EQUATIONS DE TYPE IMPLICITE AVEC CONTRAINTES

THÈSE N° 2205 (2000)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Chiara TANTERI

laurea in matematica, Università degli Studi di Roma, Italie
de nationalité italienne

acceptée sur proposition du jury:

Prof. B. Dacorogna, directeur de thèse
Prof. L. Boccardo, rapporteur
Prof. M. Chipot, rapporteur
Prof. A. Quarteroni, rapporteur

Lausanne, EPFL
2000

A ma famille.

Remerciements

Tout d'abord j'aimerais remercier mon directeur de thèse, M. le Prof. Bernard Dacorogna, pour m'avoir permis de faire une thèse, pour son aide continue et son apport de connaissances et conseils, sans lesquels je n'aurais jamais pu arriver au bout de ce travail. J'aimerais citer un aspect qui m'a le plus touchée durant ces années passées à travailler ensemble. Je pense à sa recherche continue non seulement de résultats, de "contenus", mais aussi de la "forme", essentielle, limpide, sous laquelle présenter ces mêmes résultats, ce qui leur confère avant tout clarté, mais représente aussi, pour moi, un coté esthétique des mathématiques que je n'avais jamais su apprécier auparavant.

Je remercie aussi le président du jury, M. le Prof. Robert Dalang, et son remplaçant M. le Prof. Michel André, les autres membres du jury, M. le Prof. Lucio Boccardo, M. le Prof. Michel Chipot et M. le Prof. Alfio Quarteroni, pour la considération apportée à mon travail et pour l'ambiance décontractée dont j'ai pu bénéficier pendant mon examen de thèse.

Mes remerciements vont également à M. le Prof. Charles Stuart pour m'avoir accueillie dans sa chaire et à tous les membres de son groupe avec qui j'ai eu du plaisir à travailler et à échanger des discussions sérieuses (ou non) pendant ces quatre ans.

Toutes ces années passées à l'EPFL ont signifié beaucoup pour moi du point de vue personnel. J'aimerais exprimer ma gratitude à tous mes amis du département dont la longue liste m'oblige à les citer en groupe! J'aimerais infiniment remercier Hidenori pour sa patience et son affection constante.

Infine, un'occasione in più per dire grazie alla mia famiglia; per il sostegno che mi ha sempre dato, anche se da lontano, per l'amore, la forza e per tutti gli ideali che ha saputo trasmettermi.

Résumé

Dans cette thèse nous traiterons du problème de Dirichlet pour les systèmes d'équations de type implicite, i.e.

$$\begin{cases} F_i(x, u(x), Du(x)) = 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, I \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert, $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, les $F_i : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$, $m, n \geq 1$, sont des fonctions continues et φ est une fonction donnée.

Nous nous intéresserons, dans un premier temps, à l'étude de problèmes de type (1) sous contraintes. Nous démontrerons des théorèmes d'existence de solutions lipschitziennes par une approche basée sur le théorème des catégories de Baire. Comme corollaires de nos résultats abstraits, nous donnerons deux théorèmes relatifs aux contraintes $\det Du > 0$ et $\det Du = 1$, les contraintes les plus étroitement liées aux applications.

En effet, les contraintes $\det Du > 0$ et $\det Du = 1$ proviennent de l'élasticité non linéaire et représentent respectivement les conditions de non interpénétration de la matière et d'incompressibilité.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous porterons notre attention aux applications. Nous traiterons de nombreux exemples tels que le cas des valeurs singulières, les puits de potentiel sous la contrainte de l'incompressibilité (i.e. $\det Du = 1$), le problème des ellipses confocales, le problème des élastomères nématiques, particulièrement liés aux domaines de l'élasticité non linéaire, de la microstructure des cristaux et de la structure optimale, ainsi que l'équation eikonale complexe (application concernant plutôt l'optique géométrique).

Du point de vue mathématique, nous allons donner des conditions suffisantes de solvabilité du système (1). Ces conditions consistent à caractériser les différentes enveloppes convexes d'ensemble.

En effet, la possibilité de représenter, en termes algébriques, ces ensembles donne une des conditions que la donnée au bord doit satisfaire pour qu'un problème de type (1) admette des solutions.

Finalement nous étendrons aux ensembles polyconvexes des propriétés telles que la jauge, la caractérisation des points extrêmes, la fonction de Choquet, des instruments bien connus dans le cadre de l'analyse convexe classique.

Abstract

In this thesis we will treat the Dirichlet problem for systems of implicit equations, i.e.

$$\begin{cases} F_i(x, u(x), Du(x)) = 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, I \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is an open set, $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $F_i : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, $m, n \geq 1$, are continuous functions and φ, the boundary datum, is given.

At first we will be interested in the study of problems of the type (1) under constraints. We will show theorems of existence of Lipschitz solutions using an approach based on Baire category theorem.

As corollaries of our abstract results, we will give two theorems related to the constraints $\det Du > 0$ and $\det Du = 1$, the constraints most closely related to the applications.

Indeed, the constraints $\det Du > 0$ and $\det Du = 1$ come from nonlinear elasticity and represent respectively the conditions of non interpenetration of matter and incompressibility.

In the second part of this study, we will focus on the applications. We will treat many examples such as the case of singular values, potential wells under the incompressibility constraint (i.e. $\det Du = 1$), the problem of confocal ellipses, the problem of nematic elastomers, particularly related to the fields of nonlinear elasticity, the microstructure of the crystals and the optimal design, as well as the complex eikonal equation (application related to geometric optics).

From the mathematical point of view, we will give sufficient conditions of solvability of the system (1). These conditions consist in characterizing the different convex hulls.

Indeed, the possibility of representing these sets, in algebraic terms, gives one of the conditions which the boundary datum must satisfy so that a problem of the type (1) admits a solution.

Finally we will extend to polyconvex sets properties such as the gauge, the characterization of the extreme points and the Choquet function, all of which are well-known tools within the framework of classical convex analysis.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le sujet principal de cette thèse est l'étude des systèmes d'équations implicites (le terme implicite sera précisé plus loin) du type

$$\begin{cases} F_i(x, u(x), Du(x)) = 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, I \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert, $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, les $F_i : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$, $m, n \geq 1$, sont des fonctions continues et φ est une fonction donnée.

On aimerait mettre l'accent sur le fait que, puisque $m \geq 1$, le cadre d'étude est vectoriel, mais aussi sur le fait que les solutions u cherchées, de manière compatible avec le type de problème étudié, sont des fonctions de l'espace $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Les problèmes de Dirichlet considérés ci-dessus ont été largement traités par différents mathématiciens tels que Cellina [10], De Blasi-Pianigiani [26], Bressan-Flores [7], Müller-Sverak [40], Dacorogna-Marcellini [16], [18]. Ces deux derniers auteurs ont récemment démontré des théorèmes très généraux d'existence de solutions dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (c.f. Dacorogna-Marcellini [21]). Une partie importante de cette thèse sera consacrée à un développement de ces résultats dans deux directions principales. Tout d'abord d'un point de vue théorique en considérant des problèmes de type (1.1) avec contraintes, notamment celles de l'élasticité non linéaire $\det Du > 0$ et $\det Du = 1$. La deuxième partie importante de notre travail consiste à étudier de nombreux exemples intéréssants pour les applications. Nous traiterons, entre autres, du problème des valeurs singulières ainsi que de l'équation eikonale complexe, particulièrement liés aux domaines de l'élasticité non linéaire, de la structure optimale et de l'optique, mais aussi des problèmes que l'on a jugé mathématiquement intéressants et que nous présenterons sous forme d'exemples académiques.

Nous transformerons souvent le problème (1.1) en l'inclusion algébrique (équivalente) suivante:

$$\begin{cases} (x, u(x), Du(x)) \in E \text{ , p.p. } x \in \Omega \text{ , } i = 1, ..., I \\ u(x) = \varphi(x), \, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où nous avons posé

$$E = \left\{(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} : \; F_i(x, s, \xi) = 0, \, i = 1, ..., I\right\}.$$

Supposons, pour des raisons de simplicité, que les fonctions F_i ne dépendent que du gradient Du, de façon que

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{m \times n} : \; F_i(\xi) = 0, \, i = 1, ..., I\right\}.$$

Une condition suffisante optimale, compatible avec la condition nécessaire, pour l'existence des solutions semble être

$$D\varphi \in E \cup \mathrm{int}\overline{\mathrm{Qco}E}, \tag{1.2}$$

où $\mathrm{int}\overline{\mathrm{Qco}E}$ dénote l'intérieur de la fermeture de l'enveloppe quasiconvexe de E, notion qui sera développée ultérieurement (voir Section 2.2). Cependant, à l'heure actuelle, il n'existe pas encore de résultats aussi généraux. Le terme "implicite" utilisé pour caractériser les problèmes de Dirichlet considérés dans cette thèse a été introduit par Dacorogna et Marcellini [21] et concerne la condition

$$\mathrm{int}\overline{\mathrm{Qco}E} \neq \emptyset,$$

qui exclut automatiquement de l'étude le cas linéaire, quasilinéaire et elliptique.

La condition (1.2) constituerait la généralisation naturelle des résultats d'existence du cas scalaire, où cette dernière est assurée lorsque

$$D\varphi \in E \cup \mathrm{intco}E,$$

$\mathrm{co}E$ étant l'enveloppe convexe de E, i.e. le plus petit ensemble convexe contenant E.

Cependant la difficulté majeure dans le cas vectoriel réside dans la caractérisation de Qco$E$, car il n'existe pas de bonne représentation, en termes algébriques, de cette enveloppe. Par conséquent une étape intermédiaire nous oblige à nous restreindre à l'enveloppe rang un convexe, Rco$E$, ou même à un sous-ensemble de celle-ci (en général Rco$E \subset$ Qco$E$).

Dacorogna et Marcellini (c.f. Chapitre 6 de [21]) ont montré qu'une condition suffisante pour l'existence de solutions est donnée (entre autres) par

$$D\varphi \in E \cup \operatorname{intRco} E.$$

Dans la plupart des applications traitées dans cette thèse, comme dans le cas des valeurs singulières (non symétriques) et de l'équation eikonale complexe, nous avons pu detérminer Qco$E$ et parvenir donc à des résultats optimaux.

Nous allons maintenant discuter les exemples principaux qui sont étudiés dans cette thèse. Nous commençons par un résultat que nous avons obtenu dans [25]: le problème des valeurs singulières, une application clef que l'on retrouvera dans le Chapitre 3.

Exemple 1: Valeurs singulières. *Il s'agit de trouver une fonction* $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \lambda_i\left(Du\left(x\right)\right) = a_i\left(x, u\left(x\right)\right), \text{ p.p. } x \in \Omega, \, i = 1, ..., n \\ u\left(x\right) = \varphi\left(x\right), \, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est un ensemble ouvert,* $a_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ *sont des fonctions continues satisfaisant*

$$0 < c \leq a_1\left(x, s\right) \leq a_2\left(x, s\right) \leq ... \leq a_n\left(x, s\right)$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}_+$, *pour tout* $(x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ *et où* $\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ *est une fonction donnée.*

Les fonctions $\xi \to \lambda_i\left(\xi\right)$ *sont appelées valeurs singulières de* ξ *et sont définies comme les valeurs propres de la matrice* $(\xi^T\xi)^{1/2}$ (c.f. Section 3.2).

Dans ce cas nous avons posé (on peut supposer ici que les a_i *sont des constantes)*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \lambda_i(\xi) = a_i, \quad i = 1, ..., n\right\}$$

et nous avons trouvé que

$$\overline{\text{Qco}E} = \text{Rco}E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i, \quad \nu = 1, ..., n\right\}.$$

Par conséquent si φ est telle que

$$\prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i \left(D\varphi(x)\right) < \prod_{i=\nu}^{n} a_i(x, \varphi(x)), \quad x \in \Omega, \quad \nu = 1, ..., n,$$

(en particulier on peut choisir $\varphi \equiv 0$), il existe (un ensemble dense de) u vérifiant (1.3).

Nous faisons remarquer que, lorsque $n = 2$, le système (1.3) s'écrit de manière équivalente

$$\begin{cases} |Du(x)|^2 = a_1^2 + a_2^2, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ |\det Du(x)| = a_1 a_2, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

c'est-à-dire que le problème donné peut être vu comme une combinaison de l'équation eikonale et de l'équation qui assigne la valeur absolue du Jacobien. Par conséquent le résultat de caractérisation trouvé, comme déjà observé dans [21], permet également d'obtenir le théorème d'existence suivant.

Corollaire 1: *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $a : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction continue satisfaisant, $\forall (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$,*

$$0 < a_0 \leq a(x, s),$$

pour une certaine constante a_0. Soit $\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ telle que

$$|\det D\varphi| < a(x, \varphi(x)), \quad x \in \overline{\Omega};$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in W^{1,\infty}\left(\Omega; \mathbb{R}^n\right)$ telle que

$$\begin{cases} |\det Du(x)| = a(x, u(x)), \text{ p.p. } x \in \Omega, \ i = 1, ..., n \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

L'équation ci-dessus, sans la valeur absolue du déterminant, a été largement étudiée dans la littérature; nous nous référons en particulier aux résultats de Dacorogna et Moser [23].

Nous avons également étudié le cas des valeurs singulières symétriques, qui correspond au système d'équations du deuxième ordre suivant.

Exemple 2: *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $a_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ des fonctions continues bornées satisfaisant*

$$0 < c \leq a_1(x, s, p) \leq a_2(x, s, p) \leq ... \leq a_n(x, s, p)$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}_+$ *et* $\forall\ (x,s,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Soit* $\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ *telle que*

$$\lambda_i\left(D^2\varphi(x)\right) < \ a_i(x,\varphi(x),D\varphi(x)), \quad x \in \Omega, \quad i = 1,...,n,$$

(en particulier $\varphi \equiv 0$*), alors il existe (un ensemble dense de)* $u \in W^{2,\infty}\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ *telle que*

$$\begin{cases} \lambda_i\left(D^2 u\left(x\right)\right) = a_i\left(x, u\left(x\right), Du(x)\right), \text{ p.p. } x \in \Omega,\ i = 1,...,n \\ u\left(x\right) = \varphi\left(x\right),\ Du\left(x\right) = D\varphi\left(x\right)x, \ \ \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Cet exemple est particulièrement significatif, car il permet de résoudre le système

$$\begin{cases} \left|\det D^2 u\left(x\right)\right| = f\left(x, u\left(x\right), Du\left(x\right)\right), \text{ p.p. } x \in \Omega \\ u\left(x\right) = \varphi\left(x\right),\ Du\left(x\right) = D\varphi\left(x\right),\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On remarque que ce problème, à cause des conditions simultanées de Dirichlet et Neumann, ne peut être traité à l'aide de l'équation de Monge-Ampère.

Le cas des valeurs singulières représente un exemple très intéressant dans le cadre des problèmes de minimisation du calcul des variations mais aussi une source importante d'applications physiques liées notamment à des problèmes d'élasticité non linéaire ou de structure optimale. Par exemple lorsque un matériau hyperélastique, homogène (voir Ciarlet [12] pour plus de détails), occupant une configuration de référence $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, subit une déformation u, la réponse du matériau à cette sollicitation extérieure se mesure en termes du scalaire $\det Du$, de la matrice $adj_2 Du$ et de la matrice $Du^T Du$, quantités qui donnent respectivement le changement de volume, de surface et de longueur et que l'on retrouve dans l'expression de la densité d'énergie

$$W(x,\xi) = \overset{*}{W}\ (x,\xi,adj_2\xi,\det\xi).$$

Or il s'avère que la fonction $W(x,\cdot)$ ne peut pas être convexe (une des raisons est que cette condition serait "physiquement" incompatible avec la propriété que $\det\xi \to 0^+ \Rightarrow W(x,\xi) \to +\infty$). Une hypothèse raisonnable est que $\overset{*}{W}\ (x,\cdot,\cdot,\cdot)$ est convexe; on dit alors que W est polyconvexe (c.f. Section 2.2.1). Si le matériau est isotrope on peut montrer (c.f. Ball [3], Ciarlet [12]) qu'il existe $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$W(x,\xi) = \overset{*}{W}\ (x,\xi,adj_2\xi,\det\xi) = \Phi(x,\lambda_1(\xi),\lambda_2(\xi),\lambda_3(\xi)),$$

où les λ_i représentent les valeurs singulières de la matrice Du et sont définies comme les valeurs propres de la matrice symétrique définie positive $(Du^T Du)^{1/2}$. On retrouve donc dans l'expression de l'énergie les valeurs singulières connues également en élasticité comme "déformations principales".

Les valeurs singulières ont aussi une signification géométrique; elles représentent, dans le cas de matrices symétriques, les valeurs absolues des courbures principales associées à une surface.

Les résultats de caractérisation des différentes enveloppes convexes obtenus pour le cas des valeurs singulières, nous ont été très utiles lors du développement d'autres exemples, notamment dans le cas de l'équation eikonale complexe (c.f. Chapitre 4) et de l'exemple qui suit, les élastomères nématiques (c.f. Chapitre 3). Ce dernier est un problème considéré récemment par DeSimone et Dolzmann [27] et concerne l'étude d'une classe de matériaux, les élastomères nématiques, qui ont une certaine importance notamment dans les nouvelles technologies de l'optique (un exemple est fourni par les cristaux liquides). Nous le présenterons comme une application de nos théorèmes d'existence obtenus dans le cas de la contrainte $\det Du(x) = 1$. Les resultats relatifs à ce cas sont parus dans [24].

Exemple 3: **Elastomères nématiques**. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et*

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \lambda_i(\xi) = a_i,\ i = 1, ..., n,\ \det \xi = \prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\},$$

où $\lambda_i(\xi)$ sont les valeurs singulières de la matrice ξ. Soit φ une fonction affine ($D\varphi = \xi_0$) telle que

$$\begin{aligned} \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi_0) &< \prod_{i=\nu}^{n} a_i,\ \nu = 2, ..., n, \\ \det \xi_0 &= 1; \end{aligned}$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_i(Du(x)) = a_i,\ i = 1, 2, ..., n, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ \det Du(x) = 1, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

Une application importante que nous avons pu développer, dont les résultats ont donné lieu à la publication [24], est donnée par l'équation eikonale complexe. Ce problème a été formulé récemment par Magnanini et Talenti (c.f. [34]) motivés tout d'abord par l'étude des fonctions harmoniques en trois dimensions. Par exemple on peut montrer que toute solution lisse de l'équation

$$w_x^2 + w_y^2 = 0, \tag{1.4}$$

dénotant par $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$, satisfait soit Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$) soit anti Cauchy-Riemann ($u_x = -v_y$ et $u_y = v_x$). Par conséquent toute solution lisse de (1.4) est harmonique. On s'est posé (c.f. par exemple [34]) la même question en dimension trois. On veut savoir si l'équation

$$w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 0 \tag{1.5}$$

donne des informations sur les fonctions harmoniques de x, y et z. Les études qui se sont faites à ce sujet n'ont donné que des réponses sous des conditions particulières. Cependant il a été possible de mieux comprendre les liaisons entre une équation du type (1.5) et des phénomènes d'optique géométrique avec diffraction, caractérisés par des équations du type

$$w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 + f^2(x, y, z) = 0.$$

Exemple 4: **Equation eikonale complexe.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. Le problème consiste à trouver une fonction à valeurs complexes $w \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{C})$,*

$$w(x) = u(x) + i\, v(x),$$

satisfaisant

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_{x_i}^2 + f^2 = 0, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ w = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

où $w_{x_i} = \partial w / \partial x_i$ et φ est une fonction donnée. Le problème est équivalent à

$$\begin{cases} |Dv|^2 = |Du|^2 + f^2, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \langle Dv; Du \rangle = 0, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ w = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En termes algébriques (à ce moment on peut considérer f constante) nous posons, pour $r > 0$ et $s = \sqrt{r^2 + f^2}$ donnés,

$$E = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times n} \ : \ |a| = r, \ |b| = s \text{ et } \langle a; b \rangle = 0 \right\}.$$

En définissant

$$A = \begin{pmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

nous avons pu montrer que

$$\overline{\mathrm{Qco}E} = \mathrm{Rco}\, E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times n} \;:\; \lambda_1 (A\xi)\,,\ \lambda_2 (A\xi) \leq 1 \right\},$$

où $\lambda_1 (A\xi)\,,\ \lambda_2 (A\xi)$ *sont les valeurs singulières de la matrice* $A\xi \in \mathbb{R}^{2\times n}$. *Par conséquent si* φ *est telle que*

$$D\varphi (x) \in E \cup \mathrm{int}\overline{\mathrm{Qco}E},$$

il existe un ensemble dense de solutions de (4.1).

Inspirés de [21], nous avons développé, dans [24], un autre exemple, celui des ellipses confocales de Murat et Tartar (c.f. [46]). Le problème est le suivant (c.f. Section 4.5).

Exemple 5: Structure optimale. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un ensemble ouvert et borné. On considère le problème de Dirichlet-Neumann suivant:*

$$\begin{cases} \Delta w (x) \in \{0,1\}\,, & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ \det D^2 w (x) \geq 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ w (x) = \varphi (x)\,, Dw (x) = D\varphi (x)\,, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

Le problème algébrique associé est (on note par $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$ *l'ensemble des matrices* 2×2 *symétriques): étant donné*

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s \;:\; \mathrm{trace}\,\xi \in \{0,1\}\,,\ \det \xi \geq 0 \right\},$$

prouver que

$$\mathrm{Rco}\, E = \mathrm{co}\, E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s \;:\; 0 \leq \mathrm{trace}\,\xi \leq 1,\ \det \xi \geq 0 \right\}.$$

Donc, si $\varphi \in C^2 \left(\overline{\Omega}\right)$ *satisfait*

$$\begin{cases} 0 \leq \Delta\varphi (x) \leq 1, & \text{p.p. } x \in \Omega \\ \det D^2 \varphi (x) > 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \end{cases}$$

il existe (un ensemble dense de) $w \in \varphi + W^{2,\infty}_0 (\Omega)$ *solution de (1.7).*

La méthode de résolution utilisée ici motive notre choix de présenter à nouveau ce problème. En effet dans [21] on arrive au résultat par une méthode explicite, constructive, mais qui a le désavantage de ne pas être flexible. Dans la méthode utilisée ici on peut s'imaginer l'appliquer à une fonction $a\,(x, u, Du)$, au lieu de $a \equiv 1$, ce qui n'est pas possible dans la méthode originale.

Parmi les problèmes de Dirichlet sous contraintes, nous avons traité celui des puits de potentiel, sous la contrainte de l'incompressibilité, i.e. $\det \xi = 1$. Le cas des puits de potentiel est un problème bien connu et largement étudié dans la littérature (voir par exemple Ball et James [4], [5], Chipot-Kinderleherer [11], Fonseca-Tartar [28], Kohn [32] etc...), qui trouve ses motivations dans la physique, en particulier dans la microstructure (en général, on appelle microstructure toute structure comprise entre une échelle macroscopique et une échelle atomique, c.f. [39]). Dans la nature il existe des formes différentes de microstructures (la complexité de structure d'une feuille, ou celle d'un rocher en sont des exemples), mais les microstructures auxquelles nous pensons concernent des transformations de phase (de type solide-solide) de certains métaux, soumis à des conditions particulières de température. En effet, dans certains métaux cristallins, on observe deux phases différentes, i.e. deux types de symétrie cristalline différente; une première phase à haute température, caractérisée par une grande symétrie (par exemple cubique), appelée austenite, et une autre à plus basse température, caractérisée par une moindre symétrie (par exemple tétragonale) appelée martensite. Considérons, à titre d'exemple, une déformation qui transforme le cristal à haute température, en le cristal à basse température. Pendant cette transformation, le processus de refroidissement passe à travers une température critique, correspondant à la transition de phase et, en observant le cristal à cette température critique, on remarque la "cohabitation" de l'austenite et de la martensite (c.f. [4]). Par contre si on considère le cristal en-dessous de cette température critique, on ne remarquera plus que de la martensite. Le problème mathématique que l'on se pose est le suivant. On veut trouver une fonction u qui minimise la fonctionnelle

$$I(u) = \int_{\Omega} W(Du(x))dx : u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n), \tag{1.8}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et borné, $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ une fonction donnée et $W : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction telle que

$$W(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \xi \in E = \bigcup_{i=1}^{N} SO(n)A_i,$$

où nous avons dénoté par $SO(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales R à déterminant positif, i.e. les matrices R telles que $R^T R = RR^T = I$ et $\det R = 1$. La fonction W représente l'énergie élastique du métal. Si on trouve une fonction $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ telle que

$$Du \in E = \bigcup_{i=1}^{N} SO(n) A_i,$$

alors cette fonction est un minimum de (1.8). Les éléments $SO(n)A_i$ sont généralement appelés "puits de potentiel". Le problème de l'existence des solutions a été traité seulement dans le cas $n = N = 2$ et ceci par Müller et Sverak [41], Dacorogna et Marcellini [21] dans le cas où $\det A \neq \det B$. Dans cette thèse (c.f. Section 4.4) nous nous intéresserons au cas incompressible $\det A = \det B$, qui se trouve dans [24]. Nous citons de nouveau, en ce qui concerne l'étude de ce dernier cas, Müller et Sverak [41] qui, en utilisant une autre méthode, sont parvenus aux mêmes résultats. L'exemple que nous avons étudié est le suivant.

Exemple 6: Puits de potentiel. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert et*

$$E = SO(2)A \cup SO(2)B$$

avec $\det A = \det B > 0$. *Soit*

$$\xi \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$$

où $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ *représente l'intérieur (relatif à la variété* $\det \xi = \det A = \det B$*) de l'enveloppe rang un convexe de* E *(c.f. Section 4.4 pour la caractérisation de* $\operatorname{Rco} E$*). Alors il existe* $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ *telle que*

$$\begin{cases} Du(x) \in E, \text{ p.p. dans } \Omega \\ u(x) = \xi x, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En ce qui concerne les aspects plus théoriques que nous avons développés dans cette thèse, nous aimerions citer deux résultats, particulièrement simples, relatifs aux contraintes $\det Du > 0$ et à $\det Du = 1$, les contraintes les plus proches des applications physiques. En effet si on considère un matériau qui se déforme, imposer que le déterminant du gradient de déformation Du est positif équivaut à éviter des phénomènes d'interpénétration et à préserver l'orientation, tandis qu'imposer $\det Du = 1$ signifie traiter le cas de l'incompressibilité.

Avant d'énoncer ces deux résultats d'existence, nous allons introduire la définition de fonction coercitive.

Définition: *On dit qu'une fonction $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ est coercitive si*

$$F(\xi) \to +\infty, \text{ quand } |\xi| \to +\infty.$$

Dans le cas de la contrainte $\det Du > 0$, un corollaire de nos résultats abstraits est le suivant.

Théorème 1: *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. Soit $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ continue, quasiconvexe et coercitive. Si $\varphi \in C^1_{piec}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ est telle que*

$$\begin{cases} F(D\varphi(x)) \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \det D\varphi(x) > 0, \text{ p.p. } x \in \Omega, \end{cases}$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\begin{cases} F(Du(x)) = 0, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ \det Du(x) > 0, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

En ce qui concerne la contrainte de l'incompressibilité, nous avons pu obtenir, entre autres, le résultat suivant.

Théorème 2: *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. Soit $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ continue, quasiconvexe et coercitive. Si φ est affine et telle que*

$$\begin{cases} F(D\varphi(x)) \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \det D\varphi(x) = 1, \text{ p.p. } x \in \Omega, \end{cases}$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\begin{cases} F(Du(x)) = 0, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ \det Du(x) = 1, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

On aimerait souligner le fait que la question de l'existence des solutions pour des problèmes sous contrainte avait été posée par Dacorogna et Marcellini dans leur monographie *Implicit partial differential equations* [21]. Dans cette thèse nous avons pu répondre à cette question et adapter leurs résultats à ce cas.

Pour conclure nous aimerions mentionner des résultats supplémentaires obtenus, concernant quelques propriétés des enveloppes polyconvexes. Nous avons pu étendre au cas polyconvexe des concepts tels que la jauge, la caractérisation des points extrêmes, la fonction de Choquet, des instruments bien connus dans le cadre de l'analyse convexe classique.

Il est peut-être intéressant de citer quelques problèmes encore ouverts dans le cadre de l'étude des équations implicites du cas vectoriel. Nous aimerions en rappeler quelques uns parmi ceux qui nous semblent particulièrement proches du sujet traité. Un des défis le plus intéressant ce serait de pouvoir caractériser, en termes algébriques, l'enveloppe quasiconvexe dans le but d'obtenir des résultats optimaux d'existence de solutions. Par exemple, en ce qui concerne ce travail, nous pourrions mentionner le cas des valeurs singulières symétriques (c.f. Exemple 2), pour lesquelles nos résultats de caractérisation s'arrêtent au cas de la dimension deux. Une perspective intéressante de travail pourrait déjà être la recherche d'une formule de représentation de l'enveloppe rang un convexe dans ce cas, utile pour améliorer les résultats d'existence du problème de deuxième ordre associé

$$\begin{cases} \lambda_i \left(D^2 u\left(x\right)\right) = a_i \left(x, u\left(x\right), Du\left(x\right)\right), \text{ p.p. } x \in \Omega,\, i = 1, ..., n \\ u\left(x\right) = \varphi\left(x\right),\, Du\left(x\right) = D\varphi\left(x\right),\, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous faisons encore remarquer que tous nos résultats d'existence ont été obtenus sous l'hypothèse que la fonction φ soit (suivant les cas) dans l'espace des fonctions $C^N(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ *par morceaux* ou qu'elle soit affine. Un résultat plus général ce serait de supposer $\varphi \in W^{N,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, ou encore φ définie seulement sur $\partial\Omega$. Cependant il n'existe pas, de nos jours, de théorèmes convenables d'approximation, par conséquent ceci pourrait constituer une nouvelle direction de recherche.

Nous aimerions, pour conclure, citer un autre problème ouvert intéressant; celui concernant un critère de sélection des solutions cherchées, car, d'après notre approche, nous arrivons à montrer l'existence d'un ensemble dense de solutions, alors que la question de savoir choisir, parmi toutes ces solutions, celle la plus régulière, ou de donner des conditions pour l'unicité, reste encore ouverte. Dans le cas scalaire, par contre, on peut sélectionner parmi les solutions du problème, sous des hypothèses convenables (c.f. par exemple [9]), celle de viscosité, c'est-à-dire celle qui, en général, satisfait de "bonnes" propriétés comme par exemple l'unicité ou, dans certains cas, la maximalité. Dans le cadre vectoriel cette notion de viscosité n'a pas encore été bien comprise et les études à ce propos n'en sont qu'à leur début.

Nous terminons cette introduction par quelques rappels sur les développements récents du calcul des variations dans le cas vectoriel; en quelque sorte un *excursus* sur l'histoire récente de cette discipline (c.f. pour plus de détails Marcellini [35]).

L'intérêt principal de traiter des systèmes d'équations implicites (problèmes de Dirichlet ou de Dirichlet-Neumann) réside dans le fait que l'étude de tels systèmes constitue une étape importante dans le développement des problèmes variationnels non quasiconvexes associés.

En effet une intégrale du calcul des variations représente souvent une énergie, ou parfois a des significations géométriques (longueur, aire, ...) et s'écrit sous la forme

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x))dx,$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$ et donc $Du \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $f = f(x, s, \xi)$ est une fonction donnée. Le problème variationnel associé, par exemple celui de Dirichlet, est de la forme

$$\min \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x))dx : u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

où φ est une fonction donnée.

Supposons, pour des raisons de simplicité, que f ne dépende que du gradient de u et que la donnée au bord soit linéaire, i.e. que

$$\varphi(x) = \xi_0 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(et donc en particulier $D\varphi = \xi_0 =$ constante). Le problème devient alors

$$\min \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(Du(x))dx : u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{1.9}$$

Si f est quasiconvexe (selon la définition de Morrey -1952), c'est-à-dire si

$$f(\xi) \leq \frac{1}{mes(\Omega)} \int_{\Omega} f(\xi + D\varphi(x))dx,$$

$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$, domaine borné, $\forall \xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, alors il est facile de voir que φ est une solution de (1.9) dans la classe des fonctions $\varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Cependant, dans beaucoup d'applications, f peut ne pas être quasiconvexe et donc on peut se poser la question de savoir si un problème du type (1.9) admet une solution.

Même dans le cas scalaire le problème n'est pas évident, car, par exemple, Marcellini (c.f. [36]) a montré que si on considère

$$f(\xi) = g(|\xi|),$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$, $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est de classe C^1, non convexe par rapport à une valeur $t_0 > 0$, dans le sens que $g(t_0) > g^{**}(t_0)$ (où g^{**} est la plus grande fonction convexe minorant g sur $[0, +\infty)$), et avec dérivée $(g^{**})'(t_0)$ positive en t_0, le problème de Dirichlet suivant n'a pas de minimum dans $W^{1,\infty}(\Omega)$

$$\inf \left\{ I(u) = \int_\Omega g(|Du(x)|)dx : u = \varphi = \xi_0 x \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{1.10}$$

Dacorogna et Marcellini (c.f. [16]) ont posé la question de savoir si pour le même problème il y a solution dans le cas où $m \geq 1$. Ils ont montré que (1.10) admet solution, à condition que

$$\text{rang}(\xi_0) \geq 2.$$

C'est-à-dire que dans le cas vectoriel on a plus de liberté que dans celui scalaire, où, si $\xi_0 \neq 0$, forcément $\text{rang}(\xi_0) = 1$ et donc, en accord avec leur résultat, il n'y a pas de solution.

Comme cité auparavant, une étape fondamentale dans l'étude des problèmes variationnels non quasiconvexes est l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles associés

$$\begin{cases} F_i(Du(x)) = 0 \ , \text{ p.p. } x \in \Omega \ , i = 1, ..., I \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

où $F_i : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et φ est une fonction donnée.

Dans le cas scalaire le problème de l'existence des solutions de tels systèmes a été abondamment traité dans la littérature (entre autres par Kruzkov, Fleming, Soner, Crandall, Lions, Capuzzo-Dolcetta, Ishii etc...).

Dans le cas vectoriel l'étude de cette problématique est récente et s'est faite essentiellement à l'aide de deux approches; la méthode de l'*intégration convexe* de Gromov (explicitée dans notre contexte par Müller et Sverak [41]) et celle qui utilise les catégories de Baire et qui est d'ailleurs le procédé qui nous a conduit aux résultats d'existence du Chapitre 2.

Cette méthode a été introduite au début des années '80 par Cellina [10] et développée ensuite par De Blasi et Pianigiani [26], Bressan et Flores [7] et par Dacorogna et Marcellini dans le cas vectoriel (c.f. [16], [21]), et fait appel au théorème de Baire suivant (c.f. [44]).

Théorème 1.1 ***(des catégories) de Baire*** *Si V est un espace métrique complet, alors l'intersection $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} V^k$ de toute famille dénombrable d'ouverts V^k, denses dans V, est elle-même dense dans V.*

H. Lewy a été le premier (1957) qui a fait la connexion entre ce théorème et les équations aux dérivées partielles (pour plus de détails, c.f. [30], [31]). Il a construit un exemple célèbre d'équation aux dérivées partielles linéaire, plus précisément

$$-u_x - iu_y + 2i(x+iy)u_z = f, \tag{1.12}$$

où $u = u(x,y,z) \in C^1(\Omega)$, avec Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$, en montrant, à l'aide du Théorème de Baire, que, pour un choix convenable de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, l'équation (1.12) n'admet pas de solution. Il est peut-être important de rappeler que le résultat classique de Cauchy-Kowalewsky (c.f. par exemple [30], page 119) assure, localement, l'existence des solutions pour cette équation aux dérivées partielles si f est analytique.

Nous aimerions citer également la contribution de A. Cellina, qui a inspiré, comme déjà mentionné auparavant, de nombreux mathématiciens. Il a considéré l'inclusion suivante:

$$\begin{cases} x'(t) \in \{-1,1\} \\ \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Il a montré que l'ensemble des solutions de (1.13) est un sous-ensemble dense (au sens de Baire) de l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x'(t) \in [-1,1] \\ \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Il nous semble intéressant de présenter notre méthode de résolution sur un exemple particulièrement simple, la démarche pouvant être utile à la compréhension des résultats d'existence qui seront développés dans les prochains chapitres.

Il s'agit du cas scalaire $m = 1$ et où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et coercitive (i.e. $F(\xi) \to +\infty$ si $|\xi| \to +\infty$). Ce cas inclue l'équation eikonale (on a alors $F(\xi) = |\xi| - 1$). On considère le problème

$$\begin{cases} F(Du(x)) = 0 \text{ p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x) \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

Si on pose

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^n : F(\xi) = 0\},$$

on trouve alors que

$$\overline{\mathrm{Qco}E} = \mathrm{co}E = \{\xi \in \mathbb{R}^n : F(\xi) \leq 0\}.$$

La condition de compatibilité est donc donnée par

$$F(D\varphi(x)) \leq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

On définit V comme l'ensemble des sous-solutions de (1.15) muni de la métrique L^∞, plus précisément

$$V = \left\{u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega) : \ F(Du(x)) \leq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\right\}.$$

On observe que V est non vide car $\varphi \in V$. De plus V est un espace métrique complet car la coercitivité donne une borne uniforme sur le gradient et, puisque F est convexe, on a la semi-continuité faible $*$ dans $W^{1,\infty}$. On définit

$$V^k = \left\{u \in V : \int_\Omega F(Du(x))\, dx > -\frac{1}{k}\right\}.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment $V \backslash V^k$ est fermé, donc V^k est ouvert. La partie la plus difficile consiste à montrer que V^k est dense dans V et ceci se fait à l'aide des théorèmes de relaxation du calcul des variations. On a donc construit la suite $\{V^k\}$ de sous-ensembles ouverts et denses de V.

Puisque V est un espace métrique complet, d'après le théorème de Baire, on a que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} V^k \quad \text{est dense dans } V,$$

où

$$\begin{aligned}\bigcap_{k\in\mathbb{N}} V^k &= \left\{u \in V : \int_\Omega F\left(Du\left(x\right)\right)dx \geq 0\right\} \\ &= \left\{u \in \varphi + W_0^{1,\infty}\left(\Omega\right) : \ F\left(Du\left(x\right)\right) = 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\right\},\end{aligned}$$

ce qui implique que l'ensemble des solutions est dense dans V, d'où le résultat.

On va résumer, brièvement, le plan de la thèse. Dans le Chapitre 2, qui va suivre, nous montrerons des théorèmes d'existence pour les systèmes aux dérivées partielles sous contrainte. Dans le Chapitre 3 nous porterons notre attention au problème des valeurs singulières (c.f. Exemple 1) et à celui des élastomères nématiques (c.f. Exemple 3), qui représentera aussi une première application du cas de l'incompressibilité (problème sous la contrainte $\det Du = 1$). Une caractérisation des différentes enveloppes convexes sera donnée. Ensuite, dans le Chapitre 4, nous donnerons toute une série d'exemples, parmi lesquels nous rappelons l'équation eikonale complexe (c.f. Exemple 4), les puits de potentiel (c.f. Exemple 6), un problème de structure optimale (c.f. Exemple 5) et des exemples académiques. Nous fournirons des formules de représentation pour les enveloppes convexes d'ensembles et nous montrerons comment appliquer à tous ces cas les résultats d'existence obtenus dans le Chapitre 2.

Chapitre 2

Théorèmes d'existence

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traiterons la question de l'existence des solutions pour des systèmes d'équations implicites. En particulier nous nous intéresserons aux systèmes "mixtes", équations-inégalités, correspondant aux problèmes sous contraintes.

Les ingrédients principaux qui nous permettront d'arriver aux résultats d'existence sont constitués essentiellement du Théorème de Baire, de la notion de quasiconvexité et d'une importante propriété: la relaxation.

Les sytèmes dont on prouvera l'existence des solutions sont du type

$$\begin{cases} F_i(x, u(x), Du(x)) = 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, I \\ G_j(x, u(x), Du(x)) \leq 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, J \\ u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, & \end{cases} \tag{2.1}$$

où $F_i, G_j : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$, une fonction donnée.

Les résultats que nous avons pu obtenir pour les problèmes du type (2.1), dont le développement a par ailleurs abouti aux publications [22] et [24], offrent l'avantage d'être assez flexibles comme ceux de [21] et donc adaptables à de nombreuses situations différentes.

Pour conclure, nous donnerons quelques propriétés des enveloppes polyconvexes (Section 2.7), notamment la caractérisation des points extrêmes, la jauge polyconvexe et la fonction de Choquet.

Nous utiliserons, pour des raisons de simplicité, la notation suivante: nous écrirons C^N_{piec} pour désigner l'ensemble des fonctions C^N *par morceaux*.

2.2 Préliminaires I

Dans cette Section nous rappellerons les définitions et les propriétés principales des différentes notions de convexité.

Nous commencerons par donner les notions de convexité pour fonctions dans le cas vectoriel, introduites par Morrey [38], puis plus tard par Ball [3]. De nombreuses démonstrations figurent dans [14].

2.2.1 Notions de convexité pour fonctions

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} = (a_1, ..., a_n).$$

Définition 2.1 *i) Une fonction* $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est convexe si*

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B),$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$, $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
ii) Une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est polyconvexe s'il existe* $g : \mathbb{R}^{\tau(m,n)} \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexe, telle que*

$$f(A) = g(T(A)),$$

où $T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{\tau(m,n)}$ *est telle que*

$$T(A) = (A, adj_2 A, ..., adj_{n\wedge m} A).$$

On note par $adj_s A$ *la matrice de tous les mineurs* $s \times s$ *de* A*, avec* $2 \leq s \leq n \wedge m = \min\{n, m\}$ *où*

$$\tau(m,n) = \sum_{s=1}^{n\wedge m} \sigma(s)$$

et

$$\sigma(s) = \binom{m}{s}\binom{n}{s} = \frac{m!n!}{(s!)^2(m-s)!(n-s)!}.$$

iii) Une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$*, Borel-mesurable et localement intégrable, est quasiconvexe si*

$$f(A) \leq \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(A + \nabla\varphi(x))dx,$$

$\forall\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$*, domain borné,* $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *et* $\forall\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.
iv) Une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est rang un convexe si*

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B),$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$*,* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *telles que* $rang(A - B) \leq 1$.

Remarque 1 *(i) Lorsque* $m = n = 2$ *la polyconvexité s'exprime de la manière suivante:* $\tau(2,2) = 5$ *et*

$$T(A) = (A, \det A), \qquad f(A) = g(A, \det A).$$

(ii) La notion de quasiconvexité reste, de nos jours, relativement incomprise; en revanche, on connait son rôle central dans le cadre vectoriel (elle généralise celle scalaire de convexité). Il suffit de penser à son importance dans les théorèmes de semi-continuité inférieure ainsi que dans l'existence des solutions pour des problèmes implicites, dont on traite la question abondamment dans cette thèse.
(iii) Si on adopte les notations tensorielles, la notion de rang un convexité peut être formulée comme suit. Soit $t \in \mathbb{R}$ *et*

$$\phi(t) = f(A + ta \otimes b),$$

où on a indiqué par

$$a \otimes b = (a^i b_\alpha)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq\alpha\leq n}}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*,* $a \in \mathbb{R}^m$*,* $b \in \mathbb{R}^n$*. Alors on a que*

$$f \text{ rang un convexe} \Leftrightarrow \phi \text{ convexe}.$$

(iv) Il est important de souligner que dans la définition de polyconvexité la fonction associée g n'est pas unique. Par exemple si $m = n = 2$ *et* $f(A) = |A|^2$*, alors on peut facilement vérifier que* $g_1(A, y) = |A|^2$ *et* $g_2(A, y) = (A_1^1 - A_2^2)^2 + (A_2^1 + A_1^2)^2 + 2y$ *sont telles que* $f(A) = g_1(T(A)) = g_2(T(A))$.

Si dans le cas scalaire ces différentes définitions coincident, ceci n'est pas le cas dans le cadre vectoriel, où les résultats sont les suivants:

Théorème 2.2 *(i) Soit* $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, *alors*

$$f \text{ convexe } \Rightarrow f \text{ polyconvexe} \Rightarrow f \text{ quasiconvexe} \Rightarrow f \text{ rang un convexe}$$

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *alors*

$$f \text{ convexe } \Rightarrow f \text{ polyconvexe} \Rightarrow f \text{ rang un convexe.}$$

(iii) Si $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *est convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe, alors* f *est localement une fonction lipschitzienne.*

Dém. c.f. [14].

Remarque 2 *On aimerait souligner le fait suivant: toutes les implications réciproques sont fausses et pour la dernière (*f *quasiconvexe* $\Rightarrow$ f *rang un convexe) c'est le cas lorsque* $n \geq 2$ *et* $m \geq 3$ *(c.f. Sverak [45]) et ceci en accord avec une conjecture de Morrey (1952).*

Donnons quelques exemples des différentes notions de convexité, que l'on retrouvera tout au long de cette thèse.

Exemple 2.3 *Le détérminant d'une matrice: un exemple classique de fonction polyconvexe, mais non convexe.*

Exemple 2.4 *Cet exemple est dû à Dacorogna et Marcellini [15] et à Alibert-Dacorogna [1]. Soient* $n = m = 2$ *et*

$$f(A) = |A|^2(|A|^2 - 2\gamma \det A),$$

où $|A|$ *représente la norme euclidienne de la matrice* A *et* $\gamma \geq 0$. *Alors*

$$\begin{aligned} f \text{ est convexe } &\Leftrightarrow \gamma \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ f \text{ est polyconvexe } &\Leftrightarrow \gamma \leq 1 \\ f \text{ est quasiconvexe } &\Leftrightarrow \gamma \leq 1 + \varepsilon \text{ pour un } \varepsilon > 0 \\ f \text{ est rang un convexe } &\Leftrightarrow \gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exemple 2.5 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et*

$$0 \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$$

ses valeurs singulières (voir Section 3.2), alors la fonction $A \longmapsto \lambda_n(A)$ (i.e. la plus grande des valeurs singulières de A) est convexe, par contre la fonction $A \longmapsto \lambda_1(A)$ (i.e. la plus petite des valeurs singulières de A) n'est pas convexe. En effet elle n'est même pas rang un convexe (on s'intéressera plus largement à ces affirmations dans le Chapitre 3).

2.2.2 Notions de convexité pour les ensembles: les différentes enveloppes convexes

On donne maintenant les définitions principales et propriétés des différentes enveloppes convexes.

Définition 2.6 *a) On dit que $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ est convexe si, pour tout $t \in [0,1]$ et $\forall A, B \in K$, alors*

$$tA + (1-t)B \in K.$$

b) On dit que $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ est polyconvexe si, pour tout $t_i \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^{\tau(m,n)} t_i = 1$ et $\forall A_i \in K$, avec

$$\sum_{i=1}^{\tau(m,n)} t_i T(A_i) = T\left(\sum_{i=1}^{\tau(m,n)} t_i A_i\right),$$

alors

$$\sum_{i=1}^{\tau(m,n)} t_i A_i \in K.$$

c) On dit que $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ est rang un convexe si, pour tout $t \in [0,1]$ et $\forall A, B \in K$, telles que $rang(A-B) \leq 1$, alors

$$tA + (1-t)B \in K.$$

Remarque 3 *i) Il n'existe pas une bonne définition analogue pour l'enveloppe quasiconvexe.*
ii) On peut noter que

$$K \text{ convexe} \Rightarrow K \text{ polyconvexe} \Rightarrow K \text{ rang un convexe}$$

Définition 2.7 *Soit $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ et*

$$F_E = \{f : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \ , \ f|_E = 0\}.$$

On définit l'enveloppe convexe de E par

$$\mathrm{co}E = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(A) \leq 0 \, , \quad \forall f \in F_E \, , f \text{ convexe}\};$$

l'enveloppe polyconvexe de E par

$$\mathrm{Pco}E = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(A) \leq 0 \, , \quad \forall f \in F_E \, , f \text{ polyconvexe}\};$$

(la fermeture de) l'enveloppe quasiconvexe de E par

$$\overline{\mathrm{Qco}E} = \left\{ \begin{array}{c} A \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(A) \leq 0 \, , \quad \forall f : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f|_E = 0, \ f \text{ quasiconvexe} \end{array} \right\};$$

l'enveloppe rang un convexe de E par

$$\mathrm{Rco}E = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(A) \leq 0 \, , \quad \forall f \in F_E \, , f \text{ rang un convexe}\}.$$

Remarque 4 *On retrouve ici la définition classique de* co$E$ *(c.f. [43]).*

Des définitions données ci-dessus, on peut en déduire les propositions suivantes

Proposition 2.8 *Soit $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$, alors*

$$E \subset \mathrm{Rco}E \subset \mathrm{Pco}E \subset \mathrm{co}E.$$

Proposition 2.9 *Soit $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ et définissons par induction*

$$\mathrm{R}_0\mathrm{co}E = E$$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}E = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} &: A = tA_1 + (1-t)A_2, \ t \in (0,1), \\ &A_1, A_2 \in \mathrm{R}_i\mathrm{co}E \, , \ \mathrm{rang}(A_1 - A_2) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{Rco}E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{R}_i\mathrm{co}E.$$

Remarque 5 *La proposition ci-dessus est une version faible du résultat obtenu dans la caractérisation des enveloppes convexes et polyconvexes. Par exemple, en utilisant le théorème de Carathéodory, on a (c.f. [43]):*

$$\mathrm{co}E = \left\{ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \; : A = \sum_{i=1}^{mn+1} t_i A_i \,,\; A_i \in E \,,\, t_i \geq 0 \,,\; \textit{avec} \; \sum_{i=1}^{mn+1} t_i = 1 \right\}$$

et

$$\mathrm{Pco}E = \left\{ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \; : T(A) = \sum_{i=1}^{\tau+1} t_i T(A_i) \;,\; A_i \in E \,,\, t_i \geq 0 \,,\; \textit{avec} \sum_{i=1}^{\tau+1} t_i = 1. \right\}$$

2.3 Préliminaires II

Avant d'énoncer les théorèmes d'existence on donnera deux propriétés abstraites importantes et qui seront largement utilisées dans des théorèmes ultérieurs.

Notations: (i) Soient $N, n, m \geq 1$ des entiers. Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application, on dénote par

$$D^N u = \left(\frac{\partial^N u^i}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_N}} \right)_{1 \leq j_1, ..., j_N \leq n}^{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N}.$$

la matrice constituée de toutes les dérivées partielles d'ordre N de u. Lorsque $N = 1$ on a $\mathbb{R}_s^{m\times n} = \mathbb{R}^{m\times n}$; si $m = 1$ et $N = 2$ on obtient $\mathbb{R}_s^{n^2} = \mathbb{R}_s^{n\times n}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques.
(ii) On notera

$$D^{[N]}u = \big(u, Du, ..., D^N u\big) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^2} \times ... \times \mathbb{R}_s^{m\times n^{(N-1)}} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N},$$

et nous écrirons

$$\mathbb{R}_s^{m\times M} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^2} \times ... \times \mathbb{R}_s^{m\times n^{(N-1)}},$$

où

$$M = 1 + n + ... + n^{(N-1)} = \frac{n^N - 1}{n-1}\,.$$

On aura par conséquent

$$D^{[N]}u = \big(D^{[N-1]}u, D^N u\big) \in \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N}.$$

2.3.1 La propriété de relaxation

Définition 2.10 (Relaxation) *Soient $E, K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$. On dit que K a la propriété de relaxation par rapport à E si pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour tout polynome de degré N, u_ξ, avec $D^N u_\xi(x) = \xi$, satisfaisant*

$$\left(x, D^{[N-1]}u_\xi(x), D^N u_\xi(x)\right) \in \operatorname{int} K,$$

il existe une suite $u_\nu \in C^N_{piec}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m\right)$ satisfaisant les propriétés suivantes:

$$\begin{array}{l} u_\nu \in u_\xi + W_0^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m) \\ u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_\xi \text{ dans } W^{N,\infty} \\ \left(x, D^{[N-1]}u_\nu(x), D^N u_\nu(x)\right) \in E \cup \operatorname{int} K, \text{ p.p. dans } \Omega \\ \int_\Omega \operatorname{dist}\left(\left(x, D^{[N-1]}u_\nu(x), D^N u_\nu(x)\right); E\right) dx \to 0,\ \nu \to \infty. \end{array}$$

Remarque 6 *Pour E et K définis précédemment, si K a la propriété de relaxation par rapport à E, alors*

$$K \subset \overline{\mathrm{Qco}E}.$$

Dém. *On va faire la démonstration quand $N = 1$ et E et K ne dépendent pas des termes de plus bas ordre, i.e. E, $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$. Soit $\xi \in K$ (et u_ξ telle que $Du_\xi(x) = \xi$). Soit $\{u_\nu\}$ comme dans la définition de la relaxation; on a alors par semicontinuité, comme f est quasiconvexe,*

$$\operatorname{mes}(\Omega) \cdot f(\xi) = \int_\Omega f(Du_\xi) \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega f(Du_\nu). \tag{2.2}$$

Par continuité et par le fait que $f_{|E} = 0$ on trouve bien que

$$f(\xi) \leq 0, \qquad i.e.\ \ \xi \in \overline{\mathrm{Qco}E}.$$

Cette propriété de relaxation, malgré son avantage d'être très flexible, demeure assez difficile à vérifier. Un cas important où la relaxation a lieu c'est lorsque $K = \mathrm{Rco}E$, i.e. l'enveloppe rang un convexe de E et elle satisfait la propriété suivante.

2.3.2 La propriété d'approximation

Définition 2.11 (Approximation) *Soient* $E \subset K(E) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$. *On dit que* E *et* $K(E)$ *ont la propriété d'approximation s'il existe une famille d'ensembles fermés* E_δ *et* $K(E_\delta)$, $\delta > 0$, *tels que*

(i) $E_\delta \subset K(E_\delta) \subset \operatorname{int} K(E)$ *pour tout* $\delta > 0$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ *tel que* $\operatorname{dist}(\eta; E) \leq \varepsilon$ *pour tout* $\eta \in E_\delta$ *et* $\delta \in [0, \delta_0]$;

(iii) si $\eta \in \operatorname{int} K(E)$ *alors* $\eta \in K(E_\delta)$ *pour tout* $\delta > 0$ *suffisamment petit.*

Le résultat principal, obtenu par Dacorogna et Marcellini, est le théorème qui suit (c.f. Théorème 6.14 dans [21]).

Théorème 2.12 *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$ *un ensemble fermé et borné uniformément pour* $x \in \Omega$ *et pour autant que* s *appartienne à un ensemble borné de* $\mathbb{R}_s^{m\times M}$. *Supposons que* $\operatorname{Rco} E$ *ait la propriété d'approximation avec* $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$, *alors* $\operatorname{Rco} E$ *a la propriété de relaxation par rapport à* E.

2.4 Théorèmes d'existence

Nous allons énoncer maintenant les résultats principaux de ce chapitre: les théorèmes d'existence pour des problèmes sous contraintes, parmi lesquels ceux dont la contrainte est donnée par $\det Du > 0$ (le cas $\det Du = 1$ sera traité séparement dans la Section suivante).

Le résultat abstrait le plus important est le suivant:

Théorème 2.13 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert. Soient* $F_i, G_j : \Omega \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N} \to \mathbb{R}$, $F_i = F_i(x,s,\xi)$, $i = 1,2,...,I$, $G_j = G_j(x,s,\xi)$, $j = 1,2,...,J$, *des fonctions continues par rapport à chacune des variables et quasiconvexes par rapport à la variable* ξ. *Soient* $E, K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$ *tels que*

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{array}{c} (x,s,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N} : F_i(x,s,\xi) = 0,\ i = 1,...,I \\ G_j(x,s,\xi) \leq 0,\ j = 1,...,J \end{array} \right\} \\ K &\subset \left\{ \begin{array}{c} (x,s,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N} : F_i(x,s,\xi) \leq 0,\ i = 1,...,I \\ G_j(x,s,\xi) \leq 0,\ j = 1,...,J \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Supposons que K soit borné uniformément pour $x \in \Omega$ et pour autant que s appartienne à un ensemble borné de $\mathbb{R}_s^{m \times M}$. Supposons en outre que K ait la propriété de relaxation par rapport à E. Soit $\varphi \in C_{piec}^N\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m\right)$ telle que

$$\left(x, D^{[N-1]}\varphi(x), D^N\varphi(x)\right) \in E \cup \operatorname{int} K, \text{ p.p. dans } \Omega;$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in W^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ vérifiant

$$\begin{cases} F_i\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) = 0, & i = 1, ..., I, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ G_j\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) \leq 0, & j = 1, ..., J, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ u \in \varphi + W_0^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m). \end{cases}$$

L'idée de la démonstration du Théorème 2.13 est très semblable à celle du Théorème 6.3 de [21]. Nous donnerons dans un premier temps les grandes étapes de la démonstration, basée essentiellement sur la quasiconvexité des fonctions F_i et G_j, le Théorème des categories de Baire et la propriété de relaxation.

1. On se donne un espace, que l'on appellera V et on considère

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in C_{piec}^N\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m\right) : u \in \varphi + W_0^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m), \ \left|D^{[N-1]}u(x)\right| < R \\ \left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) \in E \cup \operatorname{int} K, \text{ p.p. dans } \Omega \end{array} \right\}.$$

Soit V sa fermeture dans la métrique C^{N-1}; par semi-continuité on a que

$$V \subset \left\{ \begin{array}{c} u \in \varphi + W_0^{N,\infty} : F_i\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) \leq 0, \quad i = 1, ..., I, \\ G_j\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) \leq 0, j = 1, ..., J, \text{ p.p. } x \in \Omega \end{array} \right\}.$$

2. On définit, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$V^k = \left\{ u \in V : \sum_{i=1}^{I} \int_\Omega F_i\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) dx > -\frac{1}{k} \right\}.$$

L'idée est de montrer que V^k est dense dans V (à ce stade on utilisera la propriété de relaxation) et donc, grâce au Théorème des catégories de Baire, on aura que $\cap V^k$ est dense dans V, où

$$\begin{aligned} \cap V^k &= \left\{ u \in V : \sum_{i=1}^{I} \int_\Omega F_i\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) dx \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} u \in \varphi + W_0^{N,\infty} \colon F_i\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) = 0, \quad i = 1, ..., I, \\ G_j\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) \leq 0, j = 1, ..., J, \text{ p.p. } x \in \Omega \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui implique que l'ensemble des solutions est dense dans V, d'où le résultat.

Remarque 7 *Dans le cas scalaire, il est possible de caractériser explicitement V; en effet on peut, sous des conditions supplémentaires, se ramener à*

$$V = \left\{ \begin{array}{c} u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}) : \ F_i(x,u(x),Du(x)) \leq 0, \ i=1,...,I, \\ G_j(x,u(x),Du(x)) \leq 0\,,\ j=1,...,J, \ p.p.\ x \in \Omega \end{array} \right\}.$$

Dém. Etape 1: Supposons, sans perte de généralité, que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ soit borné, autrement on peut penser le recouvrir avec une famille dénombrable d'ensembles bornés et prouver le théorème pour chacun de ces ensembles. Soit alors V la fermeture dans la norme C^{N-1} de l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in C^N_{piec}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m\right) : u \in \varphi + W_0^{N,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)\,, \ \left|D^{[N-1]}u(x)\right| < R \\ \left(x, D^{[N-1]}u(x)\,, D^N u(x)\right) \in E \cup \operatorname{int} K, \text{ p.p. dans } \Omega \end{array} \right\}.$$

Par hypothèse on a que $\varphi \in V$. De plus V est un espace métrique complet lorsqu'il est muni de la norme C^{N-1}. De la quasiconvexité des fonctions F_i et G_j on a

$$V \subset V_1,$$

où

$$V_1 = \left\{ \begin{array}{c} u \in \varphi + W_0^{N,\infty} : F_i\left(x, D^{[N-1]}u(x)\,, D^N u(x)\right) \leq 0, \ \ i=1,...,I, \\ G_j\left(x, D^{[N-1]}u(x)\,, D^N u(x)\right) \leq 0, \, j=1,...,J, \text{ p.p. } x \in \Omega \end{array} \right\}.$$

Etape 2: On définit alors, pour $u \in V$,

$$L(u) = \sum_{i=1}^{I} \int_\Omega F_i\left(x, D^{[N-1]}u(x)\,, D^N u(x)\right) dx.$$

D'après la quasiconvexité des fonctions F_i on en déduit que pour tout $u \in V$

$$\liminf_{\substack{u_s \overset{*}{\rightharpoonup} u \\ u_s \in V}} L(u_s) \geq L(u)\,. \tag{2.3}$$

Par construction on a immédiatement que si $u \in V$ (ce qui implique en particulier que $G_j\left(x, D^{[N-1]}u(x)\,, D^N u(x)\right) \leq 0$) alors

$$L(u) = 0 \Leftrightarrow \left(x, D^{[N-1]}u(x)\,, D^N u(x)\right) \in E, \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.4}$$

Soit enfin

$$V^k = \left\{u \in V : L(u) > -\frac{1}{k}\right\}.$$

On montre alors que V^k est ouvert et de plus, par la propriété de relaxation, il est dense dans V (c.f. Etape 4). Supposons que l'on ait établi ceci, alors du Théorème de Baire on obtient que $\cap V^k$ est dense dans V, d'où le résultat d'après (2.4).

Etape 3: Cette étape est nécessaire lorsque les fonctions F_i et G_j dépendent des termes de plus bas ordre. On fixe les constantes. De la continuité uniforme des F_i et G_j et de l'hypothèse de compacité on a que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta = \delta(\varepsilon)$ et $\beta = \beta(R)$ tels que pour tout $x \in \Omega$, pour toute fonction mesurable $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_s^{m\times M}$, $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$, satisfaisant

$$|s(x)| \leq R, \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \left\{ \begin{array}{l} F_i\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right) \leq 0, \text{ p.p. dans } \Omega,\ i = 1, ..., I \\ G_j\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right) \leq 0, \text{ p.p. dans } \Omega,\ j = 1, ..., J, \end{array} \right.$$

alors

$$\operatorname{dist}\left(\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right); E\right) \leq \beta, \text{ p.p. dans } \Omega; \tag{2.5}$$

de plus, comme $F_i = 0$ sur E, $\sum F_i$ est petite lorsque $\operatorname{dist}\left(\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right); E\right)$ est petite et donc

$$\int_\Omega \operatorname{dist}\left(\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right); E\right) dx \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{I} \int_\Omega F_i\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right) dx \geq -\varepsilon. \tag{2.6}$$

Etape 4: Il reste à montrer que pour tout $u \in V$ et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut trouver $u_\varepsilon \in V^k$ telle que

$$||u_\varepsilon - u||_{N-1,\infty} \leq \varepsilon.$$

On va prouver ceci sous l'hypothèse que $u \in C^N_{piec}$ et

$$|D^{[N-1]}u\left(x\right)| < R, \quad \left(x, D^{[N-1]}u\left(x\right), D^N u\left(x\right)\right) \in E \cup \operatorname{int} K, \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Le cas général suit de la définition de V. En travaillant sur chaque morceau où $u \in C^N$, sans perte de généralité, on peut supposer que $u \in C^N(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ et $\left(x, D^{[N-1]}u\left(x\right), D^N u\left(x\right)\right) \in E \cup \operatorname{int} K$. Soient donc

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \left\{x \in \Omega : \left(x, D^{[N-1]}u\left(x\right), D^N u\left(x\right)\right) \in E\right\} \\ \Omega_1 &= \Omega - \Omega_0. \end{aligned}$$

D'après la continuité des F_i et G_j, Ω_0 est fermé et donc Ω_1 est ouvert. Soit k un entier fixé. Soit $0 < \varepsilon < 1/k$ et choisissons $\delta = \delta(\varepsilon)$ et $\beta = \beta(R)$ comme dans l'Etape 3. Par le théorème d'approximation (c.f. Théorème 10.16 dans [21]) on peut trouver $u_s \in C^N(\overline{\Omega}_1; \mathbb{R}^m)$ un entier $J = J(\varepsilon)$ et $\Omega_{s,j} \subset \Omega_1$, $1 \leq j \leq J$, ensembles ouverts disjoints, tels que

$$\begin{aligned}
u_s &\equiv u, \quad \text{près de } \partial\Omega_1 \\
\|u_s - u\|_{N-1,\infty} &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\
\left|Du_s^{[N-1]}(x)\right| &< R \\
\left(x, D^{[N-1]}u_s(x), D^N u_s(x)\right) &\in \operatorname{int} K, \text{ p.p. dans } \Omega_1 \\
mes\left(\Omega_1 - \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_{s,j}\right) &\leq \frac{\delta}{2\beta} \\
D^N u_s(x) &= \xi_{s,j} = \text{constant}, \; x \in \Omega_{s,j}.
\end{aligned}$$

Comme $\left(x, D^{[N-1]}u_s(x), D^N u_s(x)\right) \in \operatorname{int} K$, on utilise la propriété de relaxation et on trouve $u_{j,\nu} \in C^N_{piec}(\overline{\Omega}_{s,j}; \mathbb{R}^m)$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
u_{j,\nu} &\in u_s + W_0^{N,\infty}(\Omega_{s,j}; \mathbb{R}^m) \; ; \\
\|u_s - u_{j,\nu}\|_{N-1,\infty} &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{dans } \Omega_{s,j} \\
|D^{[N-1]}u_{j,\nu}(x)| &< R, \quad \text{dans } \Omega_{s,j} \\
\left(x, D^{[N-1]}u_{j,\nu}(x), D^N u_{j,\nu}(x)\right) &\in E \cup \operatorname{int} K \\
\int_{\Omega_{s,j}} dist\left(\left(x, D^{[N-1]}u_{j,\nu}(x), D^N u_{j,\nu}(x)\right); E\right) dx &\leq \frac{\delta}{2} \frac{mes(\Omega_{s,j})}{mes(\Omega_1)}.
\end{aligned}$$

On définit

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in \Omega_0 \\ u_s(x) \text{ si } x \in \Omega_1 - \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_{s,j} \\ u_{j,\nu}(x) \text{si } x \in \Omega_{s,j}. \end{cases}$$

Remarquons que $u_\varepsilon \in C^N_{piec}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$,

$$u_\varepsilon \in u + W_0^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$$

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|_{N-1,\infty} &\leq \varepsilon \quad \text{dans } \Omega \\
|D^{[N-1]}u_\varepsilon(x)| &< R, \quad \text{dans } \Omega \\
\left(x, D^{[N-1]}u_\varepsilon(x), D^N u_\varepsilon(x)\right) &\in E \cup \operatorname{int} K \quad \text{p.p. dans } \Omega.
\end{aligned}$$

Si on utilise, pour simplifier la notation, $\eta_\varepsilon(x) = \left(x, D^{[N-1]}u_\varepsilon(x), D^N u_\varepsilon(x)\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_\Omega dist\,(\eta_\varepsilon(x); E)\,dx &= \int_{\Omega_0} dist\,(\eta_\varepsilon(x); E)\,dx + \int_{\Omega_1} dist\,(\eta_\varepsilon(x); E)\,dx \\
&= \int_{\Omega_1} dist\,(\eta_\varepsilon(x); E)\,dx \\
&= \int_{\Omega_1 - \bigcup \Omega_{s,j}} dist\,(\eta_\varepsilon(x); E)\,dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^{J} \int_{\Omega_{s,j}} dist\,(\eta_\varepsilon(x); E)\,dx \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \leq \delta.
\end{aligned}$$

Donc, en combinant (2.5) et (2.6) avec l'inégalité ci-dessus, on obtient le résultat, i.e.

$$L(u_\varepsilon) \geq -\varepsilon > -\frac{1}{k}.$$

■

Remarque 8 *Un cas intéressant de contrainte est celui du déterminant qui correspond à $J = 1$ et*

$$G_1(\xi) = -\det \xi$$

(i.e. $\det \xi \geq 0$). On aura l'occasion de présenter dans le Chapitre 4 les applications relatives à ce cas (c.f. Section 4.3).

Définition 2.14 *On dit qu'une fonction $F : \mathbb{R}_s^{m \times n^N} \to \mathbb{R}$ est coercitive, si*

$$F(\xi) \to +\infty, \quad \textit{quand } |\xi| \to +\infty.$$

Si l'ensemble E est donné par une seule équation, le Théorème 2.13 prend la forme plus simple suivante

Théorème 2.15 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. Soit $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ continue, quasiconvexe et coercitive. Si $\varphi \in C^1_{piec}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ est telle que*

$$\begin{cases} F\left(D\varphi(x)\right) \leq 0, & p.p.\ x \in \Omega, \\ \det D\varphi(x) > 0, & p.p.\ x \in \Omega, \end{cases}$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\begin{cases} F\left(Du(x)\right) = 0, & p.p.\ x \in \Omega \\ \det Du(x) > 0, & p.p.\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Remarque 9 *Le fait que l'on puisse traiter le cas de l'inégalité stricte, provient du fait que, par hypothèse, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\det D\varphi > \delta$ car $\varphi \in C^1_{piec}$. Le reste de la preuve découle du Théorème suivant, qui généralise ce résultat.*

Théorème 2.16 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. Soient $F, \Phi : \mathbb{R}_s^{m\times n^N} \to \mathbb{R}$ continues et respectivement quasiconvexe et quasiaffine[1]. De plus, soit F coercitive. Si $\varphi \in C^N_{piec}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ est telle que*

$$\begin{cases} F\left(D^N\varphi(x)\right) \leq 0, & p.p.\ x \in \Omega, \\ \Phi\left(D^N\varphi(x)\right) < 0, & p.p.\ x \in \Omega, \end{cases}$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{N,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ satisfaisant

$$\begin{cases} F\left(D^N u(x)\right) = 0, & p.p.\ x \in \Omega \\ \Phi\left(D^N u(x)\right) \leq 0, & p.p.\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Remarque 10 *Les résultats des Théorèmes 2.15 et 2.16 peuvent s'étendre au cas où $F, \Phi : \Omega \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N} \to \mathbb{R}$, en utilisant une procédure analogue à celle employée dans la démonstration du Théorème 2.24 (c.f. plus bas).*

[1] Par *quasiaffine* on définit toutes les fonctions Φ t.q. Φ et $-\Phi$ sont quasiconvexes. $\Phi(\xi) = \det \xi$ est un exemple de fonction quasiaffine.

Dém. Soit
$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F(\xi) = 0,\ \Phi(\xi) \leq 0 \right\}.$$

Etape 1: Tout d'abord on va montrer que

$$\operatorname{Rco} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F(\xi) \leq 0,\ \Phi(\xi) \leq 0 \right\}.$$

On note X l'ensemble défini par le membre de droite. Il est clair que $E \subset X$ et que X est rang un convexe; on a donc que $\operatorname{Rco} E \subset X$. Il reste à prouver l'inclusion opposée. Soit $\xi \in X$ fixé et supposons que $F(\xi) < 0$, autrement $\xi \in E$ et le résultat est trivial. Comme Φ est rang un affine, on a que pour tout η, matrice de rang un, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\xi + t\eta) = \Phi(\xi) + t \langle D\Phi(\xi); \eta \rangle .$$

On peut choisir η telle que

$$\langle D\Phi(\xi); \eta \rangle = 0$$

(dans le théorème précedent $\Phi(\xi) = -\det \xi + \delta$ et $D\Phi(\xi) = -adj_{n-1}\xi$) et ceci nous conduit à l'égalité

$$\Phi(\xi + t\eta) = \Phi(\xi),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'après la compacité de E on peut trouver $t_1 < 0 < t_2$ tels que

$$\begin{cases} F(\xi + t\eta) < 0,\ \forall t \in (t_1, t_2) \\ F(\xi + t_i\eta) = 0,\ i = 1, 2 \end{cases} .$$

On peut donc écrire

$$\xi = \frac{t_2}{t_2 - t_1}(\xi + t_1\eta) + \frac{-t_1}{t_2 - t_1}(\xi + t_2\eta)$$

ce qui entraine $\xi \in \operatorname{Rco} E$. On peut même remarquer que

$$\operatorname{int} \operatorname{Rco} E \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F(\xi) \leq 0,\ \Phi(\xi) < 0 \right\}.$$

Etape 2: On veut montrer que $\operatorname{Rco} E$ a la propriété de relaxation par rapport à E. Tout d'abord, du Théorème 10.16 de [21], on peut trouver, pour

$\varepsilon > 0$, une fonction $u_\varepsilon \in C^N(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$, un entier $I = I(\varepsilon)$, $\xi_{\varepsilon,i} \in \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$ et des ensembles disjoints $\Omega_{\varepsilon,i} \subset \Omega$, $1 \leq i \leq I$ tels que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\equiv u, \quad \text{près de } \partial\Omega \\ \|u_\varepsilon - u\|_{N-1,\infty} &\leq \varepsilon \\ D^N u_\varepsilon(x) &\in \operatorname{int}\operatorname{Rco}E, \text{ p.p. dans } \Omega \\ \operatorname{mes}\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^{I}\Omega_{\varepsilon,i}\right) &\leq \varepsilon \\ D^N u_\varepsilon(x) &= \xi_{\varepsilon,j} = \text{constant}, \ x \in \Omega_{\varepsilon,i}. \end{aligned}$$

On veut prouver que pour tout ensemble ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour tout u_ε comme ci-dessus, satisfaisant

$$D^N u_\varepsilon(x) \in \operatorname{int}\operatorname{Rco}E,$$

il existe une suite $u_\nu \in C^N_{piec}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m\right)$ telle que

$$\begin{aligned} &u_\nu \in u_\varepsilon + W_0^{N,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m) \\ &u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_\varepsilon \text{ dans } W^{N,\infty} \\ &D^N u_\nu(x) \in \operatorname{int}\operatorname{Rco}E, \text{ p.p. dans } \Omega \\ &\textstyle\int_\Omega F(D^N u_\nu(x))dx \to 0 \text{ lorsque } \nu \to \infty. \end{aligned}$$

Si $F(\xi) = 0$, on choisit $u_\nu = u_\varepsilon$. On supposera donc que $F(\xi) < 0$ et $\Phi(\xi) < 0$. En utilisant l'hypothèse de compacité, on peut trouver, comme dans l'Etape 1, une matrice η de rang un, $t_1 < 0 < t_2$ tels que (on pose $\xi_t = \xi + t\eta$)

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_t) &= \Phi(\xi) < 0 \\ F(\xi_t) &= F(\xi + t\eta) < 0, \ \forall t \in (t_1, t_2) \\ F(\xi + t_1\eta) &= F(\xi + t_2\eta) = 0. \end{aligned}$$

Le Lemme d'approximation (c.f. Lemme 6.8 de [21]) avec $A = \xi_{t_1+\varepsilon}$ et $B = \xi_{t_2-\varepsilon}$ pour ε suffisamment petit et $\xi = \frac{t_2-\varepsilon}{t_2-t_1-2\varepsilon}A + \frac{-(t_1+\varepsilon)}{t_2-t_1-2\varepsilon}B$ donne immédiatement le résultat. Il est bien d'observer que, comme $\operatorname{rang}(A-B) = 1$,

$$\Phi(A) = \Phi(B) = \Phi(\xi) < 0$$

et la fonction ainsi construite satisfait

$$\operatorname{dist}\left(D^N u_\nu(x), \operatorname{co}\{A, B\}\right) \leq \varepsilon \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Alors, en choisissant ε suffisamment petit, on a $\Phi(Du_\nu) < 0$ et $F(Du_\nu) < 0$, ce qui entraîne

$$D^N u_\nu(x) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E,$$

c'est-à-dire le résultat voulu. En appliquant le Théorème 2.13 on parvient à la thèse du théorème. ■

Remarque 11 *Par* $\operatorname{co}\{A, B\} = [A, B]$ *on note le segment qui joint* A *et* B.

Si l'ensemble E est donné par plusieurs équations, il dévient plus difficile d'établir quand la propriété de relaxation est satisfaite. Le Théorème 2.12 repond à cette question.

Nous allons maintenant adapter d'autres résultats d'existence de [21] au cas des problèmes sous contraintes.

Théorème 2.17 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert et* $F_i, G_j : \mathbb{R}_s^{m \times n^N} \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., I$, $j = 1, ...J$, *des fonctions quasiconvexes. Soit*

$$E = \left\{ \begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F_i(\xi) = 0, \ i = 1, ..., I \\ G_j(\xi) \leq 0, \ j = 1, ..., J \end{array} \right\}.$$

Supposons que

H1) $\operatorname{Rco} E$ *soit compact,*

H2) $\operatorname{Rco} E$ *soit fortement étoilé par rapport à un élément* $\xi_0 \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ *fixé (i.e. pour tout* $\xi \in \operatorname{Rco} E$ *et pour tout* $t \in (0, 1]$, *alors* $t\xi_0 + (1 - t)\xi \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$*).*

Soit $\varphi \in C_{piec}^N(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ *vérifiant*

$$D^N \varphi(x) \in E \cup \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \ \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} F_i(D^N u(x)) = 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \ i = 1, ..., I \\ G_j\left(D^N u(x)\right) \leq 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \ j = 1, ..., J. \end{cases}$$

Dém. Ce résultat découle directement du Téorème 2.13 lorsque $K(E) = \operatorname{Rco} E$. Il faut seulement s'assurer que $\operatorname{Rco} E$ satisfait la propriété de relaxation; le Théorème 2.12 et l'hypothèse H2 nous le prouvent. On pose, pour $\delta \in (0,1]$

$$E_\delta = \delta\xi_0 + (1-\delta)E.$$

Alors, par induction,

$$K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta = \delta\xi_0 + (1-\delta)\operatorname{Rco} E \subset \operatorname{int}\operatorname{Rco} E, \quad \forall\delta \in (0,1].$$

Donc E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation et, en appliquant le Théorème 2.12, on termine la preuve. ■

Comme corollaire nous obtenons immédiatement le résultat d'existence suivant.

Corollaire 2.18 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $F_i, G_j : \mathbb{R}_s^{m\times n^N} \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., I$, $j = 1, ...J$, des fonctions quasiconvexes. Soit*

$$E = \left\{ \begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m\times n^N} : F_i(\xi) = 0, \;\; i = 1, ..., I \\ G_j(\xi) \leq 0, \; j = 1, ..., J \end{array} \right\}.$$

Supposons que $\operatorname{Rco} E$ *soit compact et que* $\operatorname{Rco} E = \operatorname{co} E$. *Soit* $\varphi \in C^N_{piec}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ *vérifiant*

$$D^N\varphi(x) \in E \cup \operatorname{int}\operatorname{Rco} E, \; p.p. \; x \in \Omega,$$

ou $\varphi \in W^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ *et il existe un compact* $L \subset \operatorname{int}\operatorname{Rco} E$ *tel que*

$$D^N\varphi(x) \in L, \; p.p. \; x \in \Omega.$$

Alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_i(D^N u(x)) = 0, & p.p. \; x \in \Omega, \;\; i = 1, ..., I \\ G_j\left(D^N u(x)\right) \leq 0, & p.p. \; x \in \Omega, \;\; j = 1, ..., J. \end{array} \right.$$

Dém. On ne traitera que le cas $\varphi \in C^N_{piec}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ (le cas $\varphi \in W^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ se démontre de manière analogue en appliquant le Corollaire 10.21 de [21]). On suppose, pour éviter le cas trivial, que $\operatorname{int}\operatorname{Rco} E \neq \emptyset$. Le résultat suit directement du Théorème précedent, car $\operatorname{Rco} E$ est fortement étoilé par rapport à un certain $\xi_0 \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$. En effet cette propriété est vraie pour des ensembles convexes et l'est donc aussi pour tout $\xi_0 \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$. ■

Nous terminons cette Section par un théorème plus général, incluant les termes de plus bas ordre.

Théorème 2.19 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $F_i^\delta, G_j^\delta : \Omega \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N} \to \mathbb{R}$, des fonctions quasiconvexes dans la variable ξ et continues dans toutes les variables et aussi par rapport à $\delta \in [0, \delta_0]$, pour un certain $\delta_0 > 0$. Supposons que, pour tout $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}_s^{m\times M}$,*

$$i) \quad \operatorname{int}\operatorname{Rco}\left\{\begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m\times n^N} : F_i^\delta(x,s,\xi) = 0,\ i = 1,...,I \\ G_j^\delta(x,s,\xi) \leq 0,\ j = 1,...,J \end{array}\right\}$$
$$= \left\{\begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m\times n^N} : F_i^\delta(x,s,\xi) < 0,\ i = 1,...,I \\ G_j^\delta(x,s,\xi) < 0,\ j = 1,...,J \end{array}\right\}, \forall \delta \in [0, \delta_0],$$

et qu'il soit borné dans $\mathbb{R}_s^{m\times n^N}$ uniformément par rapport à $x \in \Omega$ et pour autant que s appartienne à un ensemble borné de $\mathbb{R}_s^{m\times M}$;

$$ii) \quad \left\{\begin{array}{c} (x,s,\xi) :\ F_i^\delta(x,s,\xi) = 0,\ i = 1,...,I \\ G_j^\delta(x,s,\xi) \leq 0,\ j = 1,...,J \end{array}\right\}$$
$$\subset \left\{\begin{array}{c} (x,s,\xi) :\ F_i^0(x,s,\xi) < 0,\ i = 1,...,I \\ G_j^0(x,s,\xi) < 0,\ j = 1,...,J \end{array}\right\}, \forall \delta \in (0, \delta_0].$$

Si $\varphi \in C_{piec}^N\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m\right)$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} F_i^0\left(x, D^{[N-1]}\varphi(x), D^N\varphi(x)\right) < 0,\ i = 1,...,I \\ G_j^0\left(x, D^{[N-1]}\varphi(x), D^N\varphi(x)\right) < 0\ j = 1,...,J \end{array}\right., \text{ p.p. } x \text{ dans } \Omega,$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{N,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} F_i^0\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) = 0,\ i = 1,...,I, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ G_j^0\left(x, D^{[N-1]}u(x), D^N u(x)\right) \leq 0,\ j = 1,...,J, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array}\right.$$

Dém. La démonstration est une application des résultats abstraits vus précedemment et de plus, comme (x, s) apparaissent comme des paramètres, on peut les ignorer tout au long de la démonstration. On pose

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ \begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F_i^0(\xi) = 0,\ i = 1, ..., I \\ G_j^0(\xi) \leq 0,\ j = 1, ..., J \end{array} \right\} \\
E_\delta &= \left\{ \begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F_i^\delta(\xi) = 0,\ i = 1, ..., I \\ G_j^\delta(\xi) \leq 0,\ j = 1, ..., J \end{array} \right\} \\
K(E) &= \left\{ \begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F_i^0(\xi) \leq 0,\ i = 1, ..., I \\ G_j^0(\xi) \leq 0,\ j = 1, ..., J \end{array} \right\} \\
K(E_\delta) &= \left\{ \begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F_i^\delta(\xi) \leq 0,\ i = 1, ..., I \\ G_j^\delta(\xi) \leq 0,\ j = 1, ..., J \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Des hypothèses i) et ii) on a que, pour $\delta \in (0, \delta_0]$,

$$\begin{aligned}
K(E_\delta) &= \operatorname{Rco} E_\delta \subset \left\{ \begin{array}{c} \xi \in \mathbb{R}_s^{m \times n^N} : F_i^0(\xi) < 0,\ i = 1, ..., I \\ G_j^0(\xi) < 0,\ j = 1, ..., J \end{array} \right\} \\
&= \operatorname{int} \operatorname{Rco} E = \operatorname{int} K(E).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

On montre que $\operatorname{Rco} E$ a la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$. Par le Théorème 2.12 on pourra conclure que $\operatorname{Rco} E$ a la propriété de relaxation et finalement le Théorème 2.13 nous conduira au résultat. Il nous reste donc à vérifier la propriété d'approximation. On va prouver

(a) $E_\delta \subset \operatorname{Rco} E_\delta \subset \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$, pour tout $\delta > 0$;

(b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\delta \in [0, \delta_0]$

$$\eta \in E_\delta \Rightarrow \operatorname{dist}(\eta; E) \leq \varepsilon$$

(c) si $\eta \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$, alors $\eta \in \operatorname{Rco} E_\delta$, pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit.

Or la propriété (a) est vraie par (2.7). Vérifions la propriété (c); comme $\eta \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i^0(\eta) < 0,\ i = 1, ..., I, \\ G_j^0(\eta) < 0\ j = 1, ..., J \end{array} \right.$$

et donc, pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, par continuité on a

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i^\delta(\eta) \leq 0,\ i = 1, ..., I, \\ G_j^\delta(\eta) \leq 0\ j = 1, ..., J \end{array} \right. \Rightarrow \eta \in \operatorname{Rco} E_\delta.$$

On va prouver la propriété (b). Soit $\varepsilon > 0$. Tout d'abord on trouve un $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \eta \in \operatorname{Rco} E; \\ 0 \leq -F_i^0(\eta) < \rho, \quad \forall i = 1, ..., I \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{dist}(\eta; E) < \varepsilon; \tag{2.8}$$

or le choix

$$\rho(\varepsilon) = \min_{\substack{dist(\eta;E) \geq \varepsilon \\ \eta \in RcoE}} \max_{i=1,...,I} \left\{-F_i^0(\eta)\right\}$$

conduit immédiatement à (2.8). D'après la continuité des F_i^δ par rapport à δ et comme $\operatorname{Rco} E$ est compact, on peut trouver $\delta_0 = \delta_0(\rho) = \delta_0(\varepsilon)$ tel que

$$\left|F_i^\delta(\eta) - F_i^0(\eta)\right| < \rho, \quad \forall \eta \in \operatorname{Rco} E \quad \forall i = 1, ..., I, \quad \forall \delta \in [0, \delta_0].$$

Alors par l'hypothèse (ii) et par les inégalités précédentes, pour tout $i = 1, ..., I$, pour tout $\eta \in E_\delta$ et pour tout $\delta \in [0, \delta_0]$, on a

$$F_i^\delta(\eta) = 0 \Rightarrow 0 \leq -F_i^0(\eta) < \rho \Rightarrow \operatorname{dist}(\eta; E) < \varepsilon,$$

ce qui représente la propriété (b) à prouver et donc la fin de la démonstration du théorème. ∎

2.5 Le cas incompressible

Nous allons maintenant étudier un cas intéressant qui trouve ses motivations non seulement dans les applications (voir Chapitre 4), mais aussi au niveau théorique car les résultats d'existence sont obtenus par une méthode semblable à celle de [21], mais techniquement plus complexe. Il faut aussi dire que des résultats voisins ont été auparavant trouvés par Müller-Sverak [41] en utilisant une idée de Gromov sur l'intégration convexe.

Dans cette Section et dans celles qui suivent, nous considèrerons des sous-ensembles E ou K de la variété $\det \xi = 1$; par conséquent $\operatorname{int} K$ dénotera l'intérieur relatif de K par rapport à la variété.

Dans un premier temps nous adapterons les définitions de la propriété de relaxation et de l'approximation au contexte présent. Nous donnerons la propriété de relaxation sous une forme légèrement plus restrictive qu'auparavant pour éviter des difficultés techniques liées à l'application des théorèmes d'approximation (c.f. [21] chapitre 10) dans ce cas plus compliqué. Soit, pour $\theta > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, W_θ l'ensemble des fonctions $u \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ telles qu'il existe un ensemble ouvert $\Omega_\theta \subset \Omega$ vérifiant $\operatorname{mes}(\Omega - \Omega_\theta) < \theta$ et u affine par morceaux dans Ω_θ. On pourrait considérer un ensemble plus général, mais alors la démonstration serait plus difficile.

Définition 2.20 (Relaxation) *Soient E, $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$. On dit que K a la propriété de relaxation par rapport à E si pour tout ensemble ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour tout u_ξ, une fonction affine avec $Du_\xi(x) = \xi$, satisfaisant*

$$(x, u_\xi(x), Du_\xi(x)) \in \operatorname{int} K,$$

il existe $\theta > 0$ et une suite $u_\nu \in W_\theta$ tels que

$$\begin{aligned}
&u_\nu \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) \\
&u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_\xi \textit{ dans } W^{1,\infty} \\
&(x, u_\nu(x), Du_\nu(x)) \in E \cup \operatorname{int} K, \textit{ p.p. dans } \Omega \\
&\textstyle\int_\Omega \operatorname{dist}\left((x, u_\nu(x), Du_\nu(x)); E\right) dx \to 0 \textit{ lorsque } \nu \to \infty.
\end{aligned}$$

Le théorème suivant constitue le résultat abstrait principal.

Théorème 2.21 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. Soient $F_i, G_j : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $F_i = F_i(x, s, \xi)$, $i = 1, 2..., I$, $G_j = G_j(x, s, \xi)$, $j = 1, ..., J$, continues par rapport à toutes les variables et quasiconvexes par rapport à la variable ξ. Soit $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que*

$$E = \left\{ \begin{array}{c} (x, s, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} : F_i(x, s, \xi) = 0, \ i = 1, ..., I \\ G_j(x, s, \xi) \le 0, \ j = 1, ..., J, \ \det \xi = 1 \end{array} \right\}.$$

On suppose que $\operatorname{Rco} E$ a la propriété de relaxation par rapport à E et qu'il est uniformément borné pour $x \in \Omega$ et lorsque s varie dans un ensemble borné $\mathbb{R}^{n\times n}$. Soit φ une fonction affine telle que

$$(x, \varphi(x), D\varphi(x)) \in E \cup \operatorname{int} \operatorname{Rco} E \textit{ dans } \Omega;$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i(x, u(x), Du(x)) = 0, \ i = 1, ..., I, \textit{ p.p. } x \in \Omega \\ G_j(x, u(x), Du(x)) \le 0, \ i = 1, ..., J, \textit{ p.p. } x \in \Omega \\ \det Du(x) = 1, \textit{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Dém. Etape 1: On observe tout d'abord que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ peut être considéré, sans perte de généralité, borné, autrement on le recouvre avec une famille dénombrable d'ensembles bornés sur chacun desquels on prouve le théorème. Soit alors V la fermeture dans la norme C^0 de l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in W_\theta \text{ pour un certain } \theta > 0,\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \\ \text{et } |u(x)| < R,\ (x, u(x), Du(x)) \in E \cup \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \text{ p.p. dans } \Omega \end{array} \right\}.$$

A noter que $\varphi \in V$ et que V est un espace métrique complet lorsqu'il est induit par la norme C^0. De plus par la semi-continuité inférieure on a

$$V \subset \left\{ \begin{array}{c} u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) : \\ F_i(x, u(x), Du(x)) \leq 0,\ i = 1, ..., I, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ G_j(x, u(x), Du(x)) \leq 0,\ j = 1, ..., J, \quad \det Du(x) = 1, \text{ p.p. } x \in \Omega \end{array} \right\}.$$

Etape 2: Soit pour $u \in V$

$$L(u) = \sum_{i=1}^{I} \int_\Omega F_i(x, u(x), Du(x))\, dx.$$

D'après la quasiconvexité de F_i on a, pour tout $u \in V$,

$$\liminf_{u_s \overset{*}{\rightharpoonup} u,\, u_s \in V} L(u_s) \geq L(u). \tag{2.9}$$

On peut voir immédiatement que pour tout $u \in V$ (on rappelle que dans V on a $\det Du = 1$ et $G_j(x, u(x), Du(x)) \leq 0,\ j = 1, ..., J$)

$$L(u) = 0 \Leftrightarrow (x, u(x), Du(x)) \in E, \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.10}$$

On pose

$$V^k = \left\{ u \in V : L(u) > -\frac{1}{k} \right\};$$

V^k est ouvert (c.f. (2.9)). De plus il est dense dans V. Ceci sera prouvé dans l'Etape 3. Une fois cette propriété établie on pourra déduire, du Théorème des catégories de Baire, que $\cap V^k$ est dense dans V. On aura donc obtenu le résultat de (2.10).
Etape 3: De nouveau, cette étape devient nécessaire lorsque les fonctions F_i et G_i dépendent des termes de plus bas ordre. On fixe les constantes. D'après l'uniforme continuité des F_i et G_i, on a que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut

trouver $\delta = \delta(\varepsilon)$ et $\beta = \beta(R)$ tels que pour tout $x \in \Omega$, pour toutes fonctions mesurables $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_s^{m\times M}$, $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$, satisfaisant

$$|s(x)| \leq R, \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \begin{cases} F_i\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right) \leq 0, \text{ p.p. dans } \Omega, \ i = 1, ..., I, \\ G_j\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right) \leq 0, \text{ p.p. dans } \Omega, \ j = 1, ..., J \\ \det \xi = 1, \text{ p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

alors

$$\operatorname{dist}\left(\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right); E\right) \leq \beta, \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.11}$$

De plus, comme $F_i = 0$ sur E, $\sum F_i$ est petite lorsque $\operatorname{dist}\left(\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right); E\right)$ est petite, et donc

$$\int_\Omega \operatorname{dist}\left(\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right); E\right) dx \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{I} \int_\Omega F_i\left(x, s\left(x\right), \xi\left(x\right)\right) dx \geq -\varepsilon. \tag{2.12}$$

Etape 4: Il reste à montrer que pour tout $u \in V$ et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut trouver $u_\varepsilon \in V^k$ telle que

$$||u_\varepsilon - u|| \leq \varepsilon.$$

On prouvera cette propriété sous l'hypothèse supplémentaire que, pour un certain $\theta > 0$, $u \in W_\theta$ et

$$|u\left(x\right)| < R, \quad \left(x, u\left(x\right), Du\left(x\right)\right) \in E \cup \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Le cas général se déduit de la définition de V. En travaillant sur chaque morceau où u est affine et en posant $u_\varepsilon = u$ sur $\Omega - \Omega_\theta$ on peut supposer que u est affine dans Ω. Soient donc

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \left\{x \in \Omega : \left(x, u\left(x\right), Du\left(x\right)\right) \in E\right\} \\ \Omega_1 &= \Omega - \Omega_0. \end{aligned}$$

De la continuité des F_i, des G_j et du $\det \xi$, on en déduit que Ω_0 est fermé et donc Ω_1 est ouvert. Soit k un entier fixé. Soit $0 < \varepsilon < 1/k$ et choisissons $\delta = \delta(\varepsilon)$ et $\beta = \beta(R)$ comme dans l'Etape 3.

Comme $(x, u(x), Du(x)) \in \operatorname{int} \mathrm{Rco}E$, on utilise la propriété de relaxation et on trouve $\theta > 0$, $u_\nu \in W_\theta$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
u_\nu &\in u + W_0^{1,\infty}(\Omega_1; \mathbb{R}^m) \; ; \\
\|u - u_\nu\|_\infty &\leq \varepsilon, \quad \text{dans } \Omega_1 \\
|u_\nu(x)| &< R, \quad \text{dans } \Omega_1 \\
(x, u_\nu(x), Du_\nu(x)) &\in E \cup \operatorname{int} \mathrm{Rco}E \quad \text{p.p. dans } \Omega_1 \\
\int_{\Omega_1} \operatorname{dist}((x, u_\nu(x), Du_\nu(x)); E)\, dx &\leq \delta.
\end{aligned}$$

On définit alors

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in \Omega_0 \\ u_\nu(x) \text{ si } x \in \Omega_1. \end{cases}$$

A relever que $u_\varepsilon \in Aff_{piec}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, i.e. affine par morceaux,

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon &\in u + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m) \\
\|u_\varepsilon - u\|_\infty &\leq \varepsilon \quad \text{dans } \Omega \\
|u_\varepsilon(x)| &< R, \quad \text{dans } \Omega \\
(x, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x)) &\in E \cup \operatorname{int} \mathrm{Rco}\, E \quad \text{p.p. dans } \Omega.
\end{aligned}$$

Si on utilise, pour simplifier les notations, $\eta_\varepsilon(x) = (x, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x))$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{dist}(\eta_\varepsilon(x); E)\, dx &= \int_{\Omega_0} \operatorname{dist}(\eta_\varepsilon(x); E)\, dx + \int_{\Omega_1} \operatorname{dist}(\eta_\varepsilon(x); E)\, dx \\
&= \int_{\Omega_1} \operatorname{dist}(\eta_\varepsilon(x); E)\, dx \\
&\leq \delta.
\end{aligned}$$

Donc, en combinant (2.11) et (2.12) avec l'inégalité ci-dessus, on obtient le résultat, i.e.

$$L(u_\varepsilon) \geq -\varepsilon > -\frac{1}{k}.$$

■

Si l'ensemble E est défini par une seule équation la propriété de relaxation est plus facile à établir et on a comme conséquence du Théorème 2.21 le résultat suivant:

Théorème 2.22 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. Soit $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ continue, quasiconvexe et coercitive. Si φ est affine et telle que*

$$\begin{cases} F(D\varphi(x)) \leq 0, & p.p.\ x \in \Omega, \\ \det D\varphi(x) = 1, & p.p.\ x \in \Omega, \end{cases}$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\begin{cases} F(Du(x)) = 0, & p.p.\ x \in \Omega \\ \det Du(x) = 1, & p.p.\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Remarque 12 *Noter que le théorème ci-dessus est la version "incompressible" du Théorème 2.15, relatif à la contrainte* $\det \xi > 0$.

Dém. Soit

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{x \in \Omega : F(D\varphi(x)) = 0\} \\ \Omega_1 &= \Omega - \Omega_0 = \{x \in \Omega : F(D\varphi(x)) < 0\}; \end{aligned}$$

on peut observer que, par continuité, Ω_0 est fermé et donc que Ω_1 est ouvert; on peut alors travailler sur ce dernier; en effet dans Ω_0 on peut choisir $u = \varphi$. On applique le théorème abstrait avec

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(\xi) = 0,\ \det \xi = 1\right\}.$$

$$K = \operatorname{Rco} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(\xi) \leq 0,\ \det \xi = 1\right\}.$$

La proposition ci-dessous assure que toutes les hypothèses du Théorème 2.21 sont satisfaites, d'où le résultat. ■

Proposition 2.23 *Soit $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ continue, rang un convexe et coercitive. Soit*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(\xi) = 0,\ \det \xi = 1\right\}.$$

Alors

$$\operatorname{Rco} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(\xi) \leq 0,\ \det \xi = 1\right\}.$$

De plus $\operatorname{Rco} E$ *a la propriété de relaxation par rapport à E.*

Dém. Soit
$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(\xi) = 0,\ \det \xi = 1\right\}.$$

Etape 1 : Il s'agit de montrer que
$$\operatorname{Rco} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(\xi) \leq 0,\ \det \xi = 1\right\}.$$

Soit X l'ensemble formé du membre de droite ci-dessus. Il est clair que $E \subset X$ et que X est rang un convexe; on a donc $\operatorname{Rco} E \subset X$. On va maintenant prouver l'inclusion inverse. Soit $\xi \in X$ fixé. Supposons que $F(\xi) < 0$, autrement $\xi \in E$ et le résultat est trivial. On peut alors trouver $\eta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrice de rang un telle que
$$\det(\xi + t\eta) = \det \xi = 1$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci est facile et découle de l'observation ci-dessous (on rappelle que η est une matrice de rang un):
$$\det(\xi + t\eta) = \det \xi + t\left\langle adj_{n-1}\xi; \eta\right\rangle.$$
On choisit donc η telle que
$$\left\langle adj_{n-1}\xi; \eta\right\rangle = 0. \tag{2.13}$$
De la compacité de E, on en déduit qu'il existe $t_1 < 0 < t_2$ tels que
$$\begin{cases} F(\xi + t\eta) < 0, \ \forall t \in (t_1, t_2) \\ F(\xi + t_i\eta) = 0, \ i = 1, 2. \end{cases}$$
En réécrivant
$$\xi = \frac{t_2}{t_2 - t_1}(\xi + t_1\eta) + \frac{-t_1}{t_2 - t_1}(\xi + t_2\eta)$$
on obtient $\xi \in \operatorname{Rco} E$.
Etape 2 : On veut montrer que pour tout ensemble ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour tout u_ξ, fonction affine avec $Du_\xi(x) = \xi$, satisfaisant
$$Du_\xi(x) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E,$$
il existe une suite $u_\nu \in W_\theta$, pour θ suffisamment petit, tel que
$$\begin{array}{l} u_\nu \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) \\ u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_\xi \text{ dans } W^{1,\infty} \\ Du_\nu(x) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \text{ p.p. dans } \Omega \\ \int_\Omega F(Du_\nu(x))dx \to 0 \text{ lorsque } \nu \to \infty. \end{array}$$

Si $F(\xi) = 0$, on choisit $u_\nu = u_\xi$; on supposera donc par la suite que $F(\xi) < 0$ (et $\det \xi = 1$). En utilisant l'hypothèse de coercitivité, on peut trouver comme dans l'Etape 1, une matrice η de rang un, $t_1 < 0 < t_2$ tels que (on pose $\xi_t = \xi + t\eta$)

$$\begin{aligned} \det(\xi + t\eta) &= \det \xi = 1 \\ F(\xi_t) &= F(\xi + t\eta) < 0, \ \forall t \in (t_1, t_2) \\ F(\xi + t_1\eta) &= F(\xi + t_2\eta) = 0. \end{aligned}$$

Le Lemme d'approximation 2.25 (c.f. plus bas) avec $A = \xi_{t_1+\varepsilon}$ et $B = \xi_{t_2-\varepsilon}$ pour ε suffisamment petit et $\xi = \frac{t_2-\varepsilon}{t_2-t_1-2\varepsilon}A + \frac{-(t_1+\varepsilon)}{t_2-t_1-2\varepsilon}B$ conduit immédiatement au résultat. A noter que dans ce Lemme comme rang$(A - B) = 1$

$$\det A = \det B = \det \xi = 1$$

et la fonction ainsi construite satisfait

$$\operatorname{dist}(Du_\nu(x), \operatorname{co}\{A, B\}) \le \varepsilon \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

on en déduit qu'en choisissant ε suffisamment petit on a $F(Du_\nu) < 0$ (et $\det Du_\nu = 1$) ce qui entraine que

$$Du_\nu(x) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E,$$

comme souhaité. ■

Remarque 13 *Les deux résultats que l'on vient de présenter peuvent s'étendre au cas où* $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, *en utilisant une procédure similaire à celle employée dans la démonstration du Théorème 2.24, qui va suivre.*

La prochaine question est de savoir quand la propriété de relaxation a lieu si l'ensemble E est défini par plusieurs équations. Comme vu dans la Section 2.4 il faut se rappeler la propriété d'approximation. De manière analogue à la section précédente, on peut montrer le théorème suivant:

Théorème 2.24 *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ *un ensemble fermé et borné uniformément pour* $x \in \Omega$ *et pour autant que* s *appartienne à un ensemble borné de* $\mathbb{R}^n$. *Supposons que* $\operatorname{Rco} E$ *ait la propriété d'approximation avec* $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$, *alors* $\operatorname{Rco} E$ *a la propriété de relaxation par rapport à* E.

Dém. Soient donc $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble ouvert et borné, u une fonction affine avec $Du\,(x) = \xi$. On veut montrer que si

$$(x, u(x), Du(x)) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \tag{2.14}$$

alors il existe une suite $u_\nu \in W_\theta$ telle que

$$\begin{array}{l} u_\nu \in u + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) \\ u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ dans } W^{1,\infty} \\ (x, u_\nu(x), Du_\nu\,(x)) \in E \cup \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \text{ p.p. dans } \Omega \\ \int_\Omega \operatorname{dist}\left((x, u_\nu(x), Du_\nu\,(x)); E\right) dx \to 0 \text{ lorsque } \nu \to \infty. \end{array} \tag{2.15}$$

Etape 1: On fixe les constantes. Cette étape est nécessaire lorsqu'il y a dépendence des termes de plus bas ordre.
(i) Comme Ω est un ensemble borné et $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, on peut trouver un $R > 0$ tel que

$$|u(x)| < R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

(ii) L'hypothèse de borne uniforme et celle de continuité, donnent l'existence d'un $r = r(R) > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} (x, v(x), Dv\,(x)) \in \operatorname{Rco} E, \text{ p.p. dans } \Omega \\ |v(x)| \leq R, \ \forall x \in \overline{\Omega} \end{array}\right\} \Rightarrow ||v||_{1,\infty} \leq r$$

pour toute fonction $v \in u + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Donc en particulier $|Du(x)| = |\xi| \leq r$.
(iii) De la continuité uniforme, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$, un entier $H = H(\varepsilon, R) > 0$, des ensembles ouverts, disjoints $\Omega_h \subset \Omega$, $h = 1, ..., H$, dont l'union des fermetures est égale à $\overline{\Omega}$, tels que pour tout $x, y \in \Omega_h$

$$|(y, v(y), Dw\,(x)) - (x, w(x), Dw\,(x))| \leq \varepsilon, \tag{2.16}$$

pour tout $v - w \in W_0^{1,\infty}(\Omega_h; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$||v||_\infty \leq R, \quad ||w||_\infty \leq R, \quad ||v||_{1,\infty} \leq r, \quad ||w||_{1,\infty} \leq r.$$

On fixe $x_h \in \Omega_h$, de (2.14) on a

$$(x_h, u(x_h), \xi) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E.$$

On utilise maintenant la propriété d'approximation pour trouver, pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, des ensembles fermés E_δ et $\mathrm{Rco}E_\delta$ avec

$$(x_h, u(x_h), \xi) \in \mathrm{Rco}E_\delta \subset \mathrm{int}\,\mathrm{Rco}\,E.$$

Etape 2: On gèle les coefficients de plus bas ordre. Soit $\eta > 0$; on verra (c.f. Etape 3) que pour établir la propriété de relaxation, il est suffisant de trouver $u_h \in W_{\theta,h}$ et des ouverts $\widetilde{\Omega}_h \subset \Omega_h$ tels que

$$\begin{cases} \mathrm{mes}(\Omega_h - \widetilde{\Omega}_h) \leq \eta \ \cdot \mathrm{mes}(\Omega_h) \\ u_h \equiv u \text{ près de } \partial\Omega_h \\ \|u_h - u\|_\infty \leq \eta \\ |u_h(x)| < R, \ \forall x \in \overline{\Omega}_h \\ \mathrm{dist}((x_h, u(x_h), Du_h(x)); E_\delta) \leq \eta, \text{ p.p. dans } \widetilde{\Omega}_h, \\ \mathrm{dist}((x_h, u(x_h), Du_h(x)); \mathrm{Rco}\,E_\delta) \leq \eta, \text{p.p. dans } \Omega_h. \end{cases} \tag{2.17}$$

Le fait que $\mathrm{Rco}\,E_\delta \subset \mathrm{int}\,\mathrm{Rco}\,E$, que $\mathrm{dist}((x_h, u(x_h), Du_h(x)); \mathrm{Rco}\,E_\delta) \leq \eta$, p.p. dans Ω_h et (2.16), donnent

$$(x, u_h(x), Du_h(x)) \in \mathrm{int}\,\mathrm{Rco}\,E,$$

pour η, ε suffisamment petits.
En utilisant (2.16) et le fait que E_δ est proche de E, pour δ petit, on obtient, pour η, ε si nécessaire plus petits, la propriété de relaxation et donc le thèse du théorème, en posant

$$u_\nu = u_h \text{ dans } \Omega_h.$$

Etape 3: On prouve (2.17). Par hypothèse

$$(x_h, u(x_h), \xi) \in \mathrm{Rco}\,E_\delta$$

et donc $(x_h, u(x_h), \xi) \in R_J \,\mathrm{co}\, E_\delta$, pour un certain J. On procède par induction sur J. Puisque toutes les constructions sont faites sur Ω_h pour h fixé, on écrira par la suite Ω pour dénoter Ω_h.
Etape 3.1: On commence avec $J = 1$. On écrit

$$Du = \xi = tA + (1-t)B, \ \mathrm{rang}(A - B) = 1,$$

avec

$$(x_h, u(x_h), A), \ (x_h, u(x_h), B) \in E_\delta.$$

Par le Lemme d'approximation 2.25 (c.f. plus bas) on trouve (en posant $\widetilde{\Omega} = \Omega_A \cup \Omega_B$)

$$\begin{cases} u_h \equiv u \text{ près de } \partial\Omega \\ \|u_h - u\|_\infty \leq \varepsilon \\ Du_h(x) = \begin{cases} A & \text{dans } \Omega_A \\ B & \text{dans } \Omega_B \end{cases} \\ \det Du_h(x) = \det A = \det B, \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{dist}\left((x_h, u(x_h), Du_h(x)); \operatorname{Rco} E_\delta\right) \leq \eta, \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où on a utilisé le fait que

$$\operatorname{co}\left\{(x_h, u(x_h), A), (x_h, u(x_h), B)\right\} \subset \operatorname{Rco} E_\delta.$$

Le résultat (2.15) se déduit en choisissant η et δ plus petits si nécessaire.
Etape 3.2: On suppose pour $J > 1$ et

$$(x_h, u(x_h), \xi) \in R_J \operatorname{co} E_\delta.$$

Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$\begin{cases} \xi = tA + (1-t)B, \ \operatorname{rang}(A - B) = 1 \\ (x_h, u(x_h), A), (x_h, u(x_h), B) \in R_{J-1} \operatorname{co} E_\delta \end{cases}.$$

On peut alors appliquer le Lemme d'approximation 2.25 et trouver qu'il existe une fonction à valeurs vectorielles $v \in W_{\eta/2}$ et Ω_A, Ω_B deux ensembles ouverts disjoints tels que

$$\begin{cases} \operatorname{mes}\left(\Omega - (\Omega_A \cup \Omega_B)\right) \leq \eta/2 \cdot \operatorname{mes}(\Omega) \\ v \equiv u \text{ près de } \partial\Omega \\ \|v - u\|_\infty \leq \eta/2 \\ Dv(x) = \begin{cases} A \text{ dans } \Omega_A \\ B \text{ dans } \Omega_B \end{cases} \\ \operatorname{dist}\left((x_h, u(x_h), Dv(x)); \operatorname{Rco} E_\delta\right) \leq \eta, \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On utilise maintenant l'hypothèse d'induction sur Ω_A, Ω_B et A, B. On trouve alors $\widetilde{\Omega}_A, \widetilde{\Omega}_B$, $v_A \in W_{\eta/4}$ dans Ω_A, $v_B \in W_{\eta/4}$ dans Ω_B satisfaisant

$$\begin{cases} \operatorname{mes}(\Omega_A - \widetilde{\Omega}_A),\ \operatorname{mes}(\Omega_B - \widetilde{\Omega}_B) \leq \eta/4 \ \cdot \operatorname{mes}(\Omega) \\ v_A \equiv v \text{ près de } \partial\Omega_A,\ v_B \equiv v \text{ près de } \partial\Omega_B \\ \|v_A - v\|_\infty \leq \eta/2 \text{ dans } \overline{\Omega}_A,\ \ \|v_B - v\|_\infty \leq \eta/2 \text{ dans } \overline{\Omega}_B \\ \operatorname{dist}((x_h, u(x_h), Dv_A(x)); E_\delta) \leq \eta, \text{ p.p. dans } \widetilde{\Omega}_A, \\ \operatorname{dist}((x_h, u(x_h), Dv_B(x)); E_\delta) \leq \eta, \text{ p.p. dans } \widetilde{\Omega}_B, \\ \operatorname{dist}((x_h, u(x_h), Dv_A(x)); \operatorname{Rco} E_\delta) \leq \eta, \text{p.p. dans } \Omega_A, \\ \operatorname{dist}((x_h, u(x_h), Dv_B(x)); \operatorname{Rco} E_\delta) \leq \eta, \text{ p.p. dans } \Omega_B. \end{cases}$$

En posant $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_A \cup \widetilde{\Omega}_B$ et

$$u_h(x) = \begin{cases} v(x) & \text{dans } \Omega - (\Omega_A \cup \Omega_B) \\ v_A(x) & \text{dans } \Omega_A \\ v_B(x) & \text{dans } \Omega_B \end{cases}$$

on a obtenu (2.15) en choisissant η et δ, si nécessaire, plus petits, et finalement le résultat. ■

2.6 Le lemme d'approximation

Le résultat suivant est essentiellement dû à Müller-Sverak [41] et représente une extension du lemme classique (c.f. par exemple Lemma 6.8 dans [21]) pour traiter la contrainte du déterminant. Nous donnerons une preuve similaire à celle de Müller-Sverak avec cependant quelques variations.

Lemme 2.25 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert de mesure finie. Soient $t \in [0,1]$ et $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec rang $(A - B) = 1$ et $\det A = \det B > 0$. Soit φ telle que*

$$D\varphi(x) = tA + (1-t)B, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ et deux ensembles ouverts, disjoints $\Omega_A, \Omega_B \subset \Omega$, tels que

$$\begin{cases} \left|\operatorname{mes}\Omega_A - t\operatorname{mes}\Omega\right|, \left|\operatorname{mes}\Omega_B - (1-t)\operatorname{mes}\Omega\right| \leq \varepsilon \\ u \equiv \varphi \textit{ près } \partial\Omega \\ \|u - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon \\ Du(x) = \begin{cases} A & \textit{dans } \Omega_A \\ B & \textit{dans } \Omega_B \end{cases} \\ \det Du(x) = \det A = \det B, \quad \textit{dans } \Omega \\ \operatorname{dist}\left(Du(x), \operatorname{co}\{A, B\}\right) \leq \varepsilon, \quad \textit{dans } \Omega. \end{cases}$$

Dém. On montrera le résultat en deux étapes.
Etape 1: Tout d'abord, on suppose que

$$D\varphi = tA + (1-t)B = I$$

et donc $\det A = \det B = 1$. On suppose aussi (ces hypothèses seront enlevées dans l'Etape 2) que la matrice est de la forme

$$A - B = \alpha \otimes e_1$$

où $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\alpha = (0, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, i.e.

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ \alpha_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_n & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

On peut exprimer Ω comme une union de cubes avec des faces parallèles aux axes de coordonnées et comme un ensemble de petite mesure. Alors, en posant $u \equiv \varphi$ sur l'ensemble de petite mesure, et par homothéties et translations, on peut se restreindre à travailler avec pour Ω le cube unitaire. Soit Ω_ε un ensemble contenu de façon compacte dans Ω et soit $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ et $L > 0$ tels que

$$\begin{cases} \operatorname{mes}(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon/2 \\ 0 \leq \eta(x) \leq 1, \ \ \forall x \in \Omega \\ \eta(x) = 1, \ \ \forall x \in \Omega_\varepsilon \\ |D\eta(x)| \leq L/\varepsilon, \ \ \forall x \in \Omega - \Omega_\varepsilon \\ |D^2\eta(x)| \leq L/\varepsilon^2, \ \ \forall x \in \Omega - \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.18}$$

Définissons une fonction C^∞ $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ de cette façon: étant donné $\delta > 0$, on partage l'intervalle $(0,1)$ en une union finie de trois sous-intervalles ouverts, disjoints I_A, I_B, J tels que

$$\begin{cases} \overline{I}_A \cup \overline{I}_B \cup \overline{J} = [0,1] \\ \operatorname{mes} I_A = t - \delta, \ \operatorname{mes} I_B = 1 - t - \delta \\ v''(x_1) = \begin{cases} (1-t) \ \text{si } x_1 \in I_A \\ -t \ \text{si } x_1 \in I_B \end{cases} \\ v''(x_1) \in [-t, (1-t)], \ \forall x_1 \in (0,1) \\ |v(x_1)|, |v'(x_1)| \leq \delta, \ \forall x_1 \in (0,1) \ . \end{cases}$$

On pose alors

$$\Omega_A = \{x \in \Omega_\varepsilon : \ x_1 \in I_A\}, \ \ \Omega_B = \{x \in \Omega_\varepsilon : \ x_1 \in I_B\}$$

et on observe qu'en choissant δ suffisamment petit on a

$$|\mathrm{mes}\,\Omega_A - t\,\mathrm{mes}\,\Omega|, |\mathrm{mes}\,\Omega_B - (1-t)\mathrm{mes}\,\Omega| \leq \varepsilon.$$

On définit ensuite $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} V(x) &= v'(x_1)\,\eta(x)\ (0, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ &\quad + v\ (x_1)\,(-\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i}, \alpha_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \alpha_3 \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, ..., \alpha_n \frac{\partial \eta}{\partial x_1}). \end{aligned}$$

On remarque alors que $V \in C^\infty$ et que cette application a les propriétés suivantes (où on a considéré δ suffisamment petit, de l'ordre de ε^3)

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,V &\equiv 0 \text{ dans } \Omega \\ V &\equiv 0 \text{ près de } \partial\Omega \\ |V|, |DV - v''\eta\,\alpha \otimes e_1| &\leq \varepsilon^2 \text{ dans } \Omega \\ DV &= \begin{cases} (1-t)\alpha \otimes e_1, \text{ dans } \Omega_A \\ -t\,\alpha \otimes e_1, \text{ dans } \Omega_B. \end{cases} \end{aligned}$$

Voyons par exemple quelques unes de ces propriétés. Commençons par montrer que $\mathrm{div}\,V \equiv 0$ dans Ω. On a

$$\mathrm{div} V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i},$$

où

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = v'(x_1)\left(-\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right) + v(x_1)\left(-\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_i}\right)$$

et, pour $i \neq 1$,

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \alpha_i v'(x_1)\,\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + v(x_1)\,\alpha_i \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_i}.$$

Par conséquent, dans Ω,

$$\mathrm{div}\,V \equiv 0.$$

Le fait que $V \equiv 0$ près de $\partial\Omega$ est facile. En estimant de plus $|V|$ on trouve bien

$$|V| \leq \varepsilon^2 \text{ dans } \Omega, \tag{2.19}$$

car $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\forall x \in \Omega$, $|D\eta(x)| \leq L/\varepsilon$, $\forall x \in \Omega - \Omega_\varepsilon$ et $D\eta(x) \equiv 0$, pour $x \in \Omega_\varepsilon$. De plus du fait que $|v(x_1)|, |v'(x_1)| \leq \delta$, $\forall x_1 \in (0,1)$, on en déduit (2.19), en choisissant par exemple δ de l'ordre de ε^3.
En ce qui concerne la dernière propriété, comme on a défini (on procèdera seulement pour Ω_A, le cas relatif à Ω_B étant analogue)

$$\Omega_A = \{x \in \Omega_\varepsilon : \ x_1 \in I_A\},$$

on a que $\eta(x) \equiv 1$, par conséquent

$$V = v'(x_1)\,(0, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Comme

$$v''(x_1) = 1 - t, \quad \text{si } x_1 \in \Omega_A,$$

on en déduit

$$DV = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2(1-t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n(1-t) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (1-t)\alpha \otimes e_1.$$

A ce moment, on peut définir u comme le flot associé au champ vectoriel V (ceci représente une procédure standard pour construire une application qui preserve le déterminant), i.e.

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}u(s,x) = V(u(s,x)), \ s \in [0,1] \\ u(0,x) = x. \end{cases} \tag{2.20}$$

Il s'agira de montrer maintenant que l'application $u(x) = u(1,x)$ satisfait les propriétés voulues.
1) En effet comme $V \equiv 0$ près de $\partial\Omega$ on a, par unicité de la solution du système différentiel, que

$$u(s,x) \equiv x, \ \forall s \in [0,1]$$

et donc la condition au bord pour u est satisfaite (on rappelle que par hypothèse on considère le cas $\varphi(x) = x$).

2) Comme $|V| \leq \varepsilon^2$ on peut en déduire que

$$|u(s,x) - x| = \left| \int_0^s V(u(\sigma, x))d\sigma \right| \leq \varepsilon^2 s, \ \forall s \in [0,1], \ \forall x \in \Omega. \tag{2.21}$$

3) Si $x \in \Omega_A \cup \Omega_B$ alors

$$V = v'(x)\,(0, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

et donc par unicité de la solution on trouve

$$u(s,x) = x + s\,v'(x_1)\,\alpha, \ \forall s \in [0,1].$$

Par conséquent

$$Du(x) = D_x u(1,x) = I + v''(x_1)\alpha \otimes e_1 = \begin{cases} A & \text{dans } \Omega_A \\ B & \text{dans } \Omega_B \end{cases}.$$

4) Comme $\operatorname{div} V \equiv 0$ dans Ω on a automatiquement que (c.f. par exemple [13] page 28)

$$\det D_x u(s,x) \equiv 1, \ \forall s \in [0,1], \ \forall x \in \Omega.$$

5) Finalement il reste à montrer que

$$\operatorname{dist}\left(Du(x), \operatorname{co}\{A, B\}\right) \leq \varepsilon \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On pose

$$L(x) = v''(x_1)\,\eta(x)\ \alpha \otimes e_1.$$

D'après (2.20) on a

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} D_x u(s,x) = DV(u(s,x)) D_x u(s,x), \ s \in [0,1] \\ D_x u(0,x) = I \end{cases}$$

et on compare la solution de ce système avec celle du système

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} F(s,x) = L(x)\,F(s,x), \ s \in [0,1] \\ F(0,x) = I. \end{cases}$$

En utilisant les propriétés de V et (2.21) on trouve que

$$|F(s,x) - D_x u(s,x)| \leq \varepsilon, \ \forall s \in [0,1], \ \forall x \in \Omega.$$

La conclusion alors suit après avoir observé que

$$F(s,x) = e^{sL(x)} = I + sv''(x_1)\,\eta(x)\;\alpha\otimes e_1,\;\; s\in[0,1]$$

et que $\eta\in[0,1]$, $v''\in[-t\,,(1-t)\,]$.
Etape 2: On considère maintenant le cas général. Comme $A-B$ est une matrice de rang un, on peut trouver $a,b\in\mathbb{R}^n$ (en remplacant a par $|b|\,a$ on peut supposer que $|b|=1$) tels que

$$C^{-1}A - C^{-1}B = a\otimes b.$$

où $C = D\varphi = tA + (1-t)\,B$. On peut alors trouver $R=(r_{ij})\in SO\,(n)\subset\mathbb{R}^{n\times n}$ (i.e., une rotation) de façon que $b=e_1R$ et donc $e_1 = bR^T$, où $e_1=(1,0,...,0)$. Il est facile de voir que si $n=2$, alors on peut prendre

$$R = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix},$$

où $b=(b_1,b_2)$. Supposons maintenant $n\geq 2$; comme on veut $b=e_1R$, on déduit immédiatement que, en notant

$$R = \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix},\quad \text{avec } r^i = (r_1^i,...,r_n^i),$$

$$r^1 \equiv b.$$

Ensuite, en utilisant le théorème de Gram-Schmidt, on peut completer la matrice R avec des vecteurs orthonormés $r^2,...,r^n$ tels que $r^2,...,r^n\perp r^1\equiv b$. On pose alors $\widetilde{\Omega} = R\Omega$ et

$$\widetilde{A} = RC^{-1}AR^T \quad\text{et}\quad \widetilde{B} = RC^{-1}BR^T.$$

On observe que par construction,

$$\begin{aligned}\widetilde{A}-\widetilde{B} &= R\left(C^{-1}A - C^{-1}B\right)R^T = R(a\otimes b)R^T \\ &= R(a\otimes e_1R)R^T = Ra\otimes e_1.\end{aligned}$$

En posant $\alpha = Ra$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{A}-\widetilde{B} &= \alpha\otimes e_1 \\ t\widetilde{A} + (1-t)\widetilde{B} &= I.\end{aligned}$$

A noter que ceci implique en particulier que $\alpha_1 = 0$ (comme $\det \widetilde{A} = \det \widetilde{B} = 1$) et donc $\alpha = (0, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. On applique alors l'Etape 1 à $\widetilde{\Omega}$ et à $\widetilde{\varphi}(y) = RC^{-1}\varphi\left(R^T y\right)$ et on trouve $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{B}}$ et $\widetilde{u} \in C^\infty(\overline{\widetilde{\Omega}}; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant aux propriétés voulues. On pose

$$u(x) = CR^T \widetilde{u}(Rx), \quad x \in \Omega.$$

On remarque, par ailleurs, que

$$Du(x) = CR^T D\widetilde{u}(Rx)R.$$

Finalement en posant

$$\begin{cases} u(x) = CR^T \widetilde{u}(Rx), & x \in \Omega \\ \Omega_A = R^T \widetilde{\Omega}_{\widetilde{A}}, & \Omega_B = R^T \widetilde{\Omega}_{\widetilde{B}}, \end{cases}$$

on arrive au résultat voulu. ■

2.7 Quelques propriétés des enveloppes polyconvexes

Nous terminons ce chapitre par quelques considérations sur les ensembles polyconvexes (c.f. Section 2.2.2). Nous avons essayé de généraliser au cas des enveloppes polyconvexes des concepts tels que la jauge, la fonction de Choquet et le Théorème de Minkowski (connu en dimension infinie comme Théorème de Krein-Milman), qui se révèlent des instruments très importants dans l'analyse convexe classique.

Pour commencer voici un premier théorème qui définit la jauge d'un ensemble polyconvexe.

Théorème 2.26 *Soit $K \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ un ensemble polyconvexe non vide et soit*

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in K \\ +\infty, & si\ x \notin K \end{cases}$$

sa fonction indicatrice. Soit $H : \mathbb{R}^{\tau(m,n)} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$H(\xi) = \sup_{x \in K} \{\langle T(x); \xi \rangle\}.$$

Alors on peut montrer les résultats suivants:

(1) H est semicontinue inférieurement, convexe et positivement homogène de degré un.

(2) Si K est fermé et si $H^* : \mathbb{R}^{\tau(m,n)} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est la fonction conjuguée de H (i.e. $H^*(\xi^*) = \sup\{\langle \xi^*;\xi\rangle - H(\xi)\}$) alors

$$\begin{array}{rcl} \chi_K(x) & = & H^*(T(x)) \\ K & = & \left\{x \in \mathbb{R}^{m\times n} : H^*(T(x)) \leq 0\right\}. \end{array}$$

(3) Si $0 \in K$ alors $H(\xi) \geq H(0) = 0$. De plus si K est compact alors H ne prend que des valeurs finies.

(4) Si $0 \in \operatorname{int} K$ et si K est compact alors

$$H(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0;$$

et dans ce cas

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^{m\times n} : H^0(T(x)) \leq 1\right\},$$

où H^0 est la fonction polaire de H (appelée jauge de K), i.e.

$$H^0(\xi^*) = \sup_{\xi\neq 0}\left\{\frac{\langle \xi^*;\xi\rangle}{H(\xi)}\right\}.$$

Remarque 14 *(1) Lorsque $m = n = 2$ on a $H : \mathbb{R}^{2\times 2}\times\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ donnée par*

$$H(\xi,\delta) = \sup_{x\in K}\{\langle x;\xi\rangle + \delta \det x\}$$

et

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^{2\times 2} : H^*(x, \det x) \leq 0\right\}.$$

(2) H^0 est positivement homogène de degré un; cependant ce n'est pas le cas pour la fonction $x \to H^0(T(x))$.

Exemple 2.27 *Soit $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi)$ ses valeurs singulières (c.f. le Chapitre 3)*

$$K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} :\ \lambda_2(\xi) \leq a_2,\ \lambda_1(\xi)\,\lambda_2(\xi) \leq a_1 a_2\right\},$$

qui est un ensemble polyconvexe (c.f. [21]). Alors

$$H^0(\xi^*,\delta^*) = \max\left\{\frac{\lambda_2(\xi^*)}{a_2}, \frac{|\delta^*|}{a_1 a_2}\right\}$$

est une jauge pour K.

Dém. (du Théorème 2.26) (1) Comme K est non vide alors $H > -\infty$. H étant le supremum de fonctions affines, elle est convexe et semicontinue inférieurement. L'homogénéité de degré un de la fonction H ne présente aucune difficulté.
(2) En accord avec le résultat de [14] (c.f. page 199-202) on a

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \chi_K^p(\xi) \\ \chi_K(x) &= \chi_K^{pp}(x) = H^*(T(x)) \end{aligned}$$

et donc le résultat.
(3) Trivial.
(4) On souhaite montrer que si $0 \in \operatorname{int} K$ et si K est compact, alors

$$H(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0.$$

L'implication ($\Leftarrow$) découle de (1); il reste donc à démontrer l'implication réciproque. Soit $x \in \mathbb{R}^{m\times n}$ un point arbitraire. Comme $0 \in \operatorname{int} K$ on en déduit que pour tout ε suffisamment petit alors $\varepsilon x / |x| \in K$ et donc

$$0 = H(\xi) \geq \left\langle T\left(\frac{\varepsilon x}{|x|}\right); \xi \right\rangle \tag{2.22}$$

comme $x \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est arbitraire l'inégalité précédente implique que $\xi = 0$, comme voulu. On va montrer seulement le cas $m = n = 2$, puis on indiquera comment procéder dans le cas général. L'inégalité (2.22) peut alors s'écrire (avec $\xi = (x^*, \delta)$)

$$0 = H(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{|x|}\langle x; x^* \rangle + \varepsilon^2 \delta \frac{\det x}{|x|^2},\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

En divisant par ε et en le laissant tendre vers 0, on a

$$\begin{cases} \langle x; x^* \rangle = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 2} \\ \delta \det x \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{cases}$$

donc $(x^*, \delta) = (0, 0)$.
Discutons brièvement le cas général. Soit $\xi = (x_1^*, ..., x_{m\wedge n}^*)$. Observer que

$$T\left(\frac{\varepsilon x}{|x|}\right) = \left(\frac{\varepsilon x}{|x|}, \frac{\varepsilon^2 adj_2 x}{|x|^2}, ..., \frac{\varepsilon^{m\wedge n}\, adj_{m\wedge n} x}{|x|^{m\wedge n}}\right)$$

et donc (on note par $adj_1 x$ la matrice x)

$$0 = H(\xi) \geq \sum_{s=1}^{m\wedge n} \frac{\varepsilon^s}{|x|^s} < adj_s x; x_s^* >, \ \forall x \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

En divisant par ε et en le laissant tendre vers 0, on a

$$< adj_1 x; x_1^* > \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

ce qui implique immédiatement que

$$x_1^* \equiv 0.$$

En réitérant le processus on trouvera que

$$< adj_s x; x_s^* > \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \forall s = 2, ..., m \wedge n,$$

qui conduit de manière analogue à

$$x_s^* \equiv 0, \quad \forall s = 2, ..., m \wedge n \tag{2.23}$$

et donc au résultat.
La dernière égalité

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m\times n} : H^0 (T(x)) \leq 1 \right\}$$

ne présente pas de difficultés particulières. ■

Dans un deuxième temps on va tenter de définir une fonction qui caractérise les points extrêmes. Dans le cas convexe ceci est connu sous le nom de fonction de Choquet (voir par exemple Pianigiani [42]); mais avant tout on introduit la définition suivante.

Définition 2.28 *Soit $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ un ensemble polyconvexe; on dit que $X \in K$ est un point extrême de K au sens polyconvexe si*

$$\left. \begin{array}{r} T(X) = \sum_{i=1}^{I} t_i T(A_i) \\ t_i > 0 \ avec \ \sum_{i=1}^{I} t_i = 1, \ A_i \in K \end{array} \right\} \Rightarrow A_i = X, \ i = 1, \ldots, I.$$

L'ensemble des points extrêmes de K au sens polyconvexe est noté par K_{ext}^p.

Théorème 2.29 *Soit $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ un ensemble non vide compact polyconvexe et K_{ext}^{p} l'ensemble de ses points extrêmes (au sens polyconvexe). Alors il existe $\varphi : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction polyconvexe telle que*

$$\begin{aligned} K_{ext}^{p} &= \{x \in K : \varphi(x) = 0\} \\ \varphi(x) &\leq 0 \Leftrightarrow x \in K. \end{aligned}$$

Dém. On définit

$$f(x) = \begin{cases} -|x|^2, \text{ si } x \in K \\ +\infty, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

et

$$\varphi(x) = \begin{cases} Pf(x) - f(x), \text{ si } x \in K \\ +\infty, \text{ ailleurs} \end{cases}.$$

Dans le cas convexe il s'agit de la fonction de Choquet. On observe que $\varphi : \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est polyconvexe et que

$$\begin{cases} \varphi(x) \leq 0, \text{ si } x \in K \\ \varphi(x) = 0, \text{ si } x \in K_{ext}^{p} \end{cases}.$$

En effet l'inégalité est claire car f est finie dans K et, par définition, Pf n'est jamais plus grand que f. On montre maitenant que

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K_{ext}^{p}.$$

A noter que si $x \in K$ alors

$$\varphi(x) = |x|^2 + \inf_{x_i \in K} \left\{ \begin{array}{c} -\sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i |x_i|^2 : T(x) = \sum_{i=1}^{\tau+1} t_i T(x_i) \\ t_i \geq 0 \text{ avec } \sum_{i=1}^{\tau+1} t_i = 1 \end{array} \right\}.$$

Donc si $x \in K_{ext}^{p}$, on en déduit, par définition, que dans l'infimum les seuls x_i admissibles sont $x_i = x$; on a donc $\varphi(x) = 0$. On prouve maintenant l'implication réciproque, i.e. $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x \in K_{ext}^{p}$. De la formule de représentation ci-dessus on obtient, comme $\varphi(x) = 0$ et $x \in K$, que

$$|x|^2 = \sup_{x_i \in K} \left\{ \sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i |x_i|^2 : T(x) = \sum_{i=1}^{\tau+1} t_i T(x_i) \right\}.$$

En combinant ceci avec la convexité de le fonction $x \to |x|^2$ on trouve

$$|x|^2 \geq \sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i |x_i|^2 \geq \left| \sum_{i=1}^{\tau(m,n)+1} t_i x_i \right|^2 = |x|^2 ;$$

la convexité stricte de $x \to |x|^2$ implique alors que $x_i = x$. Finalement $x \in K_{ext}^p$. ■

Voici maintenant une version du théorème de Minkowski dans le cas polyconvexe.

Théorème 2.30 *Soit $E \subset \mathbb{R}^{m \times n}$un ensemble compact non vide. Soit E_{ext}^p l'ensemble des points extrêmes (au sens polyconvexe) de* $\operatorname{Pco} E$, *alors*

$$\operatorname{Pco} E = \operatorname{Pco} E_{ext}^p.$$

Dém. On adapte ici une idée de Zhang [49].
Etape 1 : On prouve tout d'abord que, si K est un ensemble compact et polyconvexe, alors il a au moins un point extrême (au sens polyconvexe), i.e. $K_{ext}^p \neq \emptyset$. Soit $\operatorname{co} K$ l'enveloppe convexe de K; c'est un ensemble compact et convexe. Il est connu dans l'analyse convexe que $\operatorname{co} K$ a alors au moins un point extrême (au sens convexe) (c.f par exemple Théorème 11.4 dans [47]). Comme, par définition, chaque point extrême (au sens convexe) est aussi un point extrême au sens polyconvexe, on en déduit le résultat.
Etape 2 : Soit

$$K = \operatorname{Pco} E; \; L = \operatorname{Pco} E_{ext}^p.$$

La seule inclusion non triviale est $K \subset L$. On définit alors

$$\begin{cases} g(X) = \begin{cases} \operatorname{dist}(X; L), \text{ si } X \in K \\ +\infty, \text{ ailleurs} \end{cases} \\ f(X) = Pg(X) \geq 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

On aurait pu prendre, si on voulait une fonction finie partout,

$$\begin{cases} g(X) = [\operatorname{dist}(X; L)]^{(m \wedge n)+1} \\ f(X) = Pg(X) \geq 0. \end{cases}$$

On remarque que

$$L = \{X \in K : f(X) = 0\} \tag{2.25}$$

(ceci résulte de la polyconvexité de L). Soit

$$a = \max\{f(X) : X \in K\} \geq 0. \tag{2.26}$$

On va montrer que $a = 0$ ce qui implique par (2.25) que $K \subset L$ comme voulu. Soit

$$\begin{cases} E_a = \{X \in K : f(X) = a\} \neq \emptyset \\ \widetilde{K} = \operatorname{Pco} E_a \subset K. \end{cases} \tag{2.27}$$

Comme f est polyconvexe et non négative on a

$$\widetilde{K} \subset \{X \in K : 0 \leq f(X) \leq a\}. \tag{2.28}$$

De l'Etape 1 on déduit que

$$\emptyset \neq \widetilde{K}^p_{ext} \subset E_a. \tag{2.29}$$

Supposons dans un premier temps que l'on peut montrer

$$\emptyset \neq \widetilde{K}^p_{ext} \subset E^p_{ext}, \tag{2.30}$$

alors en combinant (2.29), (2.30) et le fait que

$$E^p_{ext} \subset L = \{X \in K : f(X) = 0\}$$

on pourrait alors déduire que

$$\emptyset \neq \widetilde{K}^p_{ext} \subset E_a \cap L.$$

Ceci implique que $a = 0$ et donc $K \subset L$ comme voulu.
Il reste donc à prouver (2.30). Soit alors $\xi \in \widetilde{K}^p_{ext}$ tel que

$$\begin{cases} T(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{I} t_i T(\xi_i) \\ t_i > 0 \text{ avec } \sum\limits_{i=1}^{I} t_i = 1,\ \xi_i \in K \end{cases}$$

et on veut montrer que

$$\xi_i = \xi,\ \forall i = 1, \ldots, I \tag{2.31}$$

ce qui entraîne que $\xi \in E^p_{ext}$ et donc (2.30). En ordonnant différemment les $\xi_i \in K$, si nécessaire, on a

$$\begin{aligned} \xi_i &\in E_a\ (\Leftrightarrow f(\xi_i) = a) \Leftrightarrow i = 1, \ldots, I_1 \\ \xi_i &\in K \diagdown E_a\, (\Rightarrow f(\xi_i) < a) \Leftrightarrow i = I_1 + 1, \ldots, I. \end{aligned}$$

On montre tout d'abord que $I_1 = I$. Si ce n'était pas le cas on aurait de (2.29) et la polyconvexité de f que

$$a = f(\xi) \leq \sum_{i=1}^{I} t_i f(\xi_i) = a \sum_{i=1}^{I_1} t_i + \sum_{i=I_1+1}^{I} t_i f(\xi_i) < a$$

ce qui est absurde, d'où $I_1 = I$. Or comme $\xi \in \widetilde{K}^p_{ext}$ (où $\widetilde{K} = \operatorname{Pco} E_a$) on en déduit (2.31) et donc $\xi \in E^p_{ext}$ terminant ainsi la preuve de (2.30). ■

Chapitre 3

Le cas des valeurs singulières

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous appliquerons les résultats d'existence, developpés dans les sections précédentes, au problème des valeurs singulières, cas parmi les plus intéressants dans des applications physiques liées notamment à des problèmes d'élasticité non linéaire ou de structure optimale. Nous rappelons que les valeurs singulières, dans le cas des matrices symétriques, représentent également les valeurs absolues des courbures principales associées à une surface. Nous nous intérésserons plus précisement au problème n-dimensionnel suivant.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq ... \leq \lambda_n(\xi)$ ses valeurs singulières (c.f. Section 3.2). Soient $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ et

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \lambda_i(\xi) = a_i, \quad i = 1, ..., n\right\}.$$

Les résultats principaux que nous avons obtenus sont les suivants:

$$\mathrm{co}E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \sum_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \sum_{i=\nu}^{n} a_i, \quad \nu = 1, ..., n\right\}$$

$$\mathrm{Pco}E = \mathrm{Rco}E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i, \quad \nu = 1, ..., n\right\},$$

où co$E$ représente l'enveloppe convexe de E et Pco$E$ (resp. Rco$E$) l'enveloppe polyconvexe (resp. rang un convexe) de E (voir Chapitre 2 pour plus de détails).

Il est intéressant de remarquer que, si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, alors

$$\mathrm{co}E = \mathrm{Pco}E = \mathrm{Rco}E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \lambda_n(\xi) \leq a_n\right\}$$

comme déjà observé dans [17], [18]. Lorsque les a_i sont différents il existe un résultat de caractérisation dans [19], [20] pour $n = 2$.
Une conséquence directe des théorèmes vus dans le chapitre précédent nous conduit au théorème d'existence suivant (c.f. Section 3.4).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $a_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ des fonctions continues satisfaisant

$$0 < c \leq a_1(x,s) \leq a_2(x,s) \leq ... \leq a_n(x,s)$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}_+$ et $\forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$. Soit $\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ telle que

$$\prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i\left(D\varphi(x)\right) < \prod_{i=\nu}^{n} a_i(x, \varphi(x)), \quad x \in \Omega, \quad \nu = 1, ..., n,$$

(en particulier $\varphi \equiv 0$), alors il existe (un ensemble dense de) $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} \lambda_i\left(Du(x)\right) = a_i\left(x, u(x)\right), \text{ p.p. } x \in \Omega, \ i = 1, ..., n \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Lorsque $n = 2$ ce système s'écrit de manière équivalente

$$\begin{cases} \left|Du(x)\right|^2 = a_1^2 + a_2^2, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ \left|\det Du(x)\right| = a_1 a_2, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

c'est-à-dire que (3.1) peut être vu comme une combinaison de l'équation eikonale et de l'équation qui assigne la valeur absolue du Jacobien.
Lorsque $a_1 = a_2 = 1$ le système (3.2) implique

$$\begin{cases} \left[(u_x^1 - u_y^2)^2 + (u_y^1 + u_x^2)^2\right]\left[(u_x^1 + u_y^2)^2 + (u_y^1 - u_x^2)^2\right] = 0, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ \\ (u^1, u^2) = (\varphi^1, \varphi^2), \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $u = (u^1(x,y), u^2(x,y))$ et $Du = \begin{pmatrix} u_x^1 & u_y^1 \\ u_x^2 & u_y^2 \end{pmatrix}$.

On voit donc que la fonction cherchée u est soit conforme soit anticonforme. Par conséquent, sous des conditions convenables, il est possible de trouver une telle fonction ayant sur le bord des parties réelles et imaginaires données.

Ensuite nous étudierons un système d'équations du deuxième ordre, notamment

$$\begin{cases} \lambda_i \left(D^2 u\left(x\right)\right) = a_i \left(x, u\left(x\right), Du\left(x\right)\right), \text{ p.p. } x \in \Omega,\ i = 1, ..., n \\ u\left(x\right) = \varphi\left(x\right),\ Du\left(x\right) = D\varphi\left(x\right),\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

qui nous permet de résoudre le problème

$$\begin{cases} \left|\det D^2 u\left(x\right)\right| = f\left(x, u\left(x\right), Du\left(x\right)\right), \text{ p.p. } x \in \Omega \\ u\left(x\right) = \varphi\left(x\right),\ Du\left(x\right) = D\varphi\left(x\right),\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On remarque que ce problème, à cause de la combinaison de conditions de Dirichlet et de Neumann, ne peut être traité à l'aide de l'équation de Monge-Ampère.

Dans le cas du système d'équations d'ordre deux comme celui dans (3.3), i.e. correspondant aux matrices symétriques D^2u, il existe des résultats d'existence, (c.f. [21]), cependant nous n'avons pas réussi à caractériser complètement l'enveloppe rang un convexe, sauf dans le cas $n = 2$.

Finalement nous traiterons le problème des élastomères nématiques (c.f. Section 3.3.4), pour lequel la caractérisation de l'enveloppe rang un convexe est essentiellement une conséquence du cas des valeurs singulières.
Soit $r < 1$ (le cas $r > 1$ peut être traité de manière analogue), soient $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq ... \leq \lambda_n(\xi)$ les valeurs singulières de la matrice $\xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et

$$E = \left\{\xi : \lambda_\nu\left(\xi\right) = r^{\frac{1}{2n}},\ 1 \leq \nu \leq n-1,\ \lambda_n\left(\xi\right) = r^{\frac{(1-n)}{2n}},\ \det \xi = 1\right\}.$$

On prouvera que

$$\begin{aligned} \operatorname{Rco} E &= \left\{\xi : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i\left(\xi\right) \leq r^{(1-\nu)/2n},\ 2 \leq \nu \leq n,\ \det \xi = 1\right\} \\ &= \left\{\xi :\ \lambda_\nu\left(\xi\right) \in \left[r^{1/2n}, r^{(1-n)/2n}\right],\ 1 \leq \nu \leq n,\ \det \xi = 1\right\} \end{aligned}$$

(cette formule de représentation, sous la deuxième forme, a été prouvée dans [27] lorsque $n = 2, 3$; nous considèrerons par la suite un cas légèrement plus général). Le résultat analytique est: étant donné $\xi_0 \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ $(\varphi(x) = \xi_0 x)$ telle que

$$\begin{cases} \lambda_1(Du(x)) = \dots = \lambda_{n-1}(Du(x)) = r^{1/2n}, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ \lambda_n(Du(x)) = r^{(1-n)/2n}, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ \det Du(x) = 1, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

3.2 Valeurs singulières: définitions et propriétés

3.2.1 Valeurs singulières: définitions

Pour souci de simplicité, nous donnerons dans un premier temps une définition de valeurs singulières pour matrices carrées.

Définition 3.1 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; on définit $\lambda_i(A)$, $i = 1, ..., n$, valeurs singulières de A, les valeurs propres de la matrice symétrique, définie positive $\left(A^T A\right)^{1/2}$ i.e. les quantités positives $0 \le \lambda_1(A) \le \lambda_2(A) \le ... \le \lambda_n(A)$.*

En général il est possible de définir les valeurs singulières même pour une matrice rectangulaire (c.f. Définition 3.3). Nous donnerons à ce propos un théorème de décomposition (c.f. Théorème 3.4) qui nous sera utile dans d'autres applications (c.f. Section 4.2) et dont nous préfèrons présenter une démonstration car il est assez rare dans la littérature de trouver, pour des matrices rectangulaires, un théorème qui permette de les décomposer en matrices des valeurs singulières carrée.
Pour toute $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on écrira

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} = (a_1, ..., a_n).$$

Définition 3.2 *On note par $O(m,n)$ l'ensemble des matrices orthogonales $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$, i.e.*

$$R^T R = I_{n\times n}$$

où $I_{n\times n}$ représente la matrice identité sur $\mathbb{R}^{n\times n}$. Lorsque $m = n$, on écrira $O(n) = O(n,n)$.

Remarque 15 *Si $m \neq n$, alors en général*

$$R^T R = I_{n\times n} \nRightarrow RR^T = I_{m\times m}$$

(i.e. $R \in O(m,n) \nRightarrow R^T \in O(n,m)$). Il suffit de considérer

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \in O(3,2)$$

pour voir que

$$R^T R = I_{2\times 2} \quad \textit{mais que} \quad RR^T \neq I_{3\times 3}.$$

Par contre si $m = n$ ces deux propriétés sont equivalentes, i.e. $R \in O(n) \Leftrightarrow R^T \in O(n)$.

On peut alors donner une définition plus générale de la notion de valeur singulière.

Définition 3.3 *(i) Soient $m \leq n$ et $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Les valeurs singulières de A, que l'on notera par $0 \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq ... \leq \lambda_m(A)$, sont définies comme la racine carrée des valeurs propres de la matrice symétrique et semi-définie positive $AA^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$*

(ii) Soient $m \geq n$ et $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Les valeurs singulières de A, que l'on notera par $0 \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$, sont définies comme la racine carrée des valeurs propres de la matrice symétrique et semi-définie positive $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Théorème 3.4 *Cas 1: Soient $2 \leq m \leq n$ et $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ t.q. $0 \leq \lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_m(A)$ soient ses valeurs singulières. Alors il existe $R \in O(m)$ telle que*

$$RA = A' = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix}, \textit{ avec } <\alpha^i, \alpha^j>= 0,\ \forall i \neq j,\ \lambda_i(A) = \left|\alpha^i\right|,\ \forall i = 1, ..., m.$$

De plus il existe $P \in O(n,m)$ t.q.

$$RAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(A) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Cas 2: Si $2 \leq n \leq m$ *et* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*, alors il existe* $R \in O(n)$ *telle que*

$AR = A' = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *, avec* $\langle \alpha_i; \alpha_j \rangle = 0,\ \forall i \neq j,\ \lambda_i(A) = |\alpha_i|,\ \forall i = 1, ..., n.$

De plus il existe $P \in O(n, m)$ *t.q.*

$$PAR = D = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

où $0 \leq \lambda_1(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$ *sont les valeurs singulières de* A.

Dém.
Cas 1*:* On étudie d'abord le cas où $rangA = m$, i.e. $\lambda_i(A) \neq 0,\ \forall i = 1, ..., m$.
Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}.$$

Montrons tout d'abord qu'il est possible de trouver une matrice $R \in O(m)$, t.q.

$$RA = A' = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix}, \alpha^i \in \mathbb{R}^n, < \alpha^i, \alpha^j >= 0,\ i \neq j.$$

En effet la matrice

$$AA^T = \begin{pmatrix} |a^1|^2 & < a^1, a^2 > & \cdots & < a^1, a^m > \\ < a^1, a^2 > & |a^2|^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ < a^1, a^m > & \cdots & & |a^m|^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

est une matrice symétrique et donc diagonalisable, i.e. $\exists R \in O(m)$, t.q.

$$R(AA^T)R^T = D^2, \tag{3.4}$$

où l'on a indiqué par D^2 la matrice (diagonale) des valeurs propres de AA^T, qui coïncide, par définition, avec la matrice (diagonale) des carrés des valeurs singulières de A, i.e.

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^2(A) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Alors il suffit de poser

$$A' = RA$$

et donc de (3.4) on a que

$$A'(A')^T = D^2 \tag{3.5}$$

ce qui implique que $A' = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix}$ est telle que

$$< \alpha^i, \alpha^j >= 0, \; i \neq j.$$

Donc on a prouvé qu'il existe une matrice orthogonale $R \in O(m)$, t.q.

$$RA = A' = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix}, \; \alpha^i \in \mathbb{R}^n, < \alpha^i, \alpha^j >= 0, \; i \neq j.$$

Ensuite il suffit d'appeler

$$P = (D^{-1}A')^T,$$

où

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1(A)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_m(A)} \end{pmatrix},$$

pour avoir que

$$RAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(A) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

et ainsi vérifier la thèse.

Par ce choix de P on a que

$$< p_i, p_j >= \delta_{ij},$$

car

$$< p_i, p_j >=< \frac{(\alpha^i)^T}{\lambda_i(A)}, \frac{(\alpha^j)^T}{\lambda_j(A)} >= 0, \text{ du fait que } < \alpha^i, \alpha^j >= 0, \ i \neq j$$

et

$$|p_i| = \frac{|(\alpha^i)^T|}{\lambda_i(A)} = \frac{|\alpha^i|}{\lambda_i(A)} = 1.$$

En effet $A' = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix}$ est telle que $< \alpha^i, \alpha^j >= 0, \ i \neq j$ et comme $m \leq n$, de (3.5) on a que

$$A'(A')^T = \begin{pmatrix} |\alpha^1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\alpha^m|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^2(A) \end{pmatrix} = D^2,$$

d'où

$$\lambda_i(A) = |\alpha^i|, \ i = 1, ..., m.$$

De même, en appliquant directement la définition,

$$P \in O(n, m) \Leftrightarrow P^T P = I_{m \times m}.$$

Or, de (3.4), on trouve que

$$\begin{aligned} P^T P &= (D^{-1}A')(A'^T D^{-1}) = D^{-1}(RA)A^T R^T D^{-1} \\ &= D^{-1}R(AA^T)R^T D^{-1} = D^{-1}D^2 D^{-1} = I_{m \times m}. \end{aligned}$$

Etudions maintenant le cas où $rangA = k < m$. (Dans la démonstration on a utilisé le fait que $\lambda_i(A) \neq 0, \ \forall i = 1, ..., m$, lorsqu'on a considéré la matrice inversible D pour définir P). Or si $rangA = k < m$, on définit

$$P = \left(\frac{|(\alpha^1)^T|}{\lambda_1(A)}, \frac{|(\alpha^2)^T|}{\lambda_2(A)}, ..., \frac{|(\alpha^k)^T|}{\lambda_k(A)}, p_{k+1}, ..., p_m \right),$$

c'est-à-dire que P est la matrice formée de k vecteurs $p_i = \frac{|(\alpha^i)^T|}{\lambda_i(A)}$, $i = 1, ..., k$ (qui sont orthonormés par le cas précédent) auxquels on rajoute $m - k$ vecteurs orthogonaux correspondant aux $m - k$ zéros de la matrice

$$\widetilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1(A)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\lambda_k(A)} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m-k \end{array}$$

(i.e. $P = (\widetilde{D}^{-1} A')^T$).
Cas 2: Le cas $m \geq n \geq 2$ se traite de façon similaire au cas précédent. On a que si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors il existe $R \in O(n)$ et $P \in O(n, m)$:

$$PAR = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(A) \end{pmatrix} = D \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

3.2.2 Valeurs singulières: quelques propriétés

Proposition 3.5 *Soient* $0 \leq \lambda_1(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$ *les valeurs singulières de* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *alors*

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(A))^2 \\ |adj_s A|^2 &= \sum_{i_1 < ... < i_s} (\lambda_{i_1}(A))^2 ... (\lambda_{i_s}(A))^2 \\ |\det A| &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A) \end{aligned}$$

où $adj_s A \in \mathbb{R}^{\binom{n}{s} \times \binom{n}{s}}$ *représente la matrice obtenue à partir des mineurs* $s \times s$, $2 \leq s \leq n-1$, *de la matrice* A *(c.f. [14] pour les notations).*

En particulier si $n = 3$ *alors*

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}^2 = (\lambda_1(A))^2 + (\lambda_2(A))^2 + (\lambda_3(A))^2$$

$$\begin{aligned}|adj_2 A|^2 &= (\lambda_1(A)\lambda_2(A))^2+(\lambda_1(A)\lambda_3(A))^2+(\lambda_2(A)\lambda_3(A))^2\\ |\det A| &= \lambda_1(A)\lambda_2(A)\lambda_3(A).\end{aligned}$$

Dém. c.f. [21].

On a aussi la proposition suivante, dont la preuve peut être trouvée dans [14] ou dans le Lemme 2.8 de [8].

Proposition 3.6 *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $1 \leq s \leq n$ (par abus de notations on écrit $A = adj_1 A$ et $\det A = adj_n A$) alors*

$$\begin{aligned}adj_s(AB) &= adj_s A\ adj_s B\\ adj_s(A^T) &= (adj_s A)^T.\end{aligned}$$

Ceci implique que si $U \in O(n)$, alors

$$adj_s U \in O\left(\binom{n}{s}\right).$$

Remarque 16 *Des deux propositions précédentes on déduit que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a comme valeurs singulières $0 \leq \lambda_1(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$, et si $1 \leq s \leq n-1$, alors $adj_s A$ a comme valeurs singulières $\lambda_{i_1}(A)...\lambda_{i_s}(A)$ où $1 \leq i_1 < ... < i_s \leq n$.*

On introduit maintenant une inégalité importante due à Von Neumann (c.f. [48] et aussi Mirsky [37]) qu'on utilisera aussi dans le chapitre suivant (c.f. 4.2)

Théorème 3.7 (Von Neumann) *Pour tout $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $0 \leq \lambda_1(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$, $0 \leq \lambda_1(B) \leq ... \leq \lambda_n(B)$ leurs valeurs singulières, on a l'inégalité suivante:*

$$|\operatorname{trace}(AB)| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B). \tag{3.6}$$

Lorsque $n = 2$ on obtient une expression plus simple pour les valeurs singulières que celle de la Proposition 3.5.

Proposition 3.8 *Soient $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $0 \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A)$ ses valeurs singulières, alors*

$$\begin{aligned}
\lambda_1(A) &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{|A|^2 + 2|\det A|} - \sqrt{|A|^2 - 2|\det A|}\right] \\
\lambda_2(A) &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{|A|^2 + 2|\det A|} + \sqrt{|A|^2 - 2|\det A|}\right].
\end{aligned}$$

Pour conclure cette partie consacrée aux propriétés des valeurs singulières nous rappelons un lemme, dont la preuve peut être trouvée dans [21]:

Lemme 3.9 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $0 \leq \lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ ses valeurs singulières. Soient $0 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_n$. Alors la fonction*

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i(A)$$

est convexe;
de plus les fonctions

$$\psi_\nu(A) = \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(A)$$

sont polyconvexes pour tout $\nu = 1, \ldots, n$.

Remarque 17 *Pour que le Lemme soit vrai il faut que les b_i et les λ_i soient ordonnés de la même façon, car par exemple la fonction*

$$A \longmapsto \lambda_1(A) = \min\{\lambda_i(A)\}$$

n'est pas convexe; en effet elle n'est même pas rang un convexe. Il suffit de choisir

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad et \quad t = \frac{1}{2}$$

pour voir que

$$\lambda_1\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) = 5 > \frac{1}{2}\lambda_1(A) + \frac{1}{2}\lambda_1(B) = \frac{9}{2}.$$

3.3 Caractérisation des différentes enveloppes

3.3.1 Le cas non symétrique

Nous donnons ici la démonstration des résultats principaux de ce chapitre qui a donné lieu à la publication [25]. Il existe dans [21] une version plus récente et simplifiée de ces résultats, mais nous avons préféré ici garder la démonstration originale qui a l'avantage d'être constructive et de fournir une décomposition explicite de Rco$E$ et co$E$.

Théorème 3.10 *Soit $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq \ldots \leq \lambda_n(\xi)$ ses valeurs singulières. Soit $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$,*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \lambda_i(\xi) = a_i\,, \quad i = 1\,, \ldots, n\right\}$$

alors

(i) $\mathrm{co}E = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \sum_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \sum_{i=\nu}^{n} a_i\,, \quad \nu = 1\,, \ldots, n\}\,,$

(ii) $\mathrm{Pco}E = \mathrm{Rco}E = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i\,, \quad \nu = 1\,, \ldots, n\}\,,$

(iii) $\mathrm{intRco}E = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\nu}^{n} a_i\,, \quad \nu = 1\,, \ldots, n\}\,.$

Remarque 18 *Lorsque $n = 2$ et $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} :\ \lambda_1(\xi) = a_1,\ \lambda_2(\xi) = a_2\}$ le théorème nous dit que*

$$\mathrm{co}E = \left\{ \begin{array}{l} \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq a_2\,, \\ \qquad\qquad \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) \leq a_1 + a_2 \end{array} \right\}$$

et

$$\mathrm{Pco}E = \mathrm{Rco}E = \left\{ \begin{array}{l} \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq a_2\,, \\ \qquad\qquad \lambda_1(\xi) \cdot \lambda_2(\xi) \leq a_1 \cdot a_2 \end{array} \right\}.$$

Dém. **(i)** Soit $K = \{\xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \sum_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \sum_{i=\nu}^{n} a_i\,, \quad \nu = 1\,, \ldots, n\}\,.$
On va montrer que $\text{co}E = K$. On divise la démonstration en deux étapes.
ETAPE 1: $\text{co}E \subset K$. L'inclusion $\text{co}E \subset K$ est facile. En effet, $E \subset K$ et de la Proposition 2.3, les fonctions $\xi \longmapsto \sum_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi)$ sont convexes. Donc K est convexe et l'on a $\text{co}E \subset K$.
ETAPE 2: $K \subset \text{co}E$. Soit $\xi \in K$, on va prouver que ξ peut être exprimé comme combinaison convexe d'éléments de E, i.e. $\xi \in \text{co}E$.
Comme les fonctions $\xi \longmapsto \lambda_i(\xi)$ sont invariantes par transformations orthogonales, on peut admettre, sans perte de généralité, que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ et $\sum_{i=\nu}^{n} x_i \leq \sum_{i=\nu}^{n} a_i, \quad \nu = 1, \ldots, n.$
On va procéder par induction. On commence par prouver le résultat en dimension $n = 2$.
(i) $n = 2$. On divise ce cas en deux parties:
(a) $x_1 \leq a_1$ et, comme $\xi \in K$, alors $x_2 \leq a_2$ et $x_1 + x_2 \leq a_1 + a_2$.
Comme $-a_1 \leq x_1 \leq a_1$, alors $x_1 = ta_1 + (1-t)(-a_1)$ avec $t = \frac{x_1 + a_1}{2a_1}$. On peut écrire:

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

On procède de façon similaire pour x_2, i.e. $x_2 = sa_2 + (1-s)(-a_2)$, où $s = \frac{x_2 + a_2}{2a_2}$.
On obtient ainsi

$$\begin{pmatrix} \pm a_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \pm a_1 & 0 \\ 0 & +a_2 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} \pm a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

En combinant (3.7) et (3.8) on a que

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{I} t_i \xi_i$$

avec $\lambda_1(\xi_i) = a_1\,,\ \lambda_2(\xi_i) = a_2$ (i.e. $\xi_i \in E$). Donc

$$\xi \in \text{co}E\,.$$

(b) $x_1 \geq a_1$ i.e., comme $\xi \in K$, $a_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq a_2$ et $x_1 + x_2 \leq a_1 + a_2$.
Ceci implique que

$$a_1 \leq x_1 \leq a_1 + a_2 - x_2\,.$$

Dans ce cas il suffit d'interpoler x_1 entre a_1 et $a_1 + a_2 - x_2$, i.e.

$$x_1 = ta_1 + (1-t)(a_1 + a_2 - x_2)$$

ce qui entraîne que

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

La première matrice se traite comme dans le cas (a). Pour la deuxième on va interpoler x_2 entre a_1 et a_2 i.e. $x_2 = sa_2 + (1-s)a_1$ pour trouver

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 - x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

En combinant (3.9) et (3.10) on a prouvé que

$$\xi = \sum_{i=1}^{I} t_i \xi_i$$

avec $\lambda_1(\xi_i) = a_1$, $\lambda_2(\xi_i) = a_2$ (i.e. $\xi_i \in E$). Donc $\xi \in \text{co}E$. Finalement, nous avons obtenu, lorsque $n = 2$, que

$$K \subset \text{co}E.$$

(ii) $n > 2$. On suppose qu'on a montré le résultat jusqu'à $n-1$, i.e. tout ξ tel que $\sum_{i=\nu}^{n-1} \lambda_i(\xi) \leq \sum_{i=\nu}^{n-1} a_i$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ (i.e. $\xi \in K$) peut être exprimé comme combinaison convexe d'éléments de $\{\xi \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} : \lambda_i(\xi) = a_i\, ,\ i = 1, \ldots, n-1\}$ i.e.

$$\xi = \sum_{\mu=1}^{I} t_\mu \xi_\mu$$

avec ξ_μ tel que $\lambda_i(\xi_\mu) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$. On divise la démonstration en cinq parties.

Partie 1 : $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_1 + x_2 \leq a_2$. On va observer que ces conditions impliquent que $x_1 + x_2 \leq a_1 + a_2$ et $x_2 \leq a_2$. On peut donc appliquer le cas $n = 2$ à $\{x_1, x_2\}$ et à $\{a_1, a_2\}$. On utilise l'hypothèse d'induction sur $\{x_3, \ldots, x_n\}$ et sur $\{a_3, \ldots, a_n\}$. En combinant ces deux décompositions on a le résultat, i.e. $\xi \in \mathrm{co}E$.

Partie 2 : $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a_2 \leq x_1 + x_2$. On peut écrire

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & \lambda & & \\ \lambda & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & -\lambda & & \\ -\lambda & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}A_+ + \frac{1}{2}A_- \tag{3.11}$$

où nous avons choisi

$$\lambda^2 = (x_2 - a_2)(x_1 - a_2).$$

A noter que de l'hypothèse $(x_1 \leq x_2 \leq a_2)$ le membre de droite est positif. le choix de λ conduit à

$$\begin{cases} \lambda_1(A_\pm) = a_2\,, \ \lambda_2(A_\pm) = x_1 + x_2 - a_2 \\ \lambda_i(A_\pm) = x_i\,, \ i = 3, \ldots, n \end{cases}$$

et donc on peut trouver deux matrices $O_\pm, O'_\pm \in O(n)$ telles que

$$O_\pm A_\pm O'_\pm = \begin{pmatrix} a_2 & & & & \\ & x_1 + x_2 - a_2 & & & \\ & & x_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_n \end{pmatrix}.$$

Ensuite on applique l'hypothèse d'induction à

$$\{y_1 = x_1 + x_2 - a_2,\, y_2 = x_3,\, \ldots,\, y_{n-1} = x_n\}$$

et à

$$\{b_1 = a_1,\, b_2 = a_3,\, \ldots,\, b_{n-1} = a_n\}.$$

Pour ce faire on observe que

$$0 \leq y_1 = x_1 + x_2 - a_2 \leq x_1 \leq x_3 = y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y_{n-1}$$

et

1) si $\nu \geq 2$, alors $\sum_{i=\nu}^{n-1} y_i = \sum_{i=\nu+1}^{n} x_i \leq \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i = \sum_{i=\nu}^{n-1} b_i$.

2) Si $\nu = 1$, alors $\sum_{i=1}^{n-1} y_i = -a_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \leq -a_2 + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i$. On peut donc déduire (par hypothèse d'induction) que

$$\begin{pmatrix} a_2 & & & & \\ & x_1 + x_2 - a_2 & & & \\ & & x_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{co}E.$$

Comme coE est invariant par transformations orthogonales, on obtient que

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} x_1 & \pm\lambda & & \\ \pm\lambda & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{co}E, \tag{3.12}$$

qui conduit, en combinant (3.11) et (3.12), à

$$\xi \in \mathrm{co}E$$

qui est le résultat voulu.

Partie 3 : $x_{n-1} \geq a_{n-1}$. On écrit

$$\begin{aligned} \xi = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & \\ & & & x_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & \lambda \\ & & \lambda & x_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & -\lambda \\ & & -\lambda & x_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} A_+ + \frac{1}{2} A_- \end{aligned} \tag{3.13}$$

où l'on a choisi

$$\lambda^2 = (x_n - a_{n-1})(x_{n-1} - a_{n-1}).$$

On note que par hypothèse ($x_n \geq x_{n-1} \geq a_{n-1}$) le membre de droite est positif. Comme ci-dessus le choix de λ conduit à l'existence de $O_{\pm}, O'_{\pm} \in O(n)$ telles que

$$O_{\pm} A_{\pm} O'_{\pm} = \begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x_{n-2} & & \\ & & & x_n + x_{n-1} - a_{n-1} & \\ & & & & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ensuite on applique l'hypothèse d'induction à

$$\{y_1 = x_1, \ldots, y_{n-2} = x_{n-2}\, , \, y_{n-1} = x_n + x_{n-1} - a_{n-1}\}$$

et à

$$\{b_1 = a_1, \,.., b_{n-2} = a_{n-2}\, , \, b_{n-1} = a_n\}\, .$$

Pour ce faire on observe que

$$0 \leq y_1 \leq \, \ldots \leq y_{n-2} = x_{n-2} \leq x_n \leq x_n + x_{n-1} - a_{n-1} = y_{n-1}.$$

Par hypothèse et comme $\xi \in K$, nous avons:
1) si $\nu = n - 1\, ,\ y_{n-1} = x_n + x_{n-1} - a_{n-1} \leq a_n$.
2) Si $1 \leq \nu \leq n - 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=\nu}^{n-1} y_i &= x_n + x_{n-1} - a_{n-1} + \sum_{i=\nu}^{n-2} x_i = -a_{n-1} + \sum_{i=\nu}^{n} x_i \\ &\leq -a_{n-1} + \sum_{i=\nu}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=\nu}^{n-2} a_i = \sum_{i=\nu}^{n-1} b_i.\end{aligned}$$

On peut donc déduire de l'hypothèse d'induction et de l'invariance de co$E$ par transformations orthogonales que

$$A_\pm \in \mathrm{co}E,$$

qui combiné avec (3.13) donne

$$\xi \in \mathrm{co}E.$$

Partie 4 : $a_2 \leq x_2 \leq \, \ldots \leq x_{n-1} \leq a_{n-1}$. A noter que ce cas ne se produit que si $n \geq 4$. Observons tout d'abord que l'on peut trouver $k \in \{2, \ldots, n-2\}$ tel que

$$a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1}\, . \tag{3.14}$$

Donc on peut écrire

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A_+ + \frac{1}{2}A_-$$

$$
= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_k & \lambda & & \\ & & \lambda & x_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_k & -\lambda & & \\ & & -\lambda & x_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x_n \end{pmatrix} \tag{3.15}
$$

où l'on a posé

$$
\lambda^2 = (x_k - b)(x_{k+1} - b) \tag{3.16}
$$

avec $b = a_k$ (*Partie 4.1*) ou $b = a_{k+1}$ (*Partie 4.2*). Noter que, de l'hypothèse (3.14), le deuxième membre est positif.

Partie 4.1 : $\begin{cases} a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1} \\ x_k + x_{k+1} + \sum_{i=\nu+1}^n x_i \leq a_k + \sum_{i=\nu}^n a_i\,, \qquad \nu = k+2, \ldots, n \end{cases}$

(avec la convention $\sum_{i=n+1}^n x_i = 0$).

Partie 4.2 : $\begin{cases} a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1} \\ \sum_{i=\mu}^{k-1} x_i + \sum_{i=k+2}^n x_i \leq \sum_{i=\mu+1}^k a_i + \sum_{i=k+2}^n a_i\,, \quad \mu = 1, \ldots, k-1\,. \end{cases}$

Avant de procédér à l'étude des cas ci-dessus, on va montrer que *Partie 4.1* et *Partie 4.2* couvrent toutes les possibilités. En effet, si $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$ et si $\sum_{i=\nu}^n x_i \leq \sum_{i=\nu}^n a_i\,,\ \ \nu = 1, \ldots, n$, alors au moins une des inégalités suivantes est valable

$$
x_k + x_{k+1} + \sum_{i=\nu+1}^n x_i \leq a_k + \sum_{i=\nu}^n a_i\,, \qquad \nu = k+2, \ldots, n;
$$

$$
\sum_{i=\mu}^{k-1} x_i + \sum_{i=k+2}^n x_i \leq \sum_{i=\mu+1}^k a_i + \sum_{i=k+2}^n a_i\,, \qquad \mu = 1, \ldots, k-1\,.
$$

On procède par contradiction et on suppose qu'il existe $\nu \in \{k+2, \ldots, n\}$ et $\mu \in \{1, \ldots, k-1\}$ tels que

$$
x_k + x_{k+1} + \sum_{i=\nu+1}^n x_i > a_k + \sum_{i=\nu}^n a_i
$$

$$\sum_{i=\mu}^{k-1} x_i + \sum_{i=k+2}^{n} x_i > \sum_{i=\mu+1}^{k} a_i + \sum_{i=k+2}^{n} a_i.$$

En sommant ces inégalités et en utilisant l'hypothèse on a

$$\sum_{i=\mu}^{n} a_i + \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i \geq \sum_{i=\mu}^{n} x_i + \sum_{i=\nu+1}^{n} x_i > a_k - a_{k+1} + \sum_{i=\mu+1}^{n} a_i + \sum_{i=\nu}^{n} a_i$$

i.e.

$$a_\mu + a_{k+1} > a_k + a_\nu.$$

Cependant $\mu \in \{1, \ldots, k-1\}$, donc $a_\mu \leq a_k$ et $\nu \in \{k+2, \ldots, n\}$ alors $a_\nu \geq a_{k+1}$. On arrive à

$$a_k + a_{k+1} \geq a_\mu + a_{k+1} > a_k + a_\nu \geq a_k + a_{k+1}$$

ce qui est une contradiction. Pour conclure, la *Partie 4.1* et la *Partie 4.2* couvrent toutes les possibilités. On va maintenant analyser séparément ces deux cas.

Partie 4.1 : $\begin{cases} a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1} \\ x_k + x_{k+1} + \sum_{i=\nu+1}^{n} x_i \leq a_k + \sum_{i=\nu}^{n} a_i , \qquad \nu = k+2, \ldots, n \end{cases}$

(avec la convention $\sum_{i=n+1}^{n} x_i = 0$). On choisit ici $b = a_k$ dans (3.15) et (3.16). On peut, comme avant, trouver $O_\pm, O'_\pm \in O(n)$ telles que

$$O_\pm A_\pm O'_\pm = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & x_{k-1} & & & & & \\ & & & x_k + x_{k+1} - a_k & & & & \\ & & & & a_k & & & \\ & & & & & x_{k+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & x_n \end{pmatrix}.$$

On applique l'hypothèse d'induction à

$$\{y_1 = x_1, \ldots, y_{k-1} = x_{k-1}, y_k = x_k + x_{k+1} - a_k, \; y_{k+1} = x_{k+2}, \ldots, y_{n-1} = x_n\}$$

et à

$$\{b_1 = a_1, \ldots, b_{k-1} = a_{k-1}, b_k = a_{k+1}, \ldots, b_{n-1} = a_n\}.$$

Il faut noter que, comme $a_k \leq x_k$, alors $0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_{k-1} = x_{k-1} \leq x_k + x_{k+1} - a_k = y_k$. Au contraire, *a priori*, on ne peut comparer y_k à $y_{k+1} \leq \ldots \leq y_{n-1}$. On vérifie ensuite l'hypothèse d'induction.
1) Soit $\nu = n-1$. On doit montrer que $y_{n-1} = x_n \leq b_{n-1} = a_n$ et $y_k \leq b_{n-1} = a_n$. La première inégalité est valable par induction tandis que la deuxième se révèle vraie car elle est équivalente à $x_k + x_{k+1} \leq a_k + a_n$ qui est l'hypothèse de la *Partie 4.1* avec $\nu = n$.
2) Soit $n-2 \geq \nu \geq k+1$. On a encore par hypothèse de la *Partie 4.1* et comme $\xi \in K$

$$\begin{cases} \sum_{i=\nu}^{n-1} y_i = \sum_{i=\nu+1}^{n} x_i \leq \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i = \sum_{i=\nu}^{n-1} b_i \\ y_k + \sum_{i=\nu+1}^{n-1} y_i = x_k + x_{k+1} - a_k + \sum_{i=\nu+2}^{n} x_i \leq \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i = \sum_{i=\nu}^{n-1} b_i \,. \end{cases}$$

3) Si $k \geq \nu \geq 1$,

$$\sum_{i=\nu}^{n-1} y_i = \sum_{i=\nu}^{k-1} y_i + \sum_{i=k}^{n-1} y_i = \sum_{i=\nu}^{k-1} x_i + \sum_{i=k}^{n} x_i - a_k \leq \sum_{i=\nu}^{n} a_i - a_k = \sum_{i=\nu}^{n-1} b_i \,.$$

Donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction et l'invariance de co$E$ par transformations orthogonales pour avoir

$$A_{\pm} \in \mathrm{co}E \,. \tag{3.17}$$

En combinant (3.15) et (3.17) on obtient enfin que

$$\xi \in \mathrm{co}E.$$

Partie 4.2 : $$\begin{cases} a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1} \\ \sum_{i=\mu}^{k-1} x_i + \sum_{i=k+2}^{n} x_i \leq \sum_{i=\mu+1}^{k} a_i + \sum_{i=k+2}^{n} a_i \,, \quad \mu = 1, \ldots, k-1 \,. \end{cases}$$
Ici on choisit $b = a_{k+1}$ dans (3.15) et (3.16). On peut, comme avant, trouver

$O_\pm, O'_\pm \in O(n)$ telles que

$$O_\pm A_\pm O'_\pm = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & x_{k-1} & & & & & \\ & & & x_k + x_{k+1} - a_{k+1} & & & & \\ & & & & a_{k+1} & & & \\ & & & & & x_{k+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & x_n \end{pmatrix}.$$

On applique l'hypothèse d'induction à

$$\{y_1 = x_1, \ldots, y_{k-1} = x_{k-1}, y_k = x_k + x_{k+1} - a_{k+1}, y_{k+1} = x_{k+2}, \ldots, y_{n-1} = x_n\}$$

et à

$$\{b_1 = a_1, \ldots, b_{k-1} = a_{k-1}, b_k = a_k, b_{k+1} = a_{k+2}, \ldots, b_{n-1} = a_n\}.$$

On observe que, comme $x_{k+1} \leq a_{k+1}$, on a $y_k = x_k + x_{k+1} - a_{k+1} \leq x_k \leq x_{k+2} = y_{k+1} \leq \ldots \leq y_{n-1}$. Au contraire, *a priori*, on ne peut comparer y_k à $0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_{k-1}$. On va ensuite vérifier l'hypothèse d'induction. Comme $\xi \in K$ et par l'hypothèse de la *Partie 4.2* on a
1) Si $\nu \geq k+1$, $\sum_{i=\nu}^{n-1} y_i = \sum_{i=\nu+1}^{n} x_i \leq \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i = \sum_{i=\nu}^{n-1} b_i$.
2) Si $\nu = k$,

$$\begin{cases} \sum_{i=k}^{n-1} y_i = -a_{k+1} + \sum_{i=k}^{n} x_i \leq -a_{k+1} + \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n-1} b_i \\ y_{k-1} + \sum_{i=k+1}^{n-1} y_i = x_{k-1} + \sum_{i=k+2}^{n} x_i \leq a_k + \sum_{i=k+2}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n-1} b_i. \end{cases}$$

3) Si $k-1 \geq \nu \geq 1$,

$$\begin{cases} \sum_{i=\nu}^{n-1} y_i & = & -a_{k+1} + \sum_{i=\nu}^{n} x_i \leq -a_{k+1} + \sum_{i=\nu}^{n} a_i = \sum_{i=\nu}^{n-1} b_i \\ \sum_{i=\nu-1}^{k-1} y_i & + & \sum_{i=k+1}^{n-1} y_i = \sum_{i=\nu-1}^{k-1} x_i + \sum_{i=k+2}^{n} x_i \leq \sum_{i=\nu}^{k} a_i + \sum_{i=k+2}^{n} a_i \\ & = & \sum_{i=\nu}^{n-1} b_i. \end{cases}$$

On applique l'hypothèse d'induction pour avoir

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & x_{k-1} & & & & & \\ & & & x_k + x_{k+1} - a_{k+1} & & & & \\ & & & & a_{k+1} & & & \\ & & & & & x_{k+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{co}E\,.$$

L'invariance par transformations orthogonales conduit immédiatement à

$$A_\pm \in \mathrm{co}E\,. \tag{3.18}$$

En combinant (3.15) et (3.18) on a ainsi obtenu que

$$\xi \in \mathrm{co}E\,.$$

Dém. de (ii) Soit $X = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \prod_{i=\nu}^n \lambda_i(\xi) \le \prod_{i=\nu}^n a_i\,, \quad \nu = 1\,,\ldots,n\}$. On va prouver que $X = \mathrm{Rco}E$. On divise la démonstration en deux étapes.
ETAPE 1: $\mathrm{Rco}E \subset X$. On observe que $E \subset X$ et, de la Proposition 2.3 , les fonctions $\xi \longmapsto \Pi_{i=\nu}^n \lambda_i(\xi)$, $\nu = 1, \ldots, n$ sont polyconvexes (et donc rang un convexes). On déduit que X est polyconvexe et donc

$$\mathrm{Rco}E \subset \mathrm{Pco}E \subset X\,.$$

ETAPE 2: $X \subset \mathrm{Rco}E$. Soit $\xi \in X$, on prouvera que $\xi \in \mathrm{Rco}E$. Comme les fonctions $\xi \longmapsto \lambda_i(\xi)$ sont invariantes par transformations orthogonales, on peut admettre, sans perte de généralité, que

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

avec $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ et $\Pi_{i=\nu}^n x_i \le \Pi_{i=\nu}^n a_i, \quad \nu = 1, \ldots, n$.
On montrera le résultat par induction. On commence la preuve en dimension $n = 2$. Noter que cette démonstration dans ce cas est plus simple que dans [18].
(i) $n = 2$. On écrit

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & \lambda \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & -\lambda \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A_+ + \frac{1}{2}A_- \tag{3.19}$$

(on observe que $\text{rang}(A_+ - A_-) \le 1$) et l'on choisit

$$\lambda^2 = \frac{(a_2^2 - x_2^2)(a_2^2 - x_1^2)}{a_2^2}.$$

Il convient de remarquer aussi que le membre de droite est positif par induction ($0 \le x_1 \le x_2 \le a_2$).
Ceci nous amène à $\lambda_1(A_\pm) = \frac{x_1 x_2}{a_2}$, $\lambda_2(A_\pm) = a_2$. Donc $\exists\, O_\pm, O'_\pm \in O(2)$ telles que

$$O_\pm A_\pm O'_\pm = \begin{pmatrix} \frac{x_1x_2}{a_2} & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Cependant on a

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1x_2}{a_2} & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} + \frac{x_1x_2}{2a_1a_2}\right)\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x_1x_2}{2a_1a_2}\right)\begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1x_2}{a_2} & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{R_1co}E \subset \mathrm{Rco}E\,.$$

Comme $\mathrm{Rco}E$ est invariant par transformations orthogonales , on déduit que

$$A_\pm = \begin{pmatrix} x_1 & \pm\lambda \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E\,. \tag{3.20}$$

Finalement, en combinant (3.19) et (3.20), on obtient que

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E$$

qui est le résultat voulu.
(ii) $n > 2$. On divise la démonstration en quatre parties.
Partie 1: $x_2 \le a_2$. On écrit

$$\begin{aligned}\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & \lambda & & \\ 0 & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & -\lambda & & \\ 0 & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}A_+ + \frac{1}{2}A_- \end{aligned} \tag{3.21}$$

(observer que rang$(A_+ - A_-) \leq 1$) et l'on définit λ par:

$$\lambda^2 = \frac{(a_2^2 - x_2^2)(a_2^2 - x_1^2)}{a_2^2}.$$

Or le deuxième membre est positif par induction ($0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a_2$). Le choix de λ (comme dans le cas $n = 2$) nous conduit à l'existence de $O_\pm, O_\pm' \in O(n)$ telles que

$$O_\pm A_\pm O_\pm' = \begin{pmatrix} a_2 & & & & \\ & \frac{x_1x_2}{a_2} & & & \\ & & x_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_n \end{pmatrix}.$$

On applique l'hypothèse d'induction à

$$\{y_1 = \frac{x_1x_2}{a_2},\ y_2 = x_3,\ \ldots,\ y_{n-1} = x_n\}$$

et à

$$\{b_1 = a_1,\ b_2 = a_3,\ \ldots,\ b_{n-1} = a_n\}.$$

Noter que, comme $x_2 \leq a_2$, alors $0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_{n-1}$.
Il faut montrer que $\Pi_{i=\nu}^{n-1} y_i \leq \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i$, $\nu = 1, \ldots, n-1$.
1) Par hypothèse, si $\nu \geq 2$, on a $\Pi_{i=\nu}^{n-1} y_i = \Pi_{i=\nu+1}^{n} x_i \leq \Pi_{i=\nu+1}^{n} a_i = \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i$.
2) Si $\nu = 1$ on a

$$\Pi_{i=1}^{n-1} y_i = \frac{x_1x_2}{a_2}\Pi_{i=3}^{n} x_i = \frac{1}{a_2}\Pi_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{a_2}\Pi_{i=1}^{n} a_i = a_1\Pi_{i=3}^{n} a_i = \Pi_{i=1}^{n-1} b_i.$$

Donc on peut déduire (par hypothèse d'induction) que

$$\begin{pmatrix} a_2 & & & & \\ & \frac{x_1x_2}{a_2} & & & \\ & & x_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E.$$

Comme Rco$E$ est invariant par transformations orthogonales, on obtient

$$A_\pm = \begin{pmatrix} x_1 & \pm\lambda & & \\ 0 & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E \tag{3.22}$$

et donc, en combinant (3.21) et (3.22) on a

$$\xi \in \mathrm{Rco}E$$

ce qui veut dire le résultat espéré

Partie 2 : $x_{n-1} \geq a_{n-1}$. On écrit (comme dans la *Partie 1*, mais en changeant le rôle de (x_n, x_{n-1}) et (x_1, x_2))

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & \\ & & & x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & \lambda \\ & & 0 & x_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & -\lambda \\ & & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}A_+ + \frac{1}{2}A_- \tag{3.23}$$

(observer que $\mathrm{rang}(A_+ - A_-) \leq 1$) et on choisit λ tel que:

$$\lambda^2 = \frac{(x_n^2 - a_{n-1}^2)(x_{n-1}^2 - a_{n-1}^2)}{a_{n-1}^2}.$$

Noter que le membre de droite est positif par hypothèse ($a_{n-1} \leq x_{n-1} \leq x_n$). Comme avant, le choix de λ conduit à l'existence de $O_\pm, O'_\pm \in O(n)$ telles que

$$O_\pm A_\pm O'_\pm = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & x_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_{n-2} & & \\ & & & & \frac{x_{n-1}x_n}{a_{n-1}} & \\ & & & & & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On applique l'hypothèse d'induction à

$$\{y_1 = x_1, \ldots, y_{n-2} = x_{n-2}\,,\, y_{n-1} = \frac{x_{n-1}x_n}{a_{n-1}}\}$$

et à

$$\{b_1 = a_1, \,.., b_{n-2} = a_{n-2}\,,\, b_{n-1} = a_n\}\,.$$

Il y a lieu de noter que, comme $a_{n-1} \leq x_{n-1}$, alors $0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_{n-1}$. On vérifie l'hypothèse d'induction.

1) Tout d'abord on remaque que $y_{n-1} \leq b_{n-1}$ car $x_{n-1}x_n \leq a_{n-1}a_n$.
2) Si $1 \leq \nu \leq n-1$ alors

$$\begin{aligned} \Pi_{i=\nu}^{n-1} y_i &= \Pi_{i=\nu}^{n-2} y_i \cdot y_{n-1} = \Pi_{i=\nu}^{n-2} x_i \frac{x_{n-1}x_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} \Pi_{i=\nu}^{n} x_i \\ &\leq \frac{1}{a_{n-1}} \Pi_{i=\nu}^{n} a_i \leq \Pi_{i=\nu}^{n-2} a_i \cdot a_n = \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i \,. \end{aligned}$$

Donc (par hypothèse d'induction)

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & x_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_{n-2} & & \\ & & & & \frac{x_{n-1}x_n}{a_{n-1}} & \\ & & & & & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E$$

et, comme $\mathrm{Rco}E$ est invariant par transformations orthogonales, on obient que $A_\pm \in \mathrm{Rco}E$ qui combiné à (3.23) nous conduit au résultat espéré

$$\xi \in \mathrm{Rco}E.$$

Partie 3 : $a_2 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq a_{n-1}$. Noter que ce cas se présente seulement lorsque $n \geq 4$. Tout d'abord on remarque que l'on peut trouver un $k \in \{2, \ldots, n-2\}$ tel que

$$a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1} \,. \tag{3.24}$$

Donc on peut écrire

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A_+ + \frac{1}{2}A_-$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x_k & \lambda & & \\ & & 0 & x_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x_k & -\lambda & & \\ & & 0 & x_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x_n \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

(observer que $\mathrm{rang}(A_+ - A_-) \leq 1$) où λ est donné par

$$\lambda^2 = \frac{(b^2 - x_k^2)(b^2 - x_{k+1}^2)}{b^2}. \tag{3.26}$$

avec $b = a_k$ (*Partie 3.1*) ou $b = a_{k+1}$ (*Partie 3.2*). Noter que, des hypothèses ci-dessus (3.24), le deuxième membre est positif dans tous les deux cas.

Partie 3.1 : $\begin{cases} a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1} \\ x_k x_{k+1} \Pi_{i=\nu+1}^n x_i \leq a_k \Pi_{i=\nu}^n a_i, \qquad \nu = k+2, \ldots, n \end{cases}$

(avec la convention $\Pi_{i=n+1}^n x_i = 1$).

Partie 3.2 : $\begin{cases} a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1} \\ \Pi_{i=\mu}^{k-1} x_i \cdot \Pi_{i=k+2}^n x_i \leq \Pi_{i=\mu+1}^k a_i \cdot \Pi_{i=k+2}^n a_i, \qquad \mu = 1, \ldots, k-1\,. \end{cases}$

Avant de procéder à l'étude des cas ci-dessus, on va montrer que la *Partie 3.1* et la *Partie 3.2* couvrent touts les possibilités. En effet, si $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$ et si $\Pi_{i=\nu}^n x_i \leq \Pi_{i=\nu}^n a_i\,,\ \nu = 1, \ldots, n$, au moins une des inégalités suivantes est valable

$$x_k x_{k+1} \Pi_{i=\nu+1}^n x_i \leq a_k \Pi_{i=\nu}^n a_i\,, \qquad \nu = k+2, \ldots, n$$
$$\Pi_{i=\mu}^{k-1} x_i \cdot \Pi_{i=k+2}^n x_i \leq \Pi_{i=\mu+1}^k a_i \cdot \Pi_{i=k+2}^n a_i\,, \qquad \mu = 1, \ldots, k-1\,.$$

On procède par contradiction et on suppose qu'il existe $\nu \in \{k+2, \ldots, n\}$ et $\mu \in \{1, \ldots, k-1\}$ tels que

$$x_k x_{k+1} \Pi_{i=\nu+1}^n x_i > a_k \Pi_{i=\nu}^n a_i$$

$$\Pi_{i=\mu}^{k-1} x_i \cdot \Pi_{i=k+2}^n x_i > \Pi_{i=\mu+1}^k a_i \cdot \Pi_{i=k+2}^n a_i\,.$$

En multipliant les deux inégalités et en utilisant l'hypothèse, on déduit que

$$\Pi_{i=\mu}^n a_i \cdot \Pi_{i=\nu+1}^n a_i \geq \Pi_{i=\mu}^n x_i \cdot \Pi_{i=\nu+1}^n x_i > a_k \Pi_{i=\nu}^n a_i \cdot \Pi_{i=\mu+1}^k a_i \cdot \Pi_{i=k+2}^n a_i$$

i.e.

$$a_\mu \Pi_{i=k+1}^n a_i \cdot \Pi_{i=\nu+1}^n a_i > a_k \Pi_{i=\nu}^n a_i \cdot \Pi_{i=k+2}^n a_i$$

donc

$$a_\mu a_{k+1} > a_k a_\nu.$$

Cependant $\mu \in \{1, \ldots, k-1\}$, donc $a_\mu \le a_k$ et $\nu \in \{k+2, \ldots, n\}$ par suite $a_\nu \ge a_{k+1}$. On obtient donc

$$a_k a_{k+1} \ge a_\mu a_{k+1} > a_k a_\nu \ge a_k a_{k+1}$$

ce constitue une contradiction. En conclusion la *Partie 3.1* et la *Partie 3.2* couvrent toutes les possibilités. On étudie alors séparément ces deux cas.

$$\textit{Partie 3.1} \;: \quad \begin{cases} a_k \le x_k \le x_{k+1} \le a_{k+1} \\ \\ x_k x_{k+1} \Pi_{i=\nu+1}^{n} x_i \le a_k \Pi_{i=\nu}^{n} a_i, \qquad \nu = k+2, \ldots, n \end{cases}$$

(avec la convention $\Pi_{i=n+1}^{n} x_i = 1$). On choisit à ce moment $b = a_k$ dans (3.25) et (3.26); donc on peut trouver $O_\pm, O'_\pm \in O(n)$ telles que

$$O_\pm A_\pm O'_\pm = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & x_{k-1} & & & & & \\ & & & \frac{x_k x_{k+1}}{a_k} & & & & \\ & & & & a_k & & & \\ & & & & & x_{k+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & x_n \end{pmatrix}$$

où nous le rappelons

$$A_\pm = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_k & \pm\lambda & & \\ & & 0 & x_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x_n \end{pmatrix}.$$

On applique l'hypothèse d'induction à

$$\{y_1 = x_1, \ldots, y_{k-1} = x_{k-1}\,, y_k = \frac{x_k x_{k+1}}{a_k}, y_{k+1} = x_{k+2}, \ldots, y_{n-1} = x_n\}$$

et à

$$\{b_1 = a_1, \ldots, b_{k-1} = a_{k-1}\,, b_k = a_{k+1}\,, \ldots, b_{n-1} = a_n\}\,.$$

On observe que, comme $a_k \le x_k$, alors $0 \le y_1 \le \ldots \le y_{k-1} \le y_k$. Au contraire, *a priori*, on ne peut comparer y_k à $y_{k+1} \le \ldots \le y_{n-1}$. On va

vérifier l'hypothèse d'induction.
1) Il faut montrer que $x_n = y_{n-1} \leq b_{n-1} = a_n$ et $y_k \leq b_{n-1} = a_n$.
La première inégalité est vérifiée par hypothèse, la deuxième aussi, qui est vraie par l'hypothèse de la *Partie 3.1* avec $\nu = n$.
L'hypothèse $\xi \in X$ et celle de la *Partie 3.1* nous assurent que
2) Si $n-1 \geq \nu \geq k+1$,

$$\begin{cases} \Pi_{i=\nu}^{n-1} y_i = \Pi_{i=\nu+1}^{n} x_i \leq \Pi_{i=\nu+1}^{n} a_i = \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i \\ y_k \Pi_{i=\nu+1}^{n-1} y_i = \frac{x_k x_{k+1}}{a_k} \cdot \Pi_{i=\nu+2}^{n} x_i \leq \Pi_{i=\nu+1}^{n} a_i = \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i \,. \end{cases}$$

3) Si $k \geq \nu \geq 1$,

$$\begin{aligned} \Pi_{i=\nu}^{n-1} y_i &= \Pi_{i=\nu}^{k} y_i \cdot \Pi_{i=k+1}^{n-1} y_i = \frac{1}{a_k} \Pi_{i=\nu}^{n} x_i \leq \frac{1}{a_k} \Pi_{i=\nu}^{n} a_i \\ &= \Pi_{i=\nu}^{k-1} a_i \cdot \Pi_{i=k+1}^{n} a_i = \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i. \end{aligned}$$

Donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction et déduire que

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & x_{k-1} & & & & & \\ & & & \frac{x_k x_{k+1}}{a_k} & & & & \\ & & & & a_k & & & \\ & & & & & x_{k+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E.$$

Comme précédemment on a que

$$A_{\pm} \in \mathrm{Rco}E \tag{3.27}$$

et, finalement, en combinant (3.25) et (3.27) on obtient le résultat voulu:

$$\xi \in \mathrm{Rco}E.$$

$$\textit{Partie 3.2}: \quad \begin{cases} a_k \leq x_k \leq x_{k+1} \leq a_{k+1} \\ \Pi_{i=\mu}^{k-1} x_i \cdot \Pi_{i=k+2}^{n} x_i \leq \Pi_{i=\mu+1}^{k} a_i \cdot \Pi_{i=k+2}^{n} a_i, \qquad \mu = 1, \ldots, k-1\,. \end{cases}$$

A ce moment on choisit $b = a_{k+1}$ dans (3.25) et (3.26); donc on peut trouver $O_{\pm}, O'_{\pm} \in O(n)$ telles que

$$O_{\pm}A_{\pm}O'_{\pm} = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & x_{k-1} & & & & & \\ & & & \frac{x_k x_{k+1}}{a_{k+1}} & & & & \\ & & & & a_{k+1} & & & \\ & & & & & x_{k+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & x_n \end{pmatrix}.$$

On doit montrer la validité de l'hypothèse d'induction pour

$$\{y_1 = x_1, \dots, y_{k-1} = x_{k-1}, y_k = \frac{x_k x_{k+1}}{a_{k+1}}, y_{k+1} = x_{k+2}, \dots, y_{n-1} = x_n\}$$

et pour

$$\{b_1 = a_1, \dots, b_k = a_k, b_{k+1} = a_{k+2}, \dots, b_{n-1} = a_n\}.$$

On remarque que, comme $x_{k+1} \leq a_{k+1}$, alors $y_k \leq y_{k+1} \leq \dots \leq y_{n-1}$. Au contraire, *a priori*, on ne peut pas comparer y_k à $y_1 \leq \dots \leq y_{k-1}$. On va vérifier l'hypothèse d'induction. Du fait que $\xi \in X$ et de l'hypothèse de la *Partie 3.2* on peut écrire

1) Si $\nu \geq k+1$, alors $\Pi_{i=\nu}^{n-1} y_i = \Pi_{i=\nu+1}^{n} x_i \leq \Pi_{i=\nu+1}^{n} a_i = \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i$.

2) Si $\nu = k$,alors

$$\begin{cases} \Pi_{i=k}^{n-1} y_i = \frac{1}{a_{k+1}} \Pi_{i=k}^{n} x_i \leq \frac{1}{a_{k+1}} \Pi_{i=k}^{n} a_i = a_k \Pi_{i=k+2}^{n} a_i = b_k \Pi_{i=k+1}^{n-1} b_i = \Pi_{i=k}^{n-1} b_i . \\ y_{k-1} \Pi_{i=k+1}^{n-1} y_i = x_{k-1} \Pi_{k+2}^{n} x_i \leq a_k \Pi_{i=k+2}^{n} a_i = \Pi_{i=k}^{n-1} b_i . \end{cases}$$

3) Si $k-1 \geq \nu \geq 1$, alors

$$\begin{cases} \Pi_{i=\nu}^{n-1} y_i &= \Pi_{i=\nu}^{k-1} x_i \frac{x_k x_{k+1}}{a_{k+1}} \cdot \Pi_{i=k+2}^{n} x_i = \frac{1}{a_{k+1}} \cdot \Pi_{i=\nu}^{n} x_i \\ &\leq \frac{1}{a_{k+1}} \cdot \Pi_{i=\nu}^{n} a_i = \Pi_{i=\nu}^{k} a_i \cdot \Pi_{i=k+2}^{n} a_i = \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i \\ \Pi_{i=\nu-1}^{k-1} y_i \cdot \Pi_{i=k+1}^{n-1} y_i &= \Pi_{i=\nu-1}^{k-1} x_i \cdot \Pi_{i=k+2}^{n} x_i \\ &\leq \Pi_{i=\nu}^{k} a_i \cdot \Pi_{i=k+2}^{n} a_i = \Pi_{i=\nu}^{k} b_i \cdot \Pi_{i=k+1}^{n-1} b_i = \Pi_{i=\nu}^{n-1} b_i . \end{cases}$$

On peut alors appliquer l'hypothèse d'induction et déduire que

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & x_{k-1} & & & & & \\ & & & \frac{x_k x_{k+1}}{a_{k+1}} & & & & \\ & & & & a_{k+1} & & & \\ & & & & & x_{k+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E\,.$$

Comme Rco$E$ est invariant par transformations orthogonales, on a que

$$A_\pm \in \mathrm{Rco}E\,. \tag{3.28}$$

Finalement en combinant (3.25) et (3.28) on peut écrire $\xi \in \mathrm{Rco}E$. En conclusion, nous avons obtenu le résultat voulu, à savoir: $X \subset \mathrm{Rco}E$.
Dém. de (iii) Soit $Y = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \Pi_{i=\nu}^n \lambda_i(\xi) < \Pi_{i=\nu}^n a_i\,,\ \nu = 1,\cdots,n\}$. On va prouver que int$\mathrm{Rco}E = Y$. On divise la démonstration en deux parties.
ETAPE 1: $Y \subset \mathrm{intRco}E$. Comme par continuité Y est ouvert et, de **(ii)**, $Y \subset \mathrm{Rco}E$.
ETAPE 2: $\mathrm{intRco}E \subset Y$. Soit $\xi \in \mathrm{intRco}E$; on peut trouver ϵ suffisamment petit pour que $B_\epsilon(\xi) \subset \mathrm{Rco}E$ (où $B_\epsilon(\xi)$ représente la boule centrée en ξ et de rayon ϵ). Soient R, R' deux matrices orthogonales telles que

$$\xi = R\begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & & & \\ & \lambda_2(\xi) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n(\xi) \end{pmatrix}R'\,.$$

On définit

$$\eta = R\begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & & & \\ & \lambda_2(\xi) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n(\xi)+\frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}R'\,.$$

Comme $|\eta - \xi| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, alors $\eta \in \mathrm{Rco}E$. On obtient alors

$$\lambda_n(\xi) < \lambda_n(\eta) \le a_n\,.$$

On suppose que $\lambda_\nu(\xi) \neq 0$ pour tout ν; alors pour $\nu = 1,\ldots,n$ et avec la convention $\Pi_{i=n+1}^n \lambda_i(\xi) = 1$,

$$\Pi_{i=\nu}^n \lambda_i(\xi) = \Pi_{i=\nu}^{n-1}\lambda_i(\xi)\cdot\lambda_n(\xi) < \Pi_{i=\nu}^{n-1}\lambda_i(\eta)\cdot\lambda_n(\eta) \le \Pi_{i=\nu}^{n-1} a_i \cdot a_n$$

ce qui implique que $\xi \in Y$.
Finalement, si $\exists\ \overline{\nu} \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_{\overline{\nu}}(\xi) = 0$, et $\lambda_{\overline{\nu}+1}(\xi) > 0$, alors le même argument utilisé précédemment est valable pour $\nu = \overline{\nu} + 1, \ldots, n$ et il est trivial pour $\nu = 1, \ldots \overline{\nu}$. On a ainsi obtenu que $\xi \in Y$. ■

Remarque 19 *On veut mettre en évidence les deux faits suivants:*

1. *On a privilégié une démonstration semblable pour* co$E$ *et* Rco$E$, *en remplaçant* $\sum$ *par* Π. *Ceci n'a pas pu être le cas pour* $n = 2$.

2. *Le choix précédent nous a forcés, dans le cas convexe, à considérer des matrices non diagonales (mais symétriques) dans la décomposition de la matrice* ξ. *Si on souhaite une démonstration qui n'utilise que des matrices diagonales il faut alors se reporter au cas* $n = 2$.

3.3.2 Le cas symétrique

Le cas symétrique correspond aux problèmes aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Dans la caractérisation des différentes enveloppes nous avons pu traiter le cas de la dimension deux.
Soit $\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$. On rappelle que $\forall \xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$, $\exists\ R \in SO(2)$ telle que

$$R\xi R^T = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

où μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres de ξ. On a donc que les valeurs singulières de ξ sont données par $\lambda_i(\xi) = |\mu_i(\xi)|$, $i = 1, 2$.

Théorème 3.11 *Soient* $0 \leq a_1 \leq a_2$ *et*

$$E_s = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : \lambda_i(\xi) = a_i,\ \forall i = 1, 2\right\}.$$

Alors
i)

$$\text{Pco}E_s = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : \prod_{i=\nu}^{2} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\nu}^{2} a_i,\ \forall \nu = 1, 2\right\}.$$

ii)

$$\mathrm{Rco}E_s = \left\{ \xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : \begin{array}{l} \lambda_i(\xi) \le a_i, \ \forall i = 1,2, \text{ si } \det \xi \ge 0 \\ \prod_{i=\nu}^{2} \lambda_i(\xi) \le \prod_{i=\nu}^{2} a_i, \ \nu = 1,2, \text{ si } \det \xi < 0 \end{array} \right\}. \tag{3.29}$$

Avant de donner la preuve du Théorème, on introduit le Lemme suivant (c.f. Lemme 7.26 dans [21]):

Lemme 3.12 *Soient* $A, B \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$ *telles que* $\mathrm{rang}(A-B) = 1$ *et* $\det B \ge 0$. *Soit* $t \in [0,1]$. *Si* $\det(tA + (1-t)B) \ge 0$*, alors*

$$\lambda_1(tA + (1-t)B) \le \begin{cases} \max\{\lambda_1(A), \lambda_1(B)\} & \textit{si } \det A \ge 0 \\ \lambda_1(B) & \textit{si } \det A < 0 \end{cases}$$

Remarque 20 *Le Lemme est faux si* $\det(tA+(1-t)B) < 0$ *et* $\det A, \det B < 0$. *Il suffit de choisir* $t = 1/2$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

alors

$$\lambda_1(A) = \sqrt{19} - 1, \quad \lambda_1(B) = 2, \quad \lambda_1(\frac{A+B}{2}) = \sqrt{13}.$$

Dém. (du Théorème 3.11) *i)* c.f. Théorème 3.14.
ii) Soit tout d'abord X_s le deuxième membre de l'expression (3.29). On démontrera le théorème en deux étapes.
1ère étape: $X_s \subset \mathrm{Rco}E_s$. Soit $\xi \in X_s$; on va montrer que $\xi \in \mathrm{Rco}E_s$. Comme les fonctions $\xi \longmapsto \lambda_i(\xi)$ sont invariantes par transformations orthogonales, on peut supposer que

$$\xi = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

On va procéder par induction.
i) $n = 1$. Ce cas se résoud comme le cas convexe.
ii) $n = 2$. Soit $\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$ et telle que $\xi \in X_s$; on distingue les cas suivant:
1) ξ semi-définie. On suppose, sans perte de généralité, que ξ est semi-définie positive (autrement on multiplie par $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$).

Soit donc

$$\xi = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2.$$

Comme $\xi \in X_s$, on a que $\mu_1(\xi) = \lambda_1(\xi) \leq a_1$ et $\mu_2(\xi) = \lambda_2(\xi) \leq a_2$.
On interpole alors $\mu_1(\xi)$ entre $\pm a_1$, i.e.

$$\mu_1 = ta_1 + (1-t)(-a_1), \qquad t = \frac{a_1 + \mu_1}{2a_1} \in (0,1)$$

de telle façon que

$$\xi = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Comme $\mu_2(\xi) \leq a_2$, pour $s = \frac{\mu_2 + a_2}{2a_2} \in (0,1)$ on a

$$\begin{pmatrix} \pm a_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \pm a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} \pm a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

en combinant (3.30) et (3.31), on a

$$\xi = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Rco}E_s \Rightarrow X_s \subset \mathrm{Rco}E_s.$$

2) $\xi \in X_s$, *non définie*. On suppose sans perte de généralité, que ξ est de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \qquad t.q. \quad \mu_1\mu_2 < 0$$

et avec, par exemple, $\mu_2 < 0 < \mu_1$ (autrement on multiplie par $-I$).
Comme $\xi \in X_s$, on peut assumer que

$$\begin{cases} |\mu_1\mu_2| \leq a_1 a_2 \\ |\mu_2| \leq a_2. \end{cases}$$

On veut montrer que $\xi \in \mathrm{Rco}E_s$.
On va montrer le résultat en considérant deux cas (le cas trivial étant $\lambda_2(\xi) = a_2$ et $\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) = a_1 a_2$).

Cas 1 : $\xi \in X_s$ avec $\lambda_2(\xi) = a_2$,
Cas 2 : $\xi \in X_s$ avec $\lambda_2(\xi) < a_2$.
On commence par traiter le Cas 1.
Cas 1 :Comme $\lambda_1(\xi) < a_1$, par simple interpolation on a

$$\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\xi \in \text{Rco}E_s \Rightarrow X_s \subset \text{Rco}E_s.$$

Cas 2 : $\lambda_2(\xi) < a_2$.
Soit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\xi_t = \xi + t\eta,$$

avec

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1|\mu_2|}} & \sqrt{\mu_1|\mu_2|} \\ \sqrt{\mu_1|\mu_2|} & |\mu_2| \end{pmatrix}.$$

On a que

$$\det \xi_t = \det \xi = \mu_1 \mu_2.$$

Soit $Y = \{\xi_t \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} : \lambda_2(\xi_t) \leq a_2, \;\; t \in \mathbb{R}\}$. On observe que Y est compact et que $\xi \in$ int rel$Y$[1], car $\lambda_2(\xi) < a_2$. Par la compacité de Y on a qu'il existe $t_1 \leq 0 \leq t_2$:

$$\lambda_2(\xi_{t_1}), \lambda_2(\xi_{t_2}) = a_2.$$

Comme $\det \xi_t = \mu_1 \mu_2$, on déduit que

$$\lambda_1(\xi_{t_1}), \lambda_1(\xi_{t_2}) \leq a_1$$

et donc $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} \in \text{Rco}E_s$.
Par ailleurs rang$(\xi_{t_1} - \xi_{t_2}) = 1$ par construction et

$$\xi = \xi_0 = \frac{t_2}{t_2 - t_1}\xi_{t_1} + \frac{-t_1}{t_2 - t_1}\xi_{t_2}$$

[1] intérieur relatif

ce qui veut dire

$$\xi \in \mathrm{Rco}E_s.$$

2ème étape: $\mathrm{Rco}E_s \subset X_s$. Comme $E_s \subset X_s$, il suffit de montrer que X_s est un ensemble rang un convex, i.e.

$$\forall A, B \in X_s, \quad \mathrm{rang}(A-B) \leq 1 \quad et \quad t \in [0,1],$$

$$C := tA + (1-t)B \in X_s.$$

On distingue différents cas.
Cas 1: *C semi-définie.* On peut supposer, sans perte de généralité, que C est semi-définie positive (autrement on multiplie par $-I$). Dans ce cas le résultat est immédiat à l'aide du Lemme 3.12 ci-dessus.
Cas 2: *C non définie.* On a que

$$\lambda_1(C)\lambda_2(C) = |\det C| \leq t|\det A| + (1-t)|\det B| \leq a_1 a_2.$$

■

3.3.3 Le cas diagonal

Les résultats de cette section sont une généralisation du cas $n = 2$ que l'on trouve dans [21]. Avant de procéder avec les résultats principaux, nous démontrons un lemme préliminaire.

Soit $A \in \mathbb{R}_d^{n\times n}$ et $0 \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \lambda_n(A)$ ses valeurs singulières.

Lemme 3.13 *Pour tout* $A, B \in \mathbb{R}_d^{n\times n}$ *avec* $\mathrm{rang}(A-B) \leq 1$ *et pour tout* $t \in [0,1]$ *on a l'inégalité suivante*

$$\lambda_i(tA + (1-t)B) \leq \max\{\lambda_i(A), \lambda_i(B)\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dém. On commence la preuve avec l'étude du cas $n = 2$. Soit $A \in \mathbb{R}_d^{2\times 2}$ et $0 \leq \lambda_1(A) \leq \lambda_2(A)$ ses valeurs singulières. On veut montrer que, pour tout $A, B \in \mathbb{R}_d^{2\times 2}$ avec $\det(A-B) = 0$ et pour tout $t \in [0,1]$,

$$\lambda_i(tA + (1-t)B) \leq \max\{\lambda_i(A), \lambda_i(B)\}, \quad i = 1, 2.$$

On observe tout d'abord que le cas $i = 2$ se déduit immédiatement de la convexité de la fonction $\xi \longmapsto \lambda_2(\xi)$. Il reste alors à montrer que

$$\lambda_1(tA + (1-t)B) \leq \max\{\lambda_1(A), \lambda_1(B)\}.$$

Comme $\det(A - B) = 0$, soit $a_1 = b_1$, soit $a_2 = b_2$. A cause de l'invariance de la fonction $A \longmapsto \lambda_1(A)$ par permutations et changements de signe des éléments diagonaux, on peut admettre, sans perte de généralité, que $a_1 = b_1 \geq 0$. Il faut donc montrer que

$$\lambda_1(tA + (1-t)B) = \min\{a_1, |ta_2 + (1-t)b_2|\}$$

n'est pas plus grand que

$$\max\{\lambda_1(A), \lambda_1(B)\} = \max\{\min\{a_1, |a_2|\}, \min\{a_1, |b_2|\}\}.$$

Ceci est trivial et on obtient donc le résultat.
Cas $n > 2$. Soient $A = diag(a_1, ..., a_n)$ et $B = diag(b_1, ..., b_n)$. Comme $\text{rang}(A - B) \leq 1$ on peut supposer, quitte à renuméroter les éléments de A et B, que $a_i = b_i$, $i = 1, ..., n-1$. Tout d'abord on observe que, comme dans le cas $n = 2$,

$$\lambda_1(tA + (1-t)B) = \min\{|a_j|, |ta_n + (1-t)b_n| \ , \ j = 1, ..., n-1\}$$

n'est pas plus grand que

$$\max\{\lambda_1(A), \lambda_1(B)\} = \max\{\min\{|a_j|, |a_n|\}, \min\{|a_j|, |b_n|\}, \ j = 1, ..., n-1\}.$$

Il suffit d'observer que, comme il existe $\overline{j} \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $|a_{\overline{j}}| \leq |a_j|$, analoguement au cas $n = 2$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\lambda_1(tA + (1-t)B) &= \min\left\{|a_{\overline{j}}|, |ta_n + (1-t)b_n|\right\} \\
&\leq \max\left\{\min\left\{|a_{\overline{j}}|, |a_n|\right\}, \min\left\{|a_{\overline{j}}|, |b_n|\right\}\right\} \\
&= \max\{\lambda_1(A), \lambda_1(B)\}.
\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations on dénotera $C = tA + (1-t)B$. En appliquant le même argument que précédemment, il est facile de voir que, pour $i = 1, ..., n-1$,

$$\begin{aligned}
\lambda_{i+1}(C) &= \min\{\{|a_j|, |ta_n + (1-t)b_n|, \ j = 1, ..., n-1\} \setminus \{\lambda_k(C) \ , \ k = 1, ..., i\}\} \\
&\leq \max\{\min\{\{|a_j|, |a_n|\} \setminus \lambda_k(A)\}, \min\{\{|a_j|, |b_n|\} \setminus \lambda_k(B)\}\} \\
&= \max\{\lambda_{i+1}(A), \lambda_{i+1}(B)\}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.14 *Soit $\xi \in \mathbb{R}_d^{n\times n}$ et $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq \ldots \leq \lambda_n(\xi)$ ses valeurs singulières.*

Soit

$$E_d = \left\{\xi \in \mathbb{R}_d^{n\times n} : \lambda_i(\xi) = a_i \ , \ i = 1, ..., n\right\}.$$

Alors

i)

$$\mathrm{Pco}E_d = \left\{\xi \in \mathbb{R}_d^{n\times n} : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i \ ,\nu \ = 1, ..., n\right\},$$

ii)

$$\mathrm{Rco}E_d = \left\{\xi \in \mathbb{R}_d^{n\times n} : \lambda_i\left(\xi\right) \leq a_i \ , \ i = 1, ..., n\right\}.$$

Dém. On pourrait preocéder comme dans le Théorème 3.10, mais nous allons donner une démonstration simplifiée. Soit

$$X = \left\{\xi \in \mathbb{R}_d^{n\times n} : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i \ , \quad \nu = 1, ..., n\right\}.$$

Il faut montrer que

$$\mathrm{Pco}E_d = X.$$

ETAPE 1: $\mathrm{Pco}E_d \subset X$. Cette inclusion provient de la polyconvexité des fonctions $\xi \to \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi)$ (c.f. Lemma 3.9) et du fait que $E_d \subset X$.
ETAPE 2: $\mathrm{Pco}E_d \supset X$. Comme les fonctions $\xi \longmapsto \lambda_i(\xi)$ sont invariantes par transformations orthogonales, on peut supposer que

$$\xi = diag(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix},$$

avec $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ et $\prod_{i=\nu}^{n} x_i \leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i, \quad \nu = 1, ..., n.$
On va montrer le résultat par induction.
(i) $n = 1$. Ce cas est trivial (c.f. le cas convexe du Théorème 3.10).
(ii) $n \geq 2$. On distingue deux cas.
Cas 1: $\prod_{i=\overline{\nu}}^{n} \lambda_i(\xi) = \prod_{i=\overline{\nu}}^{n} a_i$, pour un certain $\overline{\nu} \in \{2, ..., n\}$. On suppose que le résultat a été établi jusqu'à $n-1$, c'est-à-dire que tout ξ tel que

$\prod_{i=\nu}^{n-1}\lambda_i(\xi)\leq\prod_{i=\nu}^{n-1}a_i$, $\nu=1,...,n-1$ (i.e. $\xi\in X$) est dans $\mathrm{Pco}E_d$, i.e. $T(\xi)=\sum_{\mu=1}^{I}t_\mu T(A_\mu)$ avec $A_\mu\in E_d$ et $t_\mu\geq 0$, $\sum_{\mu=1}^{I}t_\mu=1$ et où $T(\xi)=(\xi,adj_2\xi...,adj_{n-1}\xi)$. On applique l'hypothèse d'induction à

$$\{x_1,x_2,...,x_{\overline{\nu}-1}\}\text{ et }\{a_1,a_2,...,a_{\overline{\nu}-1}\}$$

et à

$$\{x_{\overline{\nu}},...,x_n\}\text{ et }\{a_{\overline{\nu}},...,a_n\}.$$

En ce qui concerne le premier on a

$$\begin{aligned}\prod_{i=\nu}^{\overline{\nu}-1}x_i &= \prod_{i=\nu}^{n}x_i\left(\prod_{i=\overline{\nu}}^{n}x_i\right)^{-1}=\prod_{i=\nu}^{n}x_i\left(\prod_{i=\overline{\nu}}^{n}a_i\right)^{-1}\\ &\leq \prod_{i=\nu}^{n}a_i\left(\prod_{i=\overline{\nu}}^{n}a_i\right)^{-1}=\prod_{i=\nu}^{\overline{\nu}-1}a_i,\quad \nu=1,...,\overline{\nu}-1.\end{aligned}$$

En ce qui concerne le deuxième on en déduit, en utilisant directement les hypothèses, que

$$\prod_{i=\nu}^{n}x_i\leq\prod_{i=\nu}^{n}a_i,\quad \nu=\overline{\nu},...,n.$$

Par conséquent l'hypothèse d'induction donne $\xi\in\mathrm{Pco}E_d$.
Cas 2: $\prod_{i=\overline{\nu}}^{n}\lambda_i(\xi)<\prod_{i=\overline{\nu}}^{n}a_i$, pour tout $\overline{\nu}\in\{2,...,n\}$. On définit

$$Y=\left\{\begin{array}{c}\eta\in\mathbb{R}_d^{n\times n}:\prod_{i=\nu}^{n}\lambda_i(\eta)\leq\prod_{i=\nu}^{n}a_i\ ,\quad \nu=2,...,n\\ \text{et }\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(\eta)=\prod_{i=1}^{n}a_i\end{array}\right\}.$$

On voit que $Y\subset X$ est compact et que $\xi\in\mathrm{rel\ int}(Y)$, car $\prod_{i=\nu}^{n}\lambda_i(\xi)=\prod_{i=\nu}^{n}x_i<\prod_{i=\nu}^{n}a_i$. De plus, par le Cas 1, on a $\partial Y\subset\mathrm{Pco}E_d$. On écrit, pour un $\beta\geq 0$,

$$\xi=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}\frac{x_1}{1+\beta}\\x_2(1+\beta)\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-\frac{x_1}{1+\beta}\\-x_2(1+\beta)\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}x_2(1+\beta)\\\frac{x_1}{1+\beta}\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

i.e.

$$\xi=\sum_{j=1}^{3}t_j\xi_j,$$

de façon que le déterminant soit preservé. D'après les conditions

$$\begin{cases} x_1 = (t_1 - t_2)\frac{x_1}{1+\beta} + t_3 x_2(1+\beta) \\ x_2 = (t_1 - t_2)x_2(1+\beta) + t_3\frac{x_1}{1+\beta} \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \end{cases}$$

on trouve

$$t_1 = \frac{1}{2}\frac{(2+\beta)[x_2(1+\beta) - x_1]}{x_2(1+\beta)^2 - x_1}, \qquad t_2 = \frac{1}{2}\frac{\beta[x_2(1+\beta) - x_1]}{x_2(1+\beta)^2 + x_1},$$

$$t_3 = \frac{1}{2}\frac{x_1 x_2 \beta(1+\beta)(2+\beta)}{x_2^2(1+\beta)^4 - x_1^2}.$$

On voit bien que $t_j = t_j(\beta) \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{3} t_j = 1$. On peut observer que, par compacité, on peut choisir β de façon qu'il existe $\overline{\nu} \in \{2, ..., n\}$ tel que

$$\prod_{i=\overline{\nu}}^{n} \lambda_i(\xi_j) = \prod_{i=\overline{\nu}}^{n} a_i.$$

Quitte à renuméroter les éléments des ξ_j (on procèdera seulement pour ξ_1, la méthode étant identique pour toutes les ξ_j), on applique, pour ce choix de β, le Cas 1 à

$$\left\{ y_1^\beta = \frac{x_1}{1+\beta},\ y_2^\beta = x_2(1+\beta),\ y_3^\beta = x_3 ..., y_n^\beta = x_n \right\},$$

ce qui nous permet de déduire que

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Pco} E_d.$$

ii) On veut montrer que si

$$Y_d = \left\{ \xi \in \mathbb{R}_d^{n \times n} : \lambda_i(\xi) \leq a_i \ ,\ i = 1, ..., n \right\},$$

alors

$$Y_d = \mathrm{Rco} E_d.$$

Tout d'abord on montre que $Y_d \supset \mathrm{Rco} E_d$. En effet $E_d \subset Y_d$ et Y_d est rang un convexe (c.f. ci-dessous), on a donc immédiatement l'inclusion voulue. Pour montrer que Y_d est rang un convexe on a besoin de montrer que si $A, B \in Y_d$ avec $\mathrm{rang}\,(A - B) = 0$ alors $tA + (1-t)\,B \in Y_d$. Du Lemme 3.13 on obtient que

$$\lambda_i\,(tA + (1-t)\,B) \leq \max\{\lambda_i\,(A)\,, \lambda_i\,(B)\} \leq a_i\ ,\ i = 1, ..., n$$

et ceci prouve la rang un convexité de Y_d. Le fait que $Y_d \subset \mathrm{Rco} E_d$ a déjà été établi précédemment (voir Théorème 3.10).

3.3.4 Le cas des élastomères nématiques

Le problème que nous allons considérer maintenant a été introduit par DeSimone-Dolzmann [27]. On renvoie à leur article en ce qui concerne l'interprétation physique des résultats ci-dessous.

Nous commençons avec le calcul de l'enveloppe rang un convexe; ce résultat a été traité, pour un cas particulier et lorsque $n = 2, 3$, dans [27].

Théorème 3.15 *Soient* $0 \leq \lambda_1\,(\xi) \leq ... \leq \lambda_n\,(\xi)$ *les valeurs singulières de la matrice* $\xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *et*

$$E = \left\{ \xi :\ \lambda_i\,(\xi) = a_i,\ i = 1, ..., n,\ \det \xi = \prod_{i=1}^{n} a_i \right\}$$

où $0 < a_1 \leq ... \leq a_n$. *On trouve alors que*

$$\mathrm{Pco}\, E = \mathrm{Rco}\, E = \left\{ \xi : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i\,(\xi) \leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i,\ \nu = 2, ..., n,\ \det \xi = \prod_{i=1}^{n} a_i \right\}.$$

De plus si $0 < a_1 < ... < a_n$ *et* δ *est suffisamment petit pour que*

$$0 < a_1^\delta = (1-\delta)^{1-n} a_1 \leq a_2^\delta = (1-\delta) a_2 \leq ... \leq a_n^\delta = (1-\delta) a_n,$$

alors E *et* $\mathrm{Rco}\, E$ *ont la propriété d'approximation avec* $K\,(E_\delta) = \mathrm{Rco}\, E_\delta$, *où*

$$E_\delta = \left\{ \xi :\ \lambda_i\,(\xi) = a_i^\delta,\ i = 1, ..., n,\ \det \xi = \prod_{i=1}^{n} a_i \right\}.$$

Remarque 21 *Lorsque* $n = 3$ *et* $a_1 = a_2 = r^{1/6}$, $a_3 = r^{-1/3}$, $r < 1$, *on retrouve le résultat de DeSimone-Dolzmann, notamment*

$$\mathrm{Pco}\, E = \mathrm{Rco}\, E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \lambda_i(\xi) \in \left[r^{1/6}, r^{-1/3}\right], \ \det \xi = 1\right\}.$$

Dém. On définit

$$X = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i, \ \nu = 2, ..., n, \ \det \xi = \prod_{i=1}^{n} a_i\right\}.$$

Etape 1 : L'inclusion $\mathrm{Rco}\, E \subset \mathrm{Pco}\, E \subset X$ ne présente pas de difficultés; en effet $E \subset X$ et les fonctions

$$\xi \to \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) - \prod_{i=\nu}^{n} a_i, \ \nu = 2, ..., n,$$

sont polyconvexes et $\xi \to \det \xi - \prod_{i=1}^{n} a_i$ est quasiaffine.
Etape 2 : Par la compacité de X il est suffisant de prouver que $\partial X \subset \mathrm{Rco}\, E$. On montre le résultat par induction.
(1) $n = 1$. Ce cas est trivial.
(2) $n \geq 2$. Sans perte de généralité on peut supposer que toute $\xi \in X$ est de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

avec $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, $\Pi_{i=\nu}^{n} x_i \leq \Pi_{i=\nu}^{n} a_i$, $\nu = 2, \ldots, n$ et $\Pi_{i=1}^{n} x_i = \Pi_{i=1}^{n} a_i$. Comme $\xi \in \partial X$ on en déduit que $\Pi_{i=\overline{\nu}}^{n} x_i = \Pi_{i=\overline{\nu}}^{n} a_i$, pour un certain $\overline{\nu} \in \{2, \ldots, n\}$. On peut alors appliquer l'hypothèse d'induction à

$$\{x_1, ..., x_{\overline{\nu}-1}\} \text{ et } \{a_1, ..., a_{\overline{\nu}-1}\}$$

et à

$$\{x_{\overline{\nu}}, ..., x_n\} \text{ et } \{a_{\overline{\nu}}, ..., a_n\}.$$

Or pour le deuxième il découle des hypothèses que

$$\begin{aligned} \prod_{i=\nu}^{n} x_i &\leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i, \quad \nu = \overline{\nu} + 1, \ldots, n \\ \prod_{i=\overline{\nu}}^{n} x_i &= \prod_{i=\overline{\nu}}^{n} a_i \end{aligned}$$

tandis que (noter que si $\overline{\nu} = 2$ alors nécéssairement $x_1 = a_1$ et cette partie est triviale, donc on peut supposer que $\overline{\nu} \geq 3$) pour le premier on a

$$\begin{aligned}\prod_{i=\nu}^{\overline{\nu}-1} x_i &= \prod_{i=\nu}^{n} x_i \left(\prod_{i=\overline{\nu}}^{n} x_i\right)^{-1} = \prod_{i=\nu}^{n} x_i \left(\prod_{i=\overline{\nu}}^{n} a_i\right)^{-1} \\ &\leq \prod_{i=\nu}^{n} a_i \left(\prod_{i=\overline{\nu}}^{n} a_i\right)^{-1} = \prod_{i=\nu}^{\overline{\nu}-1} a_i, \quad \nu = 2, ..., \overline{\nu} - 1\end{aligned}$$

et

$$\prod_{i=1}^{\overline{\nu}-1} x_i = \prod_{i=1}^{\overline{\nu}-1} a_i.$$

On peut donc en déduire, par l'hypothèse d'induction, que $\xi \in \operatorname{Rco} E$.
Etape 3: On observe que la propriété d'approximation découle du fait que

$$\operatorname{int} \operatorname{Rco} E = \left\{ \xi : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\nu}^{n} a_i, \ \nu = 2, ..., n, \ \det \xi = \prod_{i=1}^{n} a_i \right\}.$$

■

3.4 Existence des solutions pour problèmes du premier et du deuxième ordre

3.4.1 Existence des solutions: premier ordre

Comme applications de la caractérisation des différentes enveloppes du cas des valeurs singulières (c.f. Section 3.3.1), nous allons donner un théorème d'existence des solutions pour systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Théorème 3.16 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $a_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ des fonctions continues satisfaisant*

$$0 < c \leq a_1(x, s) \leq a_2(x, s) \leq ... \leq a_n(x, s)$$

pour quelque $c \in \mathbb{R}_+$ et $\forall\ (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$. Soit $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(D\varphi(x)) < \prod_{i=\nu}^{n} a_i(x, \varphi(x)), \quad x \in \Omega, \quad \nu = 1, ..., n,$$

(en particulier $\varphi \equiv 0$), alors il existe (un ensemble dense de) $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} \lambda_i (Du(x)) = a_i (x, u(x)), \ p.p. \ x \in \Omega, \ i = 1, ..., n \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dém. On définit, pour tout $\delta \in [0, \delta_0)$,

$$F_\nu^\delta(x,s,\xi) = \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) - \prod_{i=\nu}^{n} [a_i(x,s) - \delta] .$$

Noter que F_ν^δ est polyconvexe en ξ. En utilisant la formule de représentation pour l'enveloppe rang un convexe, on peut appliquer le Théorème 2.19 avec les G_j idéntiquement nulles et obtenir le résultat.

De ce Théorème on peut déduire directement le Corollaire suivant (démontré dans [21]):

Corollaire 3.17 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction continue satisfaisant, $\forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$,*

$$0 < f_0 \leq f(x,s),$$

pour quelque constante f_0. Soit $\varphi \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ telle que

$$|\det D\varphi| < f(x,\varphi(x)), \quad x \in \overline{\Omega};$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} |\det Du(x)| = f(x,u(x)), \ p.p. \ x \in \Omega, \ i = 1, ..., n \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

3.4.2 Existence des solutions: deuxième ordre

Pour être complet, nous allons citer au passage deux résultats d'existence, concernant les systèmes d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, obtenus par Dacorogna et Marcellini (c.f. [21]).

Théorème 3.18 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $a_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ des fonctions continues bornées satisfaisant*

$$0 < c \leq a_1(x,s,p) \leq a_2(x,s,p) \leq ... \leq a_n(x,s,p)$$

pour quelque $c \in \mathbb{R}_+$ *et* $\forall\ (x,s,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Soit* $\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ *telle que*

$$\lambda_i\left(D^2\varphi(x)\right) < a_i(x,\varphi(x),D\varphi(x)), \quad x \in \Omega, \quad i = 1,...,n,$$

(en particulier $\varphi \equiv 0$*), alors il existe (un ensemble dense de)* $u \in W^{2,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\begin{cases} \lambda_i\left(D^2 u\left(x\right)\right) = a_i\left(x, u\left(x\right), Du(x)\right), \ p.p.\ x \in \Omega,\ i = 1,...,n \\ u\left(x\right) = \varphi\left(x\right),\ Du\left(x\right) = D\varphi\left(x\right)x, \ \ \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On fait remarquer que comme conséquence de ce Théorème on peut traiter le problème de Dirichlet-Neumann suivant:

Corollaire 3.19 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert,* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *une fonction continue satisfaisant,* $\forall(x,s,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$0 < f_0 \leq f\left(x,s,p\right),$$

pour quelque constante f_0. *Soit* $\varphi \in C^2\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ *telle que*

$$|\det D^2\varphi| < f(x,\varphi(x),D\varphi(x)), \quad x \in \overline{\Omega};$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in W^{2,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\begin{cases} |\det D^2 u\left(x\right)| = f\left(x, u\left(x\right), Du(x)\right), \ p.p.\ x \in \Omega,\ i = 1,...,n \\ u\left(x\right) = \varphi\left(x\right),\ Du\left(x\right) = D\varphi\left(x\right),\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dém. c.f. Corollaire 7.33 dans [21].

3.4.3 Existence de solutions pour le problème des élastomères nématiques

La conséquence des résultats de caractérisation, obtenus dans la Section 3.3.4, se résume dans le théorème suivant (on utilise les notations données précédemment et on assume ici que $\prod_{i=1}^n a_i = 1$).

Théorème 3.20 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert et*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \lambda_i\left(\xi\right) = a_i,\ i = 1,...,n,\ \det\xi = \prod_{i=1}^n a_i = 1\right\}.$$

Soit φ une fonction affine ($D\varphi = \xi_0$) telle que

$$\begin{aligned} \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi_0) &< \prod_{i=\nu}^{n} a_i,\ \nu = 2, ..., n, \\ \det \xi_0 &= 1; \end{aligned}$$

alors il existe (un ensemble dense de) $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_i(Du(x)) = a_i,\ i = 1, 2, ..., n,\ p.p.\ x \in \Omega \\ \det Du(x) = 1,\ p.p.\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Remarque 22 *Naturellement le résultat reste vrai si les a_i ne sont pas constants mais dependent de (x, u).*

Dém. Tout d'abord on observe que

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) = \prod_{i=\nu}^{n} a_i,\ \nu = 2, ..., n,\ \det \xi = 1 \right\}$$

et que $\xi \to \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi)$, $\nu = 2, ..., n$, sont quasiconvexes. Le résultat découle alors de la combinaison du Théorème 3.15 avec le Théorème 2.21 et le Théorème 2.24. ■

Chapitre 4

Autres Applications

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traiterons de nombreux autres exemples gravitant, sous certains aspects, autour du problème des valeurs singulières, mais qui au demeurant offrent déjà un intérêt intrinsèque. Parmi ces problèmes, dont l'étude a abouti aux publications [22] et [24], nous voulons mentionner l'équation eikonale complexe, les problèmes sous la contrainte $\det Du > 0$ et les puits de potentiel sous la contrainte $\det Du = 1$.

L'équation eikonale complexe a été introduite récemment par Magnanini et Talenti (c.f. [34]), lors de l'étude de phénomènes d'optique géométrique avec diffraction et des fonctions harmoniques en trois dimensions.

Exemple 4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et borné, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, v)$, une fonction continue; on veut trouver une fonction à valeurs complexes $w \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{C})$*

$$w(x) = u(x) + i\, v(x)$$

solution de

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_{x_i}^2 + f^2 = 0, & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ w = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $w_{x_i} = \partial w / \partial x_i$ et φ est une fonction donnée.

Une réponse à ce problème, lorsque $n = 2$, peut être trouvée dans [21]. Dans cette thèse, nous avons pu généraliser le résultat au cas où $n \geq 2$. Le problème analytique formulé ci-dessus trouve une solution grâce à l'application des théorèmes d'existence dévéloppés dans le Chapitre 2. La procédure de résolution consiste à réduire le problème analytique en un algébrique consistant à caractériser les différentes enveloppes rang un convexes.

En effet le problème (4.1) est équivalent à

$$\begin{cases} |Dv|^2 = |Du|^2 + f^2, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \langle Dv; Du \rangle = 0, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ w = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En termes algébriques (on peut considérer f constante) on a: étant donné, $r > 0$ et $s = \sqrt{r^2 + f^2}$,

$$E = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times n} \ : \ |a| = r, \ \ |b| = s \text{ et } \langle a; b \rangle = 0 \right\}$$

et en définissant

$$A = \begin{pmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

on prouvera que

$$\operatorname{Pco} E = \operatorname{Rco} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times n} \ : \ \lambda_1 (A\xi)\,, \ \lambda_2 (A\xi) \leq 1 \right\}$$

où $\lambda_1 (A\xi)\,, \ \lambda_2 (A\xi)$ sont les valeurs singulières de la matrice $A\xi \in \mathbb{R}^{2\times n}$.

Ensuite nous présenterons un problème sous la contrainte $\det Du > 0$. On sait qu'en élasticité non linéaire cette condition est fondamentale lorsqu'on veut s'assurer qu'il n'y a pas d'interpénétration de la matière et que, pendant la déformation, l'orientation est préservée.

Exemple 4.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert. Considérons*

$$\begin{cases} \lambda_1 (Du) + \lambda_2 (Du) = 1, \ \textit{p.p. dans } \Omega \\ \det Du \geq 0, \ \textit{p.p. dans } \Omega \\ u(x) = \varphi(x)\,, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Etant donné

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1 (\xi) + \lambda_2 (\xi) = 1, \quad \det \xi \geq 0 \right\},$$

le problème algébrique associé consiste à prouver que

$$\operatorname{Pco} E = \operatorname{Rco} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1 (\xi) + \lambda_2 (\xi) \leq 1, \quad \det \xi \geq 0 \right\}.$$

Nous avons aussi étudié le cas de la contrainte $\det Du = 1$, notamment le problème des puits de potentiel. On rappelle que cette condition, $\det Du = 1$, résulte également de l'élasticité non linéaire et représente le fait que le matériau est incompressible.

Exemple 4.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et*

$$E = SO(2)A \cup SO(2)B$$

avec $\det A = \det B > 0$. *Soit*

$$\xi \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$$

où $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ *représente l'intérieur (relatif à la variété* $\det \xi = \det A = \det B$*) de l'enveloppe rang un convexe de E (c.f. Section 4.4 pour la caractérisation de* $\operatorname{Rco} E$*). Alors il existe* $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ *telle que*

$$\begin{cases} Du(x) \in E, \text{ p.p. dans } \Omega \\ u(x) = \xi x, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous aimerions rappeler que tous ces résultats répondent à des problèmes ouverts dans [21] et que de plus nous avons traité de façon différente un autre problème de [21]: celui des ellipses confocales de Murat et Tartar [46]. La résolution de ce problème, dans la version originale, faisait appel à de nombreux calculs algébriques; nous avons pu l'inscrire dans le cadre des résultats d'existence obtenus.

Exemple 4.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et borné. On considère le problème de Dirichlet-Neumann suivant:*

$$\begin{cases} \Delta w(x) \in \{0,1\}, & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ \det D^2 w(x) \geq 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ w(x) = \varphi(x), \; Dw(x) = D\varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème algébrique associé est (on note par $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ l'ensemble des matrices 2×2 symétriques): étant donné

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \;:\; \operatorname{trace} \xi \in \{0,1\},\; \det \xi \geq 0\right\},$$

prouver que

$$\operatorname{Rco} E = \operatorname{co} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \;:\; 0 \leq \operatorname{trace} \xi \leq 1,\; \det \xi \geq 0\right\}.$$

On remarque de plus que, dans ce cas, l'enveloppe convexe coincide avec celle rang un convexe, malgré le fait que la fonction $\xi \longrightarrow \det \xi$ ne soit pas convexe.

Le dernier exemple que l'on présentera (c.f. Section 4.6) est un problème plus académique mais qui est intéressant mathématiquement. Le problème, malgré la simplicité de son énoncé et sa ressemblence avec un problème important du premier ordre, est étonnamment difficile à résoudre et nous ne l'avons fait que partiellement.

Exemple 4.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert borné. Considérons le problème de Dirichlet-Neumann suivant*

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| = 1, & p.p.\ x \in \Omega, \quad i,j = 1,2 \\ u(x) = \varphi(x), \ Du(x) = D\varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème algébrique associé est alors: si

$$E = \left\{\xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ |\xi_{ij}| = 1, \quad i,j = 1,2\right\},$$

trouver que

$$\operatorname{Pco} E = \operatorname{Rco} E = \left\{ \begin{array}{c} \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ |\xi_{ij}| \le 1, \quad i,j = 1,2 \\ |\xi_{11} - \xi_{22}| \le -\det \xi \end{array} \right\}.$$

4.2 Equation eikonale complexe et sa généralisation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et borné, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f(x,u,v)$, une fonction continue. On veut trouver une fonction à valeurs complexes $w \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{C})$

$$w(x) = u(x) + i\, v(x)$$

telle que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_{x_i}^2 + f^2 = 0, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ w = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

où $w_{x_i} = \partial w / \partial x_i$. Le problème est équivalent à

$$\begin{cases} |Dv|^2 = |Du|^2 + f^2, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \langle Dv; Du \rangle = 0, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ w = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On va montrer que, en définissant

$$E = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times n} \ : \ |a| = r, \ \ |b| = s \text{ et } \langle a; b \rangle = 0 \right\},$$

alors

$$\operatorname{Pco} E = \operatorname{Rco} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times n} \ : \ \lambda_1 (A\xi) \, , \ \lambda_2 (A\xi) \leq 1 \right\},$$

où $\lambda_1 (A\xi)$, $\lambda_2 (A\xi)$ sont les valeurs singulières de la matrice $A\xi \in \mathbb{R}^{2\times n}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

On a pu généraliser ce résultat au cas où $m, n > 2$ et inscrire l'équation eikonale comme cas particulier de celui-ci.

Soit une matrice $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^m & \cdots & \xi_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix} = (\xi_1, ..., \xi_n) \, ,$$

$0 \leq \lambda_1 (\xi) \leq ... \leq \lambda_{m\wedge n} (\xi)$ ses valeurs singulières.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 4.6 *Cas 1 : soient $m \leq n$, $r^1, ..., r^m > 0$ et*

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : \left\langle \xi^i ; \xi^j \right\rangle = r^i r^j \delta^{ij} \right\}$$

où δ^{ij} est le symbole de Kronecker. Soit

$$A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{r^1}, ..., \frac{1}{r^m} \right) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

alors

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : \lambda_i (A\xi) = 1, \, i = 1, ..., m \right\} \\ \operatorname{Rco} E &= \operatorname{co} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : \lambda_m (A\xi) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Cas 2 : soient $m \geq n$, $r_1, ..., r_n > 0$ et

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m \times n} : \langle \xi_i ; \xi_j \rangle = r_i r_j \delta_{ij} \right\}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Soit

$$A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{r_1}, ..., \frac{1}{r_n} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

alors

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lambda_i (\xi A) = 1,\, i = 1, ..., n \right\} \\ \operatorname{Rco} E &= \operatorname{co} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lambda_n (\xi A) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 23 *(1) Si l'on considère le deuxième cas avec $m = 3$, $n = 2$, $r_1 = r_2$ et*

$$\xi = Du(x, y) = \begin{pmatrix} u_x^1 & u_y^1 \\ u_x^2 & u_y^2 \\ u_x^3 & u_y^3 \end{pmatrix}$$

alors $Du \in E$ signifie, en termes géométriques, que la surface a été paramétrée globalement par des coordonnées isothermes.
(2) Le cas $m = n = 2$ a été déjà traité dans [21]. Recemment Bousselsal et Le Dret [6] (toujours dans le cas $m = n = 2$), dans le cadre de l'élasticité non linéaire, ont trouvé que (c.f. leur théorème 3.11 avec $\varepsilon = 0$) si $r^1 = r^2 = 1$ alors

$$F = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \left| \xi^i \right|^2 + \left| \langle \xi^1 ; \xi^2 \rangle \right| \leq 1, \quad i = 1, 2 \right\} \subset \operatorname{Rco} E.$$

Ceci est naturellement compatible avec le théorème ci-dessus. On notera cependant que $F \neq \operatorname{Rco} E$, en effet

$$\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Rco} E, \text{ mais } \xi \notin F.$$

Dém. Les deux cas sont le transposé l'un de l'autre et nous n'en traiterons qu'un par la suite; on choisit le *Cas 2.* On pose

$$X = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lambda_n (\xi A) \leq 1 \right\}.$$

Etape 1 : Tout d'abord on prouve que $\mathrm{Rco}\, E \subset \mathrm{co}\, E \subset X$. La première inclusion $\mathrm{Rco}\, E \subset \mathrm{co}\, E$ est toujours vraie et la deuxième découle des observations suivantes:
L'ensemble X est convexe car la fonction $\xi \to \lambda_n(\xi A)$ est convexe (c.f., par exemple, le Lemme 3.9 dans le Chapitre 3).
L'inclusion $E \subset X$ est aussi vraie. En effet si $\xi \in E$ (noter que $\xi A = \left(\frac{\xi_1}{r_1}, ..., \frac{\xi_n}{r_n}\right)$) alors

$$\begin{aligned} \xi &\in E \Leftrightarrow \left\langle (\xi A)_i ; (\xi A)_j \right\rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \\ \xi A &\in O(m,n) \Leftrightarrow \lambda_\alpha(\xi A) = 1,\, 1 \le \alpha \le n. \end{aligned}$$

Etape 2 : On va maintenant considérer l'inclusion suivante: $X \subset \mathrm{Rco}\, E \subset \mathrm{co}\, E$. Soit $\xi \in X$. En remplaçant ξ par ξA on peut supposer, sans perte de généralité, que $A = I_{n\times n}$. En appliquant le Théorème 3.4, on peut trouver $R \in O(n)$ telle que

$$\xi R = \widetilde{\xi} = \left(\widetilde{\xi}_1, ..., \widetilde{\xi}_n\right), \text{ avec } \left\langle \widetilde{\xi}_i ; \widetilde{\xi}_j \right\rangle = \left|\widetilde{\xi}_i\right| \left|\widetilde{\xi}_j\right| \delta_{ij},\ \lambda_i(\xi) = \left|\widetilde{\xi}_i\right|.$$

Comme les ensembles E et X sont invariants par l'action (à droite) de $O(n)$ on peut supposer, sans perte de généralité, que

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n), \text{ avec } \langle \xi_i ; \xi_j \rangle = 0,\ \forall i \ne j,\ \lambda_i(\xi) = |\xi_i| \le 1,\ 1 \le i \le n.$$

Il suffit donc de montrer que ξ appartient à $\mathrm{Rco}\, E$.
Supposons que $|\xi_i| > 0$, $\forall i = 1, ..., n$ et écrivons

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, ..., \xi_n) = \frac{1+|\xi_1|}{2}\eta^+ + \frac{1-|\xi_1|}{2}\eta^- \\ &= \frac{1+|\xi_1|}{2}\left(\frac{\xi_1}{|\xi_1|}, \xi_2, ..., \xi_n\right) + \frac{1-|\xi_1|}{2}\left(\frac{-\xi_1}{|\xi_1|}, \xi_2, ..., \xi_n\right). \end{aligned}$$

Or $rang(\eta^+ - \eta^-) = 1$ et si $\eta^\pm = (\eta_1^\pm, \eta_2^\pm, ..., \eta_n^\pm)$, alors

$$\langle \eta_i^\pm ; \eta_j^\pm \rangle = 0,\ \forall i \ne j,\ |\eta_1^\pm| = 1,\ |\eta_i^\pm| \le 1,\ \forall i = 2, ..., n.$$

En itérant la procédure avec la deuxième composante, puis avec les autres, on en déduit que ξ peut être écrite comme une combinaison rang un convexe d'éléments de E, i.e. $\xi \in \mathrm{Rco}\, E$.

Si $|\xi_i| = 0$ pour certains indices i, la demarche est analogue; par exemple si $\xi_1 = 0$ on écrit

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, ..., \xi_n) = \frac{1}{2}\eta^+ + \frac{1}{2}\eta^- \\ &= \frac{1}{2}(e_1, \xi_2, ..., \xi_n) + \frac{1}{2}(-e_1, \xi_2, ..., \xi_n) \end{aligned}$$

où e_1 représente tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que

$$|e_1| = 1, \ \langle \xi_i; e_1 \rangle = 0, \forall i = 2, ..., n.$$

En itérant encore la procédure on en déduit que $\xi \in \operatorname{Rco} E$, comme voulu. Ceci conclut la preuve. ■

Remarque 24 *Si l'on définit, pour $m = 2$, $n \geq 2$,*

$$F(\xi) = 2\lambda_2(A\xi) \quad et \quad G(\xi) = \lambda_1(A\xi) + \lambda_2(A\xi),$$

on peut voir que F et G sont des fonctions convexes et que

$$\begin{aligned} E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times n} : \lambda_1(A\xi) = \lambda_2(A\xi) = 1\right\} \\ &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times n} : \lambda_1(A\xi) + \lambda_2(A\xi) = 2, \ \lambda_2(A\xi) = 1\right\} \\ &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times n} : F(\xi) = G(\xi) = 2\right\}, \end{aligned}$$

et donc

$$\operatorname{Rco} E = \operatorname{co} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times n} : F(\xi) \leq 2\right\}.$$

On peut appliquer les résultats vus dans la Section 2.4 pour obtenir le théorème d'existence suivant pour l'équation eikonale complexe, $m = 2$, $n \geq 2$ (le cas $n = 2$ est déjà dans [21]).

Corollaire 4.7 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert borné, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, v)$, une fonction continue et $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{C})$. Alors il existe $w \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{C})$ satisfaisant*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_{x_i}^2 + f^2 = 0, & p.p. dans\ \Omega, \\ w = \varphi, & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

où $w_{x_i} = \partial w / \partial x_i$. *Ou, en d'autres termes, il existe* $(u, v) \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ *tel que*

$$\begin{cases} |Dv|^2 = |Du|^2 + f^2, & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ \langle Dv; Du \rangle = 0, & p.p. \text{ dans } \Omega, \\ (u, v) = (\varphi_1, \varphi_2), & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dém. En effet on résoud un problème beaucoup plus restrictif que celui considéré dans le théorème ci-dessus, i.e.

$$\begin{cases} |Du|^2 = r^2, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ |Dv|^2 = r^2 + f^2, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \langle Dv; Du \rangle = 0, & \text{p.p. dans } \Omega, \\ (u, v) = (\varphi_1, \varphi_2), & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Pour $f = f(x, u, v)$, on définit $F, G : \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times n} \to \mathbb{R}$ comme dans la Remarque 24. Alors les solutions de (4.4) sont solutions (et inversement) du problème

$$\begin{cases} F(x, u, v, Du, Dv) = 2, & \text{p.p. dans } \Omega \\ G(x, u, v, Du, Dv) = 2, & \text{p.p. dans } \Omega \\ (u, v) = (\varphi_1, \varphi_2), & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En choisissant $r > 0$ assez grand pour que

$$F(x, \varphi_1, \varphi_2, D\varphi_1, D\varphi_2) \leq 2 - \varepsilon, \text{ p.p. dans } \Omega,$$

avec $\varepsilon > 0$, on peut arriver au résultat en appliquant le Théorème 6.20 de [21]. ■

4.3 Problème sous la contrainte $\det Du > 0$

Le résultat principal de cette Section est le théorème suivant:

Théorème 4.8 *Soient* $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *et*

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) = 1 - \alpha, \quad \det \xi \geq \beta \right\}.$$

Alors

i)

$$\begin{aligned} \operatorname{Rco} E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) \leq 1 - \alpha, \quad \det \xi \geq \beta \right\} \\ \operatorname{int} \operatorname{Rco} E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) < 1 - \alpha, \quad \det \xi > \beta \right\}. \end{aligned}$$

ii) Soient de plus $f(\xi) = \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi)$ *et* $g(\xi) = |\xi|^2 - 2\det\xi$*, alors*

$$\operatorname{co} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) \leq 1-\alpha,\ g(\xi) \leq (1-\alpha)^2 - 4\beta\right\}.$$

Remarque 25 *Dans le cas* $\beta = 0$ *pour l'enveloppe convexe on trouve*

$$\operatorname{co} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) \leq 1-\alpha\right\}.$$

Dém. i) Soit

$$X = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) \leq 1-\alpha, \quad \det\xi \geq \beta\right\}.$$

Le fait que $\operatorname{Rco} E \subset X$ est élémentaire car $E \subset X$ et les fonctions $\xi \to \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi)$ et $\xi \to -\det\xi$ sont polyconvexes. Il nous reste donc à montrer l'autre inclusion. La compacité de X implique que le résultat sera prouvé si l'on est en mesure de montrer que $\partial X \subset \operatorname{Rco} E$. Comme

$$\partial X = E \cup \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) \leq 1-\alpha, \quad \det\xi = \beta\right\},$$

il faut démontrer que tout $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ avec $\lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) < 1-\alpha$ et $\det\xi = \beta$ appartient à $\operatorname{Rco} E$. On choisit $\eta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice de rang un telle que

$$\left\langle \widetilde{\xi}; \eta \right\rangle \equiv \xi_{11}\eta_{22} + \eta_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\eta_{21} - \xi_{21}\eta_{12} = 0.$$

On définit alors pour $t \in \mathbb{R}$

$$\xi_t = \xi + t\eta$$

et l'on observe que par construction $\det\xi_t = \det\xi = \beta$. En utilisant encore l'argument de compacité on peut trouver $t_1 < 0 < t_2$ tels que $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} \in E$, i.e.

$$\lambda_1(\xi_{t_i}) + \lambda_2(\xi_{t_i}) = 1-\alpha,\ i = 1, 2;$$

d'où le résultat (la formule de représentation pour $\operatorname{intRco}E$ se montre sans difficulté).

ii) Etape 1: On commence par observer que si $(1-\alpha)^2 - 4\beta < 0$ ($\Rightarrow \beta > 0$), alors $E = \emptyset$. En effet, supposons par l'absurde que $\xi \in E$; on devrait alors avoir

$$0 < \beta \leq \det\xi = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2(1-\alpha-\lambda_2),$$

par conséquent

$$\lambda_2^2 - (1-\alpha)\lambda_2 + \beta < 0,$$

ce qui est absurde.
On supposera donc par la suite que

$$(1-\alpha)^2 - 4\beta \geq 0.$$

Etape 2: Soit

$$X = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) \leq 1-\alpha,\ g(\xi) \leq (1-\alpha)^2 - 4\beta\right\}.$$

Montrons que $X \equiv \operatorname{co}E$.
On commence par observer que $\operatorname{co}E \subset X$, car X est convexe puisque f et g sont des fonctions convexes ($g(\xi) = (\xi_{11} - \xi_{22})^2 + (\xi_{12} + \xi_{21})^2$). De plus $E \subset X$ (c.f. plus bas).
Montrons donc que $E \subset X$.
Cas 1: Si $\beta \leq 0$ alors on a que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$f(\xi) = \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) \leq 1-\alpha \Rightarrow g(\xi) \leq (1-\alpha)^2 - 4\beta;$$

en effet

$$\begin{aligned} g(\xi) &= |\xi|^2 - 2\det\xi \leq |\xi|^2 + 2|\det\xi| = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \\ &= (f(\xi))^2 \leq (1-\alpha)^2 \leq (1-\alpha)^2 - 4\beta. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) = 1-\alpha, \quad \det\xi \geq \beta\right\} \\ &\subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) = 1-\alpha\right\} = X. \end{aligned}$$

Cas 2: Si $\beta > 0$, alors

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) = 1-\alpha, \quad g(\xi) \leq (1-\alpha)^2 - 4\beta\right\}.$$

En effet si $f(\xi) = 1-\alpha$, alors

$$g(\xi) = (1-\alpha)^2 - 2(|\det\xi| + \det\xi) \leq (1-\alpha)^2 - 4\beta \Leftrightarrow$$

$$|\det\xi| + \det\xi \geq 2\beta \underset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \det\xi \geq \beta.$$

Etape 3: Il reste à montrer que $X \subset \operatorname{co}E$. Comme X est compact, il suffit de démontrer que $\partial X \subset \operatorname{co}E$.

Cas 1: $\beta \leq 0$. Supposons que $\xi \in \partial X$; si de plus $\det \xi \geq 0 \geq \beta$ alors $\xi \in E \Rightarrow \xi \in \text{co}E$.
Supposons donc $\det \xi \leq \beta \leq 0$. Alors, à une rotation près, $\exists x \in (0,1)$ tel que

$$\xi = \begin{pmatrix} -(1-\alpha)x & 0 \\ 0 & (1-\alpha)(1-x) \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-x) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \xi \in \text{co}E.$$

Cas 2: $\beta > 0$. On a dans ce cas que

$$\begin{aligned} \partial X &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) = 1-\alpha, \quad g(\xi) \leq (1-\alpha)^2 - 4\beta\right\} \\ &\quad \cup \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) \leq 1-\alpha, \quad g(\xi) = (1-\alpha)^2 - 4\beta\right\} \\ &= E \cup \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f(\xi) \leq 1-\alpha, \quad g(\xi) = (1-\alpha)^2 - 4\beta\right\}. \end{aligned}$$

Soit donc ξ telle que $f(\xi) < 1-\alpha$ et $g(\xi) = (1-\alpha)^2 - 4\beta$ (si $\xi \in E$ le résultat est trivial). On remarque que, puisque ξ est de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

ξ_t définie par

$$\xi_t = \xi + tI$$

est telle que

$$g(\xi_t) = g(\xi), \quad \forall t$$

car

$$g(\xi_t) = |\xi_t|^2 - 2\det \xi_t = (x-y)^2 = g(\xi), \quad \forall t.$$

On a donc, par le même argument que précédemment, $\exists\ t_1 < 0 < t_2$ tels que

$$f(\xi_{t_1}) = f(\xi_{t_2}) = 1-\alpha \Rightarrow \xi_{t_1}, \xi_{t_2} \in \text{co}E \Rightarrow \xi \in \text{co}E.$$

■

En appliquant les théorèmes d'existence du Chapitre 2, on peut obtenir le résultat suivant:

Théorème 4.9 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $\varphi \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que*

$$\lambda_1(D\varphi) + \lambda_2(D\varphi) < 1, \quad \det D\varphi > 0, \ p.p. \ dans\ \Omega,$$

alors il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega)$ satisfaisant

$$\lambda_1(Du) + \lambda_2(Du) = 1, \quad \det Du > 0, \ p.p. \ dans\ \Omega.$$

Dém. Ce théorème n'est qu'une conséquence du Théorème 2.15 ou via la propriété d'approximation donnée ci-dessous. Tout d'abord on trouve $\delta_0 > 0$ tel que

$$\det D\varphi \geq \delta_0 > 0$$

Soit $\delta \geq \delta_0$ et

$$E_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) = 1 - \delta, \quad \det \xi \geq \delta\right\}$$

$(E = E_{\delta_0})$ alors d'après le théorème précédent on a

$$\operatorname{Rco} E_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) \leq 1 - \delta, \quad \det \xi \geq \delta\right\}.$$

En combinant le Théorème 2.13 et le Théorème 2.12 on arrive au résultat voulu. ■

4.4 Problème sous la contrainte det$Du = 1$: Les puits de potentiel

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et borné, $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ une fonction donnée et $W : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ telle que

$$W(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \xi \in E = SO(2)A \cup SO(2)B,$$

avec $\det A = \det B = 1$.

On considère

$$I(u) = \int_\Omega W(Du(x))dx : u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2). \tag{4.5}$$

Le problème consiste à minimiser I, parmi toutes les fonctions $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$. On a vu que si on trouve une fonction $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ telle que

$$Du \in E = SO(2)A \cup SO(2)B,$$

avec $\det A = \det B = 1$, alors cette fonction est un minimum de (4.5).

Nous commençons par quelques considérations algébriques.

Proposition 4.10 *Soit* $0 < \lambda < 1$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

et

$$E = SO(2)I \cup SO(2)\Lambda.$$

Soit

$$F(\xi) = \sqrt{(\xi_{11} - \xi_{22})^2 + (\xi_{12} + \xi_{21})^2} + \sqrt{(\frac{1}{\lambda}\xi_{11} - \lambda\xi_{22})^2 + (\lambda\xi_{12} + \frac{1}{\lambda}\xi_{21})^2}$$

$$G(\xi) = (\xi_{11} - \xi_{22})^2 + (\xi_{12} + \xi_{21})^2 + (\frac{1}{\lambda}\xi_{11} - \lambda\xi_{22})^2 + (\lambda\xi_{12} + \frac{1}{\lambda}\xi_{21})^2.$$

Alors F et G sont convexes et invariantes par l'action (à gauche) de $SO(2)$; de plus

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : F(\xi) = \frac{1}{\lambda} - \lambda,\ G(\xi) = \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)^2,\ \det \xi = 1 \right\},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Rco} E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : F(\xi) \le \frac{1}{\lambda} - \lambda,\ \det \xi = 1 \right\}, \\ \operatorname{int} \operatorname{Rco} E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : F(\xi) < \frac{1}{\lambda} - \lambda,\ \det \xi = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\delta > 0$ suffisamment petit,

$$\xi_1 = \operatorname{diag}(1 - \delta, 1/(1-\delta)),\ \xi_2 = \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda}{1-\delta}, \frac{1-\delta}{\lambda}\right) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E.$$

Dém. Le résultat découle de la représentation obtenue par Sverak et le Corollaire 8.3 de [21].
1) Le fait que F et G sont convexes et invariantes par l'action (à gauche) de $SO(2)$ ne présente pas de difficultés particulières.
2) Montrons maintenant que si

$$X = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : F(\xi) = \frac{1}{\lambda} - \lambda,\ G(\xi) = \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)^2,\ \det \xi = 1 \right\}$$

alors $E = X$. Or

$$F(I) = F(\Lambda) = \frac{1}{\lambda} - \lambda,\ G(I) = G(\Lambda) = \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)^2,\ \det I = \det\Lambda = 1$$

de plus F, G et det sont invariants par l'action (à gauche) de $SO(2)$, on a donc une première inclusion: $E \subset X$. Soit $\xi \in X$ alors soit

$$\left[(\xi_{11} - \xi_{22})^2 + (\xi_{12} + \xi_{21})^2\right] = 0$$

et donc $\xi \in SO(2)$ ou alors

$$\left[(\frac{1}{\lambda}\xi_{11} - \lambda\xi_{22})^2 + (\lambda\xi_{12} + \frac{1}{\lambda}\xi_{21})^2\right] = 0$$

ce qui implique que $\xi \in SO(2)\Lambda$. Dans tous les cas on trouve que $\xi \in E$.
3) On appelle

$$Y = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : F(\xi) \leq \frac{1}{\lambda} - \lambda,\ \det\xi = 1\right\}.$$

On va montrer que $\mathrm{Rco}\, E = Y$. Pour ce faire on utilise la formule de représentation établie par Sverak (c.f. [21]), i.e.,

$$\mathrm{Rco}\, E = \left\{ \begin{array}{c} \xi = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \leq 1,\ \det\xi = 1 \end{array} \right\}.$$

En exprimant y_1, y_2, z_1, z_2 en termes de ξ_{ij} on trouve

$$\begin{cases} \xi_{11} = y_1 + \lambda z_1 \\ \xi_{12} = -(y_2 + \frac{1}{\lambda} z_2) \\ \xi_{21} = y_2 + \lambda z_2 \\ \xi_{22} = y_1 + \frac{1}{\lambda} z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) y_1 = \frac{1}{\lambda}\xi_{11} - \lambda\xi_{22} \\ \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) y_2 = \lambda\xi_{12} + \frac{1}{\lambda}\xi_{21} \\ \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) z_1 = -(\xi_{11} - \xi_{22}) \\ \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) z_2 = -(\xi_{12} + \xi_{21}) \end{cases}.$$

Comme

$$F(\xi) = \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right)$$

on a immédiatement le résultat.
4) On traite maintenant la formule de représentation pour $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E$. On appelle Z le membre de droite dans la formule. L'inclusion $Z \subset \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ est facile et on va donc montrer celle réciproque. Soit $\xi \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$; alors on peut supposer (eventuellement par des rotations) que $\xi_{12} = 0$ et donc comme $\det \xi = 1$ on en déduit que si

$$\xi_t = \begin{pmatrix} \xi_{11} & 0 \\ \xi_{21} + t & 1/\xi_{11} \end{pmatrix},$$

alors $\xi = \xi_0$ et

$$\det \xi_t \equiv 1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme $\xi \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ on trouve que $\xi_t \in \operatorname{Rco} E$ pour tout t suffisamment petit. On observe finalement que la fonction $t \to F(\xi_t)$ est strictement convexe (noter cependant que la fonction $\xi \to F(\xi)$ n'est pas strictement convexe) et donc si $t \neq 0$ est suffisamment petit on a

$$F(\xi) < \frac{1}{2} F(\xi_{-t}) + \frac{1}{2} F(\xi_t) \leq \frac{1}{\lambda} - \lambda$$

et le résultat voulu $\xi \in Z$.
5) Le fait que $\xi_1, \xi_2 \in \operatorname{intRco} E$ est évident. ■

Théorème 4.11 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert et*

$$E = SO(2)A \cup SO(2)B$$

avec $\det A = \det B > 0$. *Soit*

$$\xi \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$$

alors il existe $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ *telle que*

$$\begin{cases} Du(x) \in E, \ a.e. \ in \ \Omega \\ u(x) = \xi x, \ on \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarque 26 *Si* $\det A \neq \det B$ *ce résultat a été déjà obtenu par Müller-Sverak [40] et Dacorogna-Marcellini [19].*

Dém. Etape 1: On commence avec quelques considérations algébriques. On observe que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que

$$A = I \text{ et } B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}.$$

En effet tout d'abord on diagonalise BA^{-1}, i.e. on trouve $R_a, R_b \in SO(2)$ de façon que

$$R_a BA^{-1} R_b = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

On peut donc en déduire que

$$R_{-b} EA^{-1} R_b = SO(2)I \cup SO(2)\Lambda.$$

Etape 2: On définit pour $\delta \in (0,1]$

$$I_\delta = \begin{pmatrix} (1-\delta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\delta)} \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda_\delta = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{1-\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1-\delta}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Par la Proposition 4.10, pour δ suffisamment petit,

$$I_\delta, \ \Lambda_\delta \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E.$$

Si on pose

$$E_\delta = SO(2) I_\delta \cup SO(2) \Lambda_\delta,$$

$$\begin{aligned} F_\delta(\xi) &= \left[\left(\frac{\xi_{11}}{(1-\delta)} - (1-\delta)\xi_{22} \right)^2 + \left((1-\delta)\xi_{12} + \frac{\xi_{21}}{(1-\delta)} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &+ \left[\left(\frac{(1-\delta)\xi_{11}}{\lambda} - \frac{\lambda \xi_{22}}{1-\delta} \right)^2 + \left(\frac{\lambda \xi_{12}}{1-\delta} + \frac{(1-\delta)\xi_{21}}{\lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

et de manière analogue pour G_δ, de façon que

$$E_\delta = \left\{ \begin{array}{c} \xi : F_\delta(\xi) = \frac{(1-\delta)^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^2}, \ G_\delta(\xi) = \left(\frac{(1-\delta)^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^2} \right)^2, \\ \det \xi = 1 \end{array} \right\},$$

alors

$$E_\delta \subset \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$$

et donc

$$\operatorname{Rco} E_\delta \subset \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \ \forall \delta \in (0,1]\,.$$

Par conséquent E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d' approximation avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$. Finalement, en combinant la Proposition 4.10 avec le Théorème 2.24 et le Théorème 2.21 on trouve le résultat. ■

4.5 Un problème de structure optimale

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et borné. On considère le problème de Dirichlet-Neumann suivant:

$$\begin{cases} \Delta w(x) \in \{0,1\}\,, & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ \det D^2 w(x) \geq 0, & \text{p.p. } x \in \Omega, \\ w(x) = \varphi(x)\,, Dw(x) = D\varphi(x)\,, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème algébrique associé est (on note par $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ l'ensemble des matrices 2×2 symétriques) de trouver l'enveloppe rang un convexe de

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ \operatorname{trace}\xi \in \{0,1\}\,, \ \det\xi \geq 0\right\}.$$

Le résultat principal de cette section est alors le théorème suivant:

Théorème 4.12 *Soit*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ \operatorname{trace}\xi \in \{0,1\}\,, \ \det\xi \geq 0\right\},$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Rco} E &= \operatorname{co} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ 0 \leq \operatorname{trace}\xi \leq 1, \ \det\xi \geq 0\right\}, \\ \operatorname{int}\operatorname{Rco} E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ 0 < \operatorname{trace}\xi < 1, \ \det\xi > 0\right\}. \end{aligned}$$

En combinant le théorème précédent avec le Corollaire 2.18 on obtient:

Théorème 4.13 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $\varphi \in C^2_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfaisant*

$$\begin{cases} 0 \leq \Delta\varphi(x) \leq 1, & p.p. \ x \in \Omega, \\ \det D^2\varphi(x) > 0, & p.p. \ x \in \Omega, \end{cases}$$

ou $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ *telle que*

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \Delta\varphi(x) \leq 1-\varepsilon, & p.p.\ x \in \Omega, \\ \det D^2\varphi(x) \geq \varepsilon, & p.p.\ x \in \Omega, \end{cases}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$*; alors il existe* $w \in \varphi + W_0^{2,\infty}(\Omega)$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \Delta w(x) \in \{0,1\}, & p.p.\ x \in \Omega, \\ \det D^2 w(x) \geq 0, & p.p.\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Le problème (4.6) provient d'un problème de structure optimale; en effet on peut montrer que si on définit

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix},$$

alors ce $\overline{u}$ est le minimum de l'intégrale

$$I(u) = \int_\Omega f(Du(x))dx : u \in u_0 + W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2),$$

où

$$f(\xi) = \begin{cases} 1+|\xi|^2 & \text{si } \xi \neq 0, \\ 0 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

et $u = u_0 = D\varphi$ (ce $\overline{u}$ est alors appelé structure optimale). Voyons tout d'abord ce résultat. Kohn-Strang (c.f. [33]) ont montré que

$$Qf(\xi) = \begin{cases} 1+|\xi|^2 & \text{si } |\xi|^2 + 2|\det\xi| \geq 1 \\ \\ 2\sqrt{|\xi|^2+2|\det\xi|} - 2|\det\xi| & \text{si } |\xi|^2 + 2|\det\xi| < 1, \end{cases} \tag{4.7}$$

où, par définition,

$$Qf = \sup\{g \leq f : g \text{ est quasiconvexe}\}.$$

En particulier, si $\operatorname{trace}\xi$, $\det\xi \geq 0$, alors

$$Qf(\xi) = 2\sqrt{|\xi|^2+2|\det\xi|} - 2|\det\xi| = 2\operatorname{trace}\xi - 2\det\xi,$$

c'est-à-dire $Qf(\xi)$ est quasiaffine et donc son intégrale ne dépend que de la donnée au bord $\overline{u}(x)$. De plus, comme $u_0 = \overline{u}$ sur $\partial\Omega$ et $\det D\overline{u}$, $\det Du_0$, $\operatorname{trace} D\overline{u}$, $\operatorname{trace} Du_0 \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Qf(D\overline{u}(x))dx &= \int_\Omega \{2\operatorname{trace} D\overline{u} - 2\det D\overline{u}\}\, dx \\
&= \int_\Omega \{2\operatorname{trace} Du_0 - 2\det Du_0\}\, dx \\
&= \int_\Omega Qf(Du_0(x))dx.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que comme soit $\Delta w\,(x) = 0$, soit $\Delta w\,(x) = 1$ p.p. dans Ω, alors de

$$|Du|^2 + 2|\det Du| = (\triangle w)^2$$

et de (4.7) on a que

$$Qf(D^2 w(x)) = f(D^2(w(x)), \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

donc

$$Qf(D\overline{u}(x)) = f(D\overline{u}(x)) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(D\overline{u}(x))dx &= \int_\Omega Qf(D\overline{u}(x))dx \\
&= \int_\Omega Qf(Du_0(x))dx \\
&= \min\left\{ \int_\Omega Qf(Du(x))dx : u \in u_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2) \right\} \\
&\leq \inf\left\{ \int_\Omega f(Du(x))dx : u \in u_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2) \right\},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Dém. (du Théorème 4.12) Soient

$$\begin{aligned} X &= \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \,:\, 0 \leq \operatorname{trace}\xi \leq 1,\ \det\xi \geq 0\right\} \\ Y &= \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \,:\, 0 < \operatorname{trace}\xi < 1,\ \det\xi > 0\right\}. \end{aligned}$$

Etape 1: On va prouver que

$$\operatorname{Rco} E \subset \operatorname{co} E \subset X.$$

La première inclusion est toujours valable et la deuxième provient du fait que $E \subset X$ et que X est convexe. En effet, soient $\xi, \eta \in X$, $0 \leq t \leq 1$ on veut montrer que $t\xi + (1-t)\,\eta \in X$. Il est évident que la première inégalité de la définition de X est vraie car $\xi \to \operatorname{trace}\xi$ est linéaire. On traite maintenant la deuxième. On observe que, comme $\det\xi = \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2$, $\det\eta = \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 \geq 0$ et $\operatorname{trace}\xi, \operatorname{trace}\eta \geq 0$, alors $\xi_{11}, \xi_{22}, \eta_{11}, \eta_{22} \geq 0$ et on a (on suppose alors que $\xi_{11}, \eta_{11} > 0$ sinon l'inégalité est triviale)

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{\xi}; \eta \right\rangle &\equiv \xi_{11}\eta_{22} + \eta_{11}\xi_{22} - 2\xi_{12}\eta_{12} \\ &\geq \xi_{11}\frac{\eta_{12}^2}{\eta_{11}} + \eta_{11}\frac{\xi_{12}^2}{\xi_{11}} - 2\xi_{12}\eta_{12} = \frac{\left(\xi_{11}\eta_{12} - \eta_{11}\xi_{12}\right)^2}{\xi_{11}\eta_{11}} \geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\det\left(t\xi + (1-t)\,\eta\right) = t^2 \det\xi + t\,(1-t)\left\langle \widetilde{\xi}; \eta \right\rangle + (1-t)^2 \det\eta \geq 0.$$

Etape 2 : on prouve maintenant que

$$X \subset \operatorname{Rco} E.$$

Comme X est compact, il est suffisant de prouver que $\partial X \subset \operatorname{Rco} E$. Cependant il est facile de voir que

$$\partial X = E \cup \left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \,:\, 0 \leq \operatorname{trace}\xi \leq 1,\ \det\xi = 0\right\},$$

donc il nous reste à montrer

$$\left\{\xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \,:\, 0 \leq \operatorname{trace}\xi \leq 1,\ \det\xi = 0\right\} \subset \operatorname{Rco} E.$$

On suppose que ξ est telle que $0 < t = \operatorname{trace} \xi < 1$ et $\det \xi = 0$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\xi &= \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(t-x)} \\ \sqrt{x(t-x)} & t-x \end{pmatrix} = t\xi_1 + (1-t)\,\xi_2 \\
&= t\begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \\ \sqrt{\alpha(1-\alpha)} & 1-\alpha \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où $x = t\alpha$. Le résultat découle du fait que $\xi_1, \xi_2 \in E$ et $\det(\xi_1 - \xi_2) = 0$.
Etape 3 : Le fait que $Y = \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ est facile. ■

4.6 Un exemple académique

Nous allons maintenant considérer l'Exemple 4.5. Nous présenterons une version plus générale du problème.

Théorème 4.14 *Soient $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$ avec $a_{12} = a_{21}$. Soit*

$$E = \left\{ \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \; : \; |\xi_{ij}| = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \right\}.$$

alors

$$\operatorname{co} E = \left\{ \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \; : \; |\xi_{ij}| \le a_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \right\}.$$

Cas 1 : Si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ alors

$$\operatorname{Rco} E = \left\{ \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \; : \; |\xi_{12}| = a_{12}, \; |\xi_{11}| \le a_{11}, \; |\xi_{22}| \le a_{22} \right\}.$$

Cas 2 : Si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ alors

$$\operatorname{Rco} E = \left\{ \begin{array}{c} \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \; : \; |\xi_{ij}| \le a_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \\ |a_{22}\xi_{11} - a_{11}\xi_{22}| \le -\det \xi = -\xi_{11}\xi_{22} + \xi_{12}^2 \end{array} \right\}.$$

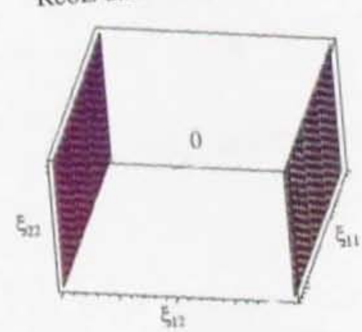
Cas 3 : Si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ alors

$$\operatorname{Rco} E \subset \left\{ \begin{array}{c} \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \; : \; |\xi_{ij}| \le a_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \\ |a_{22}\xi_{11} - a_{11}\xi_{22}| \le a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - \det \xi \end{array} \right\}.$$

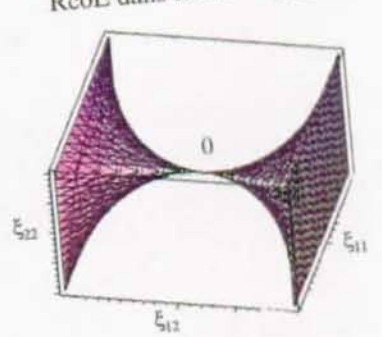
Remarque 27 *(1) Si on considère la matrice 0, alors il est clair que dans le Cas 1 : $0 \notin \operatorname{Rco} E$, tandis que dans le Cas 2 : $0 \in \operatorname{Rco} E$ mais $0 \notin \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$. On peut montrer, cependant, que dans le Cas 3 : $0 \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$.*

(2) Pour appliquer ce résultat aux équations aux dérivées partielles il faut que $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E \neq \emptyset$*; ceci n'arrive pas dans le Cas 1, contrairement aux autres cas. Cependant on a besoin également de la propriété d'approximation de l'enveloppe rang un convexe que, malheureusement, on n'a pas réussi à montrer.*
(3) Dans le Cas 3 on n'a pas pu caractériser $\operatorname{Rco} E$*; l'ensemble donné au deuxième membre est trop grand.*

RcoE dans le cas $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$



RcoE dans le cas $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$



Dém. La formule de représentation de l'enveloppe convexe est triviale.
Cas 1 : On note

$$X=\left\{\xi=(\xi_{ij})\in\mathbb{R}_s^{2\times 2}\ :\ |\xi_{12}|=a_{12},\ |\xi_{11}|\leq a_{11},\ |\xi_{22}|\leq a_{22}\right\}.$$

1) Il est clair que $X\subset \operatorname{Rco} E$. Tout $\xi\in X$ (on suppose, sans perte de généralité, que $\xi_{12}=a_{12}$) peut s'écrire sous la forme

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi_{11} & a_{12}\\ a_{12} & \xi_{22}\end{pmatrix}=\frac{a_{11}+\xi_{11}}{2a_{11}}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & \xi_{22}\end{pmatrix}+\frac{a_{11}-\xi_{11}}{2a_{11}}\begin{pmatrix}-a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & \xi_{22}\end{pmatrix}$$

et de manière analogue,

$$\begin{pmatrix}\pm a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & \xi_{22}\end{pmatrix}=\frac{a_{22}+\xi_{22}}{2a_{22}}\begin{pmatrix}\pm a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}+\frac{a_{22}-\xi_{22}}{2a_{22}}\begin{pmatrix}\pm a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & -a_{22}\end{pmatrix}$$

pour en déduire finalement que $\xi\in\operatorname{Rco} E$.
2) On montre maintenant l'autre inclusion. On observe que $E\subset X$. Donc pour prouver le résultat il est suffisant de montrer que X est un ensemble

rang un convexe. Alors soient $\xi, \eta \in X$ avec $\det(\xi - \eta) = 0$ et $0 < t < 1$. Or comme $\xi, \eta \in X$, alors $(\xi_{12} - \eta_{12})^2$ est soit nul soit égal à $4a_{12}^2$. Le deuxième cas ne peut se produire, autrement on aurait

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 = \det(\xi - \eta) = (\xi_{11} - \eta_{11})(\xi_{22} - \eta_{22}) - (\xi_{12} - \eta_{12})^2 \\ \leq (|\xi_{11}| + |\eta_{11}|)(|\xi_{22}| + |\eta_{22}|) - 4a_{12}^2 \leq 4a_{11}a_{22} - 4a_{12}^2 < 0, \end{array} \right. \tag{4.8}$$

ce qui est absurde. Donc le seul cas possible est $\xi_{12} = \eta_{12}$ (avec $|\xi_{12}| = a_{12}$). Par conséquent le résultat voulu $t\xi + (1-t)\eta \in X$ est immédiat.
Cas 2 : Comme précédemment on appelle

$$X = \left\{ \begin{array}{c} \xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ |\xi_{ij}| \leq a_{ij}, \quad i,j = 1,2 \\ |a_{22}\xi_{11} - a_{11}\xi_{22}| \leq -\det\xi = -\xi_{11}\xi_{22} + \xi_{12}^2 \end{array} \right\}.$$

1) On peut facilement voir que $E \subset X$ et que X est un ensemble rang un convexe (même polyconvexe) car toutes les fonctions qui apparaissent dans les inégalités sont polyconvexes et donc rang un convexes. On a alors $\operatorname{Rco} E \subset X$.
2) On traite maintenant l'inclusion $X \subset \operatorname{Rco} E$. On observe que si l'on prouve (c.f. ci-dessous) que $\partial X \subset \operatorname{Rco} E$, alors le résultat est immédiat. En effet si $\xi \in \operatorname{int} X$, comme X est compact, on peut trouver pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$ avec $rang\lambda = 1$, $t_1 < 0 < t_2$, tels que

$$\xi + t_1\lambda, \ \xi + t_2\lambda \in \partial X$$

et donc, comme $\partial X \subset \operatorname{Rco} E$, on a que $\xi \in \operatorname{Rco} E$.
On aimerait montrer que si $\xi \in \partial X$ alors $\xi \in \operatorname{Rco} E$. On notera que la dernière inégalité dans la définition de X est équivalente, en tenant à l'esprit que $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, à

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a_{12}^2 - \xi_{12}^2 \leq (a_{11} - \xi_{11})(a_{22} + \xi_{22}) \\ 0 \leq a_{12}^2 - \xi_{12}^2 \leq (a_{11} + \xi_{11})(a_{22} - \xi_{22}). \end{array} \right. \tag{4.9}$$

Si $|\xi_{11}| = a_{11}$ ou $|\xi_{22}| = a_{22}$ alors par (4.9) nécessairement on a $|\xi_{12}| = a_{12}$. Cependant si $|\xi_{12}| = a_{12}$ alors, par le même argument du Cas 1, on déduit que $\xi \in \operatorname{Rco} E$.
Maintenant on suppose que $|\xi_{ij}| < a_{ij}$ et (comme $\xi \in \partial X$) une des deux inégalités dans (4.9) devient une égalité; sans perte de généralité, disons la première (la deuxième reste une inegalité stricte). Si on appelle

$$\begin{array}{rcl} V_1 & = & \{\xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ a_{12}^2 - \xi_{12}^2 = (a_{11} - \xi_{11})(a_{22} + \xi_{22})\} \\ V_2 & = & \{\xi = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}_s^{2\times 2} \ : \ a_{12}^2 - \xi_{12}^2 = (a_{11} + \xi_{11})(a_{22} - \xi_{22})\} \\ Y_1 & = & \partial X \cap V_1 \end{array}$$

alors $\xi \in \operatorname{relint} Y_1$ (l'intérieur relatif de Y_1). On peut alors choisir

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ de façon que

$$\xi + t\lambda \in V_1,\ \forall t \in \mathbb{R};$$

ceci est toujours possible en choisissant

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{a_{12} + \xi_{12}}{a_{11} - \xi_{11}}$$

ou plus généralement toute solution non nulle de

$$\lambda_2^2 (a_{11} - \xi_{11}) + 2\lambda_1\lambda_2\xi_{12} - \lambda_1^2 (a_{22} + \xi_{22}) = 0.$$

Alors, comme $\xi \in \operatorname{relint} Y_1$ et Y_1 est compact, on peut trouver $t_1 < 0 < t_2$, tels que

$$\xi + t_1\lambda,\ \xi + t_2\lambda \in \partial Y_1.$$

Or $\widetilde{\xi} \in \partial Y_1$ signifie que soit $\left|\widetilde{\xi}_{ij}\right| = a_{ij}$ pour certains i, j (et ce cas a été déjà traité), soit $\widetilde{\xi} \in V_2$. Il reste donc à analyser le cas $\left|\xi_{ij}\right| < a_{ij}$ et $\xi \in V_1 \cap V_2$, i.e. lorsque dans (4.9) les deux inégalités deviennent deux égalités. A noter que tout $\xi \in V_1 \cap V_2$ est de la forme

$$\xi = \xi_{11} \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \\ \pm\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} & \frac{a_{22}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

et alors si on note par

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \\ \pm\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} & \frac{a_{22}}{a_{11}} \end{pmatrix},$$

qui est une matrice de rang un, on trouve que

$$\xi + t\lambda \in V_1 \cap V_2,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

On applique alors le même argument, notamment si $\left|\xi_{ij}\right| < a_{ij}$ et $\xi \in V_1 \cap V_2$ on peut trouver $t_1 < 0 < t_2$, tels que une des inégalités $\left|\xi_{ij}\right| < a_{ij}$ devient une égalité; dans ce cas on conclut que $\xi \in \operatorname{Rco} E$ par les étapes précédentes.
Cas 3 : L'inclusion espérée repose sur les mêmes raisons que dans le Cas 2. ■

Bibliographie

[1] J.J. Alibert et B. Dacorogna: An example of a quasiconvex function that is not polyconvex in two dimensions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **117** (1992), 155-166

[2] G. Aubert et R. Tahraoui: Théorèmes d'existence pour des problèmes du calcul des variations, *J. Differential Equations* **33** (1979), 1-15.

[3] J.M. Ball: Convexity conditions and existence theorems in non linear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1977), 337-403

[4] J.M. Ball et R.D. James: Fine phase mixtures as minimizers of energy, *Arch. Rational Mech. Anal.* **100** (1987), 15-52.

[5] J.M. Ball et R.D. James: Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two wells problem, *Phil. Trans. Royal Soc. London A* **338** (1991), 389-450.

[6] M. Bousselsal et H. Le Dret: Remarks on the quasiconvex envelope of some functions depending on quadratic forms; preprint (1999).

[7] A. Bressan et F. Flores: On total differential inclusions, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **92** (1994), 9-16

[8] G. Buttazzo, B. Dacorogna et W. Gangbo: On the envelopes of functions depending on singular values of matrices, B*oll. Un. Mat. Ital.* **8B** (1994), 17-35.

[9] P. Cardaliaguet, B. Dacorogna, W. Gangbo et N. Georgy: Geometric restrictions for the existence of viscosity solutions, *Annales Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* **16** (1999), 189-220.

[10] A. Cellina: On the differential inclusion $x' \in \{-1, 1\}$, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **69** (1980), 1-6.

[11] M. Chipot et D. Kinderlehrer: Equilibrium configurations of crystals, *Arch. Rational Mech. Anal.* **103** (1988), 237-277.

[12] P.G. Ciarlet:*Elasticité tridimensionnelle*, Masson 1986.

[13] E.A. Coddington et N. Levinson: *Theorie of ordinary differential equations;* MacGraw-Hill, New York (1955).

[14] B. Dacorogna: *Direct Methods in the Calculus of Variations.* Applied Mathematical Sciences 78 (New York: Springer, 1989).

[15] B. Dacorogna et P. Marcellini: A counterexample in the vectorial calculus of variations, in *Material instabilities in continuum mechanics*, ed. J.M. Bal, Oxford Sci. Publ., Oxford, 1988, 77-83.

[16] B. Dacorogna et P. Marcellini: Existence of minimizers for non quasiconvex integrals; *Archive Rational Mech. Anal.* **131** (1995), 359-399.

[17] B. Dacorogna et P. Marcellini: Théorème d'existence dans le cas scalaire et vectoriel pour les équations de Hamilton-Jacobi, *C.R.Acad.Sci.Paris Sér. I* **322** (1996),237-40.

[18] B. Dacorogna et P. Marcellini: General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial cases. *Acta Mat.* **178** (1997), 1-37.

[19] B. Dacorogna et P. Marcellini: Sur le problème de Cauchy-Dirichlet pour les systèmes d'équations non linéaires du premier ordre. *C.R.Acad.Sci.Paris Sér. I* **323** (1996), 599-602.

[20] B. Dacorogna et P. Marcellini: Cauchy-Dirichlet problem for first order non linear systems. *J.Funct.Anal.* **152** (1998), 404-46.

[21] B. Dacorogna et P. Marcellini: *Implicit Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, (1999).

[22] B. Dacorogna, P. Marcellini et C. Tanteri: Equations de type implicite avec contraintes; *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. t. 330, Série I*, 271-274 (2000).

[23] B. Dacorogna et J. Moser: On a partial differential equation involving the Jacobian determinant, *Annales Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* **7** (1990), 1-26.

[24] B. Dacorogna et C. Tanteri: Implicit partial differential equations and the constraints of non linear elasticity, à paraître dans *Communications in Partial Differential Equations* (2000).

[25] B. Dacorogna et C. Tanteri : On the different convex hulls of sets involving singular values, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **111A** (1998), 89-102.

[26] F. S. De Blasi et G. Pianigiani: Differential inclusions in Banach spaces, *J. Diff. Eqs*, **66** (1987), 208-229.

[27] A. DeSimone et G. Dolzmann: Material instabilities in nematic elastomers; *Physica D,* **136** (2000), 175-191.

[28] I. Fonseca et L. Tartar: The gradient theory of phase transition for systems with two potential wells, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **128A** (1998), 1261-1280.

[29] M. Gromov: Convex integration of differential relations I, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **37** (1973), 329-343.

[30] L. Hörmander: *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1969.

[31] F. John: *Partial Differential Equations*, Fourth Edition, Springer-Verlag, 1982.

[32] R.V. Kohn: The relaxation on double-well energy, *Continuum Mech. and Thermodynamics* **3** (1991), 193-236.

[33] R.V. Kohn et G. Strang: Optimal design and relaxation of variational problems I, II, III, *Comm.Pure Appl. Math.* 39 (1986), 113-137, 139-182, 353-377.

[34] R. Magnanini et G. Talenti: On complex valued solutions to a 2D eikonal equation. Part one, qualitative properties; edited by G.Q. Chen and E. DiBenedetto in American Mathematical Society, Contemporary Mathematics Series, Volume 238 (1999), 203-229.

[35] P. Marcellini: *Alcuni recenti sviluppi nei problemi 19-esimo e 20-esimo di Hilbert*, Dipartimento di Matematica, Univ. di Firenze, 1997.

[36] P. Marcellini: *Alcune osservazioni sull'esistenza del minimo di integrali del calcolo delle variazioni senza ipotesi di convessità*, Rendiconti di Matematica, **13** (1980), 271-281.

[37] L. Mirsky: A trace inequality of John von Neumann, *Monatsh. für Math.* **79** (1975), 303-306.

[38] C.B. Morrey: *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[39] S. Müller: *Variational models for microstructure and phase transitions*, Lecture Notes no: 2, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, (1998).

[40] S. Müller et V. Sverak : Attainment results for the two-well problem by convex integration; ed. Jost J., International Press, (1996), 239-251.

[41] S. Müller et V. Sverak: Convex integrations with constraints and applications to phase transitions and partial differential equations, J. Eur. Math.Soc. 1 (1999), 393-422.

[42] G. Pianigiani: Differential inclusions. The Baire category method, in *Methods of nonconvex analysis*, edited by A. Cellina, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin (1990), 104-136.

[43] R.T. Rockafellar : *Convex Analysis*; Princeton University Press, (1970).

[44] W. Rudin: *Analyse fonctionnelle*, Ediscience International, (1995).

[45] V. Sverak: Rank one convexity does not imply quasiconvexity, *Proc. Royal Soc. Edinburgh,* **120A** (1992), 185-189.

[46] L. Tartar : Estimations fines des coefficients homogénéisés; in Ennio De Giorgi colloquium, edited by Krée P.; Research Notes in Math. 125, Pitman (1985), 168-187.

[47] F. A. Valentine: *Convex Sets*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, (1964).

[48] J. Von Neumann , Some matrix inequalities and metrization of matrix-space, *Tomsk Univ. Rev.* (1937), 286-300.

[49] K. Zhang : On the structure of quasiconvex hulls; Annales Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire 15 (1998), 663-686.

Curriculum Vitae

Née le 22 février 1973 à Rieti (Italie), j'ai obtenu la maturité scientifique auprès du Lycée scientifique Iucci de Rieti (note: 60/60).

En 1991, je me suis inscrite au Département de Mathématiques de l'Université de Rome La Sapienza, où j'ai reçu mon diplôme en 1995 (note: 110/110).

Pendant mes études universitaires, j'ai bénéficié d'une bourse Erasmus pour accomplir mon travail de diplôme "Introduzione ai problemi vettoriali del Calcolo delle Variazioni" à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, travail que j'ai effectué sous la supervision de M. le Prof. B. Dacorogna (EPFL) et M. le Prof. L. Boccardo (Université de Rome).

En 1996, j'ai reçu une bourse de la Confédération Suisse pour réaliser des travaux de recherche dans le domaine du Calcul des Variations, sous la direction de M. le Prof. B. Dacorogna.

En 1997, au bénéfice d'une bourse du Fonds National Suisse, je me suis incrite au doctorat, pour accomplir mon travail de recherche dans le domaine des équations aux dérivées partielles, sous la direction de M. le Prof. B. Dacorogna.

Engagée également comme assistante à l'EPFL, je travaille dans l'enseignement de l'Analyse de premier cycle dans la chaire de M. le Prof. C. A. Stuart.

Je suis co-auteur de trois pubblications:

B. Dacorogna, P. Marcellini et C. Tanteri: Equations de type implicite avec contraintes; *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. t. 330, Série I*, 271-274 (2000).
B. Dacorogna et C. Tanteri: Implicit partial differential equations and the constraints of non linear elasticity, à paraître dans *Communications in Partial Differential Equations* (2000).
B. Dacorogna et C. Tanteri : On the different convex hulls of sets involving singular values, *Proc. Royal Soc. Edinburgh 111A* (1998), 89-102.