APPROXIMATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DU SPECTRE D'UN OPERATEUR NON COMPACT DONNE PAR LA STABILITE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE D'UN PLASMA

THÈSE N° 239 (1976)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

JACQUES RAPPAZ

Ingénieur-physicien EPFL

originaire de Neyruz

(Vaud)

acceptée sur proposition du jury :

Prof. J. Descloux, rapporteur

Prof. P. A. Raviart, corapporteur

Prof. F. Troyon, corapporteur

Lausanne EPFL

1976

R E M E R C I E M E N T S

Je remercie vivement ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail :

Le Professeur Jean DESCLOUX du Département de Mathématiques de l'EPFL pour ses conseils, ses critiques constructives et l'encouragement qu'il m'a apportés durant ce travail.

Le Docteur F. TROYON et Monsieur R. GRUBER du Centre de Recherche en Physique des Plasmas EPFL pour les précieuses discussions qu'ils m'ont accordées.

Le Professeur N. NASSIF de l'Université Américaine de Beyrouth qui, dans le cadre d'un séjour à Lausanne, m'a suggéré une méthode pour les estimations d'erreurs.

Le Professeur P.A. RAVIART de l'Université de Paris VI pour avoir accepté d'être membre du jury.

Mesdames F. MULLER et M.F. DE CARMINE pour avoir tapé le texte.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

La méthode des éléments finis a été proposée par Ohto et al.[1] comme technique pour calculer la stabilité magnéto-hydrodynamique d'un plasma et plusieurs auteurs [2], [3], [4] ont appliqué cette méthode à des plasmas infiniment longs, axisymétriques. Dans le cas unidimensionnel, le problème est réduit à un problème aux valeurs propres dont la formulation est la suivante.

Soit $U = H_0^1(0,1) \times (L_2(0,1))^N$ et $V = (L_2(0,1))^{N+1}$ où $H_0^1(0,1)$ est l'espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable, de dérivées premières (en distribution) de carré intégrable et qui s'annulent en $x=0$ et $x=1$, $L_2(0,1)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $(0,1)$, N un entier positif. On notera $(\underline{u},\underline{v})_U = \int_0^1 (u_1' v_1' + \underline{u}^t \underline{v})dx$ et $(\underline{u},\underline{v})_V = \int_0^1 \underline{u}^t \underline{v}\, dx$ les produits scalaires dans U et V avec $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}$,

$u_1, v_1 \in H_0^1(0,1)$, $\underline{u}_2, \underline{v}_2 \in (L_2(0,1))^N$, $.^t$ la transposée. Soit $a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 (\alpha u_1' v_1' + u_1' \underline{\beta}^t \underline{v} + v_1' \underline{\beta}^t \underline{u} + \underline{u}^t \gamma \underline{v})dx$ la forme bilinéaire définie sur U avec la fonction α, le $(N+1)$ vecteur $\underline{\beta}$ et la $(N+1) \times (N+1)$ matrice γ suffisamment réguliers $(C^\infty[0,1])$. On suppose $\alpha(x)>0 \quad \forall x \in [0,1]$ et $\gamma(x)$ symétrique $\forall x \in [0,1]$.

Le problème est de trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $\underline{u} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ avec $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall \underline{v} \in U$. On notera $P_\sigma(a)$ l'ensemble de ces valeurs λ.

Pour calculer $P_\sigma(a)$ nous utiliserons la technique de Galerkin qui consiste à prendre une suite de sous-espaces $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de dimension finie de U telle que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} = U$ et à résoudre le problème: Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $\underline{u} \in U_n$, $\underline{u} \neq 0$ avec $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall \underline{v} \in U_n$. On notera $\sigma_n(a)$ l'ensemble de ces valeurs λ.

Mentionnons que dans le cas classique où $U = H_0^1(\Omega)$, $V = L_2(\Omega)$ et $a(.,.)$ est une forme elliptique sur U, les résultats d'approximation de $P_\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$ sont bien connus et des estimations d'erreurs sont données même dans le cas non symétrique ([9], [10], [11], [16]).

Ici <u>l'injection de U dans V n'est pas compacte</u> et il est nécessaire d'introduire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ plus grand que $P_\sigma(a)$, noté $\sigma(a)$, que l'on appellera spectre de la forme bilinéaire $a(.,.)$ et qui est défini par $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists (\underline{u}_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$, $\|\underline{u}_n\|_U = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\exists (C(n))_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tels que $|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leq C(n)\|\underline{v}\|_U \quad \forall \underline{v} \in U\}$. Si $a(.,.)$ est coercive on montre que $\sigma(a)$ est formé des inverses des valeurs spectrales de l'opérateur $A: V \to V$, range $(A) \subset U$, avec

$a(A\underline{f},\underline{v}) = (\underline{f},\underline{v})_V \quad \forall \underline{v} \in U,\ \forall \underline{f} \in V$. (chapitre I). $\sigma(a)$ peut contenir des valeurs propres infiniment dégénérées ou une partie continue. [4], [7], [chapitre III-exemples].

De façon générale si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ est tel que $\inf_{\underline{\varphi} \in U_n} \| \underline{u}-\underline{\varphi} \|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\forall \underline{u} \in U$ on a: pour tout $\lambda \in \sigma(a)$ il existe $\lambda_n \in \sigma_n(a)$ tel que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$. Par contre si $\lambda_n \in \sigma_n(a)$ et $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in \mathbb{R}$ alors <u>on n'a pas nécessairement $\lambda \in \sigma(a)$. On dira dans ce cas qu'il y a pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$.</u> (Voir chapitre III-exemples). Le but de ce travail est d'étudier $\sigma(a)$ et d'énoncer des conditions suffisantes sur les espaces U_n afin qu'il n'y ait pas pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$. Si, par exemple, la matrice γ_2 définie par le $N\times N$ bloc diagonal inférieur de γ ($\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \underline{\gamma}_3^t \\ \underline{\gamma}_3 & \gamma_2 \end{bmatrix}$) est constante, si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ est de classe S_p (p entier ≥ 1), c'est-à-dire si U_n peut se mettre sous la forme $U_n = S_n \times \prod_{j=1}^{N} T_n^{(j)}$ où $S_n = \{f \in C^0[0,1] \mid f(0)=f(1)=0,$ $f/_{[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]}$ est un polynôme de degré $\leq p, i=2,3,\ldots,m(n)\}$ et $T_n^{(j)} \supset \{f \in L_2(0,1) \mid f/_{(x_{i-1}^{(n)},\, x_i^{(n)})}$ est un polynôme de degré $\leq p-1$, $i=2,3,\ldots,m(n)\}$, $j=1,2,\ldots,N$ avec $0 = x_1^{(n)} < x_2^{(n)} <\ldots< x_{m(n)}^{(n)} = 1$ $m(n)$ points dans $[0,1]$ satisfaisant $\lim_{n\to\infty} \max_{i=2,\ldots,m(n)} |x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}| = 0$, alors on montre que $\sigma_n(a)$ ne pollue pas $\sigma(a)$,(c.à.d. si $\lambda_n \in \sigma_n(a)$ et

$\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \in \sigma(a)$). Si γ_2 n'est pas constant et si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ est de classe S_p on montre que $\sigma_n(a)$ ne pollue pas $\sigma(a)$ en dehors de $V(\gamma_2)$ = {valeurs propres de $\gamma_2(x)$, $o \leq x \leq 1$}, (c.à.d. si $\lambda_n \in \sigma_n(a)$ et $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in \mathbb{R} - V(\gamma_2)$ alors $\lambda \in \sigma(a)$),

Ce travail est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous considérons le problème abstrait : "Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in U$, $u \neq 0$ avec $a(u,v) = \lambda(u,v)_V$ $\forall v \in U$" où $U \subset V$ sont deux espaces de Hilbert séparables, de produits scalaires $(.,.)_U$ et $(.,.)_V$, U dense dans V, l'injection de U dans V étant continue mais non nécessairement compacte, et où $a(.,.)$ est une forme bilinéaire, continue, symétrique, coercive sur U. Nous définirons le spectre $\sigma(a)$ de la forme $a(.,.)$ et nous donnerons un premier résultat d'approximation de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$ lorsque nous utiliserons une méthode de Galerkin pour calculer $\sigma(a)$. Ce résultat indique dans quelle région de la droite réelle peut se produire la pollution s'il y en a. Ensuite nous traiterons le problème abstrait consistant à "trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in U$, $u \neq 0$ avec $a(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_V$ $\forall v \in U$" où l'injection de U dans V est supposée compacte et la forme bilinéaire sur U dépend continûment du paramètre λ. Sous certaines hypothèses nous donnerons des résultats d'approximation de ce problème, résultats qui seront utilisés dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous traiterons le problème concret donné par la magnétohydrodynamique. Nous donnerons des résultats précisant la nature de $\sigma(a)$. Nous construirons des espaces U_n de type éléments finis de manière à obtenir des résultats de bonne approximation de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$. Des estimations d'erreurs seront données.

Dans le troisième chapitre sera traité une série d'exemples illustrant les chapitres I et II, montrant les régions de pollution et de non-pollution.

Sur la base de ces résultats, un code unidimensionnel MHD (magnétohydrodynamique), donnant des résultats satisfaisants, a été mis au point par des physiciens du Centre de Recherche en Physique des Plasmas de l'EPFL.

Il reste à mentionner que le but poursuivi est l'étude d'un problème bidimensionnel fourni par la MHD qui présente des caractéristiques semblables à l'unidimensionnel. Un code a déjà été développé [19] mais l'état des recherches est purement expérimental et aucun résultat mathématique (convergence-non pollution) n'a été prouvé.

CHAPITRE I

§1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous énoncerons quelques résultats généraux concernant deux problèmes de natures différentes ; ces résultats seront utilisés lors de la résolution du problème spécifique donné par la stabilité magnétohydrodynamique d'un plasma.

Le premier problème considéré sera celui de "trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in U$, $u \neq 0$ avec $a(u,v) = \lambda(u,v)_V$ $\forall v \in U$ " où $U \subset V$ sont deux espaces de Hilbert de produits scalaires $(\cdot,\cdot)_U$ et $(\cdot,\cdot)_V$ et où $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue, coercive sur U . Nous supposerons que U est dense dans V et que l'injection de U dans V est continue mais *non nécessairement compacte*. Nous définirons le spectre de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et nous poserons le problème général qui est celui de la recherche de ce spectre. Nous discrétiserons ce problème par la méthode de Galerkin, après quoi nous donnerons quelques résultats de convergence.

Le second problème considéré sera celui de "trouver $\lambda \in O \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in U$, $u \neq 0$ avec $a(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U$ " où $a(\lambda,\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique $\forall\, \lambda \in O$, uniformément continue et uniformément coercive en $\lambda \in O$. Nous supposerons de plus que $a(\cdot,u,v)$ est continue $\forall\, u,v \in U$ et $a(\cdot,u,u)$ décroissante $\forall\, u \in U$. Ici l'injection de U dans V sera supposée compacte. L'approximation de Galerkin de ce problème sera aussi traitée et des résultats de convergence seront donnés.

§2. LE PROBLEME $a(u,v) = \lambda(u,v)_V$

Soit $U \subset V$ deux espaces de Hilbert réels séparables, de produits scalaires $(\cdot,\cdot)_U$, $(\cdot,\cdot)_V$ et de norme $\|\cdot\|_U = (\cdot,\cdot)_U^{\frac{1}{2}}$ et $\|\cdot\|_V = (\cdot,\cdot)_V^{\frac{1}{2}}$. On suppose U dense dans V et l'injection de U dans V continue (mais non nécessairement compacte). Soit $a : U \times U \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique telle qu'il existe $C > 0$, $\chi > 0$ avec $|a(u,v)| \leqslant C\|u\|_U \|v\|_U$ $\forall\, u,v \in U$ et $a(u,u) \geqslant \chi\|u\|_U^2$ $\forall\, u \in U$.

Si $f \in V$, le problème "trouver $u \in U$ tel que $a(u,v) = (f,v)_V$ $\forall\, v \in U$ " a une et une seule solution (théorème de Lax-Milgram). Nous appellerons A l'opérateur de V dans V , à range dans U , qui à f fait correspondre la solution u du problème.

Ainsi $A : V \to U \subset V$ est tel que $\forall\, f \in V$ on a $a(Af,v) = (f,v)_V$ $\forall\, v \in U$. L'opérateur A est linéaire, continu, autoadjoint, positif. (A est même continu de V dans U). Le spectre $\sigma(A)$ de A est une partie compacte de $\mathbb{R}^+$, bornée par $\|A\| = \sup\limits_{f\in V,\, \|f\|_V=1} \|Af\|_V$. Le spectre résiduel de A est vide et donc $\sigma(A)$ est formé uniquement du spectre ponctuel $P_\sigma(A)$ et du spectre continu $C_\sigma(A)$. ([6] p. 319)*.

Proposition I.2.1.

$\mu \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \exists (u_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$, $\|u_n\|_V = 1$ tel que $\|Au_n - \mu u_n\|_V \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Démonstration

($\Rightarrow$). $\mu \in \sigma(A) \Rightarrow$ ou bien $\mu \in P_\sigma(A)$ ou bien $\mu \in C_\sigma(A)$. $\mu \in P_\sigma(A) \Rightarrow \exists\, u \in V$, $\|u\|_V = 1$ tel que $Au = \mu u$ et on prend pour $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $u_n = u \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. $\mu \in C_\sigma(A) \Rightarrow$ Range $(A-\mu I)$ dense dans V mais $(A-\mu I)^{-1}$ est discontinu. (I = identité dans V). $\exists (v_n)_{n=1}^{\infty} \subset$ Range $(A-\mu I)$, $\|v_n\|_V = 1$ tel que $\|(A-\mu I)^{-1}v_n\|_V \to \infty$. En posant $u_n = [(A-\mu I)^{-1}v_n] \,/\, \|(A-\mu I)^{-1}v_n\|_V$ on a le résultat voulu.

($\Leftarrow$). On montre que $\mu \notin \sigma(A) \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\|Au-\mu u\|_V \geq \varepsilon \quad \forall\, u \in V$, $\|u\|_V = 1$. En effet si $\mu \notin \sigma(A)$ alors $(A-\mu I)$ est d'inverse continu sur V . Soit $\tilde{C} > 0$ tel que $\|(A-\mu I)^{-1}v\|_V \leq \tilde{C}\|v\|_V \quad \forall\, v \in V$. On a $\varepsilon = \frac{1}{\tilde{C}}$.

■

* Les définitions de $P_\sigma(A)$ et $C_\sigma(A)$ sont prises en sorte que $P_\sigma(A) \cap C_\sigma(A) = \emptyset$ ([6] p. 209).

DEFINITION I.2.1.

On appellera spectre de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et on notera $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid \exists (u_n)_{n=1}^{\infty} \subset U \ , \ \|u_n\|_U = 1$ et $\exists C(n) \ , \ C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tel que $|a(u_n,v) - \lambda(u_n,v)_V| \leq$ $\leq C(n) \|v\|_U \quad \forall \ v \in U\}$.

On appellera spectre ponctuel de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et on notera $P_\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid \exists \ u \in U \ , \ \|u\|_U = 1$ tel que $a(u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall \ v \in U\}$.

$\lambda \in P_\sigma(a)$ sera dite valeur propre de $a(\cdot,\cdot)$ de multiplicité s s'il existe exactement s vecteurs $u_1,u_2,\dots,u_s$ $\in U$ linéairement indépendants tel que $a(u_i,v) = \lambda(u_i,v)_V$ $\forall \ v \in U \ , \ i = 1,2,\dots,s$.

On appellera spectre continu de la forme $a(\cdot,\cdot)$ et on notera $C_\sigma(a) = \sigma(a)-P_\sigma(a)$.

Cette définition est justifiée par la proposition suivante :

Proposition I.2.2.

$\mu \in P_\sigma(A) \iff \lambda = 1/\mu \in P_\sigma(a)$.

$\mu \in C_\sigma(A) - \{0\} \iff \lambda = 1/\mu \in C_\sigma(a)$.

Ainsi $\mu \in \sigma(A) - \{0\} \iff \lambda = 1/\mu \in \sigma(a)$.

Démonstration

1) $\mu \in P_\sigma(A) \iff \lambda = 1/\mu \in P_\sigma(a)$.

($\Rightarrow$). $\mu \in P_\sigma(A) \Rightarrow \exists \ u \in V \ , \ \|u\|_V = 1$ tel que $Au = \mu u$.

$\mu = 0 \Rightarrow Au = 0 \Rightarrow (u,v)_V = 0 \quad \forall \ v \in U \Rightarrow u = 0$ car U est dense dans $V \Rightarrow$ contradiction avec $\|u\|_V = 1$. Ainsi $\mu \neq 0 \Rightarrow u \in U$ car $\text{Range}(A) \subset U$. Si $\lambda = 1/\mu$ on a $a(u,v) = \lambda\, a(Au,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U$. Ainsi $\lambda \in P_\sigma(a)$.

<u>$(\Leftarrow)$</u>. $\lambda \in P_\sigma(a) \Rightarrow \exists u \in U$, $\|u\|_U = 1$ tel que $a(u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U$. a coercive $\Rightarrow \lambda \neq 0$. Si $\mu = 1/\lambda$ on a $a(Au - \mu u, v) = (u,v)_V - \mu a(u,v) = (u,v)_V - (u,v)_V = 0$ $\forall\, v \in U$. Ainsi $Au - \mu u = 0 \Rightarrow \mu \in P_\sigma(A)$. Il est à remarquer que si $\lambda \in P_\sigma(a)$ est de multiplicité s alors $\mu = 1/\lambda$ est valeur propre de A de multiplicité s et réciproquement. (multiplicité = multiplicité algébrique = multiplicité géométrique puisque A est autoadjoint).

2) $\mu \in \sigma(A) - \{0\} \Longleftrightarrow \lambda = 1/\mu \in \sigma(a)$.

<u>$(\Rightarrow)$</u>. $\mu \in \sigma(A) - \{0\} \Rightarrow \exists (u_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$, $\|u_n\|_V = 1$ tel que $\|Au_n - \mu u_n\|_V \xrightarrow{n\to\infty} 0$. On pose $\lambda = 1/\mu$ et $v_n = \lambda A u_n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $v_n \in U$ et $\|v_n - u_n\|_V = \lambda \|Au_n - \mu u_n\|_V \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Ainsi $|a(v_n,v) - \lambda(v_n,v)_V| = \lambda |(u_n - v_n, v)_V| \leq \lambda \|u_n - v_n\|_V \|v\|_V$ $\forall\, v \in U$.

L'injection de U dans V étant continue $\exists\, \gamma > 0$ tel que $\|v\|_V \leq \gamma \|v\|_U \quad \forall\, v \in U$.

En posant $D(n) = \lambda\gamma \|u_n - v_n\|_V$ on obtient :

$|a(v_n,v) - \lambda(v_n,v)_V| \leq D(n)\, \|v\|_U \quad \forall\, v \in U$.

Mais $\|v_n\|_V \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ et $N > 0$ tel que $\|v_n\|_U \geq \delta$ $\forall n \geq N$. En posant $w_n = v_n / \|v_n\|_U$ et $C(n) = D(n)/\|v_n\|_U$ pour $n \geq N$ on obtient $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$, $\|w_n\|_U = 1$ avec

$|a(w_n,v) - \lambda(w_n,v)_V| \leqslant C(n)\ \|v\|_U \quad \forall\ v \in U\ ,\ C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Ainsi $\lambda \in \sigma(a)$.

<u>($\Leftarrow$)</u>. $\lambda \in \sigma(a) \Rightarrow \exists (u_n)_{n=1}^{\infty} \subset U\ ,\ \|u_n\|_U = 1$ tel que

$|a(u_n,v) - \lambda(u_n,v)_V| \leqslant C(n)\ \|v\|_U \quad \forall\ v \in U$ avec $C(n) \to 0$.

Supposons $\lambda = 0$ et posons $v = u_n$. On obtient $a(u_n,u_n) \to$ $\xrightarrow{n\to\infty} 0$ ce qui est en contradiction avec $a(u_n,u_n) \geqslant \chi > 0$.

Ainsi $\lambda \neq 0$. Posons $\mu = 1/\lambda$. On a $|a(Au_n - \mu u_n, v)| \leqslant$ $\leqslant \mu\ C(n)\ \|v\|_U \quad \forall\ v \in U$.

En posant $v = Au_n - \mu u_n$ et en utilisant la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ on obtient $\|Au_n - \mu u_n\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \|Au_n - \mu u_n\|_V \to$ $\xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Montrons encore $\exists\, \delta > 0\ ,\ N > 0$ tel que $\|u_n\|_V \geqslant \delta$ $\forall n \geqslant N$. On a $1 = \|u_n\|_U^2 \leqslant \frac{1}{\chi}\ a(u_n,u_n) = \frac{1}{\chi}\ a(u_n - \lambda Au_n +$ $+ \lambda Au_n, u_n) \leqslant \frac{1}{\chi}\ [C\lambda\|Au_n - \mu u_n\|_U\ \|u_n\|_U + \lambda\|u_n\|_V^2]$ où χ et C sont les constantes de coercivité et de continuité de $a(\cdot,\cdot)$. Comme $\|Au_n - \mu u_n\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et $\|u_n\|_U = 1$ on obtient le résultat désiré. ■

La proposition I.2.2. montre que le problème "chercher $\sigma(a)$ " peut se résoudre par la recherche de $\sigma(A)$ et réciproquement. Cette dualité "forme bilinéaire-opérateur" sera utile par la suite.

D'autre part si l'injection de U dans V est compacte alors l'opérateur A est aussi compact et $C_\sigma(A) - \{0\} = \emptyset$.

Ainsi par la proposition I.2.2. $\sigma(a) = P_\sigma(a)$.

Proposons-nous maintenant d'approximer $\sigma(a)$ par une méthode de Galerkin. (voir [11]).

Soit $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de U telle que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} = U$. De même que précédemment, en utilisant le théorème de Lax-Milgram, à chaque $n \in \mathbb{N}$ on peut définir un opérateur A_n défini sur V , à valeur dans U_n considéré comme partie de V . $A_n : V \to U_n \subset V$ tel que $\forall f \in V$ on a $a(A_n f, v) = (f,v)_V \ \ \forall v \in U_n$. A_n est linéaire, autoadjoint, positif, compact. Le spectre $\sigma(A_n)$ de A_n est une partie compacte de $\mathbb{R}^+$. $\sigma(A_n)$ est formé d'un nombre fini de points de $\mathbb{R}^+$ et si $\lambda \in \sigma(A_n)$, $\lambda \neq 0$ alors λ est valeur propre de multiplicité finie de A_n .

DEFINITION I.2.2.

On appelera spectre de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ relativement à U_n et on notera $\sigma_n(a) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists u \in U_n$, $\|u\|_U = 1$ tel que $a(u_n,v) = \lambda(u_n,v)_V \ \ \forall v \in U_n\}$.

$\lambda \in \sigma_n(a)$ sera dite valeur propre approchée de $a(\cdot,\cdot)$, de multiplicité s , relativement à U_n s'il existe exactement s vecteurs $u_1,u_2,\dots,u_s \in U_n$ linéairement indépendants tels que $a(u_i,v) = \lambda(u_i,v)_V \ \ \forall v \in U_n$, $i = 1,2,\dots,s$.

On obtient immédiatement la proposition I.2.3. qui se démontre comme la première partie de la proposition I.2.2.

Proposition I.2.3.

$\mu \in \sigma(A_n) - \{0\} \iff \lambda = 1/\mu \in \sigma_n(a)$. ■

On dira que A_n , $\sigma(A_n)$, $\sigma_n(a)$ sont des approximations de A , $\sigma(A)$ et $\sigma(a)$ respectivement.

Le problème "chercher $\sigma(a)$ " est remplacé par le problème "chercher $\sigma_n(a)$ " qui est sensiblement plus simple puisqu'il revient à résoudre un problème du type $A\vec{x} = \lambda B\vec{x}$ où A et B sont des matrices carrées, symétriques, définies positives. [résolution voir [15])

DEFINITION I.2.3.

Soit l'intervalle ouvert $(b,c) \subset \mathbb{R}$, $b < c$, tel que b , $c \notin \sigma(a)$. On dira que $\sigma_n(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans (b,c) si

1) $\forall \mu \in \sigma(a) \cap (b,c)$ $\exists \mu_n \in \sigma_n(a)$ tel que $\mu_n \to \mu$ lorsque $n \to \infty$.

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ tel que $\sigma_n(a) \cap (b,c) \subset \bigcup_{\mu \in \sigma(a) \cap (b,c)} (\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon)$, $\forall n > N$.

3) Si $\mu \in P_\sigma(a) \cap (b,c)$, de multiplicité finie s , tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec $(\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon) \subset (b,c)$ et $[\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon] \cap \sigma(a) = \{\mu\}$, alors $\exists N > 0$ tel que, pour $n > N$, $(\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon) \cap \sigma_n(a)$ soit formé exactement de s valeurs propres de $a(\cdot,\cdot)$ relativement à U_n , multiplicité comprise.

Remarque

On définira de façon analogue " $\sigma(A_n)$ approxime bien $\sigma(A)$ dans (b,c) " .

Proposition I.2.4.

Si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ est tel que $\forall\ u \in U$ on a $\inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U \to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors :

1) $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$ fortement.

2) $\forall\ \mu \in \sigma(A)$, $\mu \neq 0$, $\exists\ \mu_n \in \sigma(A_n)$ tel que $\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \mu$.

3) Si $\mu \in P_\sigma(A)$ de multiplicité finie s alors il existe au moins s valeurs dans $\sigma(A_n)$ (multiplicité comprises) notées $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_s^{(n)}$ telles que $\mu_i^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \mu$, $i = 1,2,\ldots,s$.

4) $\forall\ \lambda \in \sigma(a)$ $\exists\ \lambda_n \in \sigma_n(a)$ tel que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$.

5) Si $\lambda \in P_\sigma(a)$ de multiplicité finie s alors il existe au moins s valeurs dans $\sigma_n(a)$ (multiplicités comprises) notées $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_s^{(n)}$ telles que $\lambda_i^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$, $i = 1,2,\ldots,s$.

Démonstration

1) Soit $f \in V$. Pour $v \in U_n$ on a $a(Af-A_nf,v) = (f,v)_V - (f,v)_V = 0$. Ainsi $a((A-A_n)f,(A-A_n)f) = a((A-A_n)f,Af-\varphi)$ $\forall\ \varphi \in U_n$. D'où, si χ et C sont des constantes de coercivité et de continuité de $a(\cdot,\cdot)$, $\chi\|(A-A_n)f\|_U \leq$ $\leq C\|Af-\varphi\|_U$ $\forall\ \varphi \in U_n$. Si γ est une constante de

continuité de l'injection de U dans V on aura

$$\|(A-A_n)f\|_V \leqslant \frac{\gamma C}{\chi} \inf_{\varphi \in U_n} \|Af-\varphi\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

2) En tenant compte de 1), une démonstration de 2) est faite dans [18] p. 431 dans un cadre beaucoup plus général. Nous ferons ici une démonstration simple, adaptée à ce cas. Nous procédons par l'absurde.

Soit $\mu_1^{(n)},\mu_2^{(n)},\dots,\mu_{p(n)}^{(n)}$ les valeurs propres de A_n autres que zéro et répétées selon leur multiplicité.

Soit $u_1^{(n)},u_2^{(n)},\dots,u_{p(n)}^{(n)}$ des vecteurs propres correspondants tels que $(u_i^{(n)},u_j^{(n)})_V = \delta_{ij}$, $i,j = 1,\dots,p(n)$.

Supposons par l'absurde $\exists\, \mu \in \sigma(A)$, $\mu \neq 0$, $\varepsilon > 0$, $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tels que $|\mu-\mu_j^{(n_i)}| > \varepsilon$, $j = 1,2,\dots,p(n_i)$, $i = 1,2,\dots$. Sans restriction de généralité on peut supposer $n_i = i$. Soit $u \in V$, $\|u\|_V = 1$ tel que $\|Au-\mu u\|_V < \min(\mu,\varepsilon)/2$. (Un tel u existe si l'on se réfère à la proposition I.2.1.). Soit $u_n \in \mathrm{Range}(A_n)$, $u_n^{\perp} \in \mathrm{Ker}(A_n)$ tels que $u = u_n + u_n^{\perp}$. Les $u_i^{(n)}$, $i = 1,2,\dots,p(n)$ forment une base de Range (A_n) et on exprime $u_n = \sum_{i=1}^{p(n)} x_i u_i^{(n)}$. On a donc

$A_n u = \sum_{i=1}^{p(n)} x_i \mu_i^{(n)} u_i^{(n)}$. Ainsi

$$\|\mu u - A_n u\|_V^2 = \|\mu u_n^{\perp} + \sum_{i=1}^{p(n)} (\mu-\mu_i^{(n)}) x_i u_i^{(n)}\|_V^2 =$$

$$= \mu^2 \|u_n^{\perp}\|_V^2 + \sum_{i=1}^{p(n)} (\mu-\mu_i^{(n)})^2 x_i^2 \geqslant \mu^2 \|u_n^{\perp}\|_V^2 + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{p(n)} x_i^2$$

$$\geqslant \min(\mu^2,\varepsilon^2)\, \|u\|_V^2 = (\min(\mu,\varepsilon))^2 .$$

Ainsi $\|\mu u - A_n u\|_V \geqslant \min(\mu,\varepsilon) \Rightarrow \|Au - A_n u\|_V \geqslant$ $\geqslant \|A_n u - \mu u\|_V - \|\mu u - Au\|_V > \min(\mu,\varepsilon)/2$ ce qui est en contradiction avec $A_n \to A$ fortement.

3) Soit $\mu \in P_\sigma(A)$ de multiplicité finie s. Alors $\mu \neq 0$. Si $s = 1$, 3) est ramené à 2). Supposons donc $s \geqslant 2$ et supposons, par l'absurde, qu'il existe au plus $(s-1)$ valeurs propres de A_n (multiplicité comprise) qui tendent vers μ lorsque $n \to \infty$. En reprenant les notations introduites dans 2), on peut considérer, sans restriction de généralité, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$\mu_i^{(n)} \notin (\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)$ pour $i = s,s+1,\dots,p(n)$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_s \in V$ tels que $A\varphi_i = \mu\varphi_i$ et $(\varphi_i,\varphi_j)_V = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,\dots,s$, et soit $K = \{f \in V \mid f = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i\varphi_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\exists\, f_n \in K$, $\|f_n\|_V = 1$, $(f_n,u_i^{(n)})_V = 0$ $\forall i = 1,2,\dots,s-1$. De la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on peut extraire une sous-suite convergente dans K vers un élément $f \in K$. Sans restriction de généralité on peut considérer $\|f_n - f\|_V \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Soit $N > 0$ tel que $\|f-f_n\|_V \leqslant \frac{1}{2\sqrt{s-1}}$ $\forall\, n > N$. Alors pour $n > N$ on a $\|(A-A_n)f\|_V^2 = \|\mu f - A_n f\|_V^2 =$ $= \|\mu g_n + \mu h_n - A_n f\|_V^2$ où $f = g_n + h_n$ avec $g_n \in \mathrm{Range}(A_n)$, $h_n \in \mathrm{Ker}(A_n)$.

Ainsi $\|(A-A_n)f\|_V^2 = \|\mu \sum_{i=1}^{p(n)} (f,u_i^{(n)})_V u_i^{(n)} + \mu h_n -$

$- \sum_{i=1}^{p(n)} \mu_i^{(n)} (f,u_i^{(n)})_V\, u_i^{(n)}\|_V^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{p(n)} (\mu-\mu_i^{(n)})^2 (f,u_i^{(n)})_V^2 + \mu^2 \|h_n\|_V^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=s}^{p(n)} (\mu-\mu_i^{(n)})^2 (f,u_i^{(n)})_V^2 + \mu^2 \|h_n\|_V^2 \geqslant$$

$$\geqslant \min(\mu^2,\varepsilon^2) \left[\sum_{i=s}^{p(n)} (f,u_i^{(n)})_V^2 + \|h_n\|_V^2 \right] =$$

$$= \min(\mu^2,\varepsilon^2) \left[\sum_{i=1}^{p(n)} (f,u_i^{(n)})_V^2 + \|h_n\|_V^2 \right] -$$

$$- \min(\mu^2,\varepsilon^2) \sum_{i=1}^{s-1} (f,u_i^{(n)})_V^2 =$$

$$= \min(\mu^2,\varepsilon^2) \left[\|f\|_V^2 - \sum_{i=1}^{s-1} (f,u_i^{(n)})_V^2 \right] .$$

Par construction de f_n on a $(f_n,u_i^{(n)})_V = 0$ $\forall\ i = 1,2,\dots,s-1$ et donc $|(f,u_i^{(n)})_V| = |(f-f_n,u_i^{(n)})_V| \leqslant$ $\leqslant \|f-f_n\|_V$ $i = 1,2,\dots,s-1$. Ainsi $\sum_{i=1}^{s-1} (f,u_i^{(n)})_V^2 \leqslant$ $\leqslant (s-1) \|f-f_n\|_V^2 \leqslant \frac{1}{4}$ $\forall\ n > N$. On obtient finalement $\|(A-A_n)f\|_V \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \min(\varepsilon,\mu)$ $\forall\ n > N$, ce qui est en contradiction avec 1).

4) s'obtient immédiatement à partir de 2) et des propositions I.2.2. et I.2.3. .

5) s'obtient immédiatement à partir de 3) et des propositions I.2.2. et I.2.3. .

■

La proposition I.2.4. montre que sous la condition

" $\forall\, u \in U\ ,\ \inf_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$ " 1) de la définition I.2.3.

est réalisé $\forall\, b,c \in \mathbb{R} - \sigma(a)\ ,\ b < c$.

<u>Proposition I.2.5.</u>

Si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ est tel que $\forall\, u \in U$ on a $\inf_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et si $c \in \mathbb{R}^+$ est tel que $(0,c) \cap \sigma(a)$ soit formé seulement d'un nombre fini de valeurs propres de $a(\cdot,\cdot)$ de multiplicité finie alors $\sigma_n(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans $(0,c)$.

<u>Démonstration</u>

La démonstration de cette proposition est essentiellement basée sur le "principe" de Courant (Voir [17] pp. 234-237). Soit $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $(0,c) \cap \sigma(a)$ soit formé seulement d'un nombre fini de valeurs propres de $a(\cdot,\cdot)$ de multiplicité finie. Soit $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$ ces valeurs propres répétées selon leur multiplicité. En posant $d = 1/c$ et $\mu_i = 1/\lambda_i\ ,\ i = 1,\ldots,m$ on aura $(d,\infty) \cap \sigma(A) = \{\mu_i\ ,\ i = 1,\ldots,m\}$ (Proposition I.2.2.). Soit $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m$ des vecteurs propres de A correspondant à $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$ tels que $(\varphi_i,\varphi_j)_V = \delta_{ij}\ ,\ i,j = 1,\ldots,m$. On montre :

1) $\mu_i = \max\limits_{\substack{f\in V,\ \|f\|_V=1 \\ (f,\varphi_j)_V=0,\ j=1,\dots,i-1}} (Af,f)_V$ pour $i = 1,\dots,m$.

(La démonstration est semblable à celle faite pour des opérateurs compacts ([17] p. 235) et elle ne sera pas faite ici).

2) Si $\nu(e_1,e_2,\dots,e_{j-1}) = \max\limits_{\substack{f\in V,\ \|f\|_V=1 \\ (f,e_i)_V=0,\ i=1,2,\dots,j-1}} (Af,f)_V$

où $e_1,e_2,\dots,e_{j-1}$ sont $(j-1)$ éléments de V avec $j \leqslant m$ on a :

$\mu_j = \min\limits_{e_1,e_2,\dots,e_{j-1}\in V} \nu(e_1,e_2,\dots,e_{j-1})$ et ce minimum est atteint lorsque $e_i = \varphi_i$, $i = 1,2,\dots,j-1$.

(Ici aussi la démonstration est immédiate [17] p. 235).

3) Si A_n est l'approximation de A relativement à U_n on a $A_n \leqslant A$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire $A-A_n$ positif). En effet, par définition de A et de A_n , si $f \in V$ alors $a((A-A_n)f,v) = 0$ $\forall\, v \in U_n$. Ainsi

$((A-A_n)f,f)_V = a((A-A_n)f,Af) = a((A-A_n)f,(A-A_n)f) \geqslant 0$.

4) Si $\mu_1^{(n)} \geqslant \mu_2^{(n)} \geqslant \dots \geqslant \mu_m^{(n)}$ sont les m plus grandes valeurs propres de A_n (multiplicité comprise) on a $\mu_i \geqslant \mu_i^{(n)}$, $i = 1,2,\dots,m$, $n \in \mathbb{N}$. En effet en appliquant 2) à l'opérateur A_n on obtient

$$\mu_i^{(n)} = \min_{e_1,\dots,e_{i-1} \in V} \max_{\substack{f\in V,\, \|f\|_V=1 \\ (f,e_j)_V=0,\, j=1,\dots,i-1}} (A_n f,f)_V \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{f\in V,\, \|f\|_V=1 \\ (f,\varphi_j)_V=0,\, j=1,\dots,i-1}} (A_n f,f)_V .$$

Mais $(A_n f,f)_V \leqslant (Af,f)_V \quad \forall f \in V$. 3).

D'où $\mu_i^{(n)} \leqslant \max\limits_{\substack{f\in V,\, \|f\|_V=1 \\ (f,\varphi_j)_V=0,\, j=1,\dots,i-1}} (Af,f) = \mu_i$. 1).

De 4) et de la proposition I.2.4(3). On tire immédiatement $\mu_i^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \mu_i$, $i = 1,2,\dots,m$. Ainsi $\sigma(A_n)$ approxime bien $\sigma(A)$ dans (d,∞) . Si $\lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_2^{(n)} \leqslant \dots \leqslant \lambda_m^{(n)}$ sont les m plus petites valeurs propres approchées de $a(\cdot,\cdot)$ relativement à U_n (répétées selon leur multiplicité), alors $\lambda_i^{(n)} = 1/\mu_i^{(n)}$, $i = 1,\dots,m$ (proposition I.2.3.) et on obtient $\lambda_i^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_i$, $i = 1,2,\dots,m$. Ainsi $\sigma_n(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans $(0,c)$. ■

Remarque

De façon générale $\sigma_n(a)$ n'approxime pas bien $\sigma(a)$ dans $(0,x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \sigma(a)$. En effet la condition 2) de la définition I.2.3. n'est généralement pas satisfaite lorsque

$x > \ell$ où $\ell \in C_\sigma(a)$, ou bien ℓ = valeur propre de $a(\cdot,\cdot)$ infiniment dégénérée, ou bien ℓ = point d'accumulation de $P_\sigma(a)$. Des exemples sont donnés dans le chapitre III. Remarquons encore que si l'injection de U dans V est compacte, l'opérateur A est compact et donc $\sigma(A)$ est formé uniquement de valeurs propres de A de multiplicité finie, sans point d'accumulation autre que zéro. Ainsi dans ce cas, $\sigma_n(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans $(0,x)$ $\forall\ x \in \mathbb{R}^+ - \sigma(a)$.

La proposition suivante donne une estimation de l'erreur des éléments propres.

<u>proposition I.2.6.</u>

Supposons $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ tel que $\forall\ u \in U$ on a $\inf_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et soit $\lambda \in \sigma(a)$ une valeur propre de $a(\cdot,\cdot)$ de multiplicité 1 et isolée dans $\sigma(a)$ c'est-à-dire $\exists\ \varepsilon > 0$ tel que $[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon] \cap \sigma(a) = \{\lambda\}$. Soit $u \in U$, $\|u\|_V = 1$ tel que $a(u,v) = \lambda(u,v)_V$ $\forall\ v \in U$. Supposons que $\sigma_n(a) \cap [\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]$ soit formé d'une et une seule valeur λ_n de multiplicité 1 pour $n > N$ et soit $u_n \in U$, $\|u_n\|_V = 1$ tel que $a(u_n,v) = \lambda_n(u_n,v)_V$ $\forall\ v \in U_n$.

Alors on a :

(i) $\exists\ \varepsilon_n = \pm 1$ tel que $\|\varepsilon_n u_n - u\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

De plus on a l'estimation pour n suffisamment grand :

$\|u-\varepsilon_n u_n\|_U \leq C \inf_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U$ où C est indépendant de n.

(ii) On a l'estimation pour les valeurs propres :

$|\lambda-\lambda_n| \leq D \inf_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U^2$ où D est indépendant de n.

Démonstration

Supposons les hypothèses de la proposition I.2.6. vérifiées.

Par la proposition I.2.4. on aura $\lambda_n \to \lambda$ lorsque $n \to \infty$.

Soit $u \in U$, $\|u\|_V = 1$, $u_n \in U_n$, $\|u_n\|_V = 1$ tels que $a(u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U$ et $a(u_n,v) = \lambda_n(u_n,v)_V \quad \forall\, v \in U_n$.

De façon générale u_n ne converge pas vers u dans V.

La forme $a(\cdot,\cdot)$ étant coercive sur U on définit v_n comme la a-projection de u sur U_n c'est-à-dire $v_n \in U_n$ et $a(v_n-u,v) = 0 \quad \forall\, v \in U_n$. Soit $\tilde{u}_n$ la V-projection de v_n sur u_n c'est-à-dire $\tilde{u}_n = (v_n,u_n)_V\, u_n$.

(a) On a l'estimation connue $\|u-v_n\|_U \leq C_1 \inf_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U$.

Avec $C_1 = C/\chi$ où C et χ sont des constantes de continuité et de coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.

(b) On estime $\|v_n-\tilde{u}_n\|_V$.

Soient $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{p(n)}^{(n)} \in U_n$; $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_{p(n)}^{(n)} \in \mathbb{R}^+$ tels que $a(u_i^{(n)},v) = \lambda_i^{(n)}(u_i^{(n)},v)_V \quad \forall\, v \in U_n$ avec

$(u_i^{(n)}, u_j^{(n)})_V = \delta_{ij}$, $i,j = 1,\dots,p(n)$. ($p(n)$ = dimension de U_n) .

$\exists\ j = 1,\dots,p(n)$ tel que $\lambda_j^{(n)} = \lambda_n$ et de plus on aura $|\lambda_i^{(n)} - \lambda_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall\ i \neq j$ $\forall\ n > N$ (N entier suffisamment grand). On a $\|v_n - \tilde{u}_n\|_V^2 = \sum_{i\neq j} (v_n, u_i^{(n)})_V^2$. Mais $\lambda_i^{(n)}(v_n, u_i^{(n)})_V = a(v_n, u_i^{(n)}) = a(u, u_i^{(n)}) = \lambda(u, u_i^{(n)})_V$ $\forall i = 1,2,\dots,p(n) \Rightarrow (\lambda_i^{(n)} - \lambda_n)(v_n, u_i^{(n)})_V = \lambda(u - v_n, u_i^{(n)})_V + (\lambda - \lambda_n)(v_n, u_i^{(n)})_V$ $\forall i = 1,2,\dots,p(n)$. Ainsi

$$(v_n, u_i^{(n)})_V = \frac{1}{\lambda_i^{(n)} - \lambda_n} [\lambda(u - v_n, u_i^{(n)})_V + (\lambda - \lambda_n)(v_n, u_i^{(n)})_V]$$

$\forall\ i \neq j$.

Donc $\|v_n - \tilde{u}_n\|_V^2 \leqslant \frac{8}{\varepsilon^2} [\lambda^2 \|u - v_n\|_V^2 + |\lambda - \lambda_n|^2 \|v_n\|_V^2]$.

Si γ est une constante de continuité de l'injection de U dans V on obtient : $\|v_n\|_V^2 \leqslant \gamma^2 \|v_n\|_U^2 \leqslant \frac{\gamma^2}{\chi} a(v_n, v_n) =$ $= \frac{\gamma^2}{\chi} a(u, v_n) = \frac{\lambda\gamma^2}{\chi} (u, v_n)_V \leqslant \frac{\lambda\gamma^2}{\chi} \|v_n\|_V \Rightarrow \|v_n\|_V \leqslant \frac{\lambda\gamma^2}{\chi}$.

Ainsi $\exists\ C_2 > 0$ tel que $\|v_n - \tilde{u}_n\|_V \leqslant C_2[\|u - v_n\|_V + |\lambda - \lambda_n|]$.

(c) On fait une première estimation de $|\lambda - \lambda_n|$.

On a $a(v_n, v) = \lambda(u, v)_V$ $\forall\ v \in U_n$.

$a(\tilde{u}_n, v) = \lambda_n(\tilde{u}_n, v)_V$ $\forall\ v \in U_n$.

Ainsi $(\lambda - \lambda_n)(u, \tilde{u}_n)_V = \lambda_n(v_n - u, \tilde{u}_n)_V$.

(a) et (b) $\Rightarrow$ $\|u - \tilde{u}_n\|_V \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow (u, \tilde{u}_n)_V \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow \exists\ C_3 > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_n| \leqslant C_3 \|u - v_n\|_V \|\tilde{u}_n\|_V \leqslant C_3 \|u - v_n\|_V \|v_n\|_V \leqslant$ $\leqslant C_3 \frac{\lambda\gamma^2}{\chi} \|u - v_n\|_V$. De (a) on tire : $\exists\ C_4 > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_n| \leqslant C_4 \inf_{\varphi \in U_n} \|u - \varphi\|_U$.

(d) $\exists\, C_5 > 0$ tel que $\|u-\tilde{u}_n\|_V \leq C_5 \inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U$. (Découle immédiatement de (a), (b) et (c).)

(e) On fait une deuxième estimation de $|\lambda-\lambda_n|$.

Dans (c) on a vu que $(\lambda-\lambda_n)(u,\tilde{u}_n)_V = \lambda_n(v_n-u,\tilde{u}_n)_V$.

Ainsi $(\lambda-\lambda_n)(u,\tilde{u}_n)_V = \lambda_n(v_n-u,\tilde{u}_n-u)_V + \lambda_n(v_n-u,u)_V =$

$= \lambda_n(v_n-u,\tilde{u}_n-u)_V + \frac{\lambda_n}{\lambda} a(v_n-u,u) =$

$= \lambda_n(v_n-u,\tilde{u}_n-u)_V + \frac{\lambda_n}{\lambda} a(v_n-u,u-\varphi) \quad \forall\, \varphi \in U_n$.

Il existe donc $C_6 > 0$ tel que

$|\lambda-\lambda_n| \leq C_6 \{\|v_n-u\|_U (\|u-\tilde{u}_n\|_V + \inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U)\}$.

De (a) et (d) on tire $|\lambda-\lambda_n| \leq D \inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U^2$.

(f) Posons $\varepsilon_n = \text{signe } (v_n,u_n)_V$ et montrons que $\|u-\varepsilon_n u_n\|_V \leq C_7 \inf\limits_{\varphi \in U} \|u-\varphi\|_U$. Pour n suffisamment grand on a $\|\tilde{u}_n - \varepsilon_n u_n\|_V = |(v_n,u_n)_V - \varepsilon_n| = |1-|(v_n,u_n)_V|| =$

$= |1 - \|\tilde{u}_n\|_V| = |\, \|u\|_V - \|\tilde{u}_n\|_V| \leq \|u-\tilde{u}_n\|_V \leq$

$\leq C_5 \inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U$ (en utilisant (d)). Par (d) on obtient donc $\|u - \varepsilon_n u_n\|_V \leq C_7 \inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U$.

(g) On estime $\|v_n - \varepsilon_n u_n\|_U$.

On a $a(v_n - \varepsilon_n u_n, v) = \lambda(u,v)_V - \lambda_n(\varepsilon_n u_n,v)_V \quad \forall\, v \in U_n$.

D'où $a(v_n - \varepsilon_n u_n, v) = (\lambda-\lambda_n)(u,v)_V + \lambda_n(u - \varepsilon_n u_n, v)_V \quad \forall\, v \in U_n$.

En posant $v = v_n - \varepsilon_n u_n$, en utilisant la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ et en utilisant (c) et (f) $\exists\, C_8 > 0$ tel que

$\|v_n - \varepsilon_n u_n\|_U \leq C_8 \inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U$.

(h) En utilisant (a) et (g), $\exists\, C > 0$ tel que $\|u - \varepsilon_n u_n\|_U \leq C \inf_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U$. Ainsi (h) prouve (i) et (e) prouve (ii).

■

§3. LE PROBLEME $a(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_V$

Comme dans le paragraphe 2 nous considérons $U \subset V$ deux espaces de Hilbert réels, séparables, de produits scalaires $(\cdot,\cdot)_U$ et $(\cdot,\cdot)_V$, mais avec l'injection de U dans V compacte. On supposera pour simplifier l'écriture sans pour autant restreindre la généralité que $\|f\|_V \leq \|f\|_U$ $\forall\, f \in U$. Si $O \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, nous définissons une famille de formes bilinéaires sur U dépendant d'un paramètre $\lambda \in O$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) $a(\lambda,\cdot,\cdot) : U \times U \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique $\forall\, \lambda \in O$.

(ii) $\exists\, C_0 > 0$ tel que $|a(\lambda,u,v)| \leq C_0\|u\|_U \|v\|_U$ $\forall\, u,v \in U$, $\forall\, \lambda \in O$ (continuité uniforme en λ).

(iii) $\exists\, \chi > 0$ tel que $a(\lambda,u,u) \geq \chi\|u\|_U^2$ $\forall\, u \in U$, $\forall\, \lambda \in O$ (coercivité uniforme en λ).

(iv) $a(\cdot,u,v) : O \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1(O)$ $\forall\, u,v \in U$.

(v) $\frac{d}{d\lambda}\, a(\lambda,u,u) \leqslant 0 \quad \forall\, \lambda \in O \,,\ \forall\, u \in U$.

(vi) $\exists\, C_1 > 0$ tel que $\left|\frac{d}{d\lambda}\, a(\lambda,u,v)\right| \leqslant C_1 \|u\|_U \|v\|_U$

$\forall\, \lambda \in O \,,\ \forall\, u,v \in U$.

Nous nous intéressons au problème propre généralisé :
"Trouver $\lambda \in O$ tel qu'il existe $u \in U$, $u \neq 0$ avec $a(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U$" et à son approximation par la méthode de Galerkin.

Mentionnons ici que l'étude du problème classique :
"Trouver λ et $u \in U$ tel que $a(u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U$" où U est l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$, $V = L_2(\Omega)$ et $a(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire associée à un opérateur elliptique d'ordre $2m$, est bien connue. [9], [11], [16] .
Dans [10] le problème classique est généralisé par le problème "Trouver λ et $u \in U$ tel que $a(u,v) =$ $= b(\lambda,u,v) \quad \forall\, v \in U$" où $b(\lambda,u,v)$ est continue sur V et analytique en λ pour u et v fixés.
Ici le problème " $a(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U$" peut être considéré comme une autre généralisation du problème classique autoadjoint.
Considérons une suite $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de sous-espaces vectoriels de U fermés mais non nécessairement de dimension finie.

On notera $\sum = \{\lambda \in \mathbb{O} \mid \exists\, u \in U\,,\ u \neq 0$ tel que $a(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U\}$ et $\sum_n = \{\lambda \in \mathbb{O} \mid \exists\, u \in U_n\,,\ u \neq 0$ tel que $a(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_V \quad \forall\, v \in U_n\}$

Proposition I.3.1.

On suppose $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ vérifiant : $\inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\forall\, u \in U$. Si $\lambda_n \in \sum_n$ et $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_o \in \mathbb{O}$ alors $\lambda_o \in \sum$.
De plus si $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$ est telle que $u_n \in U_n$, $\|u_n\|_V = 1$, $a(\lambda_n,u_n,v) = \lambda_n(u_n,v)_V \quad \forall\, v \in U_n$, alors $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ possède au moins une sous-suite convergeant dans U et la limite u_o de n'importe quelle sous-suite convergeant dans U satisfait la relation $a(\lambda_o,u_o,v) = \lambda_o(u_o,v)_V \quad \forall\, v \in U$.

Démonstration

Soit $\lambda_n \in \sum_n$, $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_o \in \mathbb{O}$ et soit $u_n \in U_n$, $\|u_n\|_V = 1$ tel que $a(\lambda_n,u_n,v) = \lambda_n(u_n,v)_V \quad \forall\, v \in U_n$.
On commencera par montrer que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite bornée dans U. On a $a(\lambda_n,u_n,u_n) = \lambda_n(u_n,u_n)_V = \lambda_n$.
L'hypothèse (iii) $\Rightarrow \|u_n\|_U^2 \leqslant \lambda_n/\chi$ et comme $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_o$ on a bien $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ bornée dans U.
L'injection de U dans V étant supposée compacte $\exists\, (u_{n_i})_{i=1}^{\infty} \subset (u_n)_{n=1}^{\infty}$ tel que $u_{n_i} \xrightarrow{i\to\infty} u_o \in V$. Sans restriction de généralité on supposera $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u_o \in V$.
Soit $\tilde{u} \in U$ tel que $a(\lambda_o,\tilde{u},v) = \lambda_o(u_o,v)_V \quad \forall\, v \in U$.

On prouvera que $\tilde{u} = u_o$ ce qui terminera la démonstration.

Soit $\tilde{u}_n$ la $a(\lambda_o,\cdot,\cdot)$ - projection de $\tilde{u}$ sur U_n c'est-à-dire $\tilde{u}_n \in U_n$ tel que $a(\lambda_o,\tilde{u}_n,v) = a(\lambda_o,\tilde{u},v) \quad \forall\, v \in U_n$.

On a : $a(\lambda_o,\tilde{u}_n-u_n,v) = \lambda_o(u_o-u_n,v)_V + (\lambda_o-\lambda_n)(u_n,v)_V +$

$+ a(\lambda_n,u_n,v) - a(\lambda_o,u_n,v) \quad \forall\, v \in U_n$. (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et $v \in U_n$ fixé . On aura :

$a(\lambda_n,u_n,v) - a(\lambda_o,u_n,v) = (\lambda_n-\lambda_o)\,\frac{d}{d\lambda}\,a(\tilde{\lambda},u_n,v)$ où $\tilde{\lambda} \in$ intervalle (λ_n,λ_o) . En considérant l'hypothèse (vi) on obtient $|a(\lambda_n,u_n,v) - a(\lambda_o,u_n,v)| \leqslant C_1|\lambda_n-\lambda_o|\ \|u_n\|_U\,\|v\|_U$.

Ainsi en posant $v = \tilde{u}_n - u_n$ dans (*) et en tenant compte de l'hypothèse (iii) on obtient :

$\chi\|\tilde{u}_n - u_n\|_U \leqslant \lambda_o\|u_o - u_n\|_V + |\lambda_o-\lambda_n|\ (1 + C_1\|u_n\|_U)$

Ainsi $\|\tilde{u}_n - u_n\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$. (**)

De plus $a(\lambda_o,\tilde{u}-\tilde{u}_n,\varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in U_n \Rightarrow$

$a(\lambda_o,\tilde{u}-\tilde{u}_n,\tilde{u}-\tilde{u}_n) = a(\lambda_o,\tilde{u}-\tilde{u}_n,\tilde{u}-\varphi) \quad \forall\, \varphi \in U_n$.

$\Rightarrow \chi\|\tilde{u}-\tilde{u}_n\|_U \leqslant C_o\|\tilde{u}-\varphi\|_U \quad \forall\, \varphi \in U_n$. Par hypothèse sur $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ on a $\inf\limits_{\varphi\in U_n}\|\tilde{u}-\varphi\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et par conséquent

$\|\tilde{u}-\tilde{u}_n\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$. (***)

(**) + (***) $\Rightarrow \|\tilde{u}-u_n\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \tilde{u} = u_o$. ∎

De cette proposition on tire immédiatement les deux propositions suivantes :

Proposition I.3.2.

$\sum$ n'a pas de point d'accumulation dans 0 .

Démonstration

Supposons par l'absurde $\exists (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \sum$ $\lambda_n \neq \lambda_o$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_o \in 0$. En posant $U_n = U$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dans la proposition I.3.1. on aura $\lambda_o \in \sum$ et on peut considérer sans restriction de généralité $u_n \in U$, $\|u_n\|_V = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_o \in U$, $\|u_o\|_V = 1$ tels que

1) $a(\lambda_n,u_n,v) = \lambda_n(u_n,v)_V$ $\forall v \in U$, $\forall n = 1,2,\ldots$.

2) $a(\lambda_o,u_o,v) = \lambda_o(u_o,v)_V$ $\forall v \in U$.

3) $\lambda_n \to \lambda_o$ lorsque $n \to \infty$.

4) $\|u_o - u_n\|_U \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

1), 2) $\Rightarrow$ $(\lambda_o-\lambda_n)(u_o,u_n)_V = a(\lambda_o,u_o,u_n) - a(\lambda_n,u_o,u_n)$

$$\Rightarrow (u_o,u_n)_V = \frac{1}{\lambda_o-\lambda_n}[a(\lambda_o,u_o,u_o) - a(\lambda_n,u_o,u_o) - a(\lambda_o,u_o-u_n,u_o) + a(\lambda_n,u_o-u_n,u_o)] .$$

Par l'hypothèse (v) on a $\frac{1}{\lambda_o-\lambda_n}(a(\lambda_o,u_o,u_o) - a(\lambda_n,u_o,u_o)) \leq 0$

et donc $(u_o,u_n)_V \leq -\frac{1}{\lambda_o-\lambda_n}[a(\lambda_o,u_o-u_n,u_o) - a(\lambda_n,u_o-u_n,u_o)]$.

D'où $(u_o,u_n)_V \leq C_1 \|u_o-u_n\|_U \|u_o\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$. (4)

Mais $(u_o,u_n)_V \xrightarrow{n\to\infty} 1$ ce qui est contradictoire. ■

Proposition I.3.3.

Soit $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de U telle que $\inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Soit $K \subset 0$ compact. Alors $\forall\ \varepsilon > 0\quad \exists\ N > 0$ tel que $\sum_n \cap K \subset \bigcup\limits_{\mu \in \Sigma \cap K} (u-\varepsilon, u+\varepsilon)$ $\forall\ n > N$.

Démonstration

Nous supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_1 < n_2 < \dots$ tel que $\exists\ \lambda_i \in \sum_{n_i} \cap K$, $\lambda_i \notin \bigcup\limits_{\mu \in \Sigma \cap K} (u-\varepsilon, u+\varepsilon)$ $i = 1,2,\dots$. K étant compact $\exists\ (\lambda_{i_j})_{j=1}^{\infty} \subset (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ tel que $\lambda_{i_j} \xrightarrow{j\to\infty} \lambda_0 \in K$. Mais $\lambda_{ij} \notin \bigcup\limits_{\mu \in \Sigma \cap K} (u-\varepsilon, u+\varepsilon) \Rightarrow \lambda_0 \notin \sum \cap K$. Par la proposition I.3.1. on a $\lambda_0 \in \sum \Rightarrow \lambda_0 \in \sum \cap K$, d'où la contradiction. ■

Proposition I.3.4.

Soit $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de U telle que $\inf\limits_{\varphi \in U_n} \|u-\varphi\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\forall\ u \in U$. Soit $\lambda_0 \in \sum$ de multiplicité s c'est-à-dire λ_0 est valeur propre de $a(\lambda_0,\cdot,\cdot)$ de multiplicité s . Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $(\lambda_0-\varepsilon_0, \lambda_0+\varepsilon_0) \cap (\bigcup\limits_{\lambda \in \Sigma} (\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0)) = \{\lambda_0\}$. Alors $\forall\ \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ $\exists\ N > 0$ tel que $\sum_n \cap (\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)$ soit formé de s valeurs exactement, multiplicité comprise, $\forall\ n > N$.

Démonstration

Nous commençons par définir une famille d'opérateurs linéaires, continus, autoadjoints, positifs compacts de V dans V comme dans le §2 .

Si $\lambda \in O$ alors $A(\lambda) : V \to U \subset V$ est tel que $\forall f \in V$ $a(\lambda, A(\lambda)f, v) = (f,v)_V$ $\forall v \in U$. On définit, de plus, une autre famille d'opérateurs linéaires, autoadjoints, positifs, à range de dimension finie comme suit : si $\lambda \in O$ alors $A_n(\lambda) : V \to U_n \subset V$ est tel que $\forall f \in V$ $a(\lambda, A_n(\lambda)f, v) = (f,v)_V$ $\forall v \in U_n$.

Fixons $\lambda \in O$ et considérons le spectre $\sigma(A(\lambda))$ de $A(\lambda)$. $A(\lambda)$ *étant un opérateur compact*, son spectre est formé de valeurs propres de multiplicité finie sans point d'accumulation autre que zéro. $A(\lambda)$ étant autoadjoint et positif il est possible de numéroter les valeurs propres de $A(\lambda)$ en commençant par la plus grande et en répétant la valeur selon la multiplicité. Nous aurons donc $\mu_1(\lambda) \geq \mu_2(\lambda) \geq$ $\geq \mu_3(\lambda) \geq \ldots \geq 0$ ces valeurs propres.

Lemme 1

$\mu_i : O \to \mathbb{R}^+$ est continue et croissante, $i = 1,2,\ldots$

Preuve

Montrons tout d'abord la continuité de μ_i . Il suffit de montrer que $\lambda \mapsto A(\lambda)$ est continue lorsqu'on munit l'espace des opérateurs linéaires continus de V dans V de la topologie uniforme. La conclusion découle immédiatement de [5] p. 1091.

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in O$ on a $a(\lambda_1, (A(\lambda_1) - A(\lambda_2))f, v) =$
$= (f,v)_V - a(\lambda_1, A(\lambda_2)f, v) = a(\lambda_2, A(\lambda_2)f, v) - a(\lambda_1, A(\lambda_2)f, v)$
$\forall\, v \in U$, $\forall\, f \in V$.

Ainsi par les hypothèses (iv) et (vi) on aura
$|a(\lambda_1, (A(\lambda_1) - A(\lambda_2))f, v)| \leqslant C_1 |\lambda_2 - \lambda_1|\ \|A(\lambda_2)f\|_U\ \|v\|_U$
$\forall\, v \in U$, $\forall\, f \in V$. En posant $v = (A(\lambda_1) - A(\lambda_2))f$ et en utilisant l'hypothèse (iii) on obtient
$\chi \|(A(\lambda_1) - A(\lambda_2))f\|_U \leqslant C_1 |\lambda_2 - \lambda_1|\ \|A(\lambda_2)f\|_U \quad \forall\, f \in V$.
On a $\|A(\lambda_2)f\|_U \leqslant 1/\chi\ \|f\|_V \quad \forall\, f \in V \Rightarrow$
$\Rightarrow \|A(\lambda_1) - A(\lambda_2)\| = \sup\limits_{f \in V, \|f\|_V = 1} \|(A(\lambda_1) - A(\lambda_2))f\|_V \leqslant$
$\leqslant \dfrac{C_1}{\chi^2} |\lambda_2 - \lambda_1|$. Ainsi $A(\lambda_1) \to A(\lambda_2)$ lorsque $\lambda_1 \to \lambda_2$.
$\mu_i(\lambda)$ est donc continue. Montrons qu'elle est croissante. Pour ceci il suffit de montrer que $A(\lambda_1) \leqslant A(\lambda_2)$ si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ (voir [17] pp. 234-237).

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in O$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ et soit $f \in V$. Posons $u_1 = A(\lambda_1)f$ et $u_2 = A(\lambda_2)f$. On obtient :

$$a(\lambda_1, u_1, g) = (f,g)_V \quad \forall\, g \in U .$$
$$a(\lambda_2, u_2, g) = (f,g)_V \quad \forall\, g \in U .$$

Ainsi $a(\lambda_1, u_1, u_1) = a(\lambda_2, u_2, u_1)$. Mais $\exists\, \tilde{\lambda} \in (\lambda_1, \lambda_2)$

tel que $a(\lambda_1,u_1,u_1) = a(\lambda_2,u_1,u_1) + (\lambda_1-\lambda_2)\,\frac{d}{d\lambda}\,a(\tilde{\lambda},u_1,u_1)$.
De ces deux dernières relations on tire :

$$a(\lambda_2,u_2-u_1,u_1) = (\lambda_1-\lambda_2)\,\frac{d}{d\lambda}\,a(\tilde{\lambda},u_1,u_1) \geqslant 0 \ .$$

Ainsi $((A(\lambda_2) - A(\lambda_1))f,f)_V = a(\lambda_2,u_2-u_1,u_2) =$
$= a(\lambda_2,u_2-u_1,u_2-u_1) + a(\lambda_2,u_2-u_1,u_1) \geqslant 0$. ■

Ce qui a été fait pour $A(\lambda)$ peut être refait pour $A_n(\lambda)$. Si $\mu_1^{(n)}(\lambda) \geqslant \mu_2^{(n)}(\lambda) \geqslant \dots \geqslant \mu_{p(n)}^{(n)}(\lambda) > 0$ sont les valeurs propres positives de $A_n(\lambda)$ répétées selon leur multiplicité on aura

<u>Lemme 2</u>

$\mu_i^{(n)} : O \mapsto \mathbb{R}^+$ est continue et croissante, $i = 1,\dots,p(n)$. ■

Posons maintenant $\nu_i(\lambda) = 1/\mu_i(\lambda)$ $i \in \mathbb{N}$ et $\nu_i^{(n)}(\lambda) =$ $= 1/\mu_i^{(n)}(\lambda)$ $i = 1,\dots,p(n)$, $n \in \mathbb{N}$. A partir des considérations ci-dessus on obtient :

1) $\nu_i(\lambda)$ $i = 1,2,\dots$ sont les valeurs propres de $a(\lambda,\cdot,\cdot)$ (proposition I.2.2.). On a $0 < \nu_1(\lambda) \leqslant \nu_2(\lambda) \leqslant \dots$. De plus $\nu_i(\lambda)$ est une fonction continue et décroissante sur O .

2) $\nu_i^{(n)}(\lambda)$ $i = 1,2,\dots,p(n)$ sont les valeurs propres approchées de $a(\lambda,\cdot,\cdot)$. (proposition I.2.3.). On a $0 < \nu_1^{(n)}(\lambda) \leqslant \nu_2^{(n)}(\lambda) \leqslant \dots$. De plus $\nu_i^{(n)}(\lambda)$ est une fonction continue et décroissante sur O .

3) Soit $\lambda \in O$ fixé alors $\sigma_n(a(\lambda,\cdot,\cdot))$ approxime bien $\sigma(a(\lambda,\cdot,\cdot))$ dans $(0,x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R} - \sigma(a(\lambda,\cdot,\cdot))$ (proposition I.2.5.). Ainsi $\nu_i^{(n)}(\lambda) \overset{>}{\longmapsto} \nu_i(\lambda)$ lorsque $n \to \infty$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

Donnons encore un lemme, après quoi nous pourrons démontrer la proposition I.3.4.

Lemme 3

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et décroissante et si $f(x_1) = x_2$, alors $\exists\, x$ dans le segment $[x_1,x_2]$ tel que $f(x) = x$.

Preuve

Si $x_1 = x_2$ on pose $x = x_1$. Supposons maintenant $x_1 < x_2$ et considérons $g(x) = f(x) - x$. On a

$g(x_1) = f(x_1) - x_1 = x_2 - x_1 > 0$. $g(x_2) = f(x_2) - x_2 \leq f(x_1) - x_2 = 0$.

Comme g est continue $\exists\, x \in (x_1,x_2]$ tel que $g(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x$. Si $x_1 > x_2$ on a $g(x_1) = f(x_1) - x_1 =$

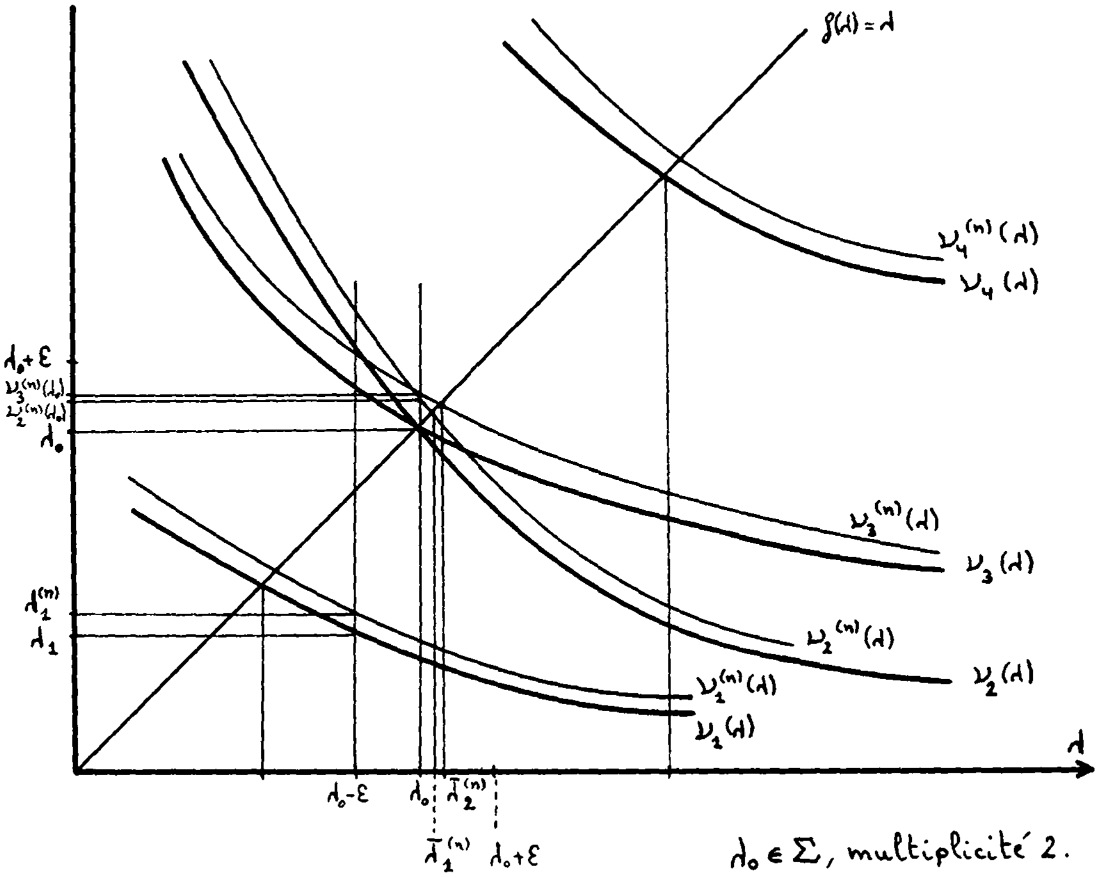
$= x_2 - x_1 < 0$ et $g(x_2) = f(x_2) - x_2 \geq f(x_1) - x_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in [x_2,x_1)$ tel que $g(x) = 0$. ■

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer la proposition I.3.4. Soit $\lambda_0 \in \Sigma$, λ_0 de multiplicité s. Par la proposition I.3.2. $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tel que

$(\lambda_0-\varepsilon_0,\lambda_0+\varepsilon_0) \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Sigma} (\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0)\right) = \{\lambda_0\}$. Par définition de

$\sum$, $\exists\, j \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_j(\lambda_o) = \nu_{j+1}(\lambda_o) = \dots = \nu_{j+s-1}(\lambda_o) = \lambda_o$. Appelons $J = \{j, j+1, \dots, j+s-1\}$. Commençons par montrer que $\nu_i(\lambda) \notin (\lambda_o-\varepsilon_o, \lambda_o+\varepsilon_o)$ $\forall\, \lambda \in (\lambda_o-\varepsilon_o, \lambda_o+\varepsilon_o)$, $\forall\, i \notin J$. Par l'absurde supposons $\exists\, i \notin J$ et $\exists\, \bar{\lambda} \in (\lambda_o-\varepsilon_o, \lambda_o+\varepsilon_o)$ tel que $\nu_i(\bar{\lambda}) = \bar{\bar{\lambda}} \in (\lambda_o-\varepsilon_o, \lambda_o+\varepsilon_o)$. Par le lemme 3 $\exists\, \tilde{\lambda} \in$ segment $[\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}}]$ tel que $\nu_i(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}$. Mais $\tilde{\lambda} \neq \lambda_o$ puisque $i \notin J$. Ainsi $\tilde{\lambda} \in \sum$, $\tilde{\lambda} \neq \lambda_o$, $|\tilde{\lambda}-\lambda_o| < \varepsilon_o$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur ε_o. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_o$ et posons $\lambda_i = \nu_i(\lambda_o-\varepsilon)$, $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i^{(n)} = \nu_i^{(n)}(\lambda_o-\varepsilon)$, $i = 1,2,\dots,p(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Les λ_i sont valeurs propres de la forme $a(\lambda_o-\varepsilon,\cdot,\cdot)$ et les $\lambda_i^{(n)}$ sont valeurs propres de la forme $a(\lambda_o-\varepsilon,\cdot,\cdot)$ relativement à U_n. Soit $\delta = \varepsilon_o - \varepsilon$. Par (3) ci-dessus $\exists\, N_1 > 0$ tel que pour $n > N_1$ on a $|\lambda_i-\lambda_i^{(n)}| < \delta$, $i = 1,2,\dots,j+s$ et $\exists\, N_2 > 0$ tel que pour $n > N_2$ on a $\lambda_o \leqslant \nu_j^{(n)}(\lambda_o) \leqslant \nu_{j+1}^{(n)}(\lambda_o) \leqslant \dots$ $\dots \leqslant \nu_{j+s-1}^{(n)}(\lambda_o) < \lambda_o + \varepsilon$. En appliquant à nouveau le lemme 3 $\exists\, \bar{\lambda}_1^{(n)}, \bar{\lambda}_2^{(n)}, \dots, \bar{\lambda}_s^{(n)} \in [\lambda_o, \lambda_o+\varepsilon)$ tel que $\nu_j^{(n)}(\bar{\lambda}_1^{(n)}) = \bar{\lambda}_1^{(n)}$, $\nu_{j+1}(\bar{\lambda}_2^{(n)}) = \bar{\lambda}_2^{(n)}$, $\dots$, $\nu_{j+s-1}(\bar{\lambda}_s^{(n)}) =$ $= \bar{\lambda}_s^{(n)}$. On aura ainsi, pour $n > N = \max(N_1, N_2)$, $\bar{\lambda}_1^{(n)}$, $\bar{\lambda}_2^{(n)}, \dots, \bar{\lambda}_s^{(n)} \in \sum \cap (\lambda_o-\varepsilon, \lambda_o+\varepsilon)$ et de plus si $\lambda \in \sum_n$, $\lambda \neq \bar{\lambda}_i^{(n)}$, $i = 1,\dots,s$, alors $\lambda \notin (\lambda_o-\varepsilon, \lambda_o+\varepsilon)$. (Il suffit de tenir compte de la décroissante de $\nu_i^{(n)}(\lambda)$, $i = 1,\dots$ $\dots,j+s$ et des considérations ci-dessus pour montrer la dernière affirmation).



$\lambda_0 \in \Sigma$, multiplicité 2.

■

Remarque 1

Cette démonstration montre implicitement la proposition I.3.3.

Remarque 2

Une estimation de l'erreur peut être faite immédiatement à partir de ce qui précède. En reprenant les notations de la démonstration précédente on a immédiatement $|\lambda_0-\bar{\lambda}_i^{(n)}| \leq$ $\leq |\lambda_0-\nu_{j+i-1}^{(n)}(\lambda_0)|$, $i = 1,2,\ldots,s$. L'estimation de $|\lambda_0-\nu_{j+i-1}^{(n)}(\lambda_0)|$ est connue pour des opérateurs aux dérivées partielles elliptiques approximés par la méthode de Galerkin [8], [9]. La proposition I.2.6. donne aussi une estimation de cette erreur.

CHAPITRE II

§1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Dans ce chapitre nous aborderons le problème donné par l'étude de la stabilité magnétohydrodynamique d'un plasma dans le cas unidimensionnel. Nous considèrerons ainsi une forme bilinéaire sur $U = H_0^1(0,1) \times L_2^N(0,1)$ dont nous chercherons le spectre qui en général est formé en partie d'un spectre continu ou de valeurs propres infiniment dégénérées.

Le paragraphe 2 sera consacré à la formulation du problème et à l'étude du spectre $\sigma(a)$. Dans le paragraphe 3 nous approximerons, par la méthode des éléments finis, $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$. Nous donnerons des conditions suffisantes sur les espaces U_n pour que $\sigma_n(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans (a,b) $\forall$ $a,b \in \mathbb{R} - \sigma(a)$. Des estimations d'erreurs seront données.

Notations :

Si Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors $\overline{\Omega}$ sera son adhérence dans $\mathbb{R}$.

Si $b,c \in \mathbb{R}$, $b < c$ alors (b,c) sera l'intervalle ouvert et $[b,c] = \overline{(b,c)}$.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ alors $B(\Omega,\varepsilon) = \bigcup\limits_{x\in\Omega} (x-\varepsilon,x+\varepsilon)$.

On notera $L_2 = \{f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mesurable $| \int_0^1 f^2 dx < \infty\}$
$f,g \in L_2$ alors $(f,g)_0 = \int_0^1 f\,g\,dx$ et $\|f\|_0 = (f,f)_0^{\frac{1}{2}}$ sont le produit scalaire et la norme dans L_2 .

$C^m(0,1) = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} \mid \frac{d^s f}{dx^s}$ continue, $0 \leqslant s \leqslant m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

$C^m[0,1] = \{f \in C^m(0,1) \mid \frac{d^s f}{dx^s}$ a une extension continue sur $[0,1]$, $0 \leqslant s \leqslant m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

$C^\infty(0,1) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} C^m(0,1)$; $C^\infty[0,1] = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} C^m[0,1]$.

$H^m = \{f \in L_2 \mid \frac{d^s f}{dx^s} \in L_2$, $0 \leqslant s \leqslant m\}$ (dérivées en distribution). $f,g \in H^m$ alors $(f,g)_m = \sum\limits_{k=0}^{m} (\frac{d^k f}{dx^k}, \frac{d^k g}{dx^k})_0$ et $\|f\|_m = (f,f)_m^{\frac{1}{2}}$ seront le produit scalaire et la norme dans H^m .

$H_0^m \subset H^m$ sera la complétion de $\{f \in C^\infty(0,1) \mid$ support $(f) \subset (0,1)\}$ pour la norme $\|\cdot\|_m$.

Une matrice $\gamma \in C^m[0,1]$ si chaque élément γ_{ij} de γ appartient à $C^m[0,1]$; γ^t sera la transposée de γ .

Si $\gamma \in C^0[0,1]$ matrice carrée, symétrique on notera

$V(\gamma) = \{\text{valeurs propres de } \gamma(x)\ ,\ 0 \leq x \leq 1\}$ et

$\Lambda(\gamma) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\ ,\ 1/x \in V(\gamma)\}$.

Si W est un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|_W$ et $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire, continue, symétrique coercive sur W on note $\sigma(a)$, $P_\sigma(a)$, $C_\sigma(a)$ le spectre, le spectre ponctuel, le spectre continu de $a(\cdot,\cdot)$ au sens de la définition I.2.1. On note χ et C des constantes de coercivité et de continuité de a .

Si $A : W \to W$ est un opérateur linéaire continu autoadjoint on note $\sigma(A)$, $P_\sigma(A)$, $C_\sigma(A)$ le spectre, le spectre ponctuel, le spectre continu de A .

Si Range $(A) \subset Y$ où $Y \subset W$ est un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|_Y$ et si A est continu de W dans Y on note

$$\|A\|_{YW} = \sup_{\substack{u \in W \\ \|u\|_W = 1}} \|Au\|_Y .$$

§2. FORMULATION DU PROBLEME. ETUDE DU SPECTRE

Soit $N > 0$ un entier.

Si $\underline{u}$ et $\underline{v} \in (L_2)^N$ on notera $(u_1,u_2,\ldots,u_N)^t = \underline{u}$, $(v_1,v_2,\ldots,v_N)^t = \underline{v}$ et le produit scalaire dans $(L_2)^N$: $(\underline{u},\underline{v})_{0,N} = \sum_{i=1}^{N} (u_i,v_i)_0$.

Soit $U = H_0^1 \times (L_2)^N$ et $V = (L_2)^{N+1}$ de produits scalaires notés $(\underline{u},\underline{v})_U = (u_1,v_1)_1 + (\underline{u}_2,\underline{v}_2)_{0,N}$, $u_1,v_1 \in H_0^1$, $\underline{u}_2,\underline{v}_2 \in (L_2)^N$ et $(\underline{u},\underline{v})_V = (\underline{u},\underline{v})_{0,N+1}$.

Nous définissons la forme bilinéaire, symétrique, continue sur U par :

$$\boxed{a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 (\alpha u_1' v_1' + u_1' \underline{\beta}^t \underline{v} + v_1' \underline{\beta}^t \underline{u} + \underline{u}^t \gamma \underline{v})dx} \tag{II.2.1}$$

où $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix}$ avec $u_1,v_1 \in H_0^1$; $\underline{u}_2,\underline{v}_2 \in (L_2)^N$

$\alpha \in C^\infty[0,1]$, $\alpha(x) > 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$.

$\underline{\beta}$ est un $(N+1)$ vecteur $\in C^\infty[0,1]$.

γ est une $(N+1) \times (N+1)$ matrice symétrique $\in C^\infty[0,1]$.

Nous nous intéressons au problème "Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\exists\, \underline{u} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ avec $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall\, \underline{v} \in U$ " et plus généralement à celui de "Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une suite $(\underline{u}_n)_{n=1}^\infty \subset U$, $\|\underline{u}_n\|_U = 1$, et une suite

$(C(n))_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ avec $|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leqslant$
$\leqslant C(n) \|\underline{v}\|_U \quad \forall\, \underline{v} \in U$ ".

Soit $\alpha_0 = \min\limits_{x\in[0,1]} \alpha(x)$, $\beta_0 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N+1} \max\limits_{x\in[0,1]} |\beta_i(x)|$ où les β_i sont les composantes de $\underline{\beta}$, $\gamma_0 = \inf V(\gamma)$.

Dans toute la suite on fera l'hypothèse :

(II.2.2) $$\boxed{\gamma_0 > 4(N+1)\,\frac{\beta_0^2}{\alpha_0}}$$

Mentionnons que cette hypothèse n'est pas restrictive car il suffit de modifier $a(\cdot,\cdot)$ en lui ajoutant la quantité $\lambda_0(\cdot,\cdot)_V$ où λ_0 est suffisamment grand. Par cette modification, l'ensemble des λ cherchés est simplement shifté de λ_0 .

Sous l'hypothèse (II.2.2) on obtient la proposition suivante :

Proposition II.2.1.

La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur U c'est-à-dire $\exists\, \chi > 0$ tel que $a(\underline{u},\underline{u}) \geqslant \chi \|\underline{u}\|_U^2 \quad \forall\, \underline{u} \in U$.

Démonstration

Soit $\underline{u} \in U$.(II.2.1) donne :

$$a(\underline{u},\underline{u}) = \int_0^1 (\alpha u_1'^2 + 2u_1'\,\underline{\beta}^t\,\underline{u} + \underline{u}^t\,\gamma\,\underline{u})dx \ .$$

On évalue $\left|\int_0^1 2u_1' \, \underline{\beta}^t \, \underline{u} \, dx\right| \leqslant 2 \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^1 |u_1' \, \beta_i \, u_i| dx \leqslant$

$\leqslant 2 \, \beta_0 \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^1 |u_1'||u_i| dx \leqslant 2 \, \beta_0 \sum_{i=1}^{N+1} \|u_1'\|_0 \|u_i\|_0 \leqslant$

$\leqslant 2 \, \beta_0 \sqrt{N+1} \, \|u_1'\|_0 \, \|\underline{u}\|_V$.

Ainsi $a(\underline{u},\underline{u}) \geqslant \alpha_0 \|u_1'\|_0^2 + \gamma_0 \|\underline{u}\|_V^2 - 2 \, \beta_0 \sqrt{N+1} \, \|u_1'\|_0 \, \|\underline{u}\|_V$

$\geqslant \left(\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}} \, \|u_1'\|_0 - \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \, \|\underline{u}\|_V\right)^2 + \frac{\alpha_0}{2} \|u_1'\|_0^2 + \frac{\gamma_0}{2} \|\underline{u}\|_V^2$.

En posant $\chi = \min\left(\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\gamma_0}{2}\right)$ on obtient le résultat. ■

Comme U est dense dans V et que l'injection de U dans V est continue on est ramené au §2, chapitre I. Ainsi nous nous poserons le problème d'approximer $\sigma(a)$.

Comme dans le chapitre I on peut associer à la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ l'opérateur $A : V \to U \subset V$ linéaire, continu, autoadjoint, positif tel que $\forall \, f \in V$ on a $a(Af,v) = (f,v)_V \quad \forall \, v \in U$. La proposition I.2.2 nous donne la relation qu'il y a entre le spectre $\sigma(A)$ de A et le spectre $\sigma(a)$ de $a(\cdot,\cdot)$. Il sera quelquefois pratique de passer par l'opérateur A pour donner des résultats sur $\sigma(a)$. Nous allons maintenant donner quelques résultats sur $\sigma(a)$ qui, nous l'avons dit, peut contenir une partie continue ou une valeur propre infiniment dégénérée ou un point d'accumulation.

Exprimons le vecteur $\underline{\beta}$ et la matrice γ par blocs comme suit :

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \underline{\beta}_2 \end{bmatrix} , \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \underline{\gamma}_3^t \\ \underline{\gamma}_3 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

où β_1, γ_1 sont des scalaires $\in C^\infty[0,1]$, $\underline{\beta}_2, \underline{\gamma}_3$ sont des N-vecteurs $\in C^\infty[0,1]$ et γ_2 une $N \times N$ matrice $\in C^\infty[0,1]$.

Si $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}$ où $u_1, v_1 \in H_0^1$; $\underline{u}_2, \underline{v}_2 \in (L_2)^N$ on peut écrire la forme bilinéaire

(II.2.3)
$$\boxed{\begin{aligned} a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{ & \alpha u_1' v_1' + \beta_1 (u_1' v_1 + u_1 v_1') + \gamma_1 u_1 v_1 + \\ & + (\underline{\beta}_2^t u_1' + \underline{\gamma}_3^t u_1) \underline{v}_2 + (\underline{\beta}_2^t v_1' + \underline{\gamma}_3^t v_1) \underline{u}_2 + \\ & + \underline{u}_2^t \gamma_2 \underline{v}_2 \} \, dx \end{aligned}}$$

Si τ_c est une partie de $\mathbb{R}$ définie par

(II.2.4)
$$\boxed{\begin{aligned} \tau_c = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \notin V(\gamma_2) \text{ , } \exists \bar{x} \in [0,1] \\ \text{tel que } \ (\alpha + \underline{\beta}_2^t (\lambda - \gamma_2)^{-1} \underline{\beta}_2)(\bar{x}) = 0 \} \end{aligned}}$$

on a la proposition qui suit :

<u>Proposition II.2.2.</u>

$\bar{\tau}_c \subset \sigma(a)$.

Démonstration

Comme $\sigma(A)$ est compact $\Rightarrow$ $\sigma(a)$ est fermé et il suffit de montrer que $\tau_c \subset \sigma(a)$. Soit donc $\lambda \in \tau_c$ et construisons une suite $(\underline{u}_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$, $\|\underline{u}_n\|_U \geq \delta > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leq C(n)\,\|\underline{v}\|_U$ $\forall\, \underline{v} \in U$ où $C(n)$ est indépendant de $\underline{v}$ et $C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$\lambda \in \tau_c \Rightarrow \exists\, \bar{x} \in [0,1]$ tel que $\alpha(\bar{x}) + \underline{\beta}_2^t\,(\lambda-\gamma_2)^{-1}\,\underline{\beta}_2(\bar{x}) = 0$.

Pour commencer supposons $\bar{x} \neq 0$, $\bar{x} \neq 1$ et posons

$I_n = (\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n})$ avec $n > N_1$ tel que $I_n \subset [0,1]$.

Considérons pour $n > N_1$, $u_{1n} \in H_0^1$ tel que support $(u_{1n}) \subset$ $\subset I_n$, $\int_0^1 u_{1n}^2\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\int_0^1 u_{1n}'^2\,dx = 1$. Posons

$$\underline{u}_n = \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{1n}'(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2 \end{bmatrix} \in U .$$

1) On a $\|\underline{u}_n\|_U \geq 1$ $\forall\, n > N_1$.

2) Si $\underline{v} \in U$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}$ où $v_1 \in H_0^1$, $\underline{v}_2 \in (L_2)^N$ on a par la formule II.2.3 :

$$a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V = \int_0^1 \{\alpha u_{1n}'v_1' + \beta_1(u_{1n}'v_1 + u_{1n}v_1') +$$

$$+ (\gamma_1-\lambda)u_{1n}v_1 + (\underline{\beta}_2^t u_{1n}' + \underline{\gamma}_3^t u_{1n})\underline{v}_2 + v_1'\,\underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\,\underline{\beta}_2\,u_{1n}' +$$

$$+ v_1\,\underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\,\underline{\beta}_2\,u_{1n}' + \underline{v}_2^t(\gamma_2-\lambda)(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2\,u_{1n}'\}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \{[\alpha+(\underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2]u_{1n}'v_1' + [\gamma_1-\lambda-\beta_1' - (\underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2)']u_{1n}v_1$$

$$+ [\underline{\gamma}_3^t\,\underline{v}_2 - \underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\,\underline{\beta}_2\,v_1']u_{1n}\}\,dx .$$

En posant $D(n) = \max\limits_{x\in I_n} |\alpha(x) + \underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \underline{\beta}_2(x)|$,

$M_1 = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |\gamma_1-\lambda-\beta_1'-(\underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2)'|$,

$M_2 = \max\limits_{0<x<1} |\underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2|$,

$M_3 = \max\limits_{\substack{0\leq x\leq 1\\ 1\leq i\leq N}} |\gamma_{3i}|$,

on obtient :

$$|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leq D(n)\|u_{1n}'\|_0\|v_1'\|_0 + M_1\|u_{1n}\|_0\|v_1\|_0$$
$$+ M_2\|u_{1n}\|_0\ \|v_1'\|_0 + M_3\|u_{1n}\|_0\|\underline{v}_2\|_{0,N} .$$

En posant $C(n) = D(n) + (M_1 + M_2 + M_3)\ \|u_{1n}\|_0$

on obtient la majoration :

$$|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leq C(n)\ \|\underline{v}\|_U .$$

$$D(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{et} \quad \|u_{1n}\|_0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

1) et 2) $\Rightarrow \lambda \in \sigma(a)$ (définition I.2.1.).

Remarquons que si $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = 1$ la démonstration reste inchangée. En effet si, par exemple, $\bar{x} = 0$, on prend pour intervalle $I_n = [0,\frac{1}{n})$ et on définit comme précédemment la suite $(u_{1n})_{n=1}^{\infty}$. ■

<u>Remarque</u>

Au lieu de prendre τ_c comme défini par la formule (II.2.4) on peut prendre $\tilde{\tau}_c = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists\ \bar{x} \in [0,1]$, $(\lambda-\gamma_2)(\bar{x})$ régulière, $(\alpha + \underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \underline{\beta}_2)(\bar{x}) = 0\}$.

Il est évident que $\tau_c \subset \tilde{\tau}_c$ et on montre facilement que $\tilde{\tau}_c \subset \sigma(a)$. Cette généralisation n'est pas intéressante pour la suite car seul τ_c est utilisé.

Dans les exemples du chapitre III, on peut voir que $\tilde{\tau}_c$ n'est pas nécessairement le spectre continu $C_\sigma(a)$ de la forme $a(\cdot,\cdot)$. $\tilde{\tau}_c$ peut être constitué par une valeur propre infiniment dégénérée par exemple.

Nous allons maintenant définir un nouveau problème qui nous permettra d'obtenir des résultats plus complets sur $\sigma(a)$.

Soit $\underline{u} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \notin V(\gamma_2)$ tels que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall\ \underline{v} \in U$. Soit $w \in H_0^1$ et soit la fonction test $\underline{v} = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}$, $0 \in (L_2)^N$. En utilisant l'expression II.2.3 on obtient :

$$(1) \quad \int_0^1 \{\alpha u_1' w' + \beta_1(u_1' w + u_1 w') + \gamma_1 u_1 w + (w'\underline{\beta}_2^t + w\underline{\gamma}_3^t)\underline{u}_2\}dx = \\ = \lambda\int_0^1 wu_1 dx \ .$$

En posant pour fonction test $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\lambda-\gamma_2)^{-1}(w'\underline{\beta}_2 + w\underline{\gamma}_3) \end{bmatrix}$,

on obtient :

$$(2) \quad \int_0^1 (w'\underline{\beta}_2^t + w\underline{\gamma}_3^t)\underline{u}_2 dx = \int_0^1 (u_1'\underline{\beta}_2^t + u_1\underline{\gamma}_3^t)(\lambda-\gamma_2)^{-1}(w'\underline{\beta}_2 + w\underline{\gamma}_3)dx \ .$$

En remplaçant (2) dans (1) on a la relation :

$b(\lambda,u_1,w) = \lambda(u_1,w)_0$ où $b(\lambda,\cdot,\cdot)$ est donnée par :

$$(II.2.5)\qquad \boxed{\begin{aligned} b(\lambda,u,v) = \int_0^1 \{ & [\alpha + \underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \underline{\beta}_2]u'v' + \\ & + [\beta_1 + \underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \underline{\beta}_2](u'v+uv') + \\ & + [\gamma_1 + \underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \underline{\gamma}_3]uv\}\,dx \end{aligned}}$$

On remarque que pour $\lambda \notin V(\gamma_2)$, $b(\lambda,\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue définie sur H_0^1 . On peut s'intéresser au problème propre généralisé "Trouver $\lambda \notin V(\gamma_2)$ tel qu'il existe $u \in H_0^1$, $u \neq 0$ avec $b(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1$ " et utiliser des résultats donnés dans §3 chapitre I .

Le problème "$a(u,v) = \lambda(u,v)_V$ $\forall\ v \in U$ " et le problème "$b(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1$ " sont liés par la proposition suivante :

<u>Proposition II.2.3.</u>

Si $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \notin V(\gamma_2)$ sont tels que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V$ $\forall\ \underline{v} \in U$ alors $u_1 \neq 0$, $\underline{u}_2 = (\lambda-\gamma_2)^{-1}(u_1'\underline{\beta}_2 + u_1\underline{\gamma}_3)$ et on a $b(\lambda,u_1,v) = \lambda(u_1,v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1$. Inversément si $w \in H_0^1$, $w \neq 0$ et $\lambda \notin V(\gamma_2)$ sont tels que $b(\lambda,w,v) = \lambda(w,v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1$ alors

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} w \\ (\lambda-\gamma_2)^{-1}(w'\underline{\beta}_2 + w\ \underline{\gamma}_3) \end{bmatrix}$$

et λ sont tels que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V$ $\forall\ \underline{v} \in U$.

<u>Démonstration</u>

Supposons $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \notin V(\gamma_2)$ tels que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V$ $\forall\ \underline{v} \in U$. D'après ce qui précède on a bien $b(\lambda,u_1,v) = \lambda(u_1,v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1$. Montrons encore que $u_1 \neq 0$. Supposons par l'absurde que $u_1 = 0$. Alors en prenant pour fonction test $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{w} \end{bmatrix}$, $\underline{w} \in (L_2)^N$ dans $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V$ on obtient :

$$\int_0^1 \underline{u}_2^t\, \gamma_2\, \underline{w}\ dx = \lambda \int_0^1 \underline{u}_2^t\, \underline{w}\, dx \quad \forall\ \underline{w} \in (L_2)^N .$$

Ainsi $\gamma_2\ \underline{u}_2 = \lambda\, \underline{u}_2$, et puisque $\lambda \notin V(\gamma_2)$ on a $\underline{u}_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{u} = 0$ qui est une contradiction.

Avant de montrer que $\underline{u}_2 = (\lambda-\gamma_2)^{-1}(u_1'\underline{\beta}_2 + u_1\underline{\gamma}_3)$ on va montrer la réciproque de la proposition.

Supposons $w \in H_0^1$, $w \neq 0$ et $\lambda \notin V(\gamma_2)$ tels que $b(\lambda,w,v) = \lambda(w,v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1$.

Soit $\underline{u} = \begin{bmatrix} w \\ (\lambda-\gamma_2)^{-1}(\underline{\beta}_2 w' + \underline{\gamma}_3 w) \end{bmatrix}$ et $\underline{v} \in U$ quelconque.

Alors $a(\underline{u},\underline{v}) = \displaystyle\int_0^1 \{\alpha w' v_1' + \beta_1(w'v_1 + wv_1') + \gamma_1\, w\, v_1 +$

$+ (w'\underline{\beta}_2^t + w\underline{\gamma}_3^t)\underline{v}_2 + (v_1'\underline{\beta}_2^t + v_1\underline{\gamma}_3^t)(\lambda-\gamma_2)^{-1}(\underline{\beta}_2 w' + \underline{\gamma}_3 w) +$

$+ (w'\underline{\beta}_2^t + w\underline{\gamma}_3^t)(\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \gamma_2\ \underline{v}_2\}\ dx =$

$= b(\lambda,w,v_1) + \displaystyle\int_0^1 (w'\underline{\beta}_2^t + w\ \underline{\gamma}_3^t)((\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \gamma_2 + 1)\underline{v}_2\ dx =$

$= \lambda \displaystyle\int_0^1 w\, v_1\, dx + \lambda \int_0^1 (w'\ \underline{\beta}_2^t + w\ \underline{\gamma}_3^t)\ (\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \underline{v}_2\ dx = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V$.

On obtient bien $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall\ v \in U$.

Montrons encore que si $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \notin V(\gamma_2)$ sont tels que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall\ \underline{v} \in U$ alors $\underline{u}_2 = (\lambda-\gamma_2)^{-1}(\underline{\beta}_2 u_1' + \underline{\gamma}_3 u_1)$. Par ce qui précède on peut affirmer que $u_1 \neq 0$ et $\tilde{\underline{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ (\lambda-\gamma_2)^{-1}(\underline{\beta}_2 u_1' + \underline{\gamma}_3 u_1) \end{bmatrix}$ est tel que $a(\tilde{\underline{u}},v) = \lambda(\tilde{\underline{u}},\underline{v})_V \quad \forall\ \underline{v} \in U$. Posons alors $\underline{w} = \underline{u} - \tilde{\underline{u}}$ et montrons que $\underline{w} = 0$.

Supposons $\underline{w} \neq 0$. Puisque $a(\underline{w},\underline{v}) = \lambda(\underline{w},\underline{v})_V \quad \forall\ \underline{v} \in U$ on aura $w_1 \neq 0$ ce qui est absurde. Donc $\underline{w} = 0$. ∎

Proposition II.2.4.

Si $\lambda \in \sigma(a) - (V(\gamma_2) \cup \bar{\tau}_c)$ alors $\lambda \in P_\sigma(a)$, de multiplicité 1 et isolée dans $\sigma(a)$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \sigma(a) - (V(\gamma_2) \cup \bar{\tau}_c)$ et montrons qu'il existe $\underline{u} \in U$, $\underline{u} \neq 0$ tel que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall\ \underline{v} \in U$.

$\lambda \in \sigma(a) \Rightarrow \lambda \neq 0$ et $\exists\,(\underline{u}_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$, $\|\underline{u}_n\|_U = 1$, $\exists\, C(n)$, $C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tels que $|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leq C(n)\|\underline{v}\|_U$ (0) $\forall\ \underline{v} \in U$.

Soit $\varphi \in H_0^1$ et prenons pour fonction test $\underline{v} = \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$.

On obtient :

$$\left|\int_0^1 \{\alpha u_{1n}'\varphi' + \beta_1(u_{1n}'\varphi + u_{1n}\varphi') + \gamma_1 u_{1n}\varphi + (\varphi'\underline{\beta}_2^t + \varphi\,\underline{\gamma}_3^t)\underline{u}_{2n} - \lambda\varphi\cdot u_{1n}\}dx\right| \leq C(n)\,\|\varphi\|_1 . \qquad (1)$$

En prenant pour fonction test $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\lambda-\gamma_2)^{-1}(\underline{\beta}_2\varphi' + \underline{\gamma}_3\varphi) \end{bmatrix}$

on obtient :

$$\left|\int_0^1 \{(\varphi'\underline{\beta}_2^t + \varphi\,\underline{\gamma}_3^t)\,(\lambda-\gamma_2)^{-1}(\underline{\beta}_2 u'_{1n} + \underline{\gamma}_3 u_{1n}) - (\varphi'\underline{\beta}_2^t + \varphi\,\underline{\gamma}_3^t)\underline{u}_{2n}\}dx\right|$$

$$\leqslant C(n)\,\|(\lambda-\gamma_2)^{-1}(\underline{\beta}_2\varphi' + \underline{\gamma}_3\varphi)\|_{0,N} \;. \tag{2}$$

En additionnant (1) et (2) on obtient :

$$|b(\lambda,u_{1n},\varphi) - \lambda(u_{1n},\varphi)_0| \leqslant C(n)[\|\varphi\|_1 + \|(\lambda-\gamma_2)^{-1}(\underline{\beta}_2\varphi' + \underline{\gamma}_3\varphi)\|_{0,N}]$$

$$\leqslant D\,C(n)\|\varphi\|_1 \tag{3}$$

où D est une constante indépendante de φ et n.

Comme $\lambda \notin \bar{\tau}_c \Rightarrow (\alpha+\underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2)\;(x) \neq 0 \quad \forall\; x \in [0,1]$.
$\alpha+\underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2$ étant une fonction continue, elle sera ou bien positive ou bien négative. Supposons-la positive.
Alors $\exists\,\theta > 0$ tel que la forme bilinéaire $w(\lambda,\cdot,\cdot)$ définie sur H_0^1 par $w(\lambda,u,v) = b(\lambda,u,v) + \theta(u,v)_0 \quad \forall\; u,v \in H_0^1$ soit coercive, c'est-à-dire $w(\lambda,u,u) \geqslant \chi\|u\|_1^2 \quad \forall\; u \in H_0^1$ avec $\chi > 0$.

Si nous posons $\tilde{\lambda} = \lambda+\theta$ (3) devient

$$|w(\lambda,u_{1n},\varphi) - \tilde{\lambda}(u_{1n},\varphi)_0| \leqslant D\cdot C(n)\,\|\varphi\|_1 \quad \forall\;\varphi \in H_0^1 \;. \tag{4}$$

Si nous montrons $\exists\,\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que $\|u_{1n}\|_1 \geqslant \varepsilon$ $\forall\; n > M$ (4) $\Rightarrow \tilde{\lambda} \in \sigma(w(\lambda,\cdot,\cdot))$.

Par l'absurde supposons $\exists\,(u_{1ni})_{i=1}^{\infty} \subset (u_{1n})_{n=1}^{\infty}$ telle que

$\|u_{1ni}\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Sans restreindre la généralité on peut supposer $\|u_{1n}\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. En posant pour fonction test dans (0) $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma_2-\lambda)\underline{u}_{2n} \end{bmatrix}$ on obtient

$$\left|\int_0^1 \{(\underline{\beta}_2^t u'_{1n} + \underline{\gamma}_3^t u_{1n})(\gamma_2-\lambda)\underline{u}_{2n} + \underline{u}_{2n}^t(\gamma_2-\lambda)^2\underline{u}_{2n}\}dx\right| \leq$$

$$\leq C(n)\,\|(\gamma_2-\lambda)\underline{u}_{2n}\|_{0,N} \Rightarrow \left|\int_0^1 \underline{u}_{2n}^t(\gamma_2-\lambda)^2\underline{u}_{2n}dx\right| \leq$$

$$\leq [C(n) + \|\underline{\beta}_2\, u'_{1n} + \underline{\gamma}_3\, u_{1n}\|_{0,N}]\;\|(\gamma_2-\lambda)\underline{u}_{2n}\|_{0,N} \;. \qquad (5)$$

Or $\exists\,\delta > 0$ tel que $\underline{s}^t(\gamma_2-\lambda)^2\underline{s} \geq \delta\;\underline{s}^t\underline{s}$ $\forall\,\underline{s} \in \mathbb{R}^N$, $\forall\,x \in [0,1]$. Ainsi, comme $\|u_{1n}\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et $C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, (5) $\Rightarrow \|\underline{u}_{2n}\|_{0,N} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Il suit que $\|\underline{u}_n\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ce qui est contradictoire avec $\|\underline{u}_n\|_U = 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Nous avons ainsi montré que $\tilde{\lambda} \in \sigma(w(\lambda,\cdot,\cdot))$.

Comme l'injection de H_0^1 dans L_2 est compacte et que $w(\lambda,\cdot,\cdot)$ est coercive sur H_0^1 nous aurons $\tilde{\lambda} \in P_\sigma(w(\lambda,\cdot,\cdot))$ (Voir remarque qui suit la proposition I.2.2.). Ainsi $\exists\, u \in H_0^1$, $u \neq 0$ tel que $w(\lambda,u,v) = \tilde{\lambda}(u,v)_0$ $\forall\, v \in H_0^1 \Rightarrow$ $\Rightarrow b(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_0$ $\forall\, v \in H_0^1$. Par la proposition II.2.3. $\lambda \in P_\sigma(a)$.

Si nous avions supposé $\alpha+\underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2$ négative nous aurions défini $w(\lambda,u,v) = -b(\lambda,u,v) + \theta(u,v)_0$ et la démonstration resterait inchangée.

Il est simple de montrer que λ est isolée dans $\sigma(a)$.
En effet en supposant $\alpha+\underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2$ positive $\exists\ \varepsilon_0>0$ et $\theta>0$ tel que $w(\mu,u,v) = b(\mu,u,v) + \theta(u,v)_0$ soit uniformément coercive pour $\mu \in (\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0)$, c'est-à-dire $\exists\ \chi>0$ tel que $w(\mu,u,u) \geq \chi\|u\|_1^2$ $\forall\ u \in H_0^1$, $\forall\ \mu \in$ $\in (\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0)$. Posons $\bar{w}(\mu,u,v) = w(\mu-\theta,u,v)$ où $\mu \in (\bar{\lambda}-\varepsilon_0,\bar{\lambda}+\varepsilon_0)$ avec $\bar{\lambda} = \lambda+\theta$. On aura $\bar{w}(\mu,u,u) \geq \chi\|u\|_1^2$ $\forall\ u \in H_0^1$, $\forall\ \mu \in (\bar{\lambda}-\varepsilon_0,\bar{\lambda}+\varepsilon_0)$. De plus si $u \in H_0^1$ on a

$$\frac{d}{d\mu}\bar{w}(\mu,u,u) = \frac{d}{d\mu} w(\mu-\theta,u,u) = -\int_0^1 \{\underline{\beta}_2^t(\mu-\theta-\gamma_2)^{-2}\underline{\beta}_2\, u'u' + 2\,\underline{\gamma}_3^t(\mu-\theta-\gamma_2)^{-2}\underline{\beta}_2\, u'u + \underline{\gamma}_3^t(\mu-\theta-\gamma_2)^{-2}\,\underline{\gamma}_3\, uu\}\,dx$$

$\forall\ \mu \in (\bar{\lambda}-\varepsilon_0,\bar{\lambda}+\varepsilon_0)$.

En posant $\underline{v} = (\mu-\theta-\gamma_2)^{-1}\,(\underline{\beta}_2 u' + \underline{\gamma}_3 u) \in (L_2)^N$ on obtient

$$\frac{d}{d\mu}\bar{w}(\mu,u,u) = -\int_0^1 \underline{v}^t\underline{v}\,dx \leq 0 \quad \forall\ \mu \in (\bar{\lambda}-\varepsilon_0,\bar{\lambda}+\varepsilon_0) .$$

Ainsi la famille $\bar{w}(\mu,\cdot,\cdot)$ de formes bilinéaires sur H_0^1 définie pour $\mu \in (\bar{\lambda}-\varepsilon_0,\bar{\lambda}+\varepsilon_0)$ répond aux hypothèses (i) - (vi) du §3 Chapitre I .

D'autre part on a vu que si $\tilde{\lambda} \in \sigma(a) \cap (\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0)$ alors $\exists\ \tilde{u} \in H_0^1$, $\tilde{u} \neq 0$ tel que $b(\tilde{\lambda},\tilde{u},v) = \tilde{\lambda}(\tilde{u},v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1 \Rightarrow$ $w(\tilde{\lambda},\tilde{u},v) = (\tilde{\lambda}+\theta)(\tilde{u},v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1 \Rightarrow \bar{w}(\tilde{\lambda}+\theta,\tilde{u},v) = (\tilde{\lambda}+\theta)(\tilde{u},v)_0$ $\forall\ v \in H_0^1$. Par la proposition I.3.2. on tire le résultat voulu.

Il reste à montrer que λ est de multiplicité 1 .

Supposons par l'absurde que λ soit de multiplicité $\geqslant 2$. Alors $\exists\ \underline{u},\underline{v} \in U$, $\underline{u},\underline{v} \neq 0$, $(\underline{u},\underline{v})_V = 0$ tels que $a(\underline{u},\underline{z}) = \lambda(\underline{u},\underline{z})_V \quad \forall\ \underline{z} \in U$ et $a(\underline{v},\underline{z}) = \lambda(\underline{v},\underline{z})_V \quad \forall\ \underline{z} \in U$.

Par la proposition II.2.3. nous avons, si $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix}$ et $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}$: $u_1 \neq 0$, $v_1 \neq 0$, $\underline{u}_2 = (\lambda-\gamma_2)^{-1}(u_1'\underline{\beta}_2 + u_1\underline{\gamma}_3)$, $\underline{v}_2 = (\lambda-\gamma_2)^{-1}(v_1'\underline{\beta}_2 + v_1\underline{\gamma}_3)$. Ainsi u_1 et v_1 sont linéairement indépendants. En effet, par l'absurde, si $u_1 = \alpha v_1$, $\alpha \neq 0$ alors les relations ci-dessus impliquent $\underline{u} = \alpha\underline{v}$ ce qui est en contradiction avec $(\underline{u},\underline{v})_V = 0$. En définissant, comme précédemment, θ tel que $w(\lambda,\cdot,\cdot) = b(\lambda,\cdot,\cdot) + \theta(\cdot,\cdot)_0$ soit coercive sur H_0^1 on obtient par la proposition II.2.3. :

$$w(\lambda,u_1,\varphi) = (\lambda+\theta)(u_1,\varphi)_0 \quad \forall\ \varphi \in H_0^1 \quad \text{et}$$
$$w(\lambda,v_1,\varphi) = (\lambda+\theta)(v_1,\varphi)_0 \quad \forall\ \varphi \in H_0^1 .$$

Si l'on pose $a = \alpha+\underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\underline{\beta}_2$, $b = \beta_1 + \underline{\beta}_2^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \underline{\gamma}_3$ et $c = \gamma_1 + \underline{\gamma}_3^t(\lambda-\gamma_2)^{-1}\ \underline{\gamma}_3 + \theta$ on a $a,b,c \in C^\infty[0,1]$ et ainsi $u_1,v_1 \in C^2[0,1]$ (résultats de régularité connus) et sont vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre $(\lambda+\theta)$ de l'équation de Sturm-Liouville $-(au')' + (c-b')u = (\lambda+\theta)u$, $u(0) = u(1) = 0$. Mais les valeurs propres de cette équation sont simples [12] et on obtient une contradiction. ∎

<u>Proposition II.2.5.</u>

Si γ_2 est une matrice constante, alors $V(\gamma_2) \subset \sigma(a)$.

<u>Démonstration</u>

Soit $\lambda \in V(\gamma_2)$. Alors $\exists\, \underline{s} \in \mathbb{R}^N$, $\underline{s} \neq 0$ tel que $\gamma_2\, \underline{s} = \lambda\, \underline{s}$. On va distinguer deux cas.

1) On suppose $\underline{\beta}_2^t(x)\underline{s} \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$. Dans ce cas on montre que $\lambda \in P_\sigma(a)$. En effet soit $f_1(x) = \underline{\beta}_2^t(x)\underline{s}$, $f_2(x) = \underline{\gamma}_3^t(x)\underline{s}$ et soit $f \in C^\infty[0,1]$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)} \exp\left(\int_0^x \frac{f_2(\tau)}{f_1(\tau)}\, d\tau\right) .$$

Posons $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} \in U$ avec $u_1 = 0$, $\underline{u}_2 = f\underline{s}$ et calculons

$$a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{(v_1'\, \underline{\beta}_2^t + v_1\, \underline{\gamma}_3^t) f\underline{s} + \underline{v}_2^t\, \gamma_2\, f\, \underline{s}\}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \{v_1'\, f\, f_1 + v_1\, f\, f_2 + \lambda\, f\, \underline{v}_2^t\, \underline{s}\}\, dx \qquad \forall\, \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \in U .$$

En intégrant par partie et en tenant compte de la relation $f\, f_2 = (f\, f_1)'$ on obtient $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda \int_0^1 f\, \underline{v}_2^t\, \underline{s} = \lambda \int_0^1 \underline{u}^t\, \underline{v}\, dx$ $\forall\, \underline{v} \in U$. On a donc bien $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall\, \underline{v} \in U$.

2) On suppose $\exists\, \bar{x} \in [0,1]$ tel que $\underline{\beta}_2(\bar{x})\underline{s} = 0$. Commençons par supposer $\bar{x} \neq 0$, $\bar{x} \neq 1$ et soit $M > 0$ tel que $I_n = (\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}) \subset [0,1] \quad \forall\, n > M$. Soit, pour $n > M$,

$e_n \in H_0^1$ tel que support $(e_n) \subset I_n$, $\int_0^1 e_n^2\, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\int_0^1 e_n'^2\, dx = 1$, et soit $\underline{u}_n = \begin{bmatrix} u_{1n} \\ \underline{u}_{2n} \end{bmatrix} \in U$ avec

$u_{1n} = 0$, $\underline{u}_{2n} = e_n' \underline{s}$.

On a $\|\underline{u}_n\|_U^2 = \sum_{i=1}^N s_i^2 \|e_n'\|_0^2 = \sum_{i=1}^N s_i^2$ où s_i sont les composantes de $\underline{s}$ dans $\mathbb{R}^N$. $\underline{s} \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N s_i^2 = \varepsilon^2 > 0 \Rightarrow$

$\|\underline{u}_n\|_U \geq \varepsilon \quad \forall\, n > M$. Si $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \in U$ on calcule :

$$|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| = \left|\int_0^1 \{v_1' \underline{\beta}_2^t + v_1 \underline{\gamma}_3^t)\underline{s}\, e_n' + \underline{v}_2^t \gamma_2\, \underline{s}\, e_n' -\right.$$

$$\left. - \lambda\, \underline{v}_2^t\, \underline{s}\, e_n'\}\, dx\right| = \left|\int_0^1 (v_1' \underline{\beta}_2^t + v_1 \underline{\gamma}_3^t)\, \underline{s}\, e_n'\, dx\right| .$$

En intégrant par partie le terme $\underline{\gamma}_3^t \underline{s}\, v_1 e_n'$ et en posant $C = \left(\max_{x\in[0,1]} |\underline{\gamma}_3'(x)\underline{s}| + \max_{x\in[0,1]} |\underline{\gamma}_3^t(x)\underline{s}| \right)$ on obtient l'estimation :

$$|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leq \{\max_{x\in I_n} |\underline{\beta}_2^t(x)\underline{s}| + C\, \|e_n\|_0\}\, \|v_1\|_1 .$$

En posant $C(n) = \max_{x\in I_n} |\underline{\beta}_2^t(x)\underline{s}| + C\, \|e_n\|_0$ on a bien

$C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et $|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leq C(n)\, \|\underline{v}\|_U \quad \forall\, \underline{v} \in U$.

Ainsi $\lambda \in \sigma(a)$.

Si $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = 1$ on prend $I_n = [0,\frac{1}{n})$ ou $I_n = (1-\frac{1}{n},1]$ et la démonstration reste inchangée. ■

Remarque

Si γ_2 n'est pas constant nous n'avons pas généralement $V(\gamma_2) \subset \sigma(a)$. Les deux exemples suivants montrent que nous ne pouvons rien dire à priori sur $V(\gamma_2)$.

1) Exemple où $V(\gamma_2) \subset \sigma(a)$

Prenons $U = H_0^1 \times L_2$ $V = L_2 \times L_2$ (cas où $N = 1$) et soit la forme bilinéaire $a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{u_1'v_1' + (1+x)u_2v_2\}dx$. Il est facile de voir que dans ce cas $\sigma(a) = \{k^2\pi^2 , k = 1,2,\ldots\} \cup [1,2]$. Ainsi $V(\gamma_2) = [1,2] \subset \sigma(a)$.

2) Exemple où $V(\gamma_2) \not\subset \sigma(a)$

Prenons encore $N = 1$ c'est-à-dire $U = H_0^1 \times L_2$ $V = L_2 \times L_2$ et soit les formes bilinéaires $a_\varepsilon(\underline{u},\underline{v}) =$
$= \int_0^1 \{u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + (2+\varepsilon x)u_2v_2\}dx$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
Il est facile de voir que $\sigma(a_0) = \{1\} \cup \{2\} \cup \{2+k^2\pi^2 , k = 1,2,\ldots\}$. (Voir exemples chapitre III). D'autre part la valeur 2 est valeur propre de a de multiplicité 1 . Soit les opérateurs A_ε $V \longmapsto U \subset V$ tel que $\forall$ $\underline{f} \in V$ on a $a_\varepsilon(A_\varepsilon \underline{f},\underline{v}) = (\underline{f},\underline{v})_V$ $\forall$ $\underline{v} \in U$ (cf. §2 chapitre I). On montre facilement que $A_\varepsilon \to A_0$ uniformément lorsque $\varepsilon \to 0$. En effet $a_0(A_0\underline{f},\underline{v}) - a_\varepsilon(A_\varepsilon\underline{f},\underline{v}) = 0$

$\forall\ \underline{v} \in U\ ,\ \forall\ \underline{f} \in V \Rightarrow a_0((A_\varepsilon - A_0)\underline{f},\underline{v}) = a_0(A_\varepsilon \underline{f},\underline{v})\ -$

$-\ a_\varepsilon(A_\varepsilon \underline{f},\underline{v})\quad \forall\ \underline{v} \in U\ ,\ \forall\ \underline{f} \in V\ .$ (*)

Si $\underline{u} \in U$ on a $|a_0(\underline{u},\underline{v}) - a_\varepsilon(\underline{u},\underline{v})| \leqslant \varepsilon \|\underline{u}\|_V \|\underline{v}\|_V \quad \forall\ \underline{v} \in U$.

En utilisant la coercivité de a_0 et en posant

$\underline{v} = (A_0 - A_\varepsilon)\underline{f}$ on obtient $\chi \|(A_0-A_\varepsilon)\underline{f}\|_U \leqslant \varepsilon \|A_\varepsilon f\|_V$.

Mais a_ε admet la même constante de coercivité χ

que a_0 et on a $\|A_\varepsilon \underline{f}\|_V \leqslant \frac{1}{\chi} \|\underline{f}\|_V \quad \forall\ \underline{f} \in V$.

D'où $\|A_0 - A_\varepsilon\|_{V,V} \leqslant \frac{1}{\chi^2} \cdot \varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

La valeur 2 étant valeur propre de multiplicité 1 de a_0 et isolée dans $\sigma(a_0)$, alors $\frac{1}{2}$ sera valeur propre de A_0 de multiplicité 1 et isolée dans $\sigma(A_0)$ (proposition I.2.2). Soit I un voisinage ouvert de 1/2 dans $\mathbb{R}$ tel que $\bar{I} \cap \sigma(A_0) = \{1/2\}$ Alors $\exists\ \delta > 0$ tel que, pour $\varepsilon < \delta$, $I \cap \sigma(A_\varepsilon)$ est formé que d'une seule valeur ([17] p. 367).

En reprenant la proposition I.2.2. on a prouvé que pour $\varepsilon < \delta$ fixé $V(\gamma_2) = [2, 2+\varepsilon] \not\subset \sigma(a)$.

§3. APPROXIMATION DE $\sigma(a)$ PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Dans ce paragraphe nous approximerons $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$ où $\sigma_n(a)$ est le spectre de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ relativement à U_n - sous-espace vectoriel de dimension finie de U (voir définition I.2.2.).

De façon générale si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de sous-espaces de dimension finie de U ayant la propriété " $\forall\, \underline{f} \in U$, $\inf\limits_{\underline{\varphi}\in U_n} \|\underline{f}-\underline{\varphi}\|_U \to 0$ lorsque $n \to \infty$ " alors $\sigma_n(a)$ n'est pas nécessairement une bonne approximation de $\sigma(a)$ dans I = intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, au sens de la définition I.2.3. .

Nous avons vu dans le §2 Chapitre I que la condition 1) de la définition I.2.3. est satisfaite (proposition I.2.4.). Par contre la condition 2) n'est pas satisfaite en général et dans ce cas on dira qu'il y a <u>pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$ ou que $\sigma_n(a)$ pollue $\sigma(a)$</u> . Des exemples du chapitre III montrent cette pollution (Voir aussi [4]).

Dans ce paragraphe nous énoncerons des conditions suffisantes sur les espaces U_n pour qu'il n'y ait pas pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$.

La proposition suivante introduit des coefficients approchés dans la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$.

Proposition II.3.1.

Soit $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de U satisfaisant : " $\forall\ \underline{f} \in U$, $\inf\limits_{\underline{\varphi}\in U_n} \|\underline{f}-\underline{\varphi}\|_U \to 0$ lorsque $n \to \infty$ " .

Soit $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\underline{\beta}_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ des suites de fonctions, fonctions vectorielles et fonctions matricielles $\in L_\infty(0,1)$ telles que $\|\alpha-\alpha_n\|_\infty = \sup\text{ess}\ |\alpha-\alpha_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\|\underline{\beta}-\underline{\beta}_n\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,N+1} \sup\text{ess}\ |\beta_i-\beta_{in}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\|\gamma-\gamma_n\|_\infty = \max\limits_{i,j=1,\dots,N+1} \sup\text{ess}\ |\gamma_{ij}-\gamma_{ijn}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Soit $a_n(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{\alpha_n u_1' v_1' + u_1'\ \underline{\beta}_n^t\ \underline{v} + v_1'\ \underline{\beta}_n^t\ \underline{u} + \underline{u}^t\ \gamma_n\ \underline{v}\}dx$ la forme bilinéaire symétrique continue définie sur U_n par (II.2.1.) où α , $\underline{\beta}$ et γ ont été remplacé par α_n , $\underline{\beta}_n$, γ_n . $\sigma_n(a)$ et $\sigma_n(a_n)$ seront les spectres de a et a_n relativement à U_n (définition I.2.2.).

Alors si $\varepsilon_0 > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont tels que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ $\exists\ N_1$ tel que pour $n > N_1$ $\sigma_n(a) \cap (\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$ = exactement s valeurs multiplicité comprise, on a :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ $\exists\ N_2 > 0$ tel que pour $n > N_2$ $\sigma_n(a_n) \cap (\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$ = exactement s valeurs multiplicité comprise.

Démonstration

Plaçons-nous dans les hypothèses de la proposition II.3.1. et définissons les opérateurs A_n et $\tilde{A}_n : V \to U_n \subset V$ comme dans §2 chapitre I par :

$$\underline{f} \in V \quad \begin{cases} a(A_n\underline{f},\underline{v}) = (\underline{f},\underline{v})_V & \forall\ \underline{v} \in U_n \\ a_n(\tilde{A}_n\underline{f},\underline{v}) = (\underline{f},\underline{v})_V & \forall\ \underline{v} \in U_n . \end{cases}$$

1) On montre facilement $\|A_n-\tilde{A}_n\|_{V,V} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. En effet on a $|a(\underline{u},\underline{v}) - a_n(\underline{u},\underline{v})| \leq K(n)\ \|\underline{u}\|_U\ \|\underline{v}\|_U \quad \forall\ \underline{u},\underline{v} \in U_n$ où $K(n)$ ne dépend pas de $\underline{u},\underline{v}$, U_n et avec $K(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Ainsi si $\underline{f} \in V$ on obtient

$$|a(A_n\underline{f} - \tilde{A}_n\underline{f},\underline{v})| = |a_n(\tilde{A}_n\underline{f},\underline{v}) - a(\tilde{A}_n\underline{f},\underline{v})| \leq K(n)\|\tilde{A}_n\underline{f}\|_U\ \|\underline{v}\|_U$$

$\forall\ \underline{v} \in U_n$.

En posant $\underline{v} = A_n\underline{f} - \tilde{A}_n\underline{f}$ et en utilisant la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ on obtient $\chi\|(A_n - \tilde{A}_n)\underline{f}\|_U \leq K(n)\|\tilde{A}_n\underline{f}\|_U$.

$\|\tilde{A}_n\|_{U,V}$ étant borné en n nous aurons $\|A_n-\tilde{A}_n\|_{U,V} \to 0$ $\Rightarrow \|A_n-\tilde{A}_n\|_{V,V} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

2) A_n et $\tilde{A}_n$ sont à range de dimension finie donc compacts. De plus, si n est assez grand, A_n et $\tilde{A}_n$ sont positifs car $(A_n\ \underline{f},\underline{f})_V = a(A_n\underline{f},A_n\underline{f}) \geq 0 \quad \forall\ \underline{f} \in V$ et $(\tilde{A}_n\underline{f},\underline{f})_V = a_n(\tilde{A}_n\underline{f},\tilde{A}_n\underline{f}) \geq 0 \quad \forall\ \underline{f} \in V$.

Soit donc $\mu_{1n} \geq \mu_{2n} \geq \mu_{3n} \geq \ldots\ldots \geq 0$ et $\tilde{\mu}_{1n} \geq \tilde{\mu}_{2n} \geq \ldots \geq 0$ les valeurs propres de A_n et $\tilde{A}_n$

répétées selon leur multiplicité. On a $|\mu_{in}-\tilde{\mu}_{in}| \leqslant$ $\leqslant \|A_n-\tilde{A}_n\|_{V,V}$, $i = 1,2,\ldots$ ([17] p. 236). Le résultat de la proposition II.3.1. découle immédiatement de 1), 2) et de la proposition I.2.3.

■

DEFINITION II.3.1.

Nous dirons que la suite $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de sous-espaces de type éléments finis de U est de classe S_p où p est un entier $\geqslant 1$ si :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ il existe $m(n)$ points $0 = x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots <$ $< x_{m(n)}^{(n)} = 1$ dans $[0,1]$ tels que

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i=2,\ldots,m(n)} |x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}| = 0$.

b) U_n peut s'écrire $U_n = S_n \times \prod\limits_{j=1}^{N} T_n^{(j)}$ avec

$S_n = \{f \in C^0[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0$ et $f/_{[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]}$ est un polynôme de degré $\leqslant p$, $i = 2,\ldots,m(n)\}$ et

$T_n^{(j)} \supset \{f \in L_2 \mid f/_{(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)})}$ est un polynôme de degré $\leqslant p-1$, $i = 2,\ldots,m(n)\}$, $j = 1,2,\ldots,N$.

Si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ est de classe S_p , p entier $\geqslant 1$, on a $U_n \subset U$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, \underline{u} \in U$ $\inf\limits_{\underline{\varphi}\in U_n} \|\underline{u}-\underline{\varphi}\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$h_n = \max\limits_{i=2,\ldots,m(n)} |x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}|$ sera dit "paramètre de finesse de U_n ."

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat de bonne approximation du spectre $\sigma(a)$ de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$.

Proposition II.3.2.

Soit p un entier ≥ 1 et supposons $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de classe $\mathcal{S}_p$. Soit pour $n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n(a)$ le spectre de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ relativement à U_n .

Soit $b,c \in \mathbb{R} - \sigma(a)$, $b < c$, $[b,c] \cap (V(\gamma_2) \cup \bar{\tau}_c) = \emptyset$.

Alors $\sigma_n(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans (b,c) .

Démonstration

Sous les hypothèses de la proposition II.3.2. il faut montrer 1), 2) et 3) de la définition I.2.3. La condition 1) (déf. I.2.3.) découle immédiatement de la proposition I.2.4. et du fait que $\inf_{\underline{\varphi} \in U_n} \|\underline{u}-\underline{\varphi}\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0, \underline{u} \in U$. Nous allons donc montrer 2) et 3) de la définition I.2.3. Pour le faire nous commencerons par construire un problème intermédiaire.

$(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de classe $\mathcal{S}_p \Rightarrow$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $\exists\, m(n)$ points $0 = x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_{m(n)}^{(n)} = 1$ vérifiant a) et b) de la définition II.3.1. Soit $y_i^{(n)} = \dfrac{x_i^{(n)} + x_{i+1}^{(n)}}{2}$, $i = 1,2,\dots,m(n)-1$.

Nous construirons les fonctions suivantes :

$$\underline{\beta}_{2n}(x) = \underline{\beta}_2(y_i^{(n)}) - \frac{(x-x_i^{(n)})}{p}\, \underline{\gamma}_3(y_i^{(n)}) \text{ si } x \in (x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}) ,$$

$i = 1,2,\dots,m(n)-1$.

$$\underline{\gamma}_{3n}(x) = \underline{\gamma}_3(y_i^{(n)}) \text{ si } x \in (x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}) , \ i = 1,2,\dots,m(n)-1 .$$

$\gamma_{2n}(x) = \gamma_2(y_i^{(n)})$ si $x \in (x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})$, $i = 1,2,\ldots,m(n)-1$.

Si l'on note β_{j2n} , β_{j2} , γ_{j3n} , γ_{j3} la $j^{\text{ième}}$ composante des vecteurs $\underline{\beta}_{2n}$, $\underline{\beta}_2$, $\underline{\gamma}_{3n}$, $\underline{\gamma}_3$, $j = 1,\ldots,N$ et $\gamma_{jk\,2n}$, $\gamma_{jk\,2}$ le coefficient (j,k) des matrices γ_{2n} et γ_2 , $j,k = 1,\ldots,N$ on a $\underline{\beta}_{2n}$, $\underline{\gamma}_{3n}$, $\gamma_{2n} \in L_\infty$ et $\|\underline{\beta}_2 - \underline{\beta}_{2n}\|_\infty =$

$$= \max_{j=1,\ldots,N} \max_{i=1,2,\ldots,m(n)-1} \sup_{x \in (x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})} |\beta_{j2}(x) - \beta_{j2n}(x)| \to 0$$

$$\|\underline{\gamma}_{3n} - \underline{\gamma}_3\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,N} \max_{i=1,2,\ldots,m(n)-1} \sup_{x \in (x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})} |\gamma_{j3n} - \gamma_{j3}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\|\gamma_{2n} - \gamma_2\|_\infty = \max_{j,k=1,\ldots,N} \max_{i=1,2,\ldots,m(n)-1} \sup_{x \in (x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})} |\gamma_{jk2n} - \gamma_{jk2}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Soit $a_n(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire sur U obtenue par la formule II.2.3. dans laquelle $\underline{\beta}_2$, $\underline{\gamma}_3$ et γ_2 ont été remplacés par $\underline{\beta}_{2n}$, $\underline{\gamma}_{3n}$ et γ_{2n} et soit $b_n(\lambda,\cdot,\cdot)$ la famille de forme bilinéaire sur H_0^1 obtenue par la formule II.2.5 dans laquelle $\underline{\beta}_2$, $\underline{\gamma}_3$ et γ_2 ont été remplacés par $\underline{\beta}_{2n}$, $\underline{\gamma}_{3n}$ et γ_{2n} . On obtient tout d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme</u>

Si $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} \in U_n$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R} - V(\gamma_2)$ sont tels que $a_n(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V$ $\forall\ \underline{v} \in U_n$ alors on a $u_1 \neq 0$, $\underline{u}_2 = (\lambda - \gamma_{2n})^{-1}(\underline{\beta}_{2n} u_1' + \underline{\gamma}_{3n} u_1)$ et $b_n(\lambda, u_1, v) = \lambda(u_1, v)_0$ $\forall\ v \in S_n$. Inversément si $w \in S_n$, $w \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R} - V(\gamma_2)$ sont tels que $b_n(\lambda, w, v) = \lambda(w,v)_0$ $\forall\ v \in S_n$, alors en posant $\underline{u} = \begin{bmatrix} w \\ (\lambda-\gamma_{2n})^{-1}(\underline{\beta}_{2n}w' + \underline{\gamma}_{3n}w) \end{bmatrix}$ on aura $\underline{u} \in U_n$ et

$a_n(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall\ \underline{v} \in U_n$.

Preuve

La démonstration de ce lemme se fait comme celle de la proposition II.2.3. après avoir montré que si $\lambda \in \mathbb{R} - V(\gamma_2)$ alors $(\lambda-\gamma_{2n})^{-1}(\underline{\beta}_{2n}w' + \underline{\gamma}_3 w) \in \prod_{j=1}^{N} T_n^{(j)} \quad \forall w \in S_n$.

$\lambda \notin V(\gamma_2) \Rightarrow \lambda \notin V(\gamma_{2n})$ et $(\lambda-\gamma_{2n})^{-1}$ a un sens. Soit $G = (\lambda-\gamma_{2n})^{-1}$. Les éléments G_{jk} de la matrice G seront constants sur les intervalles $(x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})$, $i = 1,\dots,m(n)-1$. Il suffit de vérifier que $\beta_{j2n}w' + \gamma_{j3n}w$ est un polynôme de degré $p-1$ sur $(x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})$, $i = 1,2,\dots,m(n)-1$, $\forall\ w \in S_n$.

Soit $w \in S_n$ et prenons l'intervalle $I = (x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})$, $i = 1,\dots,m(n)-1$. $w/_I$ peut s'écrire $w/_I = a_0 + a_1 x + \dots$ $\dots + a_p x^p$. Ainsi $w'/_I = a_1 + 2a_2 x + \dots + p\, a_p\, x^{p-1}$ et

$$(\underline{\beta}_{2n}w' + \underline{\gamma}_{3n}w)/_I = [\underline{\beta}_2(y_i^{(n)}) - \frac{(x-x_i^{(n)})}{p}\, \underline{\gamma}_3\, (y_i^{(n)})] \cdot$$
$$\cdot\ [a_1 + 2a_2 x + \dots + p\, a_p\, x^{p-1}] + \underline{\gamma}_3(y_i^{(n)})\ [a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p] .$$

Ainsi on obtient bien un polynôme de degré $\leq p-1$ car le coefficient de x^p est nul. ■

Revenons à la démonstration de la proposition II.3.2. et montrons la condition 2) de la définition I.2.3. c'est-à-dire :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$ tel que $\sigma_n(a) \cap (b,c) \subset B(\sigma(a) \cap (b,c), \varepsilon) \ \forall n > M$.

Par l'absurde supposons $\exists \varepsilon > 0$ et $n_1 < n_2 < \ldots$ tel que $\sigma_{n_i}(a) \cap (b,c) \not\subset B(\sigma(a) \cap (b,c), \varepsilon)$, $i = 1,2,\ldots$ Soit $\lambda_{n_i} \in \sigma_{n_i}(a) \cap (b,c)$, $\lambda_{n_i} \notin B(\sigma(a) \cap (b,c), \varepsilon)$. La suite $(\lambda_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ est dans (b,c) donc bornée $\Rightarrow \exists (\lambda_{n_{i_j}})_{j=1}^{\infty} \subset (\lambda_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ tel que $\lambda_{n_{i_j}} \xrightarrow{j\to\infty} \lambda \in [b,c]$. Sans restreindre la généralité nous pouvons poser $n_{i_j} = j$ et supposer $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in [b,c]$.

Il est clair que $\lambda \notin \sigma(a)$ car $b,c \notin \sigma(a)$ et $\lambda_n \notin B(\sigma(a) \cap (b,c), \varepsilon)$. Nous allons montrer que $\lambda \in \sigma(a)$ ce qui est une contradiction. En posant

$$\alpha_n = \alpha, \quad \underline{\beta}_n = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \underline{\beta}_{2n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \underline{\gamma}_{3n}^t \\ \underline{\gamma}_{3n} & \gamma_{2n} \end{bmatrix}, \ n \in \mathbb{N}$$

les hypothèses de la proposition II.3.1 sont satisfaites et ainsi $\exists \tilde{\lambda}_n \in \sigma_n(a_n)$ tel que $\tilde{\lambda}_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$. Comme on a supposé $[b,c] \cap (V(\gamma_2) \cup \bar{\tau}_c) = \phi$ on peut supposer λ et $\tilde{\lambda}_n \notin V(\gamma_2) \cup \bar{\tau}_c$. Par le lemme ci-dessus $\exists u_n \in S_n$, $\| u_n \|_0 = 1$ tel que $b_n(\tilde{\lambda}_n, u_n, v) = \tilde{\lambda}_n (u_n, v)_0 \quad \forall v \in S_n$.

Si $D(n) = 4 \max\{\| \underline{\beta}_2^t (\lambda - \gamma_2)^{-1} \underline{\beta}_2 - \underline{\beta}_{2n}^t (\tilde{\lambda}_n - \gamma_{2n})^{-1} \underline{\beta}_{2n} \|_\infty$, $\| \gamma_3^t (\lambda-\gamma_2)^{-1} \underline{\beta}_2 - \underline{\gamma}_{3n}^t (\tilde{\lambda}_n - \gamma_{2n})^{-1} \underline{\beta}_{2n} \|_\infty$, $\| \underline{\gamma}_3^t (\lambda - \gamma_2)^{-1} \underline{\gamma}_3 - \underline{\gamma}_{3n}^t (\tilde{\lambda}_n - \underline{\gamma}_{2n})^{-1} \underline{\gamma}_{3n} \|_\infty \}$ on a $D(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et

$$|b(\lambda,u,v) - b_n(\tilde{\lambda}_n,u,v)| \leq D(n) \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u, v \in S_n, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$\lambda \notin V(\gamma_2) \cup \bar{\tau}_c \Rightarrow \exists\ \theta > 0\ (\theta<0)$ tel que $W(\lambda,.,.) = b(\lambda,.,.) + \theta(.,.)_0$ soit coercive sur H_0^1 ($-W$ coercive sur H_0^1). Ainsi la relation (1) nous permet de supposer, sans restreindre la généralité, $\exists\ \theta > 0$ et $\chi > 0$ tel que pour n assez grand on ait :

$$W(\lambda,u,u) = b(\lambda,u,u) + \theta(u,u)_0 \geq \chi\|u\|_1^2 \quad \forall u \in H_0^1$$

$$W_n(\tilde{\lambda}_n,u,u) = b_n(\tilde{\lambda}_n,u,u) + \theta(u,u)_0 \geq \chi\|u\|_1^2 \quad \forall u \in S_n.$$

Nous avons ainsi $\|u_n\|_1^2 \leq \dfrac{\tilde{\lambda}_n+\theta}{\chi}\|u_n\|_0^2 = \dfrac{\tilde{\lambda}_n+\theta}{\chi}$ et donc la suite $(u_n)_{n=1}^\infty$ est bornée dans H_0^1. Il existe donc une sous-suite de $(u_n)_{n=1}^\infty$ convergente dans L_2 (compacité de l'injection de H_0^1 dans L_2). On peut supposer ainsi, sans restreindre la généralité, que $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \in L_2$. Soit $\tilde{u} \in H_0^1$ tel que $W(\lambda,\tilde{u},v) = (\lambda+\theta)(u,v)_0\ \forall v \in H_0^1$ et soit $\tilde{u}_n \in S_n$ tel que $W(\lambda,\tilde{u}-\tilde{u}_n,v) = 0\ \forall v \in S_n$. On a

a) $\|\tilde{u}-\tilde{u}_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (car $(U_n)_{n=1}^\infty$ est de classe $\mathcal{S}_p$).

b) $|W(\lambda,\tilde{u}_n-u_n,v)| = |(\lambda+\theta)(u,v)_0 + W_n(\tilde{\lambda}_n,u_n,v) - W_n(\tilde{\lambda}_n,u_n,v) - W(\lambda,u_n,v)|$

$\leq |(\lambda+\theta)(u-u_n,v)_0| + |(\lambda-\tilde{\lambda}_n)(u_n,v)_0| + |W_n(\tilde{\lambda}_n,u_n,v)-W(\lambda,u_n,v)|$

$\leq |\lambda+\theta|\ \|u-u_n\|_0\|v\|_0 + |\lambda-\tilde{\lambda}_n|\ \|v\|_0 + D(n)\|u_n\|_1\ \|v\|_1 \quad \forall v \in S_n.$

en posant $v = \tilde{u}_n - u_n$ et en utilisant la coercivité de $W(\lambda,.,.)$ on obtient $\chi\|\tilde{u}_n - u_n\|_1 \leq |\lambda+\theta|\ \|u-u_n\|_0 + |\lambda-\tilde{\lambda}_n| + \left(\dfrac{\tilde{\lambda}_n+\theta}{\chi}\right)^{\frac{1}{2}} D(n)$. Ainsi $\|\tilde{u}_n - u_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(a) et (b) $\Rightarrow \|\tilde{u} - u_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Comme $\|u - u_n\|_0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ on aura $u = \tilde{u}$. Ainsi $u \in H^1_0$, $\|u\|_0 = 1$ et $b(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_0$ $\forall v \in H^1_0$. Par la proposition II.2.3 on obtient donc $\lambda \in \sigma(a)$.

Nous montrons maintenant la condition 3) de la définition I.2.3. Soit $\lambda \in \sigma(a) \cap (b,c)$. Alors $\lambda \in P_\sigma(a)$, de multiplicité 1 et isolée dans $\sigma(a)$ (proposition II.2.4). Soit $\varepsilon > o$ tel que $(\lambda-\varepsilon\ ,\lambda+\varepsilon) \subset (a,b)$ et $[\lambda-\varepsilon\ ,\lambda+\varepsilon] \cap \sigma(a) = \{\lambda\}$ et montrons qu'il existe $M>0$ tel que pour $n>M$ on a $(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon) \cap \sigma_n(a)=\{\lambda_n\}$ où λ_n est de multiplicité 1. Supposons par l'absurde que $\forall M > 0\ \exists n > M$ tel que $(\lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon) \cap \sigma_n(a)$ soit formé d'au moins deux valeurs propres de $a(.,.)$ relativement à U_n, multiplicité comptée. Sans restriction de généralité et par ce qui a été montré précédemment on peut supposer:

$\exists\ \lambda_n,\ \mu_n \in \mathbb{R}\ ,\ \underline{u}_n,\ \underline{v}_n \in U_n$ tq

c) $\|\underline{u}_n\|_V = \|\underline{v}_n\|_V = 1,\ (\underline{u}_n,\ \underline{v}_n)_V = 0.$

d) $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda\ ,\ \mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda\ .$

e) $a(\underline{u}_n,\underline{v}) = \lambda_n(\underline{u}_n,v)_V\ ,\ a(\underline{v}_n,\underline{v}) = \mu_n(\underline{v}_n,\underline{v})_V \quad \forall \underline{v} \in U_n.$

Par la proposition II.3.1 : $\exists\ \tilde{\lambda}_n,\tilde{\mu}_n \in \mathbb{R},\ \tilde{\underline{u}}_n,\tilde{\underline{v}}_n \in U_n$ tq

$\tilde{c}$) $\|\tilde{\underline{u}}_n\|_V = \|\tilde{\underline{v}}_n\|_V = 1,\ (\tilde{\underline{u}}_n,\tilde{\underline{v}}_n)_V = 0$

$\tilde{d}$) $\tilde{\lambda}_n \to \lambda\ ,\ \tilde{\mu}_n \to \lambda$ lorsque $n \to \infty$.

$\tilde{e}$) $a_n(\tilde{\underline{u}}_n,\tilde{\underline{v}}) = \tilde{\lambda}_n(\tilde{\underline{u}}_n,\underline{v})_V\ ,\ a_n(\tilde{\underline{v}}_n,\underline{v}) = \tilde{\mu}_n(\tilde{\underline{v}}_n,\underline{v})_V \quad \forall \underline{v} \in U_n.$

Si $\tilde{\underline{u}}_n = \begin{bmatrix} u_{1n} \\ \underline{u}_{2n} \end{bmatrix}$, $\tilde{\underline{v}}_n = \begin{bmatrix} v_{1n} \\ \underline{v}_{2n} \end{bmatrix}$ avec $u_{1n}, v_{1n} \in S_n$, $\underline{u}_{2n}, \underline{v}_{2n} \in \prod_{j=1}^{N} T_n^{(j)}$

on peut utiliser le lemme et faire les mêmes considérations que dans la première partie de la démonstration. Ainsi, sans restreindre la généralité on peut supposer: $u_1, v_1 \in H_0^1$ tel que

f) $\| u_1 - u_{1n} \|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\| v_1 - v_{1n} \|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

g) $b(\lambda, u_1, v) = \lambda (u_1, v)_0$, $b(\lambda, v_1, v) = \lambda (v_1, v)_0 \quad \forall v \in H_0^1$.

De plus on a

h) $\underline{u}_{2n} = (\tilde{\lambda}_n - \gamma_{2n})^{-1} (\underline{\beta}_{2n}\, u'_{1n} + \underline{\gamma}_{3n}\, u_{1n})$ et

$\quad \underline{v}_{2n} = (\tilde{\mu}_n - \gamma_{2n})^{-1} (\underline{\beta}_{2n}\, v'_{1n} + \underline{\gamma}_{3n}\, v_{1n})$.

En posant $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ (\lambda - \gamma_2)^{-1} (\underline{\beta}_2 u'_1 + \underline{\gamma}_3 u_1) \end{bmatrix}$ et $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ (\lambda - \gamma_2)^{-1} (\underline{\beta}_2 v'_1 + \underline{\gamma}_3 v_1) \end{bmatrix}$

(f) et (h) $\Rightarrow \| \underline{u} - \tilde{\underline{u}}_n \|_V \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et $\| \underline{v} - \tilde{\underline{v}}_n \|_V \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Avec ($\tilde{c}$) on aura donc $\| \underline{u} \|_V = 1$, $\| \underline{v} \|_V = 1$, $(\underline{u}, \underline{v})_V = 0$.

Mais en utilisant (g) et la proposition II.2.3 on a

$a(\underline{u}, \underline{w}) = \lambda\, (\underline{u}, \underline{w})_V$ et $a(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda (\underline{v}, \underline{w})_V \quad \forall \underline{w} \in U$.

Ainsi $\lambda \in P_\sigma(a)$ de multiplicité au moins égale à 2 ce qui est une contradiction.

■

Proposition II.3.3

Soit p un entier ≥ 1 et supposons $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de classe S_p. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(a)$ le spectre de $a(.,.)$ relativement à U_n. Soit $b,c \in \mathbb{R}-\sigma(a)$, $b < c$, $[b,c] \cap V(\gamma_2) = \phi$. Alors il n'y a pas pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$ dans (b,c) c'est à dire $\forall\varepsilon > 0$ $\exists M > 0$ tel que $\sigma_n(a) \cap (b,c) \subset B(\sigma(a) \cap (b,c),\varepsilon)$.

Démonstration

Supposons par l'absurde $\exists \lambda_n \in \sigma_n(a) \cap (b,c)$, $\lambda_n \notin B(\sigma(a) \cap (b,c),\varepsilon)$. Comme $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée, on peut supposer sans restriction de généralité $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in [b,c]$. Comme $b,c \notin \sigma(a)$ et $\lambda_n \notin B(\sigma(a) \cap (b,c),\varepsilon)$ on aura $\lambda \notin \sigma(a)$.
Proposition II.2.2 $\Rightarrow \bar{\tau}_c \subset \sigma(a) \Rightarrow \lambda \notin \bar{\tau}_c$. Ainsi $\lambda \notin \bar{\tau}_c \cup V(\gamma_2)$ et il y a contradiction avec la proposition II.3.2. ■

Remarques

1) Si la matrice γ_2 est constante alors $V(\gamma_2) \subset \sigma(a)$ (proposition II.2.5). Dans ce cas nous pouvons supprimer l'hypothèse $[b,c] \cap V(\gamma_2) = \phi$ dans la proposition II.3.3 et nous aurons: $\sigma_n(a)$ ne pollue pas $\sigma(a)$ dans (o,c) où c est quelconque dans $\mathbb{R}^+$, $c \notin \sigma(a)$. En revanche, la condition de bonne approximation (3) de la définition I.2.3 n'est pas nécessairement vérifiée si λ est valeur propre de $a(.,.)$ avec $\lambda \in V(\gamma_2)$. L'exemple

suivant le montre.

Prenons $U = H_0^1 \times L_2$, $V = L_2 \times L_2$, $a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + 2u_2v_2\}dx$.

Il est facile de voir que $\sigma(a) = \{2+k^2\pi^2,\ k=1,2,\dots\} \cup \bar{\tau}_c \cup V(\gamma_2)$ où $\bar{\tau}_c = \{1\}$, 1 étant une valeur propre infiniment dégénérée, $V(\gamma_2) = \{2\}$, 2 étant une valeur propre de multiplicité 1, de vecteur propre $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Construisons les espaces $(U_n)_{n=1}^\infty$ comme suit. Soit $n \in \mathbb{N}$, $h_n = \frac{1}{n}$, $x_i^{(n)} = (i-1)h_n$, $i=1,2,\dots,n+1$, $S_n = \{f \in C^0[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0,\ f\big|_{[x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}]}$ est un polynôme de degré 1, $i=1,2,\dots,n\}$, $\tilde{h}_n = h_n/2$, $y_i^{(n)} = (i-1)\tilde{h}_n$, $i=1,2,\dots,(2n+1)$, $T_n = \{f:[0,1] \to \mathbb{R} \mid f\big|_{(y_i^{(n)},y_{i+1}^{(n)})} = \text{constante},\ i=1,2,\dots,2n\}$.

Soit $U_n = S_n \times T_n$. Alors $(U_n)_{n=1}^\infty$ est de classe $\mathcal{S}_1$.

Soit pour $n \in \mathbb{N}$ les fonctions

$$t_{i/2}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (y_{i-1}^{(n)},\ y_i^{(n)}) \\ -1 & \text{si } x \in (y_i^{(n)},\ y_{i+1}^{(n)}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad i=2,4,6,\dots,2n.$$

En posant $\underline{u}_0^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\underline{u}_i^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_i^{(n)} \end{bmatrix}$, $i=1,\dots,n$ il est aisé de voir que $\underline{u}_i^{(n)} \in U_n$, $i=0,1,\dots,n$ et $a(\underline{u}_i^{(n)},\underline{v}) = 2(\underline{u}_i^{(n)},\underline{v})_V$ $\forall \underline{v} \in U_n$, $i=0,1,2,\dots,n$. Ainsi la valeur propre $2 \in \sigma_n(a)$ est de multiplicité au moins égale à $(n+1)$. La condition (3) de la définition I.2.3 n'est pas vérifiée.

2) Si la matrice γ_2 n'est pas constante nous avons vu que $V(\gamma_2)$ n'est pas nécessairement dans $\sigma(a)$ (Exemple 2 de la remarque qui suit la proposition II.2.5). Dans ce cas nous ne pouvons pas supprimer l'hypothèse $[b,c] \cap V(\gamma_2) = \phi$ dans la proposition II.3.3. L'exemple suivant le montre.

Prenons $U = H_0^1 \times L_2$, $V = L_2 \times L_2$, $a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + (2+\varepsilon x)u_2v_2\}dx$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit nous avons vu (ex.2 de la remarque qui suit la proposition II.2.5) que $V(\gamma_2) \cap \sigma(a)$ = une et une seule valeur propre de $a(.,.)$ de multiplicité 1. $(V(\gamma_2) = [2,2+\varepsilon])$.

En reprenant les espaces $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ construits dans (1) ci-dessus il est facile de montrer que $\sigma_n(a) \cap V(\gamma_2)$"devient dense" dans $V(\gamma_2)$ lorsque $n \to \infty$. En effet soit γ_{2n} la fonction constante par morceau définie par $\gamma_{2n}(x) = 2+\varepsilon\, x_i^{(n)}$ si $x \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})$, $i = 1,2,\ldots,n$.

On a $\|\gamma_2-\gamma_{2n}\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et si $a_n(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + \gamma_{2n}\, u_2v_2\}dx$ il suffit de montrer que $\sigma_n(a_n) \cap V(\gamma_2)$" devient dense" dans $V(\gamma_2)$ lorsque $n \to \infty$ (proposition II.3.1). Pour le faire on vérifie que le vecteur $\underline{u}_i^{(n)}$ défini dans (1) est vecteur propre pour la valeur propre

$\lambda_i^{(n)} = 2 + \varepsilon x_i^{(n)}$ de la forme bilinéaire $a_n(.,.)$ relativement à U_n, $i = 1,2,\dots,n$. Les $x_i^{(n)}$, $i = 1,\dots,n$ "deviennent dense" dans $[0,1]$ lorsque $n \to \infty$ ce qui montre le résultat voulu.

Proposition II.3.4

Soit p un entier $\geqslant 1$ et supposons $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de classe S_p. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(a)$ le spectre de $a(.,.)$ relativement à U_n. Soit $\lambda \in \sigma(a) - (\bar{\tau}_c \cup V(\gamma_2))$ et soit $\lambda_n \in \sigma_n(a)$ tel que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$.

Alors on a l'estimation : $|\lambda-\lambda_n| = O(h_n^{2p})$ où h_n est le paramètre de finesse de U_n.

De plus si $\underline{u} \in U$, $\|\underline{u}\|_V = 1$, $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V$ $\forall \underline{v} \in U$ et si $\underline{u}_n \in U_n$, $\|\underline{u}_n\|_V = 1$, $a(\underline{u}_n,\underline{v}) = \lambda_n(\underline{u}_n,\underline{v})_V$ $\forall \underline{v} \in U_n$, alors $\exists\, \varepsilon_n = \pm 1$ tel que $\|\underline{u} - \varepsilon_n \underline{u}_n\|_U = O(h_n^p)$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \sigma(a) - (\bar{\tau}_c \cup V(\gamma_2))$. Alors par la proposition II.2.4 λ est valeur propre de $a(.,.)$ de multiplicité 1 et isolée dans $\sigma(a)$. Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $[\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0] \cap (\bar{\tau}_c \cup V(\gamma_2)) = \phi$ et $[\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0] \cap \sigma(a) = \{\lambda\}$. Grâce à la proposition II.3.2 on peut considérer λ_n comme unique valeur propre de multiplicité

1 de $a(.,.)$ relativement à U_n dans $(\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0)$.

Soit $\underline{u} \in U$, $\|\underline{u}\|_V = 1$ tel que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall \underline{v} \in U$.

En posant $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix}$ avec $u_1 \in H_0^1$ et $\underline{u}_2 \in (L_2)^N$ on a

$\underline{u}_2 = (\lambda-\gamma_2)^{-1}(u_1'\underline{\beta}_2+u_1\underline{\gamma}_3)$ et $b(\lambda,u_1,v) = \lambda(u_1,v)_0 \ \forall v \in H_0^1$ (proposition II.2.3). On a vu dans la démonstration de la proposition II.2.4 que si $\lambda \notin \bar{\tau}_c$ alors $\exists\ \theta > 0$ $(\theta < 0)$ tel que $W(\lambda,u,v) = b(\lambda,u,v) + \theta(u,v)_0$ soit coercive $(-W(\lambda.,.)$ coercive) sur H_0^1. Soit $f = (\lambda+\theta)u_1$. Alors u_1 est solution du problème: "trouver $u \in H_0^1$ tel que $W(\lambda,u,v) = (f,v)_0$ $\forall v \in H_0^1$". $f \in H^s \Rightarrow u \in H^{s+2} \cap H_0^1$ et ainsi $u_1 \in H^s \cap H_0^1$ $\forall s \in \mathbb{N} \Rightarrow u_1 \in C^\infty[0,1]$. On aura donc aussi $\underline{u}_2 \in C^\infty[0,1]$. Ainsi $\exists\ \tilde{u}_{1n} \in S_n$ et $\underline{\tilde{u}}_{2n} \in \prod_{i=1}^{N} T_n^{(i)}$ tel que $\|u_1-\tilde{u}_{1n}\|_1 = O(h_n^p)$ et $\|\underline{u}_2-\underline{\tilde{u}}_{2n}\|_{(L_2)^N} = O(h_n^p)$.[14].Si $\underline{\tilde{u}}_n = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1n} \\ \underline{\tilde{u}}_{2n} \end{bmatrix}$ on aura $\inf_{\underline{\varphi}\in U_n} \|\underline{u}-\underline{\varphi}\|_U \leq$ $\leq \|\underline{u}-\underline{\tilde{u}}_n\|_U = O(h_n^p)$.

La proposition I.2.6 du chapitre I nous permet de conclure.

■

Remarque

Nous avons vu que si $(U_n)_{n=1}^\infty$ est de classe S_p avec p entier ≥ 1 et si $b,c \in \mathbb{R}-\sigma(a)$, $b < c$, $[b,c] \cap (V(\gamma_2) \cup \bar{\tau}_c) = \phi$ alors $\sigma_n(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans (b,c) et on a l'estimation d'erreur (si $\lambda \in \sigma(a)-V(\gamma_2) - \bar{\tau}_c$ et $\lambda_n \in \sigma_n(a)$ tq $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$) $|\lambda-\lambda_n| = O(h_n^{2p})$ où h_n est le paramètre de finesse de U_n. Si $\gamma_2 = \lambda_0 I$ où $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$, I = $(N\times N)$-matrice identité, il est possible de faire des hypothèses sur U_n plus avantageuses que celle de la classe $\mathcal{S}_p$ pour obtenir des résultats identiques. En effet soit $(S_h)_{0<h\leqslant 1}$ une famille de sous-espaces de dimension finie de H_0^1 ayant la propriété "$\forall u \in H_0^1 \cap H^{p+1}$ on a $\inf\limits_{\varphi \in S_h} \| u-\varphi \|_1 = O(h^p)$, $p \geqslant 1$". Soit $\mathbb{T}_h = \{\underline{\beta}_2 w' + \underline{\gamma}_3 w,\ w \in S_h\}$ et soit $U_h = S_h \times \mathbb{T}_h$. ($U_h$ ainsi construit a des "dimensions considérablement plus petites" que s'il est de classe $\mathcal{S}_p$, surtout si N est grand). Soit $\sigma_h(a)$ le spectre de la forme bilinéaire $a(.,.)$ relativement à U_h.

Alors (1) $\forall b,c \in \mathbb{R} - \sigma(a)$, $b<c$, $[b,c] \cap (\{\lambda_0\}) \cup \bar{\tau}_c) = \phi$

on a : $\sigma_h(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans (b,c).

(2) Si $\lambda \in \sigma(a) - \{\lambda_0\} - \bar{\tau}_c$ et si $\lambda_h \in \sigma_h(a)$ est tel que $\lambda_h \to \lambda$ lorsque $h \to 0$ alors on a l'estimation $|\lambda - \lambda_h| = O(h^{2p})$.

On montre (1) et (2) de la manière suivante.

(a) Si $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix}$, $u_1 \in S_h$, $\underline{u}_2 \in \mathbb{T}_h$, $\underline{u} \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_0\}$ sont tels que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V$ $\quad \forall \underline{v} \in U_h$ alors u_1 et λ sont tel que $b(\lambda,u_1,v) = \lambda(u_1,v)_0$ $\quad \forall v \in S_h$ et de plus $\underline{u}_2 = \dfrac{1}{\lambda-\lambda_0} (\underline{\beta}_2 u_1' + \underline{\gamma}_3 u_1)$.

Inversément si $w \in S_h$, $w \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_0\}$ sont tels que $b(\lambda,w,v) = \lambda(w,v)_0$ $\quad \forall v \in S_h$ alors $\underline{u} = \begin{bmatrix} w \\ (\lambda-\lambda_0)^{-1}(\underline{\beta}_2 w' + \underline{\gamma}_3 w) \end{bmatrix}$

et λ sont tels que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall \underline{v} \in U_h$.

Ce point (a) se montre comme la proposition II.2.3 en tenant compte que $(\lambda-\lambda_0)^{-1}(\underline{\beta}_2 u_1' + \underline{\gamma}_3 u_1) \in \mathbb{T}_h$ si $u_1 \in S_h$.

(b) Si $[b,c] \cap (\{\lambda_0\} \cup \bar{\tau}_c) = \phi$ alors la fonction $f(\lambda,x)$ définie par $f(\lambda,x) = \alpha(x) + (\lambda-\lambda_0)^{-1}\underline{\beta}_2^t(x)\underline{\beta}_2(x)$ est continue sur $[b,c] \times [0,1]$ et $f(\lambda,x) \neq 0 \quad \forall\lambda \in [b,c]$, $\forall x \in [0,1]$. Ainsi $f(\lambda,x)$ est ou bien positive ou bien négative dans $[b,c] \times [0,1]$. Supposons-la positive. Alors $\exists\ \theta>0$ et $\chi>0$ tel que $w(\lambda,u,v)=b(\lambda,u,v)+\theta(u,v)_0$ vérifie $w(\lambda,u,u) \geq \chi\ \|u\|_1^2 \quad \forall u \in H_0^1$ et $\forall\lambda \in [b,c]$. On pose $\tilde{w}(\lambda,u,v) = w(\lambda-\theta,u,v)$, $\lambda \in (b+\theta,c+\theta) = \sigma$. On montre facilement

(i) $\tilde{w}(\lambda,.,.) : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique $\forall\lambda \in \sigma$.

(ii) $\exists\ C_0 > 0$ tel que $|\tilde{w}(\lambda,u,v)| \leq C_0\|u\|_1\ \|v\|_1 \quad \forall u,v \in H_0^1$, $\forall\lambda \in \sigma$ (continuité uniforme en λ).

(iii) $\exists\ \chi > 0$ tel que $\tilde{w}(\lambda,u,u) \geq \chi\ \|u\|_1^2 \quad \forall u \in H_0^1$, $\forall\lambda \in \sigma$

(iv) $\tilde{w}(.,u,v) : \sigma \to \mathbb{R}$ est de classe $C^\infty(\sigma)\ \forall u,v \in H_0^1$.

(v) $\frac{d}{d\lambda}\tilde{w}(\lambda,u,u) \leq 0 \quad \forall\lambda \in \sigma, \quad \forall u \in H_0^1$.

(vi) $\exists\ C_1>0$ tel que $|\frac{d}{d\lambda}\tilde{w}(\lambda,u,v)| \leq C_1\|u\|_1\ \|v\|_1 \quad \forall\lambda \in \sigma$, $\forall u,v \in H_0^1$.

(vii) Si $\lambda \in \sigma$, $u \in H_0^1$ sont tels que $\tilde{w}(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_0$

$\forall v \in H_0^1$ alors $b(\lambda-\theta,u,v) = (\lambda-\theta)(u,v)_0 \ \forall v \in H_0^1$ et réciproquement si $\lambda \in (b,c), u \in H_0^1$ sont tels que $b(\lambda,u,v) = \lambda(u,v)_0 \quad \forall v \in H_0^1$ alors on a $\tilde{w}(\lambda+\theta,u,v) = (\lambda+\theta)(u,v)_0 \quad \forall v \in H_0^1$.

On vérifie ainsi les hypothèses i), ii), iii), iv), v) et vi) du paragraphe 3 chapitre I.

Les propositions I.3.4, II.2.3, (a) et (b) montrent le point (1) c'est à dire $\sigma_h(a)$ approxime bien $\sigma(a)$ dans (b,c).

La remarque 2 qui suit la proposition I.3.4 et les estimations d'erreurs sur les valeurs propres d'opérateurs fortement elliptiques [9] montrent le point (2) c'est à dire que si λ est valeur propre de $a(.,.)$, $\lambda \notin \{\lambda_0\} \cup \bar{\tau}_c$ et $\lambda_h \in \sigma_h(a)$ une valeur propre approchée de λ, alors $|\lambda-\lambda_h| = O(h^{2p})$.

De manière générale nous n'avons pas, avec de tels espaces U_h, la condition $\inf\limits_{\underline{\varphi} \in U_h} \| \underline{u} - \underline{\varphi} \|_U \xrightarrow{h\to o} 0$. Nous n'avons généralement pas la condition (1) de la définition I.2.3 avec $(b,c) = (0,\infty)$.

CHAPITRE III

§1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous traiterons quelques exemples numériques afin d'illustrer les chapitres I et II. Pour fixer les idées, nous prendrons une forme bilinéaire symétrique définie sur $U = H_0^1 \times L_2$ par $a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{\alpha u_1'v_1' + \beta_1(u_1v_1'+u_1'v_1) + \gamma_1 u_1 v_1 + (\beta_2 u_1' + \gamma_3 u_1)v_2 + (\beta_2 v_1' + \gamma_3 v_1)u_2 + \gamma_2 u_2 v_2\}dx$ où $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ avec $u_1, v_1 \in H_0^1$ et $u_2, v_2 \in L_2$ et où $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in C^\infty[0,1]$ avec $\alpha(x)>0 \quad \forall x \in [0,1]$. Pour simplifier nous supposerons γ_2 constante. Nous nous intéresserons au spectre $\sigma(a)$ de $a(.,.)$ c'est-à-dire à $\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, \underline{u}_n \in U, \|\underline{u}_n\|_U = 1$, et $C(n) \subset \mathbb{R}$, $C(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tel que $|a(\underline{u}_n,\underline{v}) - \lambda(\underline{u}_n,\underline{v})_V| \leqslant C(n)\|\underline{v}\|_U \;\forall \underline{v} \in U\}$, et plus spécialement à son approximation. Si $(U_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de sous-espaces de dimension finie de U nous approximerons $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, \underline{u} \in U_n, \underline{u} \neq 0$ tel que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda(\underline{u},\underline{v})_V \;\forall \underline{v} \in U_n\}$ qui peut être obtenu en résolvant un problème du type $A\vec{x} = \lambda B\vec{x}$ (A et B étant des matrices). La condition d'approximation "$\forall \underline{u} \in U, \inf_{\underline{\varphi} \in U_n} \|\underline{u}-\underline{\varphi}\|_U \xrightarrow{n\to\infty} 0$" implique que pour tout $\lambda \in \sigma(a)$ il existe $\lambda_n \in \sigma_n(a)$ tel que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$ (proposition I.2.4), mais n'est généralement pas suffisante pour affirmer que si $\lambda_n \in \sigma_n(a)$, $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$ alors $\lambda \in \sigma(a)$(Il y a pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$ dans un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (définition §3 chapitre II)).

Nous avons établi par contre que si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ est de classe S_p (définition II.3.1) comme par exemple $U_n = S_n \times T_n$ avec $S_n = \{f \in C^0[0,1] \mid f(0)=f(1)=0 \; ; \; f/_{[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]}$ est un polynôme de degré $\leqslant p$, $i=0,1,\dots,(n-1)\}$ et $T_n \supset \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f/_{(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n})}$ est un polynôme de degré $\leqslant p-1$, $i=0,1,\dots,(n-1)\}$ on a des conditions de bonne approximation de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$(propositions II.3.2, II.3.3, II.3.4) c'est-à-dire :

1) $\forall\lambda \in \sigma(a) \quad \exists \; \lambda_n \in \sigma_n(a)$ tel que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$.

2) Si $\lambda_n \in \sigma_n(a)$ et $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$ alors $\lambda \in \sigma(a)$(non pollution).

3) Si $\lambda \in \sigma(a) - \{\gamma_2\} - \bar{\tau}_c$ alors λ est valeur propre de multiplicité 1, isolée dans $\sigma(a)$ et il existe une et une seule valeur propre λ_n de multiplicité 1 dans $\sigma_n(a)$ telle que $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$. On a l'estimation $|\lambda-\lambda_n| = O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$.

$$(\tau_c = \{\lambda \in \mathbb{R}-\{\gamma_2\} \mid \exists \; \bar{x} \in [0,1] \text{ avec } \alpha(\bar{x}) + \frac{1}{\lambda-\gamma_2}\,\beta_2^2(\bar{x}) = 0\})$$

Dans le paragraphe 2 nous illustrons ceci en prenant trois exemples types. Dans le premier exemple, $\sigma(a)$ contient une valeur infiniment dégénérée; dans le deuxième, $\sigma(a)$ contient une suite de valeurs propres qui s'accumulent en un point et enfin, dans le troisième exemple, $\sigma(a)$ est formé en partie d'un spectre continu (définition I.2.1). Des exemples plus compliqués (cas N=2 c'est-à-dire $U = H_0^1 \times (L_2)^2$) sont traités dans [4] et [7] .

§2. EXEMPLES

Nous commencerons par énumérer un certain nombre de fonctions avec lesquelles nous pourrons construire des sous-espaces U_n de U.

Subdivisons l'intervalle [0,1] en n parties égales et posons:

$$e_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in (\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}) \\ 0 & \text{pour } x \notin (\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}) \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n .$$

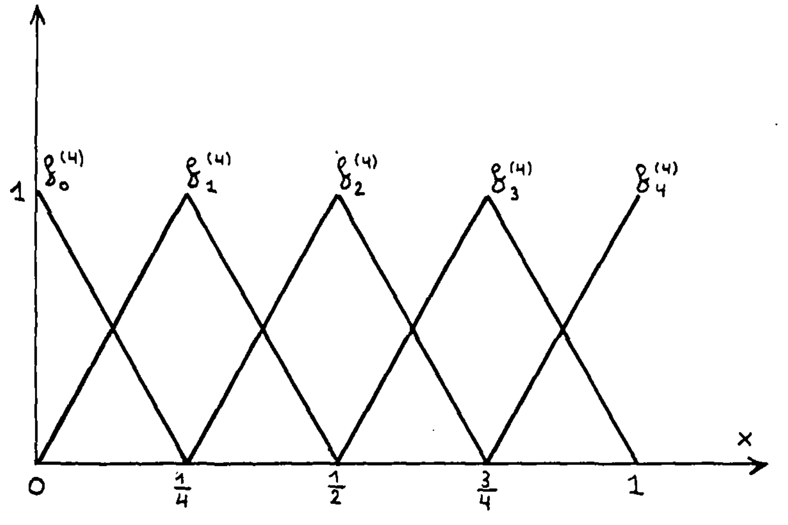
Les fonctions $e_i^{(n)}$ sont constantes par morceau et sont les fonctions caractéristiques des intervalles $(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

$$f_0^{(n)}(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{pour } x \in [0,\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{pour } x \in [\frac{1}{n},1] \end{cases}$$

$$f_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0,\frac{i-1}{n}] \\ nx-(i-1) & \text{pour } x \in [\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}] \\ -nx+(1+i) & \text{pour } x \in [\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}] \\ 0 & \text{pour } x \in [\frac{i+1}{n},1] \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

$$f_n^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0,\frac{n-1}{n}] \\ nx-(n-1) & \text{pour } x \in [\frac{n-1}{n},1] \end{cases}$$

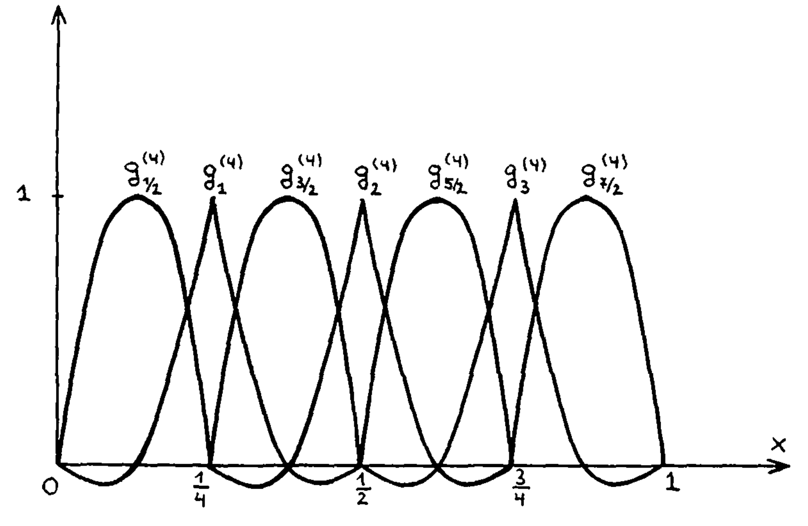
Les fonctions $f_i^{(n)}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$ sont représentées dans la figure ci-après pour $n = 4$.



$$g_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0,\frac{i-1}{n}] \\ 2n^2(x-\frac{i-1}{n})(x-\frac{i-\frac{1}{2}}{n}) & \text{pour } x \in [\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}] \\ 2n^2(x-\frac{i+1}{n})(x-\frac{i+\frac{1}{2}}{n}) & \text{pour } x \in [\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}] \\ 0 & \text{pour } x \in [\frac{i+1}{n},1] \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n-1 .$$

$$g_{i-\frac{1}{2}}^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0,\frac{i-1}{n}] \\ -4n^2(x-\frac{i-1}{n})(x-\frac{i}{n}) & \text{pour } x \in [\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}] \\ 0 & \text{pour } x \in [\frac{i}{n}, 1] \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n .$$

Les fonctions $g_i^{(n)}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$ et $g_{i-\frac{1}{2}}^{(n)}$, $i = 1,2,\ldots,n$ sont représentées dans la figure ci-après pour $n = 4$.



A l'aide des fonctions $e_i^{(n)}$, $f_i^{(n)}$ et $g_i^{(n)}$, $g_{i-\frac{1}{2}}^{(n)}$ nous construirons cinq types de sous-espaces différents de $U = H_0^1 \times L_2$:

1) $U_n^{(1)} = \{\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in U \mid f_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i^{(n)},\ f_2 = \sum_{i=0}^{n} \beta_i f_i^{(n)};\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}.$

2) $U_n^{(2)} = \{\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in U \mid f_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i^{(n)},\ f_2 = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i e_i^{(n+1)};\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}.$

3) $U_n^{(3)} = \{\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in U \mid f_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i^{(n)},\ f_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i^{(n)};\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}.$

4) $U_n^{(4)} = \{\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in U \mid f_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i^{(n)},\ f_2 = \sum_{i=1}^{2n} \beta_i e_i^{(2n)};\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}.$

5) $U_n^{(5)} = \{\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in U \mid f_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i g_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-\frac{1}{2}} g_{i-\frac{1}{2}}^{(n)}$,

$$f_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i^{(n)} ; \ \alpha_i, \alpha_{i-\frac{1}{2}}, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}\}.$$

Nous pouvons remarquer facilement que $U_n^{(1)}$ et $U_n^{(2)}$ ne sont pas de classe S_p, $p \in \mathbb{N}$, $U_n^{(3)}$ et $U_n^{(4)}$ sont de classe S_1, $U_n^{(5)}$ est de classe S_2.

Exemple 1

On définit la forme bilinéaire, symétrique, continue, coercive sur $U = H_0^1 \times L_2$ par

$$\boxed{a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + 2u_2v_2\}dx}$$

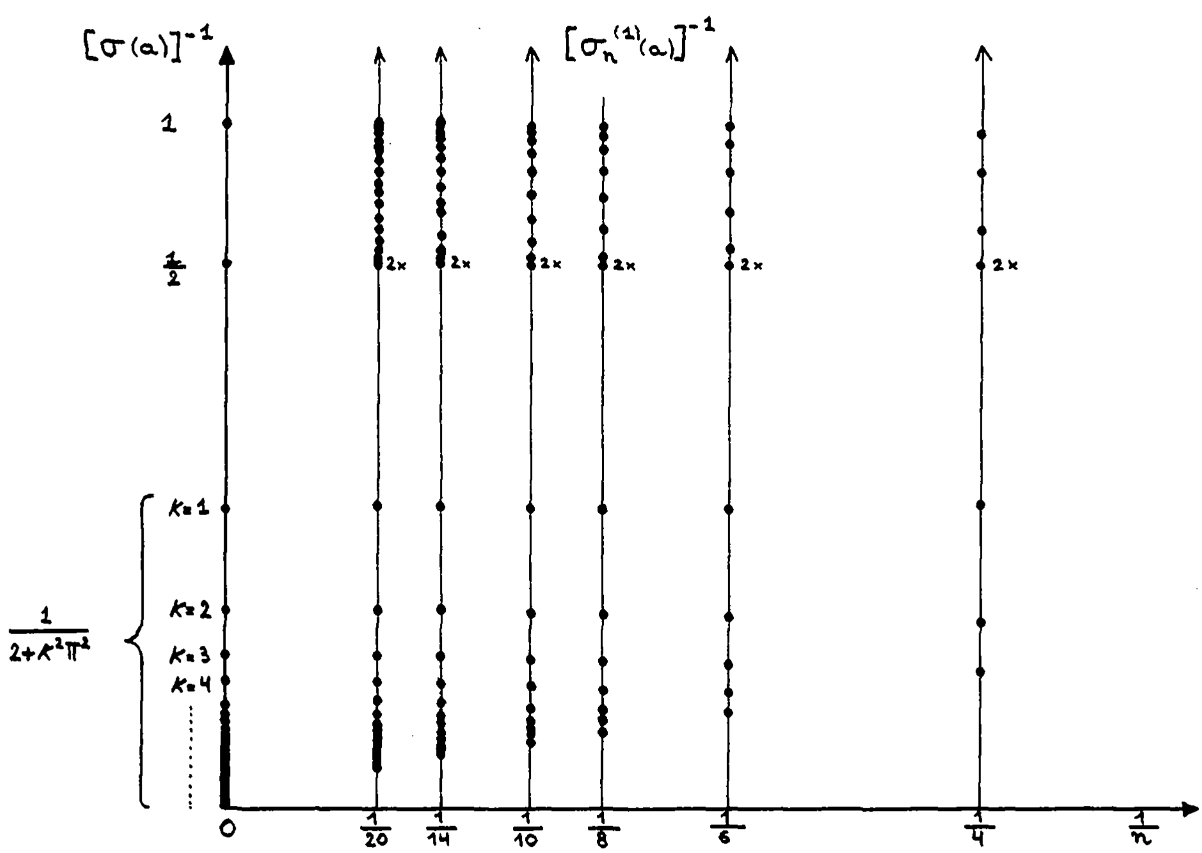
Nous avons déjà vu au chapitre II que $\sigma(a)$ est formé des valeurs suivantes :

$\lambda_k = 2+k^2\Pi^2$ est valeur propre de multiplicité 1 de $a(.,.)$ pour le vecteur propre $\underline{u}_k = \begin{bmatrix} \sin k\Pi x \\ \frac{1}{k\Pi} \cos k\Pi x \end{bmatrix}$, $k=1,2,\ldots$

$\lambda_0 = 2$ est valeur propre de multiplicité 1 de $a(.,.)$ pour le vecteur propre $\underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On a $V(\dot{\gamma}_2) = \{\lambda_0\}$.

$\lambda_\infty = 1$ est une valeur propre infiniment dégénérée de $a(.,.)$. En effet $\underline{u} = \begin{bmatrix} w \\ -w' \end{bmatrix}$ est tel que $a(\underline{u},\underline{v}) = \lambda_\infty \, (\underline{u},\underline{v})_V \quad \forall \underline{v} \in U, \forall w \in H_0^1$. On a $\bar{\tau}_c = \{\lambda_\infty\}$.

Nous représentons ci-dessous les inverses des spectres $\sigma_n^{(j)}(a)$ de la forme bilinéaire $a(.,.)$ relativement à $U_n^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots,5$.



<u>Figure 1</u> : Exemple 1 — $\sigma_n^{(1)}(a)$

(En ordonnée on a le changement d'échelle $y \longmapsto \sqrt[3]{y}$.
2x signifie que la valeur calculée est de multiplicité 2)

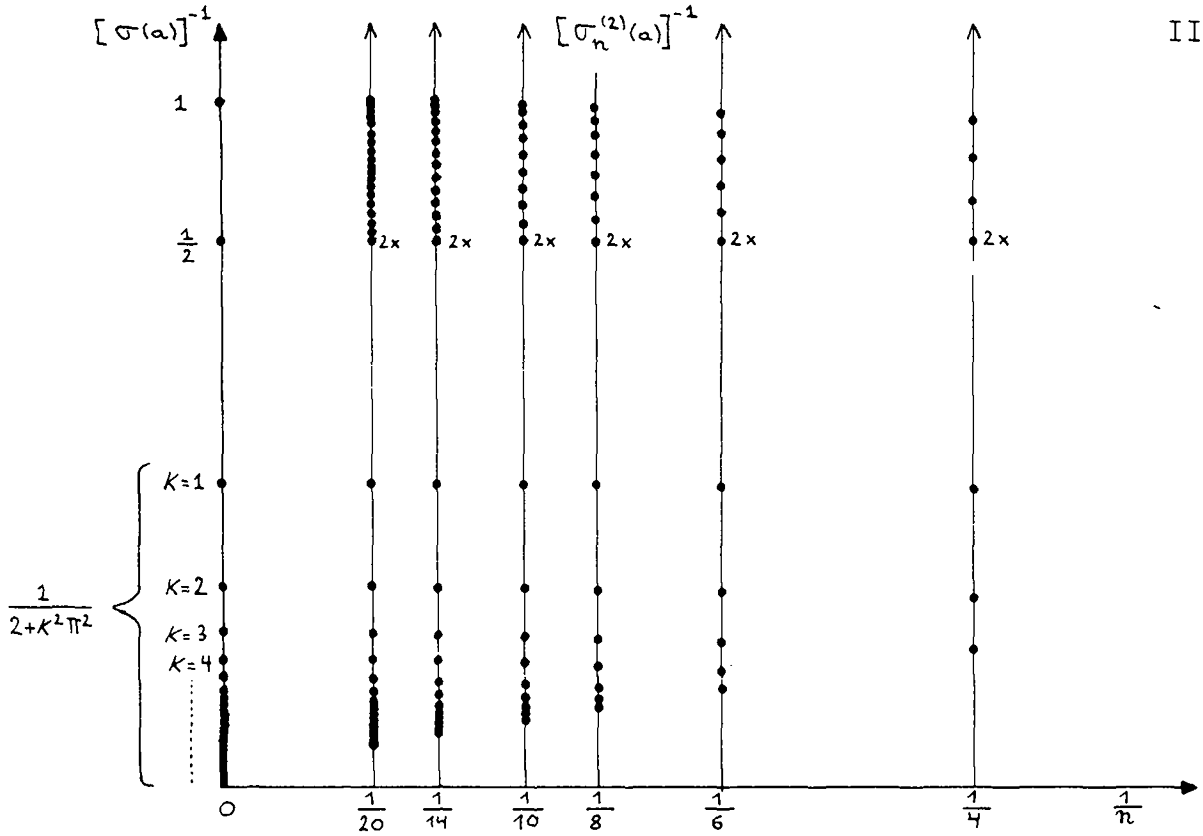


Figure 2 : Exemple 1 — $\sigma_n^{(2)}(a)$

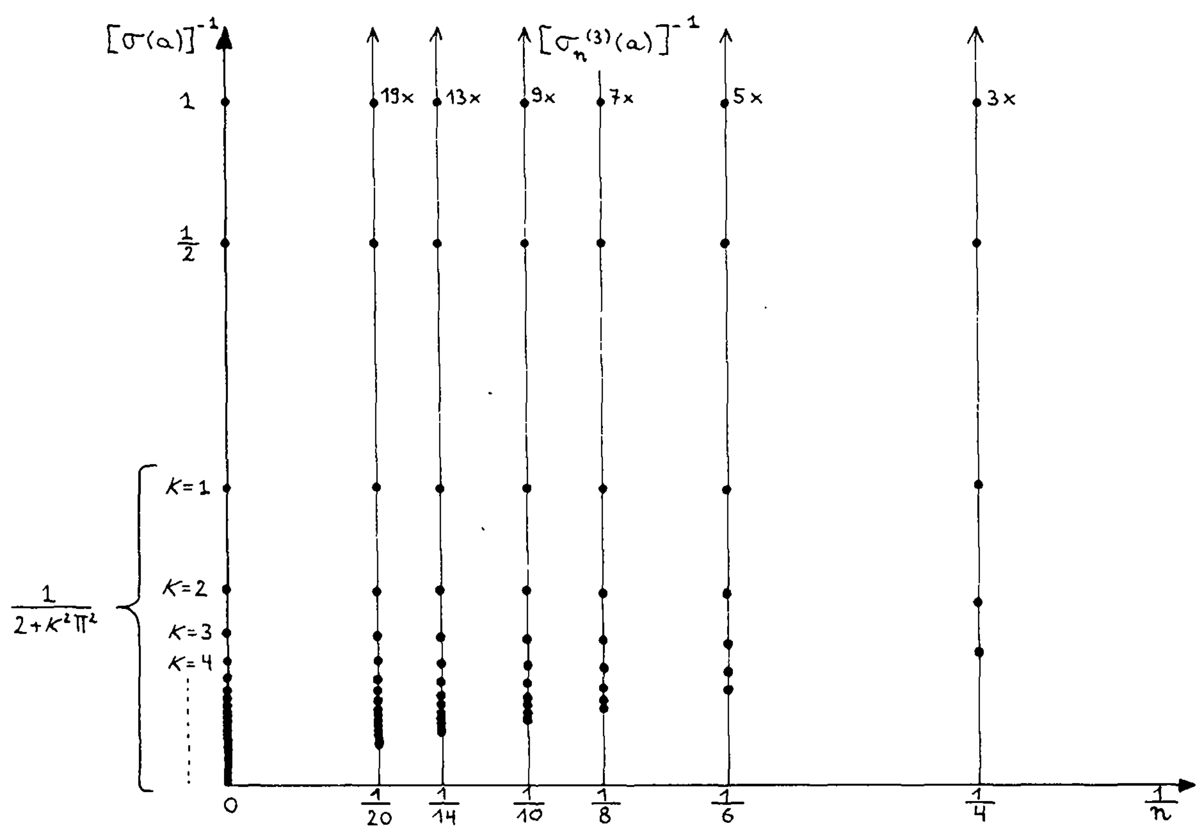


Figure 3 : Exemple 1 — $\sigma_n^{(3)}(a)$.

(En ordonnée on a le changement d'échelle $y \mapsto \sqrt[3]{y}$.
2x, 3x, 5x, ... signifie que la valeur calculée est de multiplicité 2,3,5...)

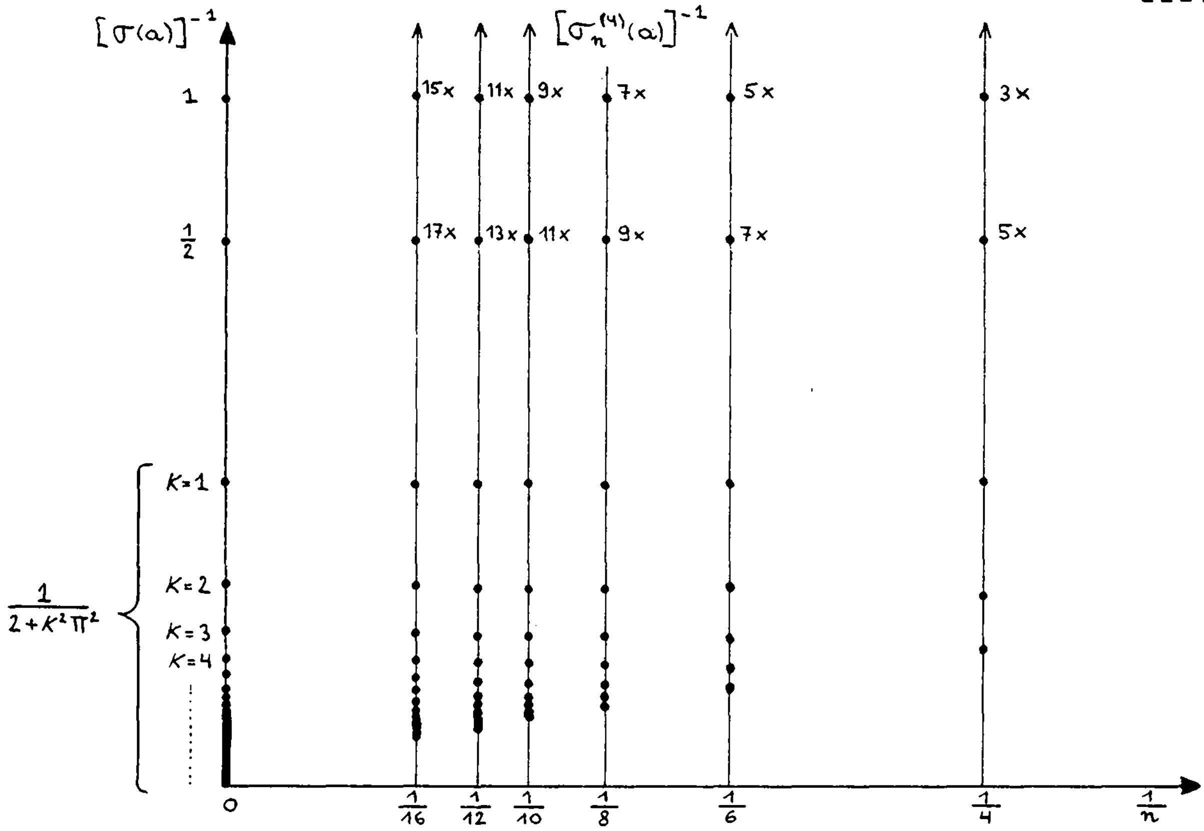


Figure 4 : Exemple 1 — $\sigma_n^{(4)}(a)$.

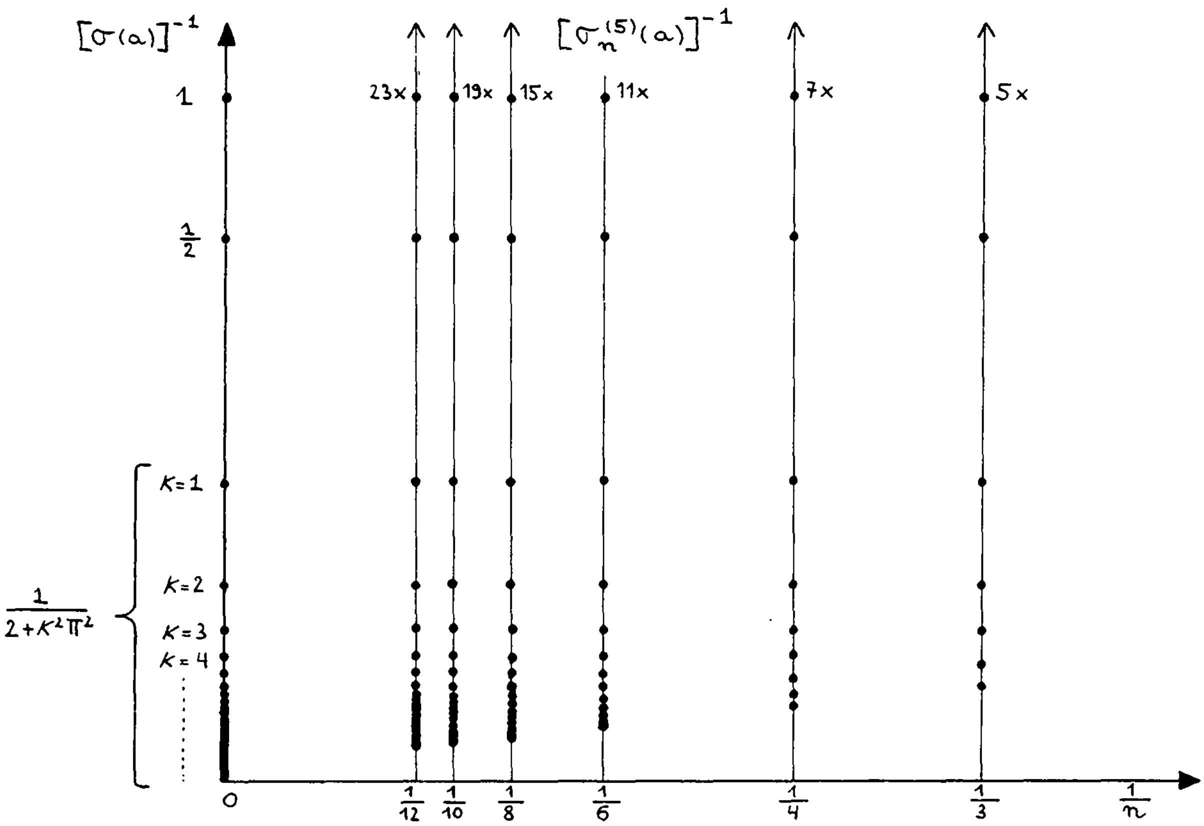


Figure 5 : Exemple 1 — $\sigma_n^{(5)}(a)$.

(En ordonnée on a le changement d'échelle $y \mapsto \sqrt[3]{y}$.
2x, 3x, 4x,... signifie que la valeur calculée est de multiplicité 2,3,4,...)

Dans les figures 1 et 2 nous voyons qu'il y a pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n^{(1)}(a)$ et $\sigma_n^{(2)}(a)$ dans $(0,c)$ où $c \in \mathbb{R}-\sigma(a)$, $c>1$. Par contre il n'y a pas pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n^{(1)}(a)$ et $\sigma_n^{(2)}(a)$ dans l'intervalle $(0,1)$. Ceci résulte de la prop.I.2.5 .

Dans les figures 3 et 4 nous voyons qu'il n'y a pas pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n^{(3)}(a)$ et $\sigma_n^{(4)}(a)$ dans $(0,c)$ $\forall c \in \mathbb{R}^+-\sigma(a)$. Ceci résulte du fait que $U_n^{(3)}$ et $U_n^{(4)}$ sont de classe S_1 et de la proposition II.3.3. Dans ces deux cas la proposition de bonne approximation du spectre $\sigma(a)$(proposition II.3.2) est vérifiée. Remarquons dans la figure 4 que la multiplicité des valeurs propres qui approximent la valeur $\lambda_0 = 2$ n'est pas conservée. (cf remarque qui suit la proposition II.3.3).

Dans la figure 5 nous voyons que les propositions II.3.2 et II.3.3 sont vérifiées car $U_n^{(5)}$ est de classe S_2.

L'estimation de l'erreur sur les valeurs propres dans la figure 3 est en $O(\frac{1}{n^2})$ alors que dans la figure 5 elle est en $O(\frac{1}{n^4})$ (voir tableau en fin de chapitre).

Exemple 2

On définit la forme bilinéaire, symétrique, continue, coercive sur $U = H_0^1 \times L_2$ par :

$$\boxed{a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1\}dx}$$

Cet exemple se distingue du précédent dans le fait que nous avons ajouté un terme de couplage entre u_1 et v_2 $(2u_1v_2 + 2u_2v_1)$. La valeur propre qui précédemment était dégénérée "éclate" en une suite de valeurs propres $(\lambda_k^-)_{k=1}^{\infty}$ s'accumulant en 1.

On obtient donc ici deux familles de valeurs propres :

$$\lambda_k^+ = \{3+k^2\Pi^2 + [(3+k^2\Pi^2)^2 - 4(k^2\Pi^2-2)]^{\frac{1}{2}}\}/2 \qquad k=1,2,\dots$$

$$\lambda_k^- = \{3+k^2\Pi^2 - [(3+k^2\Pi^2)^2 - 4(k^2\Pi^2-2)]^{\frac{1}{2}}\}/2 \qquad k=1,2,\dots$$

$\lambda_\infty = 1 \in \sigma(a)$ mais n'est pas valeur propre. On a $\{\lambda_\infty\}=\tilde{\tau}_c$.

$\lambda_0 = 2$ est valeur propre de multiplicité 1. On a

$V(\gamma_2) = \{\lambda_0\}$.

Nous représentons ci-dessous les inverses des spectres $\sigma_n^{(1)}(a)$ et $\sigma_n^{(3)}(a)$ de la forme bilinéaire $a(.,.)$ relativement à $U_n^{(1)}$ et $U_n^{(3)}$ respectivement.

Les mêmes observations que dans l'exemple 1 peuvent être répétées ici. Dans la figure 6 ci-après il y a pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n^{(1)}(a)$ alors que dans la figure 7 il n'y a pas pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n^{(3)}(a)$.

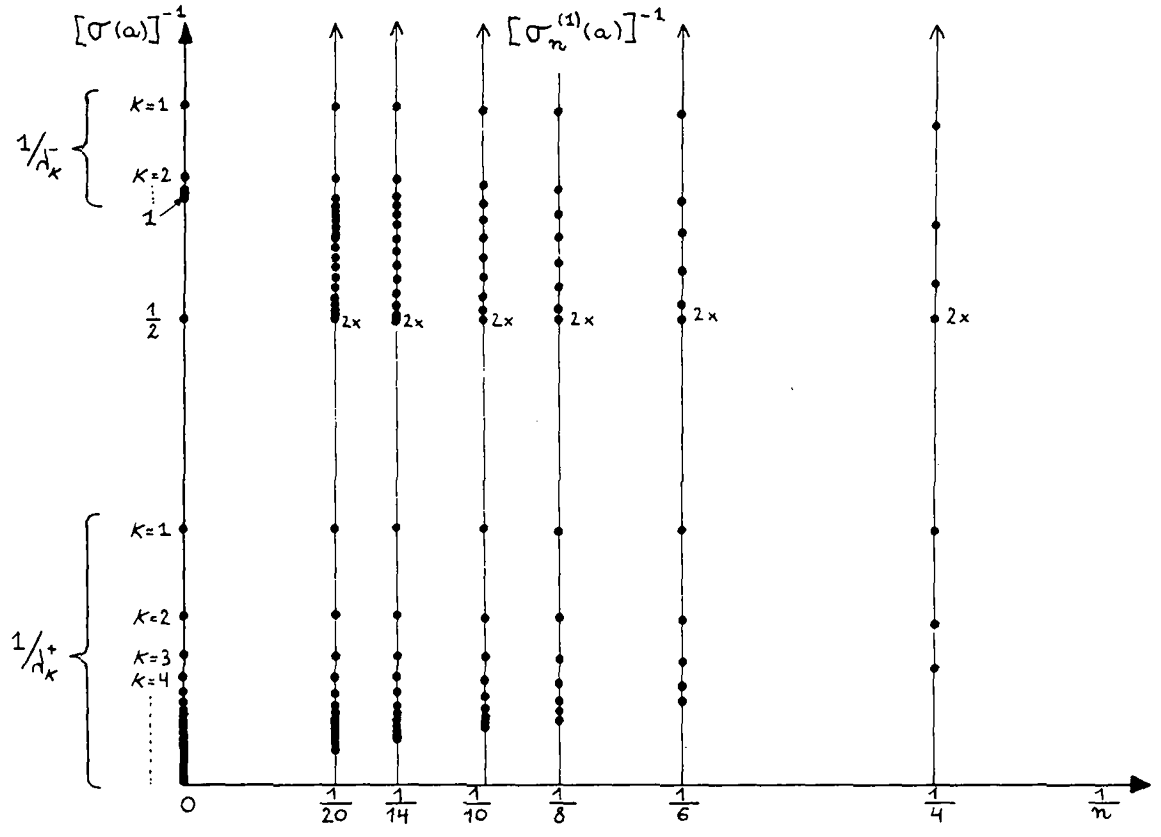


Figure 6 : Exemple 2 — $\sigma_n^{(1)}(a)$.

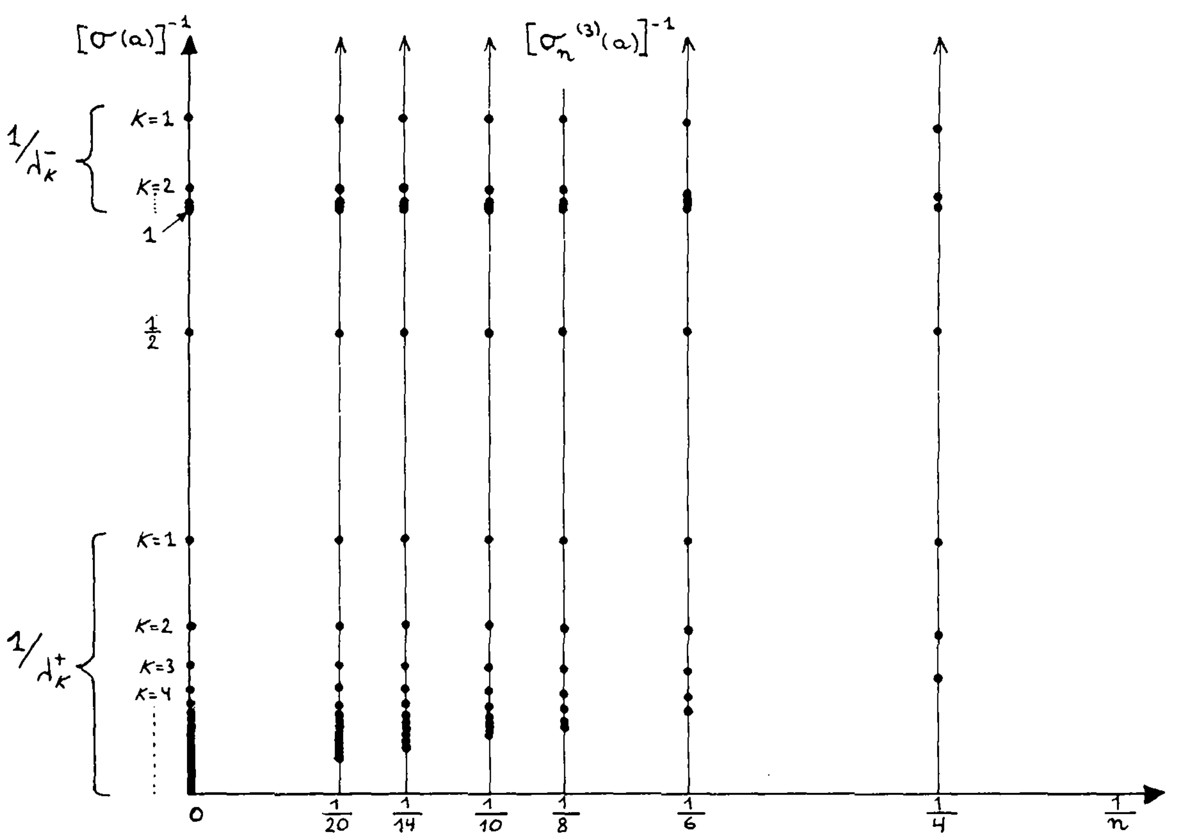


Figure 7 : Exemple 2 — $\sigma_n^{(3)}(a)$.

(En ordonnée on a le changement d'échelle $y \longmapsto \sqrt[3]{y}$.
2x signifie que la valeur calculée est de multiplicité 2.)

Exemple 3

On définit la forme bilinéaire, symétrique, continue, coercive sur $U = H_0^1 \times L_2$ par :

$$\boxed{a(\underline{u},\underline{v}) = \int_0^1 \{(1+x)u_1'v_1' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_1v_1 + 2u_2v_2\}dx}$$

Cet exemple se distingue de l'exemple 1 dans le fait que nous avons ajouté un coefficient variable (x) devant le terme $u_1'v_1'$. Ce coefficient a pour effet de faire éclater la valeur propre infiniment dégénérée en un spectre continu $[1,\frac{3}{2}] = \bar{\tau}_c$.

Nous représentons ci-après les inverses des spectres $\sigma_n^{(1)}(a)$ et $\sigma_n^{(3)}(a)$ de la forme bilinéaire a(.,.) relativement à $U_n^{(1)}$ et $U_n^{(3)}$ respectivement. Nous aurons des remarques identiques aux précédentes.

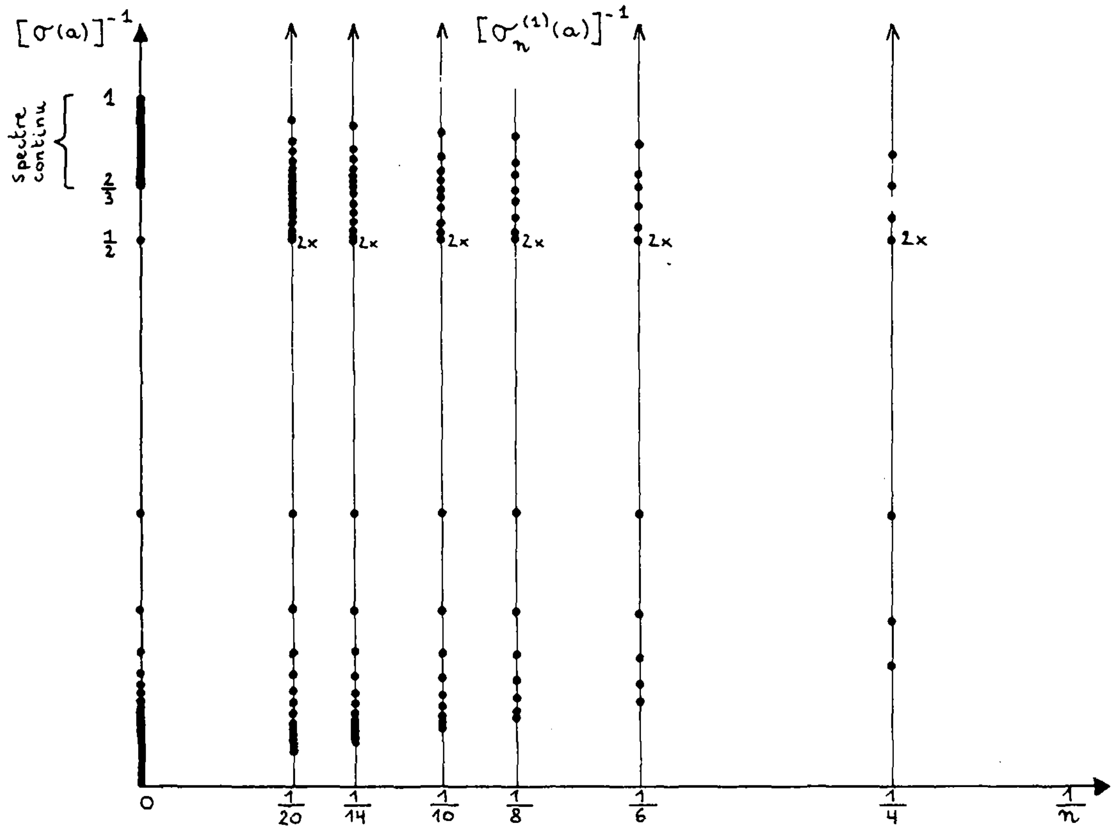


Figure 8 : Exemple 3 — $\sigma_n^{(1)}(a)$.

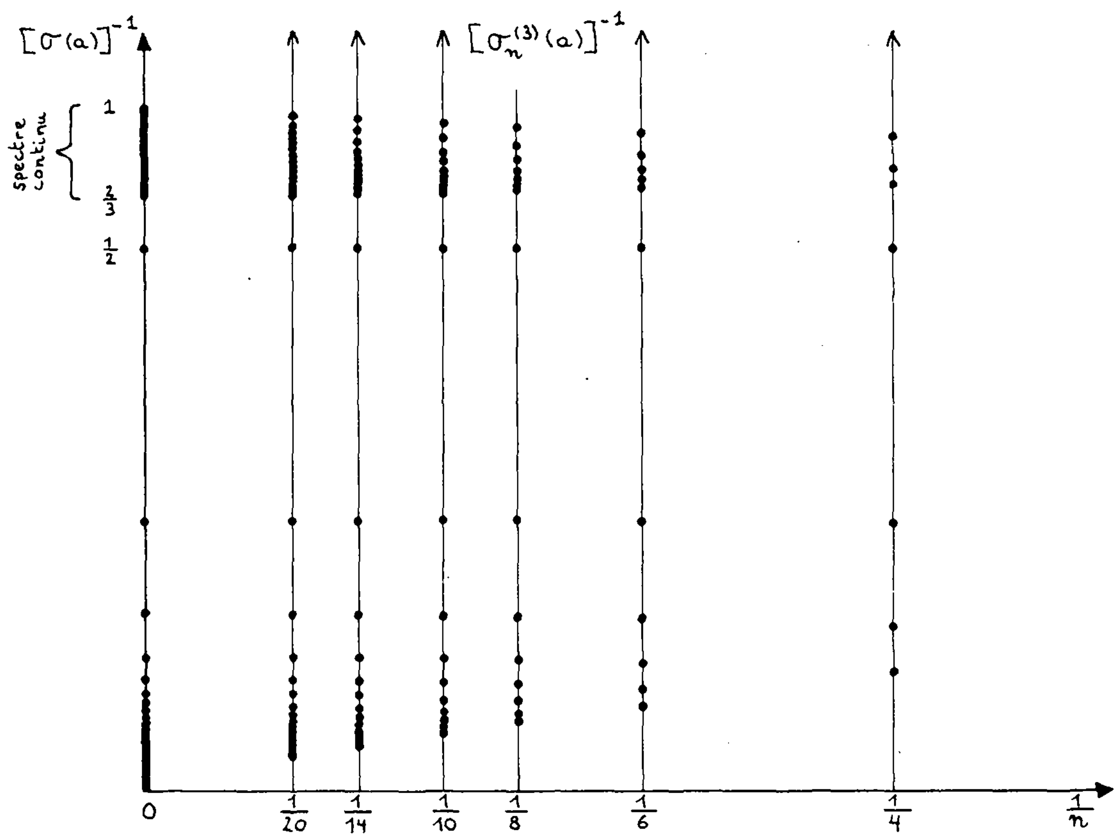


Figure 9 : Exemple 3 — $\sigma_n^{(3)}(a)$.

(En ordonnée on a le changement d'échelle $y \mapsto \sqrt[3]{y}$.

2x signifie que la valeur calculée est de multiplicité 2.)

REMARQUES GENERALES SUR LES EXEMPLES

1) Dans les trois exemples cités nous pouvons observer que la "région de pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n^{(1)}(a)$" reste dans l'intervalle (1,2), ce dernier ne contenant pas de valeurs propres de $a(.,.)$. Il s'agit là d'un fait exeptionnel car de façon générale la "région de pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n^{(1)}(a)$" peut recouvrir une partie de $P_\sigma(a)$. (cf.[4]).

2) La condition $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ de classe S_p est une condition suffisante pour obtenir des résultats de bonne approximation de $\sigma(a)$ par $\sigma_n(a)$(proposition II.3.2 et II.3.3). Si nous définissons

$$U_n^{(6)} = \{\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in H_0^1 \times L_2 \mid f_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i g_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-\frac{1}{2}} g_{i-\frac{1}{2}}^{(n)},$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i^{(n)},\ \alpha_i, \alpha_{i-\frac{1}{2}}, \beta_i \in \mathbb{R}\}$$ nous pouvons voir que $U_n^{(6)}$ n'est pas de classe S_p, $p \in \mathbb{N}$. Pourtant lorsque nous calculons le spectre $\sigma_n^{(6)}(a)$ de $a(.,.)$ relativement à $U_n^{(6)}$ dans les exemples 1, 2 et 3 nous n'observons pas de pollution de $\sigma(a)$ par $\sigma_n^{(6)}(a)$ dans $(0,c)$ $\forall c \in \mathbb{R}^+ - \sigma(a)$ comme le montrent les figures 10,11 et 12 correspondant aux exemples 1, 2 et 3 respectivement.

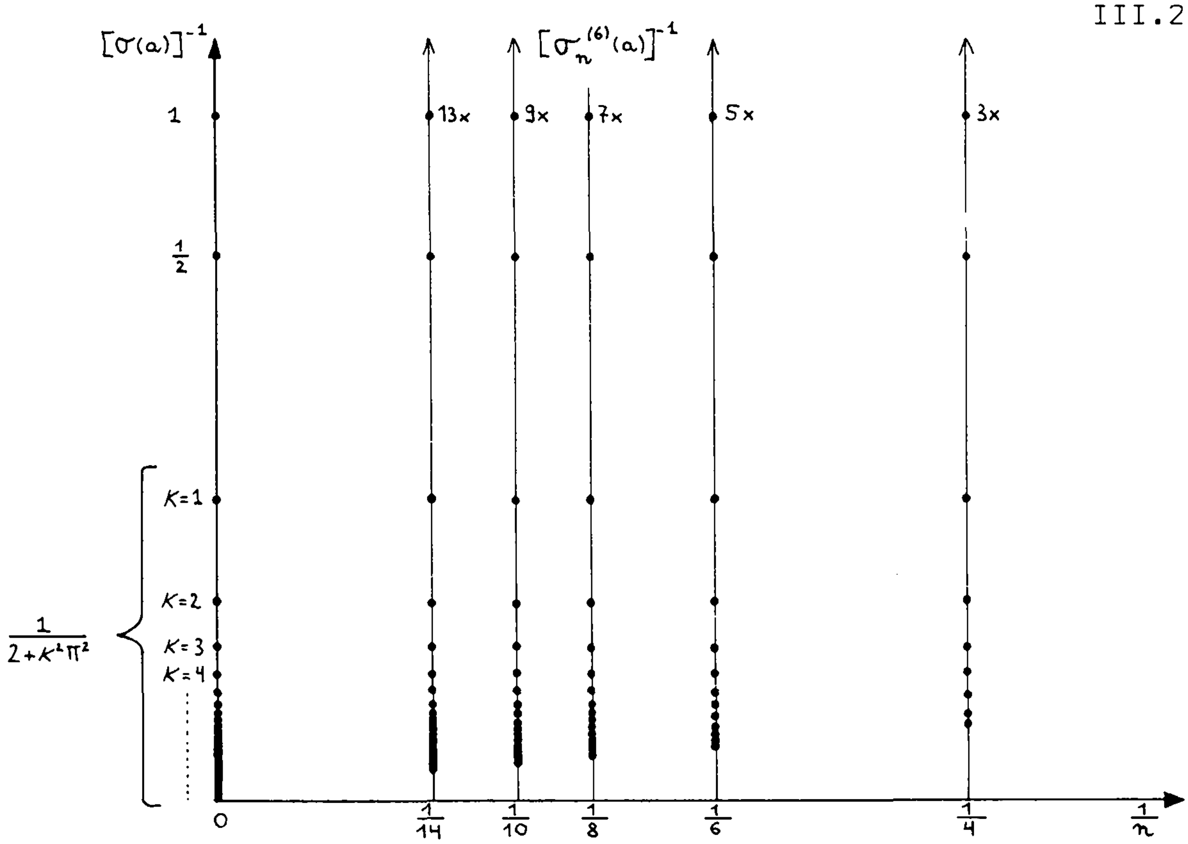


Figure 10 : Exemple 1 — $\sigma_n^{(6)}(a)$.

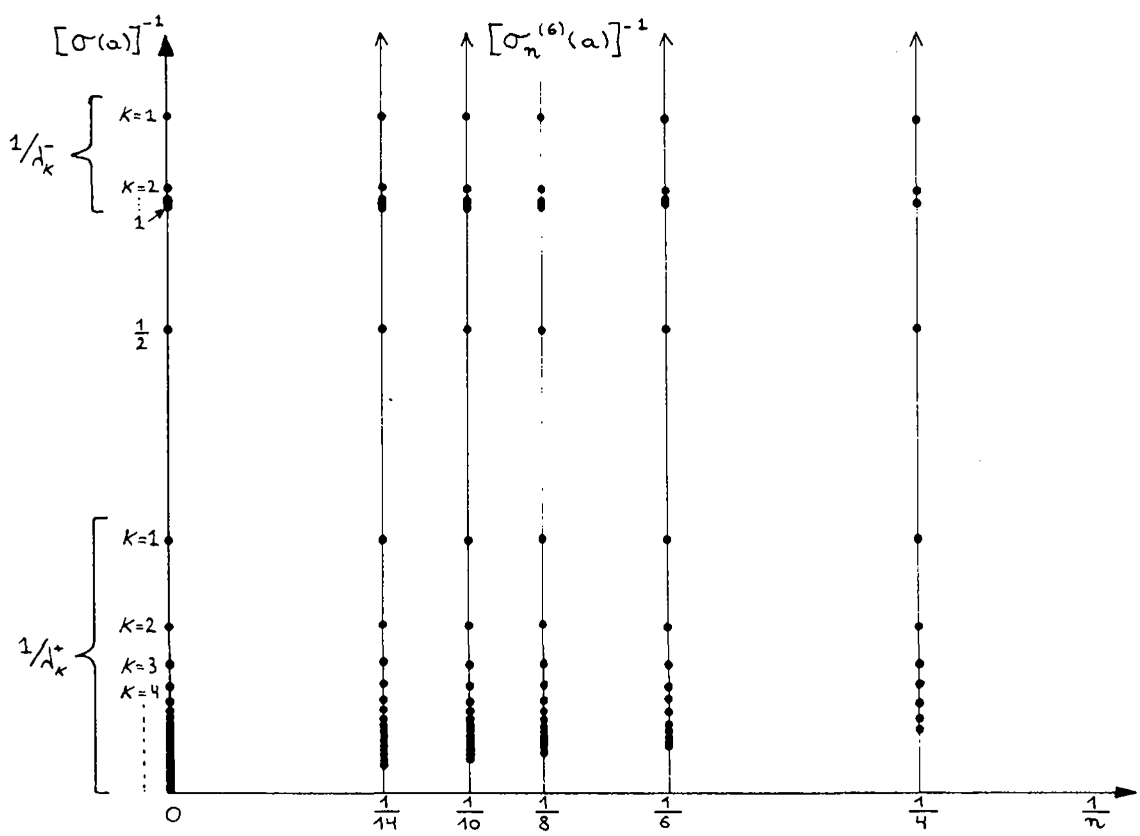


Figure 11 : Exemple 2 — $\sigma_n^{(6)}(a)$.

(En ordonnée on a le changement d'échelle $y \mapsto \sqrt[3]{y}$.

3x, 5x, 7x, ... signifie que la valeur calculée est de multiplicité 3, 5, 7, ...)

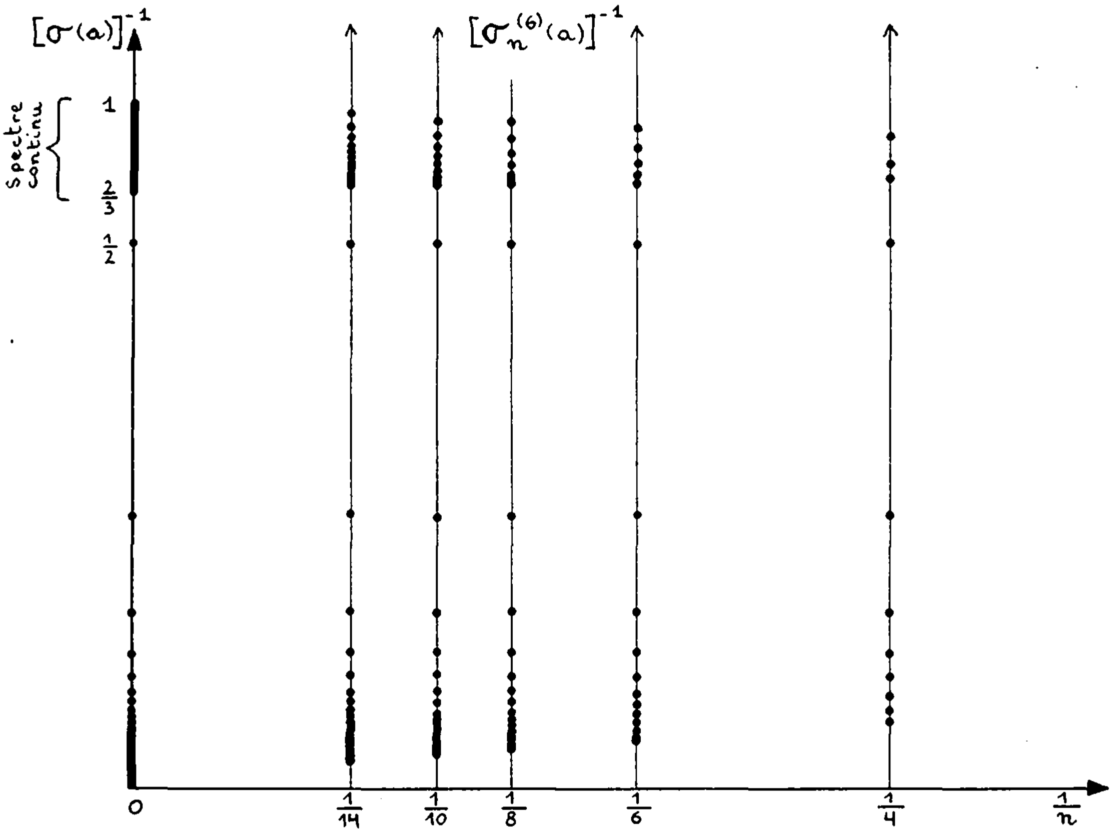


Figure 12 : Exemple 3 — $\sigma_n^{(6)}(a)$.
(En ordonnée on a le changement d'échelle $y \mapsto \sqrt[3]{y}$.)

On vérifie que, lorsque nous prenons $U_n^{(6)}$ comme espace d'approximation, l'erreur sur les valeurs propres est en $O(\frac{1}{n^2})$ au lieu d'être en $O(\frac{1}{n^4})$ (proposition I.2.6). Dans le tableau ci-après nous comparons les valeurs propres notées μ_n et ν_n approximant la valeur propre $\lambda = 2+\Pi^2 = 11.8696044$ de l'exemple 1 lorsque nous prenons pour espaces d'approximation successivement $U_n^{(5)}$ et $U_n^{(6)}$. (Comparaison de la première valeur propre plus grande que 2 donnée dans les figures 5 et 10). Nous pouvons voir que $\mu_n \downarrow \lambda$, $\nu_n \uparrow \lambda$ et $|\lambda-\mu_n| = O(\frac{1}{n^4})$, $|\lambda-\nu_n| = O(\frac{1}{n^2})$.

n	μ_n	$\Delta=\lvert\lambda-\mu_n\rvert$	$\Delta.n^4$	ν_n	$\Delta=\lvert\lambda-\nu_n\rvert$	$\Delta.n^2$
4	11.8746590	$5.055.10^{-3}$	1.294	11.8246860	$4.492.10^{-2}$	0.718
6	11.8706202	$1.016.10^{-3}$	1.316	11.8480674	$2.154.10^{-2}$	0.775
8	11.8699278	$3.234.10^{-4}$	1.325	11.8571709	$1.243.10^{-2}$	0.796
10	11.8697372	$1.328.10^{-4}$	1.328	11.8615514	$8.053.10^{-3}$	0.805
12	11.8696686	$6.420.10^{-5}$	1.331	11.8639756	$5.629.10^{-3}$	0.810

Figure 12: Exemple 1: $\mu_n \in \sigma_n^{(5)}$, $\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda = 2+\Pi^2$

$\nu_n \in \sigma_n^{(6)}$, $\nu_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda = 2+\Pi^2$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M.Ohta, Y.Shimomura, T.Takeda :
Analysis of Hydromagnetic Plasma Stability by the Finite Element Method.
NUCL.FUSION 12, 271-274 (1972).

[2] T.Takeda, Y.Shimomura, M.Ohta, M.Yoshikawa :
Numerical Analysis of Magnetohydrodynamic Instabilities by the Finite Element Method.
PHYS.FLUIDS 15, 2193-2201 (1972).

[3] T.J.M.Boyd, G.A.Gardner, L.R.T. Gardner :
Numerical Study of Hydromagnetic Stability using the Finite Element Method.
NUCL.FUSION 13, 764-766 (1973).

[4] K.Appert, D.Berger, R.Gruber, J.Rappaz, F.Troyon :
Studium der Eigenschwingungen eines zylindrischen Plasmas mit der Methode der finiten Elemente.
ZAMP 25, 229-340 (1974).

[5] N.Dunford and J.T.Schwartz :
Linear Operators, Interscience publishers, New York (1963).

[6] Yosika Kôsaku :
Functional Analysis, Springer Berlin (1965).

[7] K.Appert, D.Berger, R.Gruber, J.Rappaz :
A New Finite Element Approach to the Normal Mode Analysis in Magnetohydrodynamics.
J.COMP.PHYS. 18, 284-299 (1975).

[8] F.Chatelin, M.J.Lemordant :
La méthode de Rayleigh-Ritz appliquée à des opérateurs différentiels elliptiques - ordre de convergence des éléments propres.
NUMER.MATH. 23, 215-222 (1975).

[9] J.H.Bramble, J.E.Osborn :
Rate of Convergence Estimates for Non-Selfadjoint Eigenvalue Approximations.
MCR Tech.Sum.Rep. 1232, June 1972.

[10] I.Babuska, A.K.Aziz :
Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method.
Academic Press, New York and London (1972).

[11] G.Strang, G.J.Fix :
An Analysis of the Finite Element Method,
Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, N.J. (1973).

[12] Courant-Hilbert :
Methods of Mathematical Physics, Vol.1,
Interscience Publishers, INC. New York (1966).

[13] F.Chatelin :
Convergence of Approximation Methods to Compute Eigenelements of Linear Operations.
SIAM J.NUMER.ANAL., Vol.10, No5, 939-948 (1973).

[14] P.A.Raviart :
Méthode des éléments finis.
Université Paris VI, Lab. analyse numérique (1973).

[15] J.H.Wilkinson :
The Algebraic Eigenvalue Problem,
Clarendon Press, Oxford (1965).

[16] J.H.Bramble, J.E.Osborn :
Approximation of Steklov Eigenvalues of Non-Self-adjoint Second Order Elliptic Operator.
Academic Press, New York and London (1972).

[17] F.Riesz, B.S.Z.Nagy :
Leçon d'analyse fonctionnelle.
Gauthier-Villars, sixième édition (1972).

[18] T.Kato :
Perturbation Theory for Linear Operators.
Springer-Verlag, New York INC. (1966).

[19] R.Gruber :
Numerical computations of the magnetohydrodynamic spectrum for one and two dimensional equilibria using regular finite elements and finite hybrid elements,
Thèse EPFL, département de Physique, (à paraître).

CURRICULUM VITAE

Originaire de Neyruz (Vaud) je suis né à Lausanne le 22 mars 1947. Après avoir suivi les écoles secondaires des degrés inférieurs et supérieurs de la ville, j'ai obtenu le baccalauréat et maturité type C au gymnase de la Cité en 1966. J'ai fait ensuite des études de physique à l'école polytechnique fédérale de Lausanne pour obtenir le diplôme d'ingénieur physicien EPFL en janvier 1971.

Dès lors j'occupe un poste d'assistant au Département de Mathématiques EPFL.