修士論文の和文要旨

大学院	電気通信学研究科	博士前期課程	情報通信工学専攻
氏　　名	岩瀬　高志	学籍番号　0530005	
論 文 題 目	Vertices of degree 5 in a contraction critically 5-connected graph		

要　旨

k 連結グラフとはどのような $k-1$ 頂点を除去した結果得られたグラフも連結であるグラフのことをいう. k 連結グラフの辺が可縮辺であるとはその辺を縮約したときに連結度が変化しない辺であることをいう. また、可縮辺ではない辺を非可縮辺という. k 連結グラフのすべての辺が非可縮辺であるときこのグラフを縮約臨界 k 連結グラフであるという. また、グラフ G の頂点集合の要素数を $|V(G)|$、次数 5 の頂点集合の要素数を $|V_5(G)|$ とそれぞれおくことにする.

縮約臨界 3 連結グラフは Tutte によって、縮約臨界 4 連結グラフについては Fontet と Martinov によってそれぞれ形が特徴づけられている. しかし、縮約臨界 5 連結グラフは任意のグラフを誘導部分グラフとして含みうるということが安藤らによって証明されており、特徴づけが難しい. 一方、縮約臨界 5 連結グラフの最小次数が 5 であることは江川、Kriesell によって証明されている. そこで縮約臨界 5 連結グラフの次数 5 頂点についてさまざまな研究がなされてきた.

その中でも重要な結果が Su によるものである. それは縮約臨界 5 連結グラフの任意の頂点の近傍に次数 5 の頂点が 2 つ以上存在するというものであり、この結果は最良である.

そして、縮約臨界 5 連結グラフの次数 5 の頂点の数について以下の問題が考えられる.

問題　任意の縮約臨界 5 連結グラフ G にたいして

$$|V_5(G)| \geq c|V(G)|$$

を満たす最大の定数 c を求める.

この問題に対して、安藤が $c \geq 1/5$ であることを、Su が $c \geq 2/5$ であることをそれぞれ証明している. そして Yuan らによって証明された $c \geq 4/9$ であることがこれまでの最良の結果であった.　また $|V_5(G)| = 8/13|V(G)|$ である縮約臨界 5 連結グラフ G の例が作られていることから $4/9 \leq c \leq 8/13$ であることがわかっていた.

今回、私たちは次数が 5 でない頂点の近傍に存在する次数 5 頂点についてを研究し、そのような頂点の近傍に次数 5 頂点が 2 つしかないとき、その次数 5 頂点の近傍の形を定めることに成功した. この結果を用いて、次の定理を証明した.

定理　任意の縮約臨界 5 連結グラフ G に対し

$$|V_5(G)| \geq 1/2|V(G)|$$

が成立する.

一方で $|V_5(G)| = 3/5|V(G)|$ である縮約臨界 5 連結グラフ G を作ることに成功した. このことから問題における c のとりうる値が $1/2 \leq c \leq 3/5$ であることがわかった.