

INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX

THÈSE N° 3503 (2006)

PRÉSENTÉE LE 16 MAI 2006

À LA FACULTÉ SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR
Laboratoire d'ingénierie numérique
SECTION DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Nicolas BODARD

ingénieur diplômé en mathématiques appliquées et calculs scientifique, Institut Galilée, Villetaneuse, France
et de nationalité française

acceptée sur proposition du jury:

Prof. P. Xirouchakis, président du jury
Prof. M. Deville, directeur de thèse
Prof. M. Azaiez, rapporteur
Prof. E. Mund, rapporteur
Prof. A. Quarteroni, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Lausanne, EPFL

2006

Résumé

Nous élaborons dans cette thèse la simulation numérique de l'interaction fluide-structure par la méthode des éléments spectraux. A cette fin, on considère les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux newtonien incompressible en interaction avec un solide élastique dont on détermine l'évolution à l'aide des équations de la dynamique. La formulation arbitrairement lagrangienne-eulérienne (ALE) est envisagée au niveau du fluide pour mieux suivre le mouvement de la structure décrite par une formulation lagrangienne. La mobilité des géométries de chaque domaine est construite par déformation du maillage. Nous décrivons donc la discrétisation spatio-temporelle d'un tel modèle. Le champ de déplacement de la structure est discrétisé dans l'espace des polynômes de degré N , \mathbb{P}_N , tandis que les champs de vitesse et de pression dans le fluide sont calculés dans $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$. On évalue ensuite l'efficacité de la méthode ALE pour différentes applications lorsque le mouvement de la structure est prescrit. Nous décrivons ainsi l'algorithmique nécessaire dans cette optique. Pour résoudre l'interaction, on se base sur un cas particulier des méthodes décalées. La géométrie simplifiée d'un solide immergé dans un canal est étudiée pour tester les possibilités et les limitations liées à l'algorithme mis en oeuvre pour ce type de problème d'écoulement instationnaire.

mots-clés :

Interaction fluide-structure, méthode des éléments spectraux, formulation ALE, méthode algorithmique décalée, déformation de maillage, écoulement instationnaire.

Abstract

We elaborate in this thesis the numerical simulation of the fluid-structure interaction by the spectral element method. To this end we consider the Navier-Stokes equations for a viscous Newtonian incompressible fluid with an elastic solid the movement of which being described by the equations of the dynamics. The arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation is introduced in the fluid governing equations to deal with the structure movement that is described in Lagrangian representation. The geometrical motion in each domain is built up by the mesh deformation. The space-time discretization of the full mathematical model rests upon the spectral element method. The solid is discretized in the space of polynomials of degree N , \mathbb{P}_N , while the fluid uses the $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ approach. The efficiency of the ALE formulation is tested and validated through various applications. The full algorithm is based on a particular case of the staggered method. The simplified case of a solid immersed in a plane channel closes the thesis. It is then possible to draw the conclusions about the pros and cons of the proposed methodology.

Key words :

fluid-structure interaction, spectral element method, ALE formulation, Staggered methods, mesh deformation, unsteady flow.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Michel Deville, pour la culture, la patience et la confiance qu'il m'a apporté tout au long de mon travail et de l'effort de correction qu'il a su me prodiguer dans la rédaction de cette thèse.

Je souhaite ensuite remercier l'ensemble de mes collègues du laboratoire d'ingénierie numérique pour leur amitié et leur convivialité que ce soit dans des discussions professionnelles, scientifiques ou dans des thèmes de la vie courante.

Je souhaite aussi remercier le jury de thèse, les professeurs Mejdî Azaïez, Ernest Mund et Alfio Quarteroni pour leur lecture et leurs remarques constructives de la thèse.

Je n'oublie pas ma famille et mes amis en France qui, malgré les kilomètres nous séparant, m'ont toujours écouté et soutenu dans cette aventure qui a élargi considérablement ma vision du monde.

Enfin, je n'oublie pas le docteur Yves Krähenbühl qui m'a permis de rencontrer le professeur Michel Deville et ainsi et de vivre une expérience professionnelle sur un sujet d'une qualité exceptionnelle.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	L'interaction fluide-structure	2
1.2	Quelques exemples de valves cardiaques	3
1.3	Organisation de la thèse	6
1.4	Notations	7
2	Modèles mathématiques	9
2.1	Les équations de Navier–Stokes pour le fluide visqueux newtonien incompressible	10
2.2	Les équations de la dynamique pour un solide élastique	11
2.3	L'interaction fluide-structure : les conditions limites à l'interface	13
2.4	Domaine mobile	14
2.5	Formulations faibles	14
2.5.1	Dans le fluide	15
2.5.2	Dans le solide	17
2.5.3	A l'interface	19
2.6	Evaluation de l'énergie du système étudié	19
3	Approximation numérique	23
3.1	Discrétisation du problème : méthodes spectrales	23
3.1.1	Des éléments finis aux éléments spectraux	23
3.1.2	Polynômes d'interpolation	23
3.1.3	Quadratures	24
3.1.4	Définition des éléments isoparamétriques	25
3.1.5	Matrice jacobienne et jacobien	26
3.2	Discrétisation spatiale dans le fluide	28
3.2.1	Formulation faible du laplacien	28
3.2.2	Formulation du gradient de pression	31
3.2.3	Formulation de la divergence de vitesse	32
3.2.4	Formulation du terme convectif	33
3.2.5	Matrice de masse	34
3.3	Discrétisation temporelle dans le fluide	34
3.3.1	Discrétisation de la dérivée temporelle de vitesse	34
3.3.2	Le traitement du terme convectif	35
3.3.3	Discrétisation temporelle des équations du fluide	35
3.4	Discrétisation spatiale dans la structure	37
3.4.1	Forme faible du tenseur des contraintes	37
3.4.2	Forme faible de l'accélération	38
3.4.3	Forme faible des forces de contact	38

3.5	Discrétisation temporelle dans le solide : la méthode de Newmark	39
3.5.1	La formulation discrète de la dynamique : l'approche prédicteur-correcteur	39
3.5.2	Précision de la méthode prédicteur-correcteur : cas de l'équation d'onde .	40
	Le cas mono-dimensionnel	40
	Le cas bi-dimensionnel	42
3.5.3	Une seconde approche de la méthode de Newmark : Calcul direct du déplacement	43
3.5.4	Comparaisons des deux méthodes	46
3.5.5	Système matriciel	49
	Valeurs propres de l'opérateur de Newmark	50
3.5.6	Remarques sur la méthode de Newmark	52
4	Méthode ALE	53
4.1	Calcul de la vitesse ALE	53
4.2	Formulation du calcul de la vitesse ALE	54
4.3	Algorithmes	55
4.4	Applications numériques	57
4.4.1	Spatial accuracy in curved domains	57
4.4.2	Motion of a cylinder inside a square cavity	60
4.4.3	Oscillation du cylindre dans la cavité carrée	63
4.4.4	Valve rigide en rotation imposée dans un canal plan	66
4.5	Précision temporelle	69
4.5.1	Cas de la cavité carrée	69
4.5.2	Comparaisons dans le cas de la valve et du cylindre	70
5	Interaction fluide-structure	75
5.1	Précisions sur l'adimensionalisation	75
5.1.1	dans la structure	75
5.1.2	A l'interface	76
5.2	Les équations de l'interaction fluide-structure	77
5.3	Algorithmique	77
5.4	Géométrie du problème de la valve et conditions limites	82
5.5	Evaluation de l'énergie du système	84
5.6	Application numérique	85
6	Conclusions et perspectives	97
	Bibliographie	100

Chapitre 1

Introduction

Les progrès réalisés par les outils numériques et informatiques durant les quarante dernières années ont permis aux scientifiques d'améliorer considérablement leur compréhension du monde. Le développement des modèles mathématiques a permis de traiter des problèmes de plus en plus pointus dans de nombreux domaines : prédiction du comportement des outils de production, transport, environnement. La gestion de ces problèmes complexes en a été facilitée tant du point de vue d'une discipline donnée que du point de vue multidisciplinaire où des phénomènes plus généraux ont pu être abordés.

La révolution informatique de la seconde moitié du XX^e siècle accéléra le développement de la mécanique que ce soit dans la résolution de problèmes issus de la mécanique des fluides, de la mécanique des solides ou dans l'étude des matériaux. L'une des ambitions de ce nouvel âge numérique est d'accroître la compréhension de ce qui constitue la matière et les lois qui la régissent.

Dans des disciplines comme l'aérodynamique ou la climatologie, la thermomécanique ou l'électronique et dans bien d'autres encore, l'outil numérique est devenu, là aussi, largement présent. Il l'est également dans les disciplines nouvelles comme la biomécanique et les nanotechnologies, mais aussi dans le domaine du génie biomédical comme l'hémodynamique ou encore dans le domaine des sciences du vivant, telle la génomique. L'objectif n'est pas de faire une liste exhaustive de toutes les disciplines existantes qui ont vécu un essor important grâce à l'informatique mais de montrer simplement l'impact qu'elle a eu pour la science en général. Car elle a évidemment pris aussi toute son importance dans des disciplines plus "humaines" comme l'économie, voire même l'histoire.

La recherche que nous menons dans cette thèse s'inscrit dans cette optique. Les outils numériques et mathématiques sont utilisés afin de résoudre l'interaction fluide-structure. Ce problème fait appel à deux disciplines de la mécanique : la mécanique des fluides et la mécanique des solides à travers les lois de la dynamique propre à ces deux domaines. Nous concentrons cette recherche sur un problème issu de l'hémodynamique, à savoir la modélisation de l'écoulement du sang à travers une valve aortique artificielle dans un cadre simplifié. La faisabilité d'une telle modélisation sera étudiée dans un cadre assez nouveau, celui de la méthode des éléments spectraux. Si les géométries que nous étudions sont simplifiées, les équations mises en jeu pour résoudre ce problème n'en sont pas moins complexes.

1.1 L'interaction fluide-structure

Le domaine de l'interaction fluide-structure est vaste car un ensemble important de systèmes mécaniques ou de phénomènes naturels se classent typiquement dans cette partie des sciences. Si le fluide considéré est de l'air, alors l'aérodynamique, par l'étude de l'écoulement autour d'une aile d'avion ou autour d'un profil d'automobile voire de fusée, constitue l'un des aspects de l'interaction fluide-structure. Lorsque le fluide correspond à l'eau, c'est dans le domaine naval que l'on peut considérer une large gamme de cas d'interaction allant du sous-marin au bateau de croisière. Toujours en aérodynamique, on étudie aussi le comportement du mouvement animal comme celui de certains insectes ou d'oiseaux. Par exemple, le battement d'une aile d'oiseau est en effet une situation complexe où les ailes sont en interaction avec l'air. Dans le domaine des turbines et des aubages de moteurs, leur interaction avec l'air représente elle aussi un des problèmes de l'interaction fluide-structure. Dans le modèle que nous étudions, le fluide possède les propriétés d'un fluide visqueux incompressible.

Ces différents problèmes sont donc complexes à étudier. Certaines simplifications peuvent cependant être mises en oeuvre. Dans le cas d'un corps solide rigide, la cinématique de son mouvement peut être décomposée en une translation (deux ou trois degrés de liberté suivant que le problème est plan ou tri-dimensionnel) et/ou une rotation (un ou trois degrés de liberté la dimension du problème) [43, 44, 49, 58, 69, 74, 87].

Le modèle de solide étudié dans notre approche est celui d'un solide élastique linéaire défini par la loi hookéenne classique. Cependant, différentes approches existent pour simuler le comportement de la structure et dépendent du type de problème. On peut considérer de petits déplacements dans le cas d'un solide élastique subissant des vibrations de faible amplitude [2, 60, 64, 67, 71, 80] ou lorsque l'on résout des problèmes de profil d'aile NACA en aérodynamique [1, 6, 29, 30, 32, 72]. Une formulation simplifiée d'interaction fluide-structure se basant sur la transpiration [33] considère aussi le principe des petits déplacements.

Lorsque le solide peut subir d'importantes déflexions, il est par exemple fixé à une paroi rigide dont on connaît le mouvement [51, 92]. Dans certains cas, la structure est approchée par une géométrie très fine ce qui la confond quasiment avec une ligne dans le cas où le domaine fluide est bi-dimensionnel [92]. Le modèle de frontière immergée (MFI) développé par Peskin [68, 79, 99] considère la structure comme une fibre ou un amas de fibres. Dans ce cadre, les formulations au niveau de la structure font intervenir la fonction de Dirac. Ceci change sensiblement la manière dont on considère la structure puisqu'on la simplifie de manière à ne plus se préoccuper de son intérieur éventuel. La structure n'a alors plus d'épaisseur. La méthode à domaine fictif (MDF) est une adaptation de la méthode MFI pour une structure possédant une aire ou un volume. Le domaine fluide est une géométrie simple fixée dans le cadre d'une description eulérienne sur laquelle on vient poser la géométrie du solide qui est traité par une description lagrangienne. Dans ce type de formulation, la difficulté consiste à détecter de manière consistante la frontière entre le fluide et la structure [3, 5, 20, 21, 40, 42–44].

Des simulations, où la structure peut subir de grands déplacements pour de grandes rotations ou translations, ont été réalisées particulièrement dans le cadre des méthodes des éléments finis particuliers (MEFP, [75]). Cependant, le point de vue adopté pour les équations de Navier-Stokes n'est plus celui utilisé classiquement en mécanique des fluides puisque dans ce type de méthode la description lagrangienne est aussi adoptée dans le fluide. Ainsi, comme dans la structure, les noeuds définissant le domaine fluide représentent cette fois le mouvement d'une particule de fluide. L'avantage principal de cette méthode est de ne plus avoir à traiter un terme convectif non linéaire dans les équations de Navier-Stokes. En fait, les difficultés sont transférées à la génération du maillage. Différentes techniques ont donc été développées dans ce sens pour

pouvoir remailler lorsque les distortions du maillage fluide sont trop grandes.

Les équations de la dynamique dans le solide peuvent aussi être traitées par une description eulérienne. L'inconvénient de cette approche est qu'elle n'est alors pas compatible avec la formulation arbitrairement lagrangienne-eulérienne (ALE) dans le fluide et complique sensiblement les équations à résoudre dans la structure [19]. Dans certains modèles [3, 20, 21], la loi de Hooke est remplacée par la loi néo-hookéenne [54, 65, 66, 84]. On modélise alors la structure par des équations proches de celles de Stokes pour un fluide incompressible. Une formulation spatio-temporelle (FST) a aussi été développée dans différents domaines de l'interaction fluide-structure par Tezduyar [91, 94].

Enfin, une manière de traiter la paroi d'une artère en hémodynamique consiste à ne considérer qu'un modèle de ressort généralisée (MRG) spécifiquement pour la composante radiale du déplacement [22, 36]. Elle ne reste cependant valable que pour de petits déplacements et dans l'hypothèse où le déplacement de la paroi n'a lieu que suivant cette direction radiale. Par exemple dans le cas bi-dimensionnel, cette paroi avec de telles hypothèses, peut être modélisée par une équation mono-dimensionnelle. Elle permet de simplifier de manière adéquate la difficulté du problème.

Une multitude de méthodes et de modèles ont été considérés pour résoudre l'interaction fluide-structure. Ceci révèle l'extrême complexité de ce type de problème, malgré l'ajout de certaines simplifications. L'interaction entre le fluide et le solide fait intervenir la continuité de la vitesse et la condition d'équilibre mécanique à l'interface. Ces conditions sont très largement utilisées dans les différents modèles d'interaction et nous les avons reprises pour la simulation.

On a fait le choix d'une formulation ALE dans le fluide et d'une formulation lagrangienne dans la structure. L'originalité de la simulation est qu'elle fait intervenir la méthode des éléments spectraux pour un solide élastique immergé dans un fluide incompressible. Une ambition de cette simulation est de considérer les équations de la dynamique pour une structure pouvant subir de grands déplacements comme dans le cas de la valve aortique sans considérer que cette valve soit rigide. Dans la section suivante, nous présentons différents types de valves aortiques artificielles existantes afin de montrer la variété de leur géométrie.

1.2 Quelques exemples de valves cardiaques

Développées à partir des années soixantes, il existe une multitude de valves dont le type de fonctionnement peut être assez différent d'un modèle à l'autre. Elles sont fabriquées par différents groupes comme Duromedics, Medtronic, Saint Jude Medical ou encore Carbomedic appartenant au groupe Sorin. Voici quelques exemples de modèles (figure 1.1) dont nous décrivons succinctement le fonctionnement.

- La valve ATS (diamètre 16-29 mm) :

elle se compose d'un orifice en forme d'anneau, de deux feuillets, et d'une manchette de couture en polyester. L'orifice est en carbone pyrolitique pur qui lui procure une longévité adéquate. L'écoulement du sang est d'autant plus facilité que la section de ce dispositif a une aire d'ouverture maximale importante. Les feuillets sont recouverts d'un substrat de graphite imbibé de tungstène à 20% ce qui améliore leur opacité aux rayons X. L'anneau de renforcement, les anneaux de serrure, et le fil de freinage entourant l'orifice pyrolitique de carbone sont faits de titane pour une meilleure résistance ce qui leur confère aussi, comme pour les feuillets, une bonne opacité aux rayons X.

- La valve Biocor (diamètre 21-29 mm) :

la valve Saint Jude Medical Biocor est fabriquée à partir de tissus aortiques porcins. Suivant la

fixation, le tissu est adapté à un stent¹ flexible composé d'un copolymère d'acétal sur lequel est apposé une couture en anneau. Le stent et l'anneau sont recouverts d'un tissu en polyester pour favoriser la repousse rapide et complète du tissu. L'anneau de couture contient un fil d'acier inoxydable pour favoriser sa visualisation par radioscopie.

- La valve Carbomedics (Groupe Sorin) (diamètre 17-29 mm) :

la valve et les feuillets sont faits de carbone pyrolitique. Une bande de renforcement en titane fixée à un logement de carbone est attachée un anneau de suture en tissu de polytétraéthylène (PTE). Un fil métallique de nitinol maintient l'anneau en titane sur le logement avec un système de cannelures.

- La valve Carpentier-Edwards péricardique (diamètre 19-31 mm) :

C'est une bioprothèse fabriquée à partir de trois morceaux de tissu péricardique de bovin. Le tissu est monté sur une armature légère qui est recouverte et cousue avec un tissu poreux en polytétrafluoroéthylène (PTFE). Un anneau de couture en caoutchouc moulé de silicone est recouvert par un tissu de polytétrafluoroéthylène permettant au chirurgien de coudre la valve sur le patient.



FIG. 1.1 – Exemples de valves

- La valve Saint Jude Medical (diamètre 19-31 mm) :

fabriquée et implantée à partir de 1977, c'est la valve bi-feuillet la plus connue. Son angle d'ouverture est de 85 degrés. Les logements des feuillets sont en pyrolite de carbone tandis que

¹Stent : Prothèse endocoronarienne, c'est un anneau ou cylindre flexible, généralement métallique, que l'on implante dans une artère pour en maintenir les parois

les feuillets sont imbibés de tungstène.

- La valve Starr-Edwards (diamètre 21-29 mm) :

c'est l'une des plus anciennes valves (1961). Elle était constituée d'une bille pouvant tourner librement dans une cage.

- La valve Omnicarbon (diamètre 21-29 mm) :

comme son nom l'indique, cette valve est essentiellement composée en carbone. Elle est constituée d'un unique disque pivotant.

Il existe différents types de géométries et de mécanismes décrivant le fonctionnement d'une valve. Elles peuvent être souples ou rigides, mono-, bi- ou tri-feuillets. Un grand nombre d'études échographiques et radiographiques sont effectuées pour surveiller le vieillissement de ces valves chez les patients. C'est pourquoi elles possèdent toutes un dispositif les rendant plus opaques aux rayons X. Le patient après la pose d'un tel appareil doit prendre des médicaments destinés à fluidifier le sang. En effet la pose d'une valve aortique artificielle chez un patient est sujette à la formation d'amas sanguins sur toutes les parties de la valve qui peuvent faire résistance à l'écoulement du sang et provoquer de grands gradients de pression. Pour diminuer les risques de thrombose la prise de médicaments anticoagulants est donc essentielle même si la géométrie des valves les plus récentes tend à faire diminuer ce type de risque par rapport, par exemple, à la valve Starr-Edwards qui provoquait fréquemment des thrombo-embolies dues à de forts gradients de pression.

Les valves aortiques artificielles sont conçues pour remplacer au niveau du muscle cardiaque, la valve tricuspide du ventricule droit, la valve mitrale du ventricule gauche, la valve pulmonaire ou aortique (figure 1.2).

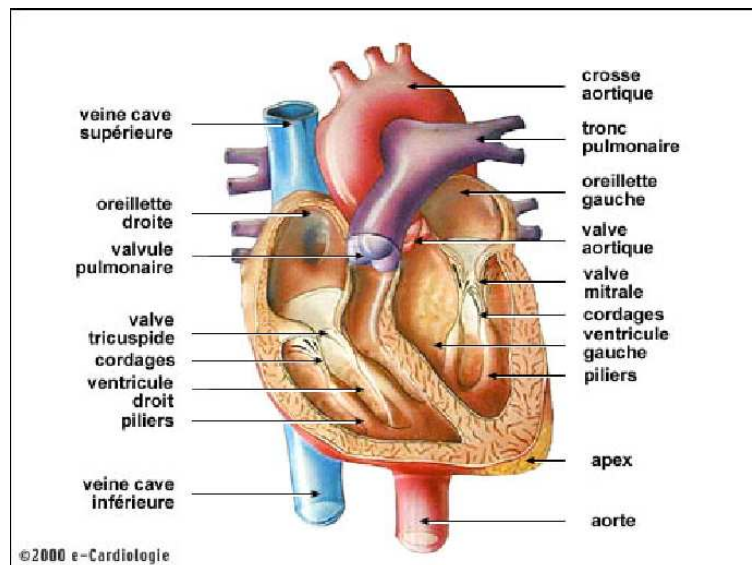


FIG. 1.2 – Représentation du coeur

L'étude de ces valves artificielles est souvent effectuée d'un point de vue clinique, du fait qu'en médecine on insiste sur l'analyse radiographique et échographique afin de vérifier le bon état de la valve en question. Les modèles numériques mis en jeu ne l'ont été le plus souvent que dans des cas stationnaires sans prise en compte du mouvement des valves. Dans le cas de valves souples on peut cependant citer les développements réalisés par Peskin [68] sur la modélisation du coeur ou encore les travaux de De Hart, Peters, Schreurs et Baaijens [20, 21] pour modéliser une valve aortique de type tri-feuillet. La modélisation de la valve aortique a été abordée de

plusieurs manières. Dans notre cas, c'est la première fois que ce problème est étudié du point de vue des méthodes spectrales en considérant que le mouvement de la valve est causé par l'écoulement du fluide qui la traverse. Quoique le comportement rhéologique du sang soit celui d'un fluide non newtonien à cause de la présence des éléments figurés (globules blancs et rouges, plaquettes), dans cette thèse, nous ferons l'hypothèse d'un comportement newtonien. Ceci se justifie dans les grandes artères où l'écoulement présente un taux cisaillement élevé, tel que la viscosité apparente est une constante. On suppose alors que le fluide est newtonien. Dès lors, les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible décriront le mouvement du fluide. Cependant, l'écoulement du sang est pulsatile et se répète avec une périodicité liée au battement cardiaque (environ 70 battements par minute au repos). C'est un aspect que nous n'avons pas pris en compte dans nos simulations afin de simplifier suffisamment le type d'écoulement. Nous avons ainsi considéré un écoulement de type Poiseuille stationnaire dans un canal plan dans lequel nous avons immergé une valve correspondant au solide étudié (voir figure 1.3).

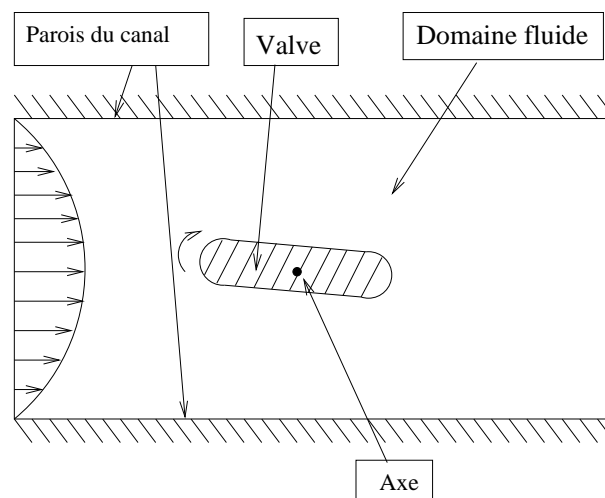


FIG. 1.3 – Valve simplifiée 2D

1.3 Organisation de la thèse

Le support logiciel sur lequel nous nous basons est une boîte à outils écrite en C++ nommée SPECULOOS (SPECtral Unstructured eLEMENT Object-Oriented System) développée par Yves Dubois-Pèlerin et al. [28]. A partir de ce code, plusieurs travaux de thèses ont pu être menés dans le domaine de la LES [96] et dans le domaine des fluides viscoélastiques [35]. Un objectif de cette thèse est donc aussi d'élargir le type de problèmes pouvant être résolus à partir de cet outil, notamment celui de l'interaction fluide-structure.

Dans le chapitre 2, nous présentons les équations continues (formulation forte) mises en jeu au niveau du fluide, du solide et de l'interface. Ensuite nous écrivons une formulation faible de ces équations. A l'interface la structure subit les contraintes dues aux efforts de frottement et à la pression du fluide.

Au chapitre 3, nous décrivons les discrétisations spatiale et temporelle mises en oeuvre dans le fluide et dans la structure. Les équations de Navier–Stokes sont discrétisées à l'aide des travaux les plus récents sur la méthode des éléments spectraux. Les équations de la dynamique sont résolues au niveau de la structure et une analyse est faite pour la méthode de Newmark, dans le cas particulier de la méthode des trapèzes.

Le chapitre 4 est ensuite consacré à l'élaboration algorithmique de la méthode ALE au niveau du fluide dans l'objectif de pouvoir l'associer au mouvement d'une structure dont la description est lagrangienne. Nous étudions donc pour un mouvement prescrit de l'interface du fluide, la possibilité du maillage fluide de se déformer. L'idée développée ici est de considérer qu'avant même de faire un remaillage quelconque du domaine fluide, nous pouvons d'abord faire évoluer le maillage fluide par déformation uniquement.

Au chapitre 5, nous complétons cette approche avec l'élaboration complète de l'algorithme nécessaire pour résoudre l'interaction fluide-structure, en gardant toujours l'optique de simplement déformer les différents maillages intervenant dans la résolution. La géométrie du problème a cependant été suffisamment simplifiée pour pouvoir s'affranchir de difficultés liées à la génération de maillages trop complexes. L'enjeu de cette thèse est donc d'apporter et d'adapter certaines méthodes déjà éprouvées dans le domaine des éléments finis en partant des outils dont nous disposons afin de pouvoir résoudre l'interaction fluide-structure.

1.4 Notations

Dans les chapitres qui suivent, nous faisons les conventions d'écriture suivantes pour désigner un scalaire, un vecteur, un tenseur ou une matrice. Les quantités scalaires seront simplement en minuscule. Les vecteurs seront désignés par des caractères gras, de même que les tenseurs. Nous désignerons les matrices par des caractères gras en majuscule italique alors que Par exemple, la pression sera notée p , la vitesse sera notée \mathbf{v} , le tenseur des contraintes dans la structure sera noté $\boldsymbol{\sigma}_s$ et la matrice de masse sera désignée par \mathbf{M} . En ce qui concerne les matrices, elles pourront par exemple désigner des matrices par bloc suivant le nombre de dimensions en espace. En effet, nous pouvons par exemple avec la vitesse \mathbf{v} et la matrice \mathbf{M} préciser leur produit de la manière suivante en deux dimensions

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v}_x \\ \underline{v}_y \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Les symboles v_x et v_y désignent des quantités scalaires définies sur un ensemble de points géométriques (typiquement un maillage). Elle sont soulignées dans (1.1) parce qu'elles constituent un vecteur sur cet ensemble de points (les points de collocation, par exemple). La matrice jacobienne sera cependant exprimée par un caractère gras non italique (\mathbf{F}).

Chapitre 2

Modèles mathématiques

Nous présentons dans ce chapitre les équations écrites du point de vue de la mécanique des milieux continus utilisées pour les cas d'un fluide et d'un solide. Nous considérons les conditions d'interface nécessaires à l'élaboration du problème de l'interaction d'un fluide visqueux et d'un corps solide immergé. Les formulations faibles associées à ces équations seront construites afin de bien prendre en compte cet aspect géométrique du problème. Nous allons utiliser la formulation ALE au niveau du fluide. Cette approche est l'une des plus couramment utilisée en mécanique des fluide lorsque l'on considère une variation du domaine d'étude en fonction du temps. Au niveau du solide, nous allons considérer la formulation lagrangienne lorsque celui-ci peut subir d'assez grand déplacements. Cependant, dans le solide, la formulation faible de la dynamique suivant le point de vue que nous allons adopter nous amène à une incertitude. Doit-on calculer le déplacement par rapport à la configuration initiale ou courante, voire une configuration intermédiaire? Nous voulons (même si nous n'avons pas de grandes déformations) de grands déplacements de la structure au cours de la simulation. L'approche classique développée jusqu'à maintenant est de considérer de petits déplacements en plus d'avoir des petits gradients de déplacements. Cette approche est par exemple bien décrite dans [6, 15, 22, 31, 33, 36, 59, 80]. Sous ces hypothèses très largement utilisées dans la pratique, la formulation faible est calculée par rapport à la configuration initiale du solide notée Ω_0^s et donc la formulation des équations de la dynamique n'est pas effectuée sur la configuration courante notée Ω_t^s . Pour de plus grands déplacements, une approche intéressante est considérée dans [59] et, entre autres, la recherche d'une formulation objective pour de grands déplacements est traitée. Dans cet article, la formulation de la dynamique est alors écrite avec des fonctions test à support dans Ω_0^s mais avec un tenseur des contraintes écrit par rapport à Ω_t^s . Cette approche sophistiquée demande la résolution d'un système non symétrique ce qui en fait un modèle beaucoup plus coûteux en terme de temps de calcul et même de stabilité à développer. On peut aussi citer l'article [14] où une approche par rapport à la position courante du fluide est utilisée. Cette approche fait intervenir une formulation explicite des équations de la dynamique pour des fonctions de formes ayant leur support sur Ω_t^s . Une autre approche où de larges déplacements sont considérés est décrite dans le cadre du moulage [39]. Cette approche introduit une configuration lagrangienne fictive pour une formulation ALE et est nommée plus précisément formulation ALE réactualisée. Elle se base sur des équations du fluide différentes où le terme convectif n'est plus considéré. Une reconstruction de la configuration actualisée est alors nécessaire en prenant en compte la position courante du domaine guidé par la vitesse ALE et une position lagrangienne dite "fictive" guidée par la vitesse matérielle du fluide. Une telle approche pour les équations de la dynamique ne se justifie plus vraiment puisque notre configuration courante est aussi notre configuration matérielle.

On peut aussi citer les articles [20,21] dans le cadre de l'interaction fluide-structure pour une valve. Le modèle utilisé pour la valve ne fait alors plus intervenir les équations de la dynamique suivant la loi constitutive de Hooke classique pour un solide. A la place, le modèle considéré est un problème statique et la loi constitutive du solide utilisé est la loi néo-Hookéenne [54, 66].

Toutes ces approches montrent qu'il existe autant de variantes des équations résolues dans le solide que d'auteurs et ceci révèle que la formulation faible des équations de la dynamique pour un solide n'est donc pas aussi clairement décrite dans la littérature que ne l'est la formulation faible des équations de Navier–Stokes dans le fluide. Cette ambiguïté n'est pas présente dans le cas de l'élasticité statique car les formulations faibles sont écrites par rapport à Ω_0^s . Dans [71], le déplacement est décomposé suivant une plage de fréquences et on ne cherche donc des solutions que suivant un certain nombre de modes. Là encore, les formulations faibles sont linéarisées et écrites suivant Ω_0^s . Dans [53], l'élasticité statique et la dynamique sont écrites en prenant le tenseur des contraintes par rapport aux coordonnées lagrangiennes mais dont la divergence qui lui est appliquée est écrite par rapport aux coordonnées eulériennes. Le passage à une formulation purement lagrangienne fait ensuite intervenir l'hypothèse des petits gradients de déplacement. Une description plus précise est considérée en faisant appel à des changements de repères entre la configuration initiale Ω_0^s et la configuration déformée Ω_t^s . Dans le cas que nous étudions, le repère dans lequel se déplace le solide est fixe. Aucun changement de base n'est réalisé et cela nous évite d'avoir à introduire l'effet des forces de Coriolis ou d'entraînement comme cela est décrit dans [45].

Une difficulté théorique, du moins pour la formulation faible, semble, dans le cas des équations de la dynamique, nous restreindre à ne travailler que dans le cas de petits déplacements et de petits gradients de déplacements. En écho à la question précédente, peut-on alors dépasser cette problématique ? La réponse est oui mais nous allons devoir sortir du cadre classique des formulations habituellement utilisées. Nous voulons que le mouvement du solide soit simplement dû au fluide sans qu'il ait forcément un mouvement rigide propre. La formulation faible va être écrite par rapport au domaine du solide en mouvement suivant sa position courante.

2.1 Les équations de Navier–Stokes pour le fluide visqueux newtonien incompressible

Nous nous intéressons dans un premier temps aux équations de Navier–Stokes qui régissent l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien incompressible. Ces équations peuvent être exprimées dans le domaine occupé par le fluide Ω^f , à l'aide des équations de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_f \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \rho_f \mathbf{b}_f \quad (2.1)$$

et de la contrainte d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.2)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}_f$ s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \mu_f(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) = -p\mathbf{I} + 2\mu_f\mathbf{d}(\mathbf{v}). \quad (2.3)$$

Dans les équations (2.1)-(2.3), D/Dt est la dérivée matérielle définie par

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (2.4)$$

Le scalaire p est la pression, \mathbf{I} le tenseur identité, \mathbf{v} le vecteur vitesse, μ_f la viscosité dynamique, ρ_f la masse volumique, \mathbf{b}_f le vecteur des forces volumiques qui s'exercent sur le fluide, \mathbf{d} le tenseur des taux de déformation

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) \quad (2.5)$$

avec T la transposition.

On peut donc écrire les équations de Navier–Stokes à l'aide des équations (2.1)-(2.4) sous la forme

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu_f \Delta \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{b}_f \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.7)$$

Les équations (2.6)-(2.7) peuvent encore être mises sous une forme adimensionnelle en posant $\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{v}}{U}$, $\mathbf{x}_a = \frac{\mathbf{x}}{L}$, $p_a = \frac{p-p_0}{\rho_f U^2}$, $\mathbf{b}_{f_a} = \frac{\mathbf{b}_f L}{U^2}$ et $t_a = \frac{tU}{L}$ avec \mathbf{x} les coordonnées spatiales, p_0 une pression de référence, L et U la longueur et la vitesse de référence, respectivement. Ainsi en utilisant ces relations dans (2.6)-(2.7) et en omettant l'indice a , nous obtenons les équations suivantes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{b}_f \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.9)$$

On reconnaît le nombre de Reynolds tel que

$$Re = \rho_f U L / \mu_f = U L / \nu_f. \quad (2.10)$$

Le scalaire $\nu_f = \mu_f / \rho_f$ désigne alors la viscosité cinématique. Nous désignons aussi par Γ_D (respectivement Γ_N) la frontière de Ω^f où les conditions de Dirichlet (respectivement les conditions de contraintes surfaciques) sont appliquées.

Sur Γ_D , en notant $\bar{\mathbf{v}}|_{\Gamma_D}$ les fonctions données de Dirichlet, nous avons

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}|_{\Gamma_D}. \quad (2.11)$$

Par définition, la fonction \mathbf{t}_f de densité des forces de contact sur le fluide s'écrit

$$\mathbf{t}_f = \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n}_f \quad (2.12)$$

où \mathbf{n}_f est le vecteur normal unitaire sortant sur Γ_N .

Sur le bord Γ_N , nous considérerons des conditions [11, 25, 82] telles que

$$\mathbf{t}_f = -p \mathbf{I} \mathbf{n} + 2\mu_f \mathbf{d}(\mathbf{v}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (2.13)$$

avec $\mathbf{n} = \mathbf{n}_f$ et $\bar{\mathbf{t}}$ une contrainte imposée sur Γ_N .

2.2 Les équations de la dynamique pour un solide élastique

Nous utilisons les équations de la dynamique d'un corps solide dans le cadre de l'élasticité linéaire infinitésimale. Les équations sont écrites dans le domaine Ω^s dans l'hypothèse des petits gradients de déplacements telle que

$$\|\nabla \mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{I}\| \quad (2.14)$$

La dérivée matérielle est linéarisée et contient l'accélération écrite comme la dérivée partielle seconde par rapport au temps du vecteur déplacement noté \mathbf{u} . Ces différentes hypothèses permettent donc de confondre la formulation lagrangienne et eulérienne car elles deviennent alors indiscernables [53]. On suppose donc intrinsèquement que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \simeq \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} \quad (2.15)$$

Ainsi, nous posons les équations de Navier sur Ω_t^s

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{b}_s = \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.16)$$

Le symbole $\boldsymbol{\sigma}_s$ est le tenseur des contraintes de Cauchy du solide, \mathbf{b}_s et ρ_s le vecteur des forces volumiques et la masse volumique du solide, respectivement. La Loi de Hooke lie le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_s$ au tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ par la relation suivante

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.17)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé. On peut rappeler suivant la dimension d , leur lien avec le coefficient de poisson ν_s et le module d'Young E_s par les formules suivantes

$$E_s = \frac{2\mu(d\lambda + 2\mu)}{(d-1)\lambda + 2\mu}, \quad (2.18)$$

$$\nu_s = \frac{\lambda}{(d-1)\lambda + 2\mu}. \quad (2.19)$$

Inversement nous avons

$$\lambda = \frac{\nu_s E_s}{[1 - \nu_s(d-1)](1 + \nu_s)}, \quad (2.20)$$

$$\mu = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)}. \quad (2.21)$$

Le tenseur des déformations est défini à l'aide du vecteur des déplacements par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.22)$$

On définit aussi la vitesse telle que

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} \quad (2.23)$$

et l'accélération

$$\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.24)$$

La vitesse et l'accélération sont donc écrites comme des dérivées eulériennes du déplacement. Ici encore, la dérivée lagrangienne peut être considérée indistinctement pour $\dot{\mathbf{u}}$ et $\ddot{\mathbf{u}}$. Nous verrons plus loin que cette incapacité à distinguer les dérivées lagrangiennes et eulériennes peut engendrer une certaine confusion dans la manière de construire la formulation faible des équations de la dynamique. Dans le solide nous noterons Γ_D^s le bord sur lequel sera imposée une condition de Dirichlet et par Γ_N^s la partie du bord sur lequel des contraintes surfaciques seront imposées. On notera ainsi sur Γ_D^s

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma_D^s}. \quad (2.25)$$

Suivant le type de modèle géométrique que nous étudions ensuite, une fixation interne peut être considérée en complément d'une condition de Dirichlet à la surface de la structure. De même, nous noterons \mathbf{t}_s , la densité des forces de contact sur Γ_N^s telle que

$$\mathbf{t}_s = \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}_s, \quad (2.26)$$

où \mathbf{n}_s désigne le vecteur normal unitaire sortant du solide.

2.3 L'interaction fluide-structure : les conditions limites à l'interface

L'interaction fluide-structure exprime le problème mécanique du contact d'un corps solide élastique et d'un fluide visqueux en mouvement. Cette étape essentielle de notre problème nécessite la caractérisation de conditions aux limites supplémentaires qui décrivent le dialogue entre le fluide et le solide.

Soient deux domaines, l'un fluide Ω^f et l'autre solide Ω^s , en contact le long de l'interface $\Gamma_I(t)$. Nous utilisons deux conditions au niveau de l'interface (Fig 2.1). D'une part nous considérons que les vitesses \mathbf{y} sont continues au cours du temps. Ceci implique

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_I(t). \quad (2.27)$$

D'autre part, nous considérons aussi que l'interface est en équilibre mécanique

$$\mathbf{t}_f + \mathbf{t}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_I(t). \quad (2.28)$$

Cette seconde équation exprime le principe de l'action des forces réciproques à l'interface.

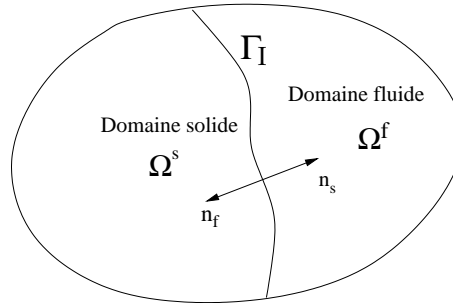


FIG. 2.1 – Interface fluide-structure

A l'interface, le lien entre vecteurs normaux est défini de telle manière que

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s. \quad (2.29)$$

La condition de Dirichlet que nous imposons exprime la continuité des vitesses à l'interface car nous avons fait l'hypothèse que le fluide était visqueux [25, 88]. Il n'en serait pas exactement de même avec d'autres types de fluide comme par exemple un fluide parfait où la condition porterait sur la continuité des composantes normales de la vitesse ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$). Par (2.12), (2.26), (2.28) et (2.29) nous pouvons déduire que

$$(\boldsymbol{\sigma}_f - \boldsymbol{\sigma}_s) \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_I(t). \quad (2.30)$$

2.4 Domaine mobile

Dans le cas où le domaine Ω^f se déforme ou se déplace au cours du temps, nous adoptons la formulation arbitrairement lagrangienne-eulérienne (ALE) [9, 26, 38, 85]. Habituellement, lorsque le domaine fluide est fixé, la formulation spatiale ou eulérienne est adoptée et est suffisante pour décrire l'écoulement. Dans ce cas on s'intéresse à une ou plusieurs grandeurs prises par le fluide (comme la vitesse et la pression) à une position donnée ou dans un domaine donné (comme Ω^f). La formulation lagrangienne ou matérielle est plus couramment utilisée lorsque le domaine peut se déformer et se déplacer tout en continuant à faire référence à la configuration initiale. La formulation lagrangienne étant plus couramment utilisée pour le solide, la formulation capable d'allier ces deux aspects qui cohabitent dans le cas de l'interaction fluide-solide est la formulation ALE. Celle-ci associe les endroits dans le domaine fluide où on a besoin de se rapprocher d'une formulation lagrangienne afin de suivre localement le mouvement des particules (par exemple proche d'une interface entre le fluide et le solide) et les endroits où la description eulérienne suffit à décrire l'écoulement. Nous avons donc besoin d'une configuration de référence Ω_0^f pour laquelle nous utiliserons les coordonnées lagrangiennes \mathbf{X} . Le domaine Ω_t^f est alors appelé la configuration actualisée avec les coordonnées eulériennes \mathbf{x} . Ainsi, nous pouvons définir la "carte" \mathcal{A}_t liant la configuration de référence à la configuration actualisée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}_t : \Omega_0^f \subset \mathbb{R}^d & \rightarrow \Omega_t^f \subset \mathbb{R}^d \\ \mathbf{X} & \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{A}_t(\mathbf{X}), \forall t \in I. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

L'entier d indique la dimension de l'espace et $I = [t_0, T]$ l'intervalle de temps de l'intégration. Nous définissons ainsi \mathbf{w} la vitesse ALE

$$\mathbf{w} = \left. \frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}. \quad (2.32)$$

La dérivée temporelle de \mathbf{v} dans cette configuration s'écrit alors

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (2.33)$$

Le champ \mathbf{w} servira par la suite à calculer une vitesse associée au maillage. L'interprétation de l'équation (2.33) nous permet de reconnaître différentes situations. Lorsque la vitesse \mathbf{w} est égale à \mathbf{v} , on retrouve la définition de la dérivée matérielle de la vitesse alors que si elle vaut zéro on obtient la dérivée eulérienne de la vitesse [26, 27]. C'est pourquoi la configuration issue de cette approche se nomme arbitrairement lagrangienne-eulérienne. Elle permet de passer localement de la configuration lagrangienne à la configuration eulérienne dans une même géométrie. Quand l'opérateur gradient ∇ sera exprimé suivant les coordonnées \mathbf{X} nous l'écrirons alors $\nabla_{\mathbf{X}}$. L'incorporation de (2.33) dans (2.8) nous permet d'obtenir l'équation de Navier–Stokes en formulation ALE

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{v}) + \mathbf{b}_f. \quad (2.34)$$

Dans cette formulation, les relations (2.34) et (2.9) forment le système à résoudre.

2.5 Formulations faibles

La formulation faible effectue une réduction de l'ordre des dérivées partielles par une intégration par parties. Ceci permet d'agrandir les espaces dans lesquelles la solution numérique sera construite. Nous allons donc définir les différents espaces de Sobolev nécessaires à l'écriture des formulations

faibles et principalement des sous-ensembles de l'espace de Hilbert H^1 et l'espace de Lebesgue L^2 [83] dans un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ quelconque. Ces espaces sont nécessaires pour se placer dans les conditions d'utilisation du théorème de Lax-Milgram [25] afin d'avoir existence et unicité d'une solution suivant les formulations faibles que nous considérons. L'espace $L^2(\Omega)$ est défini par l'ensemble suivant

$$L^2(\Omega) = \{u; \text{fonction scalaire mesurable} : \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\Omega < \infty\}. \quad (2.35)$$

La norme associée à cet espace pour une fonction $u \in L^2(\Omega^f)$ s'écrit

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.36)$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions suivantes

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega), \forall k \in [1, d] \cap \mathbb{N}\}. \quad (2.37)$$

La norme associée à cet espace s'écrit

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(\mathbf{x})|^2 + \sum_{k=1}^d |\frac{\partial u}{\partial x_k}|^2) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.38)$$

2.5.1 Dans le fluide

Pour écrire la formulation faible de (2.34) nous introduisons tout d'abord l'espace $H_{0,D}^1(\Omega_0^f)^d$

$$H_{0,D}^1(\Omega_0^f)^d = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega_0^f)^d : \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0\}. \quad (2.39)$$

Les fonctions test $\hat{\Phi}$ qui vont nous permettre d'établir la formulation faible de (2.34) sont alors choisies dans $H_{0,D}^1(\Omega_0^f)^d$. Donc nous aurons par la suite

$$\hat{\Phi} \in H_{0,D}^1(\Omega_0^f)^d. \quad (2.40)$$

Ces fonctions test écrites sur Ω_0^f sont liées aux mêmes fonctions de test notées Φ écrites sur Ω_t^f en utilisant (2.31)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathcal{A}_t(\mathbf{X})) = \hat{\Phi}(\mathbf{X}) = \hat{\Phi} \circ \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}). \quad (2.41)$$

Ceci va nous permettre d'écrire la formulation faible en mettant bien en évidence que les fonctions test évoluent suivant le mouvement du domaine au cours du temps. On définit alors l'espace des fonctions test Φ à partir de l'espace de $\hat{\Phi}$ par

$$V(\Omega_t^f)^d = \{\Phi : \Omega_t^f \times I \rightarrow \mathbb{R}^d, \Phi(\mathbf{x}) = \hat{\Phi} \circ \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), \hat{\Phi} \in H_{0,D}^1(\Omega_0^f)^d\}. \quad (2.42)$$

De même, nous cherchons la vitesse \mathbf{v} dans l'espace suivant

$$V_D(\Omega_t^f)^d = \{\mathbf{u} \in V(\Omega_t^f)^d : \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{v}}|_{\Gamma_D}\}. \quad (2.43)$$

La formulation faible non-conservative en configuration ALE s'écrit en utilisant (2.34) et (2.9) : Trouver $(\mathbf{v}, p) \in V_D(\Omega_t^f)^d \times L^2(\Omega_t^f)$, $t \in I$ telles que

$$\int_{\Omega_t^f} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \cdot \Phi d\Omega = \int_{\Omega_t^f} [p \nabla \cdot \Phi - \frac{2}{Re} \nabla \mathbf{v} : \mathbf{d}(\Phi) + \mathbf{b}_f \cdot \Phi] d\Omega \quad \forall \Phi \in V(\Omega_t^f)^d \quad (2.44)$$

$$\int_{\Omega_t^f} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Psi \, d\Omega = 0 \quad \forall \Psi \in L^2(\Omega_t^f). \quad (2.45)$$

La formulation conservative demande une relation supplémentaire que nous démontrons au moyen des fonctions test Φ . A partir de la dérivée temporelle de vitesse eulérienne, on écrit l'égalité suivante

$$\int_{\Omega_t^f} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \Phi \, d\Omega = \int_{\Omega_t^f} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \Phi)}{\partial t} \, d\Omega - \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \, d\Omega. \quad (2.46)$$

En prenant en compte que le déplacement du domaine fluide est réalisé suivant la vitesse ALE \mathbf{w} , le théorème du transport de Reynolds est appliqué suivant cette vitesse à la première intégrale du membre de droite dans (2.46)

$$\int_{\Omega_t^f} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \Phi)}{\partial t} \, d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \Phi \, d\Omega - \int_{\Gamma_t^f} (\mathbf{v} \cdot \Phi)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma. \quad (2.47)$$

La dérivée $\frac{d}{dt}$ dans (2.47) est aussi notée $\frac{\delta}{\delta t}$ [25] pour la distinguer du cas où le domaine se déplace suivant la propre vitesse du fluide \mathbf{v} . Mais cette distinction n'est pas indispensable mathématiquement puisque c'est le domaine d'intégration qui change suivant que l'on dérive en temps $\int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \Phi \, d\Omega$ suivant l'approche ALE ou particulière. La variation de la géométrie Ω_t^f est considérée suivant la vitesse ALE \mathbf{w} . C'est suivant la vitesse ALE que la borne Γ_t^f se déplace au cours du temps. Donc, suivant le théorème du transport de Reynolds, c'est la vitesse \mathbf{w} qui est utilisée pour l'intégrale sur Γ_t^f . L'équation (2.47) est essentielle pour déterminer la formulation ALE. Nous appliquons ensuite le théorème de la divergence à l'intégrale de bord de (2.47) et nous pouvons ainsi déduire

$$\int_{\Gamma_t^f} (\mathbf{v} \cdot \Phi)(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = \int_{\Omega_t^f} \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \Phi)\mathbf{w}] \, d\Omega. \quad (2.48)$$

En développant cette dernière expression, il vient

$$\int_{\Omega_t^f} \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \Phi)\mathbf{w}] \, d\Omega = \int_{\Omega_t^f} [(\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \Phi + (\mathbf{w} \cdot \nabla \Phi) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \Phi)(\nabla \cdot \mathbf{w})] \, d\Omega. \quad (2.49)$$

En remplaçant (2.49) dans (2.47), on a

$$\int_{\Omega_t^f} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \Phi)}{\partial t} \, d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \Phi \, d\Omega - \int_{\Omega_t^f} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \Phi + (\mathbf{w} \cdot \nabla \Phi) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \Phi)(\nabla \cdot \mathbf{w}) \, d\Omega. \quad (2.50)$$

Les dérivées matérielles des fonctions test Φ sont nulles car celles-ci suivent les points matériels en configuration ALE. Sur ces points, elles gardent la même valeur et donc nous obtenons la relation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \Phi = 0. \quad (2.51)$$

De plus, en remplaçant (2.33) et (2.51) dans (2.46), on déduit

$$\int_{\Omega_t^f} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \Phi \, d\Omega = \int_{\Omega_t^f} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \Phi)}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\Omega_t^f} (\mathbf{w} \cdot \nabla \Phi) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega_t^f} (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \Phi \, d\Omega. \quad (2.52)$$

Portant (2.50) dans (2.52), nous obtenons finalement

$$\int_{\Omega_t^f} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \Phi \, d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \Phi \, d\Omega - \int_{\Omega_t^f} (\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} \cdot \Phi \, d\Omega. \quad (2.53)$$

L'utilisation de (2.53) dans (2.44) nous permet de poser la formulation faible (2.44)-(2.45) sous sa forme conservative :

Trouver $(\mathbf{v}, p) \in V_D(\Omega_t^f)^d \times L^2(\Omega_t^f)$, $t \in I$ telles que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \Phi \, d\Omega + \int_{\Omega_t^f} [\{\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w}))\} \cdot \Phi] \, d\Omega = \\ \int_{\Omega_t^f} [p \nabla \cdot \Phi - \frac{2}{Re} \nabla \mathbf{v} : \mathbf{d}(\Phi) + \mathbf{b}_f \cdot \Phi] \, d\Omega \quad \forall \Phi \in V(\Omega_t^f)^d \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\int_{\Omega_t^f} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Psi \, d\Omega = 0 \quad \forall \Psi \in L^2(\Omega_t^f). \quad (2.55)$$

Le symbole \otimes désigne le produit tensoriel de deux vecteurs. Les deux formulations peuvent être utilisées pour résoudre les équations de Navier–Stokes. La formulation non-conservative était déjà accessible dans le cadre de la résolution numérique. Nous avons donc ajouté la formulation conservative utilisée par Lee Wing Ho et Fabio Nobile [37, 52, 73]. L'avantage de la formulation conservative est qu'elle lève l'ambiguïté qui peut survenir dans le choix de la configuration sur laquelle sera discrétisée la dérivée temporelle de vitesse. Avec la formulation conservative, la dérivée temporelle lie la position courante du domaine fluide au champ de vitesse courant.

2.5.2 Dans le solide

Contrairement à la partie fluide, le domaine solide est calculé du point de vue lagrangien. Le champ de déplacement \mathbf{u} ajouté à la position initiale Ω_0^s du domaine solide nous donne la position courante du solide Ω_t^s . Ainsi, nous cherchons \mathbf{u} dans l'espace suivant

$$W(\Omega_t^s)^d = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_t^s)^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_D^s} = \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma_D^s}\}. \quad (2.56)$$

La fonction test Φ_s associée à la résolution de la structure est donc choisie dans

$$W_0(\Omega_t^s)^d = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_t^s)^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_D^s} = 0\}. \quad (2.57)$$

La formulation faible que nous résolvons dans la structure s'écrit donc :

Trouver $\mathbf{u} \in W(\Omega_t^s)^d$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t^s} \boldsymbol{\sigma}_s : \nabla \Phi_s \, d\Omega + \int_{\Omega_t^s} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \Phi_s \, d\Omega = \\ \int_{\Gamma_N^s(t)} \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}_s \cdot \Phi_s \, d\Gamma + \int_{\Omega_t^s} \rho_s \mathbf{b}_s \cdot \Phi_s \, d\Omega \quad \Phi_s \in W_0(\Omega_t^s)^d. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Cette formulation faible n'est pas aussi classique qu'il ne le semble car nous l'avons écrite par rapport à la position courante Ω_t^s . Il est cependant possible d'écrire une formulation conservative des équations de la dynamique. En faisant l'hypothèse que la dérivée matérielle de la fonction test est nulle dans la structure, nous obtenons l'expression suivante

$$\frac{D\Phi_s}{Dt} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi_s = 0. \quad (2.59)$$

Nous débutons la démonstration comme dans la section précédente avec (2.46) et nous considérons que la vitesse est la dérivée eulérienne du déplacement comme nous l'avons posé en (2.23)

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (2.60)$$

Cette approche peut sembler abusive puisque nous sommes dans une configuration lagrangienne. Mais l'hypothèse des petits gradients de déplacement nous permet de confondre vitesses lagrangiennes et vitesses eulériennes. La démonstration qui suit fait donc le parallèle entre formulation conservative et non-conservative comme pour le fluide mais dans la formulation lagrangienne

$$\int_{\Omega_t^s} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \Phi_s \, d\Omega = \int_{\Omega_t^s} \frac{\partial(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \Phi_s)}{\partial t} \, d\Omega - \int_{\Omega_t^s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \, d\Omega. \quad (2.61)$$

Nous obtenons en utilisant les théorèmes de transport de Reynolds et de divergence pour la formulation lagrangienne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t^s} \frac{\partial(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \Phi_s)}{\partial t} \, d\Omega &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \Phi_s \, d\Omega - \\ &\int_{\Omega_t^s} (\mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) \cdot \Phi_s + (\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi_s) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \Phi_s)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Cette étape est analogue à (2.50).

Maintenant nous reprenons la même procédure pour l'intégrale $\int_{\Omega_t^s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \Phi_s \, d\Omega$. Ainsi nous avons

$$\int_{\Omega_t^s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \Phi_s \, d\Omega = \int_{\Omega_t^s} \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \Phi_s)}{\partial t} \, d\Omega - \int_{\Omega_t^s} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \, d\Omega \quad (2.63)$$

puis

$$\int_{\Omega_t^s} \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \Phi_s)}{\partial t} \, d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \mathbf{u} \cdot \Phi_s \, d\Omega - \int_{\Omega_t^s} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \Phi_s + (\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi_s) \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \Phi_s)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega. \quad (2.64)$$

En utilisant (2.59) dans (2.63) et en remplaçant (2.64) dans (2.63) nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega_t^s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \Phi_s \, d\Omega &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \mathbf{u} \cdot \Phi_s \, d\Omega - \int_{\Omega_t^s} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \Phi_s + (\mathbf{u} \cdot \Phi_s)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \mathbf{u} \cdot \Phi_s \, d\Omega &- \int_{\Omega_t^s} [\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})] \cdot \Phi_s \, d\Omega. \end{aligned} \right. \quad (2.65)$$

De la même manière, en utilisant (2.59) dans (2.61) et en remplaçant (2.63) dans (2.61), on a

$$\int_{\Omega_t^s} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \Phi_s \, d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \Phi_s \, d\Omega - \int_{\Omega_t^s} [\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] \cdot \Phi_s \, d\Omega. \quad (2.66)$$

Finalement en appliquant (2.65) à (2.66), nous pouvons déduire une formulation conservative du terme faisant apparaître l'accélération

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega_t^s} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \Phi_s \, d\Omega &= \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_t^s} \rho_s \mathbf{u} \cdot \Phi_s \, d\Omega &- \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \rho_s [\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})] \cdot \Phi_s \, d\Omega - \int_{\Omega_t^s} \rho_s [\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] \cdot \Phi_s \, d\Omega \end{aligned} \right. \quad (2.67)$$

Cette expression fait intervenir deux termes non linéaires qui, dans la pratique, sont occultés par la formulation non-conservative. Il est cependant intéressant de constater que l'on peut, suivant l'hypothèse que les gradients de vitesse et de déplacement restent relativement petits, négliger ces deux termes non linéaires dans (2.67). Cependant, cette approche n'est en fait jamais utilisée dans la structure puisque la vitesse reste bien considérée lagrangienne et donc ces termes non linéaires n'ont pas de sens dans la formulation de la dynamique.

2.5.3 A l'interface

La condition aux limites que nous allons appliquer à l'interface fluide-structure $\Gamma_I(t) = \Gamma_N^s(t)$ fait appel aux forces de contraintes de surface venant du fluide. Elle représente un terme source à la surface du solide très important dans l'évolution du calcul dynamique. La formulation faible sur l'interface $\Gamma_N^s(t)$ fait appel aux fonctions test $\boldsymbol{\vartheta}$ qui sont simplement la restriction des fonctions test $\boldsymbol{\Phi}_s$ sur $\Gamma_N^s(t)$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\Phi}_s|_{\Gamma_N^s(t)} \quad (2.68)$$

L'interprétation de (2.30) en formulation faible nous donne

$$\int_{\Gamma_N^s(t)} \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}_s \cdot \boldsymbol{\vartheta} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_N^s(t)} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_N^s(t)} [p \mathbf{In} - \mu_f (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \mathbf{n}] \cdot \boldsymbol{\vartheta} \, d\Gamma. \quad (2.69)$$

2.6 Evaluation de l'énergie du système étudié

Nous utilisons dans le fluide le point de vue eulérien pour déterminer l'énergie des équations de Navier–Stokes. L'énergie du système peut donc être évaluée en multipliant les équations de Navier–Stokes (2.6) scalairement par \mathbf{v} . On intègre ensuite les équations par rapport à l'espace puis ensuite par rapport au temps [50]. Par intégration par partie sur Ω_t^f , on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t^f} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \nu_f \Delta \mathbf{v} - \mathbf{b}_f \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= 0 \Rightarrow \\ \rho_f \int_{\Omega_t^f} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nu_f \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} \right) \, d\Omega &= \int_{\Gamma_t^f} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \end{aligned}$$

On rappelle que la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_f$ est définie en (2.3). On développe ensuite l'intégrale sur la frontière Γ_t^f définie de la manière suivante

$$\Gamma_t^f = \Gamma_{paroi} \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_I \cup \Gamma_{out} \quad (2.70)$$

On illustre ces différentes frontières à la figure 2.2 où l'on considère un solide immergé dans un domaine fluide.

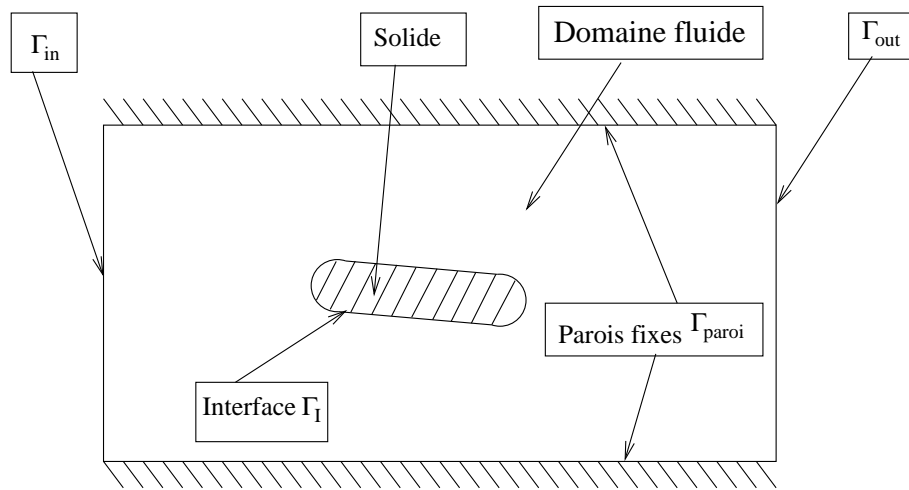


FIG. 2.2 – Géométrie d'un solide immergé dans un fluide

Sur Γ_{in} une condition sur la vitesse sera alors prescrite à un certain type d'écoulement tandis que sur Γ_{paroi} cette vitesse sera considérée égale à zéro. Pour l'interface Γ_I , les conditions limites seront définies d'après (2.27) et (2.30) tandis qu'une condition de contrainte libre sera imposée sur Γ_{out} désignant une sortie du fluide. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t^f} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma &= \\ \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{paroi}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_{out}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Nous allons nous aider de l'égalité $(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ et de l'incompressibilité pour simplifier le terme convectif

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t^f} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t^f} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \frac{1}{2} \left[- \int_{\Omega_t^f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_t^f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \right] \\ \Rightarrow \\ \int_{\Omega_t^f} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t^f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Avec le théorème du transport de Reynolds, on exprime la dérivée eulérienne de la vitesse de la manière suivante

$$\int_{\Omega_t^f} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t^f} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial t} \, d\Omega = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t^f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \right].$$

L'intégrale faisant intervenir la pression est égale à zéro avec l'incompressibilité. Pour conclure, dans le domaine fluide nous avons

$$\rho_f \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \rho_f \int_{\Omega_t^f} \nu_f \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma. \quad (2.71)$$

Dans la structure, on intègre l'équation (2.16) sur Ω_t^s en la multipliant par $\dot{\mathbf{u}}$ puis on effectue un intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t^s} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \dot{\mathbf{u}} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s) \cdot \dot{\mathbf{u}} - \rho_s \mathbf{b}_s \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \rho_s \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega_t^s} (\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) - \rho_s \mathbf{b}_s \dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega &= \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}_s \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Comme avec \mathbf{u} dans l'équation (2.22), on a aussi

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T).$$

De plus avec l'égalité (2.29), on a

$$\int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}_s \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma. \quad (2.73)$$

On remplace (2.73) dans (2.72). On fait ensuite l'approximation suivante pour sortir la dérivée du temps de l'intégrale dans (2.73)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_t^s} \rho_s \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega \right] - \int_{\Omega_t^s} \rho_s \mathbf{b}_s \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega = - \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma. \quad (2.74)$$

L'équation (2.74) n'est qu'une simplification afin par la suite de pouvoir plus facilement évaluer ces intégrales par rapport au temps. Par (2.27) et (2.30), on a aussi

$$\int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma. \quad (2.75)$$

En remplaçant (2.75) dans (2.71), on obtient

$$\begin{aligned} & \rho_f \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \rho_s \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \rho_f \int_{\Omega_t^f} \nu_f \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_t^s} \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega \right] = \rho_f \int_{\Omega_t^f} \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \rho_s \int_{\Omega_t^s} \mathbf{b}_s \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Il reste à intégrer (2.76) par rapport au temps pour en déduire l'énergie du système

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{dE(t)}{dt} dt = \rho_f \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega dt + \rho_s \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt + \\ & \rho_f \int_0^T \int_{\Omega_t^f} \nu_f \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^s} \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega dt - \\ & \rho_f \int_0^T \int_{\Omega_t^f} \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} \, d\Omega dt - \rho_s \int_0^T \int_{\Omega_t^s} \mathbf{b}_s \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma dt = 0 \\ & \Rightarrow \\ & E(T) - E(0) = \\ & \rho_f \frac{1}{2} \int_{\Omega_T^f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(T) \, d\Omega + \rho_s \frac{1}{2} \int_{\Omega_T^s} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(T) \, d\Omega + \rho_f \int_0^T \int_{\Omega_t^f} \nu_f \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega dt + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega_T^s} \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}(T))^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(T)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(T)) \, d\Omega - \rho_f \int_0^T \int_{\Omega_t^f} \mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} \, d\Omega dt - \\ & \rho_s \int_0^T \int_{\Omega_t^s} \mathbf{b}_s \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma dt - \rho_f \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(0) \, d\Omega - \\ & \rho_s \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^s} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(0) \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^s} \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}(0))^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(0)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(0)) \, d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Cette dernière équation exprime la conservation de l'énergie.

En supposant que les conditions initiales sont $\mathbf{u}_0 = \dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$ et en négligeant \mathbf{b}_f et \mathbf{b}_s , nous

simplifions (2.77) par

$$\begin{aligned} & \rho_f \frac{1}{2} \int_{\Omega_T^f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(T) \, d\Omega + \rho_s \frac{1}{2} \int_{\Omega_T^s} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(T) \, d\Omega + \rho_f \int_0^T \int_{\Omega_t^f} \nu_f \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega dt + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega_T^s} \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}(T))^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(T)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(T)) \, d\Omega = \int_0^T \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Les deux premiers termes de l'équation (2.78) représentent l'énergie cinétique du fluide et du solide. Le troisième terme correspond à l'énergie dissipée dans le fluide par viscosité alors que le quatrième terme correspond à l'énergie potentielle élastique du solide. Toute cette énergie est donc principalement contrôlée par l'écoulement que l'on impose sur la frontière Γ_I .

Chapitre 3

Approximation numérique

3.1 Discrétisation du problème : méthodes spectrales

3.1.1 Des éléments finis aux éléments spectraux

Pour résoudre les équations issues des différentes formulations faibles obtenues jusqu'à présent, nous avons fait appel aux méthodes spectrales, en particulier à la méthode des éléments spectraux [4,25] qui est une généralisation de la méthode des éléments finis [11,41,46,86]. Un domaine Ω quelconque est discrétisé en E sous-domaines disjoints Ω_l avec $l \in ([1, E] \cap \mathbb{N})$

$$\Omega = \cup_{l=1}^E \Omega_l, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j. \quad (3.1)$$

Nous notons \mathbb{P}_N l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$ dans chaque direction spatiale. Dans le cas des éléments finis, il est important de rappeler que les fonctions de base sont généralement construites à partir de polynômes de degré 0 à 2 ($\mathbb{P}_0 - \mathbb{P}_2$) en se référant par exemple au segment $\Lambda = [-1, 1]$. Avec les éléments spectraux, elles seront définies dans \mathbb{P}_N que l'on notera $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ sur le segment Λ . La méthode des éléments spectraux englobe donc clairement le cas des éléments finis. A un élément spectral est associé un ensemble de points choisis suivant l'espace de polynômes \mathbb{P}_N . Ceci permet de le décrire très précisément. Par cette approche, on évite de découper un domaine en un trop grand nombre d'éléments. Lorsque l'on augmente le nombre d'éléments, le degré polynomial restant fixe, cette description se nomme la version "h". C'est celle qui est le plus souvent utilisée en éléments finis. Lorsque l'on augmente le degré polynomial, le découpage en sous-domaines étant fixé, on nomme cette approche la version "p". Avec la méthode des éléments spectraux, nous utilisons une combinaison de ces deux versions qui est appelée la version "hp" ou méthode "hp".

3.1.2 Polynômes d'interpolation

Afin de définir le support des fonctions tests qui seront utilisées pour discrétiser les équations de Navier-Stokes et de la dynamique nous devons définir les polynômes d'interpolation que nous allons utiliser dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Pour définir la fonction d'interpolation polynomiale de Lagrange d'ordre N que nous utiliserons, nous partons des polynômes de Legendre d'ordre N notés L_N qui vérifient l'équation de Sturm-Liouville [4, 25, 83]

$$\frac{d}{dr} \left((1 - r^2) \frac{dL_N(r)}{dr} \right) + N(N + 1)L_N(r) = 0 \quad r \in \Lambda. \quad (3.2)$$

Les polynômes d'interpolation de Lagrange choisis dans ce cas sont les polynômes de Lagrange-Legendre notés h_p^N définis par

$$h_p^N(r) = -\frac{(1-r^2)\frac{dL_N}{dr}(r)}{N(N+1)L_N(r_p)(r-r_p)}, p \in [0, N] \cap \mathbb{N} \quad (3.3)$$

qui satisfont la propriété de cardinalité

$$h_p^N(r_i) = \delta_{pi} \quad (3.4)$$

avec δ le symbole de Kronecker. On appelle plus précisément les r_i (indifféremment pour s_j et t_k) les points (ou coordonnées) de collocation de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) qui sont les racines de l'expression suivante

$$(1-r^2)\frac{dL_N}{dr}(r) = 0 \Rightarrow r_i \in ([1, N-1] \cap \mathbb{N}, r_N = -r_0 = 1). \quad (3.5)$$

Nous aurons aussi besoin de définir des polynômes d'interpolation sur $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$. Les polynômes d'interpolation de Lagrange choisis sont ceux de Gauss-Legendre notés \tilde{h}_p^{N-2} et définis par

$$\tilde{h}_p^{N-2}(r) = -\frac{L_{N-1}(r)}{\frac{dL_{N-1}}{dr}(\tilde{r}_p)(r-\tilde{r}_p)}, p \in [1, N-1] \cap \mathbb{N} \quad (3.6)$$

et tels que

$$\tilde{h}_p^{N-2}(\tilde{r}_i) = \delta_{pi}. \quad (3.7)$$

Les \tilde{r}_p sont cette fois les racines du polynôme de Legendre L_{N-1} et définissent la grille de Gauss-Legendre(GL).

3.1.3 Quadratures

Un tel choix de points dans un élément Ω_l va nous permettre de pouvoir évaluer de manière très précise l'intégrale d'une fonction continue sur ce support. En outre, nous allons pouvoir utiliser la formule d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre qui lie l'intégrale d'une fonction à la somme de ses valeurs sur les points GLL r_i (respectivement s_j et t_k) munis d'un poids noté ϱ_i (respectivement ς_j et γ_k). Par définition, le poids ϱ_i pour le degré N_x choisi vaut

$$\varrho_i = \frac{2}{N_x(N_x+1)} \frac{1}{L_{N_x}(r_i)^2}. \quad (3.8)$$

Cette définition est similaire pour ς_j et γ_k mais pour les degrés respectifs N_y et N_z . Nous avons la relation fondamentale suivante sur un élément parent Λ pour un degré N dans le cas d'une intégration de Gauss-Lobatto-Legendre [25]

$$\int_{-1}^1 g \, d\Omega = \sum_{i=0}^N \varrho_i g(r_i) \quad \forall g \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda). \quad (3.9)$$

Nous profitons de (3.9) pour évaluer les intégrales d'une fonction continue f par la quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre. Par exemple, nous pouvons écrire en 2D

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f \, d\Omega \cong \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j f(r_i, s_j) \quad (3.10)$$

De même, nous notons $\tilde{\varrho}_i$, $\tilde{\zeta}_j$ et $\tilde{\gamma}_k$ les poids GL associés aux points de Gauss-Legendre \tilde{r}_i et \tilde{s}_j , \tilde{t}_k . Ainsi la valeur du poids $\tilde{\varrho}_i$ s'écrit

$$\tilde{\varrho}_i = \frac{2}{1-\tilde{r}_i^2} \frac{1}{\frac{dL_{N_x-2}}{dr}(\tilde{r}_i)^2}. \quad (3.11)$$

Il en va de même pour les poids $\tilde{\zeta}_j$ et $\tilde{\gamma}_k$ mais suivant les degrés polynomiaux N_y et N_z . Dans le cas d'une intégration de Gauss [25], sur un élément parent Λ pour un degré $N - 2$ avec les points de Gauss choisis comme dans (3.6), nous avons

$$\int_{-1}^1 g \, d\Omega = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\varrho}_i g(\tilde{r}_i) \quad \forall g \in \mathbb{P}_{2N-3}(\Lambda). \quad (3.12)$$

A partir de (3.12), nous évaluons les intégrales pour une quadrature de Gauss-Legendre. Dans le cas 2D, on obtient

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f \, d\Omega \cong \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \tilde{\varrho}_i \tilde{\zeta}_j f(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) \quad (3.13)$$

3.1.4 Définition des éléments isoparamétriques

Nous employons la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés $(m, n, p) \in ([0, N_x] \cap \mathbb{N}) \times ([0, N_y] \cap \mathbb{N} \times ([0, N_z] \cap \mathbb{N})$ dans l'équation (3.14). Les trois entiers N_x , N_y et N_z distinguent les degrés polynomiaux dans chaque direction d'espace. On les choisit souvent tous égaux à un même entier N . Par exemple, en deux dimensions (2D), sur Ω_l on associe alors les coordonnées $\mathbf{x}^l(\mathbf{r}) = (x^l, y^l) \in \Omega_l$ à l'élément parent $\mathbf{r} = (r, s) \in \Lambda^2$ sur une grille GLL par

$$\begin{cases} x^l(r, s) = x_{mn}^l h_m^{N_x}(r) h_n^{N_y}(s) \\ y^l(r, s) = y_{mn}^l h_m^{N_x}(r) h_n^{N_y}(s) \end{cases} \quad (3.14)$$

et sur une grille GL par

$$\begin{cases} x^l(r, s) = x_{mn}^l \tilde{h}_m^{N_x-2}(r) \tilde{h}_n^{N_y-2}(s) \\ y^l(r, s) = y_{mn}^l \tilde{h}_m^{N_x-2}(r) \tilde{h}_n^{N_y-2}(s). \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans le cas d'une grille GLL 2D avec $N_x = N_y = 6$, on peut voir sur la figure 3.1 le point correspondant à $\mathbf{x}^l(r_i, s_j) = (x_{ij}^l, y_{ij}^l)$

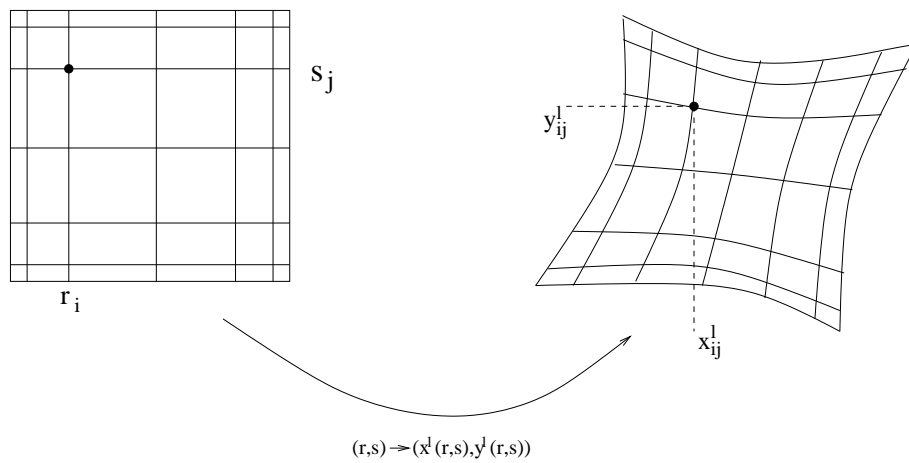


FIG. 3.1 – Coordonnées du point $\mathbf{x}^l(r_i, s_j)$ suivant les coordonnées de collocations r_i et s_j

Suivant la géométrie que l'on construit, l'obtention des coordonnées \mathbf{x}_i^l en 1D (\mathbf{x}_{ij}^l en 2D ou \mathbf{x}_{ijk}^l en 3D) dans un élément déformé Ω_l est effectuée avec la méthode d'interpolation transfinie de Gordon et Hall [25, 47, 48]. On veut trouver une distribution de coordonnées suffisamment lisse à l'intérieur de l'élément Ω_l et telle que pour les éléments Ω_l définissant le bord de Ω , les coordonnées de Ω_l décrivent la surface de Ω . En notant $\bar{\mathbf{x}}$ la surface de Ω prescrite on veut dans les cas 2D et 3D

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{ij}^l|_{\partial\Omega} = \bar{\mathbf{x}}(r_i, s_j)|_{\partial\Omega} \\ \mathbf{x}_{ijk}^l|_{\partial\Omega} = \bar{\mathbf{x}}(r_i, s_j, t_k)|_{\partial\Omega}. \end{cases} \quad (3.16)$$

On définit ensuite l'opérateur d'interpolation mono-dimensionnel noté I_r , (respectivement I_s et I_t) tel que pour une fonction f , $I_r f(\mathbf{r})$ (respectivement $I_s f(\mathbf{r})$ et $I_t f(\mathbf{r})$) est une fonction linéaire suivant la direction r (respectivement s et t) et coïncide avec f en $r = \pm 1$ (respectivement $s = \pm 1$ et $t = \pm 1$). On définit enfin la somme booléenne entre deux opérateurs quelconques I_1 et I_2 telle que

$$I_1 \oplus I_2 = I_1 + I_2 - I_1 I_2. \quad (3.17)$$

Ainsi les relations 2D et 3D suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\mathbf{r}) = (I_r \oplus I_s)\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Lambda^2, \\ \mathbf{x}(\mathbf{r}) = (I_r \oplus I_s \oplus I_t)\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Lambda^3 \end{cases} \quad (3.18)$$

permettent d'obtenir une approximation de la géométrie de Ω lorsqu'elle est définie par un élément ($E = 1$). Cette construction est donc généralisée pour une géométrie Ω découpée en sous-domaines ($E > 1$) définies en (3.1) afin d'obtenir les conditions (3.16) voulues à la surface. A partir de cette géométrie, nous pouvons ensuite piloter le déplacement de chaque noeud du maillage suivant le type d'équations que l'on résout. On peut ainsi prendre en compte le déplacement du domaine fluide suivant la formulation ALE. En 2D et en 3D, nous calculons en chaque élément l les coordonnées déplacées telles que

$$\begin{cases} (\mathbf{x}_{ij}^l)^{dep} = \mathbf{x}_{ij}^l + \delta\mathbf{x}_{ij}^l \\ (\mathbf{x}_{ijk}^l)^{dep} = \mathbf{x}_{ijk}^l + \delta\mathbf{x}_{ijk}^l. \end{cases} \quad (3.19)$$

L'indice *dep* exprime la nouvelle position du maillage de coordonnées \mathbf{x} issue de l'ajout du champ d'incrément de déplacement $\delta\mathbf{x}$.

3.1.5 Matrice jacobienne et jacobien

Afin de préciser le calcul du jacobien et de la matrice associée, nous définissons la matrice d'interpolation de la dérivation \mathbf{D} pour un ordre N tel que $D_{ij}^N = \frac{dh_i^N}{dr_j}(r_i)$. Ainsi avec le choix fait en (3.3) nous avons

$$\begin{cases} D_{NN}^N = -D_{00} = \frac{N(N+1)}{4} \\ D_{ii}^N = 0, \forall i \in [1, N-1] \cap \mathbb{N} \\ D_{ij}^N = \frac{L_N(r_i)}{L_N(r_j)(r_i - r_j)}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Nous nous basons sur l'hypothèse de l'existence d'un homéomorphisme liant la grille des éléments parents à la grille physique de chaque élément Ω^l tel que $\mathbf{x}^l(\mathbf{r})$ définie pour une, deux et trois dimensions dans (3.14) soit différentiable. Dans ce cas, nous pouvons définir \mathbf{F} la matrice jacobienne [25] $d \times d$ avec d la dimension spatiale telle que

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial r_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_d}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial x_d}{\partial r_d} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

et le jacobien $J = \det(\mathbf{F})$, déterminant de \mathbf{F} [53]. Les trois quadratures définies en (3.10) sont alors exprimées de manière plus générale sur un élément déformé en prenant en compte cette fois le jacobien sur Ω_l noté J_l avec $l \in ([1, E] \cap \mathbb{N})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{(\Omega_0^f)^l} f \, d\Omega \cong \sum_{i=0}^{N_x} \varrho_i |J_l|(r_i) f(r_i) \\ \int_{(\Omega_0^f)^l} f \, d\Omega \cong \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j |J_l|(r_i, s_j) f(r_i, s_j) \\ \int_{(\Omega_0^f)^l} f \, d\Omega \cong \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} \varrho_i \varsigma_j \gamma_k |J_l|(r_i, s_j, t_k) f(r_i, s_j, t_k). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

On a aussi besoin de l'inverse de la matrice jacobienne \mathbf{F}^{-1} qui est calculée à l'aide de la matrice des cofacteurs $\tilde{\mathbf{F}}$ et J

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{F}}^T}{J}. \quad (3.23)$$

La matrice des cofacteurs étant définie par

$$\tilde{F}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (3.24)$$

avec M_{ij} coefficient du mineur de \mathbf{F} . Ce coefficient est le déterminant de la sous-matrice de \mathbf{F} à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j . Les indices i et j sont des entiers compris entre 1 et la dimension d . L'existence de l'inverse de la matrice jacobienne est directement liée au fait que J ne doit pas être nulle. Dans ce cas, nous parlons de grille dégénérée. On se restreint alors aux cas où J est supérieure à une valeur positive [89]. Dans le cas 3D, on peut donc écrire la matrice des cofacteurs

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

De même en 2D, nous avons

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Le jacobien sous sa forme continue s'écrit en 1D, 2D et 3D

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \frac{\partial x}{\partial r} \\ J = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r} \\ J = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial r} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Ainsi, la discrétisation du jacobien fait appel à la matrice \mathbf{D} . Nous obtenons alors en (r_i) dans le cas 1D

$$J_l(r_i) = D_{ip}^{N_x} x_p^l, \quad (3.28)$$

en (r_i, s_j) dans le cas 2D

$$J_l(r_i, s_j) = (D_{ip}^{N_x} x_{pj}^l)(D_{jq}^{N_y} y_{iq}^l) - (D_{ip}^{N_x} y_{pj}^l)(D_{jq}^{N_y} x_{iq}^l) \quad (3.29)$$

et en (r_i, s_j, t_k) dans le cas 3D

$$\begin{aligned} J_l(r_i, s_j, t_k) = & (D_{im}^{N_x} x_{mjk}^l)(D_{jn}^{N_y} y_{ink}^l)(D_{kp}^{N_z} z_{ijp}^l) - (D_{im}^{N_x} x_{mjk}^l)(D_{jn}^{N_y} z_{ink}^l)(D_{kp}^{N_z} y_{ijp}^l) \\ & + (D_{im}^{N_x} z_{mjk}^l)(D_{jn}^{N_y} x_{ink}^l)(D_{kp}^{N_z} y_{ijp}^l) - (D_{im}^{N_x} y_{mjk}^l)(D_{jn}^{N_y} x_{ink}^l)(D_{kp}^{N_z} z_{ijp}^l) \\ & + (D_{im}^{N_x} y_{mjk}^l)(D_{jn}^{N_y} z_{ink}^l)(D_{kp}^{N_z} x_{ijp}^l) - (D_{im}^{N_x} z_{mjk}^l)(D_{jn}^{N_y} y_{ink}^l)(D_{kp}^{N_z} x_{ijp}^l). \end{aligned} \quad (3.30)$$

La matrice \mathbf{D} fait appel à un calcul systématique lié seulement au choix des polynômes au niveau numérique puisqu'elle est indépendante des coordonnées physiques d'un élément. Les calculs du jacobien et de la matrice jacobienne sont ensuite effectués en utilisant \mathbf{D} à chaque occurrence des dérivées partielles à partir du découpage en sous-domaines décrit en (3.1). Ces deux entités expriment le lien entre la géométrie de chaque élément et les équations du problème. Par cette approche, la matrice globale du système à résoudre n'est pas directement assemblée. L'hypothèse de la stricte positivité du jacobien ($0 < J < \infty$) a un sens différent du point de vue numérique. En effet, on cherche plutôt à avoir un jacobien de signe constant. Cela signifie seulement que l'on peut définir un élément ayant une longueur, une surface ou un volume bien défini mais qui peut être orienté différemment par rapport à un repère dans le sens direct. La contribution de cet élément sera toujours positive à condition d'avoir bien pris la valeur absolue du jacobien comme dans (3.22) au niveau numérique. En effet, on préfère souvent en éléments finis réorienter l'élément pour récupérer le signe positif du jacobien. Par contre, une source d'erreurs numériques est le fait d'avoir un changement de signe du jacobien dans un élément. Ceci correspond à une distortion dans l'élément comme par exemple un repli d'une partie de l'élément sur lui-même. Ainsi le point de vue adopté en éléments spectraux amène à une utilisation plus compliquée du jacobien mais en même temps à une description plus précise de la géométrie.

3.2 Discrétisation spatiale dans le fluide

Les équations (2.54)-(2.55) sont résolues à partir de leur formulation discrétisée. Chacun des termes qui constituent ces équations va être discrétisé suivant l'élément parent et sa transformation dans l'élément physique. Dans les sections qui suivent nous apportons une description assez détaillée de la discrétisation des différents termes de ces équations. Ce choix est volontaire car il est nécessaire dans le cadre de notre approche de préciser comment le jacobien et la matrice jacobienne interviennent dans les équations. Dans les sections qui suivent, la vitesse sera donc discrétisée dans \mathbb{P}_N alors que la pression sera discrétisée dans \mathbb{P}_{N-2} pour éviter les modes de pression parasites.

3.2.1 Formulation faible du laplacien

Comme nous l'avons exprimé au chapitre précédent, nous procédons à un découpage du domaine Ω^f en plusieurs éléments (3.1). La formulation faible du laplacien s'écrit en considérant l'intégration par rapport à l'élément parent $\Omega_0 = \Lambda^d$

$$\int_{\Omega_t^f} \nabla \mathbf{v} : \nabla \Phi \, d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{(\Omega_t^f)^l} \nabla \mathbf{v} : \nabla \Phi \, d\Omega. \quad (3.31)$$

Nous rappelons que le symbole " : " désigne le produit scalaire matriciel ¹. Etant données deux matrices carrées \mathbf{U} et \mathbf{V} de même dimension, nous avons par exemple les égalités suivantes

$$\mathbf{U} : \mathbf{V}^T = \mathbf{U}^T : \mathbf{V} = \mathbf{V} : \mathbf{U}^T. \quad (3.32)$$

La résolution numérique des intégrales fait intervenir la transformation de l'élément physique à l'élément parent. En prenant compte du domaine de référence introduit en (2.31) nous définissons l'application entre l'élément de référence et l'élément parent par

$$\begin{cases} \mathcal{B} : \Lambda^d \subset \mathbb{R}^d & \rightarrow \Omega_0^f \subset \mathbb{R}^d \\ \mathbf{r} & \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{X} \end{cases} \quad (3.33)$$

Ainsi nous avons entre l'élément physique et l'élément parent la relation

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}_t \circ \mathcal{B}(\mathbf{r}). \quad (3.34)$$

Plus précisément, nous avons $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} \circ (\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A}_t^{-1})$ et $\Phi = \hat{\Phi} \circ (\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A}_t^{-1})$. On a ainsi $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{v}} \circ (\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A}_t^{-1})(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$. Le jacobien et l'inverse de la matrice jacobienne sont donc calculés pour l'application $\mathcal{A}_t \circ \mathcal{B}$ c'est-à-dire directement de l'élément parent à l'élément physique actuel [52, 89].

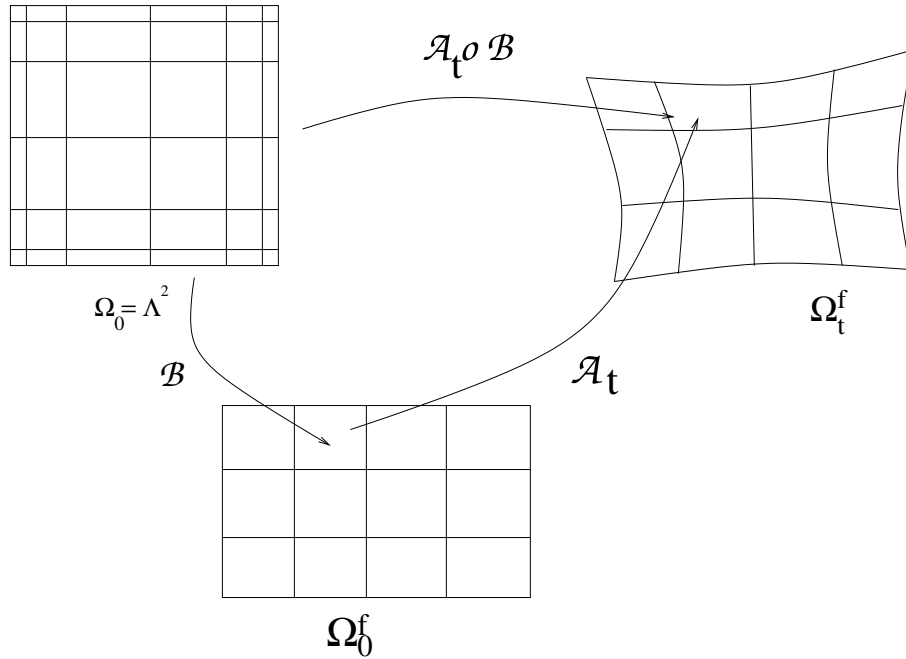


FIG. 3.2 – Relations entre l'élément parent, l'élément de référence et l'élément physique

Nous devons encore connaître le lien entre l'expression du gradient écrit dans l'élément parent et son expression dans l'élément physique. On peut retrouver cette relation en suivant la démonstration suivante où nous avons posé par commodité d'écriture $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, $(r, s, t) = (r_1, r_2, r_3)$ et $(v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3)$ pour distinguer les composantes de \mathbf{x} , \mathbf{r} et \mathbf{v} . On a, avec ces notations

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial x_j}.$$

¹le produit scalaire matriciel pour deux matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} s'écrit $\mathbf{U} : \mathbf{V} = U_{ij} V_{ij}$

Les indices i, j, k sont des entiers compris entre 1 et 3. De plus, nous avons $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ donc

$$\frac{\partial v_i}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial r_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial r_j} \right)^{-1} = \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial r_k} F_{kj}^{-1} = (\nabla_0 \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{F}^{-1}.$$

L'opérateur ∇_0 désigne le gradient écrit par rapport aux coordonnées de l'élément parent. Nous en déduisons que

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla_0 \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.35)$$

En partant de la relation (3.31), en utilisant les relations (3.34) et (3.35), nous en déduisons l'intégration par rapport aux éléments parents

$$\sum_{l=1}^E \int_{(\Omega_l^f)^t} [\nabla \mathbf{v} : \nabla \Phi] d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{\Omega_0} [(\nabla_0 \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{F}_l^{-1} : (\nabla_0 \hat{\Phi}) \mathbf{F}_l^{-1}] |J_l| d\Omega. \quad (3.36)$$

Nous omettrons par la suite le chapeau intervenant sur \mathbf{v} et Φ . En utilisant la matrice des cofacteurs, on en déduit grâce à (3.23), en prenant en compte le fait qu'un élément peut être orienté librement par rapport à l'élément parent, que

$$\int_{\Omega_0} (\nabla_0 \mathbf{v}) \mathbf{F}_l^{-1} : (\nabla_0 \Phi) \mathbf{F}_l^{-1} |J_l| d\Omega = \int_{\Omega_0} \frac{\text{sign}(J_l)}{J_l} (\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : (\nabla_0 \Phi) \tilde{\mathbf{F}}_l^T d\Omega \quad (3.37)$$

avec $\text{sign}(J_l) = \frac{J_l}{|J_l|}$. Nous faisons clairement apparaître le signe du jacobien qui rétablit le signe correct dans l'intégrale. Dans le cas 2D, l'expression $(\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T$ est exprimée dans sa forme continue par

$$(\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x^l}{\partial r} & \frac{\partial v_x^l}{\partial s} \\ \frac{\partial v_y^l}{\partial r} & \frac{\partial v_y^l}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^l}{\partial s} & -\frac{\partial x^l}{\partial s} \\ -\frac{\partial y^l}{\partial r} & \frac{\partial x^l}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x^l}{\partial r} \frac{\partial y^l}{\partial s} - \frac{\partial v_x^l}{\partial s} \frac{\partial y^l}{\partial r} & \frac{\partial v_x^l}{\partial s} \frac{\partial x^l}{\partial r} - \frac{\partial v_x^l}{\partial r} \frac{\partial x^l}{\partial s} \\ \frac{\partial v_y^l}{\partial r} \frac{\partial y^l}{\partial s} - \frac{\partial v_y^l}{\partial s} \frac{\partial y^l}{\partial r} & \frac{\partial v_y^l}{\partial s} \frac{\partial x^l}{\partial r} - \frac{\partial v_y^l}{\partial r} \frac{\partial x^l}{\partial s} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Dans sa forme isoparamétrique, la vitesse \mathbf{v} est écrite de manière analogue au champ de coordonnées (3.14)

$$\begin{aligned} v_x^l(r, s) &= (v_x^l)_{mn} h_m^{N_x}(r) h_n^{N_y}(s), \\ v_y^l(r, s) &= (v_y^l)_{mn} h_m^{N_y}(r) h_n^{N_x}(s). \end{aligned} \quad (3.39)$$

$(v_x^l)_{mn}$ et $(v_y^l)_{mn}$ sont les vitesses inconnues du problème exprimés directement dans l'élément parent. Ainsi en utilisant (3.22) nous pouvons faire l'approximation suivante

$$\int_{\Omega_0} \frac{\text{sign}(J_l)}{J_l} (\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : (\nabla_0 \Phi) \tilde{\mathbf{F}}_l^T d\Omega \simeq \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_{i\zeta_j} \left\{ \frac{\text{sign}(J_l)}{J_l} (\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : (\nabla_0 \Phi) \tilde{\mathbf{F}}_l^T \right\} (r_i, s_j) \quad (3.40)$$

De cette dernière somme on peut encore donner l'égalité suivante

$$\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_{i\zeta_j} \left\{ \frac{\text{sign}(J_l)}{J_l} (\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : (\nabla_0 \Phi) \tilde{\mathbf{F}}_l^T \right\} (r_i, s_j) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_{i\zeta_j} \left\{ \frac{1}{|J_l|} (\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : (\nabla_0 \Phi) \tilde{\mathbf{F}}_l^T \right\} (r_i, s_j). \quad (3.41)$$

L'expression $(\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T(r_i, s_j)$ mise sous la forme d'un produit de trois champs, nous donne

$$(\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T(r_i, s_j) = \underbrace{\begin{pmatrix} (v_x^l)_{mn} \\ (v_y^l)_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} \underbrace{\begin{pmatrix} D_{im}^{N_x} \delta_{jn} & D_{jn}^{N_y} \delta_{im} \end{pmatrix}}_{\nabla_0} \underbrace{\begin{pmatrix} D_{jn}^{N_y} y_{in}^l & -D_{jn}^{N_y} x_{in}^l \\ -D_{im}^{N_x} y_{mj}^l & D_{im}^{N_x} x_{mj}^l \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}_l^T(r_i, s_j)}. \quad (3.42)$$

La matrice des cofacteurs varie essentiellement à cause du champ des coordonnées puisque l'opérateur des dérivées reste invariant par rapport à ce champ. Nous pouvons maintenant exprimer la formulation discrétisée du terme issu du tenseur des taux de déformation

$$\frac{2}{Re} \int_{\Omega_t^f} \nabla \mathbf{v} : \mathbf{d}(\Phi) d\Omega = \frac{1}{Re} \int_{\Omega_t^f} \{ \nabla \mathbf{v} : \nabla \Phi + \nabla \mathbf{v} : (\nabla \Phi)^T \} d\Omega. \quad (3.43)$$

La contribution du terme transposé nous donne de manière analogue à (3.37)

$$\int_{\Omega_0} (\nabla_0 \mathbf{v}) \mathbf{F}_l^{-1} : ((\nabla_0 \Phi) \mathbf{F}_l^{-1})^T |J_l| d\Omega = \int_{\Omega_0} \frac{1}{|J_l|} (\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : \tilde{\mathbf{F}}_l (\nabla_0 \Phi)^T d\Omega \quad (3.44)$$

L'expression (3.43) est symétrique et définie positive et nous noterons sa contribution discrétisée par \mathbf{Kv} telle qu'en 2D

$$\mathbf{Kv} = \frac{1}{Re} \sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j \left\{ \frac{1}{|J_l|} (\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : (\nabla_0 \Phi \tilde{\mathbf{F}}_l^T + \tilde{\mathbf{F}}_l (\nabla_0 \Phi)^T) \right\} (r_i, s_j) \quad (3.45)$$

3.2.2 Formulation du gradient de pression

La formulation du gradient de pression nous amène à calculer le terme suivant

$$\int_{\Omega_t^f} p \nabla \cdot \Phi d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{(\Omega_t^f)^l} p \nabla \cdot \Phi d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{\Omega_0} \hat{p} (\nabla_0 \hat{\Phi} : \mathbf{F}_l^{-T}) |J_l| d\Omega \quad (3.46)$$

avec $\hat{p} = p \circ (\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A}_t^{-1})$. Ainsi, par la même démarche que dans la section précédente en omettant le chapeau sur p et Φ , on a

$$\int_{\Omega_0} p (\nabla_0 \Phi : \mathbf{F}_l^{-T}) |J_l| d\Omega = \int_{\Omega_0} \text{sign}(J_l) p (\nabla_0 \Phi : \tilde{\mathbf{F}}_l) d\Omega \quad (3.47)$$

Nous utilisons la méthode $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ [62, 63]. La pression est discrétisée sur les points de Gauss-Legendre (GL) définis par (3.6) pour des polynômes \mathbb{P}_{N-2} . Nous voulons en effet éliminer les modes de pression parasites et avoir une discrétisation vitesse-pression optimale. La pression est alors discrétisée suivant ces polynômes GL et nous avons dans le cas 2D par le même principe que dans (3.15)

$$p(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) = p_{mn} \tilde{h}_m^{N_x-2}(\tilde{r}_i) \tilde{h}_n^{N_y-2}(\tilde{s}_j). \quad (3.48)$$

Par analogie à (3.22) mais en utilisant cette fois (3.13) nous avons pour le cas 2D

$$\int_{\Omega_0} \text{sign}(J_l) p (\nabla_0 \Phi : \tilde{\mathbf{F}}_l) d\Omega \simeq \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \text{sign}(J_l) \tilde{\varrho}_i \tilde{\varsigma}_j (p [\frac{\partial \phi_x^l}{\partial r} \tilde{F}_{11} + \frac{\partial \phi_x^l}{\partial s} \tilde{F}_{12} + \frac{\partial \phi_y^l}{\partial r} \tilde{F}_{21} + \frac{\partial \phi_y^l}{\partial s} \tilde{F}_{22}]) (\tilde{r}_i, \tilde{s}_j), \quad (3.49)$$

Le jacobien est donc interpolé sur les points GL dans le cas 2D par la relation suivante

$$J(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j) = J_{mn} h_m^{N_x}(\tilde{r}_i) h_n^{N_y}(\tilde{s}_j). \quad (3.50)$$

La même interpolation est construite pour les termes du cofacteur $\tilde{\mathbf{F}}$. Finalement, les dérivées de Φ sont obtenues par les expressions suivantes dans le cas bi-dimensionnel

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_x^l}{\partial r} &= (\phi_x^l)_{mn} (h_m^{N_x})'(\tilde{r}_i) h_n^{N_y}(\tilde{s}_j), \\ \frac{\partial \phi_x^l}{\partial s} &= (\phi_x^l)_{mn} h_m^{N_x}(\tilde{r}_i) (h_n^{N_y})'(\tilde{s}_j), \\ \frac{\partial \phi_y^l}{\partial r} &= (\phi_y^l)_{mn} (h_m^{N_x})'(\tilde{r}_i) h_n^{N_y}(\tilde{s}_j), \\ \frac{\partial \phi_y^l}{\partial s} &= (\phi_y^l)_{mn} h_m^{N_x}(\tilde{r}_i) (h_n^{N_y})'(\tilde{s}_j).\end{aligned}\tag{3.51}$$

La dérivée $(h_m^{N_x})'(\tilde{r}_i)$ est alors calculée suivant l'expression

$$(h_m^{N_x})'(\tilde{r}_i) = \sum_{p=0}^{N_x} (h_p^{N_x})(\tilde{r}_i) \frac{dh_m^{N_x}}{dr}(r_p) = (h_m^{N_x})(\tilde{r}_i) D_{pm}^{N_x}.\tag{3.52}$$

Nous noterons par la suite la contribution discrétisée de (3.46) par $\mathbf{D}^T p$ avec, dans le cas 2D, les expressions suivantes

$$\mathbf{D}^T p = \sum_{l=1}^E \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \text{sign}(J_l) \tilde{\varrho}_i \tilde{\varsigma}_j (p \nabla_0 \Phi : \tilde{\mathbf{F}}_l)(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)\tag{3.53}$$

3.2.3 Formulation de la divergence de vitesse

La formulation faible de la divergence de vitesse intervenant pour l'incompressibilité (2.55) est calculée pour des fonctions tests dans $L^2(\Omega_f)$ et est discrétisée sur la même grille que la pression

$$\int_{\Omega_t^f} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Psi \, d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{(\Omega_t^f)^l} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Psi \, d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{\Omega_0} \hat{\Psi}(\nabla_0 \hat{\mathbf{v}} : \mathbf{F}_l^{-T}) |J_l| \, d\Omega.\tag{3.54}$$

Nous sommes très proches de l'expression trouvée pour la pression mais cette fois les rôles de la fonction test Ψ et de \mathbf{v} sont inversés par rapport à la pression p et Φ . Nous obtenons comme dans la section précédente

$$\int_{\Omega_0} \Psi(\nabla_0 \mathbf{v} : \mathbf{F}_l^{-T}) |J_l| \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \text{sign}(J_l) \Psi(\nabla_0 \mathbf{v} : \tilde{\mathbf{F}}_l) \, d\Omega.\tag{3.55}$$

Comme nous l'avons fait avec le gradient de pression, la même discrétisation est faite en remplaçant la fonction test Φ par \mathbf{v} et la pression p par la fonction test Ψ . Nous notons par la suite cette contribution $\mathbf{D}\mathbf{v}$ pour exprimer la divergence de la vitesse. Ainsi en 2D, nous notons

$$\mathbf{D}\mathbf{v} = \sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x-2} \sum_{j=0}^{N_y-2} \text{sign}(J_l) \tilde{\varrho}_i \tilde{\varsigma}_j (\Psi \nabla_0 \mathbf{v} : \tilde{\mathbf{F}}_l)(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j).\tag{3.56}$$

3.2.4 Formulation du terme convectif

Tout d'abord, nous développons le produit tensoriel de (2.54) pour expliciter les termes sous-jacents qui interviennent dans cette expression

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t^f} \rho_f \{ \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w})) \} \cdot \Phi \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega_t^f} \rho_f \left(\underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_a - \underbrace{\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}}_b + \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}}_c - \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v}}_d \right) \cdot \Phi \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.57)$$

L'expression (3.57a) correspond au terme convectif classique de la formulation eulérienne. L'expression (3.57c) est souvent négligée numériquement mais il peut être avantageux de la garder [16]. Les deux termes suivants n'interviennent que dans la formulation ALE. L'expression (3.57b) est le terme convectif supplémentaire induit par la vitesse de la grille. L'expression (3.57d) est finalement le dernier terme de la formulation ALE conservative et peut être négligé si on déplace la grille de manière incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$) [10]. Ainsi, dans la formulation ALE conservative, le terme convectif induit une complexité qui n'apparaît pas à première vue dans les équations (2.1)-(2.4).

Ces quatre termes font cependant appel à deux types de calculs numériques suivant l'expression du gradient ou de la divergence. Par rapport au terme faisant intervenir le gradient, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t^f} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \Phi \, d\Omega = \\ & \sum_{l=1}^E \int_{(\Omega_t^f)^l} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \Phi \, d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{\Omega_0} (\hat{\mathbf{v}} \cdot ((\nabla_0 \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{F}_l^{-1})) \cdot \hat{\Phi} |J_l| \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ainsi, toujours en omettant le chapeau par la suite

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{v} \cdot (\nabla_0 \mathbf{v} \mathbf{F}_l^{-1})) \cdot \Phi |J_l| \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \text{sign}(J_l) (\mathbf{v} \cdot ((\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T)) \cdot \Phi \, d\Omega. \quad (3.59)$$

L'expression suivant la divergence nous donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t^f} ((\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}) \cdot \Phi \, d\Omega = \\ & \sum_{l=1}^E \int_{(\Omega_t^f)^l} ((\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}) \cdot \Phi \, d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{\Omega_0} (\nabla_0 \hat{\mathbf{v}} : \mathbf{F}_l^{-T}) (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\Phi}) |J_l| \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Parallèlement à (3.59) nous en déduisons

$$\int_{\Omega_0} (\nabla_0 \mathbf{v} : \mathbf{F}_l^{-1}) (\mathbf{v} \cdot \Phi) |J_l| \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \text{sign}(J_l) (\nabla_0 \mathbf{v} : \tilde{\mathbf{F}}_l) (\mathbf{v} \cdot \Phi) \, d\Omega. \quad (3.61)$$

Là encore, nous avons fait clairement apparaître le signe du jacobien dans les calculs que nous effectuons. Ainsi la contribution de $\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}$ sera calculée de la même manière que dans (3.58)-(3.59) et $(\nabla \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ de la même manière que dans (3.60)-(3.61). La contribution numérique de (3.57) est notée $\mathbf{C}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{v}$. En 2D, on a

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{v} = \sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j \text{sign}(J_l) ((\nabla_0 (\mathbf{v} - \mathbf{w}) : \tilde{\mathbf{F}}_l) \mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot ((\nabla_0 \mathbf{v}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T)) \cdot \Phi)(r_i, s_j). \quad (3.62)$$

3.2.5 Matrice de masse

La matrice de masse intervient dans (2.54) pour le terme faisant intervenir la dérivée temporelle. Ainsi, de la formulation faible de la vitesse on obtient

$$\int_{\Omega_t^f} \mathbf{v} \cdot \Phi \, d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{(\Omega_t^f)^l} \mathbf{v} \cdot \Phi \, d\Omega = \sum_{l=1}^E \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\Phi} |J_l| \, d\Omega \quad (3.63)$$

puis

$$\int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\Phi} |J_l| \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{v} \cdot \Phi |J_l| \, d\Omega. \quad (3.64)$$

De même le vecteur des forces volumiques engendre numériquement le même type de formulation faible et ainsi nous avons

$$\int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{b}}_f \cdot \hat{\Phi} |J_l| \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_f \cdot \Phi |J_l| \, d\Omega. \quad (3.65)$$

La matrice de masse est donc construite à partir de l'approximation numérique des intégrales intervenant dans (3.64)-(3.65) toujours à l'aide de (3.22). Pour la vitesse, la notation matricielle de cette contribution est donc notée $\mathbf{M}\mathbf{v}$. Elle vaut en 2D

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j (\Phi \cdot \mathbf{v}) |J_l|(r_i, s_j). \quad (3.66)$$

Pour le vecteur des forces volumiques nous notons de la même manière que pour la vitesse le terme $\mathbf{M}\mathbf{b}_f$ qui correspond à l'équation (3.66) mais en remplaçant \mathbf{v} par \mathbf{b}_f .

3.3 Discrétisation temporelle dans le fluide

Les sections précédentes ont permis de décrire la discrétisation numérique effectuée sur chacun des termes intervenant dans la formulation faible des équations de Navier-Stokes. Notre objectif a été de bien mettre en évidence la manière dont la transformation de la géométrie "parent" à la géométrie "physique" prenait toute son importance au niveau des calculs numériques à effectuer. Pour la dérivée temporelle de la vitesse apparaissant dans (2.54), il reste cependant à la discrétiser aussi par rapport au temps. Dans cette perspective, la méthode de découplage de Perot [17, 25, 78] a été utilisée en traitant le terme convectif non linéaire de manière explicite et en traitant implicitement le reste des équations de Navier-Stokes linéaires correspondant aux équations de Stokes.

3.3.1 Discrétisation de la dérivée temporelle de vitesse

Pour discrétiser la dérivée temporelle de vitesse, nous avons fait appel aux schémas d'Euler retardés (SER) [12, 16]. Suivant la forme conservative ou non-conservative, l'utilisation de ces méthodes revêt une signification assez différente au niveau des termes à envisager. La formulation utilisée dans (2.44) a d'abord été utilisée pour des maillages fixes au cours du temps. Cela n'entraînait donc pas de modification de la matrice de masse à construire à chaque itération en temps. Ainsi une première discrétisation utilisée était, en notant Δt le pas de temps et \mathbf{v}^n la vitesse du fluide au temps $t_n = n\Delta t$

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cong \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \sum_{i=0}^{I_{bd}} \beta_{I_{bd}-i} \mathbf{v}^{n+1-i}. \quad (3.67)$$

Dans (3.67), les β_i sont les poids associés à l'ordre I_{er} du SER. Nous n'avons pas été au-delà de $I_{er} = 2$. Une second approche de cette discrétisation fut ensuite considérée lorsque la géométrie pouvait dépendre du temps. Ainsi la matrice \mathbf{M} devant être renouvelée à chaque itération nous l'avons indicée par $n + 1$ et la discrétisation temporelle était obtenue par

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cong \frac{\mathbf{M}^{n+1}}{\Delta t} \sum_{i=0}^{I_{er}} \beta_{I_{er}-i} \mathbf{v}^{n+1-i}. \quad (3.68)$$

Une troisième approche associée à la formulation conservative a ensuite été développée pour effectuer le calcul suivant

$$\frac{d(\mathbf{M}\mathbf{v})}{dt} \cong \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{I_{er}} \beta_{I_{er}-i} \mathbf{M}^{n+1-i} \mathbf{v}^{n+1-i}. \quad (3.69)$$

Pour cette dernière discrétisation la matrice de masse et la vitesse du fluide sont estimées au même temps t_i . Ceci demande donc numériquement la sauvegarde du champ de vitesse sous sa forme faible. Nous avons retenu cette dernière façon de calculer la dérivée en temps pour que l'estimation de la position du domaine fluide soit déterminée sans décalage temporel avec le calcul du champ de vitesse.

3.3.2 Le traitement du terme convectif

Le terme convectif n'étant pas linéaire une extrapolation (EX) a été envisagée du point de vue numérique [16, 55]. En posant \mathbf{v}^n et \mathbf{w}^n les vitesses du fluide et de la grille ALE au temps t_n et $\mathbf{C}^n(\mathbf{v}^n, \mathbf{w}^n)\mathbf{v}^n$, la contribution du terme convectif au temps t_n , l'extrapolation s'écrit

$$\mathbf{C}^{n+1}(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w}^{n+1})\mathbf{v}^{n+1} \cong \sum_{i=1}^{I_{ex}} \alpha_i \mathbf{C}^{n+1-i}(\mathbf{v}^{n+1-i}, \mathbf{w}^{n+1-i})\mathbf{v}^{n+1-i} \quad (3.70)$$

Dans (3.70), les $\alpha_i = (-1)^i \mathbb{C}_{I_{ex}}^i$ sont les poids associés à l'ordre d'extrapolation I_{ex} choisi entre 1 et 4, \mathbb{C} étant le symbole mathématique de la combinaison.

Le terme convectif non-linéaire traité de manière implicite amène à une complication non négligeable de la formulation faible. Tout d'abord, le système matriciel complet à résoudre n'est alors plus symétrique défini positif si on lui incorpore la matrice \mathbf{C} qui dépend elle-même de \mathbf{v} et \mathbf{w} . Les méthodes GMRES ou Bi-CGSTAB doivent être utilisées [83]. La convergence pour ce type d'algorithme devient beaucoup plus difficile à préserver et demande des méthodes plus sophistiquées [24]. Nous avons donc gardé l'approche explicite du calcul du terme convectif.

3.3.3 Discrétisation temporelle des équations du fluide

Ainsi nous pouvons récapituler le système numérique à résoudre issu des équations (2.54)-(2.55) par

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{I_{bd}} \beta_{I_{bd}-i} \mathbf{M}^{n+1-i} \mathbf{v}^{n+1-i} + \mathbf{K}^{n+1} \mathbf{v}^{n+1} = \\ (\mathbf{D}^T \mathbf{p})^{n+1} - \sum_{i=1}^{I_{ex}} \alpha_i \mathbf{C}^{n+1-i}(\mathbf{v}^{n+1-i}, \mathbf{w}^{n+1-i}) \mathbf{v}^{n+1-i} + \mathbf{M}^{n+1} \mathbf{b}_f^{n+1} \\ \mathbf{D}^{n+1} \mathbf{v}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

Une décomposition LU a donc été effectuée sur le système (3.71) avec le SER d'ordre 2 associé à une extrapolation d'ordre 2 du terme convectif pour éviter des problèmes de stabilités liés à des ordres plus élevés. Ainsi le terme $\mathbf{C}^{n+1}(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w}^{n+1})\mathbf{v}^{n+1}$ a été approché par

$$\mathbf{C}^{n+1}(\mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w}^{n+1})\mathbf{v}^{n+1} \cong 2\mathbf{C}^n(\mathbf{v}^n, \mathbf{w}^n)\mathbf{v}^n - \mathbf{C}^{n-1}(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{w}^{n-1})\mathbf{v}^{n-1}. \quad (3.72)$$

Dans le cas du SER d'ordre 2 nous avons

$$\frac{d(\mathbf{M}\mathbf{v})}{dt} \cong \frac{3}{2\Delta t}\mathbf{M}^{n+1}\mathbf{v}^{n+1} - \frac{2}{\Delta t}\mathbf{M}^n\mathbf{v}^n + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{M}^{n-1}\mathbf{v}^{n-1}. \quad (3.73)$$

Nous réécrivons donc (3.71) sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2\Delta t}\mathbf{M}^{n+1} + \mathbf{K}^{n+1} & -(\mathbf{D}^T)^{n+1} \\ -\mathbf{D}^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta t}\mathbf{M}^n\mathbf{v}^n - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{M}^{n-1}\mathbf{v}^{n-1} - 2\mathbf{C}^n(\mathbf{v}^n, \mathbf{w}^n)\mathbf{v}^n + \mathbf{C}^{n-1}(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{w}^{n-1})\mathbf{v}^{n-1} + \mathbf{M}^{n+1}\mathbf{b}_f^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Le premier terme du second membre dans (3.74) est noté par commodité \mathbf{M}_b^{n+1} et nous posons $\mathbf{H}^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t}\mathbf{M}^{n+1} + \mathbf{K}^{n+1}$. Le produit entre la matrice intervenant dans (3.74) et le vecteur vitesse-pression peut être encore décomposé suivant les composantes \underline{v}_x et \underline{v}_y de la vitesse. Ainsi nous avons par exemple en 2D

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{xx} & \mathbf{H}_{xy} & -(\mathbf{D}_x^T)^{n+1} \\ \mathbf{H}_{yx} & \mathbf{H}_{yy} & -(\mathbf{D}_y^T)^{n+1} \\ -\mathbf{D}_x^{n+1} & -\mathbf{D}_y^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v}_x^{n+1} \\ \underline{v}_y^{n+1} \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Par la suite, nous garderons l'expression réduite présentée dans (3.74). Nous introduisons une matrice \mathbf{Q}^{n+1} arbitraire telle que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^{n+1} & -(\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{D}^T)^{n+1} \\ -\mathbf{D}^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_b^{n+1} + \mathbf{e}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Le champ \mathbf{e}^{n+1} est l'erreur de décomposition dû à l'introduction de la matrice \mathbf{Q}^{n+1} dans (3.76). La décomposition LU de l'expression (3.76) se base sur une procédure à deux pas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^{n+1} & 0 \\ -\mathbf{D}^{n+1} & -(\mathbf{D}\mathbf{Q}\mathbf{D}^T)^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_b^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

puis

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -(\mathbf{Q}\mathbf{D}^T)^{n+1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* \\ \underline{p}^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Lorsque $\mathbf{Q}^{n+1} = (\mathbf{H}^{n+1})^{-1}$ le système (3.76) redevient exactement (3.74). La décomposition LU effectuée avec ce choix s'appelle la méthode d'Uzawa. On utilise la méthode de Perot [78] d'ordre 1 qui consiste à approcher l'inverse de l'opérateur \mathbf{H}^{n+1} par

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \frac{2\Delta t}{3}(\mathbf{M}^{n+1})^{-1}. \quad (3.79)$$

L'erreur de découplage \mathbf{e}^{n+1} n'est que d'ordre 1 en temps avec le choix de \mathbf{Q}^{n+1} fait en (3.79). Nous avons donc besoin d'une méthode de correction de pression considérée dans [93,95] en plus du découplage développé par Perot qui consiste à calculer la pression en considérant l'incrément de pression $\underline{\delta p}$ tel que

$$\underline{p}^{n+1} = \underline{p}^n + \underline{\delta p}. \quad (3.80)$$

Ainsi le système (3.76) devient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^{n+1} & -(\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{D}^T)^{n+1} \\ -\mathbf{D}^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ \underline{\delta p} = \underline{p}^{n+1} - \underline{p}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_b^{n+1} + (\mathbf{D}^T)^{n+1}\underline{p}^n + \mathbf{e}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Cette dernière formulation est d'ordre 2 en temps et la décomposition LU est effectuée pour ce dernier système.

3.4 Discrétisation spatiale dans la structure

Nous présentons dans cette section la formulation numérique des équations de la dynamique du solide où le déplacement \mathbf{u} sera résolu dans \mathbb{P}_N avec les polynômes de Gauss-Lobatto-Legendre. Cette démarche sortant du cadre de la mécanique des fluides, nous nous sommes attachés à vérifier que cette méthode gardait certaines de ses caractéristiques avec la méthode des éléments spectraux. La méthode des éléments spectraux a particulièrement été étudiée pour des problèmes d'élasticité statique. Nous pouvons citer les différents travaux de Pavarino [57, 76, 77, 97, 98]. La technique de pénalisation y est utilisée pour les équations de Stokes stationnaires. Elle est envisagée suivant une formulation mixte présentée par Brezzi et Fortin [11]. Nous avons résolu différents problèmes d'élasticité statique par cette méthode. Cependant, le passage aux équations de la dynamique n'a pas donné les mêmes satisfactions avec l'approche par pénalisation. Nous avons donc privilégié la méthode de Newmark plus appropriée à la résolution des équations d'ondes et des équations de la dynamique.

3.4.1 Forme faible du tenseur des contraintes

Nous détaillons comment le tenseur des contraintes est calculé dans la formulation faible (2.58). La section 3.2.1 nous a déjà permis de décrire la formulation faible du laplacien. La formulation faible développée pour ce tenseur en est assez proche du point de vue mathématique. En portant (2.17) et (2.22) dans (2.58), nous avons

$$\int_{\Omega_i^s} \boldsymbol{\sigma}_s : \nabla \Phi_s \, d\Omega = \mu \int_{\Omega_i^s} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) : \nabla \Phi_s \, d\Omega + \lambda \int_{\Omega_i^s} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \Phi_s) \, d\Omega. \quad (3.82)$$

Par ailleurs, avec (3.32), nous avons aussi l'égalité suivante

$$\int_{\Omega_i^s} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) : \nabla \Phi_s \, d\Omega = \int_{\Omega_i^s} \nabla \mathbf{u} : (\nabla \Phi_s + \nabla \Phi_s^T) \, d\Omega. \quad (3.83)$$

Finalement, par la même démarche que pour le fluide nous en déduisons donc en 2D

$$\mathbf{K}_s \mathbf{u} = \sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j \left[\frac{\mu}{|J_l|} (\nabla_0 \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : ((\nabla_0 \Phi_s) \tilde{\mathbf{F}}_l^T + \tilde{\mathbf{F}}_l (\nabla_0 \Phi_s)^T) + \frac{\lambda}{|J_l|} (\nabla_0 \mathbf{u} : \tilde{\mathbf{F}}_l) (\nabla_0 \Phi_s : \tilde{\mathbf{F}}_l) \right] (r_i, s_j). \quad (3.84)$$

3.4.2 Forme faible de l'accélération

La dérivée partielle seconde par rapport au temps du déplacement représentant l'accélération dans (2.58) engendre comme à la section 3.2.5 une matrice de masse. Avec l'équation (2.24), nous obtenons simplement

$$\int_{\Omega_s^s} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \Phi_s \, d\Omega = \int_{\Omega_s^s} \mathbf{a} \cdot \Phi_s \, d\Omega. \quad (3.85)$$

Nous pouvons donc en déduire comme dans la section 3.2.5 la forme faible de l'accélération

$$\mathbf{M}_s \mathbf{a} = \rho_s \sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j (\mathbf{a} \cdot \Phi_s) |J_l| (r_i, s_j). \quad (3.86)$$

La contribution des forces volumiques sera de la même manière notée $\mathbf{M}_s \mathbf{b}_s$.

3.4.3 Forme faible des forces de contact

Une force de contact quelconque \mathbf{g} sur le bord $\Gamma_N^s(t)$ est l'intégrale suivante

$$\int_{\Gamma_N^s(t)} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \, d\Gamma \quad (3.87)$$

avec $\boldsymbol{\vartheta}$ définie en (2.68).

Si $\Gamma_N^s(t)$ est le bord d'un domaine 2D, la forme faible (3.87) sera l'intégrale sur une ligne

$$\mathbf{M}_\Gamma \mathbf{g} = \sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\vartheta}) |J_l| (r_i, s_j). \quad (3.88)$$

De même si $\Gamma_N^s(t)$ est le bord d'un domaine 3D, cette forme faible sera l'intégrale d'une surface. Si elle est paramétrée suivant les directions r et s de l'élément parent alors nous aurons

$$\mathbf{M}_\Gamma \mathbf{g} = \sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} \varrho_i \varsigma_j \gamma_k (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\vartheta}) |J_l| (r_i, s_j, t_k). \quad (3.89)$$

La fonction test $\boldsymbol{\vartheta}$ a donc ici pour rôle de restreindre (3.88) à une somme simple dans le cas d'une ligne correspondant au bord d'un domaine 2D et de restreindre (3.89) à une somme double dans le cas d'une surface enveloppant un domaine 3D. Dans chaque élément ayant un bord en commun avec la surface du domaine Ω^s , la fonction $\boldsymbol{\vartheta}$ va définir dans quelle direction et sur quelle arête la somme va pouvoir être effectuée.

3.5 Discrétisation temporelle dans le solide : la méthode de Newmark

La méthode de Newmark est bien adaptée aux équations temporelles du second ordre [18,45]. Une forme assez générale d'équations peut être envisagée telle que

$$\mathbf{f}_m(\ddot{\mathbf{x}}) + \mathbf{f}_a(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{q}. \quad (3.90)$$

Le champ \mathbf{x} est l'inconnue du système et \mathbf{f}_m , \mathbf{f}_a , \mathbf{f}_r et \mathbf{q} sont des opérateurs scalaires ou matriciels avec les propriétés de continuité et de dérivabilité suffisantes. Les indices m , d et r sont utilisés pour rappeler leur lien avec les termes masse, amortissement et rigidité. L'équation (3.90) réécrite sous une forme discrète matricielle issue d'une formulation faible est notée

$$\mathbf{f}_m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_a \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_r \mathbf{x} = \mathbf{q}. \quad (3.91)$$

La méthode de Newmark peut se réduire à la résolution de trois équations en faisant intervenir les trois champs $\mathbf{x} = \mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ et $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}$

$$\begin{cases} \mathbf{f}_m \mathbf{a}^{n+1} + \mathbf{f}_a \mathbf{v}^{n+1} + \mathbf{f}_r \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{q}_{n+1}, \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + (1 - \alpha) \Delta t \mathbf{v}^n + \alpha \Delta t \mathbf{v}^{n+1} + (\frac{1}{2} - \alpha) \Delta t^2 \mathbf{a}^n, \\ \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + (1 - \beta) \Delta t \mathbf{a}^n + \beta \Delta t \mathbf{a}^{n+1}. \end{cases} \quad (3.92)$$

On note \mathbf{a}^0 , \mathbf{v}^0 , \mathbf{u}^0 les conditions initiales, $\Delta t > 0$ étant le pas de temps. Les paramètres α et β sont respectivement les coefficients de stabilité et de dissipation et sont choisis dans les intervalles $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{3}{2}$. Dans le cas de la méthode des trapèzes $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

3.5.1 La formulation discrète de la dynamique : l'approche prédicteur-correcteur

Le système que nous allons résoudre dans le cas de la dynamique s'écrit

$$\begin{cases} \rho_s \mathbf{a} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s - \rho_s \mathbf{b}_s = 0, \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \end{cases} \quad (3.93)$$

Dans le cas de la règle des trapèzes nous avons sous une forme discrète

$$\begin{cases} \mathbf{M}_s^{n+1} \mathbf{a}^{n+1} + \mathbf{K}_s^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{F}^{n+1} = 0, & (a) \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n+1}), & (b) \\ \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n+1}) & (c) \end{cases} \quad (3.94)$$

où n est l'indice du niveau de temps et \mathbf{F}^{n+1} la forme faible des termes sources dépendant de la force de volume et des conditions de Neumann $\mathbf{g} = \mathbf{t}_s$ sur $\Gamma_N^s(t)$ telle que

$$\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{M}_s^{n+1} \mathbf{b}_s^{n+1} + \mathbf{M}_\Gamma^{n+1} \mathbf{g}^{n+1}. \quad (3.95)$$

Isolément cette méthode est d'ordre deux en temps et inconditionnellement stable.

A partir de ces équations nous pouvons réaliser un schéma prédicteur-correcteur [18]. Nous amorçons à chaque itération en temps la prédiction des champs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{a} de la manière suivante

$$\begin{cases} \mathbf{u}_p^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{v}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}^n, \\ \mathbf{v}_p^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{a}^n, \\ \mathbf{a}_p^{n+1} = \mathbf{a}^n. \end{cases} \quad (3.96)$$

Pour former le système final nous définissons les trois incréments correcteurs $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{v}$ et $\delta \mathbf{a}$

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_p^{n+1}, \\ \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}_p^{n+1}, \\ \delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}_p^{n+1} \end{cases} \quad (3.97)$$

puis nous remplaçons ces incréments (3.97) dans (3.96) et nous obtenons

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n - \Delta t \mathbf{v}^n - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}^n, \\ \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n - \Delta t \mathbf{a}^n, \\ \delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n. \end{cases} \quad (3.98)$$

Nous introduisons alors les équations (3.94) dans (3.98) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n+1}) - \Delta t \mathbf{v}^n - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}^n, \\ \delta \mathbf{v} = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n+1}) - \Delta t \mathbf{a}^n, \\ \delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n \end{cases} & \iff \begin{cases} \delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}^n, \\ \delta \mathbf{v} = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n), \\ \delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \Delta t (\frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n+1})) - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}^n, \\ \delta \mathbf{v} = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n), \\ \delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n \end{cases} & \iff \begin{cases} \delta \mathbf{u} = \frac{1}{4} \Delta t^2 \delta \mathbf{a}, \\ \delta \mathbf{v} = \frac{1}{2} \Delta t \delta \mathbf{a}, \\ \delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n \end{cases} \end{aligned}$$

dont nous déduisons le lien entre $\delta \mathbf{v}$, $\delta \mathbf{a}$ et $\delta \mathbf{u}$

$$\begin{cases} \delta \mathbf{v} = \frac{2\delta \mathbf{u}}{\Delta t}, \\ \delta \mathbf{a} = \frac{4\delta \mathbf{u}}{\Delta t^2}. \end{cases} \quad (3.99)$$

Finalement, il nous reste à introduire (3.99) et (3.97) dans (3.94a) pour former la formulation discrète suivant $\delta \mathbf{u}$ dans $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega^s)^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma_D^s}\}$

$$\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M}_s^{n+1} \delta \mathbf{u} + \mathbf{K}_s^{n+1} \delta \mathbf{u} - \mathbf{G}^{n+1} = 0 \quad (3.100)$$

avec $\mathbf{G}^{n+1} = \mathbf{M}_s^{n+1} (\mathbf{b}_s^{n+1} - \mathbf{a}_p^{n+1}) - \mathbf{K}_s^{n+1} \mathbf{u}_p^{n+1} + \mathbf{M}_\Gamma^{n+1} \mathbf{g}^{n+1}$.

L'ajout des trois champs correcteurs aux trois champs prédits nous donne les trois nouveaux champs au pas de temps $n + 1$. Nous pouvons initialiser l'accélération de départ avec

$$\mathbf{M}_s^0 \mathbf{a}^0 = \mathbf{M}_s^0 \mathbf{b}_s^0 + \mathbf{M}_\Gamma^0 \mathbf{g}^0 - \mathbf{K}_s^0 \mathbf{u}^0. \quad (3.101)$$

3.5.2 Précision de la méthode prédicteur-correcteur : cas de l'équation d'onde

Le cas mono-dimensionnel

La méthode est d'ordre deux en temps avec le choix $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ [18, 83]. Pour vérifier cette propriété nous avons résolu l'équation d'onde dans le cas 1D. Nous avons choisi une corde de longueur donnée L .

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \quad (3.102)$$

avec les conditions initiales

$$(C.I.) \begin{cases} u(x, 0) = \sin(\frac{\pi}{L} x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.103)$$

et les conditions aux limites

$$(C.L.) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0. \end{cases} \quad (3.104)$$

Ainsi, la solution analytique d'un tel problème est

$$u(x, t) = \cos(\sqrt{k}\frac{\pi}{L}t) \sin(\frac{\pi}{L}x). \quad (3.105)$$

Nous avons testé un cas avec une longueur $L = 6m$, une durée d'expérience $T = 0.01s$ et le coefficient $k = 2.3517 \cdot 10^4 m^2 s^{-2}$ pour $E = 2$ et $N_x = 16$. La valeur exacte de la norme H^1 à $T = 0.01s$ est égale à

$$\|u(T = 0.01)\|_{H^1} = \frac{1}{6} \sqrt{3\pi^2 + 108} \cos(\sqrt{k}\frac{\pi}{600}). \quad (3.106)$$

Nous avons considéré une décroissance géométrique de raison 2 du pas de temps $\Delta t = 2^{-p} 10^{-2}$. Dans le tableau 3.1, pour chaque puissance p nous avons donc calculé $u_p = \|u(T = 0.01)\|_{H^1}$. Ainsi, afin d'évaluer le comportement de la méthode suivant le pas de temps [58, 70], nous avons calculé un rapport noté R_p entre la puissance p et la norme u_p obtenue

$$R_p = \log\left(\frac{|u_p - u_{p+1}|}{|u_{p+1} - u_{p+2}|}\right) / \log(2). \quad (3.107)$$

R_p évalue la pente de la décroissance de l'écart entre les trois normes successives u_p , u_{p+1} et u_{p+2} celle-ci nous indiquant l'ordre temporel de décroissance de l'erreur.

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-2})$	$u_p = \ u(T = 0.01)\ _{H^1}$	$R_p = \log\left(\frac{ u_p - u_{p+1} }{ u_{p+1} - u_{p+2} }\right) / \log(2)$
0	<u>1.41233736636811</u>	1.85177650708866
1	<u>1.37273177929002</u>	1.96097568745182
2	<u>1.36175901168237</u>	1.99011004641525
3	<u>1.35894060487797</u>	1.99751895670930
4	<u>1.35823115640210</u>	1.99937920143362
5	<u>1.35805348900608</u>	1.99984476688685
6	<u>1.35800905304018</u>	1.99996118738099
7	<u>1.35799794285332</u>	1.99999029779408
8	<u>1.35799516523188</u>	1.99999756794263
9	<u>1.35799447082185</u>	1.99999933939636
10	<u>1.35799429721905</u>	2.00000131382654
11	<u>1.35799425381833</u>	
12	<u>1.35799424296816</u>	
∞	1.35799423935143	

TAB. 3.1 – Précision obtenue dans le cas 1D

On remarque dans le tableau 3.1 que le rapport R_p s'approche de 2 en augmentant p . Ceci nous indique que l'erreur globale varie comme le carré du pas de temps et se comporte donc comme une méthode temporelle d'ordre 2. D'autres méthodes équivalentes peuvent être utilisées pour résoudre les équations de la dynamique comme par exemple la règle du point milieu ne

faisant intervenir que le calcul des champs de vitesse et de déplacement [22, 81]. Une autre manière équivalente de résoudre la méthode de Newmark consiste à ne pas utiliser de prédicteur-correcteur. Nous présentons cette méthode dans la section suivante.

Le cas bi-dimensionnel

Dans le cas 2D, nous avons résolu l'équation d'onde pour une membrane carrée Λ^2

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - k \left(\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial y^2} \right) = 0, (\mathbf{x}, t) \in \Lambda^2 \times [0, T] \quad (3.108)$$

avec les conditions initiales

$$(C.I.) \begin{cases} u(\mathbf{x}, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.109)$$

et les conditions aux limites

$$(C.L.) \begin{cases} u(\mathbf{x} = (x, y = \pm 1), t) = 0, \\ u(\mathbf{x} = (x = \pm 1, y), t) = 0. \end{cases} \quad (3.110)$$

Ainsi, la solution analytique d'un tel problème est

$$u(\mathbf{x}, t) = \cos(\sqrt{2k}\pi t) \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (3.111)$$

Nous avons choisi comme durée $T = 0.01s$ et $k=9.607 \cdot 10^3 m^2 s^{-2}$ pour $E = 2 \times 2$ et $N_x \times N_y = 16 \times 16$. La valeur exacte de la norme H^1 à $T = 0.01s$ est égale à

$$\|u(T = 0.01)\|_{H^1} = \sqrt{1 + 2\pi^2} \cos\left(\sqrt{2k} \frac{\pi}{100}\right). \quad (3.112)$$

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-2})$	$u_p = \ u(T = 0.01)\ _{H^1}$	$R_p = \log\left(\frac{ u_p - u_{p+1} }{ u_{p+1} - u_{p+2} }\right) / \log(2)$
0	2.96750030452670	
1	4.48859944570304	
2	3.01824101074630	1.6472251025465383
3	2.02448822031518	1.9123170299829677
4	<u>1.70722904157729</u>	1.9781485966505754
5	<u>1.62294421288923</u>	1.9945423925395360
6	<u>1.60155142697888</u>	1.9986359417620594
7	<u>1.59618296035789</u>	1.9996590071921372
8	<u>1.59483957414049</u>	1.9999147531729593
9	<u>1.59450364819667</u>	1.9999786882850132
10	<u>1.59441966174822</u>	1.9999946736089147
11	<u>1.59439866482594</u>	
12	<u>1.59439341557599</u>	
∞	1.59439166582427	

TAB. 3.2 – Précision obtenue dans le cas 2D

On remarque comme dans le cas 1D que la précision temporelle de ce problème reste bien d'ordre 2.

3.5.3 Une seconde approche de la méthode de Newmark : Calcul direct du déplacement

Plutôt que d'utiliser un prédicteur-correcteur [18], nous avons aussi testé une manière plus directe de résoudre les équations de la dynamique par la méthode de Newmark. Nous ne calculons plus un incrément correctif du déplacement $\delta \mathbf{u}$ à chaque pas de temps. L'équation (2.16) utilise toujours la même relation variationnelle mais directement sur le déplacement et en utilisant les relations de (3.94). En substituant (3.94c) dans (3.94b), nous arrivons à

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{v}^n + \left(\frac{1}{2} - \alpha\beta\right) \Delta t^2 \mathbf{a}^n + \alpha\beta \Delta t^2 \mathbf{a}^{n+1} \implies \\ \mathbf{a}^{n+1} &= \frac{1}{\alpha\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \frac{1}{\alpha\beta \Delta t} \mathbf{v}^n + \left(1 - \frac{1}{2\alpha\beta}\right) \mathbf{a}^n. \end{aligned} \quad (3.113)$$

En substituant (3.113) dans la seconde relation de (3.94), nous obtenons

$$\mathbf{v}^{n+1} = \frac{1}{\alpha \Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{v}^n + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \Delta t \mathbf{a}^n. \quad (3.114)$$

L'équation (3.94a) peut être formulée en remplaçant \mathbf{a}^{n+1} par son expression dans (3.113)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s^{n+1} \left[\frac{1}{\alpha\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \frac{1}{\alpha\beta \Delta t} \mathbf{v}^n + \left(1 - \frac{1}{2\alpha\beta}\right) \mathbf{a}^n \right] + \mathbf{K}_s^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{G}^{n+1} &= 0 \implies \\ \left[\frac{1}{\alpha\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_s^{n+1} + \mathbf{K}_s^{n+1} \right] (\mathbf{u}^{n+1}) &= \mathbf{G}^{n+1} + \mathbf{M}_s^{n+1} \left[\frac{1}{\alpha\beta \Delta t^2} \mathbf{u}^n + \frac{1}{\alpha\beta \Delta t} \mathbf{v}^n + \left(\frac{1}{2\alpha\beta} - 1\right) \mathbf{a}^n \right]. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Nous commençons ainsi par calculer le nouveau déplacement avec (3.115) puis la nouvelle vitesse avec (3.114) et enfin la nouvelle accélération avec (3.113). Dans le cas de l'équation d'onde résolue à la section précédente nous avons estimé de la même manière la précision temporelle en calculant le rapport R_p dans le tableau 3.3

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-2})$	$u_p = \ u(T = 0.01)\ _{H^1}$	$R_p = \log\left(\frac{ u_p - u_{p+1} }{ u_{p+1} - u_{p+2} }\right) / \log(2)$
0	1.41233736636811	1.85177650708866
1	1.37273177929002	1.96097568745182
2	1.36175901168237	1.99011004641525
3	1.35894060487797	1.99751895703385
4	1.35823115640210	1.99937919720896
5	1.35805348900612	1.99984473056460
6	1.35800905304010	1.99996144050226
7	1.35799794285293	1.99999995340674
8	1.35799516523190	2.00006748153965
9	1.35799447082662	1.99976565595436
10	1.35799429723342	1.92295750259172
11	1.35799425382807	
12	1.35799424238150	
∞	1.35799423935143	

TAB. 3.3 – Précision obtenue dans le cas 1D

On remarque que l'ordre 2 est aussi atteint comme nous l'avons vu dans la section 3.5.2. Dans le cas 2D, cette méthode nous donne toujours le même type de précision comme nous pouvons le voir dans le tableau 3.4

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-2})$	$u_p = \ u(T = 0.01)\ _{H^1}$	$R_p = \log(\frac{ u_p - u_{p+1} }{ u_{p+1} - u_{p+2} }) / \log(2)$
0	2.96750030452670	
1	4.48859944570304	
2	3.01824101074630	1.6472251025466746
3	2.02448822031518	1.9123170299819763
4	<u>1.70722904157732</u>	1.9781485966601908
5	<u>1.62294421288921</u>	1.9945423926328734
6	<u>1.60155142697899</u>	1.9986359400708706
7	<u>1.59618296035838</u>	1.9996590081794998
8	<u>1.59483957413950</u>	1.9999149880783242
9	<u>1.59450364819554</u>	1.9999765699544136
10	<u>1.59441966176073</u>	1.9999836952880379
11	<u>1.59439866481103</u>	
12	<u>1.59439341551428</u>	
∞	1.59439166582427	

TAB. 3.4 – Précision obtenue dans le cas 2D

Les équations de la dynamique ont été utilisées avec une barre 2D fixée à ses deux extrémités et soumise à la force de pesanteur $\mathbf{b}_s = ((b_s)_x = 0, (b_s)_y = -10m.s^{-2})$. Nous avons choisi pour cela les paramètres $\lambda/\rho_s = 18.65 \cdot 10^6 m^2 s^{-2}$ et $\mu/\rho_s = 9.607 \cdot 10^6 m^2 s^{-2}$ pour une barre de hauteur $H = 1m$ et de longueur $L = 6m$. Nous avons considéré au départ la barre au repos sans déplacement ni vitesse initiale. La géométrie de cette barre a été considérée pour $E = E_x \times E_y = 2 \times 2$ (E_x et E_y désignant le nombre de sous-domaines suivant x et y , respectivement) et $N_x \times N_y = 8 \times 8$.

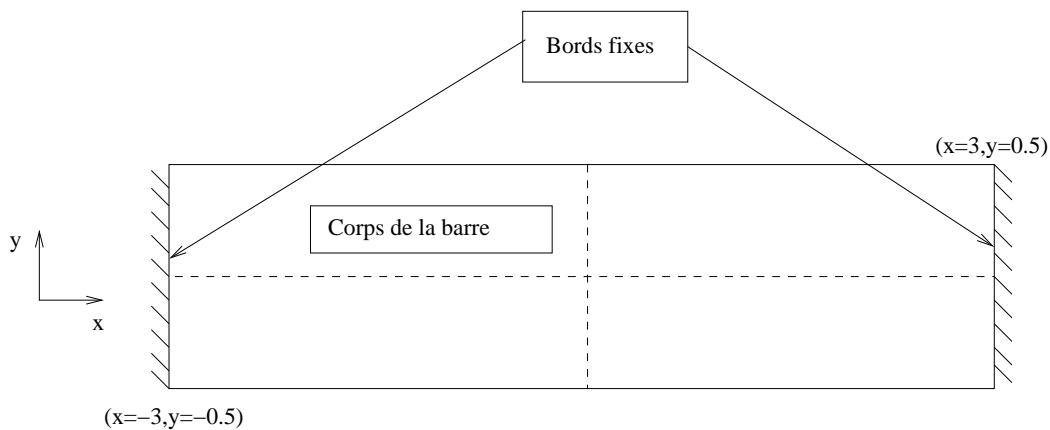


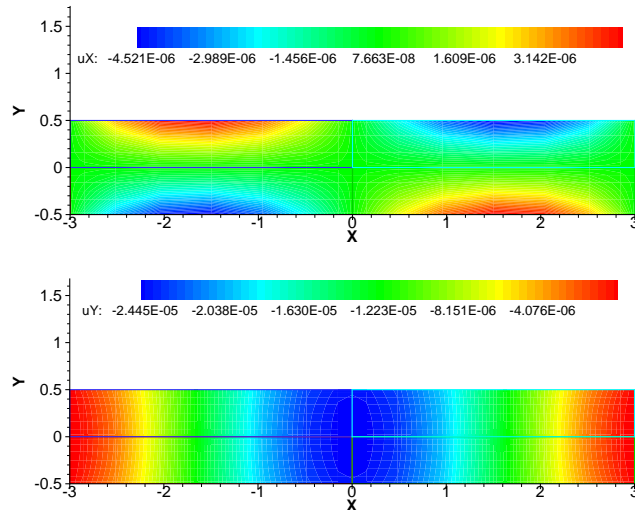
FIG. 3.3 – Géométrie de la barre

Nous atteignons une précision du second ordre en temps comme le montre le tableau 3.5 par le calcul de R_p .

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-3})$	$u_p = \ \mathbf{u}(T = 0.01)\ _{H^1}$	$R_p = \log\left(\frac{ u_p - u_{p+1} }{ u_{p+1} - u_{p+2} }\right) / \log(2)$
0	0.33483098092001 10^{-4}	1.6191987
1	0.44752883302948 10^{-4}	1.9865013
2	0.48421380936960 10^{-4}	2.4271030
3	0.49347126719619 10^{-4}	1.3322384
4	0.49519258445602 10^{-4}	2.0373386
5	0.49587620827384 10^{-4}	1.8631669
6	0.49604274773508 10^{-4}	2.1626537
7	0.49608852480747 10^{-4}	1.9536936
8	0.49609874889030 10^{-4}	2.1419539
9	0.49610138828270 10^{-4}	1.8407961
10	0.49610198629701 10^{-4}	
11	0.49610215324328 10^{-4}	

TAB. 3.5 – Précision temporelle de la méthode dans le cas de la barre

Nous constatons cependant que la précision temporelle obtenue oscille. Ceci n'est pas surprenant. En effet, le chargement de la barre se fait suivant une fonction de Heaviside. La réponse indicielle du système est de type oscillant avec une amplitude décroissant dans le temps donnée par le déplacement. On représente les champs de déplacement \underline{u}_x et \underline{u}_y à $T = 0.01s$ pour cette barre. Ainsi, nous avons choisi le cas $\Delta t = 0.0025s$ que l'on peut voir sur la figure 3.4.

FIG. 3.4 – Représentation des champs \underline{u}_x et \underline{u}_y de la barre pour $T = 0.01s$ et $\Delta t = 0.0025s$

On remarque sur la figure 3.4 la symétrie des champs \underline{u}_x et \underline{u}_y . Ceci est en accord avec les choix que nous avons fait au niveau de la direction de la pesanteur et des fixations de la barre.

3.5.4 Comparaisons des deux méthodes

En fixant toujours la barre à ses deux extrémités comme dans la section précédente (figure 3.3) et par la même démarche qu'avec R_p , nous estimons un second rapport noté r_p

$$r_p = \frac{\log(|u_p - u_{11}|)}{p \log(2)}. \quad (3.116)$$

r_p nous donne une seconde estimation de la décroissance de l'erreur suivant le pas de temps utilisé.

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-3})$	$u_p = \ \mathbf{u}(T = 0.01)\ _{H^1}$	$r_p = \frac{\log(u_p - u_{11})}{p \log(2)}$
0	0.33483098092001 10^{-4}	2.632439533
1	0.44752883302948 10^{-4}	2.181846065
2	0.48421380936960 10^{-4}	2.131436207
3	0.49347126719620 10^{-4}	2.142559086
4	0.49519258445603 10^{-4}	2.020506402
5	0.49587620827388 10^{-4}	2.018625087
6	0.49604274773517 10^{-4}	2.005582885
7	0.49608852481254 10^{-4}	2.020397476
8	0.49609874875260 10^{-4}	2.018307256
9	0.49610138818724 10^{-4}	2.032076232
10	0.49610198641230 10^{-4}	2.048012565
11	0.49610215324344 10^{-4}	

TAB. 3.6 – Précision temporelle de la méthode (section 3.5.1)

Le tableau 3.6 nous permet toujours de conclure à l'ordre 2 en temps de la méthode dans le cas de la barre 2D.

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-3})$	$u_p = \ \mathbf{u}(T = 0.01)\ _{H^1}$	$r_p = \frac{\log(u_p - u_{11})}{p \log(2)}$
0	0.33483098092001 10^{-4}	2.632439519
1	0.44752883302948 10^{-4}	2.181846043
2	0.48421380936960 10^{-4}	2.131436146
3	0.49347126719619 10^{-4}	2.142558881
4	0.49519258445602 10^{-4}	2.020505926
5	0.49587620827384 10^{-4}	2.018623491
6	0.49604274773508 10^{-4}	2.005577681
7	0.49608852480747 10^{-4}	2.020377561
8	0.49609874889030 10^{-4}	2.018243104
9	0.49610138828270 10^{-4}	2.031811126
10	0.49610198629701 10^{-4}	2.046737528
11	0.49610215324328 10^{-4}	

TAB. 3.7 – Précision temporelle de la méthode (section 3.5.3)

L'approche de la section 3.5.3 nous permet (Tab. 3.7) toujours d'aboutir à la même conclusion sur l'ordre temporel de l'erreur mais aussi de vérifier l'équivalence avec le prédicteur-correcteur. Cependant, pour de petites valeurs du pas de temps, on remarque qu'une légère détérioration est possible sur le calcul de r_p . La précision spatiale peut venir masquer la précision temporelle lorsque le pas de temps devient très petit et il devient plus difficile de mesurer la précision temporelle.

Jusqu'à maintenant nous n'avons fixé que des conditions de Dirichlet sur la barre. Nous testons maintenant un second cas où la barre n'est fixée qu'à l'extrémité gauche, l'extrémité droite étant soumise à une force de contact constante $\mathbf{g} = (g_x = 0, g_y = -100N.m^2)$. Elle n'est maintenant plus soumise à la force de pesanteur mais uniquement à cette force de contact (voir figure 3.5). Nous arrivons encore à la même conclusion sur la précision temporelle du schéma dans les tableaux 3.8 et 3.9.

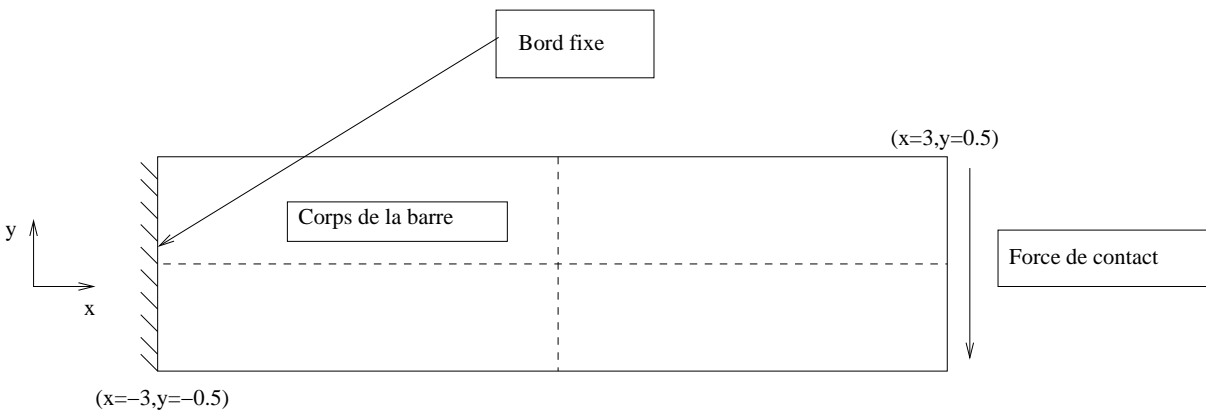


FIG. 3.5 – Géométrie de la barre avec force de contact

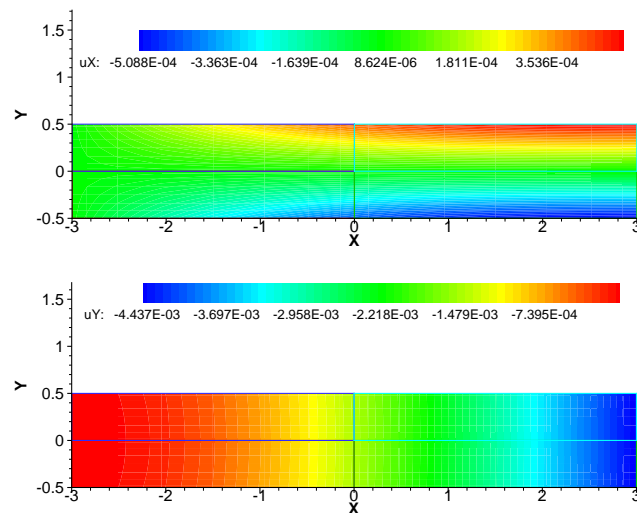
$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-2})$	$u_p = \ u(T = 0.1)\ _{H^1}$	$\frac{\log(u_p - u_{11})}{p \log(2)}$
0	0.00021728425993	7.264046005
1	0.00437672910573	4.367665071
2	0.00617993202601	3.615404780
3	0.00658605605731	3.208169755
4	0.00670296824110	3.119496370
5	0.00670562739001	2.633575283
6	0.00671901390022	2.555380224
7	0.00672048337291	2.315415868
8	0.00672179432158	2.167323263
9	0.00672255271969	2.070558298
10	0.00672296275514	2.040743931
11	0.00672313750768	

TAB. 3.8 – Précision temporelle de la méthode avec des conditions de Neumann (section 3.5.1)

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-2})$	$u_p = \ \mathbf{u}(T = 0.1)\ _{H^1}$	$\frac{\log(u_p - u_{11})}{p \log(2)}$
0	0.00021728425988	7.264046006
1	0.00437672910581	4.367665073
2	0.00617993202600	3.615404785
3	0.00658605605731	3.208169769
4	0.00670296824110	3.119496449
5	0.00670562739001	2.633575359
6	0.00671901390022	2.555380500
7	0.00672048337291	2.315416243
8	0.00672179432154	2.167323918
9	0.00672255271942	2.070559596
10	0.00672296275352	2.040746865
11	0.00672313750215	

TAB. 3.9 – Précision temporelle de la méthode avec des conditions de Neumann (section 3.5.3)

L'approche prédicteur-correcteur (section 3.5.1) est équivalente à celle où le calcul se fait directement par rapport au déplacement (section 3.5.3). Nous avons privilégié cette seconde approche. Finalement, nous représentons comme nous l'avons fait dans la section précédente la barre pour $T = 0.1s$ et $\Delta t = 0.025s$ suivant la force de contact que nous avons imposée à la barre.

FIG. 3.6 – Représentation des champs \underline{u}_x et \underline{u}_y de la barre pour $T = 0.1s$ et $\Delta t = 0.025s$

On observe à partir de la figure 3.6 que la barre subit une flexion vers le bas de petite amplitude.

3.5.5 Système matriciel

A partir des équations (3.113)-(3.115), nous pouvons résumer la méthode de Newmark sous sa forme matricielle par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2} + \mathbf{K}_s^{n+1} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{I}}{\alpha\Delta t} & \mathbf{I} & 0 \\ -\frac{\mathbf{I}}{\alpha\beta\Delta t^2} & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{v}^{n+1} \\ \mathbf{a}^{n+1} \end{pmatrix} = \quad (3.117)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2} & \frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t} & (\frac{1}{2\alpha\beta} - 1)M_s^{n+1} \\ -\frac{\mathbf{I}}{\alpha\Delta t} & (1 - \frac{1}{\alpha})\mathbf{I} & (1 - \frac{1}{2\alpha})\Delta t\mathbf{I} \\ -\frac{\mathbf{I}}{\alpha\beta\Delta t^2} & -\frac{\mathbf{I}}{\alpha\beta\Delta t} & (1 - \frac{1}{2\alpha\beta})\mathbf{I} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{v}^n \\ \mathbf{a}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

la matrice \mathbf{I} désigne la matrice identité. Nous posons alors la matrice \mathbf{N} telle que

$$\mathbf{N} = [\frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2} + \mathbf{K}_s^{n+1}]^{-1} \frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2}. \quad (3.118)$$

Ainsi, après avoir simplifié $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ à l'aide de (3.118), nous en déduisons

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \Delta t\mathbf{N} & (\frac{1}{2} - \alpha\beta)\Delta t^2\mathbf{N} \\ \frac{1}{\alpha\Delta t}\{\mathbf{N} - \mathbf{I}\} & \frac{1}{\alpha}\{\mathbf{N} + (\alpha - 1)\mathbf{I}\} & \frac{\Delta t}{\alpha}\{(\frac{1}{2} - \alpha\beta)\mathbf{N} + (\alpha - \frac{1}{2})\mathbf{I}\} \\ \frac{1}{\alpha\beta\Delta t^2}\{\mathbf{N} - \mathbf{I}\} & \frac{1}{\alpha\beta\Delta t}\{\mathbf{N} - \mathbf{I}\} & (\frac{1}{2\alpha\beta} - 1)\{\mathbf{N} - \mathbf{I}\} \end{pmatrix}. \quad (3.119)$$

la matrice \mathbf{N} est bien définie car M_s^{n+1} et \mathbf{K}_s^{n+1} sont des matrices symétriques définies positives. Nous pouvons donc alors déduire une approximation de \mathbf{N}

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [\frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2} + \mathbf{K}_s^{n+1}]^{-1} \frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2} = [\frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2} \{I + \alpha\beta\Delta t^2(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1}\}]^{-1} \frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2} \\ &= \{I + \alpha\beta\Delta t^2(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1}\}^{-1} \{\frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2}\}^{-1} \frac{M_s^{n+1}}{\alpha\beta\Delta t^2} = \{I + \alpha\beta\Delta t^2(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1}\}^{-1}. \end{aligned}$$

En utilisant un développement limité de \mathbf{N} , en considérant que la matrice $\alpha\beta\Delta t^2(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1}$ reste bien définie

$$\{I + \alpha\beta\Delta t^2(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1}\}^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (\alpha\beta\Delta t^2(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1})^p.$$

D'où

$$\mathbf{N} = \{I + \alpha\beta\Delta t^2(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1}\}^{-1} = I - \alpha\beta\Delta t^2(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1} + O(\Delta t^4) \quad (3.120)$$

La matrice \mathbf{N} est principalement gouvernée par $(M_s^{n+1})^{-1}\mathbf{K}_s^{n+1}$ et nous mettons clairement en évidence sa dépendance par rapport au pas de temps. Nous avons aussi bien mis en évidence la relation entre $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ et les coefficients α et β .

Valeurs propres de l'opérateur de Newmark

Nous pouvons voir que la méthode est inconditionnellement stable avec le choix $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, en observant où sont situées les valeurs propres sur le cercle unité de la matrice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Dans des cas suffisamment simples géométriquement tel que le rectangle en 2D, nous avons donc étudié de telles valeurs propres en restant sur le domaine initial Ω_0^s . Nous avons divisé notre rectangle en quatre éléments ($E = E_x \times E_y = 2 \times 2$) avec le choix du degré GLL tel que $N_x \times N_y = 8 \times 8$.

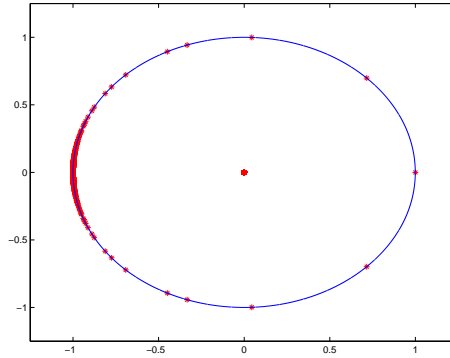


FIG. 3.7 – Valeurs propres de $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ en 2D pour un pas de temps de $10^{-3}s$

Nous observons dans la figure 3.7 que les valeurs propres se trouvent à l'intérieur ou sur le cercle unité, le rayon spectral est égal à 1. Ceci nous montre que la méthode ne nous donne pas d'instabilité. Nous avons aussi dans le cas de l'équation d'onde sur le segment 1D étudié l'évolution de la position des valeurs propres suivant le pas de temps utilisé (figure 3.8). Nous avons dans ce cas utilisé $E = 2$ et $N_x = 16$

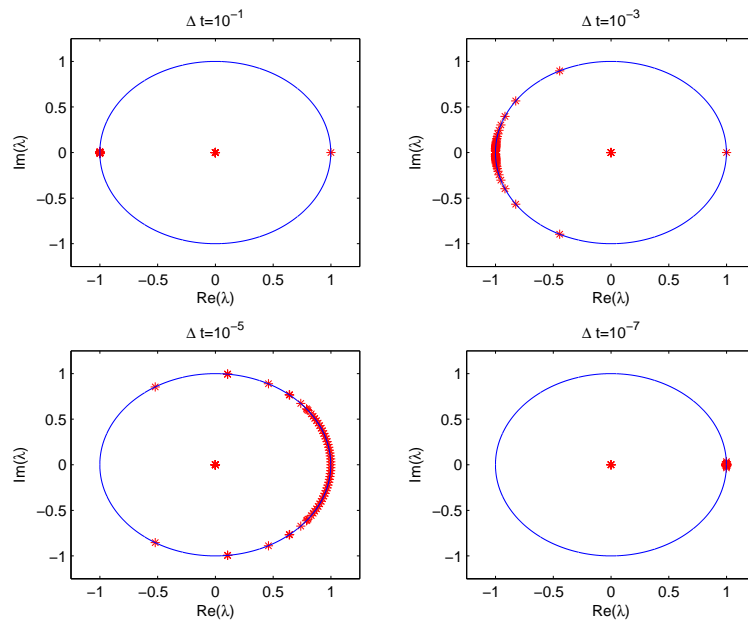


FIG. 3.8 – Valeurs propres de $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

La même observation peut être faite dans le cas 1D sur la disposition des valeurs propres. Nous obtenons toujours un rayon spectral égal à 1. Plus le pas de temps est grand plus on voit

de valeurs propres se concentrer en -1 ce qui montre que la solution aura tendance à osciller mais en restant stable. Pour calculer la k^e colonne de la matrice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ nous avons calculé le résultat du produit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x} = \sum_j (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{ij}x_j$ avec les composantes du vecteur \mathbf{x} choisies telles que $x_j = \delta_{jk}$ où k est l'indice fixé. Nous avons ensuite procédé à l'assemblage décrit par exemple dans [25]. Dans le cas 1D, cette étape d'assemblage est assez légère. Elle consiste à sommer les lignes de la matrice que nous avons calculée précédemment dont les numéros correspondent à un même degré de liberté. Ce vecteur ligne résultant est le seul conservé dans la matrice globale. On répète cette procédure pour les colonnes. Nous avons affiché le profil de la matrice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ avant (figure 3.9), puis après assemblage (figure 3.10)

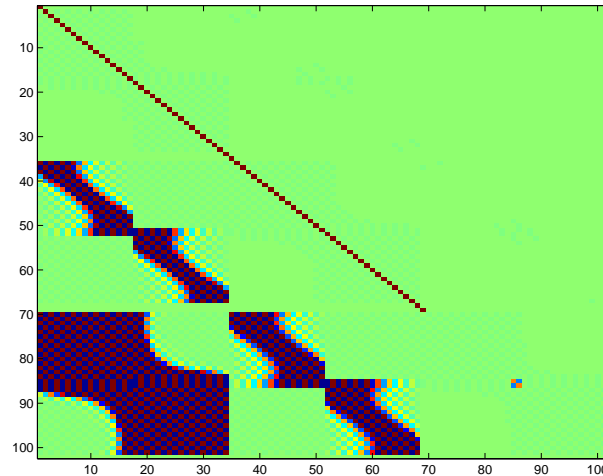


FIG. 3.9 – Matrice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ avant assemblage

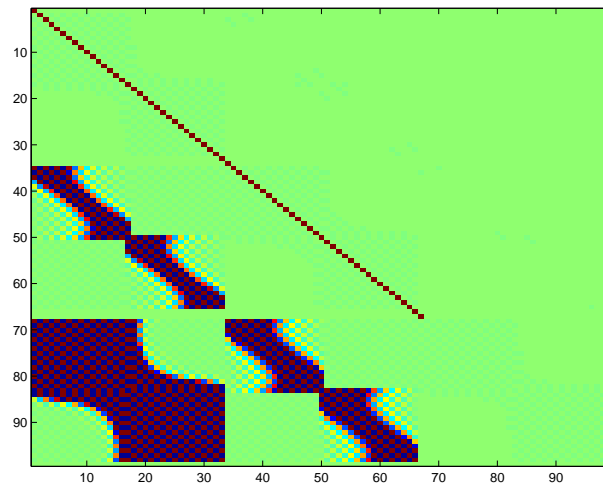


FIG. 3.10 – Matrice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ après assemblage

Les couleurs dans la figure 3.9 montrent essentiellement les valeurs non nulles de la matrice carrée 102×102 ($(N + 1 = 17) \times (E = 2) \times 3$) avant assemblage. Dans la figure 3.10 trois lignes et trois colonnes sont éliminées car dans le cas 1D pour $E = 2$ un seul nœud correspond à deux degrés de liberté différents au niveau de l'interface. Le comportement numérique de la méthode de Newmark avec la méthode des éléments spectraux reste donc essentiellement le même que

pour les éléments finis.

3.5.6 Remarques sur la méthode de Newmark

La méthode de Newmark part habituellement de l'approximation que nous sommes toujours sur la même géométrie initiale Ω_0^s choisie au départ du calcul pour une formulation lagrangienne nominale [19]. Les formulations (3.100) et (3.115) sont construites autour du fait que l'on peut à chaque itération se replacer sur le domaine courant Ω_t^s . Cette approche s'éloigne donc de toutes les autres par cette possibilité de prendre en compte à la fois les champs que l'on veut calculer et une géométrie approchée courante sur laquelle on veut les calculer. Dans ce chapitre, l'analyse n'a été réalisée que pour des déplacements relativement petits du domaine Ω^s et sur de courtes périodes de temps. La difficulté nouvelle est de savoir quelle liberté nous avons de pouvoir nous déplacer suivant la position de Ω^s . Cette démarche est une première tentative de réponse aux questions que nous avons posées au chapitre précédent. On veut construire une formulation lagrangienne actualisée qu'il faut encore interpréter suivant la formulation faible. En effet, il est important de souligner que le simple fait d'écrire les équations de la dynamique sous une formulation faible augmente l'espace fonctionnel dans lequel on résout ces équations. Cette étape n'est pas bien décrite lorsqu'en plus on permet au domaine de se déplacer sur sa position courante. Cette manière de considérer la géométrie change aussi la vision que nous devons avoir de l'analyse des valeurs propres comme nous l'avons fait dans la section précédente car celles-ci changent à chaque pas de temps. Ces constatations montrent aussi que l'analyse de la précision de ces approches n'a plus rien à voir avec l'analyse classique consistant à comparer les champs les uns avec les autres comme s'ils avaient toujours le même support géométrique initial.

Chapitre 4

Méthode ALE

Dans ce chapitre nous présentons différentes simulations tirées pour certaines de l'article "Solution of moving-boundary problems by the spectral element method" [7] dans les sections qui suivent. Ces différentes simulations visent à montrer ce qu'apporte la méthode ALE au niveau de la souplesse de déformation de différentes géométries et donc augmente la gamme de problèmes pouvant être traités avec les équations de Navier-Stokes. Nous allons tout d'abord préciser comment le maillage peut être déformé. Si la stabilité est un prérequis de toute simulation, la précision temporelle d'un tel schéma va elle aussi nous demander un examen attentif pour ce type de formulation.

4.1 Calcul de la vitesse ALE

Plusieurs possibilités nous sont offertes pour calculer la vitesse ALE associée au déplacement du maillage. Les équations elliptiques peuvent être utilisées pour engendrer un champ de vitesse ALE qui sera utilisé ensuite dans les équations de Navier-Stokes. Typiquement un laplacien ou une forme élastostatique [52] peuvent être considérés

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{w} = 0 \quad (4.1)$$

ou

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}(\mathbf{w}) = 0. \quad (4.2)$$

Ces équations sont résolues avec des conditions de Dirichlet et/ou de tension surfacique adéquates. Connaissant le champ \mathbf{w} , nous en déduisons alors avec (2.32) la nouvelle position de la grille par la règle du trapèze,

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{w}^{n+1} + \mathbf{w}^n), \quad (4.3)$$

ou par le schéma d'Adams-Bashforth du second ordre

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \left(\frac{3}{2} \mathbf{w}^n - \frac{1}{2} \mathbf{w}^{n-1} \right), \quad (4.4)$$

ou encore par le schéma d'Euler explicite du premier ordre

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{w}^n. \quad (4.5)$$

Ces possibilités ont été envisagées pour déplacer le maillage du fluide. Un autre point de vue peut aussi être adopté par l'utilisation de l'extension harmonique [37] consistant à déterminer d'abord la nouvelle position de la grille puis à en déduire la vitesse ALE en résolvant (2.32)

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla \mathbf{x}) = 0 \quad (4.6)$$

Ici, κ est une constante positive ou une fonction scalaire toujours positive. Ces différentes approches sont équivalentes. D'autres approches comme des formes paraboliques peuvent être considérées mais elles n'apportent pas d'avantage majeur par rapport aux méthodes elliptiques. Nous avons donc utilisé l'approche elliptique pour déterminer la vitesse ALE sous les formes (4.1)-(4.2).

4.2 Formulation du calcul de la vitesse ALE

La vitesse ALE est approchée dans \mathbb{P}_N avec les polynômes de Lagrange-Legendre sur une grille de Gauss-Lobatto-Legendre dans le domaine fluide Ω^f . Pour calculer le maillage ALE, nous avons particulièrement étudié les formes elliptiques suivantes,

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{w} = 0 \quad (4.7)$$

et en choisissant $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \beta \nabla \cdot \mathbf{w} \mathbf{I} + \alpha (\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T)$,

$$\alpha \nabla \cdot \{ \nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T \} + \beta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = 0 \quad (4.8)$$

avec $\alpha = \beta = 1$. Pour ces deux équations, seules des conditions de Dirichlet ont été imposées pour ces équations. Pour les frontières fixes du domaine fluide noté Γ_D nous avons imposé

$$\mathbf{w} = 0. \quad (4.9)$$

Pour celles se déplaçant suivant la vitesse du fluide nous avons imposé

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Ces deux formes elliptiques sont équivalentes dans la manière de calculer la vitesse ALE. Leur formulation faible respective devient dans le domaine fluide Ω_t^f

$$\int_{\Omega_t^f} \nabla \mathbf{w} : \nabla \Phi \, d\Omega = 0 \quad (4.11)$$

pour l'équation (4.7) et

$$\int_{\Omega_t^f} \nabla \mathbf{w} : \{ \nabla \Phi + [\nabla \Phi]^T \} \, d\Omega + \int_{\Omega_t^f} (\nabla \cdot \mathbf{w})(\nabla \cdot \Phi) \, d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

pour l'équation (4.8). Nous notons comme nous l'avons fait au chapitre 3 cette contribution numériques en 2D de (4.7)-(4.8) par

$$\mathbf{K}_{ALE} \mathbf{w} =$$

$$\sum_{l=1}^E \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \varrho_i \varsigma_j \left[\frac{1}{|J_l|} (\nabla_0 \mathbf{w}) \tilde{\mathbf{F}}_l^T : (\alpha_1 (\nabla_0 \Phi) \tilde{\mathbf{F}}_l^T + \alpha_2 \tilde{\mathbf{F}}_l (\nabla_0 \Phi)^T) + \frac{\beta}{|J_l|} (\nabla_0 \mathbf{w} : \tilde{\mathbf{F}}_l) (\nabla_0 \Phi : \tilde{\mathbf{F}}_l) \right] (r_i, s_j). \quad (4.13)$$

Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ sont des constantes telles qu'avec le choix $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 1$ on retrouve la discrétisation de (4.8) et par le choix $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \beta = 0$ la discrétisation de (4.7). Ces deux manières de calculer la vitesse ALE sont interchangeables dans la résolution. Nous avons, par analogie avec les équations de la dynamique, gardé la seconde approche pour le calcul de \mathbf{w} .

4.3 Algorithmes

Plusieurs possibilités nous sont offertes pour résoudre les équations de Navier-Stokes en configuration ALE. Si nous connaissons par avance le champ de déplacement \mathbf{x} et la vitesse \mathbf{w} associée. En se donnant le déplacement \mathbf{x} analytiquement dans Ω^f , on impose le mouvement du maillage a priori et la vitesse \mathbf{w} est elle aussi connue par la dérivée temporelle de \mathbf{x} (2.32). Dans l'ensemble des algorithmes que nous présentons, les champs initiaux de la vitesse \mathbf{v}^0 et de la pression p^0 sont fixés arbitrairement à zéro et le SER d'ordre 2 dans le fluide est amorcé à partir du SER d'ordre 1 seulement pour la première itération. Une première possibilité consiste à prescrire le champs de déplacement \mathbf{x} dans tout le domaine fluide Ω^f . Nous pouvons alors en déduire la dérivée en fonction du temps à prescrire sur \mathbf{w} . Connaissant ainsi \mathbf{x}^{n+1} et \mathbf{w}^{n+1} , nous pouvons donc résoudre les équations de Navier-Stokes (3.74) au pas de temps $n + 1$ à partir de \mathbf{v}^n et p^n pour déterminer \mathbf{v}^{n+1} et p^{n+1} . On peut résumer simplement cet algorithme dans 4.1.

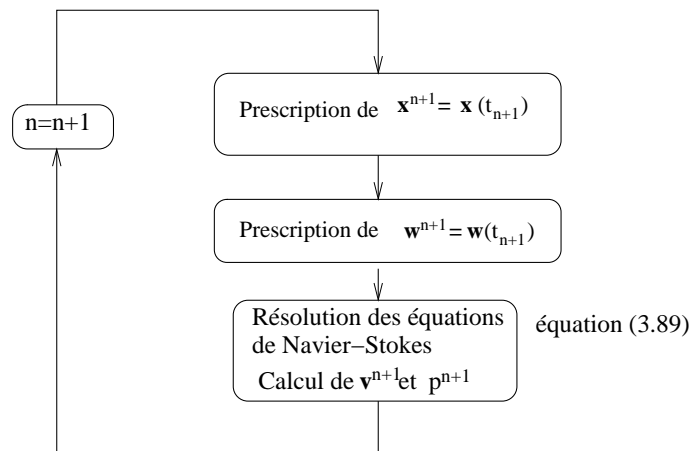


FIG. 4.1 – Algorithme dans le cas des champs \mathbf{x} et \mathbf{w} connus

Dans le cas où nous ne connaissons que la manière dont se déplace le bord du domaine fluide, nous n'avons donc la connaissance que de la vitesse ALE sur Γ_I . Nous devons alors prescrire les conditions de Dirichlet adéquates pour calculer le champ de vitesse ALE sur Ω^f . Les étapes de cet algorithme se déroulent de la manière suivante

Etape 1 :

Nous connaissons \mathbf{x}^n et \mathbf{w}^n au pas de temps n . Avec l'équation (4.5), nous déterminons \mathbf{x}^{n+1} sur Ω^f .

Etape 2 :

Nous prescrivons \mathbf{w}^{n+1} que nous ne connaissons que sur Γ_D avec (4.10).

Etape 3 :

Avec la condition que nous avons imposé à l'étape précédente, nous déterminons la vitesse \mathbf{w}^{n+1} sur Ω^f en résolvant (4.7) ou (4.8).

Etape 4 :

Connaissant donc \mathbf{x}^{n+1} et \mathbf{w}^{n+1} sur Ω^f , on résout finalement les équations (3.74) comme nous l'avons fait dans l'algorithme précédent. On retourne à l'étape 1 et on avance d'un pas de temps.

Ainsi, nous utilisons l'algorithme suivant

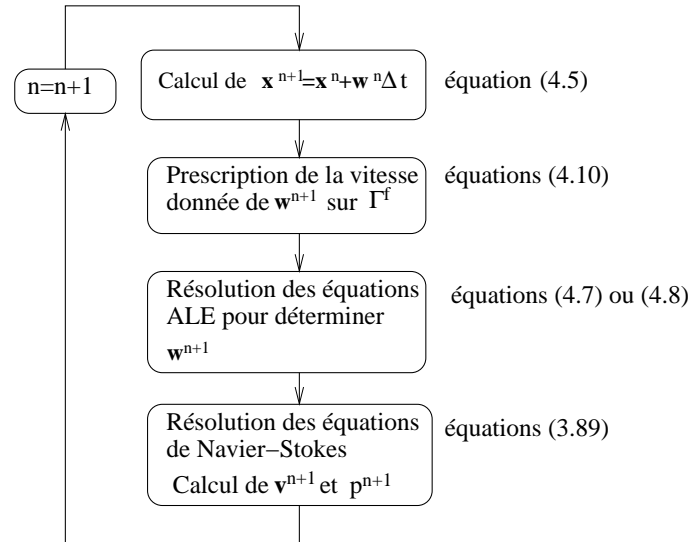


FIG. 4.2 – Algorithme par une approche explicite

Cette approche traite le déplacement de manière explicite. Si cette approche peut encore souffrir d'un manque de précision temporelle, elle a le mérite d'être assez simple à implémenter. Nous avons aussi envisagé un algorithme suivant une approche implicite de type prédicteur-correcteur dont les étapes sont décrites ainsi

Etape 1 :

Nous connaissons \mathbf{x}^n , \mathbf{w}^n et \mathbf{w}^{n-1} au pas de temps n . Avec l'équation (4.4), nous déterminons une prédiction de notée $\mathbf{x} (\mathbf{x}^{n+1})^p$ sur Ω^f .

Etape 2 :

Nous prescrivons \mathbf{w}^{n+1} que nous ne connaissons que sur Γ_D avec (4.10).

Etape 3 :

Avec la condition que nous avons imposé à l'étape précédente, nous déterminons la vitesse \mathbf{w}^{n+1} sur Ω^f en résolvant (4.7) ou (4.8).

Etape 4 :

Le champ corrigé \mathbf{x}^{n+1} sur Ω^f et finalement déterminé avec (4.4).

Etape 5 :

Connaissant donc \mathbf{x}^{n+1} et \mathbf{w}^{n+1} sur Ω^f , on résout finalement les équations (3.74) comme dans les algorithmes précédents. On retourne à l'étape 1 et on avance d'un pas de temps.

On représente cet algorithme à la figure 4.3.

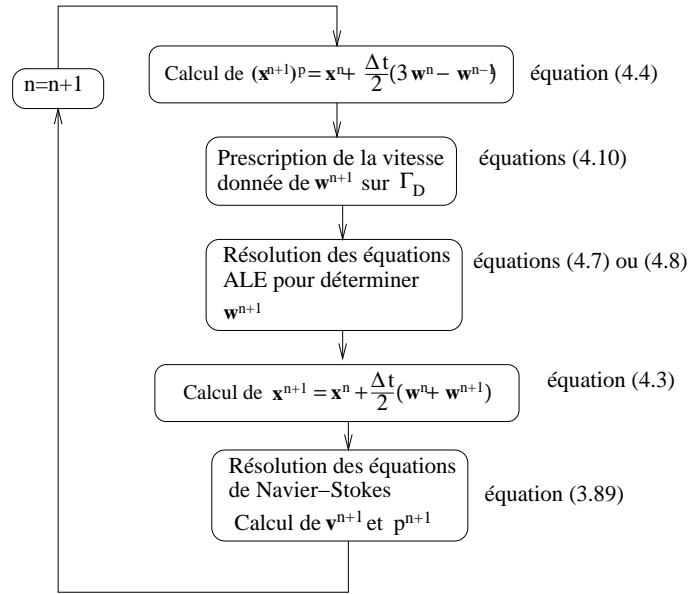


FIG. 4.3 – Algorithme prédicteur-correcteur

L'utilisation de l'algorithme prédicteur-correcteur 4.3 n'a cependant pas changé le type de précision en particulier au niveau temporel de la formulation ALE par rapport à l'algorithme 4.2. Nous avons donc privilégié l'utilisation de l'algorithme 4.2.

4.4 Applications numériques

Nous débutons l'application numérique de la méthode ALE par la présentation dans les sections 4.4.1 et 4.4.2 de résultats issus de l'article "Solution of moving-boundary problems by the spectral element method" [7]. Ces deux premières sections sont rédigées en anglais. Elles correspondent à l'apport original de cette thèse pour la publication mentionnée. Les sections suivantes viennent compléter ces résultats et une analyse de précision temporelle est effectuée.

4.4.1 Spatial accuracy in curved domains

We want to check the error evolution in the square domain $\Omega = [-1, 1]^2$ decomposed in curved subdomains (elements). To this aim, let us consider the steady Stokes equations

$$\begin{cases} -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega_t \times I \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega_t \times I. \end{cases} \quad (4.14)$$

The exact solution is given by

$$\begin{cases} v_x = -\cos(\pi x/2) \sin(\pi y/2), \\ v_y = \sin(\pi x/2) \cos(\pi y/2), \\ p = -\pi \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2), \end{cases} \quad (4.15)$$

when the body force term is chosen as

$$\begin{cases} f_x = -\pi^2 \cos(\pi x/2) \sin(\pi y/2), \\ f_y = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Instead of using a regular square grid composed of elements with edges parallel to the lines of the Cartesian axes, we performed the computation on the deformed mesh [47, 89] displayed in figure 4.4 (left).

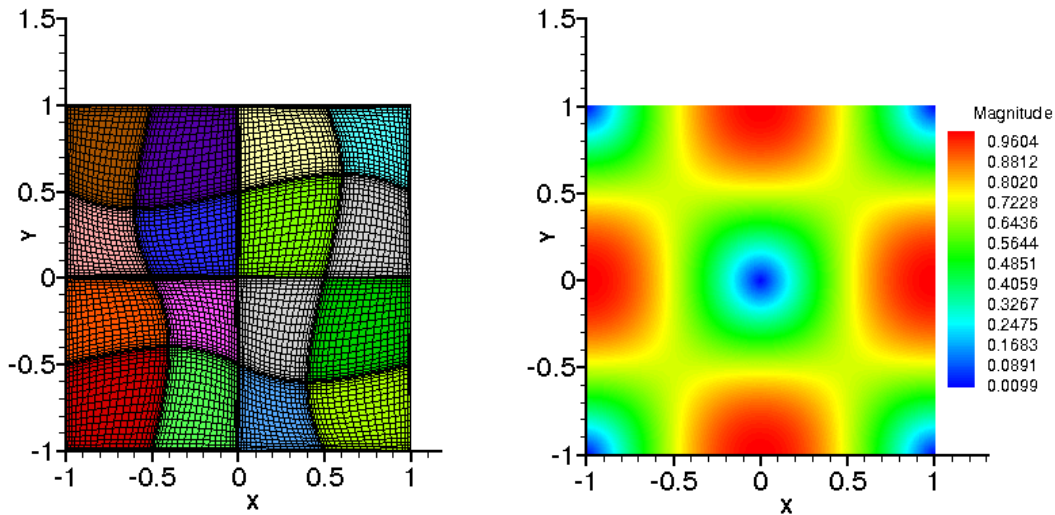


FIG. 4.4 – Square domain Ω with internally deformed subdomains with $E = 4 \times 4$ spectral elements and $N = 20$ (left) and the velocity magnitude (right)

Contours of the norm of the velocity field for the computed solution of problem (4.14), are presented on figure 4.4 (right). Figure 4.5 shows the evolution of the relative error in H^1 -norm for the velocity and in L^2 -norm for the pressure field, with respect to an increasing polynomial degree N , for two cases— $E = 2 \times 2$ elements and $E = 4 \times 4$ elements.

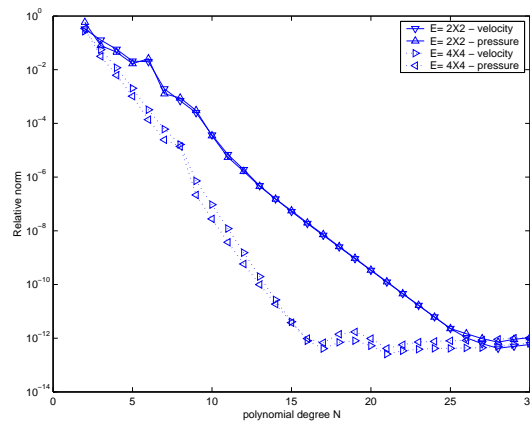


FIG. 4.5 – Relative error in H^1 -norm for the velocity and in L^2 -norm for the pressure field

The convergence is slower than the one obtained with a mesh divided in several regular square subdomains. First, we still achieve the exponential decrease of the relative error when the polynomial degree increases (which is typical of spectral or p -convergence [25]). Second, the convergence is faster when increasing the number of spectral elements E , as previously observed in [90] (which is equivalent to h -convergence in finite-element terminology [25]). The

same computation has been carried out with a geometry Ω' obtained by the transformation of coordinates of the unit square $\Omega = [-1, 1]^2$ with sine functions (Fig. 4.6)

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \sin(\pi x) \sin(\pi y), \\ y' = y + \alpha \sin(\pi y) \sin(\pi x), \end{cases} \quad (4.17)$$

with $(x, y) \in \Omega$, $(x', y') \in \Omega'$ and $\alpha = 1/10$. Here, the deformation of the geometry not only involves the interior of the subdomains but also the domain boundaries.

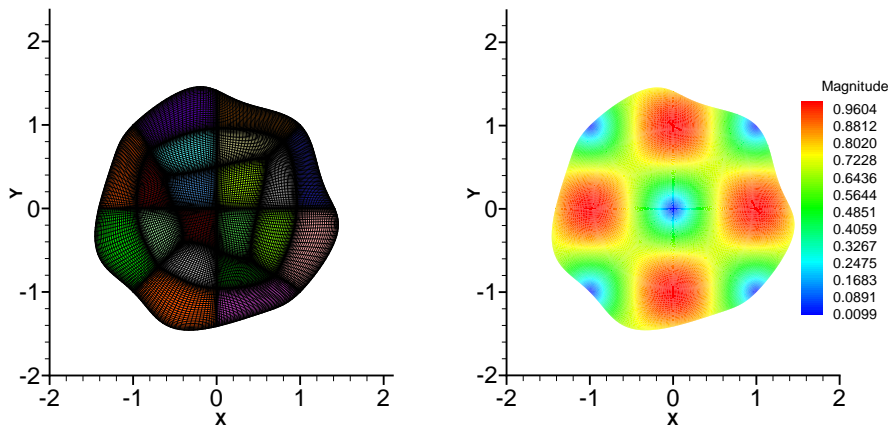


FIG. 4.6 – Curvy geometry for $E = 20$ and $N = 30$ (left) and the velocity magnitude (right)

The remarks made for the first computation, corresponding to the square domain, are still relevant for this geometry. The same behavior of the convergence is obtained as one can observe on figure 4.7. The deformation of the boundaries induces obviously a slower convergence in comparison with the square domain. Nevertheless, the important result is that the spectral convergence is maintained (Fig. 4.7) even with a deformation of the domain involving its boundaries, which is a mandatory feature when solving moving-boundary problems.

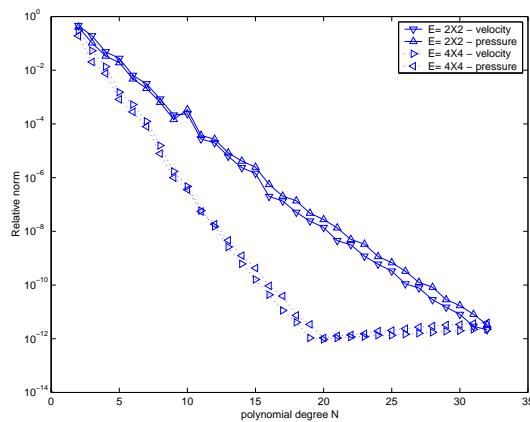


FIG. 4.7 – Relative error in H^1 -norm for the velocity and in L^2 -norm for the pressure field

4.4.2 Motion of a cylinder inside a square cavity

We solve the discrete Navier–Stokes equations (3.74) in a two-dimensional square cavity. A schematic view of this cavity is given in figure 4.8 with fixed exterior walls. A circular cylinder is immersed into the fluid and is moving with a prescribed velocity.

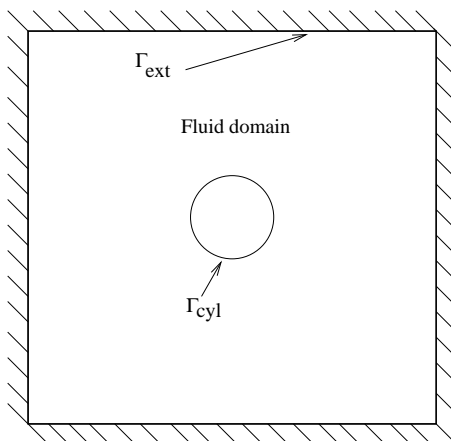


FIG. 4.8 – Geometry of the fluid domain with the immersed cylinder

Two types of prescribed motions are studied. In the first case, we consider a cylinder in horizontal translation from the center of the cavity with a constant velocity. Noting the boundary of the cylinder Γ_{cyl} , we prescribe

$$\begin{cases} v_x|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = 1, \\ v_y|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Noting the exterior walls Γ_{ext} , we have

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{\text{ext}}} = \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

We solve a time-dependent problem in order to study the evolution of the fluid motion caused by the translation of the cylinder in the square domain $\Omega = [-1, 1]^2$. The Reynolds number $\text{Re} = UL/\nu$, where the reference length L and velocity U are set equal to one, is equal to 100 with a time step Δt fixed to 0.005. The discretization uses a total number of elements equal to $E = 64$ and the polynomial degree is $N = 12$ in each of the two directions. We obtain an unsteady evolution of the fluid motion and we observe a deformation of the fluid mesh as pictured in figure 4.9, where appears the flow configuration for $t = 0.25, 0.5$ and 0.7 . If we keep on moving the cylinder closer to the right wall, the mesh deformation becomes too large. We have also focused our attention on the evaluation of the acceleration noting \mathbf{v}_n the velocity field at the time level n with the expression $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$. Figure 4.10 displays the previous expression and the L^2 -norm of the velocity. The acceleration does not vanish, which means the solution does not become steady-state. This can be expected since the cylinder is always in motion inside the cavity. Moreover the acceleration increases when the cylinder gets closer to the right wall.

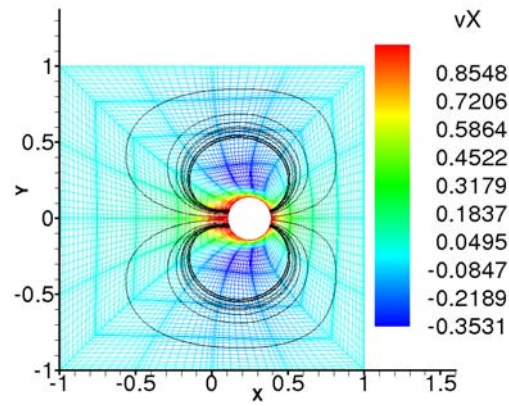
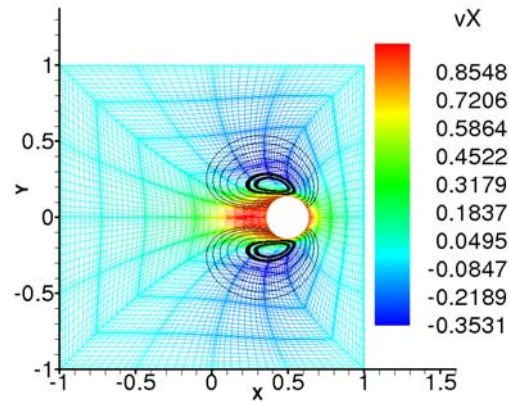
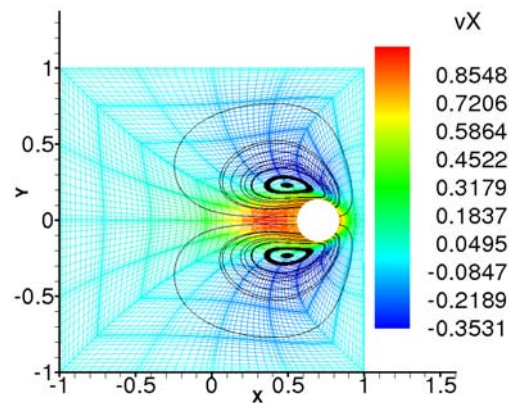
 $t = 0.25$  $t = 0.50$  $t = 0.70$

FIG. 4.9 – The velocity component v_x and the corresponding streamlines (black solid lines) around a moving cylinder, $Re = 100$, for $t = 0.25$ (top), $t = 0.5$ (center) and $t = 0.7$ (bottom)

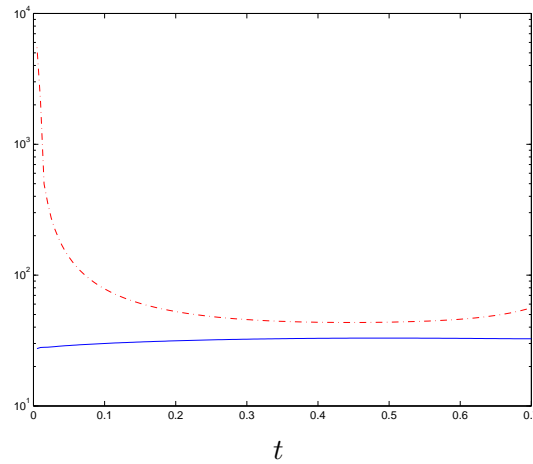
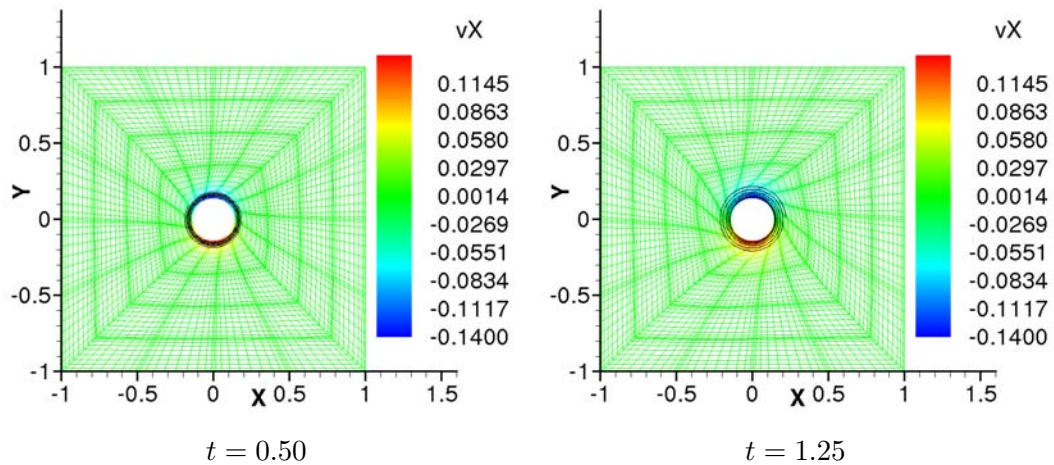


FIG. 4.10 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ (dashed line) and $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ (solid line) versus simulation time t

In the second case, the cylinder at the center of the cavity is subject to a constant counter-clockwise angular rotation $\omega = 1$ such that

$$\begin{cases} v_x|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = -y, \\ v_y|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = x. \end{cases} \quad (4.20)$$

In figure 4.11, we have maintained $E = 64$ and changed the polynomial degree to $N = 10$. We exhibit the flow configuration for $t = 0.5, 1.25$ and 2.0 . Like in the previous example, we conclude the solution does not reach a steady state due to the motion of the cylinder (Fig. 4.12). We have successfully tested these kinds of motion for large distortions of the fluid mesh.



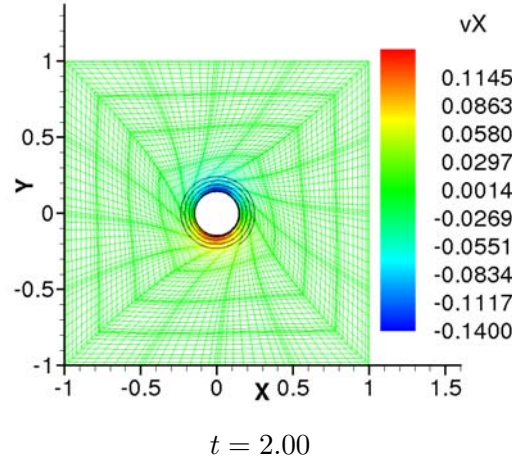


FIG. 4.11 – The velocity component u_x and the corresponding streamlines (black solid lines) around a moving cylinder, $Re = 100$, for $t = 0.5$, $t = 1.25$ and $t = 2.0$

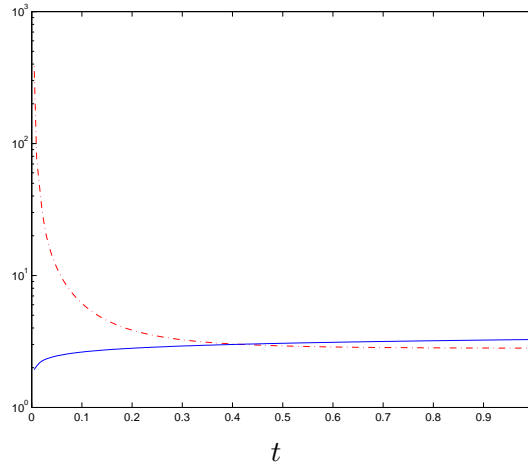


FIG. 4.12 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ and $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ versus simulation time t

4.4.3 Oscillation du cylindre dans la cavité carrée

Dans cet exemple, nous reprenons une translation comme précédemment mais cette fois-ci avec un mouvement sinusoïdal au cours du temps. Cet exemple vise à montrer que l'on peut faire subir un mouvement périodique à notre cylindre. Pour le faire, nous avons choisi la vitesse du cylindre telle que

$$\begin{cases} v_x|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = \alpha \sin(4\pi t), \\ v_y|_{\Gamma_{\text{cyl}}} = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

avec $\alpha = \frac{1}{10}$.

Nous avons ensuite choisi le nombre de Reynolds égale à 100 avec $N = 12$ et $E = 256$. Le pas de temps a été fixé à 0.001 et nous avons donc étudié cet écoulement jusqu'à $t = 1.0$. Sur la durée d'expérience, avec le choix que nous avons fait pour la vitesse, nous observons deux périodes d'oscillations. La première correspond aux temps $t = 0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4$ et 0.5 (dans les figures 4.13 et 4.14) tandis que la seconde s'effectue pour $t = 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9$ et 1.0 (dans

les figures 4.14 et 4.15)). Le phénomène observé est particulièrement intéressant. Tout d'abord le cylindre avance vers la droite jusqu'à $t = 0.25$ et donc on observe deux recirculations se former légèrement en amont, au dessus et en dessous du cylindre. Du fait que nous avons imposé un mouvement sinusoïdal le cylindre repart vers la gauche à $t = 0.25$ et donc ces deux recirculations viennent se fondre sur le cylindre et deux nouvelles recirculations se forment. Ce mouvement se reproduit sur la seconde période avec quelques nuances sur la forme des recirculations. Avec ce mouvement du cylindre, aucune dégénérescence du maillage n'apparaît comme cela pourrait être le cas si le cylindre se rapprochait trop d'une paroi de la cavité.

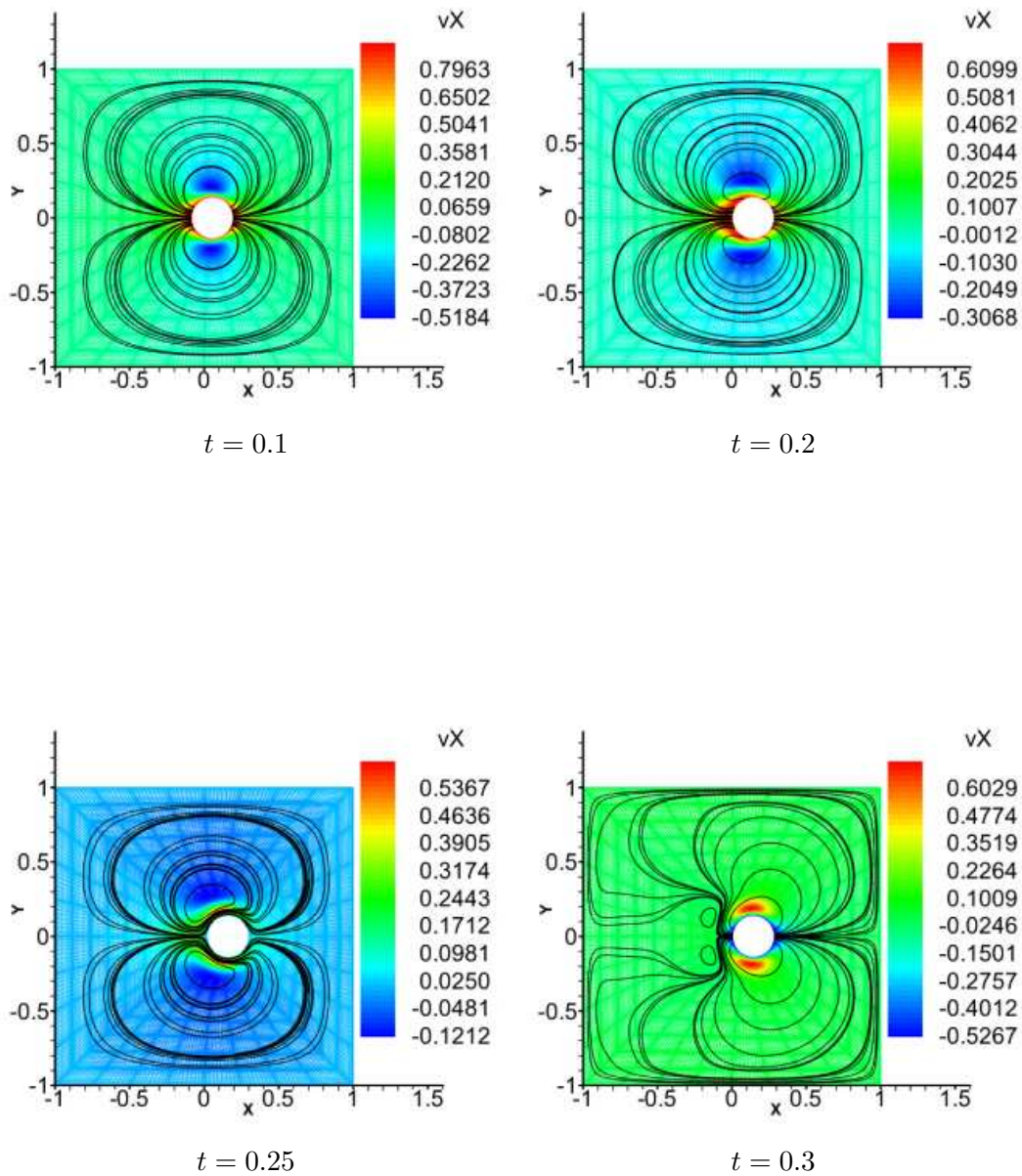


FIG. 4.13 – Composante v_x de la vitesse et lignes de courant (lignes en noir) , $Re = 100$, pour $t = 0.1, t = 0.2, t = 0.25, t = 0.3$ (de haut en bas et de gauche à droite)

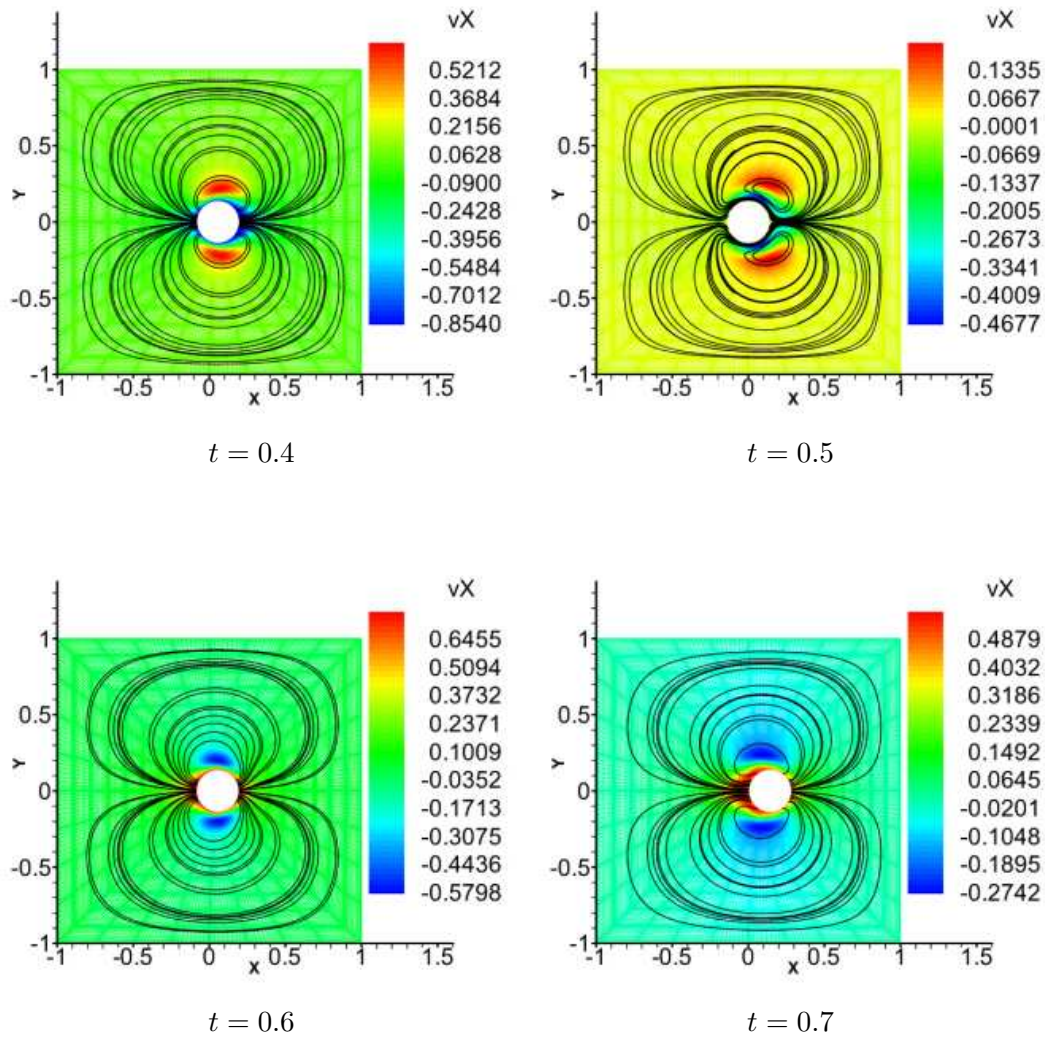
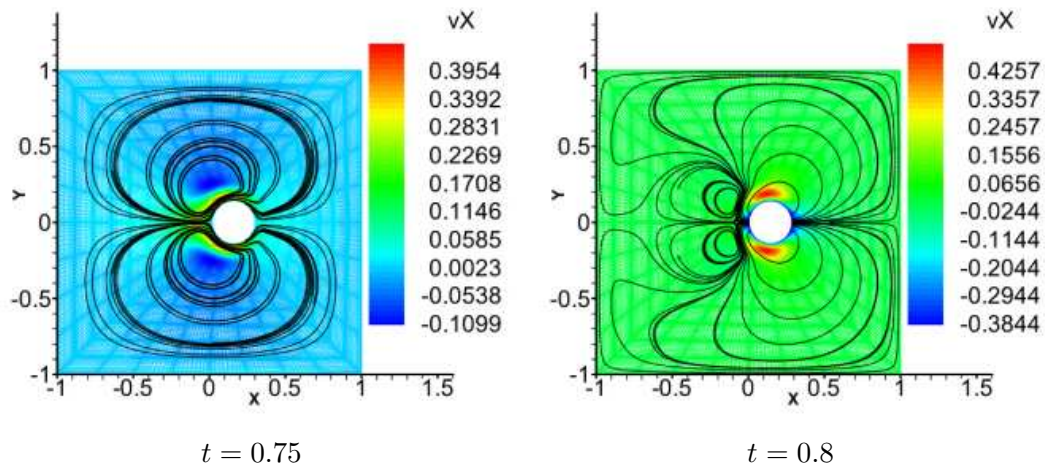


FIG. 4.14 – Composante v_x de la vitesse et lignes de courant (lignes en noir), $Re = 100$, pour $t = 0.4, t = 0.5, t = 0.6$ et $t = 0.7$ (de haut en bas et de gauche à droite)



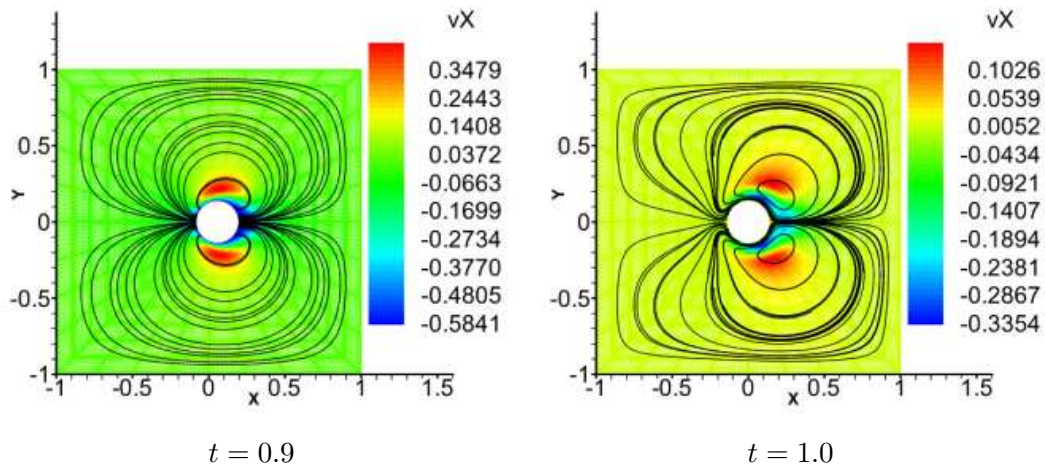


FIG. 4.15 – Composante v_x de la vitesse et lignes de courant (lignes en noir) , $Re = 100$, pour $t = 0.75$, $t = 0.8$, $t = 0.9$ et $t = 1.0$ (de haut en bas et de gauche à droite)

Les normes d'accélération et de vitesse varient clairement de manière sinusoïdale comme le montre la figure 4.16

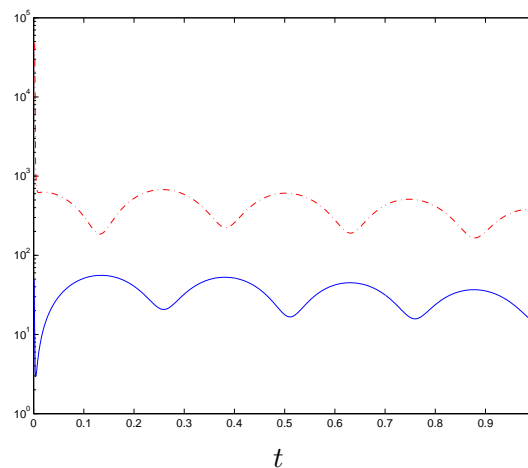


FIG. 4.16 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ (courbe pointillée) et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ (courbe continue) en fonction du temps t

Comme pour les cas précédents, la figure 4.16 nous montre clairement que nous ne convergions pas vers un état stationnaire de l'écoulement. Mais cette figure montre cependant que la résolution est stable sur l'intervalle de temps étudiée.

4.4.4 Valve rigide en rotation imposée dans un canal plan

Nous avons cette fois repris le cas de la rotation mais en changeant le type de géométrie et d'écoulement du fluide (figure 4.17). On résout les équations de Navier-Stokes (3.74). En effet nous considérons dans ce cas un écoulement de type Poiseuille dans un canal où est immergée une valve rigide. Cette valve possède une vitesse de rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre imposée comme dans (4.20) avec $\omega = 1(\text{rad.s}^{-1})$.

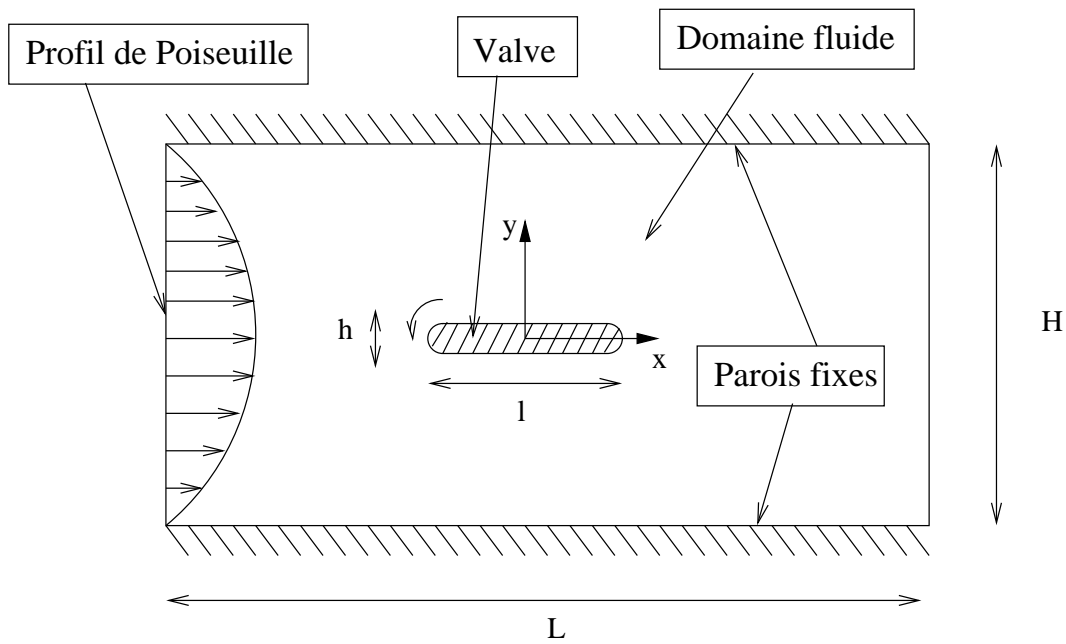
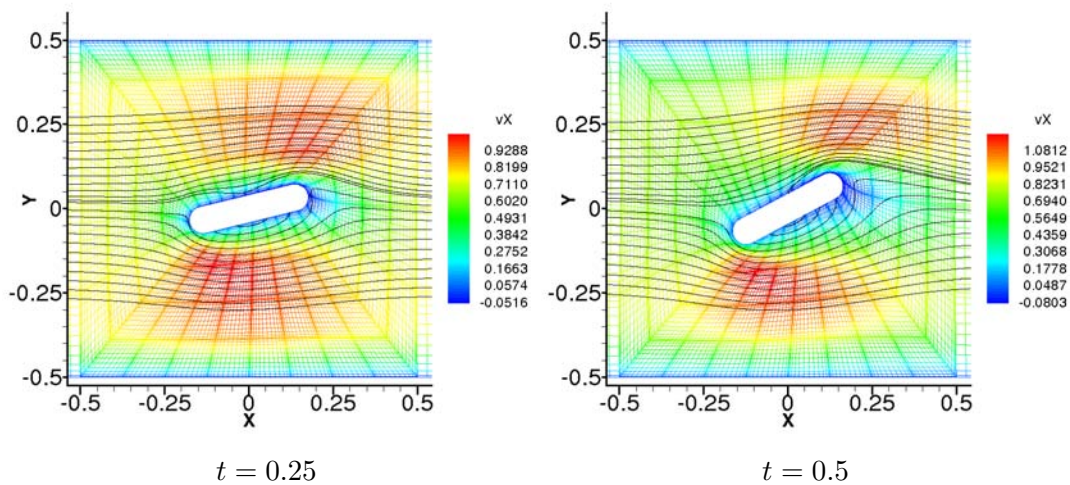


FIG. 4.17 – Géométrie du problème

Nous avons choisi comme longueur du canal $L = 6.0$ et le diamètre $H = 1.0$. La valve a été choisie avec une longueur $l = 0.36$ et une épaisseur $h = 0.08$. Elle est centrée à l'origine du repère qui correspond aussi à son centre de rotation et au centre du canal. Le nombre de Reynolds est toujours égale à 100. Le pas de temps que nous avons utilisé est égale à 0.01 avec $N = 12$ et un nombre d'éléments $E = 112$. Nous montrons 6 positions successives de l'écoulement pour $t = 0.25, 0.5, 1.0, 1.25, 1.5$ et 1.75 (figure 4.18). Nous observons la formation des recirculations en aval de la valve après $t = 1.0$. Le maillage subit une déformation assez importante autour de la valve mais nous n'avons commencé à observer une dégradation de la simulation que vers $t = 1.8$. La rotation que nous avons pu faire subir à la valve a donc dépassé 1.75 radians.



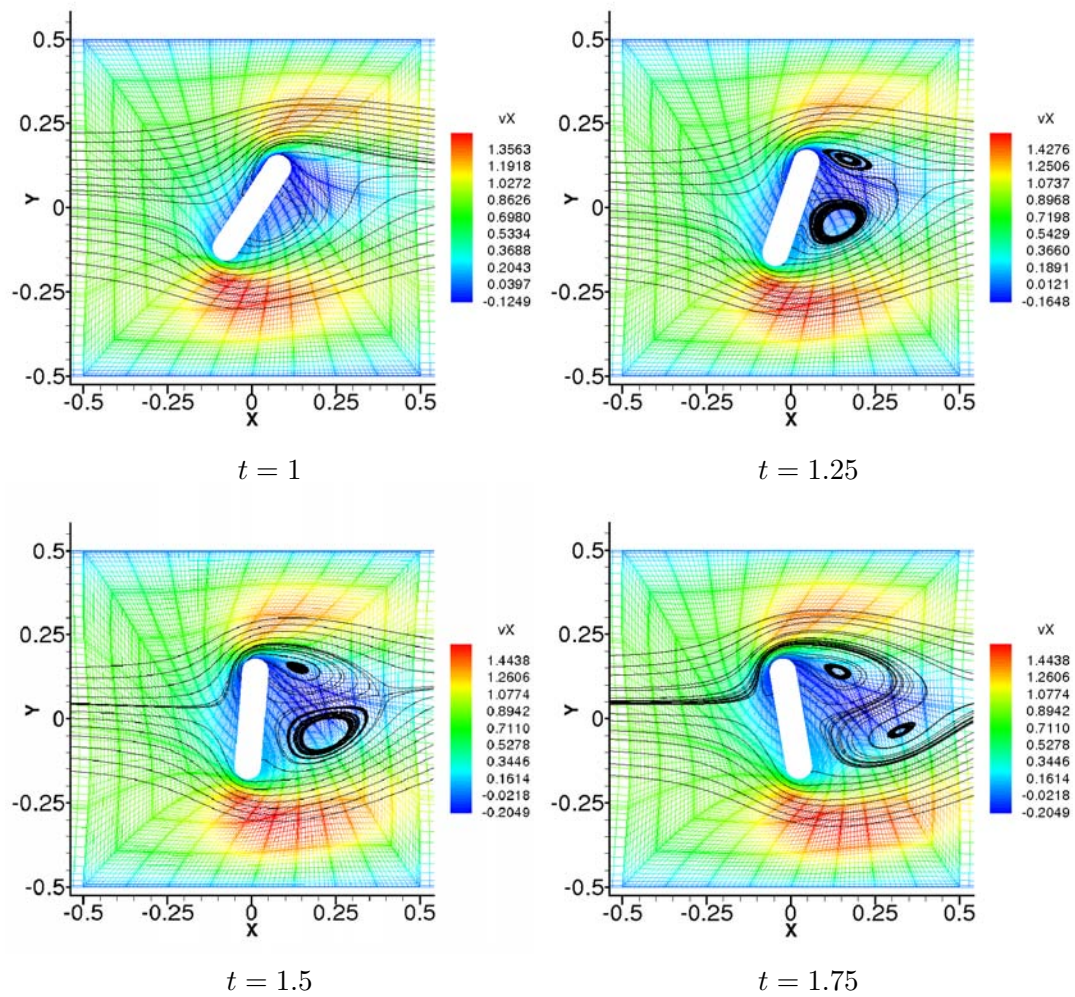


FIG. 4.18 – Composante v_x de la vitesse et lignes de courant (lignes en noir), $Re = 100$, pour $t = 0.25, 0.5, 1.0, 1.25, 1.5$ et 1.75 (de haut en bas et de gauche à droite)

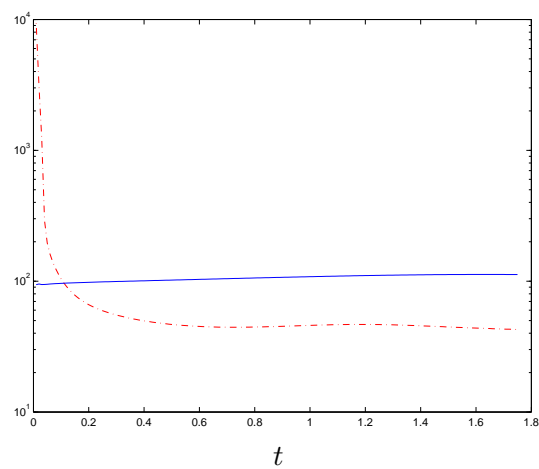


FIG. 4.19 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ (courbe pointillée) et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ (courbe continue) en fonction du temps t

La lecture des courbes de la figure 4.19 nous amène aux mêmes conclusions que dans les cas précédents. Elle ne nous informe cependant pas sur la précision temporelle de la méthode. Nous nous attacherons donc à la précision temporelle de la méthode dans la section suivante.

4.5 Précision temporelle

4.5.1 Cas de la cavité carrée

Pour évaluer la précision obtenue pour la méthode ALE, nous avons d'abord pour le domaine $[-1, 1] \times [-1, 1]$ imposé un mouvement prescrit du maillage tel qu'en notant \mathbf{x}_0 un nœud du maillage initial et \mathbf{x} un nœud du maillage déformé, on ait

$$\begin{cases} \mathbf{x} & = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t), \quad \mathbf{x}_0 \in [-1, 1] \times [-1, 1] \\ u_x(\mathbf{x}_0, t) = u_y(\mathbf{x}_0, t) & = \sin(\pi x_0) \sin(\pi y_0) \sin(\pi t) \\ w_x(\mathbf{x}_0, t) = w_y(\mathbf{x}_0, t) & = \pi \sin(\pi x_0) \sin(\pi y_0) \cos(\pi t). \end{cases} \quad (4.22)$$

La solution de référence que l'on considère est choisie de la manière suivante

$$\begin{cases} v_x = -\cos(\pi x/2) \sin(\pi y/2) \sin(\pi t/2), \\ v_y = \sin(\pi x/2) \cos(\pi y/2) \sin(\pi t/2), \\ p = -\pi \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2) \sin(\pi t/2), \end{cases} \quad (4.23)$$

avec la force de volume adéquate. Nous avons donc calculé l'erreur relative $\frac{\|\mathbf{v}_{\Delta t(p)}(T) - \mathbf{v}_{ref}(T)\|_{H^1}}{\|\mathbf{v}_{ref}(T)\|_{H^1}}$ en fonction du pas de temps $\Delta t(p)$ choisi suivant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ tel que

$$\Delta t(p) = 2^{-p} 10^{-2}, p \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

Nous avons résolu les équations de Navier-Stokes (3.74) en choisissant un temps final égale à $T = 0.01$.

p	$\frac{\ \mathbf{v}_{\tau(p)}(T) - \mathbf{v}_{ref}(T)\ _{H^1}}{\ \mathbf{v}_{ref}(T)\ _{H^1}}$		
	$E = 2 \times 2$	$E = 4 \times 4$	$E = 8 \times 8$
0	1.293367 10^{-1}	1.9365754 10^{-1}	2.8151128 10^{-1}
1	4.314136 10^{-2}	6.3572757 10^{-2}	9.1689379 10^{-2}
2	1.069211 10^{-2}	1.5556042 10^{-2}	2.2303304 10^{-2}
3	2.677115 10^{-3}	3.8971221 10^{-3}	5.5895357 10^{-3}
4	6.791686 10^{-4}	9.8235943 10^{-4}	1.4048198 10^{-3}
5	1.804047 10^{-4}	2.5322326 10^{-4}	3.5684836 10^{-4}
6	5.532884 10^{-5}	7.0975988 10^{-5}	9.4841799 10^{-5}
7	2.150340 10^{-5}	2.4206836 10^{-5}	2.8870234 10^{-5}
8	9.925662 10^{-6}	1.0307230 10^{-5}	1.1032350 10^{-5}

TAB. 4.1 – Erreur relative de la vitesse pour $E = 2 \times 2$, $E = 4 \times 4$ et $E = 8 \times 8$ avec $N = 16$.

p	$\ \mathbf{v}_{\tau(p)}(T)\ _{H^1}$		
	$E = 2 \times 2$	$E = 4 \times 4$	$E = 8 \times 8$
0	5.456365712 10^{-2}	5.511834802 10^{-2}	5.621638696 10^{-2}
1	5.417020260 10^{-2}	5.422909753 10^{-2}	5.434683686 10^{-2}
2	5.412078122 10^{-2}	5.412423555 10^{-2}	5.413114595 10^{-2}
3	5.411626022 10^{-2}	5.411647729 10^{-2}	5.411691173 10^{-2}
4	5.411551972 10^{-2}	5.411553336 10^{-2}	5.411556065 10^{-2}
5	5.411535484 10^{-2}	5.411535569 10^{-2}	5.411535741 10^{-2}
6	5.411531679 10^{-2}	5.411531685 10^{-2}	5.411531695 10^{-2}
7	5.411530890 10^{-2}	5.411530890 10^{-2}	5.411530891 10^{-2}
8	5.411530779 10^{-2}	5.411530779 10^{-2}	5.411530779 10^{-2}

TAB. 4.2 – Norme de la vitesse pour $E = 2 \times 2$, $E = 4 \times 4$ et $E = 8 \times 8$ avec $N = 16$.

En prenant en compte la décroissance géométrique du pas temps, nous avons ainsi calculé $-\log_2\left(\frac{\|\mathbf{v}_{\Delta t(p)}(T) - \mathbf{v}_{ref}(T)\|_{H^1}}{\|\mathbf{v}_{ref}(T)\|_{H^1}}\right)$ en fonction de p

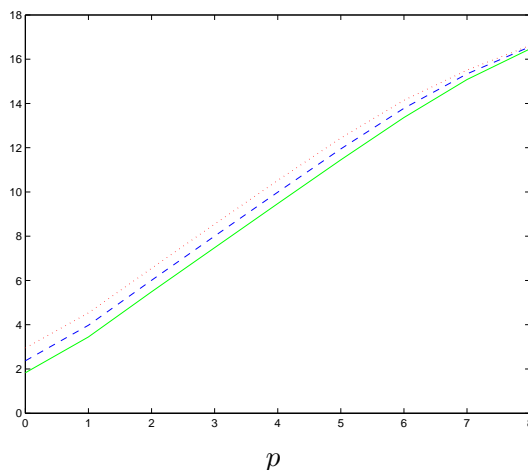


FIG. 4.20 – Fonctions $-\log_2\left(\frac{\|\mathbf{v}_{\Delta t(p)}(T) - \mathbf{v}_{ref}(T)\|_{H^1}}{\|\mathbf{v}_{ref}(T)\|_{H^1}}\right)$ vs. p pour $E = 2 \times 2$ (ligne pointillée), $E = 4$ (ligne en tirets) et $E = 8 \times 8$ (ligne continue)

Nous observons que la précision est voisine de l'ordre deux en temps d'après la lecture de la figure 4.20 car la pente de ces trois courbes est proche de deux. Cependant il faut comprendre que ce calcul a été effectué sur une petite période de temps et que les déformations du maillage sont restées assez faibles. De plus, nous avons imposé le mouvement de la grille ce qui a restreint les imprécisions possibles dues au calcul d'une nouvelle vitesse ALE. L'obtention de l'ordre deux comme nous pouvions l'attendre par le schéma choisi pour résoudre les équations de Navier-Stokes s'avère cependant beaucoup plus délicate numériquement. Dans la section qui suit nous allons comparer l'évolution de la solution dans le cas de la valve et du cylindre pour différents pas de temps.

4.5.2 Comparaisons dans le cas de la valve et du cylindre

En effectuant les mêmes simulations en translation et rotation comme à la section 4.4.2 avec le cylindre puis en rotation avec une valve comme à la section 4.4.4, nous avons fait varier le pas

de temps utilisé dans ces différents cas pour voir comment évoluait la norme d'accélération que nous avons déjà estimée pour un pas de temps fixé. Dans le cas de la translation du cylindre (figure 4.21), nous montrons quatre courbes correspondant chacune à la norme d'accélération pour un choix de pas de temps Δt variant entre 0.0005 et 0.004.

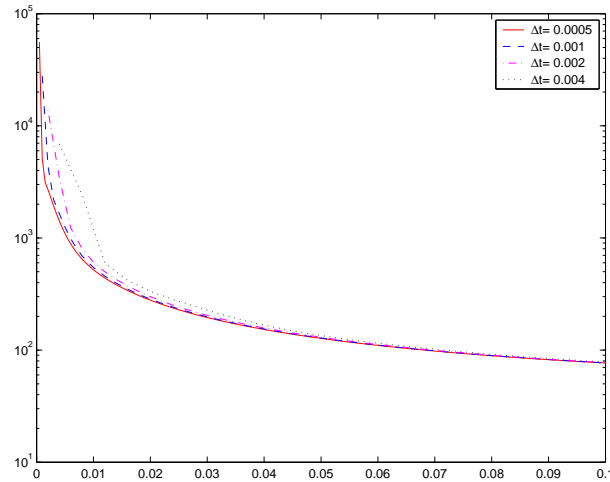


FIG. 4.21 – Fonction $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ en fonction du temps t pour $\Delta t = 0.0005, 0.001, 0.002$ et 0.004 dans le cas de la translation du cylindre

Dans le cas de la rotation du cylindre (figure 4.22), toujours avec le même choix de pas de temps nous avons refait les mêmes calculs que pour le cas en translation.

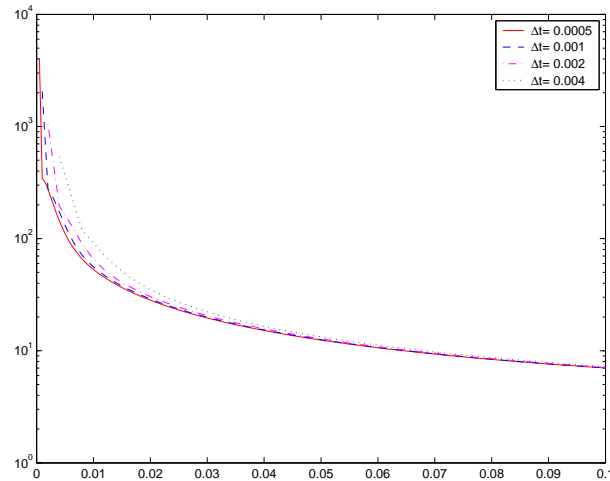


FIG. 4.22 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ en fonction du temps t pour $\Delta t = 0.0005, 0.001, 0.002$ et 0.004 dans le cas de la rotation du cylindre

Finalement, dans le cas de la valve (figure 4.23), nous avons étudié le même type de courbes mais pour un choix de pas de temps compris entre 0.00125 et 0.01.

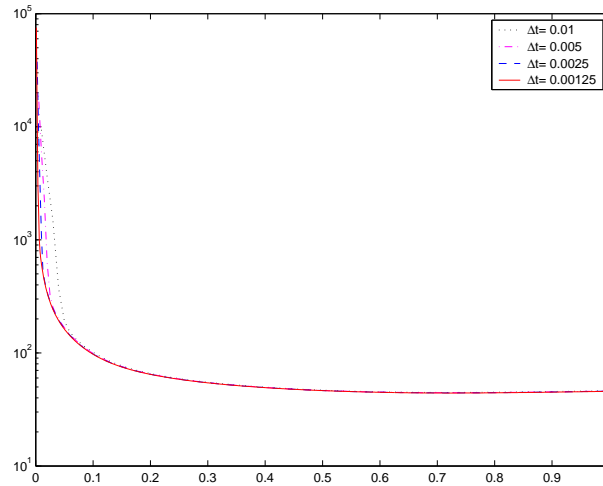


FIG. 4.23 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ en fonction du temps t pour $\Delta t = 0.00125, 0.0025, 0.005$ et 0.01 dans le cas de la valve en rotation

Notons maintenant Da_p la valeur prise par $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t(p)$ au temps final $T = 0.1$ avec le pas de temps $\Delta t(p) = 2^{-p} \times 4 \cdot 10^{-3}$.

$p(\Delta t = 2^{-p} \times 4 \cdot 10^{-3})$	Da_p	$R_p = \log\left(\frac{ Da_p - Da_{p+1} }{ Da_{p+1} - Da_{p+2} }\right)/\log(2)$
0	78.287985	1.045351
1	77.230766	1.021830
2	76.718515	
3	76.466236	

TAB. 4.3 – Précision temporelle avec le cylindre en translation

Le tableau 4.3 réalisé dans le cas du cylindre en translation a été repris dans le cas du cylindre en rotation. Nous avons donc obtenu les résultats du tableau 4.4.

$p(\Delta t = 2^{-p} \times 4 \cdot 10^{-3})$	Da_p	$R_p = \log\left(\frac{ Da_p - Da_{p+1} }{ Da_{p+1} - Da_{p+2} }\right)/\log(2)$
0	7.2076225	1.02263
1	7.0886015	1.07451
2	7.0300175	
3	7.0022001	

TAB. 4.4 – Précision temporelle avec le cylindre en rotation

Dans le cas de la valve en rotation, nous avons étudié le problème dans le cas où le temps final était égal à $T = 1$ et le pas de temps $\Delta p = 2^{-p} \cdot 10^{-3}$.

$p(\Delta t = 2^{-p} 10^{-3})$	Da_p	$R_p = \log\left(\frac{ Da_p - Da_{p+1} }{ Da_{p+1} - Da_{p+2} }\right) / \log(2)$
0	46.273044	1.03400
1	45.968940	1.01924
2	45.820430	
3	45.747159	

TAB. 4.5 – Précision temporelle avec la valve en rotation

Les trois tableaux 4.3-4.5 nous informent que la précision temporelle est d'ordre 1 seulement. Plusieurs raisons expliquent ce problème.

Le calcul est amorcé sans avoir de solution initiale du problème. Le SER d'ordre deux n'étant pas auto-démarrant, nous avons donc utilisé le SER d'ordre 1 pour amorcer le calcul au premier pas de temps.

Le maillage étant mobile, les comparaisons ne se font pas exactement sur les mêmes géométries. Malgré le fait que nous puissions reconstruire de manière très réaliste le domaine dans son état actuel avec un écoulement du fluide qui a un bon comportement physique, sa précision en temps semble donc rester malgré tout réduite. Le domaine fluide possède son histoire propre. En effet, à chaque itération nous construisons la nouvelle position du domaine suivant une équation elliptique arbitrairement choisie. Cela doit avoir pour conséquence que nos mesures de la précision peuvent être parasitées par un effet de décalage. Nous ne sommes jamais au bon endroit pour mesurer la bonne vitesse lorsque nous voulons comparer une même simulation pour différents choix du pas de temps.

Mais si nous avons un ordre de précision temporelle inférieur à 1 il nous serait impossible de voir nos simulations correspondre aussi bien suivant le pas de temps choisi. Le calcul de la norme $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ est une information globale sur l'ensemble du domaine étudié. Il permet malgré tout d'obtenir une information assez réaliste de ce que doit être la précision en chaque noeud du domaine.

Le mouvement que nous permettons au domaine affecte donc la précision temporelle de la méthode. Elle nous permet cependant de pouvoir déformer le domaine pour de grands déplacements. Le remaillage est possible mais il peut souffrir du même symptôme.

D'autres raisons plus spécifiques peuvent expliquer ce problème de précision. Ce que l'état de l'art nous permet de comprendre sur l'erreur de la méthode de découplage de Perot employée [25, 78] est qu'elle est au moins d'ordre 2 en temps lorsque nous faisons une correction de pression [95]. Mais cette erreur est calculée pour des matrices du système ne variant pas au cours du temps. Une erreur de découplage supplémentaire vient indéniablement s'ajouter du fait que les équations dans (3.71) font intervenir des matrices variant aussi au cours du temps. Nous devons accepter cette problématique, d'autant qu'à ce stade la méthode n'a pas montré d'instabilités même avec de grandes déformations du maillage. Cette manière de déplacer le maillage va être moins coûteuse en temps de calcul qu'un remaillage systématique.

Une dernière remarque importante au niveau numérique est la loi de conservation géométrique (LCG) qui peut s'exprimer par l'équation suivante

$$\int_{\Omega_{t_{n+1}}} [\cdot] d\Omega - \int_{\Omega_{t_n}} [\cdot] d\Omega = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_t} [\cdot] \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (4.25)$$

Le symbole $[\cdot]$ peut être remplacé par une fonction définie sur $\Omega_t \times [t_n, t_{n+1}]$. Cette égalité est une conséquence de la formule d'expansion d'Euler [13, 37]. Elle aussi peut affecter la précision

de nos calculs. Différents travaux ont été réalisés dans le cadre des éléments finis pour améliorer la précision de la formulation ALE. Certains articles tentent de montrer que l'on peut obtenir l'ordre deux en temps en satisfaisant la LCG [9, 37, 38]. Cependant les résultats numériques obtenus sont établis pour une équation de Stokes uniquement. Il est clair que le terme convectif non linéaire a une influence non négligeable sur le respect de la LCG et donc sur la précision numérique. Le principe de ces différents modèles est de considérer une discrétisation temporelle plus sophistiquée en traitant l'ensemble des termes diffusifs et convectifs intervenant dans les équations de Navier-Stokes implicitement.

En particulier, une approche numérique prenant en compte le terme convectif se base sur une sous-discrétisation temporelle dans l'intervalle Δt afin de générer des configurations intermédiaires du maillage sur lequel le terme convectif sera calculé. On s'emploie alors à vérifier une loi de conservation géométrique discrète (LCGD) [29, 30] afin d'avoir une méthode d'ordre deux en temps tout en respectant, cette fois de manière discrète la LCG. Cette formulation reste cependant limitée à de petits déplacements dans le cadre des éléments finis. Une telle approche en éléments spectraux reste encore trop coûteuse à cause du terme convectif. Une théorie plus générale pour prendre en compte le déplacement des noeuds d'un élément spectral reste à développer avec ce point de vue, cela sans avoir la garantie que la précision ou la stabilité seront conservées avec une telle approche.

Chapitre 5

Interaction fluide-structure

Dans ce chapitre, nous détaillons numériquement et algorithmiquement la manière de résoudre l'interaction entre le fluide et le solide. Nous adaptons une méthode développée en éléments finis dans l'optique des méthodes décalées. Ce chapitre vient compléter et approfondir le travail réalisé dans [8].

5.1 Précisions sur l'adimensionalisation

5.1.1 dans la structure

En suivant le même type d'adimensionalisation, comme nous l'avons fait dans le fluide au préalable dans (2.8)-(2.9) en introduisant le nombre de Reynolds (2.10), on refait la même adimensionalisation dans (2.16) en posant $\mathbf{u}_a = \frac{\mathbf{u}}{L}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{b}_s &= \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \implies \\ \frac{1}{L} \nabla_a \cdot \left(\frac{1}{L} \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(L \mathbf{u}_a) \mathbf{I} + 2\mu \frac{1}{L} \boldsymbol{\varepsilon}(L \mathbf{u}_a) \right) + \rho_s \mathbf{b}_{sa} \frac{U^2}{L} &= \rho_s \frac{\partial^2 L \mathbf{u}_a}{\partial \left(\frac{Lt_a}{U}\right)^2} \implies \\ \frac{1}{\rho_s U^2} \nabla_a \cdot \left(\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_a) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_a) \right) + \mathbf{b}_{sa} &= \frac{\partial^2 \mathbf{u}_a}{\partial t_a^2}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Ainsi, l'équation (5.1) de la dynamique dans le solide adimensionalisées devient, en omettant l'indice d'adimensionalisation

$$\frac{1}{\rho_s U^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{b}_s = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}\tag{5.3}$$

On remplace ensuite les coefficients de Lamé par leur variante adimensionnelle avec

$$\begin{aligned}\lambda_a &= \frac{\lambda}{\rho_s U^2} \\ \mu_a &= \frac{\mu}{\rho_s U^2}\end{aligned}\tag{5.4}$$

En remplaçant les coefficients μ et λ dans le tenseur des contraintes par μ_a et λ_a dans $\boldsymbol{\sigma}_s$, nous pouvons donc écrire plus simplement (5.3)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{b}_s = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}\tag{5.5}$$

On résout donc suivant l'adimensionalisation choisie, les mêmes équations de la dynamique (2.16) mais avec les coefficients de Lamé adaptés.

5.1.2 A l'interface

Nous adimensionalisons l'équation (2.30) avec pour hypothèse que $p_0 = 0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_f &= -p\mathbf{I} + \mu_f(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) \implies \\ \boldsymbol{\sigma}_f &= -p\mathbf{I} + \mu\left(\frac{1}{L}\nabla_a(\mathbf{v}_aU) + \frac{1}{L}(\nabla_a(\mathbf{v}_aU))^T\right) \implies \\ \boldsymbol{\sigma}_f &= -\rho_f U^2 p_a \mathbf{I} + \mu \frac{U}{L} (\nabla_a \mathbf{v}_a + (\nabla_a \mathbf{v}_a)^T)\end{aligned}\quad (5.6)$$

On en déduit d'abord avec (2.30) que

$$(\boldsymbol{\sigma}_s)\mathbf{n} = \left(-\rho_f U^2 p_a \mathbf{I} + \mu_f \frac{U}{L} (\nabla_a \mathbf{v}_a + (\nabla_a \mathbf{v}_a)^T)\right)\mathbf{n} \quad (5.7)$$

Nous devons encore exprimer le membre de gauche de l'équation (5.7) suivant les coefficients de Lamé définis en (5.4) afin d'obtenir une expression complètement adimensionnelle. Ainsi suivant ces coefficients, nous obtenons l'expression du tenseur des contraintes suivante

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_s &= \rho_s U^2 \lambda_a \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\rho_s U^2 \mu_a \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \implies \\ \boldsymbol{\sigma}_s &= \rho_s U^2 \left(\lambda_a \frac{1}{L} \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_a(L\mathbf{u}_a)\mathbf{I} + 2\mu_a \frac{1}{L} \boldsymbol{\varepsilon}_a(L\mathbf{u}_a)\right) \implies \\ \boldsymbol{\sigma}_s &= \rho_s U^2 (\boldsymbol{\sigma}_s)_a\end{aligned}\quad (5.8)$$

Nous remplaçons l'expression (5.8) de $\boldsymbol{\sigma}_s$ dans (5.7) et nous pouvons en déduire

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}_s)_a \mathbf{n} &= \left(-\frac{\rho_f}{\rho_s} p_a \mathbf{I} + \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{\mu_f}{\rho_f L U} (\nabla_a \mathbf{v}_a + (\nabla_a \mathbf{v}_a)^T)\right)\mathbf{n} \implies \\ (\boldsymbol{\sigma}_s)_a \mathbf{n} &= \frac{\rho_f}{\rho_s} \left(-p_a \mathbf{I} + \frac{1}{Re} (\nabla_a \mathbf{v}_a + (\nabla_a \mathbf{v}_a)^T)\right)\mathbf{n}\end{aligned}\quad (5.9)$$

Par (5.9) en posant

$$(\boldsymbol{\sigma}_f)_a = -p_a \mathbf{I} + \frac{1}{Re} (\nabla_a \mathbf{v}_a + (\nabla_a \mathbf{v}_a)^T), \quad (5.10)$$

on en déduit

$$\boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} = \frac{\rho_f}{\rho_s} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \quad (5.11)$$

Nous en déduisons, de même, la forme adimensionnelle de l'équation de continuité (2.27)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \implies \mathbf{v}_a U = \frac{D(\mathbf{u}_a L)}{D\left(\frac{t_a L}{U}\right)} \implies \mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{u}}_a \quad (5.12)$$

5.2 Les équations de l'interaction fluide-structure

Les équations nécessaires à la résolution du problème d'interaction fluide-structure ont été présentées au chapitre 2 pour chaque domaine considéré. L'adimensionalisation présentée à la section précédente a permis de préciser comment ces différentes équations ont été calibrées ensemble. Le système peut donc être récapitulé sous une forme adimensionnelle généralisée de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 \text{Dans } \Omega^f \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{v}) + \mathbf{b}_f \\ \boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{array} \right. \\
 \text{Dans } \Omega^s \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{b}_s \\ \boldsymbol{\sigma}_s = \frac{\lambda}{\rho_s U^2} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2 \frac{\mu}{\rho_s U^2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \end{array} \right. \quad (5.13) \\
 \text{Sur } \Gamma_I \quad & \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} = \frac{\rho_f}{\rho_s} \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n} \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

5.3 Algorithmique

La stratégie adoptée pour résoudre le problème de l'interaction fluide-structure se base sur un algorithme décalé où le fluide et le solide ne sont pas traités simultanément mais l'un après l'autre par opposition avec l'approche monolithique [6,70]. On se base sur une *méthode décalée en série améliorée* (MDSA) développée par Farhat et Lesoinne [30,31]. La MDSA a deux avantages sur la *méthode décalée conventionnelle* (MDC). D'une part, elle est plus précise du fait que l'erreur énergétique est d'ordre deux en temps, d'autre part elle respecte mieux la loi de conservation géométrique. Pour résoudre les équations (5.13), le choix le plus judicieux pour un algorithme décalé nous amène donc à la MDSA.

Cette méthode est développée à partir d'un décalage d'un demi pas de temps entre l'évaluation des champs \mathbf{v} , \mathbf{w} et p dans le fluide et les champs \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ et $\ddot{\mathbf{u}}$ dans la structure. On illustre schématiquement ce décalage temporel dans la figure 5.1.

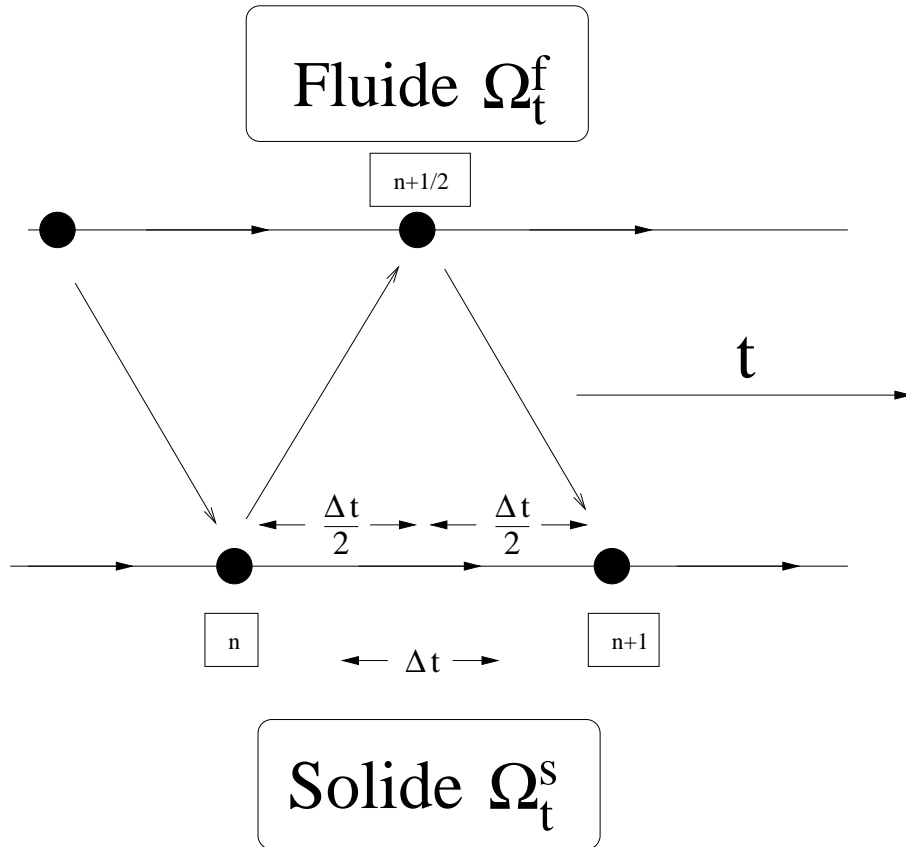


FIG. 5.1 – Illustration schématisée du décalage temporel dans la MDSA

Par rapport à une approche monolithique où le fluide et la structure sont calculés simultanément, une difficulté importante vient avec le fait que nous ne disposons numériquement que des équations de la dynamique et de Navier-Stokes séparément. Pour palier cette difficulté on peut avoir recours à des méthodes de type point fixe [22, 23, 34, 36]. Ces méthodes peuvent être plus coûteuses en temps de calcul dans le cas des éléments finis et plus difficiles à pratiquer aux éléments spectraux.

La MDSA [81] demande une dernière adaptation de la manière de calculer la vitesse ALE et le déplacement du maillage. En effet, pour cet algorithme on se base sur l'extension harmonique [23, 34, 37] présentée à l'équation (4.6) où l'on cherche à calculer le déplacement dans tout le domaine fluide puis à en déduire la vitesse ALE. On se base sur les équations (4.2) mais que l'on écrit cette fois pour le déplacement \mathbf{u}_f . Le champ \mathbf{u}_f représente un déplacement, lui aussi arbitrairement choisi, calculé à l'intérieur du domaine fluide dont on va déduire la vitesse ALE. L'indice f a pour rôle de distinguer ce champ du déplacement lagrangien \mathbf{u} calculé dans le solide. On résout une équation de la forme suivante sur \mathbf{u}_f

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}_f) = 0. \quad (5.14)$$

En particulier, nous avons fait le même choix d'équation pour résoudre \mathbf{u}_f qu'à l'équation (4.8) pour \mathbf{w} et ainsi nous avons considéré l'équation sur \mathbf{u}_f suivante

$$\alpha \nabla \cdot \{ \nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u})^T \} + \beta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_f) = 0 \quad (5.15)$$

avec $\alpha = \beta = 1$. Sous une forme discrète, on résout dans Ω^f comme nous l'avons introduit dans

l'équation (4.13) au chapitre précédent, l'équation suivante

$$\mathbf{K}_{ALE}\mathbf{u}_f = 0. \quad (5.16)$$

Comme on effectue un décalage d'un demi pas de temps entre le fluide et la structure, on considère comme condition sur Γ_I

$$\mathbf{u}_f^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}^n. \quad (5.17)$$

On en déduit la position du maillage fluide \mathbf{x}_f au pas de temps $n + \frac{1}{2}$ par l'addition de la position initiale du maillage fluide et du déplacement \mathbf{u}_f calculé au pas de temps $n + \frac{1}{2}$. Ainsi on calcule

$$\mathbf{x}_f^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{x}_f^0 + \mathbf{u}_f^{n+\frac{1}{2}}. \quad (5.18)$$

On en déduit finalement la vitesse ALE par (2.32) discrétisée sous la forme

$$\mathbf{w}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{x}_f^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}. \quad (5.19)$$

Avant de commencer l'algorithme d'interaction, on résout les équations de Navier-Stokes en ayant fixé le solide. Le déplacement, la vitesse et l'accélération du solide sont alors tous les trois nuls durant cette étape de calcul. Un écoulement préalable est donc établi sans nécessairement aller jusqu'à la stationnarité. L'amorçage de cet écoulement est effectué comme dans les algorithmes du chapitre précédent en utilisant le SER d'ordre 1 à la première itération. Lorsque l'algorithme d'interaction débute, les champs de vitesse et de pression sont donc déjà connus dans le fluide. L'algorithme général se déroule alors de la manière suivante :

Etape 1 :

Connaissant les données \mathbf{x}_s^n , \mathbf{u}^n , $\dot{\mathbf{u}}^n$ et $\ddot{\mathbf{u}}^n$ dans le solide et $\mathbf{x}_f^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{u}_f^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{w}^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}$ et $\underline{p}^{n-\frac{1}{2}}$ dans le fluide, la première étape consiste à calculer la condition de Dirichlet (5.17) à imposer sur l'interface Γ_I qui sera utilisée pour déplacer le maillage du fluide au temps $n + \frac{1}{2}$.

Etape 2 :

Cette condition est utilisée dans la seconde étape pour calculer $\mathbf{u}_f^{n+\frac{1}{2}}$ sur tout Ω_t^f avec (5.15) puis le maillage fluide est déplacé avec (5.18).

Etape 3 :

La troisième étape consiste donc ensuite à partir du calcul de $\mathbf{x}_f^{n+\frac{1}{2}}$ d'en déduire $\mathbf{w}^{n+\frac{1}{2}}$ à l'aide de (5.19).

Etape 4 :

Dans la quatrième étape, on résout les équations de Navier-Stokes pour le temps $n + \frac{1}{2}$. Les équations (3.74) sont réécrites de la manière suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2\Delta t}\mathbf{M}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}^{n+\frac{1}{2}} & -(\mathbf{D}^T)^{n+\frac{1}{2}} \\ -\mathbf{D}^{n+\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \\ \underline{p}^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \quad (5.20)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}^{n-\frac{1}{2}} \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M}^{n-\frac{3}{2}} \mathbf{v}^{n-\frac{3}{2}} - 2 \mathbf{C}^{n-\frac{1}{2}} (\mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{w}^{n-\frac{1}{2}}) \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \\ \mathbf{C}^{n-\frac{3}{2}} (\mathbf{v}^{n-\frac{3}{2}}, \mathbf{w}^{n-\frac{3}{2}}) \mathbf{v}^{n-\frac{3}{2}} + \mathbf{M}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{b}_f^{n+\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Etape 5 :

La cinquième étape consiste à partir de la solution $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\underline{p}^{n+\frac{1}{2}}$ de calculer les forces de contact $(\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n})^{n+\frac{1}{2}}$ que nous appliquerons au niveau du solide avec l'équation suivante sur l'interface Γ_I dans le domaine solide

$$(\boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n})^{n+1} \approx \frac{\rho_f}{\rho_s} (\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n})^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.21)$$

Etape 6 :

Ainsi, la dernière étape est consacrée à la résolution des équations de la dynamique dans le solide avec l'utilisation des équations (3.113)-(3.115) dans le cas de la méthode des trapèzes c'est-à-dire $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. La configuration géométrique choisie pour le solide peut être faite suivant la position initiale du solide, sa position courante au pas de temps n ou approchée au pas de temps $n+1$ voire une position intermédiaire (voir l'équation (5.35)). Cependant le choix de cette configuration a une incidence sur (3.115). Si nous restons sur le domaine initial de la structure alors l'équation (3.115) que l'on résout devient

$$\left[\frac{1}{\alpha\beta\Delta t^2} \mathbf{M}_s^0 + \mathbf{K}_s^0 \right] (\mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{G}^{n+1} + \mathbf{M}_s^0 \left[\frac{1}{\alpha\beta\Delta t^2} \mathbf{u}^n + \frac{1}{\alpha\beta\Delta t} \mathbf{v}^n + \left(\frac{1}{2\alpha\beta} - 1 \right) \mathbf{a}^n \right]. \quad (5.22)$$

Si on ne prend que la position courante n de la position du solide, l'équation (3.115) devient

$$\left[\frac{1}{\alpha\beta\Delta t^2} \mathbf{M}_s^n + \mathbf{K}_s^n \right] (\mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{G}^{n+1} + \mathbf{M}_s^n \left[\frac{1}{\alpha\beta\Delta t^2} \mathbf{u}^n + \frac{1}{\alpha\beta\Delta t} \mathbf{v}^n + \left(\frac{1}{2\alpha\beta} - 1 \right) \mathbf{a}^n \right]. \quad (5.23)$$

Si on considère une position intermédiaire du solide, l'équation (3.115) devient

$$\left[\frac{1}{\alpha\beta\Delta t^2} \mathbf{M}_s^* + \mathbf{K}_s^* \right] (\mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{G}^{n+1} + \mathbf{M}_s^* \left[\frac{1}{\alpha\beta\Delta t^2} \mathbf{u}^n + \frac{1}{\alpha\beta\Delta t} \mathbf{v}^n + \left(\frac{1}{2\alpha\beta} - 1 \right) \mathbf{a}^n \right]. \quad (5.24)$$

Pour calculer les matrices \mathbf{M}_s^* et \mathbf{K}_s^* , on se place sur la grille intermédiaire du solide telle que

$$\mathbf{x}_s^* = \mathbf{x}_s^0 + \frac{1}{4} (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) + \frac{\Delta t}{4} (\dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \dot{\mathbf{u}}^n). \quad (5.25)$$

Etape 7 :

La nouvelle position lagrangienne du solide est calculée par l'expression

$$\mathbf{x}_s^{n+1} = \mathbf{x}_s^0 + \mathbf{u}^{n+1} \quad (5.26)$$

On passe ensuite au pas de temps suivant.

L'algorithme issu de la MDSA peut donc être schématisé de la manière suivante

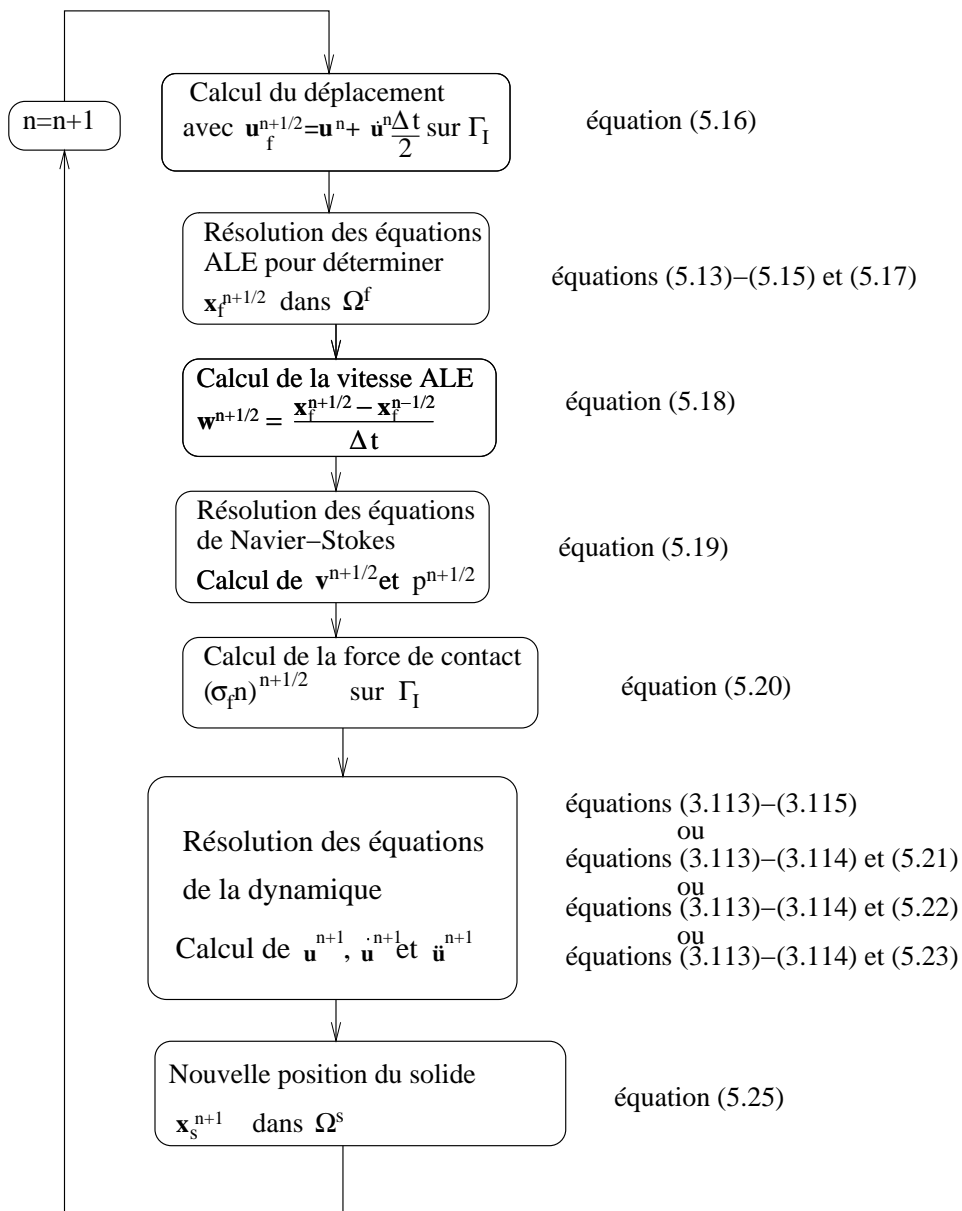


FIG. 5.2 – Algorithme de résolution de l'interaction fluide-structure

Un inconvénient des méthodes décalées vient du fait qu'elles ne conservent pas parfaitement l'énergie du système global. La MDSA est normalement moins gênée par ce problème que MDC. Une autre remarque importante de la MDSA est qu'elle fait intervenir un écart d'un demi pas de temps entre le fluide et le solide. Elle reste conforme spatialement mais pas temporellement. Sous une autre forme, l'algorithme 5.2 peut aussi être représenté en séparant la partie solide de la partie fluide en deux branches comme dans la figure 5.3.

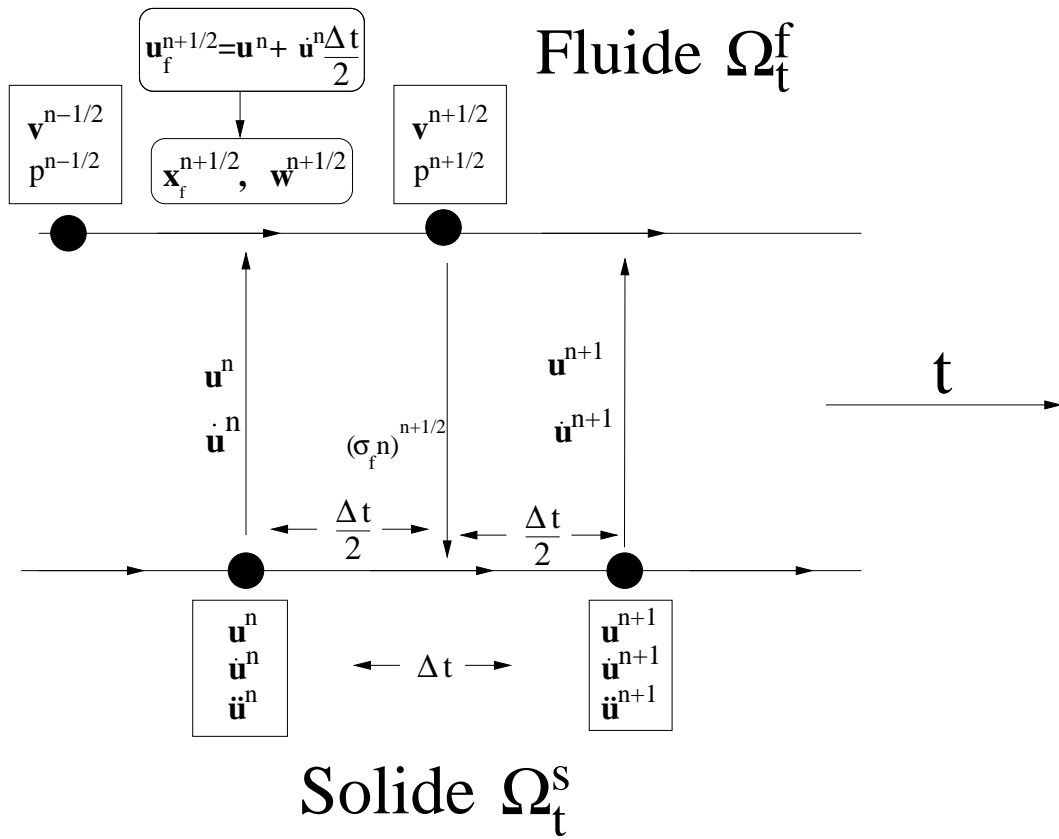


FIG. 5.3 – Algorithme de résolution de l'interaction fluide-structure

Afin d'améliorer la stabilité de ce type d'algorithme, la possibilité de sous-cycler la résolution des équations de Navier-Stokes (5.20) a été utilisée. Un sous-cyclage de 2 sous-itérations a été effectué dans les simulations. La MDSA construite par Farhat et Lesoinne peut cependant être envisagée avec un plus grand nombre de sous-cycles dans le fluide. Nous nous sommes limité à deux sous-cycles afin d'obtenir une stabilité suffisante de notre algorithme en évitant un trop grand nombre de calculs intermédiaires. Nous avons donc cherché en utilisant la MDSA, un compromis entre la complexité de l'algorithme et le temps de calcul nécessaire pour résoudre le système à chaque itération.

5.4 Géométrie du problème de la valve et conditions limites

On modélise pour le problème d'interaction étudié une valve immergée dans un canal rigide. La frontière Γ_D du domaine fluide que nous avons définie au chapitre 2 est subdivisée en plusieurs parties telles que

$$\Gamma_D = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{paroi} \cup \Gamma_I, \quad (5.27)$$

le bord Γ_I est l'interface fluide-structure, Γ_{in} la section d'entrée du canal et Γ_{paroi} les parois rigides extérieures du canal. La frontière Γ_N désignera seulement la paroi de sortie notée aussi Γ_{out}

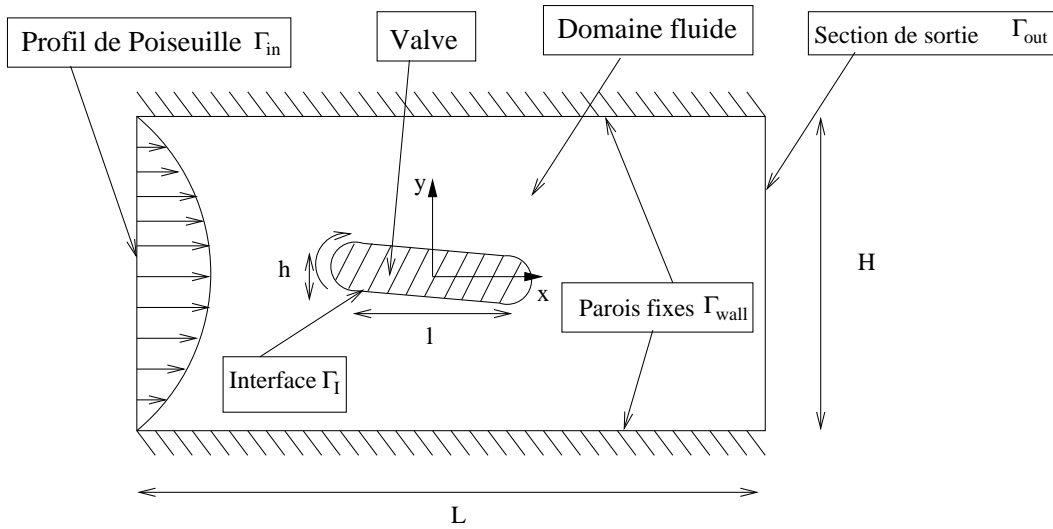


FIG. 5.4 – Géométrie du problème

Dans le fluide, on distingue différentes parties :

- la section d'entrée du canal dans laquelle le fluide pénètre Γ_{in} avec un profil de vitesse de type Poiseuille imposé que l'on note $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{poise}$.
- la section de sortie par où le fluide sort Γ_{out} avec une condition libre $\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{v}, p)\mathbf{n} = 0$.
- Le reste des parois extérieures Γ_{paroi} sur lesquelles une vitesse nulle est imposée ($\mathbf{v}_f = 0$).
- L'interface entre le fluide et la valve immergée Γ_I où la condition de continuité de vitesse (2.27) est imposée sur le domaine fluide et l'équilibre mécanique (2.30) est imposé sur le domaine structure.

La valve est une structure immergée dans le domaine fluide. Son centre de masse coïncide avec son centre de masse.

La vitesse \mathbf{w} est construite avec les conditions limites suivantes

- $\mathbf{w} = 0$ sur Γ_{in} , Γ_{out} et Γ_{paroi}
- $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ sur Γ_I .

Avant de commencer à résoudre l'interaction fluide-structure, on résout d'abord l'écoulement, en fixant la valve à l'intérieur du canal, sur une durée variant entre 0.05 et 0.5 en temps adimensionnel. Nous avons choisi un fluide de masse volumique $\rho_f = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et une structure de masse volumique $\rho_s = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$ avec $\lambda/\rho_s = 18.65 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ et $\mu/\rho_s = 9.607 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. Le coefficient de poisson ν_s est ainsi égal 0.4925. On considère que la hauteur H vaut $2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ et que la vitesse du fluide vaut 1 m.s^{-1} , ceci indique que nous utilisons une viscosité cinématique ν_f égale à $2.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ avec le choix du nombre de Reynolds $Re = 100$. Nous ne nous plaçons donc pas complètement dans les valeurs physiologiques du sang qui possède une viscosité cinématique de l'ordre de $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

5.5 Evaluation de l'énergie du système

Pour exprimer l'énergie du système, on reprend les conditions limites définies à la section précédente et on part des équations obtenues à la section 2.6. Dans le cas 2D, avec un canal de hauteur H et de longueur L [88], avec l'axe des abscisses choisi suivant la longueur du canal et l'axe des ordonnées choisi suivant son diamètre, nous gardons comme hypothèse que la pression est constante suivant une section du canal et décroît avec une pente constante suivant la longueur du canal. En considérant la pression de sortie égale à zéro ($x = x_{out}$) on en déduit

$$\begin{cases} p(x) = \frac{dp}{dx}(x - x_{out}) \\ \frac{dp}{dx} = C < 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

le scalaire C est une constante. Une autre expression lie le maximum de la vitesses en entrée du canal ($x = x_{in}$) avec la pente de la pression

$$U_{max} = -\frac{H^2}{8\mu_f} \frac{dp}{dx} \quad (5.29)$$

La fonction de Poiseuille définie en entrée étant

$$\mathbf{v}_{poise} = \begin{cases} v_x = -\frac{H^2}{8\mu_f} \frac{dp}{dx} (1 - (\frac{2y}{H})^2) = U_{max} (1 - (\frac{2y}{H})^2) \\ v_y = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Calculons l'intégrale suivante

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{poise}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{poise} d\Gamma dt = \int_0^T \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{pmatrix} -p & \mu_f \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \mu_f \frac{\partial v_x}{\partial y} & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dy dt =$$

$$\int_0^T \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} p(x_{in}) v_x(y) dy dt = \int_0^T \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} -\frac{dp}{dx} (x_{in} - x_{out}) \frac{H^2}{8\mu_f} \frac{dp}{dx} (1 - (\frac{2y}{H})^2) dy dt$$

$$\frac{H^2 L}{8\mu_f} \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \int_0^T \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (1 - (\frac{2y}{H})^2) dy dt = \frac{H^3 L}{12\mu_f} \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 T.$$

Nous pouvons donc conclure

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{poise}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{poise} d\Gamma dt = \frac{H^3 L}{12\mu_f} \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 T \quad (5.31)$$

avec pour nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_f H U_{max}}{\mu_f}$. Avec l'équation (5.29), on exprime la pente de la pression en fonction du nombre de Reynolds

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu_f^2 Re}{\rho_f H^3} \quad (5.32)$$

Ainsi l'équation (5.31) peut finalement s'écrire

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{in}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{poise}, p) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{poise} d\Gamma dt = \frac{16}{3} \frac{\mu_f^3}{H^3} \frac{Re^2}{\rho_f^2} LT \quad (5.33)$$

5.6 Application numérique

A partir de la géométrie schématisée à la figure 5.4, le domaine fluide et la valve ont été réalisés avec les maillages suivants

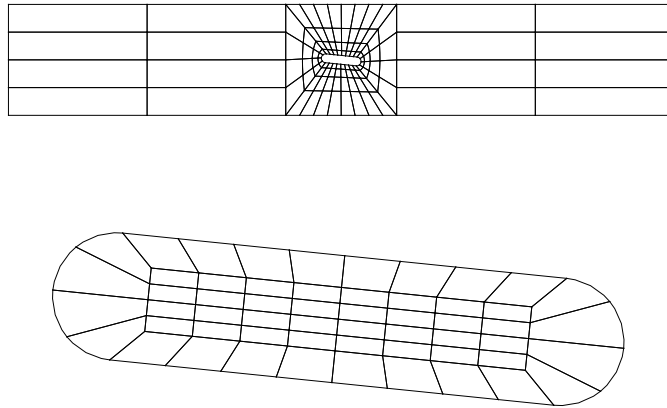
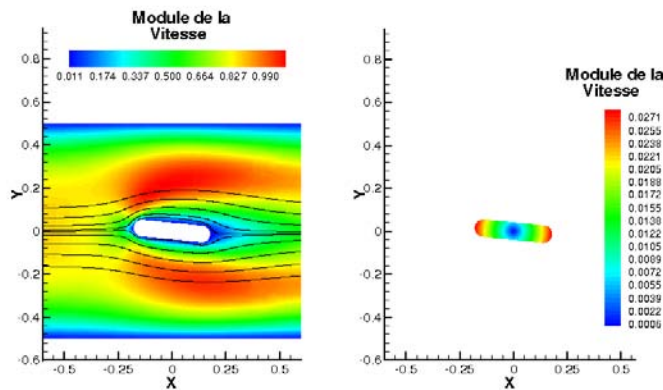


FIG. 5.5 – Maillages du domaine fluide (en haut) et de la valve (en bas)

Le nombre E_f d'éléments choisi pour le domaine occupé par le fluide est égale à 112 tandis que le nombre E_s d'éléments dans la valve est égale à 56. Avant de commencer l'interaction fluide-structure, nous avons calculé un écoulement du fluide dans le canal en considérant la valve bloquée, formant avec l'axe du canal un angle de 0.05 radians et ne subissant aucun déplacement dû au fluide. La résolution de l'interaction fluide-structure a été effectuée pour un nombre de Reynolds égale à 100 dans les simulations qui suivent avec les degrés polynomiaux $N_x \times N_y = 4 \times 4$. L'évolution de la valve immergée dans le fluide est représentée au graphique 5.6 pour $\Delta t = 0.005$ suivant les instants $t = 0.025$, $t = 0.25$ et $t = 0.5$ à partir du début de l'interaction entre la valve et le fluide.



$t = 0.025$

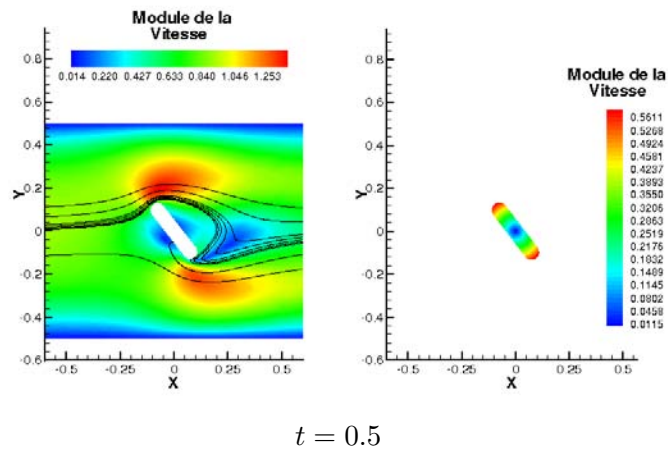
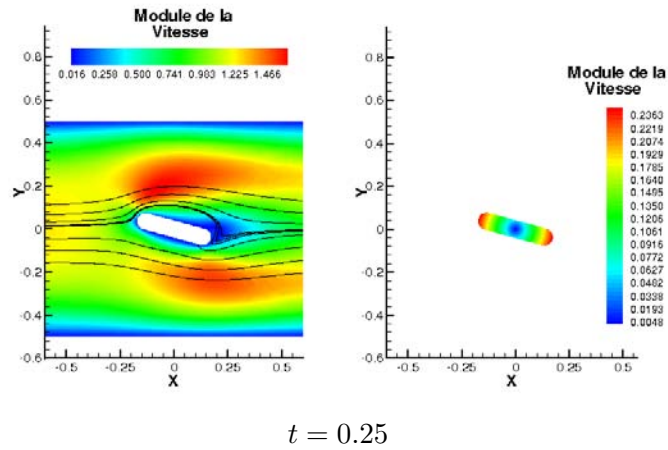


FIG. 5.6 – Lignes de courant (courbes noires) et modules de vitesse dans le fluide (à gauche) et dans la valve (à droite) pour $t = 0.025$, $t = 0.25$ et $t = 0.5$

De cette simulation, l'estimation des normes $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ dans le fluide ainsi que la norme du déplacement $\|\mathbf{u}\|_{H^1}$ dans la valve sont représentées par les courbes de la figure 5.7.

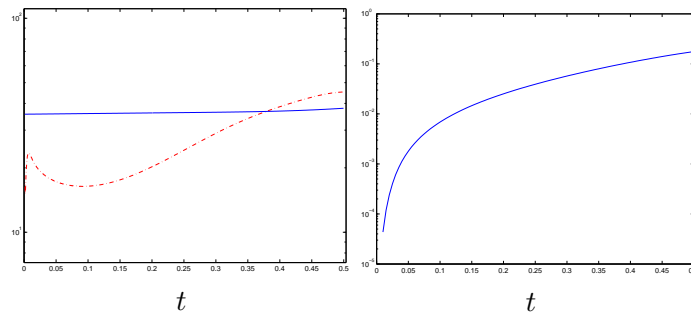
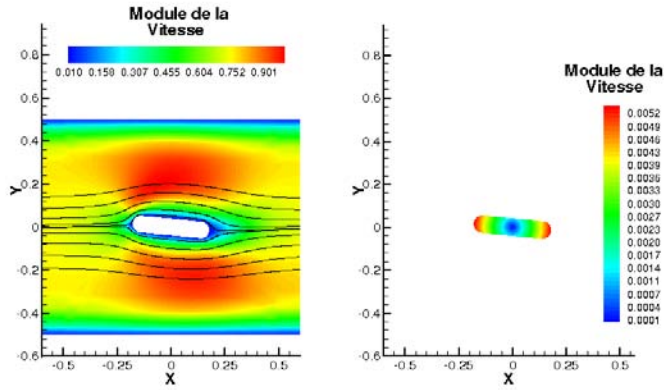


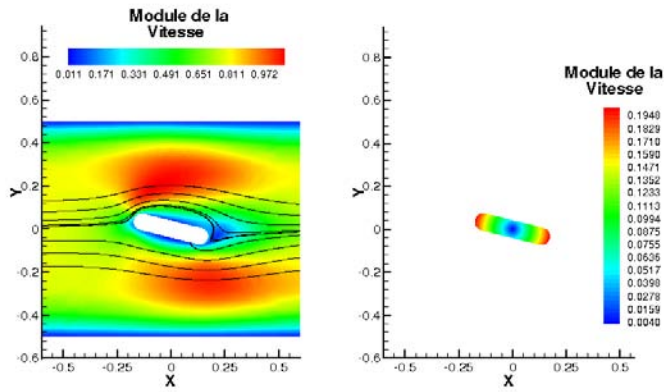
FIG. 5.7 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ (courbe pointillée) et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ (courbe continue) et $\|\mathbf{u}\|_{H^1}$ en fonction du temps t

Cette même simulation a été effectuée ensuite avec $\Delta t = 0.001$ pour $t = 0.005$, $t = 0.25$ et

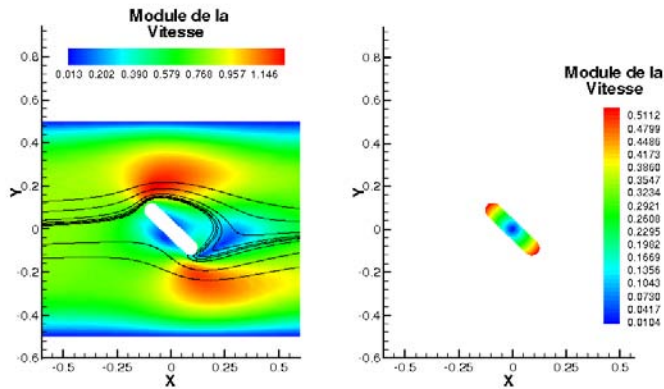
$t = 0.5$ au graphique 5.8



$t = 0.005$



$t = 0.25$



$t = 0.5$

FIG. 5.8 – Lignes de courant (courbes noires) et modules de vitesse dans le fluide (à gauche) et dans la valve (à droite) pour $t = 0.005, t = 0.25$ et $t = 0.5$

Les normes calculées à la figure 5.7 dans le cas précédent sont ainsi représentées dans la figure 5.9 pour $\Delta t = 0.001$

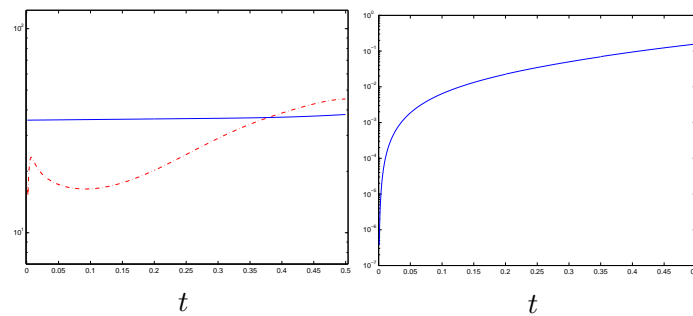
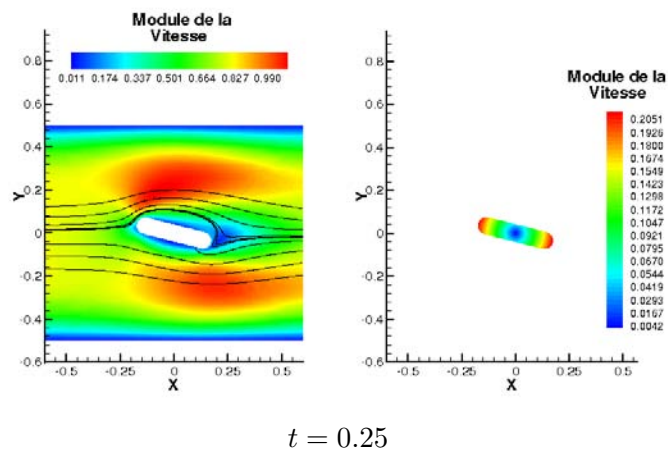
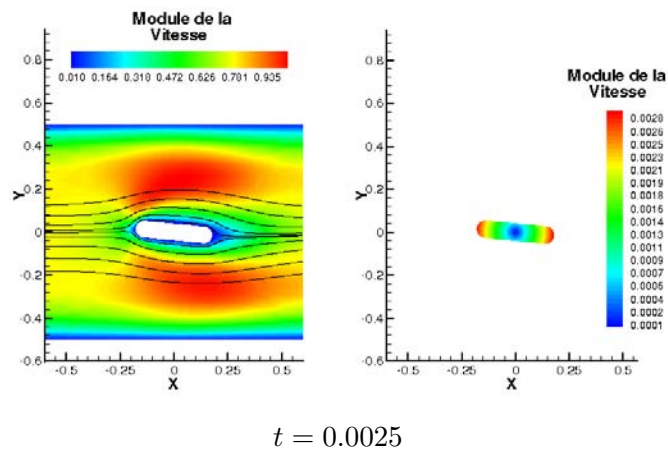


FIG. 5.9 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ (courbe pointillée) et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ (courbe continue) et $\|\mathbf{u}\|_{H^1}$ en fonction du temps t

Enfin cette simulation a été refaite pour $\Delta t = 0.0005$ pour $t = 0.0025$, $t = 0.25$ et $t = 0.5$ au graphique 5.10



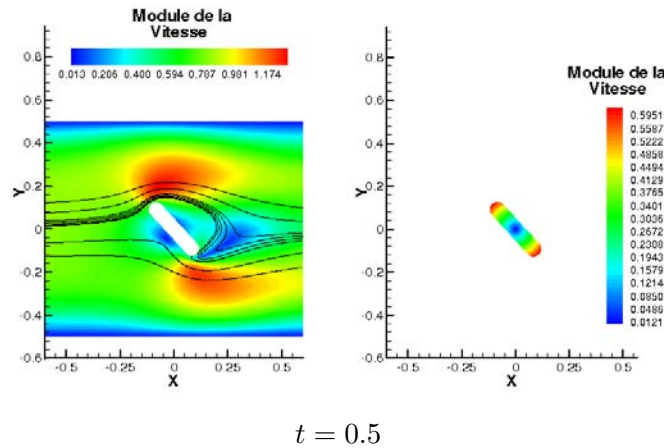


FIG. 5.10 – Lignes de courant (courbes noires) et modules de vitesse dans le fluide (à gauche) et dans la valve (à droite) pour $t = 0.0025, t = 0.25$ et $t = 0.5$

Finalement, comme pour les deux précédents cas, les normes associées à $\Delta t = 0.0005$ sont les courbes de la figure 5.11.

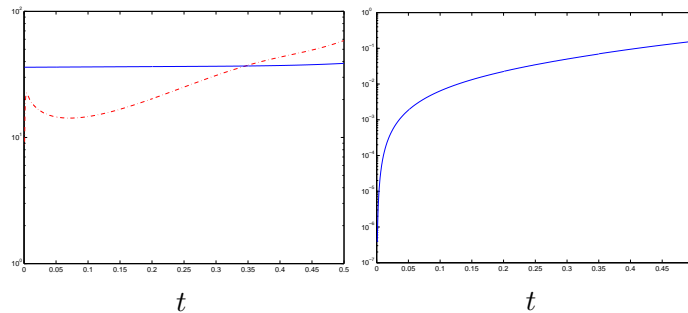


FIG. 5.11 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ (courbe pointillée) et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ (courbe continue) et $\|\mathbf{u}\|_{H^1}$ en fonction du temps t

Ces trois exemples montrent que suivant le pas de temps choisi l'évolution du mouvement de la valve à l'intérieur du canal reste similaire. Cependant l'évolution de la norme $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ suivant les trois cas n'est exactement la même. Il semble que lorsque l'on diminue le pas de temps le comportement de l'écoulement du fluide n'est plus exactement le même. L'amorçage du calcul fluide-structure n'a pas été commencé systématiquement avec le même état d'écoulement du fluide. Cependant les différences dans le comportement de l'interaction ne sont pas négligeables. La croissance de la norme $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ aboutit en continuant la simulation à une instabilité du problème. On a donc réalisé cette simulation pour un degré polynomial plus élevé dans chaque direction tel que $N_x \times N_y = 8 \times 8$. On observe ainsi, suivant la même simulation, l'écoulement du fluide et la position de la valve obtenue pour $t = 0.5$ suivant les pas de temps $\Delta t = 0.005$ (figure 5.12) et $\Delta t = 0.001$ (figure 5.13).

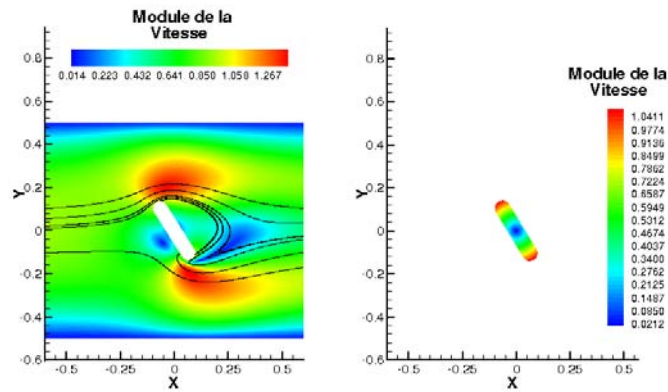


FIG. 5.12 – Lignes de courant (courbes noires) et modules de vitesse dans le fluide (à gauche) et dans la valve (à droite) pour $t = 0.5$ et $\Delta t = 0.005$

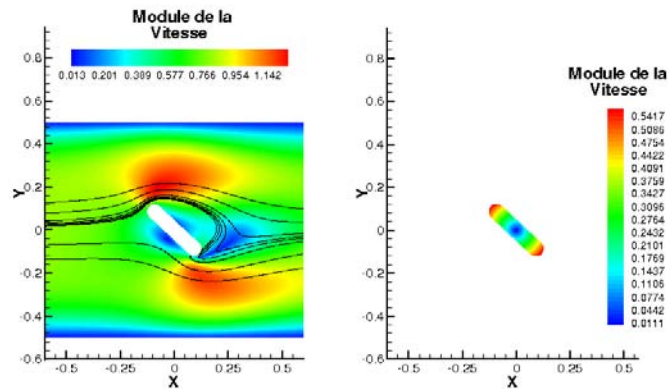


FIG. 5.13 – Lignes de courant (courbes noires) et modules de vitesse dans le fluide (à gauche) et dans la valve (à droite) pour $t = 0.5$ et $\Delta t = 0.001$

Les figures 5.14 et 5.15 nous donnent l'évolution de la norme $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ dans le fluide ainsi que $\|\mathbf{u}\|_{H^1}$ dans la valve. Le fait d'augmenter le degré polynomial n'a pas pour effet de mieux stabiliser la croissance de la norme $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$. Comme nous l'avons remarqué dans le cas où $\Delta t = 0.0005$ et $N_x \times N_y = 4 \times 4$, cela est le signe d'une instabilité future. La croissance de $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2}/\Delta t$ est moins rapide pour $\Delta t = 0.001$ comme on peut le voir à la figure 5.15, mais elle reste présente.

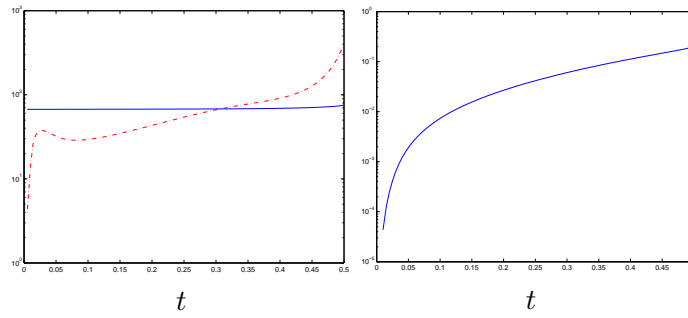


FIG. 5.14 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ (courbe pointillée) et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ (courbe continue) et $\|\mathbf{u}\|_{H^1}$ en fonction du temps t pour $\Delta t = 0.005$

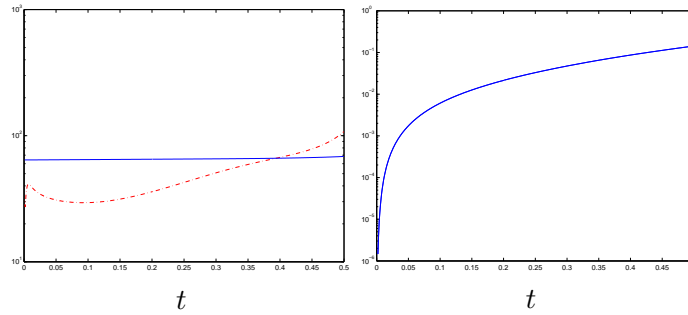
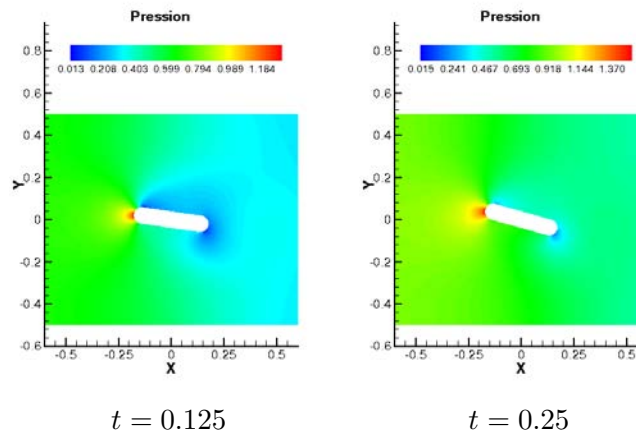


FIG. 5.15 – $\|\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n\|_{L^2} / \Delta t$ (courbe pointillée) et $\|\mathbf{v}\|_{L^2}$ (courbe continue) et $\|\mathbf{u}\|_{H^1}$ en fonction du temps t pour $\Delta t = 0.001$

A titre d'exemple, la pression a été calculée pour le cas $\Delta t = 0.005$ et $N_x \times N_y = 8 \times 8$ à $t = 0.125$, $t = 0.25$, $t = 0.375$ et $t = 0.5$ (figure 5.16).



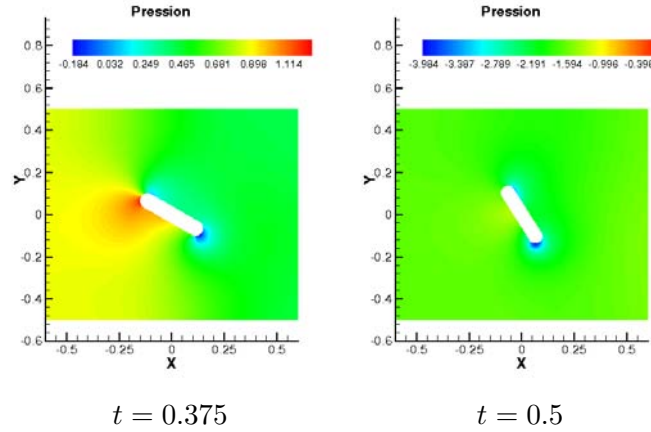


FIG. 5.16 – Valeur de la pression dans le fluide pour $\Delta t = 0.005$ et $N_x \times N_y = 8 \times 8$ à $t = 0.125$, $t = 0.25$, $t = 0.375$ et $t = 0.5$

Si nous avons pu simuler l'interaction fluide-structure et bien mettre en évidence la rotation de la valve poussée par le fluide, nous avons cependant été confronté à un paradoxe. En diminuant encore le pas de temps de la simulation jusqu'à $\Delta t = 0.0001$, l'instabilité arrivait de plus en plus tôt. Pour comprendre ce paradoxe nous rappelons une définition de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [25, 83] dans le fluide

$$\left| \frac{\text{Max}(v_x)\Delta t}{\text{Min}(\Delta x)} \right| + \left| \frac{\text{Max}(v_y)\Delta t}{\text{Min}(\Delta y)} \right| \leq \alpha_{CFL} \quad (5.34)$$

La constante α_{CFL} varie suivant le type de schéma utilisé, Δx et Δy sont les distances en abscisses et en ordonnées entre deux noeuds quelconques du maillage. D'après (5.34), en diminuant le pas de temps, la condition CFL est de mieux en mieux respectée. Dans notre cas, il est clair que si cette condition est nécessaire, elle n'est pas suffisante. Farhat, Lesoinne et Piperno [31, 81] ont pu déterminer que la MDSA était plus efficace pour obtenir une précision à l'ordre deux en temps suivant une étude réalisé en aérodynamique. Dans le cadre des simulations sur le cas de la valve immergée, il semble ne pas en aller parfaitement de même car nous ne nous plaçons pas exactement suivant la même approche.

Une remarque importante au niveau de l'actualisation de la géométrie de la valve peut être faite à ce niveau de simulation. Dans les cas étudiés jusqu'ici, les calculs n'étaient effectués que sur le domaine Ω^s initial correspondant donc à la formulation lagrangienne nominale classique. Ces mêmes simulations ont aussi été réalisées dans le cas où la position du domaine Ω^s était actualisé avec \mathbf{u}^{n+1} . On peut penser que cette seconde approche était plus réaliste et précise par rapport à la première. Mais ce que nous avons constaté est moins trivial qu'il n'y paraît. Dans le cas où nous restions dans le domaine Ω^s initial pour résoudre les équations de la dynamique, nous avons constaté qu'au fur et à mesure du calcul, la structure pouvait subir un rétrécissement de sa forme au cours de sa rotation ceci engendrant du même coup l'imprécision puis l'instabilité de la simulation. Inversement, dans le cas où on prenait bien en compte le déplacement \mathbf{u}^{n+1} pour mettre à jour le domaine Ω^s on pouvait voir apparaître une dilatation de la valve au fur à mesure de sa rotation. Une troisième voie a donc aussi été envisagée pour mettre à jour la position de la valve. La moyenne entre la position initiale et la position déplacée avec \mathbf{u}^{n+1} a été considéré. Paradoxalement, cette approche a pu atténuer les effets de rétrécissements ou de dilatations constatés avec les deux choix précédents. Nous avons toujours visualisé la géométrie de la valve dans sa position actualisée. Suivant la manière de considérer la matrice de masse

\mathbf{M}_s et de rigidité \mathbf{K}_s dans les équations (5.22)-(5.24), le comportement de la solution va être amélioré. Plus précisément, la manière dont nous avons considéré la mise à jour du maillage Ω^s pour faire le calcul de ces matrices peut être résumée par l'expression suivante

$$\mathbf{x}_s^* = \mathbf{x}_s^0 + \alpha(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) + \beta\Delta t(\dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \dot{\mathbf{u}}^n). \quad (5.35)$$

Lorsque les constantes α et β sont égales à 0, nous sommes dans le cas de la formulation lagrangienne nominale. Avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$, nous sommes dans le cas de la formulation lagrangienne actualisée. Finalement, avec $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ nous sommes dans le cas intermédiaire (5.25). Une multitude de tests ont été effectués sur ce type de problème et systématiquement une limitation sur la valeur inférieure du pas de temps semble persister quelque soit le type de formulation adopté. Lorsque nous effectuons la moyenne de la position du fluide entre les temps $n - \frac{1}{2}$ et $n + \frac{1}{2}$, l'erreur de position commise à l'interface avec le solide au temps n se comporte suivant un ordre 2 en temps. Mais l'approche qui semble cependant la plus précise temporellement au niveau du comportement global est le cas intermédiaire, même s'il reste encore une difficulté pour évaluer cette erreur temporelle d'après le calcul de l'énergie que nous allons effectuer dans la suite. L'approche par déformation engendre, tôt ou tard, lorsque la rotation devient trop grande dans le cas de la valve, une dégénérescence du maillage fluide qu'il faut donc remailler. Le remaillage s'avère assez difficile à réaliser pour des raisons pratiques. Le maillage n'est pas construit de manière automatique, il nécessite de reconstruire à chaque fois que cela est utile un nouveau maillage se basant sur les contours de l'ancien domaine. Cette étape peut être particulièrement compliquée sans disposer d'un remaillieur automatique. Le principe du remaillage [10] a pu être développé et étudié avec le code SPECULOOS [28] qui nous a aidé à faire ces simulations. Cependant, l'automatisation du remaillage avec ce code n'est pas encore développée car elle doit pouvoir prendre en compte une multitude de cas différents de géométries plus ou moins complexes et être adaptée à la manière dont sont ensuite générées les communications entre les différentes entités géométriques de ce code.

On a aussi exprimé l'énergie dans le fluide et dans la structure en exprimant la variation de l'énergie entre deux pas de temps successifs tels que pour la structure, on estime sur Ω^s

$$\Delta E_s = E_s^{n+1} - E_s^n = \frac{1}{2} \{ (\dot{\mathbf{u}}^{n+1})^T \mathbf{M}^{n+1} \dot{\mathbf{u}}^{n+1} + (\mathbf{u}^{n+1})^T \mathbf{K}^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} - ((\dot{\mathbf{u}}^n)^T \mathbf{M}^n \dot{\mathbf{u}}^n + (\mathbf{u}^n)^T \mathbf{K}^n \mathbf{u}^n) \} \quad (5.36)$$

et dans le fluide sur Γ_I

$$\Delta E_f = \frac{1}{2} (\Delta E_f^{n+\frac{3}{2}} + \Delta E_f^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n})^{n+\frac{3}{2}} (\mathbf{x}_f^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{x}_f^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n})^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{x}_f^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_f^{n-\frac{1}{2}}) \quad (5.37)$$

En reprenant le cas de la valve pour $\Delta T = 0.0005$ avec $N_x \times N_y = 8 \times 8$, on obtient

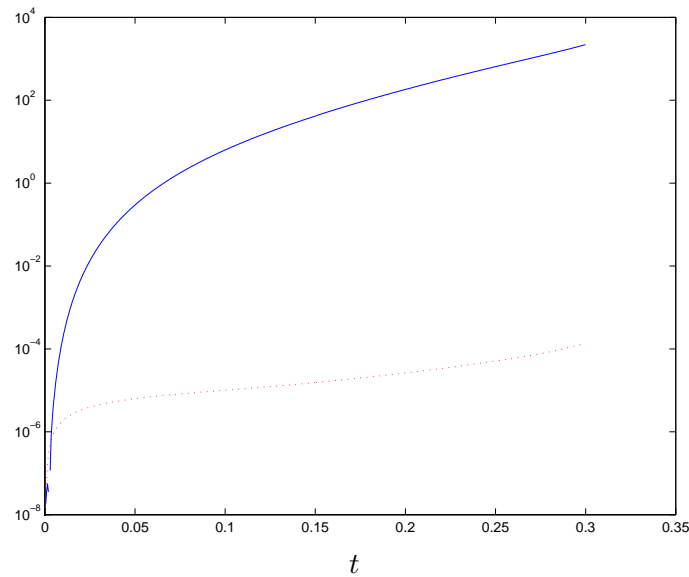


FIG. 5.17 – Evolution de ΔE_f (courbe en pointillé) et de ΔE_s (courbe continue) en fonction du temps t pour $\Delta T = 0.0005$

Ces courbes sont toutes les deux croissantes mais ne sont pas directement comparables. L'énergie du système semble bien croître dans le fluide et dans la structure. Mais ces énergies ne semblent pas apparaître aux mêmes échelles. Soit nous n'avons pas les bons estimateurs de l'énergie, soit ces deux courbes sont réalistes et expriment une divergence entre l'énergie du fluide et de la structure. Nous avons comparé le maximum et le minimum du jacobien dans la structure pour estimer sa manière de se dilater ou de se comprimer sous l'effet de l'écoulement du fluide. Le solide que nous avons choisi étant presque incompressible, nous avons considéré le cas avec l'approche de l'équation (5.22) et celle de l'équation (5.24). Nous avons pris $Re = 100$ et $\Delta t = 0.001$ dans les deux cas. Ains nous observons l'évolution du jacobien dans le solide dans les deux figures suivantes

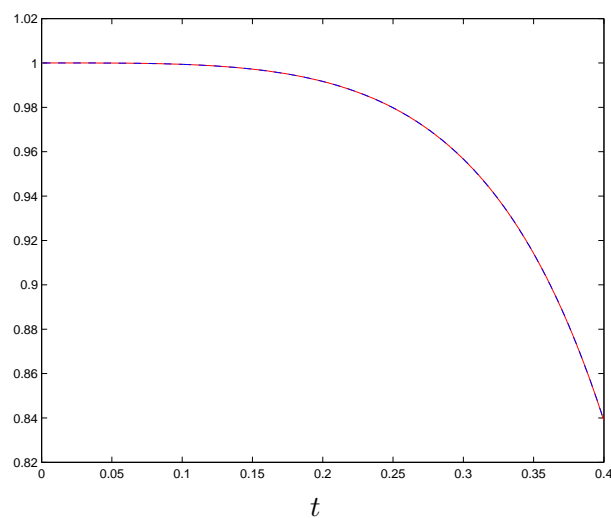


FIG. 5.18 – Evolution du minimum (courbe continue bleu) et du maximum du jacobien (courbe en tirets rouges) en fonction du temps t pour $\Delta t = 0.001$ avec l'approche de l'équation (5.22)

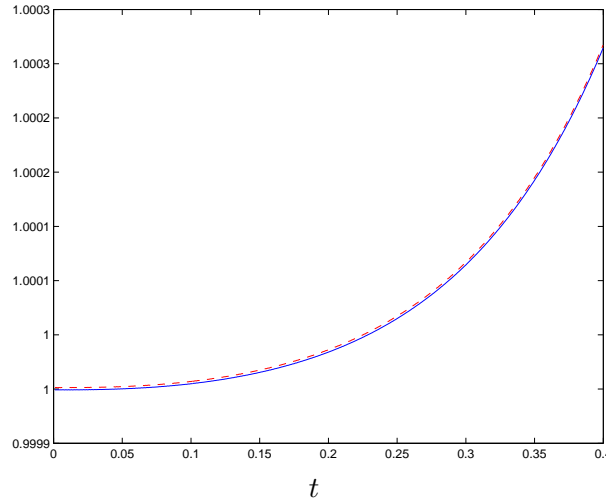


FIG. 5.19 – Evolution du minimum (courbe continue bleue) et du maximum du jacobien (courbe en tirets rouges) en fonction du temps t pour $\Delta t = 0.001$ avec l'approche de l'équation (5.24)

De la figure 5.18, on remarque que l'approche nominale classique provoque une compression exagérée du solide. Ce phénomène n'est quasiment plus présent suivant l'approche intermédiaire (figure 5.19) qui ne fait plus subir au solide qu'une très légère dilatation. Cette dernière constatation est en accord avec l'aspect presque incompressible du solide que nous avons choisi.

En conclusion, on a donc pu simuler d'assez grands déplacements d'une valve immergée dans un canal. Mais certaines restrictions limitent encore les possibilités de résolution dans le cas particulièrement complexe élaboré. Des raisons à la fois théoriques et numériques sont en jeu pour expliquer ce type de difficultés. Cependant, l'originalité de ces simulations est que nous avons communiqué à la structure non seulement la pression du fluide sur la surface de la valve mais aussi la contrainte de cisaillement due à la vitesse du fluide. Il est clair que la simulation de grands déplacements revêt des difficultés supplémentaires par rapport à l'étude classique de l'interaction fluide-structure qui souvent se limite à une analyse de petites perturbations par rapport à une position de référence. Une grande originalité vient aussi du fait que nous utilisons les éléments spectraux et que nous n'utilisons qu'un seul code pour résoudre à la fois les équations du fluide, de l'interface et de la structure. Ce dernier aspect peut être un avantage important car il ne nécessite plus l'interfaçage de codes souvent hétérogènes dans leur manière de calculer les différents champs du problème.

Plusieurs types de problèmes peuvent donc intervenir dans ce type de modélisation. Les équations de la dynamique (2.16) du fait que nous utilisons l'hypothèse des petites déformations (2.14) nous a permis de simplifier la loi utilisée pour le solide en considérant simplement la loi de Hooke (2.17) avec (2.22). En toute généralité, la définition du tenseur des déformations (2.22) est issue de la définition du tenseur des déformations matérielles quadratiques de Green-Saint Venant-Boussinesq [19] suivante

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}). \quad (5.38)$$

On a donc simplifié (5.38) avec (2.14), ceci nous permettant de négliger le terme quadratique. L'inconvénient d'une telle simplification est que la rotation n'est alors plus objective avec (2.22). Cela a pour conséquence que la formulation lagrangienne nominale classique pour résoudre les équations de la dynamique n'est plus parfaitement consistante si l'on veut pouvoir simuler de grandes rotations de la structure. Nous utilisons une approximation en transférant les forces

de contact à l'interface, cela peut aussi causer certaines imprécisions. Un autre problème au niveau de l'interface vient du fait que nous réinterpolons la pression sur Γ_I pour définir les conditions que nous imposons au solide. Le traitement du terme convectif dans les équations peut aussi provoquer certains problèmes au niveau de la précision du schéma dans le modèle fluide. L'approche intermédiaire semble atténuer ces difficultés lorsque le solide subit d'assez grands déplacements. Elle ne les élimine pas complètement au niveau de la plage de pas de temps utilisables mais améliore sensiblement le type de résultats obtenus.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Le modèle d'interaction fluide-structure développé dans cette thèse fait appel à des méthodes développées à partir des éléments finis et notamment en aérodynamique [6, 31]. La méthode arbitrairement lagrangienne-eulérienne ainsi que la méthode décalée en série améliorée [30, 31, 81] ont été associées pour la première fois dans le cadre de la méthode des éléments spectraux. Les équations de Navier-Stokes et de la dynamique d'un solide élastique en petites déformations nous ont aidé à établir ce modèle avec les dernières approches issues des méthodes spectrales. Les géométries du fluide et du solide sont envisagées comme deux domaines complémentaires qui se déforment au fur et à mesure que le fluide et le solide agissent l'un sur l'autre. Sans modifier la topologie intrinsèque du maillage de chacun de ces deux domaines, les noeuds peuvent subir un mouvement propre sans passer par un remaillage systématique. Le solide est considéré suivant une formulation lagrangienne où l'on donne au maillage qui lui est associé la possibilité de se déplacer en fonction de sa position actuelle. Cette approche est moins classique que celle consistant à remailler la géométrie. Les éléments spectraux étant capables de décrire plus finement la courbure d'un contour géométrique, ils ne nécessitent pas un grand nombre d'éléments tout en restant très précis. Cet aspect est un avantage indéniable par rapport aux éléments finis.

Cette approche nouvelle nous a donc permis de tester de manière satisfaisante la méthode ALE en étudiant des mouvements assez amples de structures immergées dans une cavité dans laquelle s'écoule un fluide. De la même façon, le déplacement du maillage fluide a été abordé uniquement par déformation. Le problème d'interaction fluide-structure a ensuite été élaboré à partir de la méthode décalée en série améliorée. Nous avons ainsi résolu les équations de la dynamique d'un solide élastique en petites déformations et petits déplacements avec succès et nous avons approfondi cette résolution pour de grands déplacements dans le cadre de l'interaction fluide-structure. Nous avons ainsi pu modéliser la rotation d'une valve simplifiée à l'intérieur d'un canal plan et obtenir plusieurs résultats intéressants suivant un écoulement de Poiseuille constant imposé à l'entrée du canal.

Plusieurs perspectives de développement restent encore envisageables :

-L'automatisation du maillage et du remaillage doivent être développés afin de pouvoir plus facilement aborder des géométries plus complexes par des maillages structurés ou non structurés. Dans ce sens nous avons pu diagnostiquer qu'avant même de pouvoir utiliser un mailleur, la manière dont le maillage est considéré dans le code SPECULOOS doit être mieux contrôlé. Il se base sur un système de communications récursives entre les différentes entités géométriques mais élaborées à l'origine sur une configuration très structurée empêchant souvent de pouvoir faire des calculs sur des maillages construits à partir de plusieurs blocs hétérogènes. En effet la communi-

cation entre les éléments spectraux fait intervenir une orientation spécifique. Par exemple en 3D, la communication entre deux faces peut se faire suivant huit orientations possibles. Nous avons remarqué qu'en 3D cette orientation pouvait être erronée suivant la complexité du maillage que nous envisagions. Pour pouvoir amorcer un calcul, nous avons modifié les paramètres définissant ces orientations pour les rendre compatibles dans une géométrie donnée. Il faut donc simplifier la manière dont les communications se font dans une géométrie. Cette étape est cruciale mais complexe.

-C'est à partir de cette amélioration que pourront être développées les techniques utilisant par exemple la non conformité géométrique ou d'autres types d'éléments, les triangles et les tétraèdres comme dans le code NEKTAR [56,61] afin de rendre plus souple encore la génération de maillages et d'aborder plus facilement des géométries plus complexes en 2D et en 3D.

-Le terme convectif non linéaire prend une importance cruciale du fait qu'il a une influence dans la loi de conservation géométrique mais aussi au niveau de la précision temporelle du schéma complet [9, 37, 38]. Dans le schéma que nous avons utilisé nous sommes restés à une formulation explicite de ce terme. Si son approche implicite reste encore difficile à envisager une forme explicite plus précise pourrait être nécessaire.

-La méthode décalée en série améliorée que nous utilisons comme toutes les méthodes décalées engendre une erreur de conservation de l'énergie. Il est important de constater que la condition (5.21) à l'interface n'est qu'une approximation. Elle est plus souvent utilisée avec la méthode du point milieu mais elle reste une bonne approximation du type de force de contact à appliquer à l'interface avec la méthode des trapèzes. Cependant comme nous calculons la pression sur un maillage différent de celui du fluide, l'interpolation qui est faite ensuite à l'interface peut engendrer une source d'erreur supplémentaire sur le calcul de $\sigma_f \mathbf{n}$. La force de contact que nous envisageons à partir du fluide pour l'imposer à la surface de la structure pourrait être calculée avec une étape d'extrapolation supplémentaire.

-Les méthodes spectrales sont des méthodes d'ordre élevé en espace. Une difficulté est qu'elles peuvent perdre une partie de cette précision spatiale par une discrétisation temporelle dont l'ordre serait moins élevé. Cette précision temporelle est souvent, au mieux, d'ordre 1 ou 2 et peut donc dégrader la précision globale de ces méthodes. Ce problème est d'autant plus délicat en déplaçant et en déformant le maillage puisque ce mouvement est guidé par la précision temporelle. Un défi est donc de construire une méthode précise à la fois temporellement et spatialement.

-Le problème lié aux grands déplacements est que nous pouvons être confrontés à des mouvements non linéaires. Ceci peut fortement diminuer l'éventail de simulations réalisables car les théories numériques sont construites sur la résolution de problèmes linéaires ou linéarisés. Un travail sur la génération de maillage est un point clé de la résolution de ce type de problème. La déformation de maillage au niveau de la structure ne permet que de partiellement aborder les grands déplacements. Une manière plus générale et universelle pour décrire le cas de grands déplacements même avec une technique de remaillage reste manquante et les efforts mathématiques et numériques allant dans ce sens n'ont souvent été abordés que pour de petits déplacements ou en considérant un mouvement de corps rigide connu a priori.

Nous avons ouvert une voie originale du problème d'interaction fluide-structure. Cette base de travail ainsi que les références où l'interaction fluide-structure est abordée par les éléments

finis représentent cependant un socle important pour la résolution de ce problème par la méthode des éléments spectraux. Le principe de déformation de maillage que nous considérons au niveau numérique a été assez peu étudié et cette thèse aborde largement cette possibilité.

Bibliographie

- [1] M.H. Akbari et S.J. Price. *Simulation of dynamic stall for a NACA 0012 airfoil using a vortex method*. J. of Fluids and Structures, **17** :855–874, (2003).
- [2] A. Alonso, A.D. Russo, C. Otero-Souto, C. Padra et R. Rodríguez. *An adaptative finite element scheme to solve fluid-structure vibration problems on non-matching grids*. Comput. Visual Sci., **4** :67–78, (2001).
- [3] F.P.T. Baaijens. *A fictitious domain/mortar element method for fluid-structure interaction*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, **35** :743–761, (2001).
- [4] C. Bernardi et Y. Maday. *Approximations spectrales de Problèmes aux limites elliptiques*. Springer-Verlag, Paris, (1992).
- [5] F. Bertrand, P.A. Tanguy et F. Thibault. *A three-dimensional fictitious domain method for incompressible fluid flow problems*. Intern. J. num. meth. fluids, **25** :719–736, (1997).
- [6] F. Blom. *Investigation on computational fluid-structure interaction*. PhD thesis, num. 1865, EPFL, Lausanne, (1998).
- [7] N. Bodard, R. Bouffanais et M. Deville. *Solution of moving-boundary problems by the spectral element method*. Submitted to J. Appl. Num. Math., (2006).
- [8] N. Bodard et M. Deville. *Fluid-Structure interaction by the spectral element method*. J. of Sci. Comput., (2006).
- [9] D. Boffi et L. Gastaldi. *Stability and geometric conservation laws for ALE formulations*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **193** :4717–4739, (2004).
- [10] R. Bouffanais et M. Deville. *Mesh Update Techniques for Free-Surface Flow Solvers using Spectral Element Method*. J. of Sci. Comput., (2006).
- [11] F. Brezzi et M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, Berlin, (1991).
- [12] J.C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, (2003).
- [13] W. Cao, W. Huang et R.D. Russell. *A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow*. J. Sci. Comput., **24** :118–142, (2002).
- [14] F. Casadei et J.P. Halleux. *An algorithm for permanent fluid-structure interaction in explicit transient dynamics*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **128** :231–289, (1995).
- [15] P. Causin, J.F. Gerbeau et F. Nobile. *Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **193** :4073–4095, (2005).
- [16] W. Couzy. *Spectral element discretization of the unsteady Navier-Stokes equations and its iterative solution on parallel computers*. PhD thesis, num. 1380, EPFL, Lausanne, (1995).
- [17] W. Couzy et M.O. Deville. *Spectral element preconditioners for the Uzawa pressure operator applied to incompressible flows*. J. Sci. Comput., **9** :107–112, (1994).

- [18] A. Curnier. *Méthodes numériques en mécanique des solides*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, (1993).
- [19] A. Curnier. *Mécanique des solides déformables*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, (2004).
- [20] J. De Hart, G.W.M. Peters, P.J.G. Schreurs et F.P.T. Baaijens. *A two-dimensional fluid-structure interaction model of the aortic valve*. J. Biomech., **33** :1079–1088, (2000).
- [21] J. De Hart, G.W.M. Peters, P.J.G. Schreurs et F.P.T. Baaijens. *A three-dimensional analysis of fluid-structure interaction in the aortic valve*. J. Biomech., **36** :103–112, (2003).
- [22] S. Deparis. *Numerical analysis of axisymmetric flows and methods for fluid-structure interaction arising in blood flow simulation*. PhD thesis, num. 2965, EPFL, Lausanne, (2004).
- [23] S. Deparis, M. Discacciati, G. Fourestey et A. Quarteroni. *Fluid-structure algorithms based on Steklov-Poincaré operators*. J. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., in press, corrected proof., 2006.
- [24] M. O. Deville et P. F. Fischer. *Private communication*. (2004).
- [25] M.O. Deville, P.F. Fischer et E.H. Mund. *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*. Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
- [26] J. Donea, S. Guiliani et J.P. Halleux. *An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **33** :689–723, (1982).
- [27] J. Donea et H. Huerta. *Finite element methods for flow problems*. Wiley, Sussex, (2003).
- [28] Y. Dubois-Pèlerin, V. Van Kemenade et M.O. Deville. *An Object-Oriented Toolbox for Spectral Element Analysis*. J. Sci. Comput., **14** :1–29, (1999).
- [29] C. Farhat et P. Geuzaine. *Design and analysis of robust ALE time-integrators for the solution of unsteady flow problems on moving grids*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **193** :4073–4095, (2004).
- [30] C. Farhat, P. Geuzaine et G. Brown. *Application of three-field nonlinear fluid-structure formulation to the prediction of the aeroelastic parameters of F-16 fighter*. Comput. and fluids, **32** :3–29, (2003).
- [31] C. Farhat et M. Lesoinne. *Two efficient staggered algorithms for serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **182** :499–515, (2000).
- [32] C. Farhat, M. Lesoinne et P. Letallec. *Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **157** :95–114, (1998).
- [33] M.A. Fernández. *Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, (2001).
- [34] M.A. Fernández et M. Moubachir. *A Newton method using exact Jacobians for solving fluid-structure coupling*. J. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **83**, 2005.
- [35] N. Fiétier. *Numerical simulation of viscoelastic fluid flows by spectral element methods and time-dependent algorithms*. PhD thesis, num. 2631, EPFL, Lausanne, (2002).
- [36] L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile et A. Quarteroni. *On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **191** :561–582, (2001).

- [37] L. Formaggia et F. Nobile. *A stability analysis for the Arbitrary Lagrangian Eulerian Formulation with Finite Elements*. East-West J. Numer. Math., **7** :105–132, (1999).
- [38] L. Formaggia et F. Nobile. *Stability analysis of second-order time accurate schemes for ALE-FEM*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **193** :4097–4116, (2004).
- [39] L. Gaston. *Simulation numérique par éléments finis bidimensionnels du remplissage de moules de fonderie et étude expérimentale sur maquette hydraulique*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure des mines de Paris, (1997).
- [40] A. Gilmanov et F. Sotiropoulos. *A hybrid Cartesian/immersed boundary method for simulating flows 3D, geometrically complex, moving bodies*. J. Comput. Physics., **207** :457–492, (2005).
- [41] V. Girault et P.A. Raviart. *Finite element method for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, Berlin, (1986).
- [42] R. Glowinski, J. Kearsley et J. Périaux. *Numerical simulation and optimal shape for viscous flow by a fictitious domain method*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **111** :283–303, (1995).
- [43] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.I. Hesla et J. Joseph, D.D. Périaux. *A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies : application to particulate flow*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **184** :241–267, (2000).
- [44] R. Glowinski, T.-W. Pan et J. Périaux. *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **111** :283–303, (1994).
- [45] T. Gmür. *Dynamique des structures*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, (1997).
- [46] T. Gmür. *Méthode des éléments finis*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, (2000).
- [47] W.J. Gordon et C.A. Hall. *Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation*. Int. J. Num. Meth. Eng., **7** :461–477, (1973).
- [48] W.J. Gordon et C.A. Hall. *Transfinite element methods : Blending functions interpolated over arbitrary curved element domains*. Num. Math., **21** :109–129, (1973).
- [49] C. Grandmont, V. Guimet et Y. Maday. *Existence de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire*. Math. Prob. in Mech., **326**(1) :525–530, (1998).
- [50] C. Grandmont et Y. Maday. *Fluid-structure interaction : a theoretical point of view*. In A. Dervieux, (ed.), Fluid-Structure Interaction, London and Sterling, pages 1–22, (2003).
- [51] M. Heil. *An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems*. (2004).
- [52] L.-W. Ho et A.T. Patera. *A Legendre Element Method for Simulation of Incompressible Unsteady Viscous Free-surface Flows*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **80** :355–366, (1990).
- [53] S.C. Hunter. *Mechanics of continuous media*. Halsted Press, Sheffield, (1976).
- [54] S.C. Hunter. *Some exact solutions in the theory of finite elasticity for incompressible neo-Hookean materials*. Int. J. Mech. Sci., **21** :203–211, (1979).
- [55] G. Em Karniadakis, M. Israeli et S.A. Orszag. *High-Order Splitting Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations*. J. Comput. Phys., **97** :414–443, (1991).

- [56] R.M. Kirby, T. C. Warburton, I. Lomtev et G. E. Karniadakis. *A discontinuous Galerkin spectral/hp method on hybrid grids*. Appl. Num. Math., **33** :393–405, (2000).
- [57] A. Klawonn et L.F. Pavarino. *Overlapping Schwarz methods for mixed linear elasticity and Stokes problems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **165** :233–245, (1998).
- [58] P. Krysl et L. Endres. *Explicit Newmark/Verlet algorithm for time integration of rotational dynamics of rigid bodies*. Intern. J. Num. Meth. Engrg., **63** :2171–2193, (2004).
- [59] P. Le Tallec et J. Mouro. *Fluid-structure interaction with large structural displacement*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **190** :3039–3067, (2001).
- [60] M. Lesoinne, M. Sarkis, U. Hetmaniuk et C. Farhat. *A linearized method for frequency analysis of three-dimensional fluid/structure interaction problems in all flow regimes*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **190** :3121–3146, (2001).
- [61] R.M. Lomtev, I. et Kirby et G. E. Karniadakis. *A Discontinuous Galerkin ALE Method for Compressible Viscous Flows in Moving Domains*. J. Comput. Physics, **155** :128–159, (1999).
- [62] Y. Maday et A.T. Patera. *Spectral element methods for the Navier-Stokes equations*. In A.K. Noor and J.T. Oden, (eds.), State-of-the-Art Surveys in Computational Mechanics, ASME, New York, pages 71–143, (1989).
- [63] Y. Maday, A.T. Patera et E.M. Rønquist. *The $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ method for the approximation of the Stokes problem*. Technical report, (1992).
- [64] J. Mandel. *An iterative substructuring method for coupled fluid-solid acoustic problems*. J. Comput. Phys., **177** :95–116, (2002).
- [65] C.E. Maneschy, M. Massoudi et V.R. Velloso. *Dynamic elastic solutions in neo-Hookean and mooney-Rivlin materials*. Int. J. Non-Linear. mech., **28** :531–534, (1993).
- [66] L. Marino, G. Saccomandi et C. Valente. *A note about three-dimensional exact dynamical solutions for neo-Hookean materials*. Int. J. Non-Lin. Mech., **34** :1–4, (1999).
- [67] A. Márquez, S. Meddahi et V. Selgas. *A new BEM-FEM coupling strategy for two-dimensional fluid-solid interactions problems*. J. Comput. Phys., **199** :205–220, (2004).
- [68] D.M. McQueen et C.S. Peskin. *Heart simulation by an immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity*. In : Mechanics for a New Millennium, Proceedings of the International Conference on Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM) 2000, (H. Aref and J.W. Phillips, eds.), 2001.
- [69] P.A. Mendes et F.A. Branco. *Analysis of fluid-structure interaction by an arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element formulation*. Int. J. Numer. Meth., **30** :897–919, (1999).
- [70] C. Michler, S.J. Hulshoff, E.H. van Brummelen et R. de Borst. *A monolithic approach to fluid-structure interaction*. Computers and fluids, **33** :839–848, (2004).
- [71] H.J.-P. Morand et R. Ohayon. *Fluid-structure interaction*. Lavoisier, Paris, (2001).
- [72] P.S. Murthy, V.S. Holla et H. Kamath. *Unsteady Navier-Stokes solutions for a NACA 0012 airfoil*. J. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **186** :85–99, (2000).
- [73] F. Nobile. *Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to haemodynamics*. PhD thesis, num. 2458, EPFL, Lausanne, (2001).
- [74] T. Nomura et T.J.R. Hughes. *An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **95** :115–138, (1992).

- [75] E. Oñate, S.R. Idelsohn, F. Del et R. Aubry. *The particle finite element method. An Overview*. Intern. J. of Comput. meth., **1** :267–307, (2004).
- [76] L.F. Pavarino. *Preconditioned mixed spectral element methods for elasticity and Stokes problems*. SIAM J. Sci. Comput., **19** :1941–1957, (1998).
- [77] L.F. Pavarino. *Domain decomposition methods with small overlap for $Q_n - Q_{n-2}$ spectral elements*. Appl. Num. Math., **33** :463–470, (2000).
- [78] J.B. Perot. *An analysis of the fractional step method*. J. Comput. Physics, **108** :51–58, (1993).
- [79] C.S. Peskin. *The immersed boundary method*. Acta Numerica, **11** :479–517, (2002).
- [80] S. Piperno. *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (1995).
- [81] S. Piperno et C. Farhat. *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems Part II : energy transfer analysis and three-dimensional applications*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **190** :3147–3170, (2001).
- [82] O. Pironneau. *Finite element method for fluids*. Wiley, Masson, (1989).
- [83] A. Quarteroni et A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [84] K.R. Rajagopal. *On a class of elastodynamic motions in a neo-Hookean elastic solid*. Int. J. Non-Linear. mech., **33** :397–405, (1998).
- [85] B. Ramaswamy et M. Kawahara. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow*. In R.H. Gallagher, R. Glowinsky, P.M. Gresho, J.T. Oden and O.C. Zienkiewicz, (eds.), Finite Elements in fluids-Volume 7, pages 65–87, (1987).
- [86] M. Rappaz, M. Bellet et M. Deville. *Modélisations numériques en science et génie des matériaux*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, (1998).
- [87] I. Robertson, L. Li, S.J. Sherwin et P.W. Bearman. *A numerical study of rotational and transverse galloping rectangular bodies*. J. of fluids and structure, **17** :681–699, (2003).
- [88] Inge L. Ryming. *Dynamique des fluides*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, (1991).
- [89] C.R. Schneidesch. *Numerical simulation of incompressible flows in complex geometries by preconditioned Chebyshev collocation*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, (1992).
- [90] C.R. Schneidesch. *Chebyshev collocation method and multi-domain decomposition for Navier-Stokes equations in complex curved geometries*. J. Comput. Phys., **106** :234–257, (1993).
- [91] K. Stein, R. Benney, T.E. Tezduyar et J. Potvin. *Fluid-structure interactions of cross parachute : numerical simulation*. J. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **191** :673–687, (2001).
- [92] P.R.F. Teixeira et A.M. Awruch. *Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method*. Comput. and fluids, **34** :249–273, (2005).
- [93] L. J. P. Timmermans. *Analysis of spectral element methods*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, (1994).

- [94] R. Torri, M. Oshima, T. Kobayashi, K. Takagi et T.E. Tezduyar. *Computer modeling of cardiovascular fluid-structure interactions with the deforming-spatial-domain/stabilized space-time formulation*. J. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., **195** :1885–1895, (2006).
- [95] J. Van Kan. *A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow*. J. Sci. Stat. Comput., **7** :870–891, (1986).
- [96] D. Weill. *Simulation directe et des grandes échelles d'écoulements de fluides visqueux par la méthode des éléments spectraux*. PhD thesis, num. 2680, EPFL, Lausanne, (2002).
- [97] O.B. Widlund et L.F. Pavarino. *Iterative substructuring methods for spectral element discretizations of elliptic systems. I : compressible linear elasticity*. SIAM J. Numer. Anal., **37**(2) :353–474, (1999).
- [98] O.B. Widlund et L.F. Pavarino. *Iterative substructuring methods for spectral element discretizations of elliptic systems. II : mixed methods for linear elasticity and Stokes flow*. SIAM J. Numer. Anal., **33** :375–402, (1999).
- [99] L. Zhu et C.S. Peskin. *Simulation of a Flapping Flexible Filament in a Flowing Soap Film by Immersed Boundary Method*. J. Comput. Phys., **179** :452–468, (2002).

CURRICULUM VITAE

Nicolas Bodard
Né le 18 décembre 1977
Nationalité française

34, rue Saint Martin
CH-1005 Lausanne
Suisse

Tel. : +41(0) 21 311 60 49 (privé)
+41(0) 79 683 683 2 (mobile)

e-mail : nicolas.bodard@tiscali.ch

Éducation

- 09/01 : Diplôme d'ingénieur, institut Galilée, Paris XIII, Villetaneuse, FR
Spécialité : Mathématiques appliquées et Calcul Scientifique
- 09/96-07/98 : Etudiant en classe préparatoire MP, lycée Paul Eluard, Saint-Denis, FR
- 07/199 : Baccalauréat série S. Mention bien

Emplois

- 04/02-05/06 Assistant doctorant, EPFL, Lausanne, CH
Dans le cadre des projets de fin d'études
- 03/01-09/01 Réalisation d'un programme de résolution en éléments finis dans le domaine de l'extrusion Alusuisse, Alcan, CH
- 10/00-01/01 Etude de différentes méthodes de couplages fluides/solides, ONERA, FR

Langues

Français, anglais, espagnol (scolaire)

Langages de programmation et logiciels scientifiques

- Systèmes d'exploitation : DOS, WINDOWS 3.1x, 9x, NT, 2000, XP, UNIX, Linux (Suse)
- Langages de programmation : pascal, Maple, Matlab, Mathematica, Fortran, C, C++ (Visual C++, KDevelop), Html (javascript), SQL, MPI, Corba, ABAQUS, COSMOS
- Edition : Excel, Word, Latex, powerpoint
- Visualisation : Paint Shop pro, Photoshop, Gimp, Tecplot, Paraview, Autocad, Pro/Engine

Publications

- [1] N. Bodard, N. & M. Deville, *Fluid-structure interaction by the spectral element method* (2006), J. of Sci. Comput.
- [2] N. Bodard, N. & R. Bouffanais & M. Deville, *Solution of moving-boundary problems by the spectral element method*(2006), Submitted to J. Appl. Num. Math.

Conférences et Séminaires

11-15/07/05 *The 17th IMACS world congress on Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation*, Paris, FR

Présentation du sujet intitulé **Moving-grid techniques using spectral element methods for moving-boundary problems** avec Michel Deville (Orateur principal) et Nicolas Bodard (Second Orateur) sur la méthode ALE et les problèmes de surface libre développés par Roland Bouffanais.

14-17/06/05 *The third M.I.T. conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Boston, EU

Présentation du sujet intitulé **ALE technique with the spectral element method : mesh deformation** sur la déformation de maillage et la méthode ALE.

25-27/05/05 *The ECCOMAS conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, Santorin, GR

Présentation du sujet intitulé **Spectral element method for fluid-structure interaction** sur la résolution de l'interaction fluide-structure par une méthode décalée.

21-25/06/04 *The 6th International Conference on Spectral and High Order Methods (ICOSAHOM)*, Providence, EU

Présentation du premier article intitulé **Fluid-structure interaction by the spectral element method** sur l'interaction fluide-structure.

