3(b).

En conséquence, on s'attend à ce que l'introduction du coefficient de réflexion identifié améliore la prédiction du champ réfléchi lorsque les rayons considérés interviennent

majoritairement en incidence rasante. A l'inverse, il apparaît que les effets de non localité de la réflexion (que l'on espère corriger en utilisant un coefficient identifié) ne sont pas prépondérants pour des rayons à incidence proche de la normale.

Chapitre 9

Application à la méthode des sources images

L'idée directrice ici est d'utiliser au sein d'un code de calcul par sources images le coefficient identifié à partir de la solution intégrale en espace semi-infini tel que défini au chapitre précédent, à la place du coefficient spéculaire utilisé habituellement.

Or, le coefficient identifié n'est valable que pour une configuration précise de la position de la source et du point récepteur par rapport à la surface réfléchissante. Il est donc nécessaire de le calculer pour certaines de ces configurations, puis d'interpoler la valeur du coefficient correspondant aux configurations intermédiaires pouvant intervenir dans le calcul par sources images. Voici comment s'articule la démarche :

1. Obtention du coefficient de réflexion identifié
 - Calcul du champ sonore dans un espace semi-infini
 - Obtention de la pression sur la paroi
 - Obtention de la pression au point récepteur choisi
 - Identification du coefficient de réflexion
2. Stockage des coefficients ainsi obtenus dans une matrice multidimensionnelle
 - Choix de la granularité du stockage
3. Interpolation du coefficient
 - Choix de la méthode d'interpolation
4. Intégration au sein d'une méthode géométrique par sources images
 - Pour chaque réflexion :
 - Report à une situation équivalente en espace semi-infini
 - Récupération et interpolation du coefficient correspondant
 - Calcul du rayon

Les coefficients de réflexion identifiés précalculés sont stockés dans une matrice dont les dimensions correspondent aux nombre de variables que l'on aura considérées. Dans le cadre de ce travail, le choix est fait de faire varier les dimensions suivantes :

- la hauteur de la source h_S (par rapport à la paroi considérée)
- la hauteur du point récepteur h_R

- l'angle d'incidence ϕ , formé par rapport à la normale à la paroi par le rayon incident

La fréquence est également une dimension variable, néanmoins traitée séparément (on prévoit déjà le cas, général, d'une impédance dépendant de la fréquence) : ainsi, les coefficients précalculés sont stockés dans une matrice à trois dimensions, pouvant être différente pour chaque fréquence.

Dans la suite du texte, ces triplets de valeurs (h_S hauteur de la source, h_R hauteur du point récepteur et ϕ angle d'incidence) seront évoqués sous le terme de *configurations*. Une gamme de configurations, définie par la granularité et les valeurs minimales et maximales sera appelée *constellation* de configurations. La fréquence et la valeur d'impédance sont également différentes pour chaque constellation, et participent à leur définition. A chaque constellation correspond une matrice de coefficients différente.

9.1 Obtention du coefficient identifié

Le calcul du coefficient identifié nécessite la résolution d'un problème en espace semi-infini avec la méthode intégrale. Cette opération est faite à l'aide du programme INTG1, similaire à celui qui a déjà été utilisé dans la première partie de ce rapport et présenté à la section 2.4. Le programme utilisé est modifié de sorte à prendre comme variables d'entrée les grandeurs que l'on fera varier lors du remplissage de la matrice de coefficients, soit la hauteur respective de la source et du point récepteur, ainsi que l'angle d'incidence, auxquelles on ajoute la valeur d'impédance sur la paroi et la fréquence.

Pour réduire le temps de calcul lors de situations similaires, la matrice d'auto-influence \mathbf{A} est stockée pour chaque situation, définie ici par la hauteur de source, la fréquence et la valeur d'impédance. Le programme peut ensuite être utilisé pour obtenir le coefficient de réflexion identifié pour une situation précise. Il sera appelé par les routines de remplissage des matrices de coefficients, discutées à la section suivante.

9.2 Stockage du coefficient

Il importe maintenant de choisir pour quelles situations on calcule puis stocke une valeur du coefficient identifié. Un calcul typique par sources images dans une cavité à géométrie simple fait déjà intervenir plusieurs milliers de sources pour parvenir au critère de convergence fixé. Ce nombre important de sources est multiplié par le nombre de réflexions encourus par les rayons qu'elles décrivent pour arriver au nombre de situations pour lesquelles on nécessite un coefficient de réflexion. Il est illusoire de vouloir calculer ce coefficient par identification dans la méthode intégrale pour chacune des réflexions.

On choisit de calculer et de stocker le coefficient identifié pour une série de configurations, selon les grandeurs définies sur la figure 9.1. Une telle constellation comprend ainsi une série de situations définies par le triplet (h_S, h_R, ϕ) , variant entre des valeurs limites ($h_{S,\max}$, etc.) selon un pas déterminé ($h_{S,\text{step}}$, etc.), dont le choix est discuté ci-dessous.

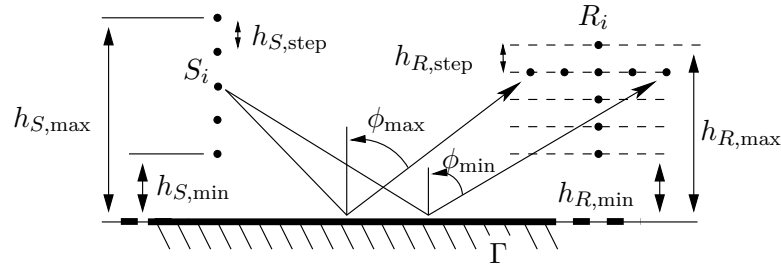


Fig. 9.1 – Grandeurs variables pour la définition des configurations

Choix des limites

Il faut donc encadrer l'espace des configurations possibles par des limites, hors desquelles on se rabattra sur un coefficient spéculaire, rapide à calculer. Il importe donc de fixer ces limites de sorte à couvrir au mieux les solutions pour lesquelles le coefficient spéculaire est le plus éloigné de la valeur identifiée. De plus, il apparaît que les rayons issues des premières réflexions soient les plus importants pour la qualité de prédiction [15], ce qui permet a priori de se limiter à calculer le coefficient de réflexion identifié pour des configurations prépondérantes dans les premières réflexions.

Le choix des distances minimales $h_{S,\min}$ et $h_{R,\min}$ dépend de plusieurs paramètres. Tout d'abord, la géométrie et la taille de la cavité étudiée, ainsi que l'ordre de réflexion¹ maximal que l'on désire calculer définissent une gamme de situations plus probables que d'autres.

Ensuite, autre paramètre important doit être pris en compte : le rapport entre la fréquence utilisée (donc la longueur d'onde) et les limitations dues à la discrétisation utilisée pour résoudre le problème selon la méthode intégrale. La taille des éléments discrétisant la paroi doit être choisie suffisamment petite par rapport à la longueur d'onde, et diminue donc en fonction de la fréquence. La longueur de la paroi prise en compte pour le calcul dépend du nombre de ces éléments, puisque le même nombre d'éléments est utilisé pour chaque fréquence. Or, cette paroi étant en théorie infinie, la solution obtenue par cette méthode s'éloigne de la solution exacte lorsque l'on se rapproche trop des extrémités de la paroi prise en compte.

Enfin, sachant que ce sont pour des rayons à incidence rasante que l'usage du coefficient identifié aura le plus de probabilités d'influencer sur le résultat global (cf. § 8.4), on désire calculer ce coefficient pour des angles d'incidence se rapprochant de $\pi/2$ pour toutes les fréquences. Or une construction géométrique simple convainc rapidement que pour obtenir des situations de ce type tout en respectant une distance suffisante avec les extrémités de la paroi (imposées par la discrétisation) requiert de rapprocher au plus les points source et récepteur utilisés. Les limites $h_{S,\min}$ et $h_{R,\min}$ doivent donc être choisies les plus petites que possible, en pratique on choisit $h_{S,\min} = h_{R,\min} = 0.01\lambda \approx 0$.

¹On rappelle ici que l'on appelle *ordre de réflexion* le nombre de réflexions successives nécessaires à un rayon donné pour rejoindre sa cible. Cet ordre correspond au nombre d'opérations de symétrie qui auront été nécessaires pour obtenir la source image dont il est issu (cf. chap. 3).

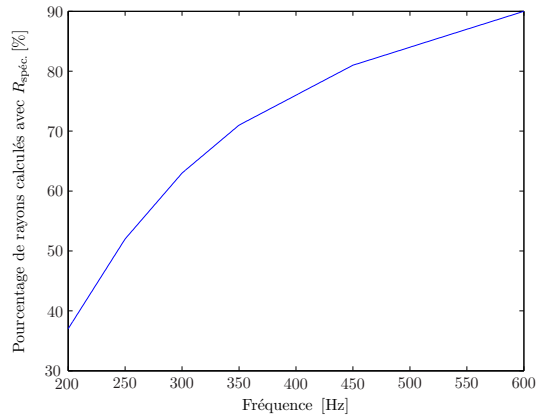


Fig. 9.2 – Pourcentage de rayons calculés par réflexion spéculaire dans un calcul en cavité, soit le pourcentage de réflexions pour lesquelles il n'est pas possible d'interpoler une valeur du coefficient de réflexion identifié. La limite supérieure de la matrice de coefficients identifiés dépendant de la fréquence, il est nécessaire de faire de plus en plus recours à la réflexion spéculaire au-delà de cette limite.

En d'autres termes, plus la fréquence augmente, moins le coefficient identifié sera à même de décrire des situations avec des points sources loin des parois (soit d'ordre supérieur) et plus on devra se rabattre sur un coefficient spéculaire pour les rayons d'ordre supérieur. Cet effet est bien visible sur la figure 9.2, qui indique le pourcentage de rayons calculés par réflexion spéculaire lors d'un calcul en cavité utilisant la méthode décrite ici, c'est à dire pour lesquels le point source est trop éloigné de la paroi pour que le coefficient identifié puisse être utilisé. En plaçant la hauteur maximale de source utilisée pour calculer la matrice des coefficients identifiés à $h_{S,\text{max}} = 2\lambda$, on constate qu'à partir de 250 Hz déjà, plus de la moitié des rayons sont calculés par réflexion spéculaire.

Cette progression est également visible si l'on considère la répartition des configurations en variant la fréquence. La figure 9.3 indique le nombre de configurations (hauteur des histogrammes) avec une hauteur de source h_S/λ , en fonction de la fréquence. La situation est la même que pour la figure 9.2, mais en ne considérant que les sources images jusqu'à l'ordre 3. Dans ce cas, les configurations présentes dans la matrice de coefficients identifiés sont calculées jusqu'à $h_S/\lambda = 2$. Au delà, les rayons sont ramenés à une situation de réflexion spéculaire. Sur la figure 9.3, on voit qu'à 200 Hz, toutes les configurations font intervenir une hauteur de source $h_S \leq 2\lambda$, donc toutes ont été calculées avec le coefficient identifié. En revanche, lorsque la fréquence augmente (vers la droite de la figure), de plus en plus de situations avec $h_S > 2\lambda$, soit ramenées à une réflexion spéculaire, apparaissent.

En accord avec les résultats présentés dans [15], il semble que les situations les plus critiques pour le coefficient spéculaire soient celles avec des dimensions de l'ordre de $1/2\lambda$ à λ . Afin de disposer d'une certaine marge de manoeuvre, une valeur de 2λ est choisie pour $h_{S,\text{max}}$ et $h_{R,\text{max}}$.

Pour toutes les configurations dépassant les limites de la matrice stockée, on substitue

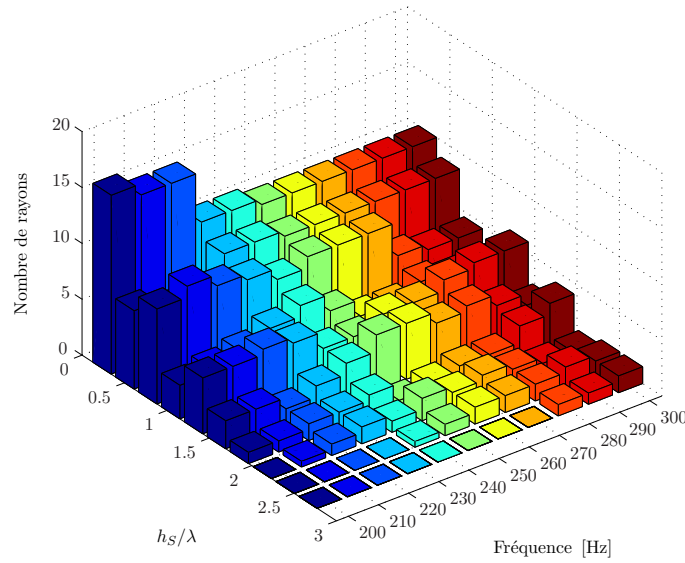


Fig. 9.3 – Histogramme de la répartition des configurations en fonction de la fréquence. Le paramètre affiché ici est la hauteur normée du point source h_S/λ .

au coefficient identifié le coefficient spéculaire pour ondes planes 8.23 (donc dépendant uniquement de l'angle d'incidence). Ce choix est justifié par le fait que ce cas de figure apparaît nécessairement dans des situations où source ou récepteur sont situés loin de la paroi. D'une part, cela signifie que l'angle d'incidence est aigu et l'on sait que c'est précisément dans cette situation que le coefficient de réflexion spéculaire est le plus précis. D'autre part, les situations de fort éloignement de la source ou du point de réception donnent naissance à de très longs rayons, dont l'influence est attendue faible.

Choix de la granularité des variables et de la méthode d'interpolation

On appellera ici *granularité* le pas de discrétisation des variables définissant les configurations pour lesquelles le coefficient identifié sera calculé, représentés sur la figure 9.1 par $h_{S,step}$ et $h_{R,step}$. Un troisième pas pour l'angle d'incidence, ϕ_{step} , n'est pas représenté sur la figure pour des raisons de clarté.

Le choix de la granularité des dimensions variables est bien entendu un facteur déterminant de la qualité de l'interpolation. L'important est de trouver un bon compromis entre la granularité et le type d'interpolation permettant le stockage de la plus faible quantité de valeurs possibles et de la plus grande rapidité de calcul à qualité égale. En choisissant un pas de $h_{S,step} = h_{R,step} = 0.2\lambda$, la fonction décrivant le coefficient de réflexion identifié est suffisamment régulière pour qu'une interpolation linéaire soit suffisante. Une interpolation cubique ou de type « spline » donne d'excellents résultats avec une granularité plus grande, mais est plus lourde en calcul et résulte en une augmentation du temps de calcul lors de l'interpolation d'un facteur cinq environ. La figure 9.4 montre une comparaison entre quelques méthodes d'interpolation pour une

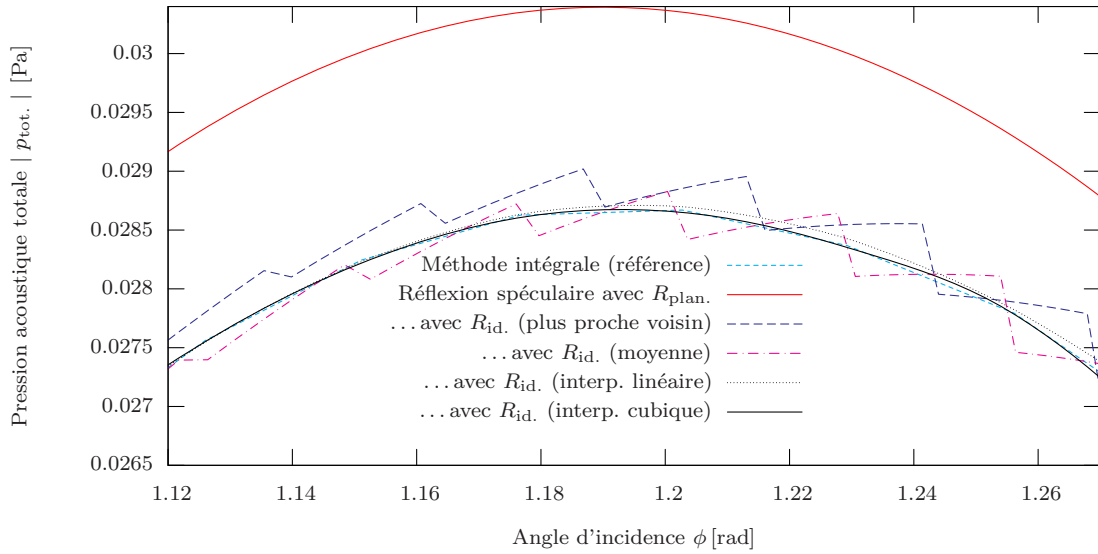


Fig. 9.4 – Comparaison entre différentes méthodes d'interpolation (détail de la fig. 10.1).

situation type. Dans cet exemple, $f = 500$ Hz, $h_S = h_R = \lambda$, et la granularité est choisie de sorte à ce que l'interpolation doive être effectuée sur les trois variables h_S , h_R et ϕ : $h_S/\lambda = h_R/\lambda = \{0.7, 1.2\}$.

9.3 Intégration au sein d'une méthode géométrique

On dispose maintenant d'un moyen d'obtenir une valeur du coefficient de réflexion pour toutes les situations en espace semi-infini reproduisant la situation de la figure 9.1, c'est à dire définie comme une configuration comprenant

1. une paroi
2. un point source situé à une hauteur h_S par rapport à la paroi
3. un point récepteur à hauteur h_R et situé de manière à ce que le rayon réfléchi issu de la source forme un angle d'incidence ϕ

Si l'on désire utiliser ces valeurs au sein d'une situation plus complexe que l'espace semi-infini, en particulier dans la cavité fermée que l'on veut étudier, il est nécessaire dans un premier temps de ramener chaque réflexion à une telle situation.

La longueur du trajet du rayon issu de la source jusqu'au point d'impact sur la paroi considérée est déjà prise en compte si l'on considère la source image donnant naissance à la réflexion correspondante. En revanche, pour prendre la longueur du trajet restant jusqu'au point récepteur, il est nécessaire d'instaurer à nouveau ici le concept de *point récepteur image*. Le calcul d'une telle position ne nécessite pas un calcul préliminaire de tous les points récepteurs image par construction géométrique, à l'inverse du calcul des sources images. En effet, chaque source est associée à un trajet particulier, renseignant

sur toutes les parois rencontrées par ce trajet. Connaissant alors chacune des parois rencontrées, il est aisé de reconstruire la position du point récepteur image pour ce rayon. La figure 9.5 résume l'opération d'identification de situation équivalente pour chaque réflexion dans une géométrie quelconque.

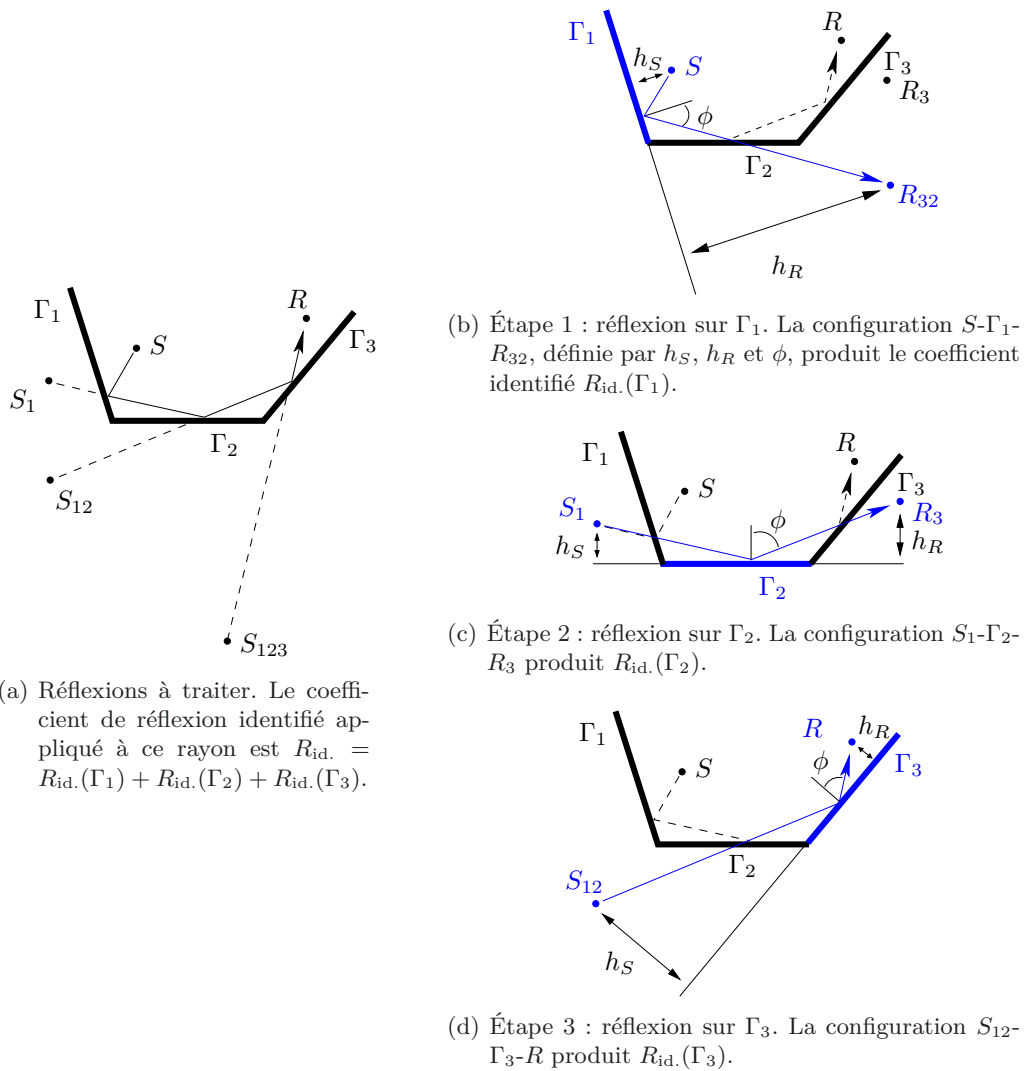


Fig. 9.5 – Identification de situations équivalentes. Pour chaque réflexion sur une paroi, on reproduit la situation correspondante dans un espace semi-infini borné par cette paroi. Similairement aux sources images, les points récepteurs images permettent d'obtenir la « hauteur » correspondant au trajet à parcourir entre eux et la paroi. Chaque configuration, définie par le triplet (h_S, h_R, ϕ) , permet d'obtenir une valeur de coefficient de réflexion identifié, qui sera utilisée pour décrire la réflexion sur les parois rencontrées dans l'établissement de la contribution du rayon étudié.

On rappelle que lorsque les valeurs de hauteur et d'angle d'incidence définissant la situation équivalente dépassent les limites de la matrice des coefficients identifiés, donc ne permettent pas d'interpoler ce dernier, un coefficient spéculaire est utilisé à la place.

Pour tester les effets du coefficient de réflexion identifié, on a utilisé deux implémentations distinctes de la méthode des rayons. La première, `SiTG` a été écrite par l'auteur pour l'occasion ; la seconde est `SiTC` utilisée dans les travaux de Th. Courtois et modifiée de sorte à pouvoir calculer les points récepteurs image et appeler la routine d'interpolation du coefficient identifié en lieu et place du coefficient spéculaire original (cf. § 3.3.2). Les deux programmes ayant montré des résultats identiques dans une configuration-type (cavité carrée), ils ont été utilisés à tour de rôle en fonction de leurs avantages et inconvénients. Pour les derniers calculs de comparaison, présentés ici, le code `SiTC` a été préféré en raison de son traitement plus efficace et plus rapide.

La figure 9.6 présente le schéma de l'algorithme d'intégration du coefficient identifié au sein de la méthode par sources images, dont le schéma complet est présenté sur la figure 3.4. La sous-routine représentée sur cette figure remplace ici la routine de calcul de rayon spéculaire de la figure 3.6.

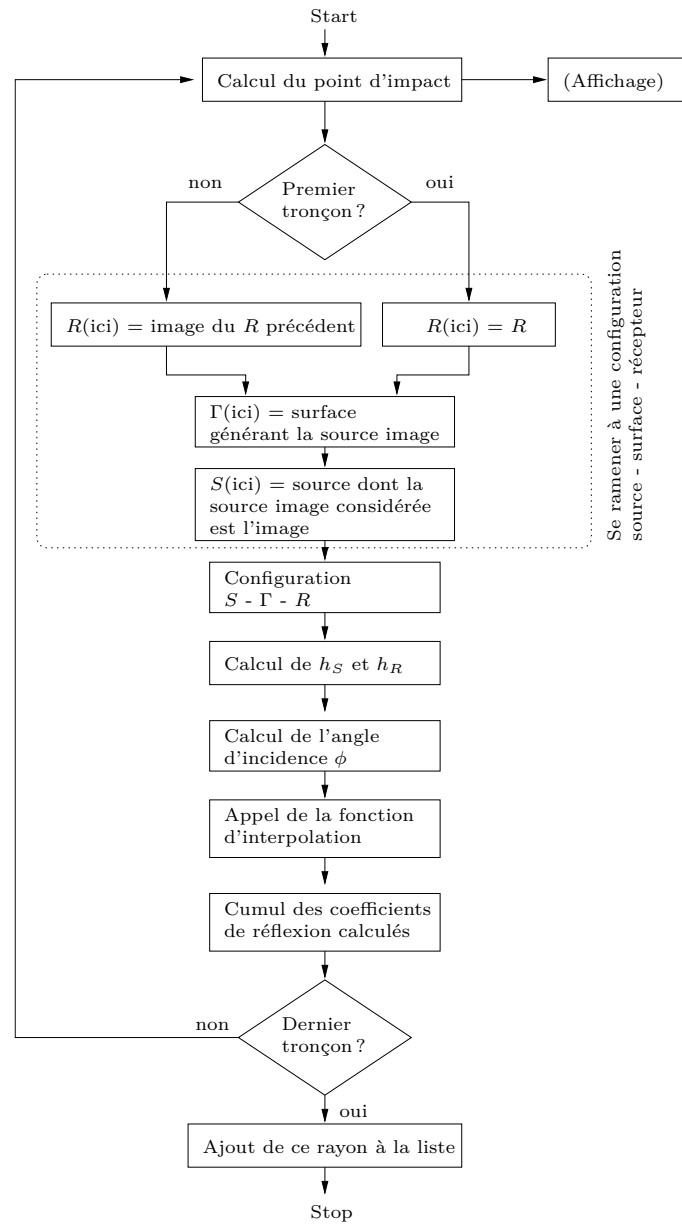


Fig. 9.6 – Sous-routine de calcul de la contribution d'un rayon

Chapitre 10

Étude numérique

Avant de le mettre en oeuvre au sein d'un programme complexe gérant une cavité bidimensionnelle arbitraire, le coefficient identifié est testé dans deux situations élémentaires dont la solution exacte est accessible par la méthode intégrale via le noyau de Green en espace infini.

La solution de référence pour les problèmes étudiés ci-après est différente en fonction de la situation. Dans le cas de l'espace semi-infini et quart-infini, il s'agit de la méthode intégrale discrétisée, déjà utilisée à plusieurs reprises dans ce travail. Dans le cas de la cavité fermée, la référence est fournie par la méthode des éléments finis, ici le programme EFTC déjà évoqué à la section 7.4.1.

10.1 Espace semi-infini : 1 rayon réfléchi

Une première étape dans la vérification de l'intérêt du coefficient identifié est de comparer les résultats obtenus par son interpolation dans la situation de l'espace semi-infini où il a été identifié. Le but ici est avant tout de s'assurer que la méthode de stockage et d'interpolation des coefficients permet de fournir des valeurs les plus proches possible des valeurs exactes (vérification). De plus, dans un espace semi-infini, dans lequel la solution spéculaire est sue exacte dans le cas d'une paroi infinie et parfaitement réfléchissante (cf. éq. 2.34), il est alors possible d'isoler les effets de la non localité de la réflexion en ajoutant une admittance non nulle sur la surface et en étudiant l'erreur encourue par les résultats de la méthode spéculaire. La figure 10.1 est représentative des résultats obtenus dans cette configuration d'espace semi-infini à paroi absorbante ($Z_r = 9$).

La qualité obtenue n'est pas surprenante, étant donné que la courbe devant être approchée (solution exacte) est précisément celle d'où est issu le coefficient identifié. La régularité de la variation du coefficient de réflexion lorsque ses paramètres varient (peu de valeurs erratiques) permet d'obtenir également de très bons résultats lorsque l'interpolation doit se faire sur trois dimensions (situation dans laquelle la configuration ne coïncide avec aucune des valeurs stockées), ce qui est le cas dans la figure 10.1.

En accord avec les conclusions tirées de l'étude du comportement du seul coefficient

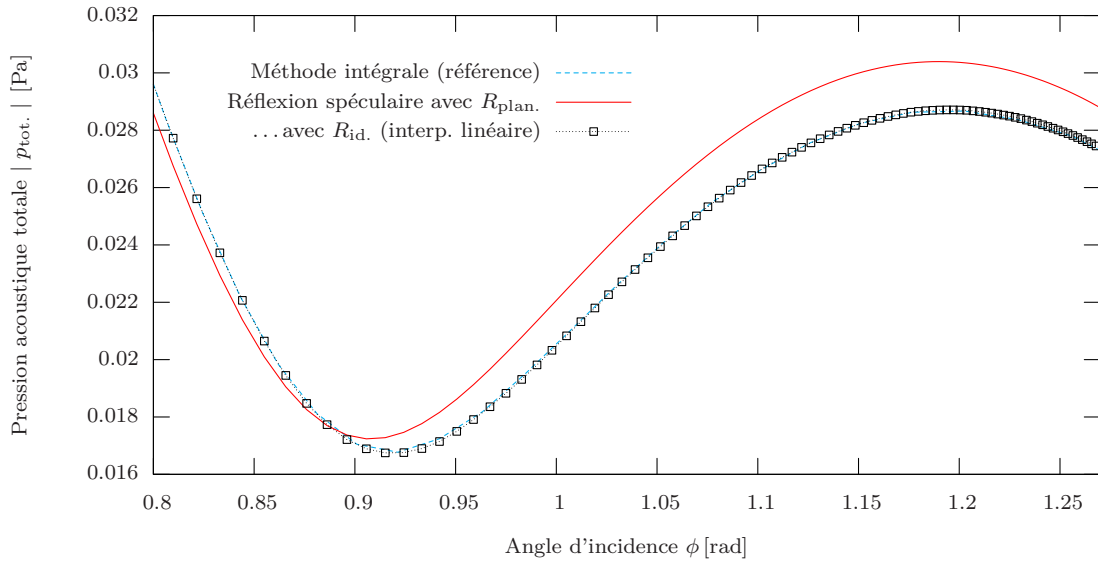


Fig. 10.1 – Utilisation du coefficient identifié en espace semi-infini, interpolé depuis la matrice de coefficient calculée selon la granularité précisée au chapitre précédent (interpolation linéaire sur les trois dimensions h_S , h_R et ϕ), $f = 500$ Hz et $Z_r = 9$.

identifié en comparaison avec un coefficient spéculaire au chapitre précédent (cf. fig. 8.3), on constate que la différence la plus sensible entre la solution spéculaire et la solution corrigée par le coefficient identifié intervient lorsque l'angle d'incidence se rapproche de $\pi/2$ (incidence rasante). Cela dit, la différence mesurée ici entre la solution exacte (et la solution obtenue en utilisant le coefficient identifié) et la solution obtenue par la méthode spéculaire est faible, de l'ordre de 6%. Ainsi donc, on ne s'attend à modifier significativement les résultats de la méthode spéculaire que si le nombre de rayons ainsi corrigés est important. La situation présentée ici est à nouveau $h_S = h_R = \lambda$.

10.2 Espace quart-infini : 2 à 3 rayons réfléchis

La seconde étape voit la mise en pratique de la méthode proposée dans une situation légèrement plus complexe, l'espace quart-infini. Cette situation introduit la finitude des parois et permet donc d'en observer l'impact, tout en restant suffisamment élémentaire pour pouvoir être traitée par équations intégrales et possédant ainsi une solution exacte de référence. La figure 10.2 présente les résultats obtenus dans diverses positions de sources et de lieux de réception.

Afin d'interpréter correctement ces résultats, on rappelle que la solution de référence utilisée ici ne prend en compte qu'un domaine limité par des parois de taille finie (ici 5 mètres) alors que la méthode des rayons considère les parois comme infinies. Au delà de cette limite, la paroi est considérée comme parfaitement réfléchissante ($Z_r = \infty$, l'intégrale de correction disparaît). Cela conduit à une légère déviation de la solution

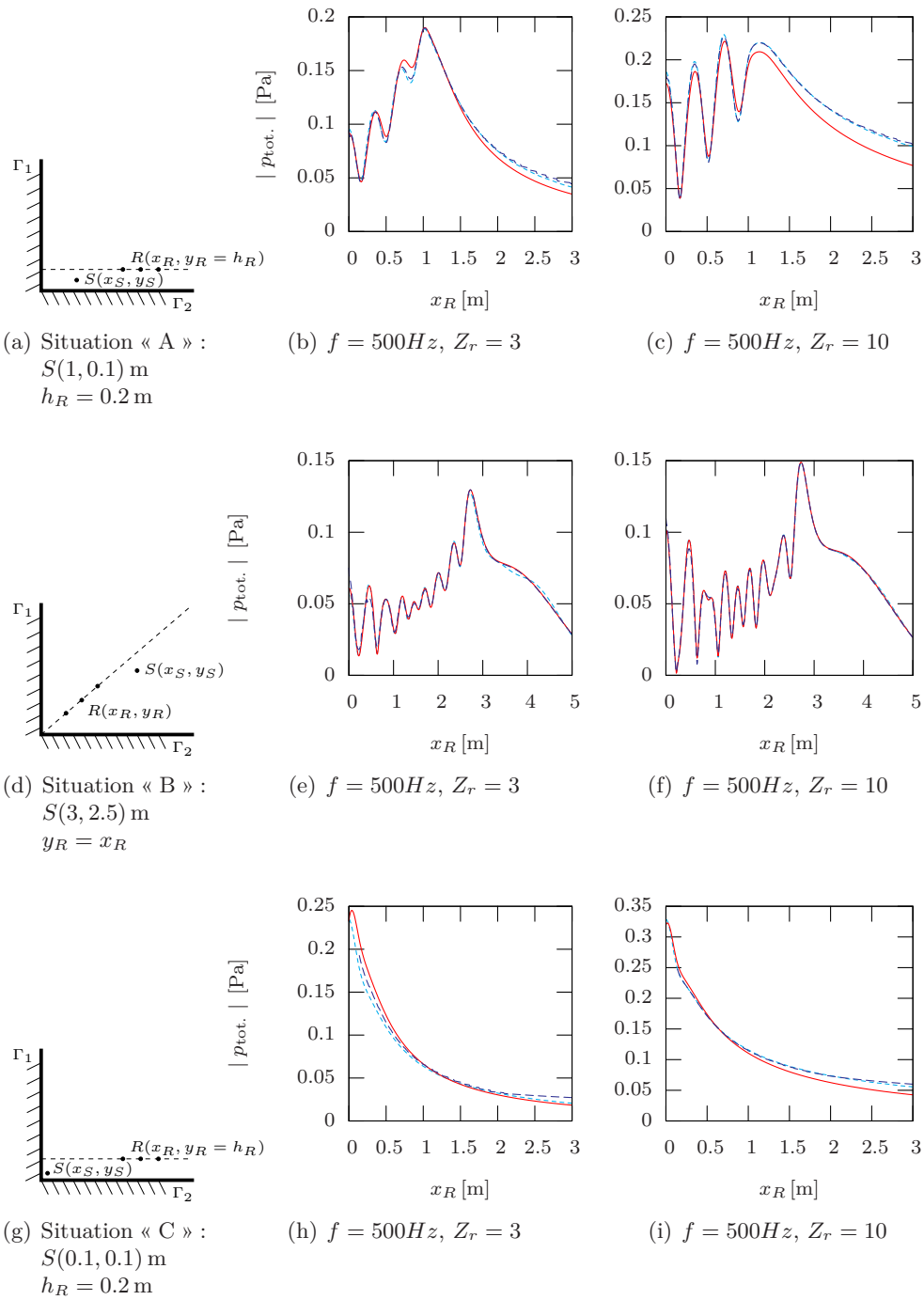


Fig. 10.2 – Utilisation du coefficient identifié en espace semi-infini : comparaison entre la pression acoustique obtenue par solution intégrale exacte et tir de rayon, ce dernier faisant usage du coefficient de réflexion spéculaire classique ainsi que du coefficient identifié interpolé. L'abscisse des figures correspond à la coordonnée x_R du point récepteur.

- Réflexion spéculaire avec R_{plan} .
- - Réflexion spéculaire avec utilisation du coefficient identifié R_{id} .
- - - Méthode intégrale (référence)

« exacte » au voisinage des extrémités des parois ($x_R > 3$ m dans les situations « A » et « C »). On s'attend à ce que cet effet soit d'autant plus important que l'absorption est grande ($Z_r = 3$), vu que le saut d'impédance à l'extrémité des parois est plus grand. Pour cette raison, on ne présente les courbes de résultats que dans les trois premiers mètres de la cavité, sauf pour la situation «B» où le point récepteur est plus éloigné des parois.

On relève les points suivants :

- Dans des situations où la plus grande contribution vient des rayons qui sont réfléchis selon un angle d'incidence rasant (situations « A » et « C »), le coefficient identifié donne de meilleurs résultats (sauf sur la figure 10.2(h) lorsque $x_R = 3$ m).
- En revanche, quand la longueur des rayons est plus importante et lorsque la plupart des rayons sont réfléchis selon un angle d'incidence aigu ($\phi < \pi/4$), le coefficient identifié n'améliore pas les résultats obtenus par le coefficient spéculaire (situation «B»).

Les situations faisant intervenir une impédance complexe conduisent à des conclusions similaires. Ces résultats, qui ont fait l'objet d'une communication [50], confortent l'intérêt du coefficient identifié dès que des rayons d'incidence rasante sont en jeu, ou tout du moins dans la plupart des situations. Il faut souligner ici que le coefficient identifié utilisé ici est issu d'une situation en espace semi-infini et que dans cette situation d'espace quart-infini, l'amélioration reste sensible. Il est donc justifié d'aller plus avant dans son exploitation.

On constate en outre à nouveau l'excellent rapprochement entre les résultats obtenus par sources images et la solution de référence dans le cas de l'espace quart-infini, déjà souligné à la fin du chapitre 5 et confirmé ici en présence d'une absorption sur les parois.

10.3 Cavité fermée : grand nombre de rayons réfléchis

Ces résultats, encourageants, auraient pu laisser penser que, malgré la faible valeur de l'amélioration observée (de l'ordre du centième, voire du dixième de la valeur de pointe), celle-ci soit plus importante lorsqu'un plus grand nombre de rayons est concerné, comme c'est le cas dans une cavité fermée. Toutefois, comme vont le montrer les calculs menés dans une telle cavité, il semble que la différence reste d'une part faible et d'autre part ne corrige pas les erreurs les plus importantes (pics de résonances décalés), qui semblent ainsi inhérentes à la méthode géométrique plus qu'au seul coefficient de réflexion.

La cavité bidimensionnelle observée est celle qui a été introduite à la section 3.4 mais dont les parois sont maintenant décrites par une impédance localisée finie. La valeur de l'impédance réduite utilisée est $Z_r = 9$ sur chacune des parois, correspondant à une absorption en incidence normale d'environ 36%. La source et le point récepteur sont des points de mesure nulle et sont situés aux coordonnées $S(0.54, 0.31)$ m, $R(-0.42, 0.57)$ m. Le second membre de l'équation de Helmholtz est d'amplitude unitaire. La solution de référence provient du programme par éléments finis EFTC développé par Th. Courtois.

Pour la comparaison des différentes méthodes, le calcul de tir de rayon prend en compte les sources images jusqu'à l'ordre 20. Vue qu'on recherche ici plus à valider une

méthode que la performance, le critère de convergence est fixé à 0 dB, soit jamais atteint, et ainsi tous les rayons sont pris en compte.

A la lumière des résultats présentés sur la figure 10.3, on constate que l'introduction du coefficient de réflexion identifié n'influence au final que très peu les résultats obtenus par réflexion spéculaire. La parfaite adéquation des deux courbes obtenues par la méthode des sources images dans les hautes fréquences s'explique par le fait que pour ces fréquences-ci, le calcul se fait presque exclusivement de manière spéculaire (cf. §9.2). L'utilisation d'une granularité différente lors du remplissage de la matrice de coefficients n'a eu qu'une influence insignifiante, et par souci de clarté, ces résultats ne sont pas présentés sur la figure 10.3.

10.4 Bilan

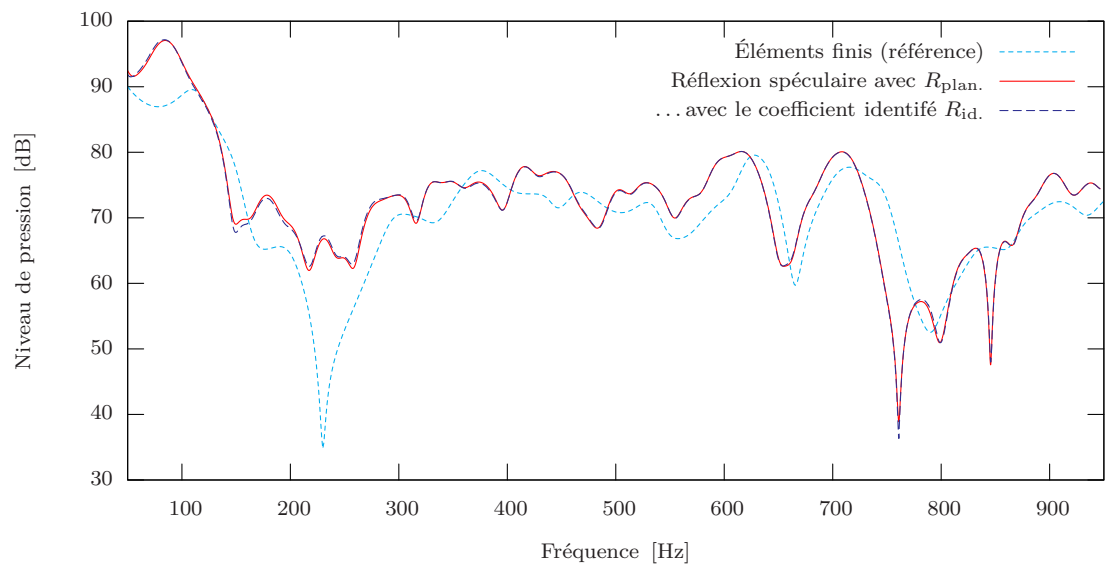
A posteriori, si l'on observe le trajet de certains rayons dans une cavité, comme par exemple sur la figure 3.8, on relève que la plupart des rayons pris en compte sont réfléchis sous un angle d'incidence aigu. Et il apparaît difficile de trouver une situation faisant entrer en jeu un grand nombre de rayons rasants tant que l'on reste concerné par des cavités de type automobile, comme ici. Ceci donne donc un sens aux résultats : l'amélioration apportée par le coefficient identifié est plus grande lorsque les rayons considérés sont rasants. Dans cette situation, vu le petit nombre de rayons rasants, une différence faible (voire nulle) est explicable. En revanche, une étude de propagation dans un guide d'ondes serait très probablement plus propice à une amélioration du résultat par cette méthode.

Mise en évidence de limites inhérentes à la méthode géométrique

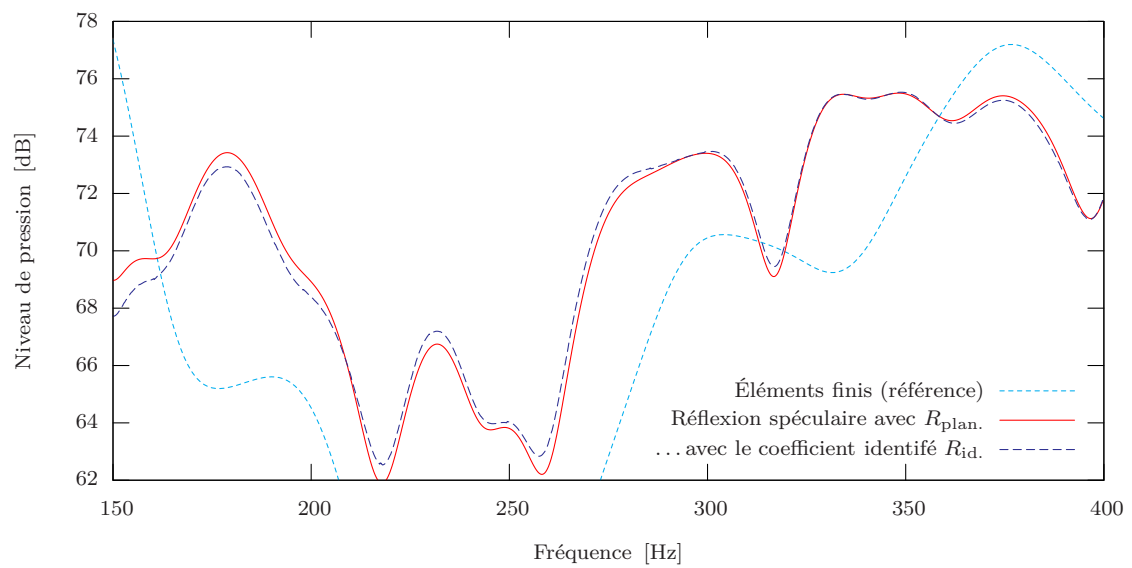
Il apparaît donc qu'une mise en oeuvre directe de la méthode proposée ne conduit pas à une amélioration notable. Cependant, son étude aura permis d'identifier certains points faibles importants de la méthode même des rayons. En effet, l'erreur présentée par la méthode des rayons reste inchangée lorsque l'on substitue le coefficient de réflexion spéculaire par un coefficient identifié à partir de la méthode intégrale alors même que les résultats hors cavité montrent que, pris réflexion par réflexion, le coefficient identifié donne de meilleurs résultats que son pendant spéculaire. Dans un calcul en cavité, les simplifications conduisant à réflexion spéculaire ne sont donc pas la principale source d'erreur.

Le coefficient de réflexion n'est qu'un des paramètres susceptibles de modifier les résultats, et non le fond de la méthode. Dans le cas étudié, les erreurs peuvent s'expliquer soit par l'influence d'un autre paramètre, soit par la méthode elle-même qui, on l'a vu durant la première partie de ce travail, repose sur un certain nombre de simplifications que l'on sait mettre en faute (sources invisibles).

Concernant la prise en compte des rayons rasants, on peut également relever que le simple critère de l'angle d'incidence ne suffit pas à les détecter. Si l'on considère en effet le rayon représenté sur la figure 10.4, on constate que celui-ci a le comportement



(a) Spectre global



(b) Détail

Fig. 10.3 – Comparaison des résultats de la méthode des sources images utilisant un coefficient de réflexion spéculaire et en utilisant le coefficient de réflexion identifié (résolution fréquentielle 1 Hz).

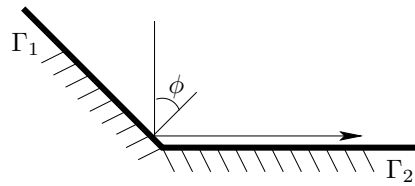


Fig. 10.4 – Rayon rasant caché : le rayon représenté sur cette figure est réfléchi sur la surface Γ_1 selon un angle d'incidence aigu. Cependant, il poursuit sa course quasiment parallèlement à la surface Γ_2 , adoptant un comportement de rayon rasant sans être identifié comme tel.

d'un rayon rasant. Cependant, il n'est pas identifié comme tel, puisqu'il est issu d'une réflexion sur la surface Γ_2 , ceci sous un angle d'incidence ϕ considéré comme aigu ! Un tel rayon passe ainsi inaperçu.

Cet exemple rappelle que la question de l'inter-influence des différentes parois reste inabordable. Celle-ci devrait idéalement apparaître dans la fonction de Green utilisée comme fonction de propagation pour la méthode des rayons, ce qui n'est pas le cas jusqu'à présent vu que la fonction utilisée repose sur un noyau de Green en espace infini. L'influence de la proximité de parois n'est ainsi pas prise en compte : dans la figure 10.4, l'onde acoustique portée par le rayon représenté ne subit pas les effets de la paroi Γ_2 , pourtant proche.

Ouvertures

Il apparaît en fin de parcours qu'il serait intéressant de mener une campagne de calcul en choisissant un pas de remplissage de la matrice de coefficients suffisamment important pour offrir un plus grand pourcentage de rayons traités par coefficient identifié dans la gamme de fréquences 600 à 700 Hz. En effet, dans cette gamme, on constate sur la figure 10.3 que les pics de résonance sont mal suivis par la méthode de tir de rayons classique. Peut-être qu'une amélioration serait ici plus sensible.

La méthode proposée ici d'identification de situations équivalentes en espace semi-infini et d'interpolation de valeurs pré-calculées pourrait en outre être utilisée pour tenir compte d'autres valeurs de coefficient de réflexion que celles identifiées depuis une méthode intégrale. Entre autres, on peut imaginer intégrer de cette manière un coefficient mesuré sur un matériau absorbant, dans différentes configurations-type, puis interpolé pour être utilisé au sein d'une méthode par rayons.

Cependant, à ce stade du travail on sait qu'il faut différencier les effets de certains paramètres de la méthode des sources images et ceux de la méthode elle-même. En effet, en mettant en question un de ses paramètres, à savoir le type de réflexion utilisé, on a pris pour acquise la véracité de la méthode, que l'on sait inexacte en certains points au terme de la première partie de ce travail. Or, traitant ici du seul paramètre du coefficient de réflexion de façon assez rigoureuse, il apparaît – évidemment a posteriori – que son influence, si elle existe bien, n'apparaît pas jusqu'à présent comme essentielle dans l'état actuel de nos connaissances et dans la configuration que l'on étudie. Cette dernière étant unique, la conclusion que l'on peut tirer n'est pas directement généralisable.

Chapitre 11

Synthèse

Le travail présenté dans ce rapport s'est concentré sur deux aspects des méthodes d'acoustique géométrique pouvant influencer la qualité de prédiction pour des problèmes en cavité. Au terme de l'étude, il apparaît difficile de désigner l'un ou l'autre de ces aspects comme étant prépondérant. Au contraire, leur influence, bien qu'identifiable dans des situations simples (espace semi-infini ou secteur ouvert), s'avère encore marginale dans un calcul en cavité. Cependant cette information n'est pas sans intérêt. D'une part elle permet dorénavant de se concentrer sur d'autres sources d'erreur possibles, voire de considérer l'erreur existante comme inhérente à la méthode et donc impossible à corriger. D'autre part, le travail sur la diffraction a permis d'identifier une provenance rigoureuse possible pour les sources images, provenance qui n'était jusqu'à présent que le fruit, vérifié, d'une intuition. On se propose ici de revenir sur ces différents points et de souligner les ouvertures à disposition au terme de cette étude.

11.1 Séparation des objets d'étude

Dans une optique d'amélioration de la méthode des sources images (et par extension d'autres méthodes géométriques reposant sur les mêmes principes de base), on s'est appliqué à différencier les sources d'erreur possibles afin de les étudier séparément.

Diffraction : effets de la géométrie

Ainsi dans un premier temps, la géométrie des parois a été considérée. Afin d'isoler les effets de cette géométrie et d'éviter le risque de les confondre avec ceux d'une mauvaise prise en compte des réflexions sur les parois, on a fait le choix de n'observer que des parois parfaitement réfléchissantes. Dans ce cas précis, en effet, la réflexion sur une paroi et sa modélisation par une source image sont rigoureusement identiques (cf. éq. 2.34 et éq. 4.3) à condition que la paroi considérée soit infinie. En pratique, les parois sont finies et cette adéquation n'est plus exactement vérifiée. Cependant, on s'affranchit ainsi des effets d'une prise en compte faussée de l'absorption due à la réflexion spéculaire, qui sera étudiée plus loin.

Laissant délibérément de côté les situations en cavités non-convexes, on s'est d'abord intéressé à une situation (ouverte) ne comportant que deux parois, car on dispose alors d'une solution de référence par méthode intégrale. On a alors montré qu'aux abords de parois formant un angle obtus entre elles, des sources images sont ignorées, ce qui résulte en une perte d'information (cf. § 3.5). On a ensuite montré que cette information perdue résidait effectivement dans cette source vue comme invisible (cf. chap. 5) mais que dans bien des cas, il ne suffisait pas de restaurer simplement la contribution de la source invisible : celle-ci apporte alors une contribution incorrecte pouvant fausser les résultats. Cependant, l'importance de cette source (et par extension de toutes les sources que la méthode classique des sources images ne considère pas) est ainsi vérifiée. Par identification avec un terme correspondant dans la méthode intégrale, on a alors montré la possibilité de restaurer l'information perdue sous la forme d'une source image située en des coordonnées complexes. Cette identification n'est évidemment pas un moyen à long terme de restaurer l'information manquante, mais il a permis de montrer qu'une telle amélioration est possible.

On s'est alors intéressé à l'origine même des sources images, dont la seule provenance intuitive via une construction géométrique ne convainc pas. Il s'avère qu'on peut tirer un parallèle entre la contribution de ces sources images et celle de termes obtenus en développant en série une solution issue de la méthode intégrale. Non seulement il est possible de trouver une interprétation de ce parallèle en faisant intervenir le principe de Huygens (cf. § 4.3) mais une étude numérique fait apparaître que, du moins dans le cas d'un secteur ouvert bidimensionnel, ce parallèle est bien observable en pratique (cf. chap. 5).

Par ce biais, on trouve une justification rigoureuse à la présence de sources images, ce qui représente une information importante. Au delà de la seule satisfaction scientifique apportée par cette connaissance, il paraît possible d'améliorer la méthode maintenant que l'on peut identifier qualitativement la partie non prise en compte par les sources images classiques : les termes du développement en série ne correspondant pas à des sources images visibles.

Diffusion : effets de la réflexion spéculaire

Après avoir ainsi étudié l'importance de la prise en compte d'images rendues invisibles par certaines géométries de parois, on s'est concentré sur le postulat de réflexion spéculaire au coeur des méthodes géométriques en acoustique. Ce postulat est justifié lorsque les parois sont parfaitement réfléchissantes, à la finitude des parois près, comme on l'a vu plus haut. En revanche, dès qu'une absorption est considérée, des effets de non localité apparaissent.

Pour étudier ce phénomène, on a choisi une approche complémentaire à celle ayant débouché sur l'identification des sources images. Laissant de côté les problèmes dûs à la géométrie de l'espace étudié, on s'est concentré sur des cas de géométries simples (espaces semi-infini et quart-infini) mais en prenant cette fois une impédance de paroi en compte.

S'appuyant sur un travail antérieur [15], on a alors étudié l'effet du remplacement du

coefficient de réflexion local utilisé dans les méthodes géométriques par un coefficient non local, tiré de la représentation intégrale. Dans les géométries étudiées, en effet, on peut quantifier l'erreur apportée par une considération spéculaire de la réflexion (cf. § 8.4). De cette étude, il apparaît que les effets de non localité sont particulièrement visibles lorsque l'on considère des rayons dits rasants, c'est à dire dont l'angle d'incidence se rapproche de $\pi/2$.

Parallèlement à l'identification de ce problème, on propose un moyen d'y remédier en imaginant une méthode pour introduire l'usage d'un coefficient de réflexion non local dans un calcul par sources images. Celle-ci fait usage de l'idée, originale, de ramener chaque réflexion à une situation correspondante en espace semi-infini, déterminée par la hauteur respective de la source et du point de réception ainsi que par l'angle d'incidence du rayon réfléchi. Par ailleurs, il est ici possible d'utiliser une autre méthode que le coefficient identifié décrit dans ce rapport pour obtenir une valeur de coefficient de réflexion plus proche de la réalité, par exemple en utilisant une base de données de coefficients obtenus par mesure.

11.2 Effet dans une cavité fermée

Chacun des deux aspects discutés ici a été mis en évidence dans des situations simples et l'on a proposé des méthodes pour corriger les erreurs qu'ils engendrent. Ces corrections sont efficaces dans les situations simples étudiées. En revanche il apparaît encore délicat de les appliquer au calcul en cavité fermée.

Diffraction : difficulté à isoler la part que l'on peut corriger

En ce qui concerne la diffraction, une approche rigoureuse a été développée pour additionner à un calcul en cavité par sources images les effets de la diffraction sur deux parois (que l'on a appelées Γ_θ). Dans un premier temps, cette diffraction est ajoutée au premier ordre, c'est à dire que la diffraction sur ces parois est prise en compte, mais non la répercussion de celle-ci sur les réflexions par les autres parois, nommées Γ_a . En pratique, cela est revenu à identifier la partie diffractée du champ de pression lorsqu'on ne considère que les parois Γ_θ , puis d'ajouter cette seule partie diffractée au résultat d'un calcul par sources images prenant toutes les parois en compte. Les résultats observés montrent que l'ajout de cette seule diffraction est insuffisante pour influencer favorablement les résultats en cavité.

Dans un second temps, on a développé une méthode pour appliquer la diffraction sur les parois Γ_θ au second ordre, c'est à dire en tenant compte des effets de celle-ci répercutés sur les premières réflexions dues aux autres parois. Pour ce faire, on a identifié dans le calcul par sources images la partie réfléchie « maîtrisable », c'est à dire sur laquelle on peut agir pour y ajouter la diffraction. Par soustraction dans le résultat par sources images, on conserve uniquement la partie « non maîtrisable » à laquelle on ajoute la partie que l'on pense corriger, comportant la réflexion aux premiers ordres et la diffraction tenant compte des parois autres Γ_a .

Devant la complexité du calcul, on tente de se prémunir des erreurs en comparant la contribution des parois Γ_a ainsi obtenue avec une équivalence justifiée par le principe de Huygens. Cette précaution a permis de mettre en évidence une difficulté logicielle importante faisant intervenir une définition correcte de la dérivée des fonctions de Green sur les parois. L'ajout de la diffraction au sein du calcul en cavité requiert ainsi une étude plus approfondie, la séparation entre la partie maîtrisable de la pression calculée par sources images de celle qui ne l'est pas doit se faire de manière plus précise pour parvenir à corriger la valeur obtenue. Cependant, on note que la modification de cette partie dite maîtrisable est tout à fait perceptible dans le spectre de la pression totale obtenue en un point de la cavité étudiée.

Laissant alors de côté l'espoir de corriger la situation en influant sur la méthode des sources images, on s'attache à étudier les effets en cavité obtenus en corrigeant un seul paramètre de cette méthode : la réflexion spéculaire et la prise en compte de l'absorption.

Diffusion : faible nombre de rayons corrigés

Les calculs en situations simples (espaces semi- et quart-infini) ont montré que l'on pouvait efficacement corriger les rayons réfléchis rasants (dont l'angle d'incidence se rapproche de $\pi/2$). Cette correction fait intervenir un coefficient de réflexion tenant compte de la non localité de la réaction en surface, par opposition à la réflexion spéculaire classiquement utilisée en acoustique géométrique.

Ce coefficient est obtenu par identification dans une résolution intégrale en espace semi-infini. Afin de pouvoir l'utiliser dans d'autres géométries, une méthode est développée pour ramener chaque réflexion étudiée en une situation équivalente en espace semi-infini. La situation ainsi obtenue est décrite par un triplet de valeur comprenant l'angle d'incidence du rayon considéré ainsi que les hauteurs respectives des points source et récepteur. Le coefficient correspondant alors à ce triplet est extrait d'une matrice de valeurs précalculées, ou interpolé à partir de ces valeurs.

Cependant, si les résultats obtenus en espace semi-infini et quart-infini permettent de faire apparaître une amélioration de la prédiction, la modification ainsi apportée reste de trop faible ampleur pour agir efficacement dans un calcul en cavité, faisant intervenir un grand nombre de rayons.

11.3 Conclusion et ouverture

La première conclusion que l'on peut tirer des résultats obtenus au cours de ce travail est que différents effets sont à l'oeuvre au sein des méthodes géométriques, chacun prépondérant dans certaines situations particulières. La correction des erreurs dues à l'un de ces effets est sensible si peu de rayons sont considérés, en revanche lors d'un calcul en cavité en présence d'un grand nombre de rayon, il apparaît que la correction isolée de l'un de ces effet n'est pas suffisante pour être effective à grande échelle.

Mais on peut également tirer une leçon plus importante du travail présenté ici. Dans l'état actuel des connaissances tout du moins, il se pourrait que la méthode des

rayons ne puisse pas être améliorée. En effet, on constate qu'il est possible de corriger la contribution d'un petit nombre de rayons, soit en influant sur la position des sources images donnant naissance à ces derniers, soit en décrivant mieux les réflexions encourues sur les parois. Cependant, les modifications ainsi apportées sont trop faibles en regard du nombre de rayons nécessaires à l'établissement du champ étudié pour que l'effort investi dans la correction (calcul d'un coefficient identifié, etc.) soit récompensé par un résultat amélioré.

A l'inverse, si l'on désire corriger un grand nombre de rayons, soit en continuant le développement du formalisme permettant de tenir compte de la diffraction aux ordres supérieurs, soit en calculant un grand nombre de coefficients de réflexion non locaux, la somme de travail nécessaire à cette fin est suffisamment importante pour que le recours à d'autres méthodes de prédiction, tels les éléments finis, voire une solution par méthode intégrale soit plus rentable. Dans ce dernier cas, l'utilisation de méthode géométrique n'a plus de sens, puisque leur atout réside précisément dans la rapidité de calcul.

Le travail d'investigation à effectuer sur la méthode géométrique n'en est pas terminé pour autant. Premièrement, le chapitre 7 souligne la nécessité de poursuivre l'étude d'un moyen d'intégrer la diffraction au sein d'un calcul en cavité fermée. Les résultats avancés sont un premiers pas dans cette démarche et certains aspects logiciels doivent être résolus avant de pouvoir conclure sur ce sujet.

De plus, différentes méthodes développées au sein de ce projet pourraient voir une application dans un autre cadre que celui dans lequel elles ont vu le jour. Par exemple, lors de l'étude de l'influence de la réflexion spéculaire, on a mis sur pied une méthode permettant de ramener chaque réflexion à un cas en espace semi-infini, et d'interpoler la valeur du coefficient de réflexion à utiliser dans chaque cas. Les valeurs stockées dans la matrice dans laquelle puise le processus d'interpolation pourraient avoir une autre provenance que la méthode intégrale, par exemple en étant obtenues expérimentalement. Ceci permettrait le traitement d'un plus grand nombre de rayons et ainsi d'apporter une amélioration plus sensible au total. La méthode est en outre extensible au cas tridimensionnel.

Enfin et surtout, on dispose au terme de ce travail d'un formalisme original permettant de décrire une origine analytique du concept de sources images, jusqu'alors accepté intuitivement. La méthode d'acoustique géométrique a ainsi non seulement gagné une justification supplémentaire, mais on dispose également d'un outil nouveau d'investigation révélant la présence cachée de sources supplémentaires, que la méthode classique ne fait pas apparaître.

En outre, le travail réalisé a provoqué des approfondissements et des formalismes ayant largement dépassé le cadre initial des habitacles automobiles. Les résultats constatés dans le cas du secteur ouvert tout autant que le travail réalisé sur les rayons rasants pourraient avoir des applications dans des situations faisant intervenir une propagation le long d'un sol, de plans inclinés, ou leur combinaison.

Bibliographie

Ouvrages de référence

- [1] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, 1998.
- [2] V. Martin. *Approche d'une acoustique générale - De quelques lieux communs de l'acoustique à une première maîtrise des champs sonores*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2006.
- [3] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, Princeton, 1986.
- [4] Ph. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*, volume 1 of *International Series in Pure and Applied Physics*. McGraw-Hill, New-York, 1953.
- [5] *ibid.*, volume 2.

Autres ouvrages

- [6] Bevan B. Baker and E. T. Copson. *The Mathematical Theory of Huygen's Principle*. Chelsea Publishing Company, New York, 3 edition, 1987.
- [7] V. O. Knudsen and C. M. Harris. *Acoustical Designing in Architecture*. Wiley, New-York, 1947.
- [8] H. Kuttruff. *Room Acoustics*. Spon Press, London, 4 edition, 2000.
- [9] L. Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, New-York, 1975.
- [10] J.-C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems*. Springer Verlag, New-York, 2001.

Articles

- [11] J. B. Allen and D. A. Berkley. Image method for efficiently simulating small-rooms acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(4) :943–950, April 1979.
- [12] Y. H. Berthelot. Surface acoustic impedance and causality. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(4) :1736–1739, April 2001.
- [13] P. Borejko. An exact representation of the image field in a perfect wedge. *Acta Mechanica*, 169 :23–36, 2004.
- [14] J. Borish. Extension of the image model to arbitrary polyhedra. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(6) :1827–1836, 1984.
- [15] T. Courtois and V. Martin. Spectral quality of acoustic predictions obtained by the ray method in coupled two-dimensional damped cavities. *J. Sound Vib.*, 270 : 259–278, 2004.
- [16] D. G. Fang, J. J. Yang, and G. Y. Delisle. Discrete image theory for horizontal electric dipoles in a multilayered medium. *IEE Proceedings H*, 135(5 Pt. H) :297–303, 1988.
- [17] J. A. Fawcett. Complex-image approximations to the half-space acousto-elastic green’s function. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(6) :2791–2795, 2000.
- [18] J. A. Fawcett. A method of images for a penetrable acoustic waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(1) :194–204, 2003.
- [19] T. Funkhouser, N. Tsingos, I. Carlbom, G. Elko, M. Sondhi, J. E. West, G. Pingali, P. Min, and A. Ngan. A beam tracing method for interactive architectural acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(2) :739–756, 2004.
- [20] M. Gensane and F. Santon. Prediction of sound fields in rooms of arbitrary shape : validity of the image sources method. *J. Sound Vib.*, 63(1) :97–108, 1979.
- [21] H. S. Heaps. Reflection of a Plane Acoustic Wave from a Surface of Nonuniform Impedance. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28(4) :666–671, June 1956.
- [22] P. Jean. Coupling integral and geometrical representations for vibro-acoustical problems. *J. Sound Vib.*, 224(3) :475–487, 1999.
- [23] G. Kaiser. Complex-distance potential theory and hyperbolic equations. In J. Ryan and W. Sprossig, editors, *Clifford algebras and their applications in mathematical physics*, volume 2, pages 135–169. Birkhauser, Boston, 2000.
URL <http://www.arxiv.org/abs/math-ph/9908031>.

- [24] A. Krokstad, S. Strøm, and S. Sørsdal. Calculating the Acoustical Room Response by the Use of a Ray Tracing Technique. *J. Sound Vib.*, 8(1) :118–125, 1968.
- [25] A. Kulowski. Algorithmic Representation of the Ray Tracing Technique. *Applied Acoustics*, 18 :449–469, 1985.
- [26] D. Lafarge, J. F. Allard, B. Brouard, C. Verhaegen, and W. Lauriks. Characteristic dimensions and predictions at high frequencies of the surface impedance of porous layers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(5) :2474–2478, May 1993.
- [27] I. Lerche. The scattering of acoustic waves by small, surficial inhomogeneities. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(1) :532–537, July 1991.
- [28] Y. Makita and T. Hidaka. Revision of the cos theta Law of Oblique Incident Sound Energy and Modification of the Fundamental Formulations in Geometrical Acoustics in Accordance with the Revised Law. *Acustica*, 63(3) :163–173, May 1987.
- [29] V. Martin and A. Bodrero. An introduction to the control of sound fields by optimising impedance locations on the wall of an acoustic cavity. *J. Sound Vib.*, 204(2) :331–357, 1997.
- [30] F. P. Mechel. Improved mirror source method in room acoustics. *J. Sound Vib.*, 256(5) :873–940, 2002.
- [31] F. P. Mechel. The corner source model. *Acustica*, 2000(6) :957–969, 86.
- [32] G. M. Naylor. ODEON - Another Hybrid Room Acoustical Model. *Applied Acoustics*, 38 :131–143, 1993.
- [33] L. Nijs, G. Jansens, G. Vermeir, and M. van der Voorden. Absorbing surfaces in ray-tracing programs for coupled spaces. *Applied Acoustics*, 63 :611–626, 2002.
- [34] M. Ochmann. The complex equivalent source method for sound propagation over an impedance plane. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(6) :3304–3311, 2004.
- [35] M Ochmann and R. Piscoya. The source simulation technique with complex source points for computing acoustic radiation problems. In *Proceedings of the 13th International Congress on Sound and Vibration, Vienna, Austria, July 2-6, 2006*.
- [36] A. D. Pierce. Diffraction of sound around corners and over wide barriers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 55 :941–955, 1974.
- [37] J. H. Rindel. The Use of Computer Modeling in Room Acoustics. *Journal of Vibroengineering*, 3(4) :219–224, 2000.
- [38] M. R. Schroeder. Phase Gratings with Suppressed Specular Reflection. *Acustica*, 81 :364– 369, 1995.

- [39] R. R. Torres, U. P. Svensson, and M. Kleiner. Computation of edge diffraction for more accurate room acoustics auralization. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(2) :600–610, 2001.
- [40] M. Vorländer. Simulation of the transient and steady-state sound propagation in rooms using a new combined ray-tracing / image-source algorithm. *J. Acoust. Soc. Am.*, 86(1) :172–178, July 1989.

Références historiques

- [41] J. B. Keller. Geometrical Theory of Diffraction. *Journal of the Optical Society of America*, 52(2) :116–131, February 1962.
- [42] F. Williamson. An historical note on th finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15 :930–934, 1980.
- [43] O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung. Finite elements in the solution of field problems. *The Engineer*, 220 :507–510, Sept. 1965.
- [44] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11 :355–375, 1977.

Divers

- [45] T. Courtois. *Qualité spectrale des prédictions acoustiques obtenues par méthode géométrique dans des cavités couplées et absorbantes - moyennes fréquences*. Thèse de doctorat, Laboratoire de Mécanique de Rouen - INSA de Rouen, 2002.
- [46] A. I. Prilenko and E. D. Solomentsev. Potential theory. From the Springer Encyclopaedia of Mathematics, Online Edition.
URL <http://eom.springer.de/p/p074140.htm>.
- [47] E. W. Weisstein. Hankel function of the second kind. From MathWorld – A Wolfram Web Resource.
URL <http://mathworld.wolfram.com/HankelFunctionoftheSecondKind.html>.

Publications de l'auteur

- [48] T. Guignard and V. Martin. Tuning of musical glasses through material removal. In *Proceedings of the 7th Congress of the French Acoustic Society*, pages 877–878, Strasbourg, France, March 22-25 2004.
- [49] T. Guignard and V. Martin. Adjusted complex position of extra sources in ray-tracing/image sources method. In *Proceedings of the 13th International congress on Sound and Vibration - ICSV'06*, Vienna, Austria, July 2-6 2006. Paper nr 115.
- [50] T. Guignard, V. Martin, and T. Courtois. Interpolated identified reflection coefficients for acoustic ray method. In *Proceedings of the 11th International congress on Sound and Vibration - ICSV'04*, pages 3707–3714, St. Petersburg, Russia, July 5-8 2004.
- [51] V. Martin and T. Guignard. Image-source method and truncation of a series expansion of the integral solution - case of an angular sector in two dimensions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(2) :597–610, 2006.
- [52] V. Martin and T. Guignard. Justification of the image sources in ray-tracing method. In *Proceedings of the 12th International congress on Sound and Vibration - ICSV'05*, Lisbon, Portugal, July 11-14 2005. Paper nr 178.

Annexe A

Conventions et nomenclature

Géométrie

Les différentes situations étudiées sont toujours représentées dans un repère direct bidimensionnel d'axe (x, y) . Les angles sont (sauf exceptions mentionnées) comptabilisés en radians et exprimés dans le sens trigonométrique.

Opérateurs

- Divergence : $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
- Gradient : $\vec{\nabla} u = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle^T$
- Laplacien : $\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Typographie

Les conventions suivantes sont utilisées de façon consistante dans ce rapport.

- Matrice de dimensions $N \times M$ (avec composantes a_{ij}) $\mathbf{A} = [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}$
- Vecteur colonne de dimensions $1 \times M$ (avec composantes a_i) $\mathbf{a} = \{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{Bmatrix}$
- Vecteur ligne de dimensions $N \times 1$ $\mathbf{a}^T = \langle a \rangle = \langle a_1 \cdots a_N \rangle$
- Norme d'un vecteur \mathbf{a} $a = \|\mathbf{a}\|$
- Produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b}^T $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \{a\} \cdot \langle b \rangle$
- Point du plan avec ses coordonnées $S = S(y_S, z_S)$

Le symbole \cdot est également rarement utilisé pour signifier la multiplication de deux scalaires au sein d'expressions complexes. Dans de tels cas, la confusion avec le produit scalaire est impossible.

Nomenclature	Unités
– Pression acoustique p	Pa
– Pression statique P_r	Pa
– Fréquence f	Hz \equiv s ⁻¹
– Pulsation $\omega = 2\pi f$	rad · s ⁻¹
– Impédance Z	kg/m ² /s
– Impédance réduite $Z_r = \frac{Z}{\rho c}$	1
– Admittance réduite $\beta = \frac{1}{Z_r}$	1
– Angle d'ouverture entre deux parois θ	rad
– Angle d'incidence d'une onde réfléchie ϕ	rad
– Domaine acoustique étudié Ω	
– Parois Γ_i	
– Source ponctuelle de pression S	
– Point récepteur R (où l'on mesure la pression acoustique)	

Constantes numériques

Les constantes suivantes ont été utilisées, sauf exceptions mentionnées, dans toutes les simulations présentées dans ce rapport.

- Vitesse du son dans l'air $c = 340$ m/s. Lorsqu'une autre valeur est utilisée, comme c'est le cas au chapitre 7 par exemple, celle-ci est précisée.
- Pression de référence dans l'air $P_r = 2 \times 10^{-5}$ Pa

Le niveau de pression est exprimé le plus souvent en Pascals (relativement à la pression de référence P_r). Lorsqu'ils est exprimé en décibels (dB), le niveau de pression efficace est utilisé :

- $SPL = 20 \log_{10}(\frac{P_{eff}}{P_r})$ avec $P_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^T p^2(u) du} = \frac{|p|}{\sqrt{2}}$ lorsque p représente une onde sinusoïdale (comme ici).

Annexe B

Résultats numériques supplémentaires au chapitre 7

B.1 Travail aux abords des angles de la cavité

La table B.1 donne les coordonnées précises des points étudiés à la section 7.4.2. Elle présente également le nombre de résonances identifiées et la valeur numérique de la moyenne d'erreur ayant conduit à la représentation en « nuage de points » de la figure 7.8(b).

B.2 Ajout de la diffraction en cavité au second ordre

Au terme du chapitre 7, les résultats de la comparaison des contributions des parois Γ_a sur la diffraction due aux parois Γ_θ avec une équivalence spéculaire a apporté des doutes sur la validité du traitement numérique du problème. Les résultats obtenus dans ces conditions ne permettent ainsi pas de conclure à l'efficacité ou non de la démarche d'ajout de la diffraction en cavité. On présente néanmoins quelques résultats supplémentaires obtenus dans ce cadre.

Tout d'abord, les figures B.1 et B.2 présentent les contributions des parois Γ_a sur la diffraction issue de la résolution intégrale sur les deux parois Γ_θ . On y voit le résultat obtenu par un traitement intégral sur ces parois, ainsi que celui par le biais d'un traitement spéculaire de celles-ci. On voit que selon la position du point récepteur et la valeur de la célérité $c \in \mathbb{C}$ choisie, le spectre de ces contributions se rapproche ou non de celui obtenu par traitement spéculaire. Pour les deux exemples évoqués ici, on étudie le spectre de ces contributions vu au point $R(-0.5, 0.3)$ m.

Contribution de la paroi Γ_3

La figure B.3(a) présente la situation au point R_7 (appelé ici simplement R) si l'on ne considère que les parois du secteur ouvert $\Gamma_\theta \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, ainsi que la paroi supplémentaire Γ_3 dont on étudie l'effet au premier ordre (réflexion simple et transfert

Angle	Nom	Coordonnées	Coordonnées de l'élément le plus proche	N° de l'élément	Nombre de résonances identifiées (tol. 2 Hz)	Moyenne d'erreur ϵ Pa	
(aigu)	$\widehat{\Gamma_2\Gamma_3}$	R_1	(0.9, 0.2)	(0.89828, 0.19754)	4106	4	0.139804
		R_2	(0.92, 0.13)	(0.92187, 0.12226)	3793	3	0.129497
		R_3	(0.94, 0.05)	(0.93787, 0.05514)	3730	2	0.157563
		R_4	(0.87, 0.05)	(0.87424, 0.053483)	4609	1	0.122546
		R_5	(0.8, 0.05)	(0.79191, 0.052952)	4627	2	0.113789
(obtus)	$\widehat{\Gamma_1\Gamma_2}$	R_6	(0.08, 0.04)	(0.07944, 0.035635)	2529	2	0.131814
		R_7	(0.17, 0.05)	(0.16736, 0.05981)	2560	2	0.13221
		R_8	(0, 0.05)	(-0.0024932, 0.043117)	1456	2	0.148619
		R_9	(-0.13, 0.12)	(-0.13099, 0.12301)	918	6	0.156312
		R_{10}	(-0.07, 0.08)	(-0.074957, 0.076414)	1087	3	0.156046
(aigu)	$\widehat{\Gamma_5\Gamma_1}$	R_{11}	(-0.79, 0.44)	(-0.7896, 0.43536)	2079	4	0.109831
		R_{12}	(-0.85, 0.46)	(-0.84377, 0.46272)	1834	4	0.128489
		R_{13}	(-0.91, 0.51)	(-0.90063, 0.51221)	1867	4	0.108284
		R_{14}	(-0.88, 0.55)	(-0.8881, 0.5473)	1861	5	0.119332
		R_{15}	(-0.83, 0.6)	(-0.82556, 0.59693)	1847	4	0.133042
(obtus)	$\widehat{\Gamma_4\Gamma_5}$	R_{16}	(-0.25, 1.1)	(-0.25269, 1.1064)	868	2	0.170018
		R_{17}	(-0.21, 1.13)	(-0.22034, 1.1333)	977	3	0.153148
		R_{18}	(-0.17, 1.17)	(-0.16454, 1.1625)	328	2	0.145474
		R_{19}	(-0.06, 1.17)	(-0.060919, 1.1643)	3522	4	0.142656
(obtus)	$\widehat{\Gamma_3\Gamma_4}$	R_{20}	(0.47, 1.16)	(0.47093, 1.1496)	4124	3	0.120594
		R_{21}	(0.58, 1.16)	(0.58142, 1.1678)	4022	2	0.178814
		R_{22}	(0.6, 1.11)	(0.59785, 1.1195)	4017	5	0.148045

Tab. B.1 – Détail des points récepteurs aux abords d'angles aigus et obtus

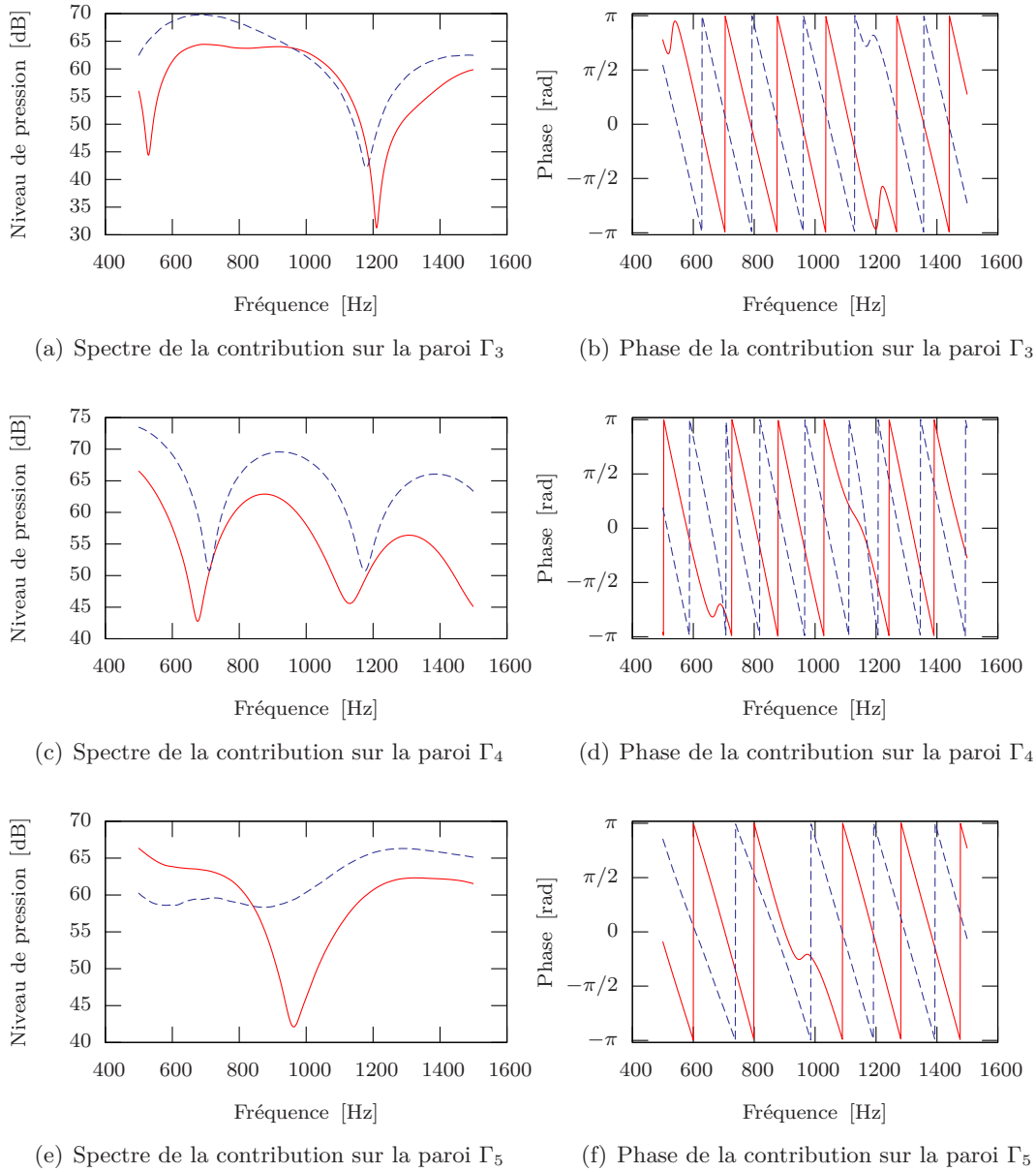


Fig. B.1 – Contributions des parois au second ordre : comparaison des niveaux de pression obtenus au point $R(-0.5, 0.3)$ m en milieu sans absorption supplémentaire, $c = 340$ m/s, résolution 1 Hz.

— $g_\theta(S, R_j)$ (intuition physique via des récepteurs images) et
 - - \mathcal{B}_j (valeur analytique obtenue par dérivation et intégration sur les parois) .

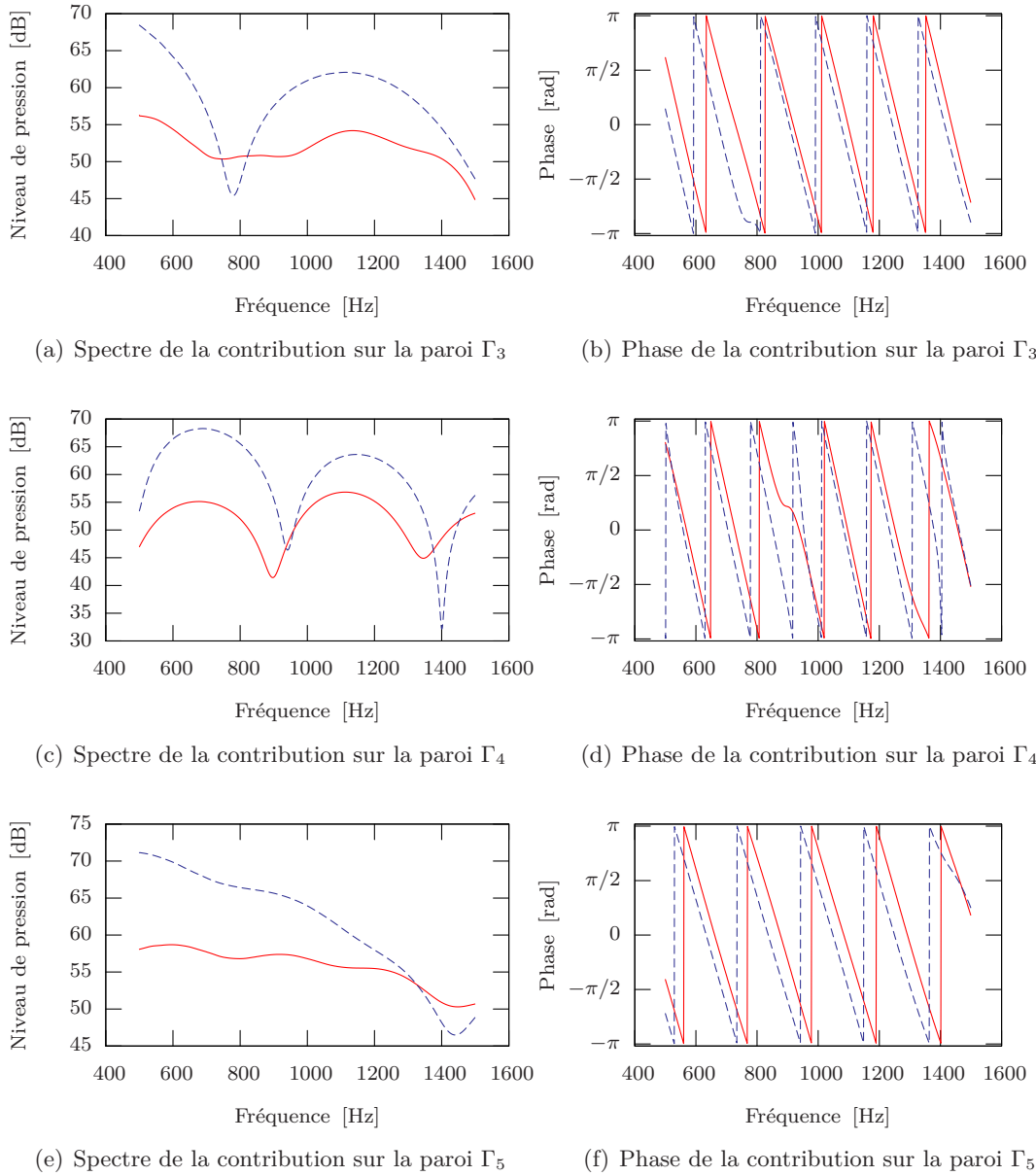


Fig. B.2 – Contributions des parois au second ordre : comparaison des niveaux de pression obtenus au point $R(-0.5, 0.3)$ m en milieu absorbant, $c = 340(1 + 0.02i)$ m/s, résolution 1 Hz.

— $g_\theta(S, R_j)$ (intuition physique via des récepteurs images) et
 - - \mathcal{B}_j (valeur analytique obtenue par dérivation et intégration sur les parois) .

de la diffraction). Dans un premier temps, on identifie les sources qui interviennent dans le calcul par sources images en tenant compte de ces parois :

$$S_{\theta 3}^{o2} = [S, S_2, S_3, S_{23}] \quad (\text{B.1})$$

Les sources $S_{\theta 3}^{o2}$ permettent ainsi d'obtenir la partie purement spéculaire des parois Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 au premier ordre, qui correspond à l'expression $\tilde{g}_\theta + \tilde{\mathcal{B}}$ selon 7.21. En faisant la différence entre cette expression et la solution complète en cavité par sources images, on obtient la partie « non maîtrisable » $\tilde{\mathcal{C}}_3$ dans cette situation.

On substitue maintenant à $\tilde{g}_\theta + \tilde{\mathcal{B}}$ la valeur exacte de la contribution de ces trois parois au premier ordre, et ceci selon les deux méthodes présentées à la section précédente. Le calcul rigoureux de la contribution des trois parois donne $g_\theta(S, R) + \mathcal{B}$, et l'équivalence utilisant le point récepteur image R_3 donne $g_\theta(S, R) + g_\theta(S, R_3)$. La contribution spéculaire est comparée à celles obtenues par ces deux méthodes sur la figure B.3(b).

A nouveau, on constate que la contribution de la paroi Γ_3 obtenue par l'équivalence physique (point récepteur image) ne change que légèrement celle des parois Γ_θ , et en particulier ne provoque pas de déphasage. En revanche, si l'on emploie la valeur \mathcal{B} obtenue analytiquement obtenue par dérivation et intégration sur Γ_3 , on constate un décalage en fréquence de l'ordre de 150 Hz.

Contribution de la paroi Γ_5

On étudie maintenant la contribution de la paroi Γ_5 , qui se traduit dans la méthode des sources images par l'emploi des sources

$$S_{\theta 5}^{o2} = [S, S_1, S_2, S_5, S_{15}] \quad (\text{B.2})$$

dans la situation de la figure B.4(a). Ici également, la source S_1 doit être prise en compte malgré le fait qu'elle soit invisible en R puisqu'elle donne naissance à la source visible S_{15} . On retrouve à la figure B.4(b) la modification apportée à la contribution de la paroi Γ_5 par la prise en compte de la diffraction.

Ici encore, le calcul analytique apporte une modification plus importante que le calcul par point récepteur image, avec un décalage en fréquence de l'ordre de 200 Hz. L'effet de cette contribution sur la pression totale est montré à la figure B.4(c).

Contribution combinée des trois parois Γ_a

On considère enfin la contribution combinée des trois parois $\Gamma_a \equiv \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$, en considérant les sources

$$S_\theta^{o2} = [S, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_{14}, S_{15}, S_{23}, S_{24}] \quad (\text{B.3})$$

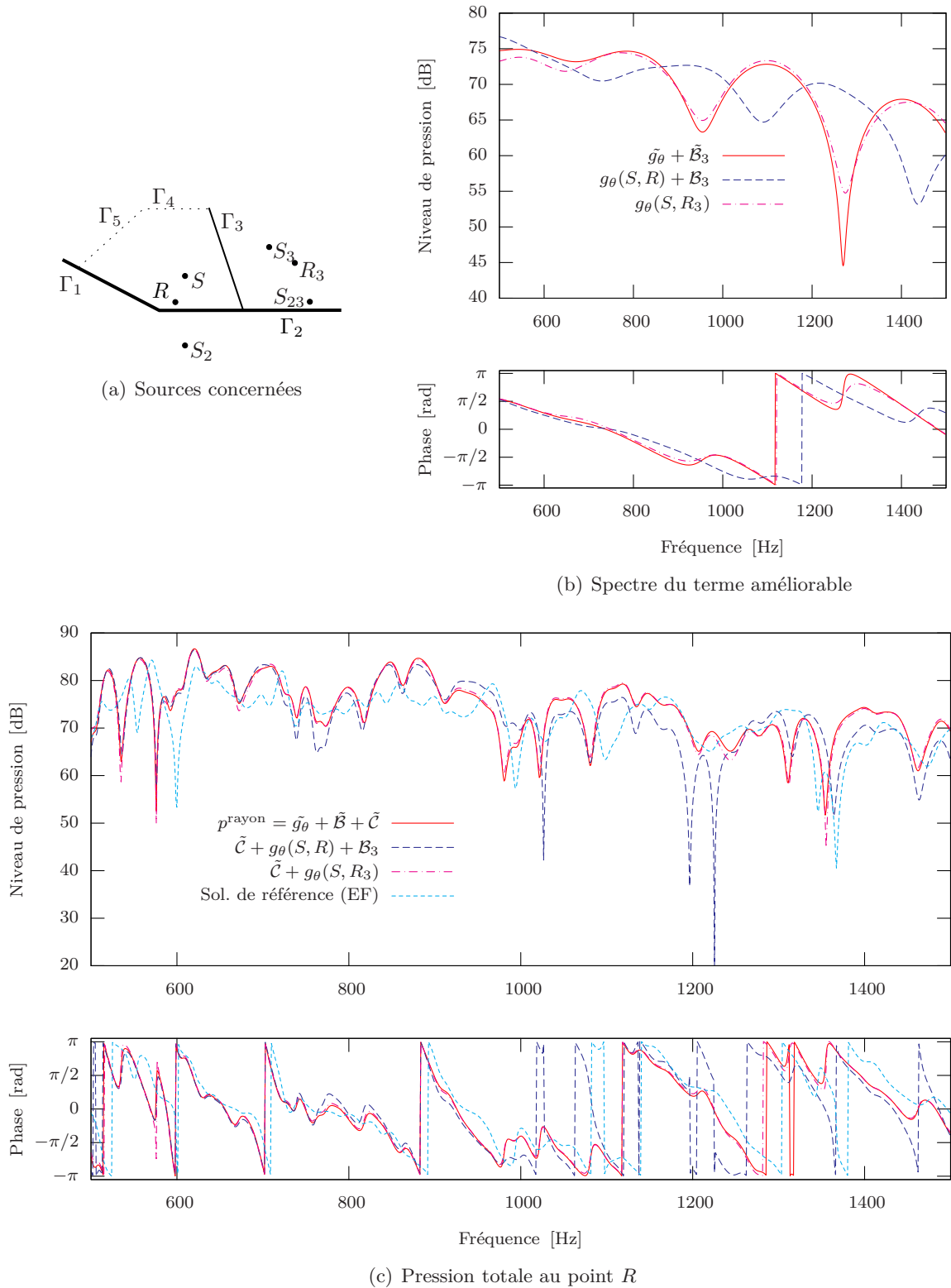


Fig. B.3 – Correction amenée par la paroi Γ_3 (en milieu absorbant, $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s, résolution 1 Hz)

- Calcul purement spéculaire (contributions des sources images)
- - Avec ajout de la diffraction sur Γ_1 et Γ_2 et l'effet de Γ_3 sur cette diffraction via l'expression analytique 7.31
- · - Avec ajout de la diffraction sur Γ_1 et Γ_2 et l'effet de Γ_3 par intuition physique (point récepteur image R_4)

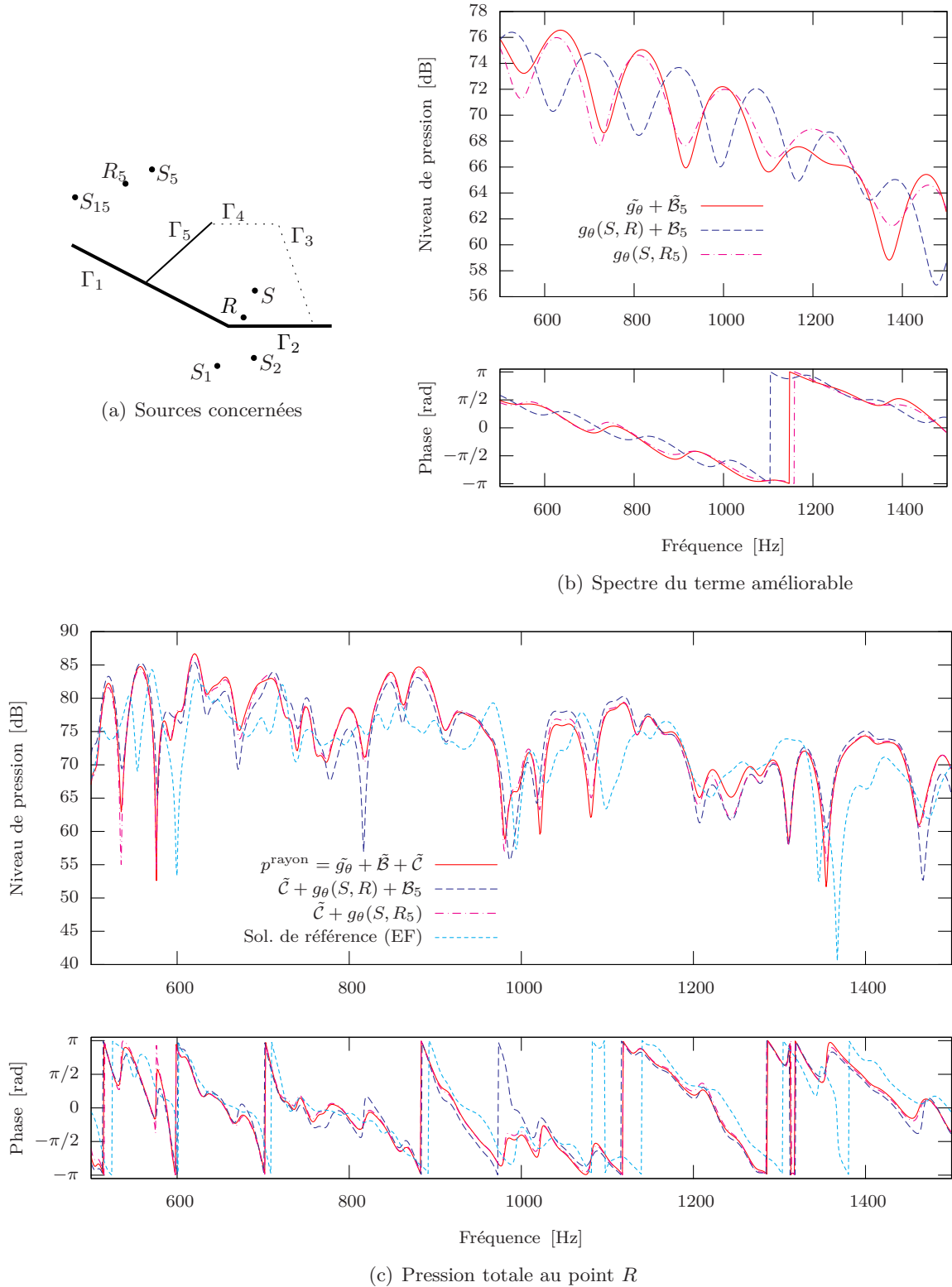


Fig. B.4 – Correction amenée par la paroi Γ_5 (en milieu absorbant, $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s, résolution 1 Hz)

- Calcul purement spéculaire (contributions des sources images)
- - Avec ajout de la diffraction sur Γ_1 et Γ_2 et l'effet de Γ_5 sur cette diffraction via l'expression analytique 7.31
- · - Avec ajout de la diffraction sur Γ_1 et Γ_2 et l'effet de Γ_5 par intuition physique (point récepteur image R_4)

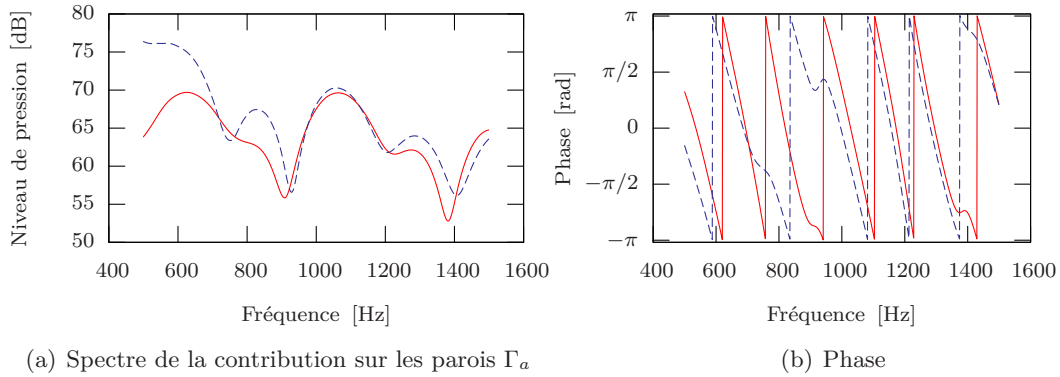


Fig. B.5 – Somme des contributions des parois $\Gamma_a \equiv \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$ au second ordre : comparaison des niveaux de pression obtenus (en milieu absorbant, $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s, résolution 1 Hz)

— $g_\theta(S, R_3) + g_\theta(S, R_4) + g_\theta(S, R_5)$ (intuition physique via des récepteurs images) et
 - - $\mathcal{B} = \mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_5$ (valeur analytique obtenue par dérivation et intégration sur les parois)

et en exploitant l'égalité 7.32 pour la contribution analytique

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_5 \quad (\text{B.4})$$

Le spectre ainsi obtenu, présenté à la figure B.5 et à comparer avec les contributions séparées des parois Γ_3 à Γ_5 qui le composent, présentées sur la figure 7.11. Dans ces dernières, on avait conclu sur la seule validité de la contribution de la paroi Γ_4 . Il apparaît que cette dernière est prépondérante, car les courbes visibles sur la figure B.5 montrent une bonne cohésion entre les contributions totales des parois Γ_a , qu'elles soient calculées par intégration sur les parois ou via équivalence spéculaire.

Cependant, le transfert de ces contributions sur la pression totale au point récepteur considéré, présenté sur l'ultime figure B.6, ne permet pas encore de conclure à une amélioration globale de la prédiction au sens d'un décalage des résonances sur les spectres obtenus. Tout au plus peut-on constater que, contrairement aux résultats obtenus en travaillant sur le coefficient de réflexion et présentés au terme du chapitre 10, la modification apportée par la démarche présentée ici est sensible.

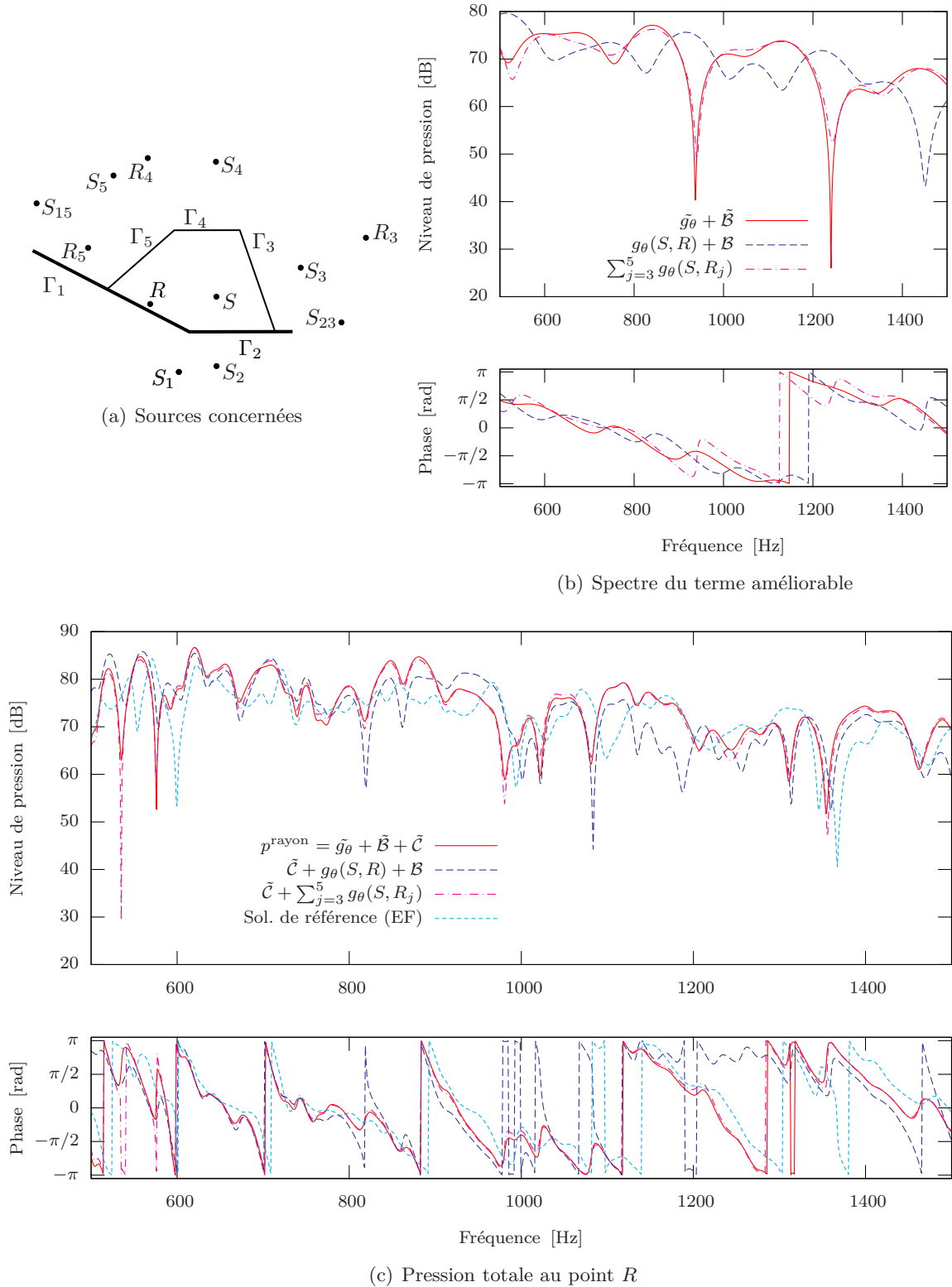


Fig. B.6 – Correction amenée par les parois $\Gamma_a \equiv \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$ (en milieu absorbant, $c = 340(1 + 0.01i)$ m/s, résolution 1 Hz)

— Calcul purement spéculaire (contributions des sources images)

- - Avec ajout de la diffraction sur Γ_1 et Γ_2 et l'effet de Γ_a sur cette diffraction via l'expression analytique 7.31

- · - Avec ajout de la diffraction sur Γ_1 et Γ_2 et l'effet de Γ_a par intuition physique (points récepteurs images R_3, R_4 et R_5)

Thomas Edouard Guignard

est né le 30 juillet 1979 à Hawkesbury, Ontario, Canada. En 2003 il a reçu le titre d'ingénieur diplômé en technologies de l'information et électricité à l'École Polytechnique Fédérale de Zürich (Dipl.-Ing. ETH in Informationstechnologie und Elektrotechnik).

Assistant-doctorant depuis septembre 2003 au Laboratoire d'Électromagnétisme et d'Acoustique (LEMA) de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), il travaille sur le thème des méthodes géométriques en acoustique dans le cadre d'un projet fédéral de collaboration entre son institut de recherche et l'entreprise *Rieter Automotive Management AG*, à Winterthur (CTI/KTI 6604.2 et 7294.1). Placé sous la direction du Prof. Vincent Martin (directeur de recherche au CNRS, France), son travail dans ce cadre est présenté dans ce rapport. Une publication [51] et trois actes de congrès [50, 52, 49] font état de ses travaux intermédiaires au sein de ce projet. Durant son séjour au LEMA, il a également assisté le cours du Prof. Vincent Martin, chargé de cours à l'EPFL, et accompagné deux étudiants lors d'un travail de semestre.

Depuis septembre 2006, Thomas Guignard travaille au sein du Service d'Information Scientifique et Bibliothèques de l'EPFL, où il est responsable du développement des collections pour les domaines relevant des sciences et techniques de l'ingénieur.