

コンパクトスキームとコンパクトフィルタの
組み合わせの空力音響非線形問題への適用性評価

若松裕紀

電気通信大学大学院情報理工学研究科

博士（工学）の学位申請論文

2015年9月

コンパクトスキームとコンパクトフィルタの
組み合わせの空力音響非線形問題への適用性評価

博士論文審査委員会

審査委員氏名

主査 電気通信大学 前川博 教授

委員 電気通信大学 宮寄武 教授

委員 電気通信大学 大川富雄 教授

委員 電気通信大学 Matuttis Hans-Georg 准教授

委員 東京理科大学 山本誠 教授

著作権所有者

若松 裕紀

2015 年

An assessment of compact schemes combined with compact filters for nonlinear problems of flow acoustics

Abstract

Aerodynamic sound and shock waves are noise sources, measurement or prediction of aerodynamic noise reduction is needed to obey increasingly stringent noise regulations. The numerical method or approach to compute the mechanism of sound generation and sound wave propagation is an aeronautic major field of study called as Computational Aeroacoustics. Compact schemes have high resolution properties that are suitable for the calculation of the differential terms in the governing equations. However, the compact schemes have several shortcomings, especially, boundary treatments and capturing unsteady shock waves or nonlinear steeping wave phenomena. Therefore, in this study, specific calculation methods are proposed for the proper boundary treatments and capturing of the propagating shock wave or the steeping wave propagation. The new computational approach using compact schemes combined with compact filters is adopted for the numerical treatments at the wall boundary where nonlinear flow acoustics waves are emerged. Although the compact scheme is not appropriate to calculate the propagating shock due to the Gibbs phenomena, the appropriate combination of compact schemes and compact filters have shown a reduction of the Gibbs oscillations and sharper shock waves than those by the conventional shock capturing scheme such as the LAD (Localized Artificial Diffusivity) scheme.

The present paper of this thesis is organized as follows

Chapter 1 describes the outline of this thesis.

Chapter 2 describes numerical characteristics of compact schemes, boundary schemes and compact filters. Characteristic properties of boundary schemes are covered. Characteristic properties of boundary filters for computations of aerodynamic sound are discussed.

In chapter 3, the problem of computation of aerodynamic sound applying near boundary filter (Visbal and Gaitonde(1998), Gaitonde and Visbal (2000)) are presented. Proper boundary filters for computation of aerodynamic sound are presented.

Chapter 4 describes numerical implementations of compact schemes and compact filters for shock capturing. Best combination of the compact scheme and the compact filter to capture shock waves is presented with a comparison with Localized Artificial Diffusivity (LAD) scheme. This combination provides a better result of the sharp shock profile than the LAD scheme.

In chapter 5, concluding remarks of present study are given.

コンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの 空力音響非線形問題への適用性評価

概要

空力音や衝撃波は、騒音の原因となる環境問題であり対策が必要とされている。数値計算により音波の発生のメカニズムと伝播する音波を同時に捉える計算法（計算空力音響学）として、非定常圧縮性流れでの微分の計算に適した高解像度性の特徴を持つコンパクトスキームを用いることが有効である。しかしながら、数値境界条件や非定常衝撃波や急峻な波動現象の捕獲を含む非定常流れ場の計算方法における課題があった。そこで、本研究では、課題である数値境界条件と衝撃波や急峻な波動の伝播や減衰にかかわる非線形問題に対して、コンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの潜在力を生かした具体的な計算手法を提案した。特に壁面近傍に真の物理的音響ソースを持つ数値境界条件の問題点を研究し、その克服法を研究した。また、コンパクト有限差分スキームにおいても不連続領域をまたいで差分ステンスルを設定するときにギブス現象が発生するが、その克服と不連続な波動現象の急峻さを従来の衝撃波捕獲スキームより精度よくとらえる計算法を研究した。

以下に本論文の構成について述べる。

第1章では、本研究の概要、構成について述べる。

第2章では、コンパクトスキームとコンパクトフィルタについて述べる。コンパクトスキームと境界に適したコンパクトスキームとの組み合わせについて計算手法を示し、その組み合わせによる空力音の計算に与える特性について述べる。これまでに提案された各種境界スキームでは、精度、解像度、安定性の面から検討がなされているが、空力音の数値計算に適用した事例はないので、各種境界スキームを実装しスキームの解像度に着目して問題点を明らかにし、境界近傍に真の物理的音響ソースをもつ空力音計算に適切であると考えられる組み合わせを示した。

第3章では、境界近傍に真の物理的音響ソースをもつ場合に、境界近傍でのフィルタの取り扱い（Visbal and Gaitonde(1998)および Gaitonde and Visbal(2000)）を空力音の数値計算に適用した場合の問題点を明らかにし、空力音計算に適切であると考えられる組み合

わせを示した。

第 4 章では、流体から発生する波動の伝播の非線形現象として代表的な衝撃波にコンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの計算手法を適用した場合について示す。その評価によって欠点を最小化できることが見出されたコンパクトスキームとコンパクトフィルタと近年注目されている局所人工拡散スキームとの結果を比較し、この計算手法が局所人工拡散よりも衝撃波にシャープさを増す一定の長所を作り出すことを見出した。

第 5 章では、本研究で得られた主要な成果を総括している。

目次

第1章 緒言	1
1.1 研究背景	1
1.2 境界近傍での空力音計算の計算手法の問題点と先行研究	3
1.3 衝撃波の計算手法の先行研究とコンパクトスキームの応用	5
1.4 本論文の構成	7
第2章 境界スキームとコンパクトスキームの組み合わせが空力音の数値計算に与える影響	8
2.1 支配方程式	8
2.2 計算条件	8
2.2.1 無次元化	8
2.2.2 空間差分スキームおよびローパスフィルタ	9
2.2.3 境界近傍のスキーム	10
2.2.4 境界条件	12
2.2.5 時間発展	15
2.2.6 格子配置	15
2.2.7 双極渦の初期条件の与え方	17
2.3 結果および考察	17
2.3.1 発生する空力音の比較	18
2.3.1.1 最小格子間隔 0.025	18
2.3.1.2 空間解像度を低下させた場合 (最小格子間隔 0.05)	22
2.3.1.3 空間解像度を増加させた場合 (最小格子間隔 0.0125)	30
2.3.2 空力音発生原因としての渦変形の分析	30
2.3.2.1 最小格子間隔 0.025	30
2.3.2.2 空間解像度を低下させた場合 (最小格子間隔 0.05)	41
2.3.2.3 空間解像度を増加させた場合 (最小格子間隔 0.0125)	42
2.4 2章のまとめ	43
第3章 境界フィルタとコンパクトフィルタの組み合わせが空力音の数値計算に与える影響	43

3.1 Visbal and Gaitonde のコンパクトフィルタについて	45
3.2 レファレンスデータの取り扱い	50
3.3 結果および考察	51
3.3.1 境界フィルタの種類とフリーパラメータの影響	51
3.3.2 空間解像度を低下させた場合	59
3.4 Kim の境界フィルタを用いた場合	60
3.5 3章のまとめ	62
第4章 コンパクトスキームとコンパクトフィルタを用いた衝撃波捕獲法の評価	64
4.1 支配方程式	64
4.2 Sod Problem	64
4.3 Shu-Osher Problem	64
4.4 計算条件	66
4.4.1 コンパクトスキーム	67
4.4.2 コンパクトフィルタ	68
4.4.3 時間発展	71
4.5 計算結果の評価方法 (Sod Problem)	72
4.6 コンパクトフィルタの伝達関数の影響 (空間微分は Lele の 3 重対角 6 次精度コンパクトスキームに固定)	73
4.6.1 Lele のコンパクトフィルタおよび Kim のコンパクトフィルタ (カットオフ波数 0.88π)	73
4.6.2 Gaitonde コンパクトフィルタ	74
4.6.3 Zhanxin コンパクトフィルタ	84
4.7 コンパクトスキームの影響 (Gaitonde コンパクトフィルタの場合)	95
4.8 Kim のコンパクトフィルタのカットオフ波数の影響 (空間微分は Kim の 5 重対角 4 次精度コンパクトスキームに固定)	97
4.9 コンパクトスキームの影響 (Kim コンパクトフィルタの場合)	104
4.10 4章のまとめ	106
第5章 結論	107
5.1 本研究のまとめ	107
5.2 得られた知見	107
5.2.1 数値境界近傍でのスキーム	107
5.2.2 数値境界近傍でのフィルタ	108
5.2.3 急峻な波動現象でのスキームとフィルタ	108
5.3 将来の研究展望	109

参考文献 110

謝辭 112

第 1 章 緒言

1.1 研究背景

圧縮性超音速流れに共通に観察される衝撃波や非定常圧縮性流れによって発生する空力音は騒音や機器の性能に影響を与えることが知られている。産業機器においては環境適合性が求められ、流体现象から発生する騒音の抑制や低下法が注目されてきた。輸送機器分野においては、騒音源である航空機エンジンにおいてシェブロン型排気ノズルがエンジンの低騒音化に貢献した。一方、超音速旅客機の機体設計には衝撃波が地上に到達して生じる爆音のソニックブーム対策が必要とされている。また、ヒートポンプなどの身近なエネルギー機器においても低騒音化方法が研究されている。不快な騒音問題の原因となる解決すべき環境問題である。流体運動から発生する波動のうち、空力音の伝播は線形の現象とみなせるが、衝撃波の伝播は非線形性が強く現れる現象である。高次精度微分計算スキームを活用して、非定常圧縮性流れにおいて音波が発生するメカニズムと伝播する音波を同時にとらえるような計算法が開発され過去 20 年の間に大きく発展した。Computational Aeroacoustics (CAA) と呼ばれるこれらの方法は直接シミュレーション (DNS) やラージエディシミュレーション (LES) を基礎としており、レイノルズ数が比較的低い場合はモデルを使用しない DNS が用いられ高レイノルズ数ではサブグリッドスケールモデルを用いる LES が用いられてきた。高度忠実性 (High-fidelity) シミュレーションとも呼ばれるこれらの計算法ではコンパクト有限差分スキームを用いることが多く、非線形な音波発生メカニズムを明らかにするためにコンパクト差分スキームの高波数まで微分追従性が優れた特徴が重要な役割を果たした。有限差分スキームを基礎としたシミュレーションは複雑な流れにおいて音波発生メカニズムの詳細を明らかにするため、乱流境界層が発達する翼の後縁から発生する騒音や排気ノズル乱流ジェット騒音など広範囲な応用上の非定常流れから、巻きあがる渦から発生する音波や渦輪の衝突による音波発生機構などの基礎的な流れの高精度シミュレーションにコンパクト有限差分スキームが用いられてきた。

流体力学シミュレーションにおいて、与えられた幾何学的形状に対して Navier-Stokes 方程式における微分数値表現の計算流体力学的に最適な選択は、許容される誤差に対して最も計算時間が短いこと、そして、特に与えられた境界条件に対して実装が容易な微分計算法の選択であること、および並列化効率の高く異なる計算幾何形状に対しても容易に実装される潜在力があることである。スペクトル法や擬スペクトル法、有限要素法やスペクトル要素法、有限体積法、さらに渦粒子法などの計算手法と比べ、CAA 研究において非常に多く用いられてきた特に高次精度の最適化計算手法を持つ有限差分法の優れた点は容易に高次精度 (ただし、構造格子であるが) に拡張できることである。一般に、低精度計算法は

ノード当たりの計算操作が少ないので、格子数を増やすことによって高解像度性を要求する。一方、高精度計算法は許容誤差に対して低次精度スキームより高コストである。これは許容誤差当たりの計算コストが高い高精度スキームの使用に限界があるように見えるが、非定常流れにおける音波の生成と伝播のシミュレーションにおいて、許容誤差はいたるところ小さく抑えなければならないCAAでは、計算流体力学上、低精度スキームより高精度計算スキームが常により有効である。

空力音計算に用いられる中心差分型スキームをフーリエ解析すると二種類の解があることがわかる。低波数フーリエ成分であらわされる滑らかな解はNavier-Stokes 偏微分方程式の群速度の方向が一致する解である。一方、高波数の解はそれと異なる誤った方向の群速度を持っており、誤った位相の数値的波動現象を引き起こす。この誤った数値的波動現象の影響を取り除くために、高波数成分にのみ数値粘性の影響を与えるようにした風上バイアススキームや高波数成分の影響のみ取り除くコンパクトフィルタ、さらに人工的に粘性を付加、高波数成分の増幅を抑えるLESモデルなどが開発された。したがって、波動現象を取り扱う際は、解像された低波数数値解に相対的に極めて小さな影響のみ与える波数の関数として高波数数値の特殊な減衰化(Damping)を意図し有限差分法とフィルタなどの組み合わせが用いられてきた。Gaitonde and Visbal (1998, 1999)は数値テストを通じて高次精度差分法に有効な陰的フィルタを提案した。彼らのフィルタがオーバーラップする複数計算領域と一般曲線座標系を用いる計算に適用できることを示した。従来、CAAにおける数値的波動現象に対する対策は以下の5つの課題に分けることができるとされている。

1. 初期条件によるもの。

初期条件が数値的振動現象を引き起こさないために、コンパクトスキームの解像度が保証される最大波数 k_{\max} 以上の波数で初期条件エネルギーのフーリエ成分を持たない条件が満たされること。

2. DNSやLESにおける小さいスケールへの非線形カスケード。

乱流シミュレーションでは理想的には物理粘性によってのみエネルギーバランスが保たれるが、乱流DNSやLESで観察される小さなスケールへの非線形エネルギーカスケードが発生する。

3. 衝撃波の発生や急峻な波動現象。

強い衝撃波や超音速ジェットから放出される急峻な非線形波動は急峻な勾配をもつために、ギブス現象と呼ばれる数値振動が発生する。コンパクトスキームを使用するときに非常に薄い波動を捕獲できる十分なグリッドが得られないときに数値的波動現象が現れ計算を不安定にする。

4. 波動が伸長された計算グリッドやオーバーセットのグリッドを伝播する時。

滑らかな波動の伝播は伸長された計算グリッドにカップリングした数値現象を示す。また、オーバーセットグリッドを波動が伝播する際に、数値的波動現象が現れる。

5. 数値境界条件によるもの

十分に考慮された数値計算用境界条件でさえも数値的条件と物理現象がカップリングして境界条件がソースとなった誤った数値現象を引き起こす。

人工散逸や粘性，そしてフィルタリングは誤った高波数数値振動現象の発生による計算の不安定性を抑制するために用いられてきた。Euler 方程式や Navier-Stokes 方程式を用いた非線形計算においてはそれらの方法は衝撃波捕獲スキームや陰的に任意の乱流モデルとなることに留意する必要がある，高精度な計算をするためには高精度格子や細かな格子の使用，そして質の高い数値境界条件を用いることがまず必要である。

本研究では，課題である数値境界条件と衝撃波や急峻な波動現象に対して，コンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの潜在力を生かした具体的な計算手法を提案した。特に壁面近傍に真の物理的音響ソースを持つ数値境界条件の問題点を研究し，その克服法を研究した。また，コンパクト有限差分スキームにおいても不連続領域をまたいで差分ステンシルを設定するときにギブス現象が発生するが，その克服と不連続な波動現象の急峻さを従来の衝撃波捕獲スキームより精度よくとらえる計算法を研究した。

1.2 境界近傍での空力音計算の計算手法の問題点と先行研究

空気の流れから発生する空力音は，亜音速の流れにおいては発生する音波が大気圧の 10000 分の 1 程度であり，きわめて微小な圧力変動である。このような微小な圧力変動を直接数値計算によって正確にとらえるために，上述のようにコンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせが多く用いられてきた。コンパクトスキームやコンパクトフィルタは境界近傍では境界に適応した特殊な取り扱いが必要となる。これまで様々な境界近傍のスキームやフィルタの取り扱いが提案されているが，空力音の計算においてどのように有効であるのか明らかにした研究はなかった。以下に境界近傍のスキーム及びフィルタの取り扱いについての先行研究について述べる。

はじめに，これまでに提案された境界近傍のスキームについて述べる。Adam(1977)により 3 次精度境界コンパクトスキーム，Lele(1992)により，2 次精度，3 次精度，および 4 次精度の境界コンパクトスキームが提案された。さらに，境界コンパクトスキームの精度を 4 次精度以上に向上させる取り組みも行われている。Gaitonde and Visbal(1998)は境界で最大 6 次精度，境界より一つ内側のノードで最大 8 次精度の境界コンパクトスキームを開発した。しかしながら，境界近傍のノードのスキームの精度の次数を向上させることによる空力音の数値計算への効果は明らかにされていない。これらのコンパクトスキームは陰的手法であり，単体の性能に加えて，境界スキームとコンパクトスキームを組み合わせた場合の安定性が重要である。Carpenter(1993)は，この安定性に着目し，6 次精度コンパクトスキームと組み合わせると不安定になる境界スキームがあることを明らかにした。さらに，6 次精度コンパクトスキームと組み合わせた場合でも安定な境界近傍のスキームの組み合わせとして Carpenter の開発した陽的 5 次精度スキームと 6 次精度コンパクトスキームの組み合わせ

を提案した。また、Ikeda, et al.(2009)は、3次精度陽的境界スキームを4次精度 Padé スキームおよび6次精度コンパクトスキームと組み合わせる方法を提案し、翼周りから発生する空力音の数値解析を対象に、その安定性を議論している。さらに、境界近傍のノードでの境界近傍のスキームの解像度に着目した研究も行われている。Jordan(2007)は、境界スキームやコンパクトスキーム単体での修正波数の特性に問題はなくとも、境界スキームとコンパクトスキームの組み合わせの場合には異常な修正波数の特性となり、特に高波数領域において異常に分散誤差が大きくなってしまふことがあることを明らかにしている。さらに、Jordan(2009)は、異常な修正波数の特性とならない境界近傍のスキームを提案した。上述したように、コンパクトスキームに組み合わせる境界近傍のスキームについては、精度、解像度、および安定性の面から様々な研究が行われている。しかしながら、境界近傍のスキームとコンパクトスキームの組み合わせが空力音の計算におよぼす影響については、系統的に研究が行われたことはなかった。

コンパクトフィルタが流れの数値計算に及ぼす影響については様々な研究がなされている。Wang(2013)は、二次元軸対象噴流から発生する空力音を対象とし、コンパクトフィルタを何ステップごとにかけるのが適切かということについて検討している。また、Koutsavdis, et al. (1999)は線形化オイラー方程式に対するコンパクトスキームとコンパクトフィルタの有効性について研究を行っている。さらに、Alquadi(2006)はガウシアンパルスの移流を対象として、Kim の4次精度コンパクトスキームと Gaitonde and Visbal(2000)の10次精度コンパクトフィルタを適用した場合の特性について研究を行っている。Kawai and Fujii (2008)は、Visbal and Gaitonde の10次精度コンパクトフィルタのフリーパラメータ α の境界層ながれに与える影響を詳細に調べた。Visbal and Gaitonde(1999)は、コンパクトスキームおよびコンパクトフィルタの組み合わせがパルス波の移流や仮想的な円柱状の音源から発する音の伝搬に与える影響を調べている。若松他(2015)は、境界近傍で低次精度コンパクトフィルタを用いてそのフリーパラメータを0.45 および0.49 にした場合の発生する空力音への影響を調べている。以上のように、コンパクトフィルタと組み合わせる境界フィルタが境界近傍から発生する空力音の計算に与える影響について系統的な評価を行った研究はない。

Visbal and Gaitonde(1998)が提案したコンパクトフィルタは、伝達関数の実部が1以下でいかなる波数成分についても増幅されることがなく、かつ虚部が0であり数値分散への影響がないところに特徴がある。このコンパクトフィルタを境界に適用する場合には、境界に近づくほど、コンパクトフィルタで用いることができるステンシルが片側で制限されるため、境界近傍ほど低次精度コンパクトフィルタを用いる必要がある。このコンパクトフィルタを用いた場合、上述のように良い点はあるものの、特に境界より1つ内側でのノードでは2次精度コンパクトフィルタを用いることとなり低次精度ゆえに十分細かい格子間隔を選択しなければならない。また、コンパクトフィルタの伝達関数の特徴として低次精度では低波数領域までフィルタの影響が及ぶことが挙げられる。

Gaitonde and Visbal (2000)は、Visbal and Gaitonde(1998)での境界近傍のノードで精度の次数を低くしなければならないという欠点を克服するため、境界近傍ノードにおいても最大 10 次精度の境界高次精度コンパクトフィルタを開発した。しかしながら、この境界コンパクトフィルタでは、高波数領域において伝達関数の実部が 1 以下という条件を満たさないことによって高波数領域の計算成分が増幅される、また伝達関数の虚部が 0 とならないことによって数値分散に影響を与えるという欠点がある。

以上で述べたように、様々な精度、Transfer function を持つコンパクトフィルタが提案されており、単一のコンパクトフィルタを用いた場合の特性については、伝達関数等によって詳細な分析がなされている。しかし、境界フィルタを組み合わせる場合における境界近傍の流れから発生する空力音への影響については、十分に研究がなされているとは言えない。

1.3 衝撃波の計算手法の先行研究とコンパクトスキームの応用

衝撃波を数値計算によって解く場合には、急な勾配や不連続面が発生するため、困難が伴う。衝撃波と乱流の干渉を伴う圧縮性流れのシミュレーションについては、これまで数多くの研究例(Johnsen, et al., 2010)が報告されており、その多くに WENO スキーム(Jiang and Shu, 1996)が用いられてきた。WENO スキームは、衝撃波捕獲に優れた性能を発揮し、かつ高次精度の計算が可能でさらには堅牢性が良いという優れた点がある。圧縮性計算スキームにおける堅牢性は極超音速流れに見られるように非常に急峻で複雑な曲率構造を持った衝撃波を捕獲するためには極めて重要であり、近似リーマンソルバーの開発の歴史が示すように、1.5 次元移動衝撃波や曲率構造を持つ衝撃波における不安定現象（カーバンク）の克服は衝撃波捕獲の最重要課題であった。最近、Van Leer スキーム (1979) や Roe スキーム (1981) に対して堅牢性が高く数値粘性を小さくした新しい世代のリーマンソルバーの開発 (例えば Kitamura et al. 2013 や Liou, 2011) が進んでいる。一方、WENO スキームについても、重みづけの再構成の研究も進み、高解像度性が一定程度進んだ。しかしながら、WENO スキームは曲座標系における一様流の保持が困難であり、複雑な形状の格子を用いた解析には適していない (Nonomura, et al, 2010)。保存量に対する高次中心差分コンパクトスキームと特性量適合コンパクト補間を採用し不連続量の検出に対して ENO スイッチを用いた非線形コンパクトスキームが提案され、後に、不連続量の検出用スイッチに重み付け係数系を導入した非線形スキームが WCNS である。衝撃捕獲性能が優れ WENO スキームの欠点である一様流保存性や渦保存性の困難を回避でき、様々な流束計算を採用できることが特徴である。このように基本的に優れた堅牢性を保持する非線形スキームは様々発展しつつある。線形コンパクトスキームと比較して計算負荷が大きいこれらの非線形スキームは強い衝撃波を含む圧縮性流れの乱流や遷移流れの正確な計算に今後応用されることが期待されている(例えば 佐藤ら 2014)。

しかしながら、線形中心コンパクトスキームと比較して、不連続性捕獲をする安定計算のために大小の差はあるが数値散逸があり、不連続性のないなめらかな領域での計算には線形コンパクトスキームより劣り、広いエネルギースペクトル帯域を持つ乱流計算には高波数でのエネルギードレインのため克服されなければならない弱点があった (Pirozzoli 2011). また、計算手続きが複雑であり、計算コストが比較的高い。

そのため、比較的弱い衝撃波を伴う圧縮性流れの解析に対して、高解像度かつシンプルな線形コンパクトスキームを用いる研究が行われている。コンパクトスキームは、小さなステンシルで高次精度かつ高解像度の解が得られ、乱流の計算にも適している。一方で、コンパクトスキーム単体で用いると、高速流れにおける衝撃波等の不連続面や物理量の急峻な勾配では、差分ステンシルが不連続面をまたぐときギブス振動が生じ、コンパクトスキームは脆弱で計算の発散につながる。そのため、衝撃波の部分では WENO スキームを用い、それ以外の部分ではコンパクトスキームを用いる WENO-コンパクトハイブリッドの計算手法が提案されているものの、計算手法の頻繁な切り替えは数値的に不安定になることが指摘されている。

その中でも、コンパクトスキームとコンパクトフィルタを組み合わせる手法の有効性について、様々な検討がなされている。滝口他(2006)は、コンパクトスキームとコンパクトフィルタを組み合わせる手法と風上バイアスされたコンパクトスキームをそれぞれ圧縮性流れに適用し、それらの特徴を比較した。中心コンパクトスキームを用いた計算では発散するいくつかの非定常性圧縮性流れの解析で移動衝撃波や自由せん断流遷移過程において観察される偏った渦度分布など物理量の不連続性がある場合に、バイアス化やフィルタリングは計算の発散を回避でき有用であることを示した。しかしながら、そこで用いられているコンパクトフィルタは、Lele のコンパクトフィルタ 1 種類のみであり、その他のフィルタが、コンパクトスキームと組み合わせられた場合に、どのような特性をもつかは調べていない。Kawai, et al.(2010)は、コンパクトスキームとコンパクトフィルタ(Gaitonde and Visbal, 2000)及び人工拡散を組み合わせた計算手法を提案し、衝撃波や急な勾配を伴う圧縮性流れに適用した場合でも、衝撃波や急な勾配の近傍に発生する非物理的な振動を抑制できることを示した。人工拡散の特性は Cook(2005)が提案した超粘性をベースとして発展させたものである。また、Visbal and Gaitonde(2005) は、衝撃波近傍に 2 次精度の Gaitonde のコンパクトフィルタを適用し、その有効性を議論している。

このように、衝撃波を伴う圧縮性流れに対するコンパクトフィルタの適用性研究が進められているが、数あるコンパクトスキームやフィルタの組み合わせによって、どのようにそれらの特性に差異が生ずるかを系統的に調べた研究例はない。言い換えると、ギブス振動などの数値振動の程度については、コンパクトスキームの精度の次数やコンパクトフィルタのフリーパラメータに依存するが、系統的な評価は行われてこなかった。

また、WENO スキームや人工拡散を導入した圧縮性計算手法等についてそれぞれの評価を行った研究(Johnsen, et al., 2010)はあるが、コンパクトスキームとコンパクトフィルタ

の組み合わせについての評価は行われていなかった。

1.4 本論文の構成

第1章では、本研究の概要、構成について述べる。

第2章では、コンパクトスキームとコンパクトフィルタについて述べる。コンパクトスキームと境界に適したコンパクトスキームとの組み合わせについて計算手法を示し、その組み合わせによる空力音の計算に与える特性について述べる。これまでに提案された各種境界スキームでは、精度、解像度、安定性の面から検討がなされているが、空力音の数値計算に適用した事例はないので、各種境界スキームを実装しスキームの解像度に着目して問題点を明らかにし、境界近傍に真の物理的音響ソースをもつ空力音計算に適切であると考えられる組み合わせを示した。

第3章では、境界近傍に真の物理的音響ソースをもつ場合に、境界近傍でのフィルタの取り扱い (Visbal and Gaitonde(1998)および Gaitonde and Visbal(2000)) を空力音の数値計算に適用した場合の問題点を明らかにし、空力音計算に適切であると考えられる組み合わせを示した。

第4章では、流体から発生する波動の伝播の非線形現象として代表的な衝撃波にコンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの計算手法を適用した場合について示す。その評価によって欠点を最小化できることが見出されたコンパクトスキームとコンパクトフィルタと近年注目されている局所人工拡散スキームとの結果を比較し、この計算手法が局所人工拡散よりも衝撃波にシャープさを増す一定の長所を作り出すことを見出した。

第5章では、本研究で得られた主要な成果を総括している。

第2章 境界スキームとコンパクトスキームの組み合わせが空力音の数値計算に与える影響

2.1 支配方程式

支配方程式は直交座標系で記述された2次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式である。ここで、 ρ は密度、 u は速度、 p は圧力、 τ は粘性応力、 q は熱流束を示す。 E_T は流れの内部エネルギーと運動エネルギーの和を示す。

気体の状態方程式が成り立つと仮定した。気体の状態方程式は以下の式で表される。 R はガス定数を表す。以降、空間の一階微分を $'$ で、フィルタをかけた値を \wedge で、無限遠方の物理量を下付き文字 ∞ 、格子間隔を Δx で表す。流体は空気とし、双極渦の初期半径 R_0 をもとにしたレイノルズ数 $Re=(\rho_\infty c_\infty R_0)/\mu_\infty=1\times 10^4$ 、プラントル数 $Pr=0.72$ 、比熱比 $\gamma=1.4$ とした。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial(E_T u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(p u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (2-3)$$

$$E_T = \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \frac{p}{\gamma - 1} \quad (2-4)$$

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2-5)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2-6)$$

$$p = \rho R T \quad (2-7)$$

2.2 計算条件

2.2.1 無次元化

各物理量は R_0 、無限遠方における音速 c_∞ 、粘性係数 μ_∞ 、密度 ρ_∞ 、温度 T_∞ によって無次元化した。無次元化した変数を $\tilde{\cdot}$ で表す。具体的には、

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{R_0}, \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{c_\infty}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_\infty}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_\infty}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{R_0/c_\infty}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_\infty c_\infty^2}$$

無次元化された支配方程式および気体の状態方程式は以下のように表される。

本研究では、粘性係数は式(2-12)の指数法則に従うとした

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (2-8)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left(\frac{\tilde{\mu}}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_k} \right] \right) \quad (2-9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_T}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{E}_T\tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} &= -\frac{\partial(\tilde{p}\tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} + \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left(\tilde{u}_i \frac{\tilde{\mu}}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_k} \right] \right) &- \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left(-\frac{\tilde{\mu}}{(\gamma-1)\text{Re Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} \right) \end{aligned} \quad (2-10)$$

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{T}}{\gamma} \quad (2-11)$$

$$\tilde{\mu} = \tilde{T}^{\frac{2}{3}} \quad (2-12)$$

2.2.2 空間差分スキームおよびローパスフィルタ

本研究では、空間差分スキームに以下の Lele(1992)の 3 重対角 6 次精度コンパクトスキームを用いる。

$$\frac{1}{3} f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{3} f'_{i+1} = \frac{14}{9} \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{1}{9} \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} \quad (2-13)$$

しかしながら、上記の 3 重対角 6 次精度コンパクトスキームは境界近傍（境界および境界より 1 つ内側のノード）で用いることができない。そのためこれらのノードでは別の境界に対応したスキームを用いる必要がある。境界近傍でのスキームの取り扱いについては 2.2.3 節に詳しく述べる。以降、スキームの精度を表すのに、境界部-境界より 1 つ内側のノード-計算領域内部のノード-境界より 1 つ内側のノード-境界部のそれぞれの精度を (3_I-4_I-6_I-4_I-3_I) のように表す。下付き文字 I は陰的手法、E は陽的手法を示す。ただし、Jordan(2007)および Jordan(2009)の手法に関しては原著の表記を用いた。

空間差分スキームでは解像できない波数をローパスフィルタによって除去するため、Gaitonde and Visbal (2000)の 10 次精度コンパクトフィルタを用いた。

$$\alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (f_{i+n} + f_{i-n}) \quad (2-14)$$

ここで、10次精度コンパクトフィルタの係数は以下のようになる。

$$a_0 = \frac{193+126\alpha}{256}, \quad a_1 = \frac{105+302\alpha}{256}, \quad a_2 = \frac{15(-1+2\alpha)}{64}, \quad a_3 = \frac{45(1-2\alpha)}{512}, \quad a_4 = \frac{5(-1+2\alpha)}{256},$$

$$a_5 = \frac{1-2\alpha}{512}$$

しかしながら、上記の10次精度コンパクトフィルタは境界近傍では用いることができない。そのため、境界から境界より4つ内側までの各ノードにおいては、別の対応が必要となる。本研究では、境界ではフィルタをかけず、境界近傍ではフィルタの精度を低下させることによって対応させた。具体的には境界より1つ内側のノードは2次精度コンパクトフィルタ、境界より2つ内側のノードは4次精度コンパクトフィルタ、境界より3つ内側のノードは6次精度コンパクトフィルタ、境界より4つ内側のノードは8次精度コンパクトフィルタを用いた。この方法では、各ノードにおいて、すべての波数成分は増幅されることはない。しかし、図2-3に $\alpha=0.45$ の場合について示すようにフィルタの精度の次数が低下するほど、フィルタの影響がおよぶ波数範囲が大きくなるという特徴がある。

2.2.3 境界近傍のスキーム

前述したように3重対角6次精度コンパクトスキームは、境界および境界より一つ内側のノードでは用いることができず、ほかのスキームを用いる必要がある。本研究では、以下のスキームの組み合わせによって境界に対応させる。境界スキームとグローバルスキームは数学的にそれぞれ作成できる。実際の数値計算で用いる場合にはそれらを組み合わせることが必要であるが、必ずしもこれまで提案されてきた境界スキームが適切に動作するとは限らない。そのため、ナビエストークス方程式を解くシミュレーションに実装してそれらの特長を把握する必要がある。

(a) (3_r-4_r-6_r-4_r-3_r)

境界では、次式のAdam(1977)の3次精度境界コンパクトスキームを用い、

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_1 + 4f_2 + f_3) \quad (2-15)$$

境界から一つ内側のノードでは次式の4次精度Padéスキームを用いる。4次精度Padéスキームは、わずか3ステンシルで、4次精度を得られることから、多くの研究で境界近傍に用いられている。しかしながら、Jordan(2007)によって、この組み合わせでは、境界のノードで、高波数成分が増幅されることが示されている。

$$\frac{1}{4}f_1' + f_2' + \frac{1}{4}f_3' = \frac{3}{2} \frac{f_3 - f_1}{2\Delta x} \quad (2-16)$$

(b) (4_I-4_I-6_I-4_I-4_I)

境界部で4次精度の境界コンパクトスキーム, 境界より一つ内側のノードで式(2-16)の4次精度 Padé スキームを用いる組み合わせである.

$$f_1' + 3f_2' = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{17}{6}f_1 + \frac{3}{2}f_2 + \frac{3}{2}f_3 - \frac{1}{6}f_4 \right) \quad (2-17)$$

(c) (5_E-5_E-6_I-5_E-5_E) Carpenter (1993)

境界部および境界より一つ内側のノードで陽的差分スキームを用いる. Carpenter(1993)により安定なスキームの組み合わせであることが示されているが, 流体の方程式に適用した場合の計算結果については示されていない. なお, C₀~C₇, D₀~D₇は Carpenter(1993)に記載されている係数を用いる.

$$f_1' = \frac{1}{\Delta x} (C_0f_1 + C_1f_2 + C_2f_3 + C_3f_4 + C_4f_5 + C_5f_6 + C_6f_7 + C_7f_8) \quad (2-18)$$

$$f_2' = \frac{1}{\Delta x} (D_0f_1 + D_1f_2 + D_2f_3 + D_3f_4 + D_4f_5 + D_5f_6 + D_6f_7 + D_7f_8) \quad (2-19)$$

(d) (6_I-6_{IA}-6_I-6_{IA}-6_I)

Gaitonde and Visbal(1998)によって提案された6次精度境界コンパクトスキームを以下に示す.

$$f_1' + 5f_2' = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{197}{60}f_1 - \frac{5}{12}f_2 + 5f_3 - \frac{5}{3}f_4 + \frac{5}{12}f_5 - \frac{1}{20}f_6 \right) \quad (2-20)$$

Gaitonde and Visbal(1998)によって提案された境界より一つ内側の6次精度境界コンパクトスキーム (式(2-22)と区別するため IA と表記) を以下に示す.

$$\frac{2}{11}f_1' + f_2' + \frac{2}{11}f_3' = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{20}{33}f_1 - \frac{35}{132}f_2 + \frac{34}{33}f_3 - \frac{7}{33}f_4 + \frac{2}{33}f_5 - \frac{1}{132}f_6 \right) \quad (2-21)$$

(e) (6_I-6_{IB}-6_I-6_{IB}-6_I)

境界部に式(2-20)を用い, 境界より一つ内側に次の6次精度境界コンパクトスキーム (式(2-21)と区別するため IB と表記) を用いる.

$$\frac{1}{8}f_1' + f_2' + \frac{3}{4}f_3' = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{43}{96}f_1 - \frac{5}{6}f_2 + \frac{9}{8}f_3 + \frac{1}{6}f_4 - \frac{1}{96}f_5 \right) \quad (2-22)$$

(f) (3_E-4_I-6_I-4_I-3_E) Ikeda et al. (2009)

境界に下記の3次精度陽的スキームを用い、境界より一つ内側のノードに式(2-16)の4次精度 Padé スキームを用いる。

$$f_1' = -\frac{1}{6\Delta x}(11f_1 - 18f_2 + 9f_3 - 2f_4) \quad (2-23)$$

(g) ($3^2_1-4_1-6_1-4_1-3^2_1$) Jordan(2007)

境界に下記の式において3次精度となるコンパクトスキーム (Jordan(2007)に記載の係数を使用)、および境界より一つ内側のノードに式(2-16)に示す4次精度 Padé スキームを用いる。

$$f_1' + af_2' = \beta f_1 + \gamma f_2 + \alpha f_3 + \lambda f_4 + \xi f_5 + \eta f_6 \quad (2-24)$$

(h) ($4^2_1-4_1-6_1-4_1-4^2_1$) Jordan(2007)

境界に式(2-24)において4次精度となるコンパクトスキーム (Jordan(2007)に記載の係数を使用)、および境界より一つ内側のノードに式(2-16)に示す4次精度 Padé スキームを用いる。

(i) ($4^2_1-4^2_1-6_1-4^2_1-4^2_1$) Jordan(2009)

境界に式(2-25)に示す4次精度の境界コンパクトスキームを用い、さらに境界より一つ内側のノードでも式(2-26)に示す4次精度の境界コンパクトスキームを用いる。なお、Jordan(2009)に記載されている係数を用いた。このスキームの組み合わせは、完全に安定ではないが、一階微分において高波数領域でも異常な増幅による分散誤差の増大が起こらないことが Jordan(2009)により示されている。ここで、スキームの修正波数の解析は、ナビエストークス方程式に適用した場合のスキームの特性を示すものではなく、空力音の発生などの非線形の現象においては非線形の波動を扱うことができるナビエストークス方程式に実装してその特徴を明らかにする必要があることに留意いただきたい。

空力音の数値計算においては、音波の発生する近傍では細かく格子を配置し、音波の伝播のみの領域においては格子を粗く配置する不等間隔格子を用いるのが一般的である。一般的な不等間隔格子においてコンパクトスキームの境界スキームとの組み合わせで生じる修正波数について解析した研究はない。そのため、本研究においては、不等間隔格子を用いてナビエストークス方程式に6次精度コンパクトスキームと境界スキームの組み合わせを適用する場合の特性について検討を行う。

$$f_1' + af_2' = \beta f_1 + \lambda f_2 + \delta f_3 + \alpha f_4 + \xi f_5 + \eta f_6 \quad (2-25)$$

$$cf_1' + f_2' + af_3' = \gamma f_1 + \beta f_2 + \lambda f_3 + \delta f_4 + \alpha f_5 \quad (2-26)$$

2.2.4 境界条件

空力音を伴う流れ場においては、流出境界において、音波の流出に適した境界条件を用いるのが好ましい。様々な方法が提案されているが、本研究においては境界条件には Poinso and

Lele(1992)の NSCBC(Navier-Stokes Characteristic Boundary Condition)を用い, $y=0$ を断熱すべりなし壁面境界とし, その他の境界については無反射流境界とした.

代表して, x 方向の境界条件について述べる.

Tompson(1987)による特性波解析を用いて, ナビエ・ストークス方程式を変更すると,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} = 0 \quad (2-27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_k u_k) d_1 + \frac{d_2}{\gamma - 1} + (\rho u_1) d_3 \\ + (\rho u_2) d_4 + (\rho u_3) d_5 + \frac{\partial}{\partial x_2} [(E_T + p) u_2] + \frac{\partial}{\partial x_3} [(E_T + p) u_3] = \end{aligned} \quad (2-28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \tau_{ij}) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} + u_1 d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_1 u_3) = \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2-29)$$

$$\frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} + u_2 d_1 + \rho d_4 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_2 u_3) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \quad (2-30)$$

$$\frac{\partial(\rho u_3)}{\partial t} + u_3 d_1 + \rho d_5 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_3 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3 u_3) + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \quad (2-31)$$

上記の式中に現れる, $d_1 \sim d_5$ は, 以下のようになる

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \left[L_2 + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) \right] \\ \frac{1}{2}(L_5 + L_1) \\ \frac{1}{2\rho c}(L_5 - L_1) \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \quad (2-32)$$

ここで,

$$\lambda_1 = u_1 - c$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u_1$$

$$\lambda_5 = u_1 + c$$

ここで, c は音速であり,

$$c^2 = \frac{\mathcal{P}}{\rho}$$

$$L_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (2-33)$$

$$L_2 = \lambda_2 \left(c^2 \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \quad (2-34)$$

$$L_3 = \lambda_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (2-35)$$

$$L_4 = \lambda_4 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (2-36)$$

$$L_5 = \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (2-37)$$

本研究においては、すべりなし断熱壁面および無反射流出境界を用いているので、これらの境界条件の設定方法について説明を行う。

はじめにすべりなし断熱壁面では、

壁面での熱流束および速度を 0 と設定する。

$$q_1 = 0$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

LODI の条件より、

$$L_1 = L_5$$

$$L_2 = L_3 = L_4 = 0$$

という関係式が得られる。これらの条件を d_1 から d_5 に代入することによって設定できる。

次に、無反射流出境界条件では、無限遠方での圧力を設定し、以下の条件を設定する。

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = 0$$

本研究においては、完全無反射として、計算領域に入ってくる波を 0 とした。

$$L_1 = 0$$

L_2, L_3, L_4, L_5 をそれぞれ式(2-34)から式(2-37)まで求めると, 無反射流境界を設定できる.

2.2.5 時間発展

時間発展は4次精度 Runge-Kutta 法を用いた.

なお, 時間刻みは, 格子点数 1681×841 の場合では $\Delta t=0.005$ とし, 格子点数 841×421 および格子点数 421×211 の場合では $\Delta t=0.01$ とした.

2.2.6 格子配置

本研究においては, 双極渦の壁面衝突による渦変形および音響場を正確にとらえる必要がある. 空力音の発生を正しく解くためには, 空力音の発生する領域において細かいグリッドの配置をする必要がある. 一方で, 空力音の遠方場への伝播も同時に解く必要がある. 等間隔格子を用いた場合には, 遠方場まで細かいグリッドとなり, 格子点数の増大を招く. そのため, 本研究では, 双極渦の近傍のみを細かいグリッドにし, 遠方場は粗いグリッドを用いることによって, 格子点数の増大を許容可能な範囲に抑えた. 双極渦の初期半径 R_0 を基準長さとし, 計算領域を $-159.5R_0 \leq x \leq 159.5R_0, 0 \leq y \leq 159.5R_0$ とした. 空間解像度による影響を把握するため, 3種類の格子点数を用いた. (格子点数 $N_x \times N_y = 841 \times 421$ (最小格子間隔 $\Delta x_{\min}=0.025$), 格子点数 $N_x \times N_y = 1681 \times 841$ (最小格子間隔 $\Delta x_{\min}=0.0125$), 格子点数 $N_x \times N_y = 421 \times 211$ (最小格子間隔 $\Delta x_{\min}=0.05$)) いずれの格子点数の場合においても双極渦近傍で格子が細くなるように格子伸長を行った.

空間差分スキームにコンパクトスキームを用いる場合では, 等間隔格子でコンパクトスキームを用いる必要がある. そのため, 本研究においては図 2-1 および図 2-2 に示す不等間隔格子 (x 空間, y 空間) を等間隔格子 (ξ 空間) に写像した.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2-38)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (2-39)$$

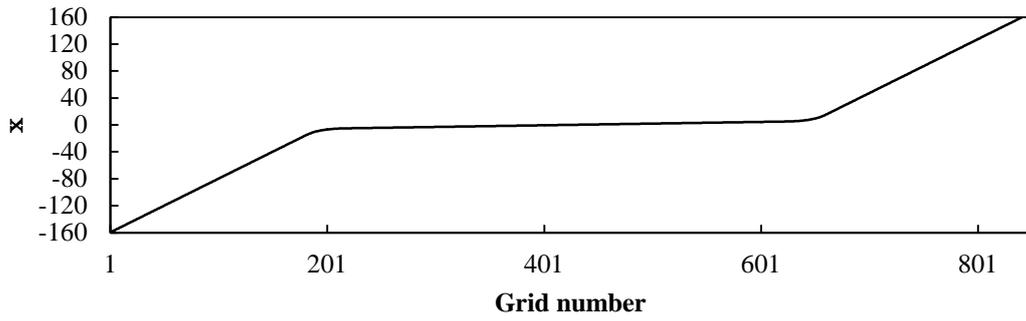


Fig.2-1 Grids in the X-direction in case of $N_x \times N_y = 841 \times 421$.

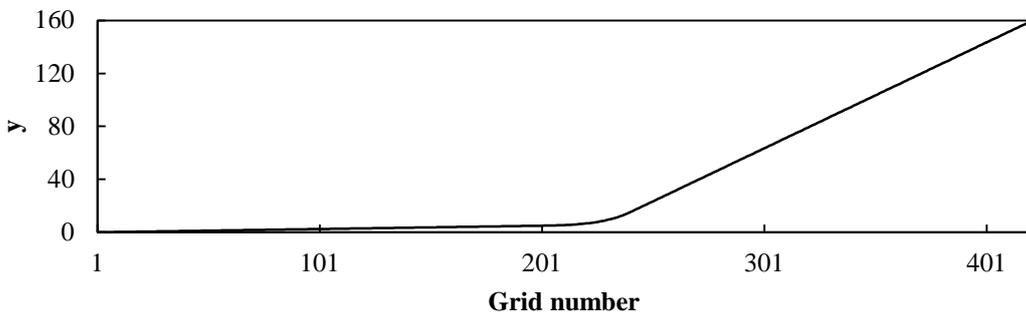


Fig.2-2 Grids in the Y-direction in case of $N_x \times N_y = 841 \times 421$.

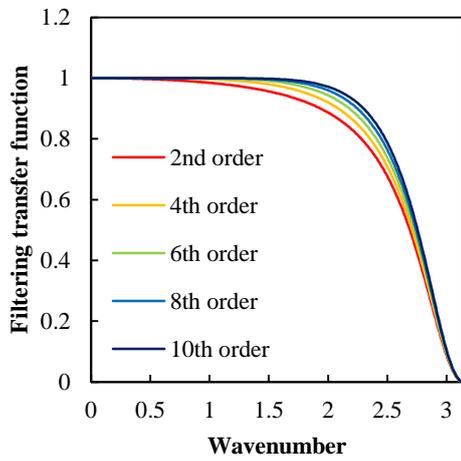


Fig.2-3 Filtering transfer function ($\alpha=0.45$) (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME (in Japanese)).

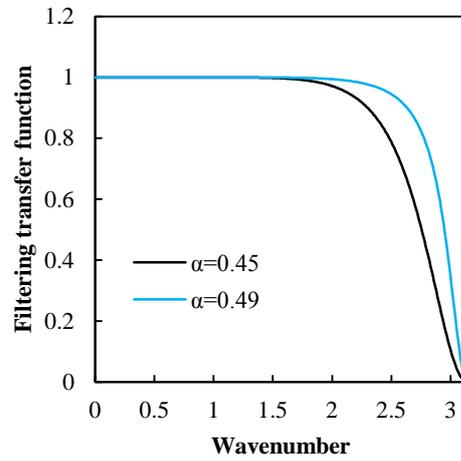


Fig.2-4 10th order compact filter's filtering transfer function (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME (in Japanese)).

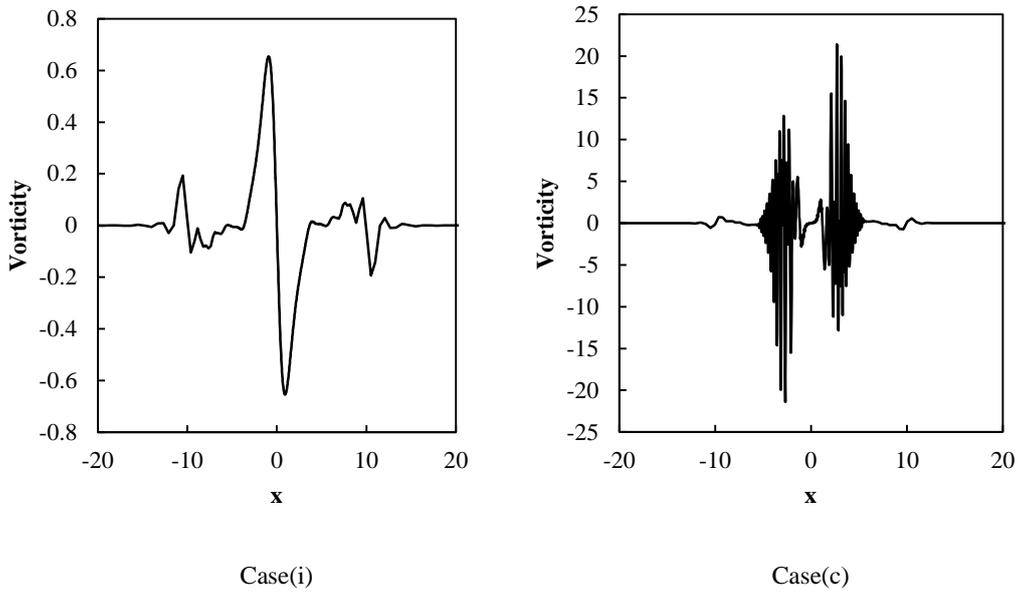


Fig.2-5 Vorticity distribution on the wall at the time $t=10$ ($\alpha=0.45$).

2.2.7 双極渦の初期条件の与え方

双極渦は単体の渦2つをそれぞれ(-0.5,3)と(0.5,3)に置き, 単体の渦の速度分布を Poinsot and Lele(1992)に記載された式(2-40)で与えることによって設定した. この方法では, 渦の影響が及ぶ範囲がほかの渦の数値計算上の与え方よりも小さく, 循環が0となることに特徴がある. ここで, 単渦の半径 $R_c=0.5$, 渦の強さの係数 $C=0.25$ とした. 渦の誘起速度 u_0 に基づくマッハ数を $M=u_0/c_\infty=0.1$ とした. 初期密度および初期圧力分布は無限遠方の密度および圧力で一定とした.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix}, \psi = C \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2R_c^2}\right) \quad (2-40)$$

本研究では, フリーパラメータ α を 0.45 および 0.49 に固定し, 両者での計算結果を比較することにより境界近傍のスキームを6次精度コンパクトスキームと組み合わせることによって生じる高波数領域での増幅の影響を調べた. 図2-4に示すように, $\alpha=0.45$ に設定すると, $\alpha=0.49$ に設定した場合よりも低波数側からフィルタの影響が現れるのに対して, $\alpha=0.49$ に設定すると高波数領域のみにフィルタの影響が現れる. 係数は文献(Gaitonde and Visbal, 2000)に記載されているものを使用した.

2.3. 結果および考察

本研究では, (i)のスキームの組み合わせを基準として考察を行う. なぜなら, 境界近傍のスキーム単体でも修正波数の高波数領域における異常な増大が生じず, かつ, 6次精度コン

コンパクトスキームと組み合わせた場合においても各ノードで分散誤差が異常に増大することがないことが修正波数の分析において Jordan(2009)により示されているためである。これを組み合わせた場合の高波数領域での各ノードにおける特性を比較するため、高波数領域をよく除去するフィルタ($\alpha=0.45$)と除去しないフィルタ($\alpha=0.49$)の二種類を用いて検討を行った。境界スキームを 6 次精度コンパクトスキームと組み合わせた場合でも異常な増幅が生じない(i)では $\alpha=0.45$ でも $\alpha=0.49$ でも発散にはいたらなかった。一方で、(c), (d), (e), (g), および(h)は計算が不安定となり発散した。このことから、(c), (d), (e), (g)および(h)では、境界スキームを 6 次精度コンパクトスキームに組み合わせることによって高波数領域での異常な増幅が生じたと推察される。特に、スキームの安定な組み合わせでありながら、ナビエーストクス方程式に適用すると発散した(c)のスキームについて、双極渦が壁面に近づくと、通常は図 2-5 Case(i)のように壁面上の渦度が分布するが、図 2-5 Case(c)のように壁面上において数値的な振動が生じ、発散にいたる。安定性は考慮されているが、組み合わせた場合には高波数領域において異常な増幅が生じたと推察される。

発散する時刻に差が観察され、例えば、 $\alpha=0.45$ では、(g)は $t=24.57$ で、(h)は $t=0.55$ で発散し、 $\alpha=0.49$ では、(g)は $t=1.77$ で、(h)は $t=0.34$ で発散した。これは、 $\alpha=0.49$ では、 $\alpha=0.45$ と比較して高波数の波しかフィルタによって除去されず、それぞれのコンパクトスキームと境界コンパクトスキームによって生じた十分解像できない高波数領域の分散誤差を十分フィルタによって除去できず、空間差分スキームの組み合わせがもつ不安定性を十分に抑えることができなかつたためであると考えられる。そこでこれ以降は、発散することなく計算が可能であった(a), (b), (f), および(i)に関して分析を行うこととした。まず発生する空力音について分析を行い、その空力音が発生する原因となった渦変形について分析を行う。本研究では、Jordan(2009)のスキームの組み合わせを用い、コンパクトフィルタのフリーパラメータ α を 0.45 に設定した場合で空間解像度を大きくした場合（最小格子間隔 $\Delta x_{\min}=0.0125$ ）の計算結果をレファレンスデータとする。

2・3・1 発生する空力音の比較

2・3・1・1 最小格子間隔 0.025

図 2-6 および 2-9 に、それぞれ $\alpha=0.45$ および $\alpha=0.49$ の場合の $t=150$ における圧力変動場 $(p-p_\infty)/p_\infty$ を示す。図 2-6 より、 $\alpha=0.45$ の場合は、スキームの組み合わせによる差異はほとんど見られないことがわかる。一方、図 2-7 より、 $\alpha=0.49$ の場合については、(a)と(f) はほぼ同じ挙動を示し、(b)と(i) もほぼ同じ挙動を示すが、(a), (f)および(b), (i)を比較すると、図中矢印位置の双極渦の近傍で、圧力変動場に顕著な差が観察される。(a)と(f)では双極渦近傍において高圧力部分が観察されないが、(b)と(i)では明確に高圧力部分が観察される。

図 2-7 に、 $t=50, t=100, t=150$ の $x=0$ における圧力分布を重ねて示す。音波が伝播に伴い減衰している様子が分かる。また、図 2-8 に、図 2-7 に赤矢印で示した、最大音圧と原点 (0, 0) からの距離の関係を示す。

本研究においては、壁面に衝突する渦による渦変形は、原点近傍で生じるため、原点からの距離を用いた。二次元計算においては、理論的には、発生する空力音は距離の(-1/2)乗に比例する結果となるが、本研究で計算された空力音も距離の(-1/2)乗にほぼ比例する結果となり、遠方場をコースなグリッドでコンパクトスキームとコンパクトフィルタを使うことによって数値的減衰を起こすことなく音波の伝播が捉えられていることが確認できた。これが高解像度計算法の特徴であり、壁近傍に境界スキームとフィルタを適切に選択することより発生する非線形性と音波の伝播の様子が明確に捉えられた。

図 2-10 および 2-11 に、境界スキームが壁面に対し垂直方向 (y 方向) に伝搬する音波の発生および伝搬に与える影響を明らかにするためそれぞれ $\alpha=0.45$ および $\alpha=0.49$ の場合の固定点(0, 69.9)における(a), (b), (f), および(i)の圧力変動の値を示す。

本研究で固定点(0, 69.9)での音波発生を観察する理由として、先行研究 (弘中(2009), 出川(2010)) により、壁面に垂直に衝突する双極渦から発生する空力音は 4 重極音源が支配的であり、壁面と垂直な方向に強い音響圧力変動が観察されることが示されているためである。

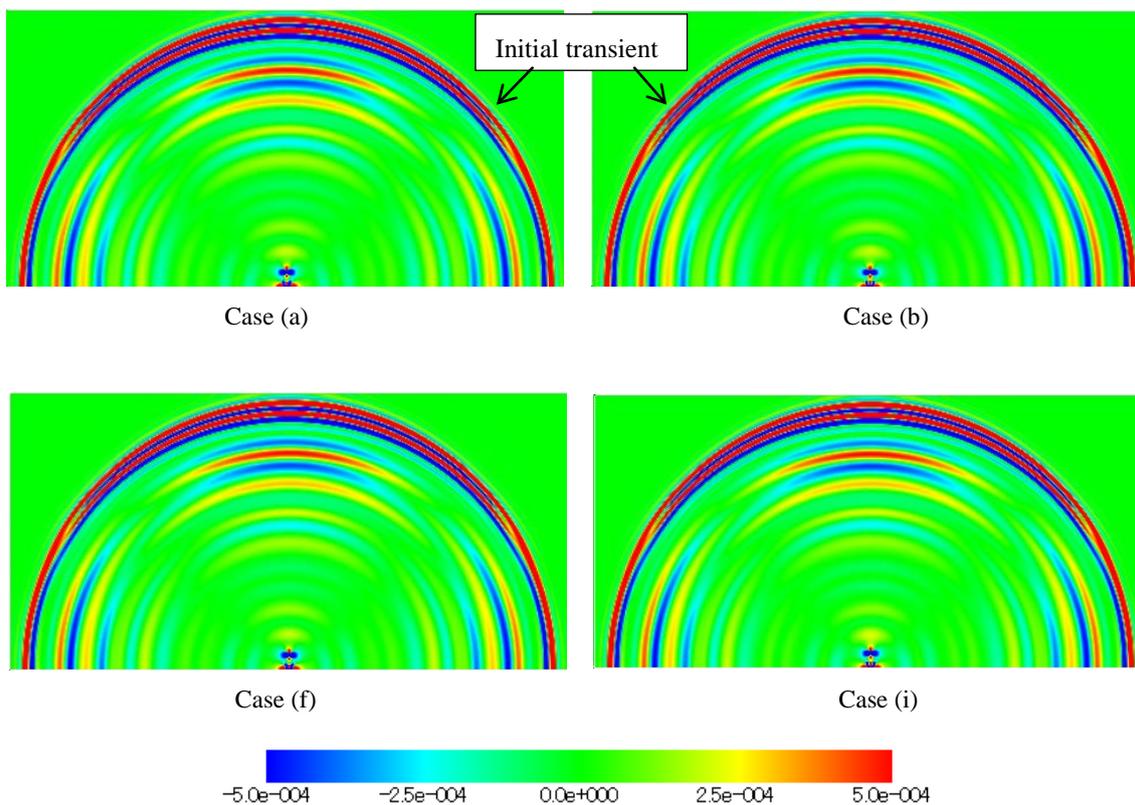


Fig.2-6 Pressure field $(p-p_\infty)/p_\infty$ generated by vortex dipole rebound from a wall at $t=150$ in case of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$). In all cases, acoustic fields are almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

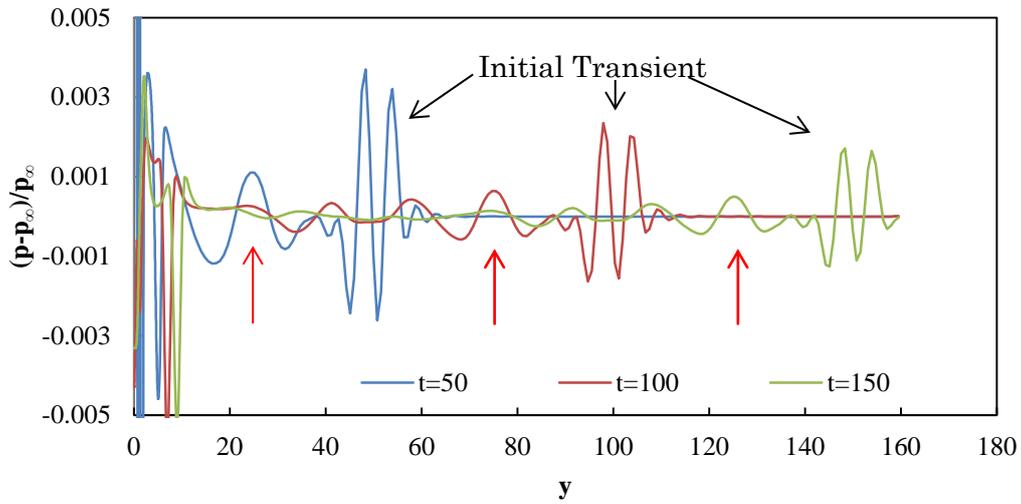


Fig.2-7 Pressure $(p-p_\infty)/p_\infty$ at $x=0$ generated by vortex dipole rebound from a wall at $t=50, 100$ and 150 in case of (i) and $\alpha=0.45$, $(N_x \times N_y=841 \times 421, \Delta x_{\min}=0.025)$.

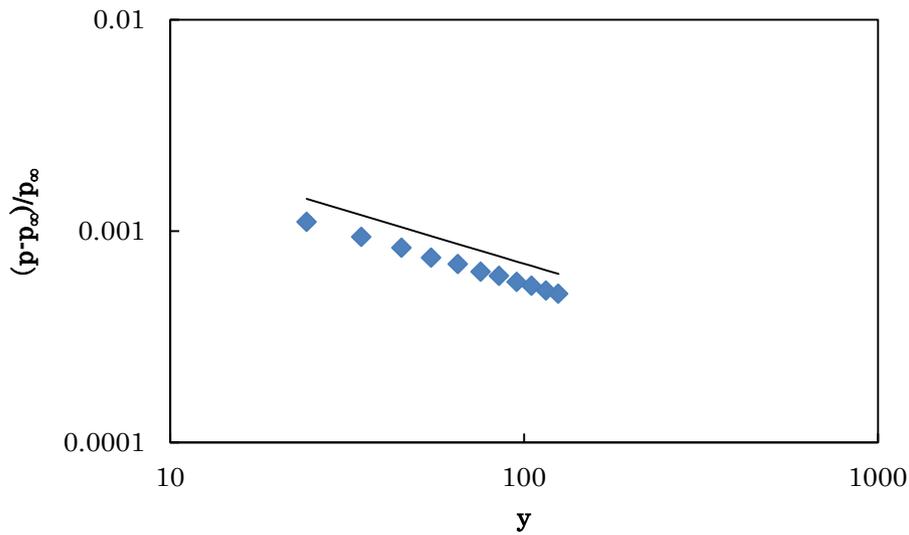


Fig.2-8 Attenuation of maximum sound pressure at $t=50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140$ and 150 in case of (i) and $\alpha=0.45$, $(N_x \times N_y=841 \times 421, \Delta x_{\min}=0.025)$.

また、壁面に沿った方向でも壁面と垂直な方向と同様な圧力変動を得られるため、代表して、固定点(0, 69.9)での圧力変動を示す。図 2-10 より、 $\alpha=0.45$ の場合は、スキームの組み合わせによる差異はほとんど見られないことがわかる。レファレンスデータと比較すると、音の大きさに違いはほとんど観察されないものの位相に違いが生じている。一方、図 2-11 の $\alpha=0.49$ の場合については、いずれの境界スキームの組み合わせでも音の大きさに関してはレファレンスデータとほぼ同じ結果となっている。

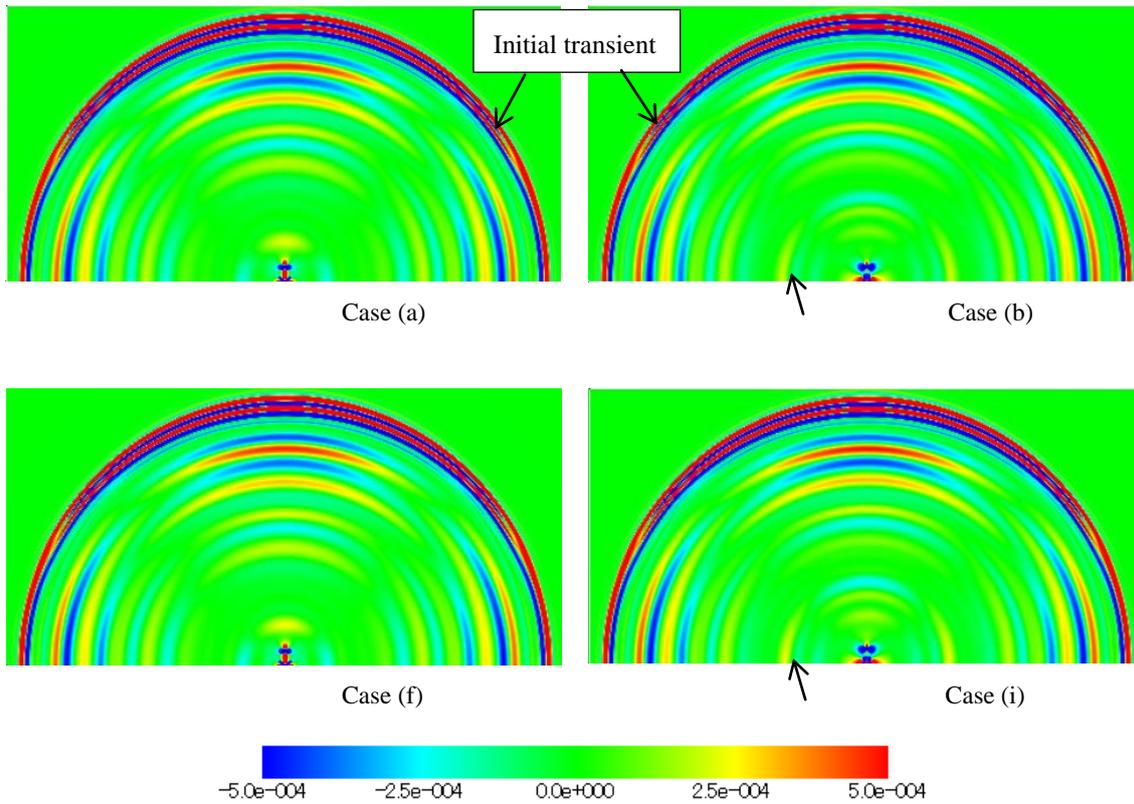


Fig.2-9 Pressure field $(p-p_\infty)/p_\infty$ generated by vortex dipole rebound from a wall at $t=150$ in case of $\alpha=0.49$, $(N_x \times N_y=841 \times 421, \Delta x_{\min}=0.025)$. Case (a) and (f) are almost the same, but they are different from Case (i). Case (b) is almost the same as Case(i) (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

(a)と(f)はほぼ同じ挙動を示し、(b)と(i)もほぼ同じ挙動を示す。(a)と(f)はレファレンスデータと位相差がほとんど観察されないのに対し、(b)と(i)はレファレンスデータと位相差が観察される。(a)、(f)および(b)、(i)を比較すると、特に $t=130$ 以降に顕著な差異が生ずることがわかる。

境界スキームが壁面に沿った方向(x方向)に伝搬する音波の発生及び伝搬に与える影響を明らかにするため図 2-12 および 2-13 に、それぞれ $\alpha=0.45$ および $\alpha=0.49$ の場合の固定点(69.9, 0)における(a)、(b)、(f)、および(i)の圧力変動の値を示す。壁面に沿った方向に音波が伝搬する場合でも壁面に対し垂直方向に音波が伝搬する場合と同様な傾向が観察される。図 2-12 と図 2-13 を比較した場合においても、 α の値を 0.5 に近づけることによってレファレンスデータとの位相の違いが小さくなっていることが分かる。

2・3・1・2 空間解像度を低下させた場合(最小格子間隔 0.05)

空間解像度を低下させた場合の計算への影響を把握するため、図 2-14 および 2-15 にそれぞれ $\alpha=0.45$ および $\alpha=0.49$ の場合の固定点(0, 69.9)における(a)、(b)、(f)、および(i)の圧力変動の値を示す。まず、 $\alpha=0.45$ の場合、計算される音波は境界近傍のスキームの組み合わせにほとんどよ

らないことがわかった。一方、 $\alpha=0.49$ の場合には空間解像度を低下させるほど、空力音の計算結果は境界近傍のスキームの組み合わせに影響を顕著に受けることがわかった。

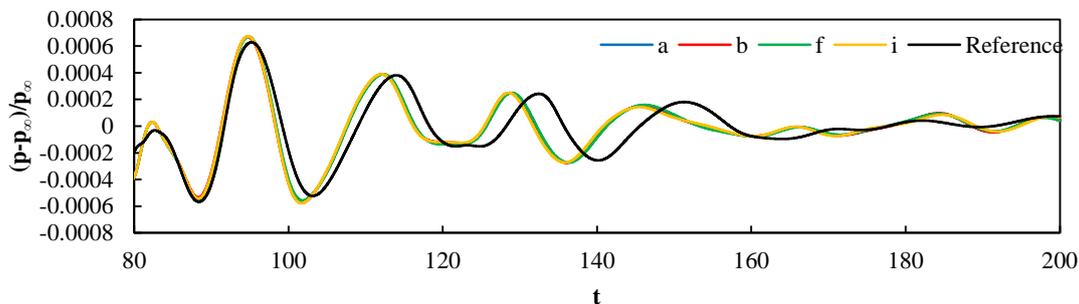


Fig.2-10 Acoustic waves observed at (0,69.9) in the case of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$). Acoustic waves calculated by each scheme are almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

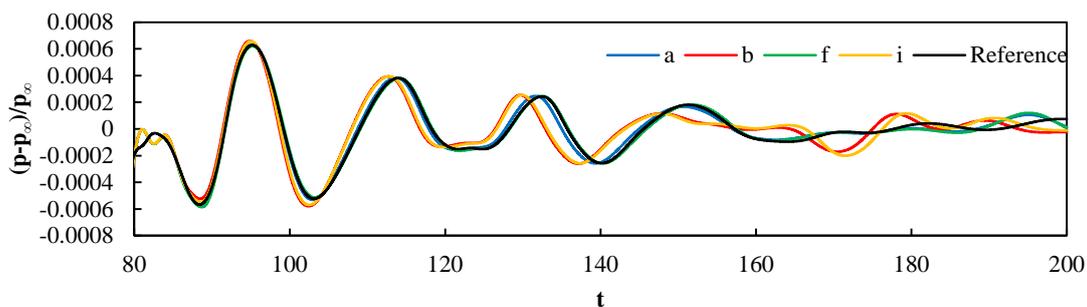


Fig.2-11 Acoustic waves observed at (0,69.9) in the case of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$). Case (a) and (f) are almost the same, but they are different from Case (i). Case (b) is almost the same as Case(i). (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese))

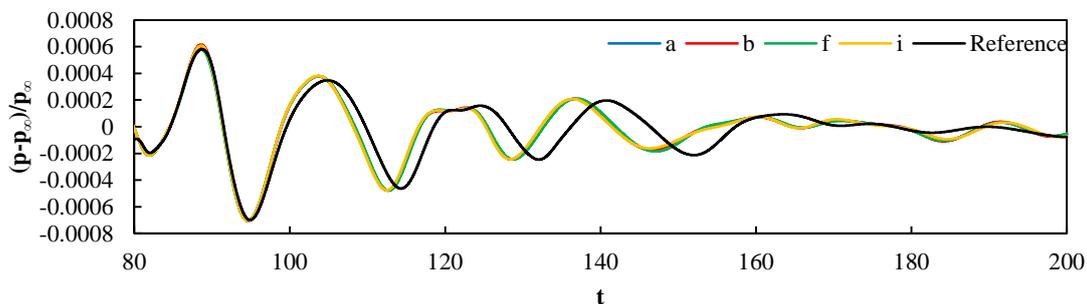


Fig.2-12 Acoustic waves observed at (69.9, 0) in the case of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$) and reference data. Acoustic waves calculated by each scheme are almost the same. (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese))

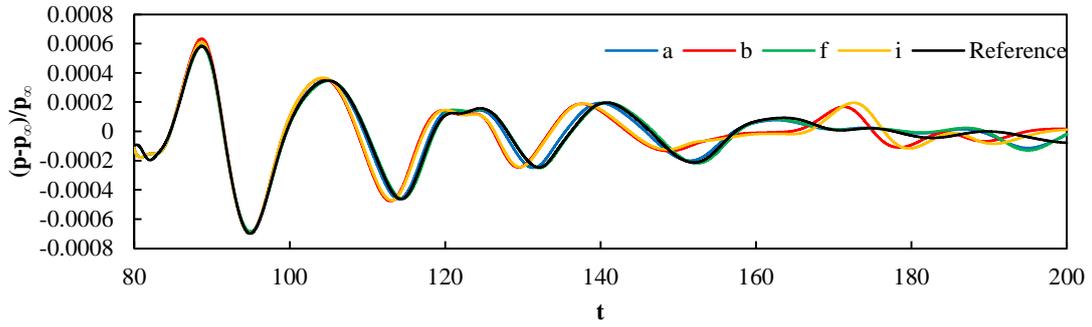


Fig.2-13 Acoustic waves observed at (69.9, 0) in the case of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$) and reference data. Case (a) and (f) are almost the same, but they are different from Case (i). Case (b) is almost the same as Case(i). Case (a) and (f) are almost the same, but they are different from Case (i). Case (b) is almost the same as Case(i) (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

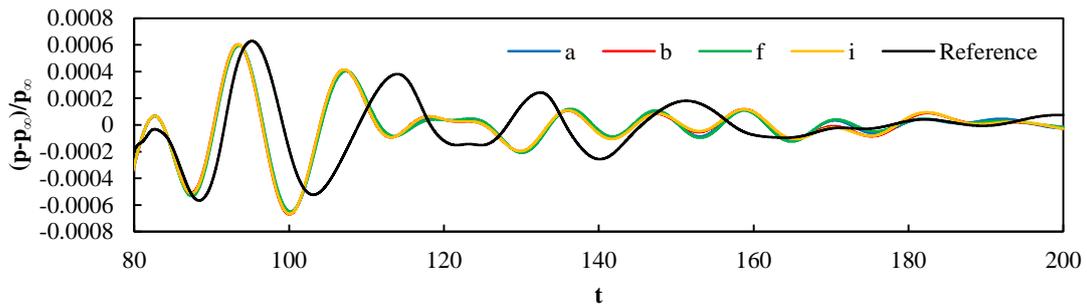


Fig.2-14 Acoustic waves observed at (0,69.9) in the case of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=421 \times 211$, $\Delta x_{\min}=0.05$). Acoustic waves calculated by each scheme are almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

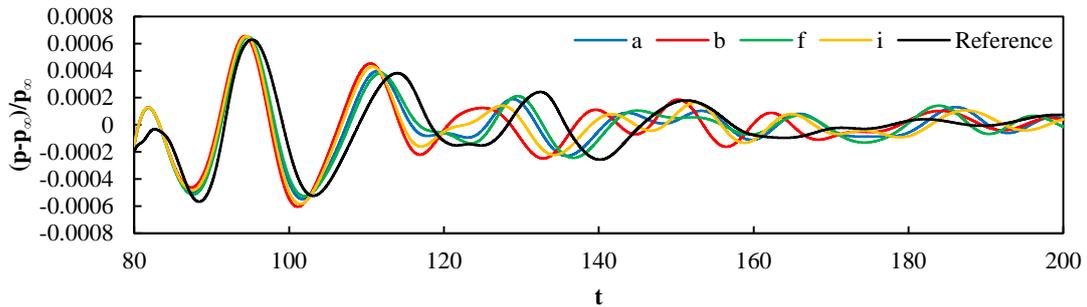


Fig.2-15 Acoustic waves observed at (0,69.9) in the case of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=421 \times 211$, $\Delta x_{\min}=0.05$). Case (a) and (f) are almost the same, but they are different from Case (b) (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

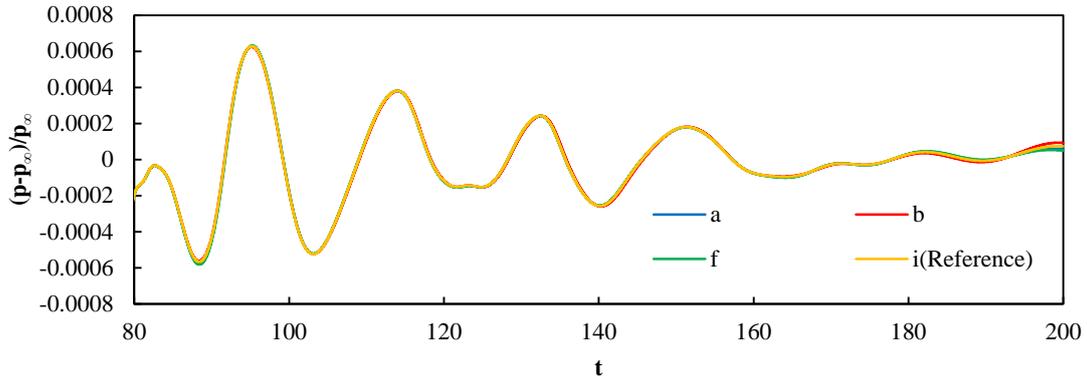


Fig.2-16 Acoustic waves observed at (0,69.9) in the case of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=1681 \times 841$, $\Delta x_{\min}=0.0125$). Case (a), (b), (f) and (i) are almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

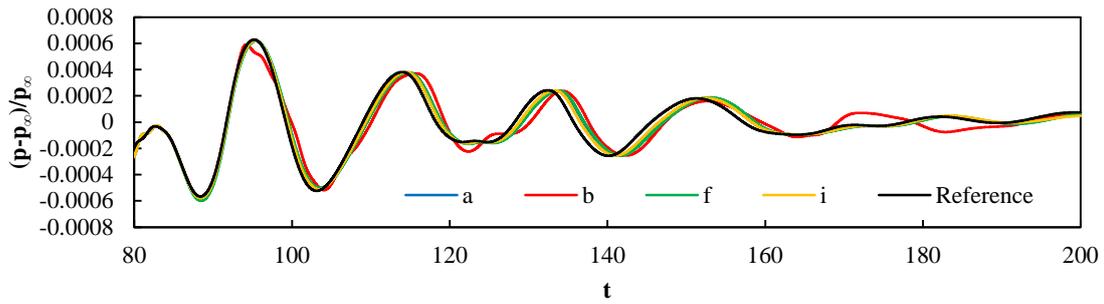


Fig.2-17 Acoustic waves observed at (0,69.9) in the case of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=1681 \times 841$, $\Delta x_{\min}=0.0125$). Case (a), (f) and (i) are almost the same, spurious acoustic waves are observed in Case (b).

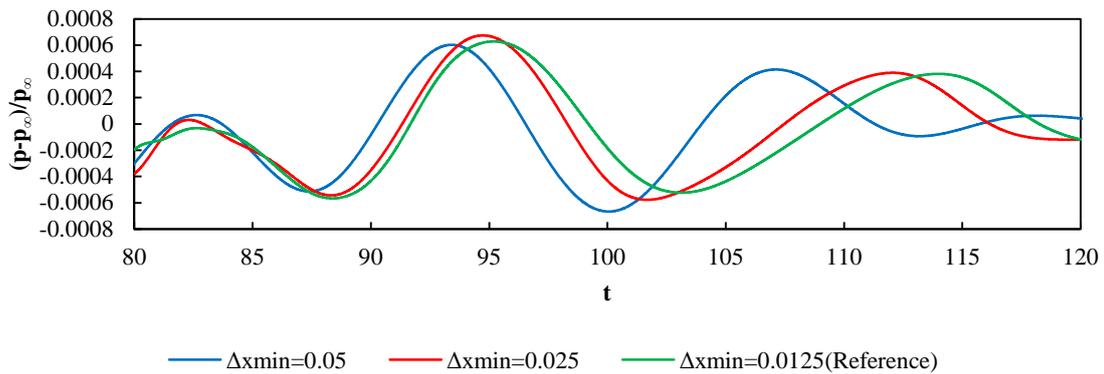
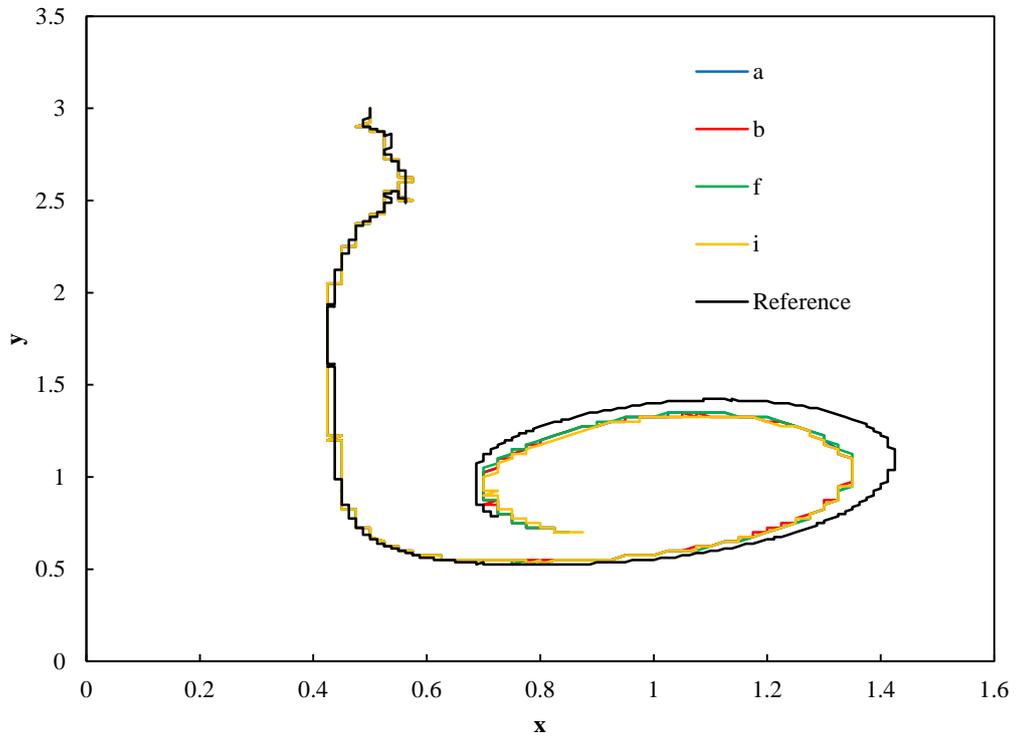
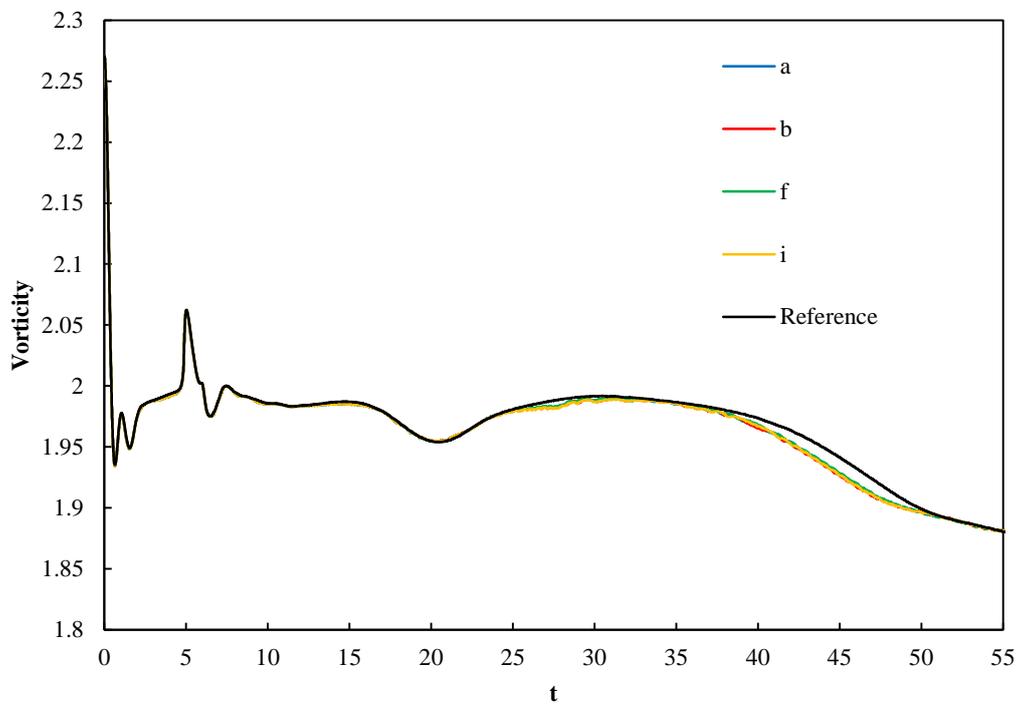


Fig.2-18 Acoustic waves observed at point (0, 69.9) using combination schemes (i)with compact filter's free parameter $\alpha=0.45$. In this calculation condition, minimum spatial interval should be less than 0.025(This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

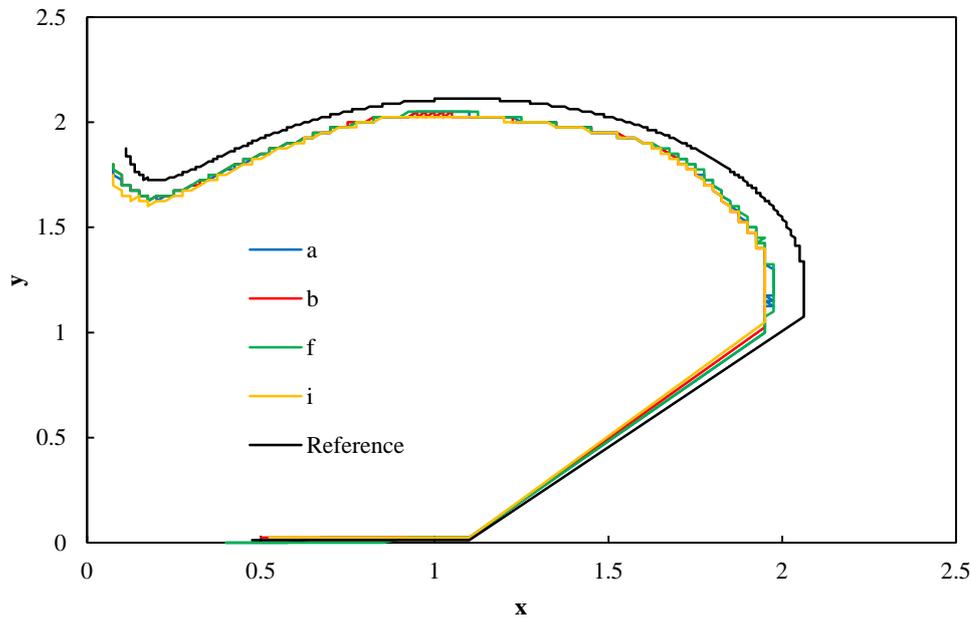
(1)



(2)



(3)



(4)

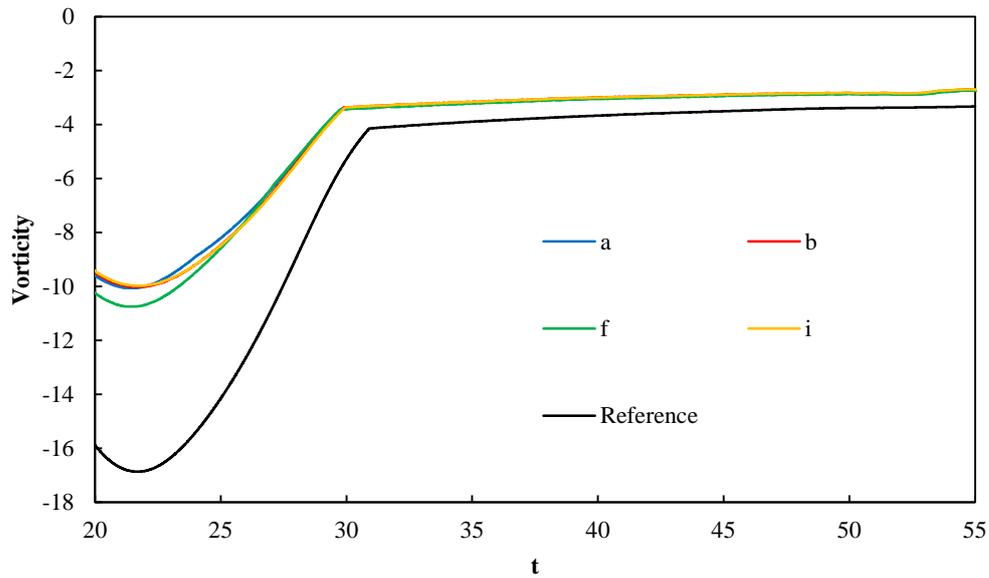
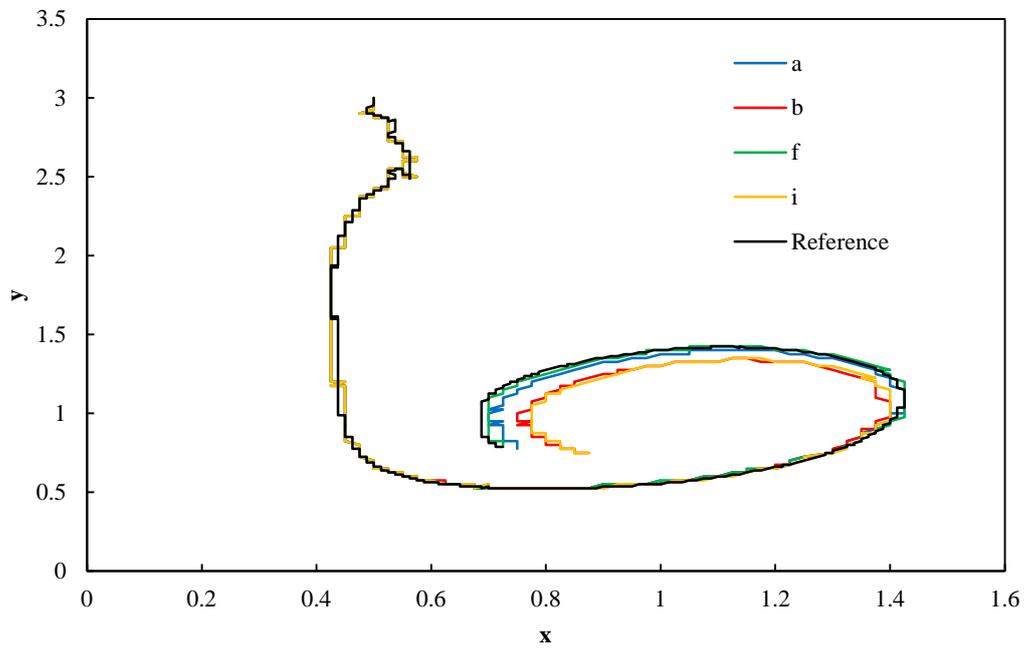
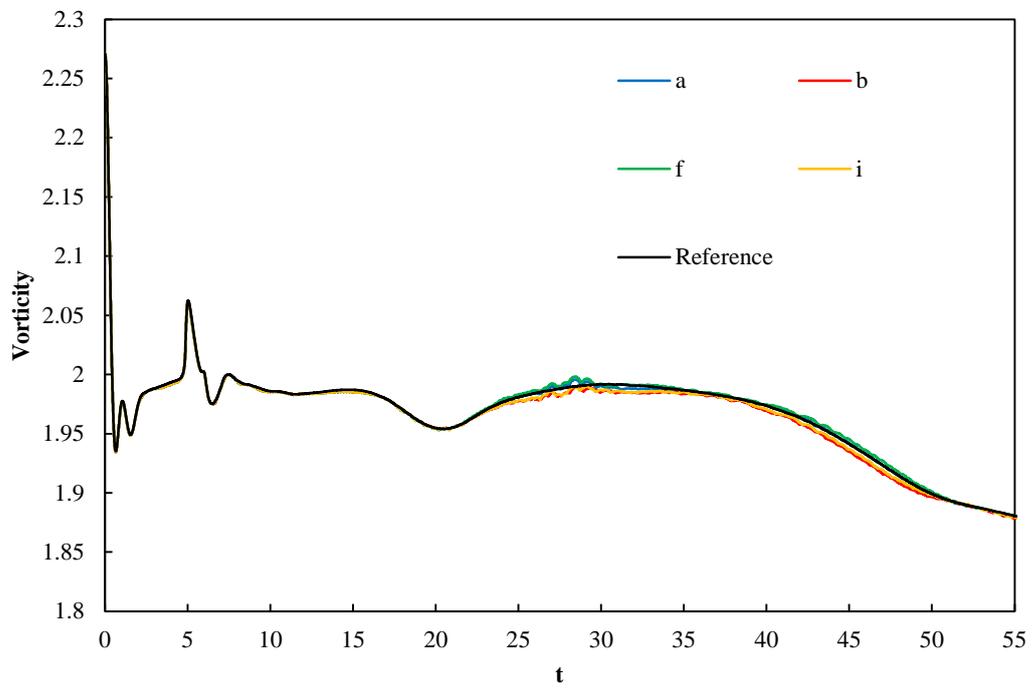


Fig.2-19 Vortex dipole and secondary vortex in the condition of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$) (1)The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (2)Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (3) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (4) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$. Calculation results are almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

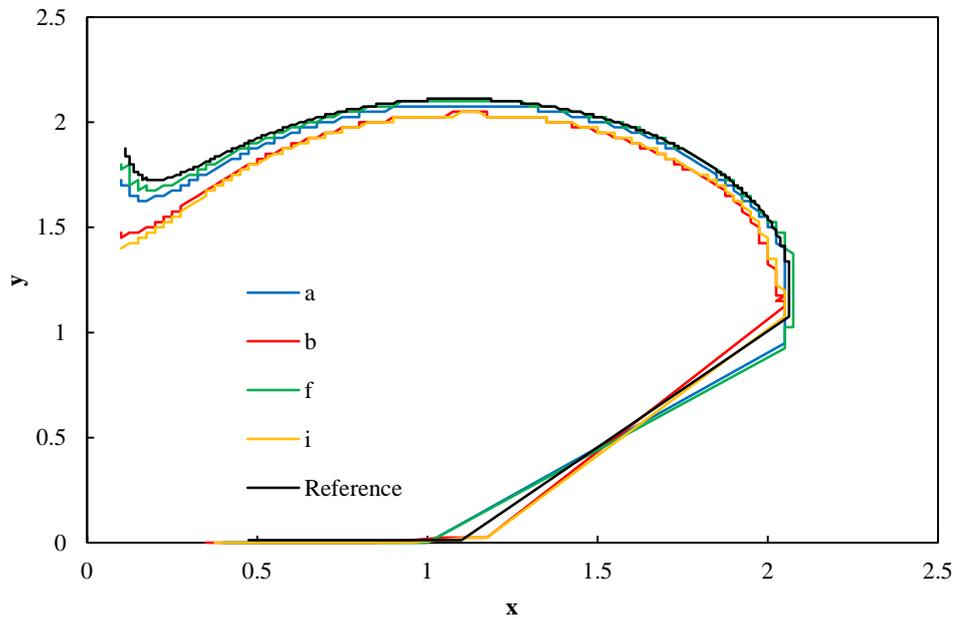
(1)



(2)



(3)



(4)

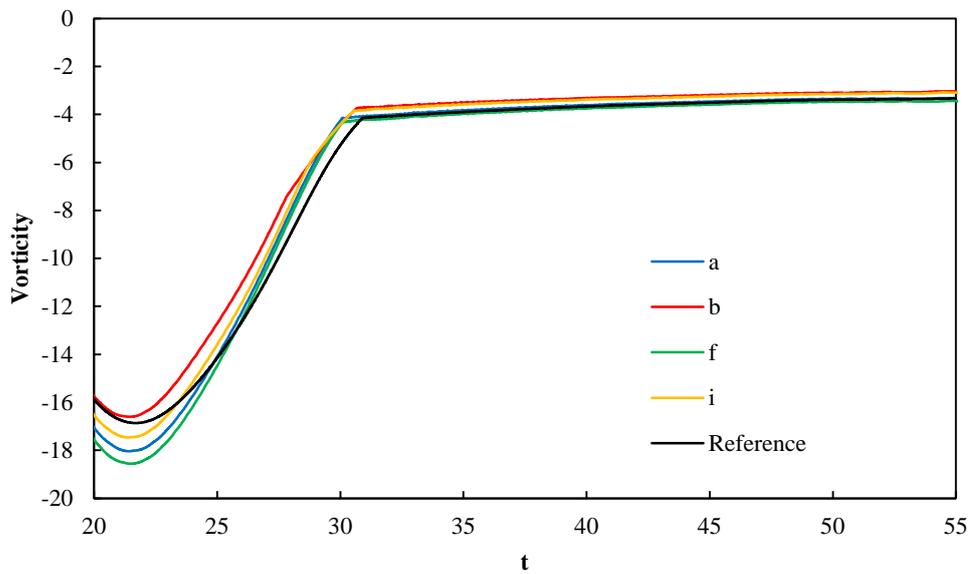
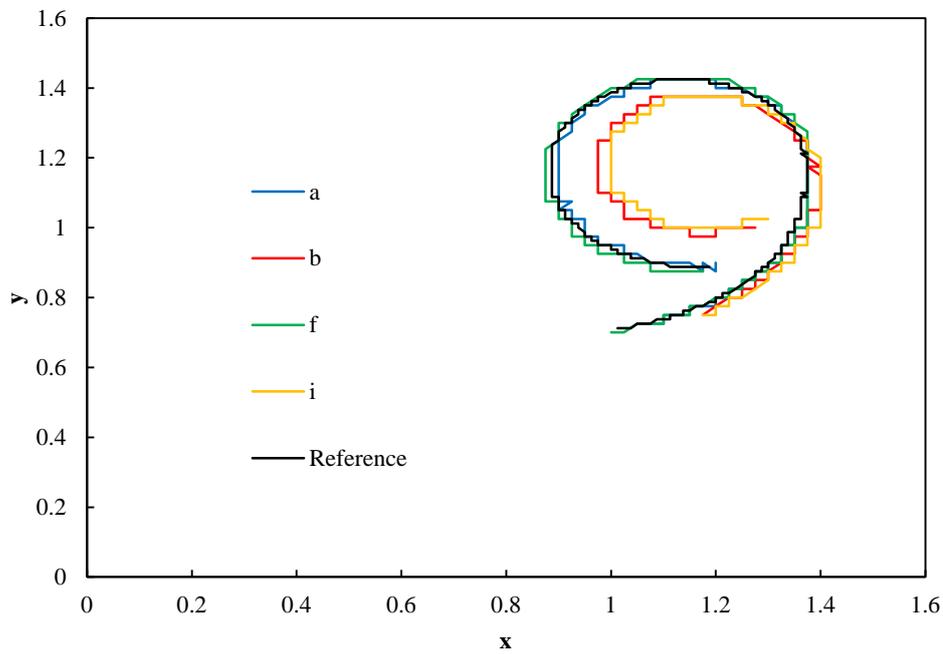


Fig.2-20 Vortex dipole and secondary vortex in the condition of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$)
(1)The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (2)Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity, (3) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (4) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity. Time evolution of secondary vortex's vorticity calculated by each scheme is obviously different. On the other hand, the vorticity of vortex dipole is almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

(1)



(2)

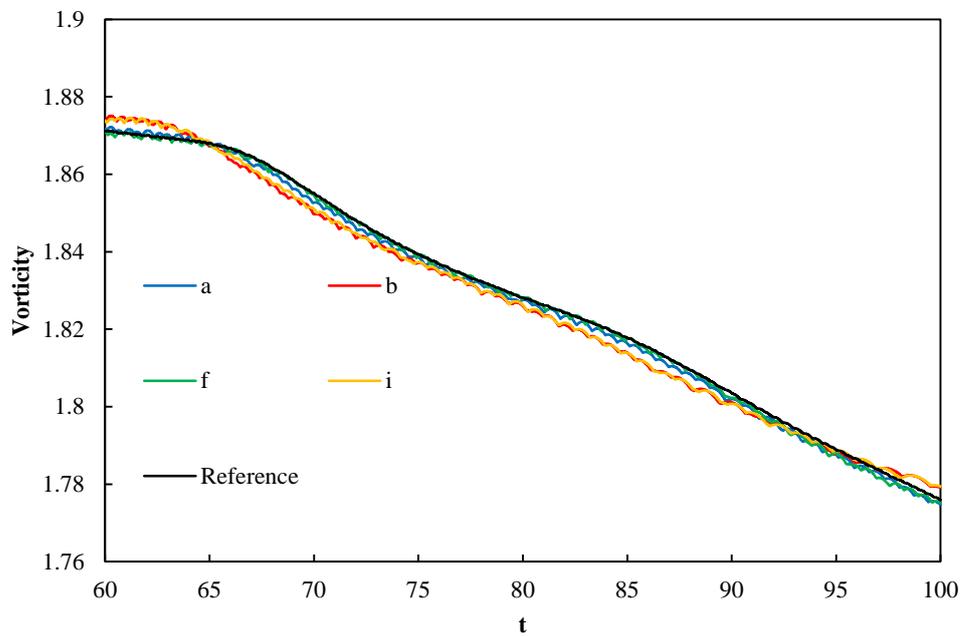


Fig.2-21 The plot of (1) position of vortex dipole's maximum vorticity and (2) Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity from $t=60$ to $t=100$ in the condition of compact filter's free parameter $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$). Each maximum vorticity calculated by each scheme is almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

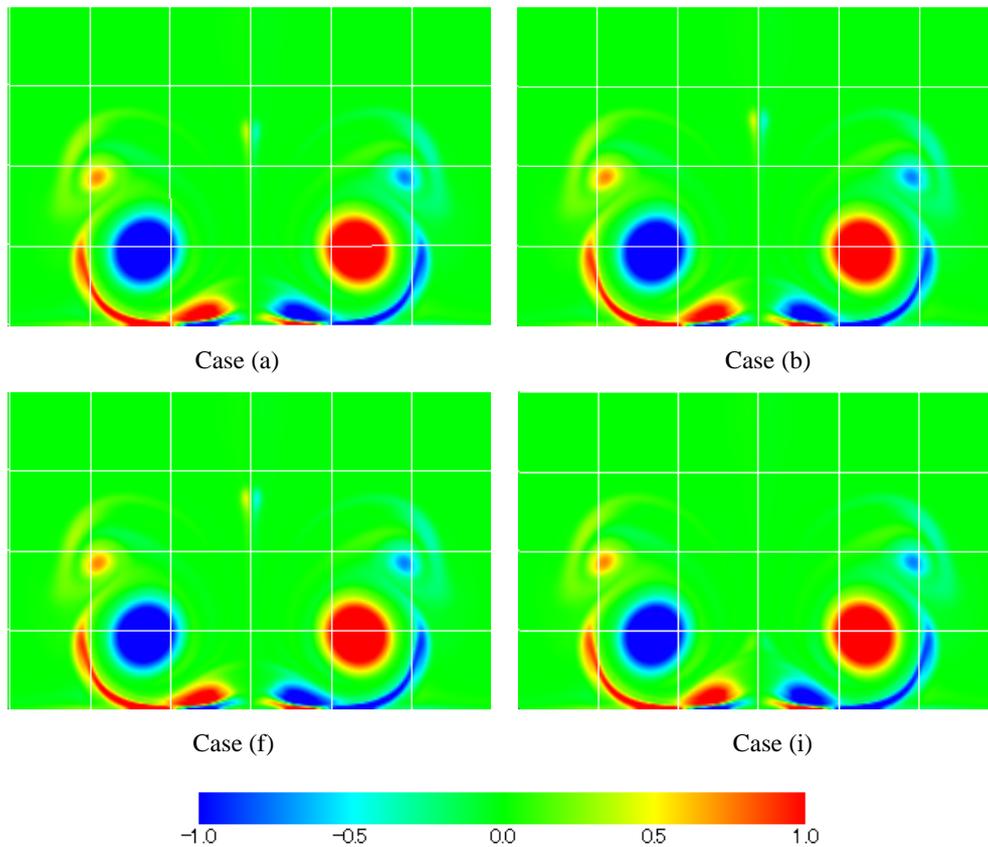


Fig.2-22 Vorticity field generated by vortex dipole rebound from a wall at $t=100$ in the case of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$). Each vorticity field calculated by each scheme is almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

2・3・1・3 空間解像度を増加させた場合(最小格子間隔 0.0125)

図 2-16 および 2-17 に, 空間解像度を増加させた場合の空力音の計算結果および図 2-18 に空間解像度による空力音の位相差への影響を示す. 図 2-16 に示すように, $\alpha=0.45$ にした場合は, (a), (b), (f), および(i)の結果はほとんど一致しており, 境界近傍のスキームの組み合わせにはほとんどよらないことが分かる. また, 図 2-17 に示すように, $\alpha=0.49$ の場合は, (a), (f)および(i)の結果はほとんど一致している. この結果は $\alpha=0.45$ で計算を行った結果であるレファレンスデータともよく一致しており, 十分に空間解像度を上げた場合は $\alpha=0.45$ と 0.49 は同じ結果となると考えられる. 一方で, (b)の場合では, 特異な圧力変動を生じており, (b)の境界近傍のスキームの組み合わせは $\alpha=0.49$ では不適切であると考えられる.

2.3.2 空力音発生原因としての渦変形の分析

2.3.2.1 最小格子間隔 0.025

はじめに, 最小格子間隔 $\Delta x_{\min}=0.025$ における分析を行う. $80 < t < 130$ で $(0, 69.9)$ および $(69.9, 0)$ で観測される音波は, $\alpha=0.45$ の場合にはほとんどスキームの組み合わせの影響を受けないが,

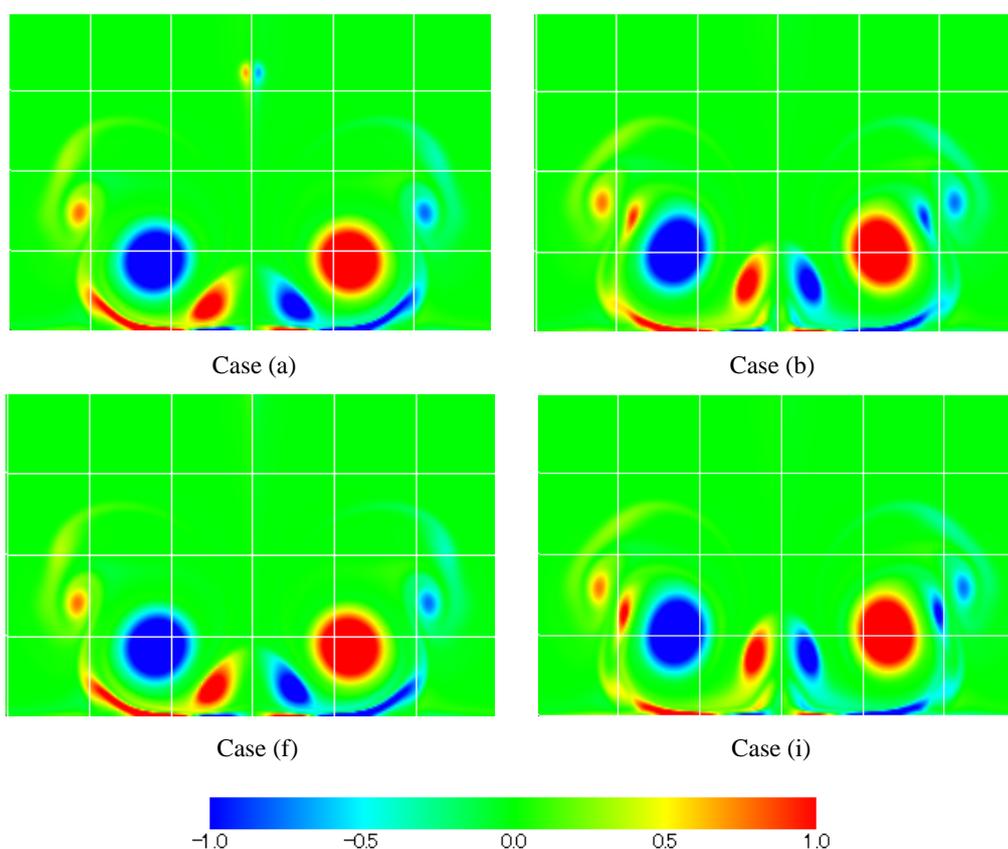
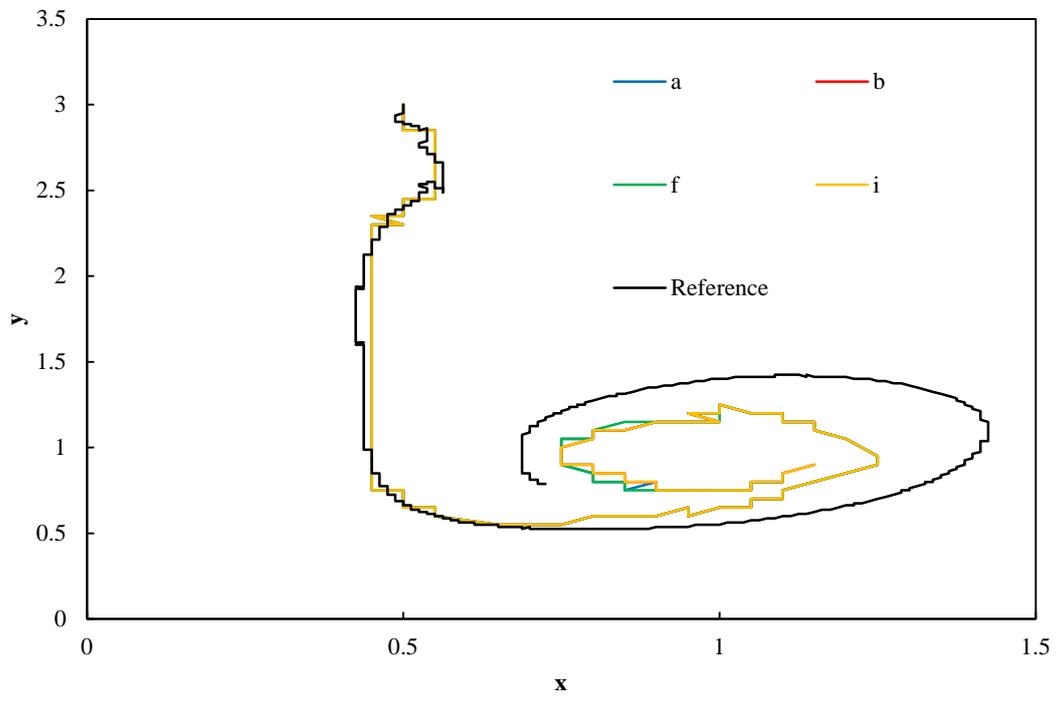


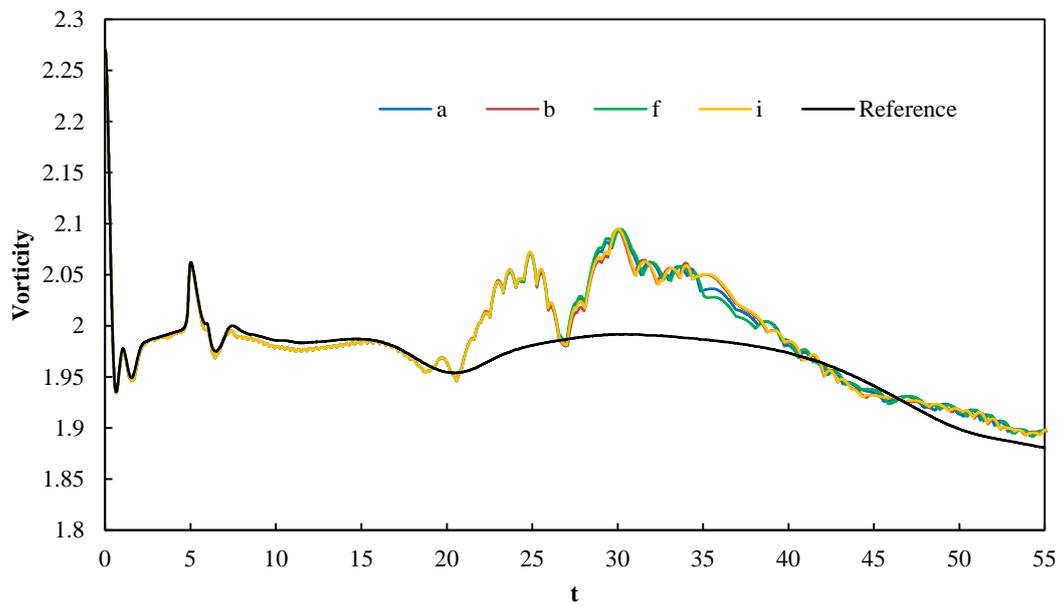
Fig.2-23 Vorticity field generated by vortex dipole rebound from a wall at $t=100$ in the case of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=841 \times 421$, $\Delta x_{\min}=0.025$). Case (a) and (f) are almost the same, but they are different from Case (i). Case (b) is almost the same as Case(i) (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

$\alpha=0.49$ の場合にスキームの組み合わせに影響を受けることについての原因を、渦変形をもとに分析する。本研究では音速で規格化しているため、 $80 < t < 130$ で $(0, 69.9)$ および $(69.9, 0)$ で観測される音波は、 $(0, 0)$ 近傍にある双極渦から $10 < t < 60$ の時間内に発生していると想定される。そのため、 $10 < t < 60$ における双極渦の渦変形について調査を行う。図 2-19 に、コンパクトフィルタのフリーパラメータ $\alpha=0.45$ の場合における(1)双極渦の壁面衝突における双極渦の渦度の絶対値が最大となる位置の時間変化($t=0$ から $t=55$ まで)、を示す。双極渦の壁面衝突による渦運動を取り扱った先行研究の多くで、双極渦の位置の時間変化を用いた解析を行っているため、相対比較ができ、異常な数値計算結果となっている場合に判断しやすいため本研究においてもこの指標を用いた。(2)双極渦の最大渦度の時間変化、(3)双極渦の壁面衝突に伴い壁面上にできる二次渦の渦度の絶対値が最大となる位置の時間変化、および(4)二次渦の渦度の絶対値が最大となる渦度の時間変化を示す。ただし、本研究においては、双極渦の壁面への衝突に伴い壁面近傍で発生する渦を二次渦と定義する。この二次渦は壁面近傍で渦度の絶対値が大きくなったのち双極渦の運動

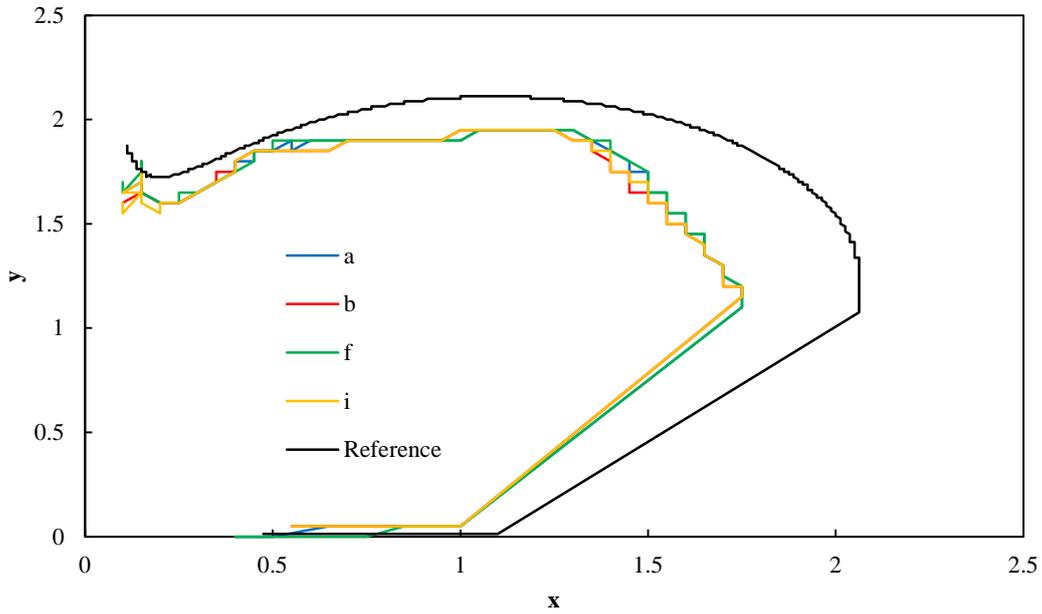
(1)



(2)



(3)



(4)

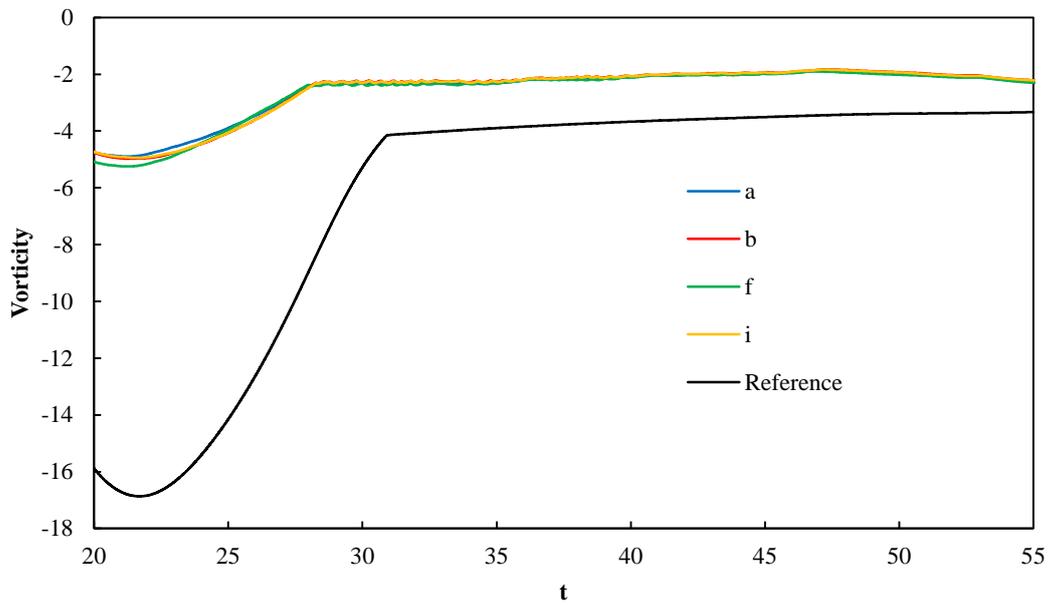


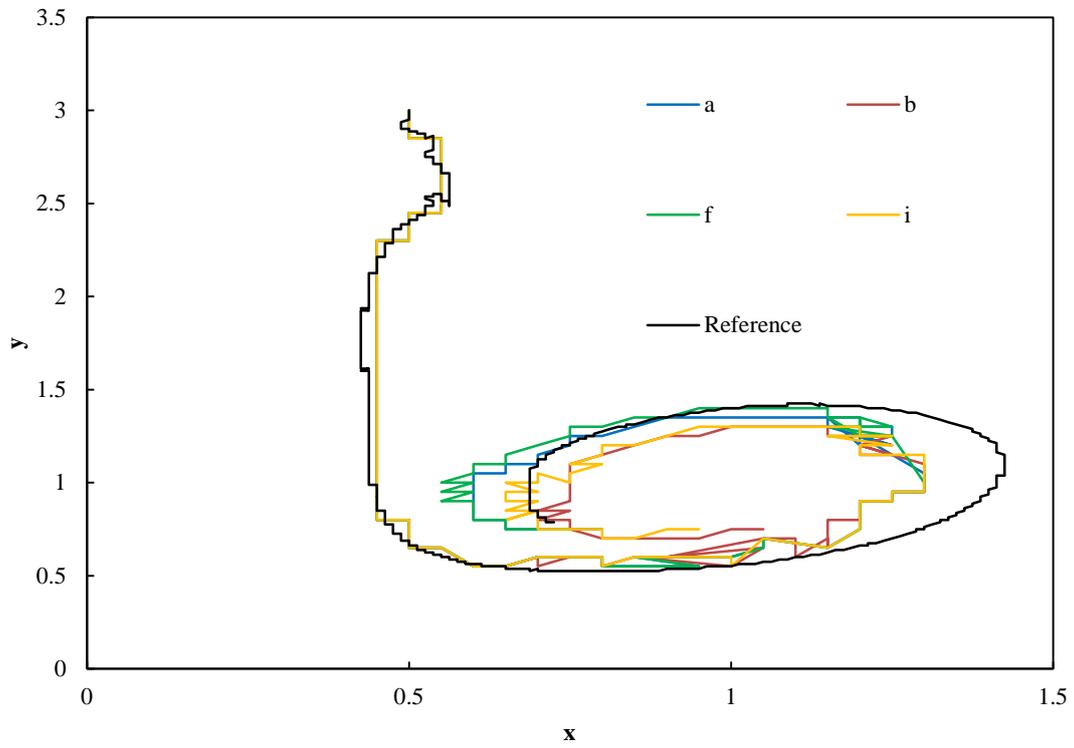
Fig.2-24 Vortex dipole and secondary vortex in the case of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=421 \times 211$, $\Delta x_{\min}=0.05$). (1)The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (2)Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity, (3) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (4) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity. Secondary vortex's vorticity is computed weaker than reference data (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

とともに引き伸ばされ巻き上がり壁面近傍の渦度の絶対値が次第に低下していく。そのため、二次渦の渦度の絶対値の最大となる位置が壁面近傍から巻き上がった部分に瞬時に変化するため、(3)のグラフ中に直線部分が生じる。この直線部分は、二次渦が直線状に移動することを示しているわけではないことに注意いただきたい。また、図 2-20 に、 $\alpha=0.49$ の場合について示す。

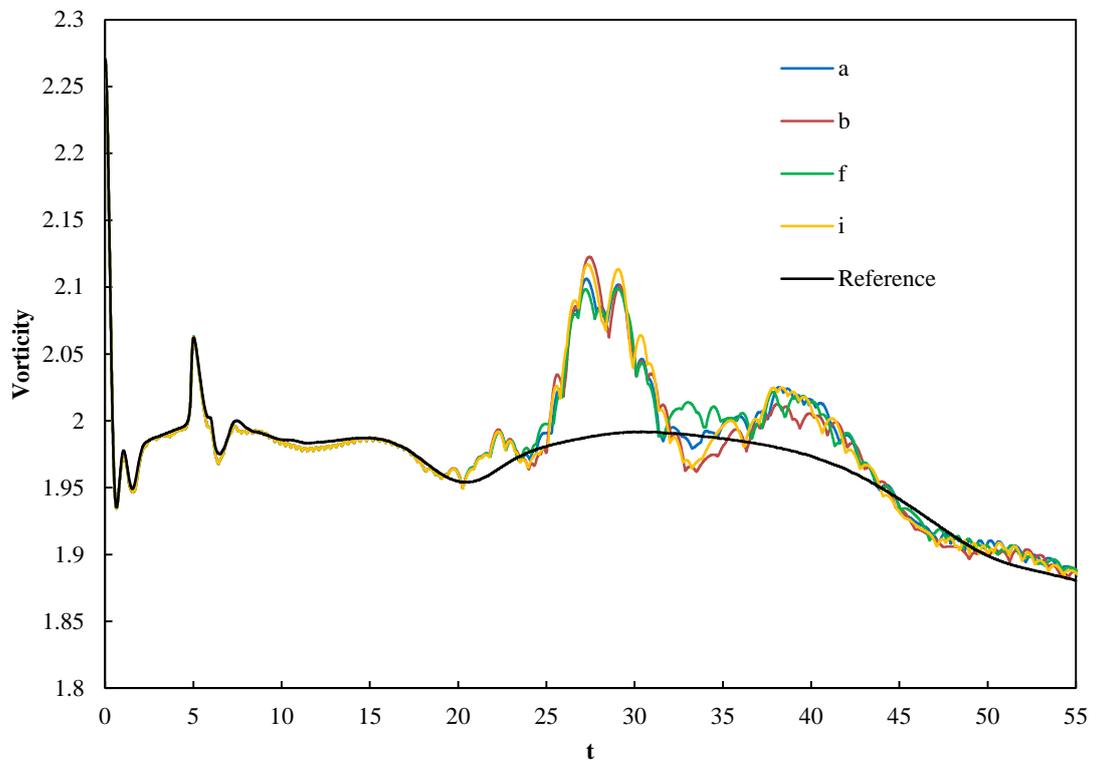
コンパクトフィルタのフリーパラメータ $\alpha=0.45$ の場合、図 2-19(1)~(4)に示す双極渦および二次渦の挙動の計算結果では、スキームの組み合わせによってほとんど差が生じないことがわかる。(4)に着目すると、(f)のスキームの組み合わせを用いた場合では、(i)のスキームの組み合わせを用いた場合と比較して、壁面上に発生する二次渦の最小渦度の絶対値がわずかに大きく計算されることがわかる。このことから、高波数領域において、増幅が生じていると考えられる。(a)、(b)のスキームでは、(i)のスキームを用いた場合と比較して二次渦の渦度の絶対値はほぼ同じである。このことから、 $\alpha=0.45$ でよく除去される波数領域においては、増幅は生じないと考えられる。

一方、 $\alpha=0.49$ の場合、スキームの組み合わせによって計算結果に明確な差が生じることがわかる。(1)について、(i)および(b)のスキームの組み合わせを用いた場合が小さく回り、(a)、(f)のスキームを用いた場合には(i)よりも大きく回ることが分かった。(2)についてはいずれのスキームの組み合わせを用いた場合においてもほとんど差が観察されない。(3)について、(i)および(b)のスキームでは二次渦は小さく回り、(a)および(f)のスキームは(i)よりも大きく回る。(4)について、(f)、(a)のスキームを用いた場合は(i)よりも二次渦の最小渦度の絶対値が大きく、(b)のスキームは(i)のスキームより二次渦の最小渦度の絶対値が小さくなる。このように、 $\alpha=0.49$ の場合には、高波数領域のみを除去するため、高波数領域で生じた境界スキームと 6 次精度コンパクトスキームによる増幅の影響を十分に除去できない。そのため、各境界スキームと 6 次精度コンパクトスキームを組み合わせることによって生じた高波数領域での増幅の違いの影響を強く受ける。特に壁面上にできる二次渦の強さに大きい影響を与え、そのことが双極渦と二次渦による渦のまきあがりの軌跡に影響を与えること、さらにこの特性が、その後の渦の挙動に対して決定的な影響を与えることがわかった。このことから、境界近傍のスキームの影響により、壁面上に生成される二次渦の渦度の違いを生じ、さらに双極渦から分かれた渦と二次渦とのペアの渦運動に違いを生むことで渦度分布が影響を受け、これが原因となって発生する空力音に違いが発生したものと考えられる。次に、 $t>130$ で(0, 69.9)および(69.9, 0)で観測される音波は $\alpha=0.49$ の場合にスキームの組み合わせに強い影響を受けることについての原因を分析する。本研究では音速で規格化しているため、 $t>130$ で(0, 69.9)で観測される音波は、(0, 0)近傍にある双極渦から $t>60$ の時間内に発生していると想定される。図 2-21 に、 $\alpha=0.49$ における $t=60$ から $t=100$ までの(1)双極渦の最大渦度の位置の時間変化、および(2)双極渦の最大渦度の時間変化を示す。(a)および(f)のスキームではほぼ同じ軌跡となったが(i)とは異なる軌跡となった。(b)のスキームでは(i)とほぼ同じ軌跡となった。また、双極渦の最大渦度については、スキームの組み合わせによらず、ほぼ同じ時間変化となることが分かった。

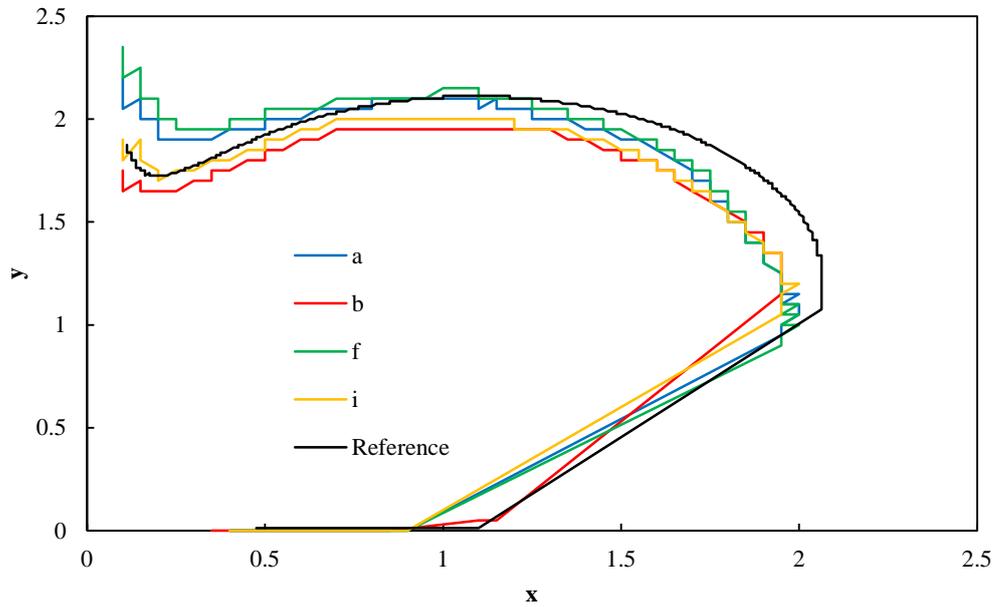
(1)



(2)



(3)



(4)

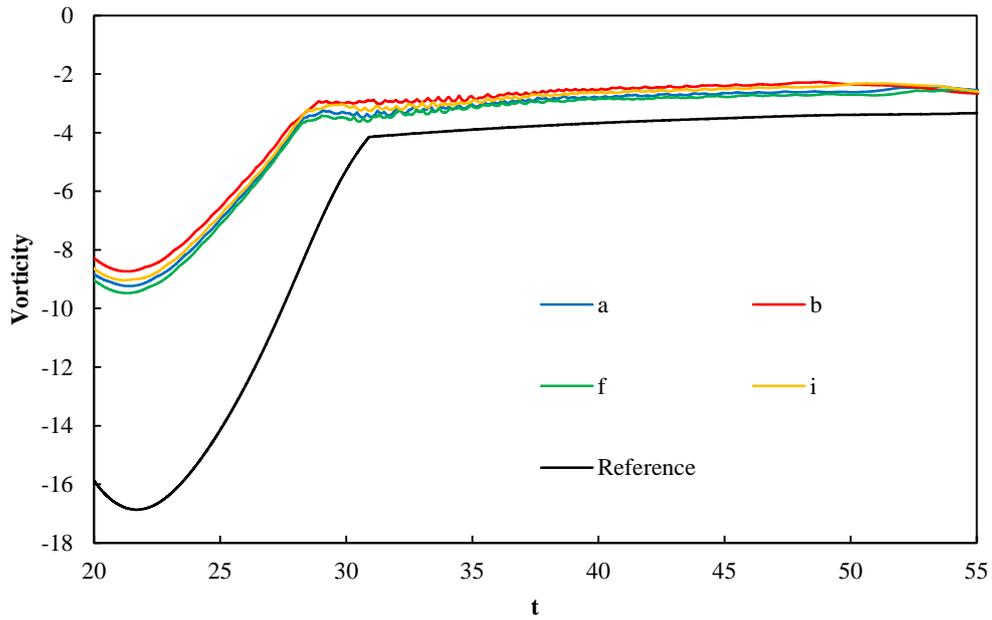
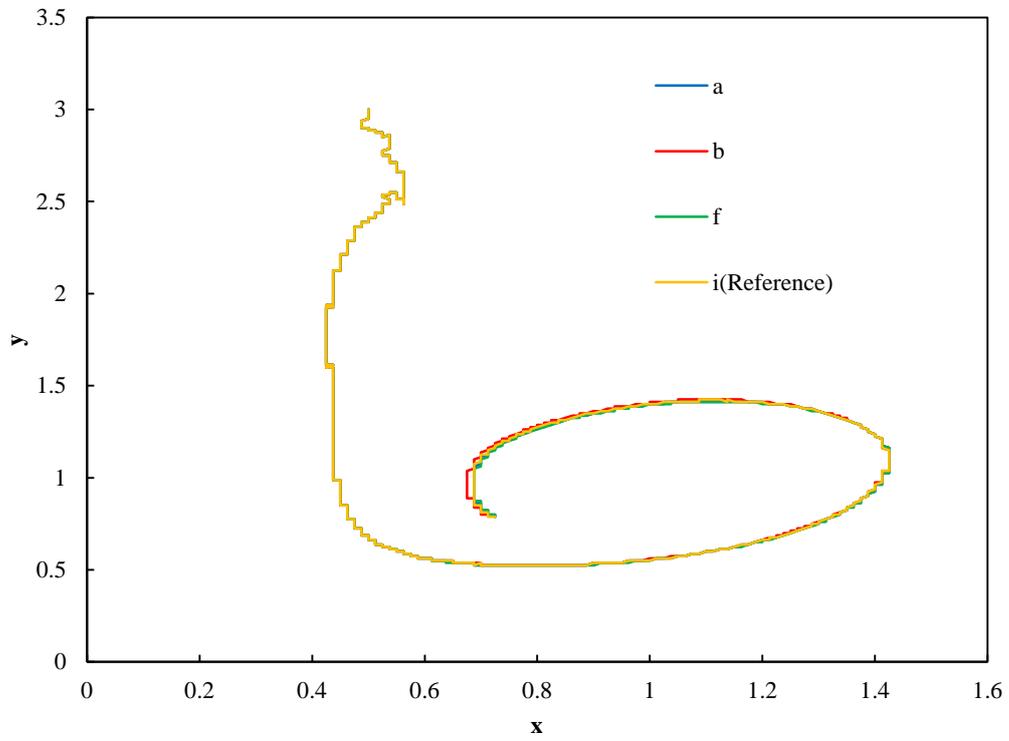
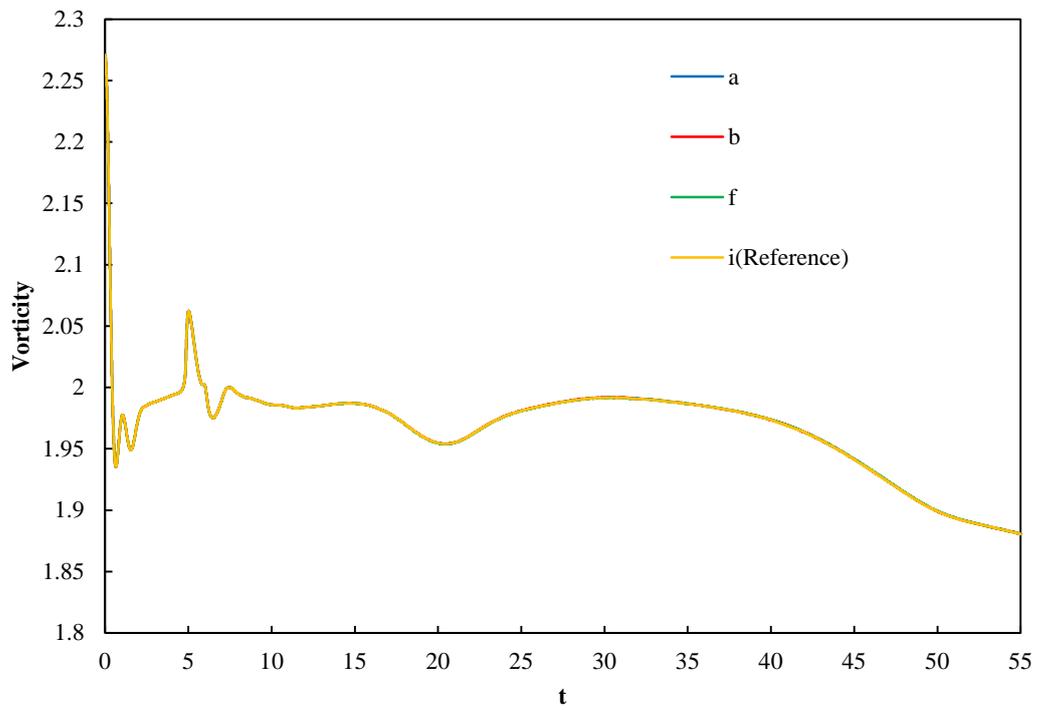


Fig.2-25 Vortex dipole and secondary vortex in the case of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=421 \times 211$, $\Delta x_{\min}=0.05$). (1) The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (2) Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity, (3) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (4) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity. Time evolution of secondary vortex's vorticity calculated by each scheme is obviously different. On the other hand, the vorticity of vortex dipole is almost the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

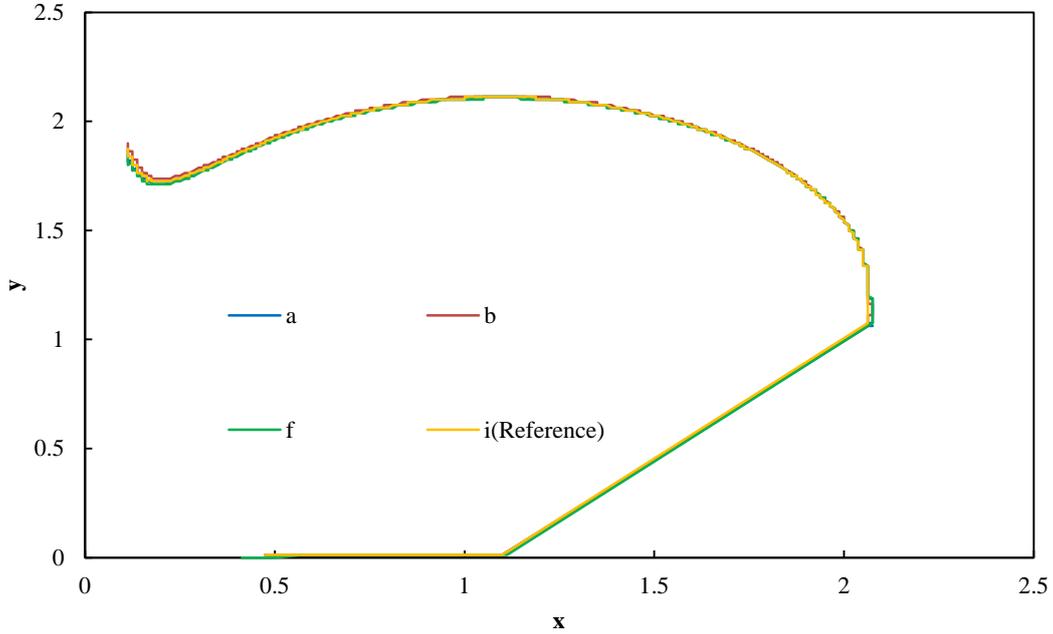
(1)



(2)



(3)



(4)

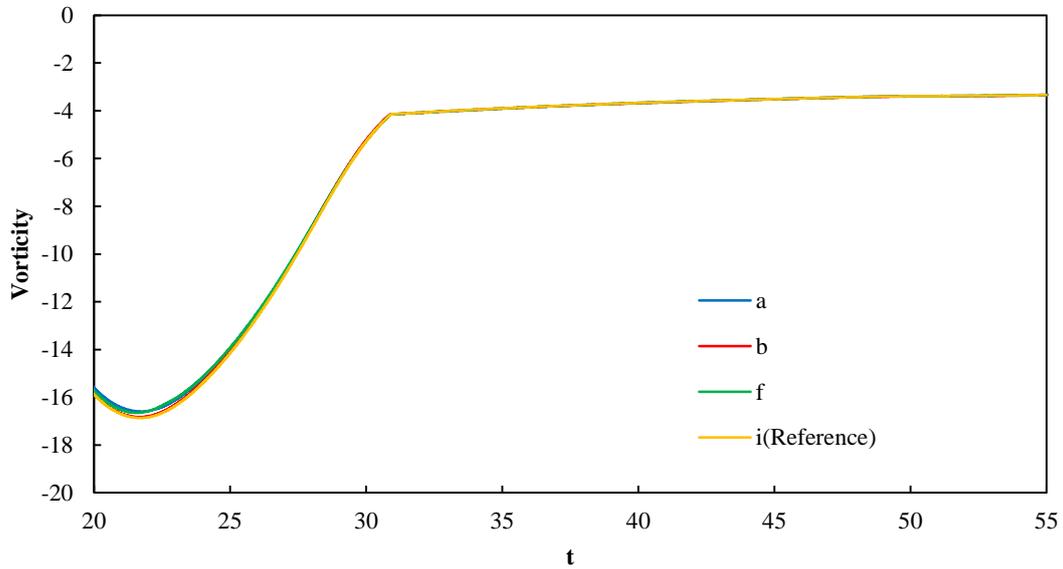
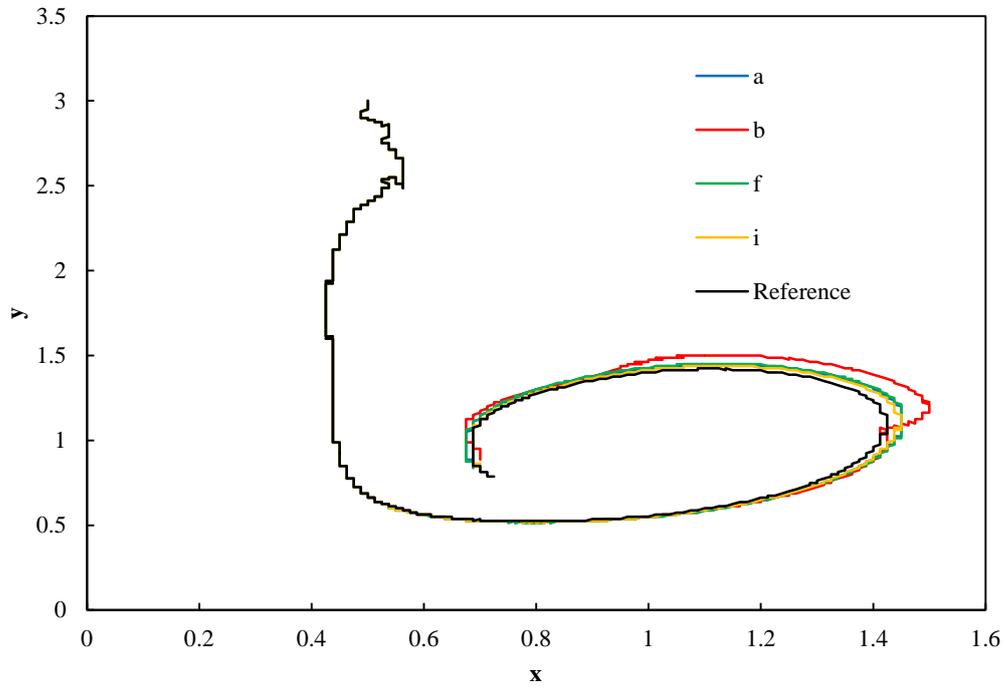
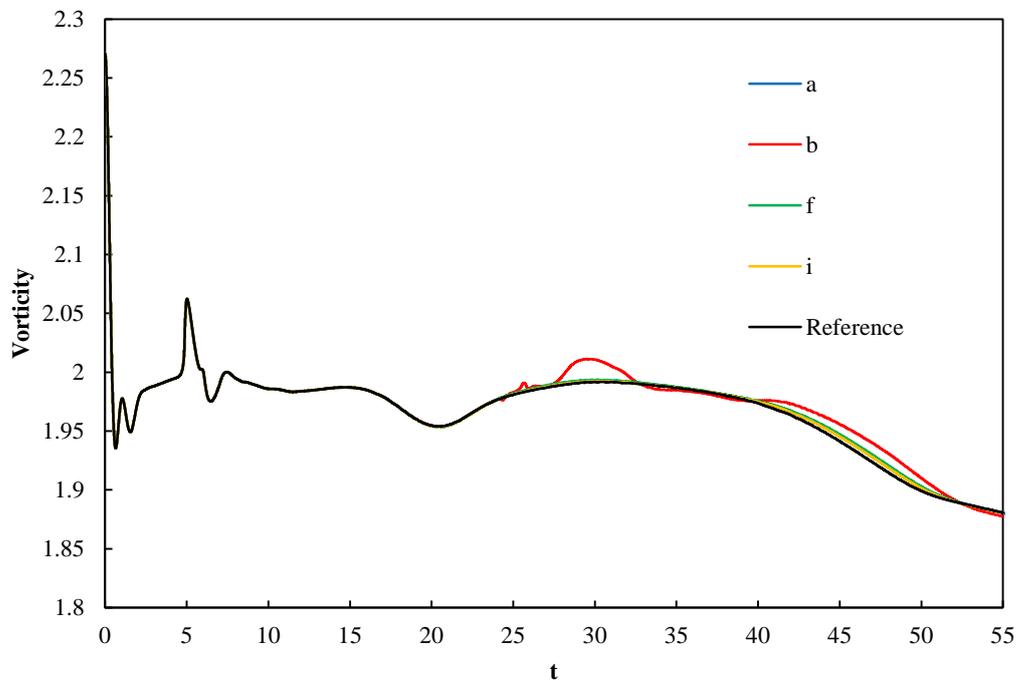


Fig.2-26 Vortex dipole and secondary vortex in the case of $\alpha=0.45$, ($N_x \times N_y=1681 \times 841$, $\Delta x_{\min}=0.0125$)
(1)The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (2)Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity, (3) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (4) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity. The results computed by each scheme are the same (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

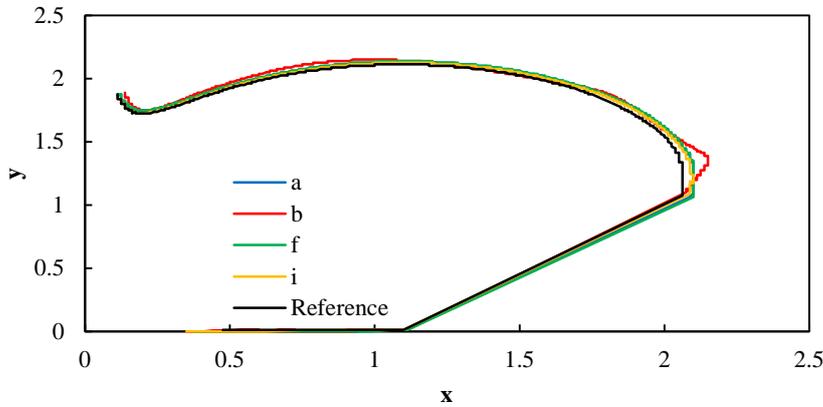
(1)



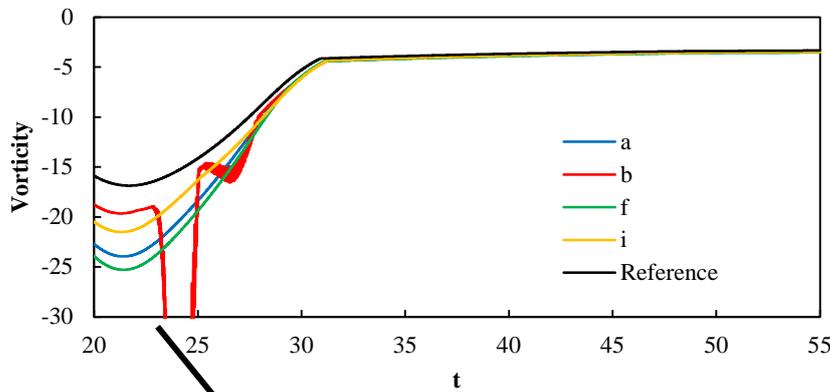
(2)



(3)



(4)



(5)

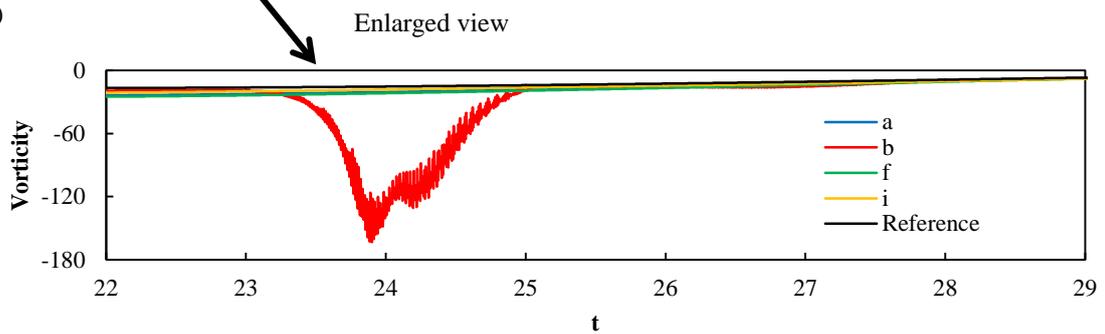


Fig.2-27 Vortex dipole and secondary vortex in the case of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=1681 \times 841$, $\Delta x_{\min}=0.0125$)
(1)The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (2) Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity, (3) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (4) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity. (5) The enlarged view of fig(4) in the time from $t=22$ to $t=29$. In case of using (b), spurious vorticity is caused. (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

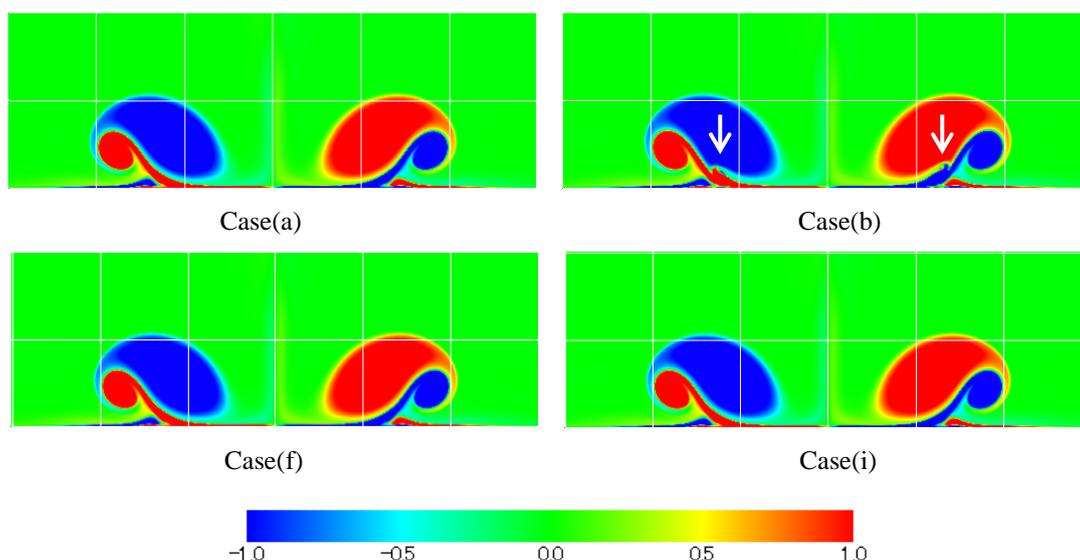


Fig.2-28 Vorticity distribution in the case of $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y=1681 \times 841$, $\Delta x_{\min}=0.0125$). Case(b) makes spurious vortex at arrows (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2015), Transactions of the JSME(in Japanese)).

このことから、境界コンパクトスキームの違いにより高波数領域での修正波数の特性に違いが生じるのは境界近傍のみに限られるため双極渦の最大渦度はスキームの組み合わせに依存しなかったのだと考えられる。一方で、双極渦と二次渦とのペアの運動に関しては、壁面上で発達する二次渦の影響を強く受けるため、境界コンパクトスキームの違いによる高波数領域での修正波数の特性の違いの影響を受けると考えられる。t=60 から t=100 までの渦運動に影響があり、そのことで図 2-13 に示す t=130~t=170 までの音波の違いが発生したと考えられる。

図 2-22 に、 $\alpha=0.45$ の場合の t=100 における渦度分布を、図 2-23 に、 $\alpha=0.49$ の場合のそれをそれぞれ示す。なお、渦度分布の比較を容易にするため、x 方向および y 方向にそれぞれ 1 の間隔で白線を引いた。図 2-22 より、 $\alpha=0.45$ の場合では、全ての条件において、ほぼ同じ渦度分布となることがわかる。他方、図 2-23 の $\alpha=0.49$ の場合をしてみると、(a)と(f)はほぼ同じ渦度分布となり、また(b)と(i)でほぼ同じ渦度分布となる一方、前者と後者を比較すると、座標(0,0)近傍の渦度分布に顕著な差が観察される。これは、 $\alpha=0.49$ でのカットオフ波数が大きいため、高波数領域におけるスキーム特性の差が二次渦の強さに影響を及ぼすためである。

2.3.2.2 空間解像度を低下させた場合(最小格子間隔 0.05)

図 2-24 に示すように、 $\alpha=0.45$ では境界スキームによる差異は観察されなかった。このことは最小格子間隔 0.025 の場合と同様であり、 $\alpha=0.45$ では境界スキームによる差異は観察されないことは空間解像度によらずに言えることであると考えられる。しかしながら、特に二次渦の渦度の

絶対値に関してはレファレンスデータとは大きく異なる結果となった。これは、壁面近傍の格子間隔が大きすぎて、境界コンパクトスキームの解像度では十分に二次渦をとらえることができなかったためであると考えられる。さらに、双極渦の渦度は $t=20\sim 40$ でレファレンスデータとは大きく異なる結果となった。次に図 2-25 に示すように、 $\alpha=0.49$ の場合においても二次渦の最小渦度の絶対値は格子解像度を低下させると小さくなり、レファレンスデータとは大きな差が観察された。 $\alpha=0.45$ の場合と比較すると、二次渦の渦度の絶対値はレファレンスデータに近づいている。これは、 $\alpha=0.49$ では $\alpha=0.45$ と比較してフィルタの伝達関数が非常に高波数成分のみを除去する特性であるためであると考えられる。特に、(b)のスキームを用いる場合には、(a)、(f)および(i)と比較した場合に壁面上にできる二次渦の最小渦度の絶対値を小さく予測することがわかった。

2.3.2.3 空間解像度を増加させた場合(最小格子間隔 0.0125)

図 2-26 に示すように、 $\alpha=0.45$ では双極渦や二次渦の渦度分布に境界スキームの影響は観察されない。これはこの格子解像度においては、境界スキームと 6 次精度コンパクトスキーム組み合わせによって得られる修正波数の特性によって得られる結果の内、 $\alpha=0.45$ によって除去される波数領域についてはほとんど差がないと考えられる。図 2-27 に示すように、 $\alpha=0.49$ では(b)のスキームの組み合わせを用いた場合にのみ、双極渦二次渦ともに特異な渦運動をすることがわかった。 $\alpha=0.49$ において、(a),(f)および(i)については、空間解像度によらずにスキームの組み合わせによる影響の傾向は、二次渦の最大渦度の絶対値以外では変わらないことがわかった。これは、この格子解像度においては、渦運動をとらえるのに必要な解像度を境界コンパクトスキームと 6 次精度コンパクトスキームのいずれの組み合わせも満足しており、さらに、 $\alpha=0.49$ で除去される波数領域以外においては特性に違いが観察されないためであると考えられる。図 2-27(4) $t=22$ から 29 を拡大した図を図 2-27 の(5)に示す。(b)の境界スキームを 6 次精度コンパクトスキームに組み合わせただけの場合のみ、壁面近傍において数値振動が生じていることが分かる。また、図 2-28 に $t=26$ における渦度分布を示す。(b)のスキームを用いた場合にのみ境界近傍の矢印部分で特異な渦度が形成されている。このような渦度が形成されることはいかなる実験や数値シミュレーションの先行研究(たとえば Orlandi, 1990)においても示されていないため、特異な渦度が形成されるのは、(b)の境界コンパクトスキームと 6 次精度コンパクトスキームの組み合わせの修正波数の特性によって生じた誤差が原因であると推察される。具体的には、 $t=24$ において壁面近傍で発散に至らない程度の数値的な振動が(b)のスキームを用いた場合にのみ生じており、この振動から誤った渦の生成が誘起されたものと考えられる。以上のことから $\alpha=0.49$ で(b)のスキームの組み合わせを用いると渦運動や空力音を適切に計算することができないことが考えられる。

2.4 2章のまとめ

第2章では、計算空力音響での課題のひとつである数値境界条件のうち、境界近傍のスキームと計算空力音響で一般的な6次精度コンパクトスキームに組み合わせを圧縮性ナビエ-ストークス方程式に適用した場合に渦運動や空力音の数値計算に対する影響について調べた。

- ① コンパクトスキームで十分解像できる波数領域以外を十分に除去できる伝達関数のフィルタを用いると、壁面と渦との相互作用で生じる渦運動およびそれにより発生する空力音の計算値は境界スキームの違いによる影響を受けない。
- ② コンパクトスキームで十分解像できる波数よりもずっと高い波数のみを除去できる伝達関数のフィルタを用いると、渦運動やそれによって発生する空力音は境界スキームの影響を強く受けることが分かった。適切なスキームの組み合わせを用いると、粗い格子で、位相のずれが少なく計算できることが分かった。境界でAdam(1977)の3次精度境界コンパクトスキーム、境界より1つ内側で4次精度Padéスキームを用いるか、組み合わせた場合においても修正波数の異常な増幅が生じないことが示されている。Jordan(2009)の4次精度境界コンパクトスキームを用いることが適切であることがわかった。一方、境界にLele(1992)の4次精度境界コンパクトスキーム、境界より一つ内側のノードに4次精度Padéスキームを用いる場合には、壁面近傍で数値的な振動を生じて、それに伴い特異な渦度分布・音響場を形成する場合があります、不適切である。

第3章 境界フィルタとコンパクトフィルタの組み合わせが空力音の数値計算に与える影響

空力音の数値計算における空間差分スキームで十分に解像できない高波数成分の除去には、フィルタの伝達関数の特性がよいことから、Visbal and Gaitonde(1998)の3重対角10次精度コンパクトフィルタまたは、5重対角6次精度コンパクトフィルタを用いることが一般的である。境界でのフィルタの取り扱いについては、3重対角フィルタについては、Gaitonde and Visbal(2000)、5重対角6次精度コンパクトフィルタについては、Lele(1992)、Zhanxin(2009)、Kim(2010)によって提案されているものの、空力音の数値計算における比較が十分に行われているとはいえない。

はじめに、3重対角10次精度コンパクトフィルタに3重対角コンパクトフィルタを組み合わせた場合の影響を観察する。境界より1, 2, 3, 4つ内側のノードでは上記の3重対角10次精度コンパクトフィルタを用いることができないため、3.1節で後述する様々なフィルタを用い、その特性を伝達関数によって比較する。なお、境界にはフィルタをかけない。境界フィルタとインテリアフィルタの伝達関数はそれぞれ作成でき、3.1節にて導出方法を詳しく述べる。実際の数値計算で用いる場合にはそれらを組み合わせることが必要であるが、必ずしもこれまで提案されてきた境界フィルタと組み合わせた場合のスキームの解像度とフィルタの伝達関数の特性によって適切に動作するとは限らない。そのため、ナビエストークス方程式を解くシミュレーションに実装してそれらの特徴を把握する必要がある。

支配方程式は第2章と同じく2次元圧縮性ナビエストークス方程式である。

空間差分スキームには、Lele(1992)の3重対角6次精度コンパクトスキームを用いる。境界近傍では、第2章の研究成果よりJordan(2009)によって提案された境界近傍のスキームの組み合わせ、すなわち境界と境界より1つ内側のノードに対してそれぞれに対応した4次精度境界コンパクトスキームを用いる。

計算領域は、第2章と同様の2次元矩形領域とし、双極渦の初期半径 R_0 を基準長さとし、領域の大きさを $-159.5R_0 \leq x \leq 159.5R_0$, $0 \leq y \leq 159.5R_0$ とした。境界条件にはPoinsot and Lele(1992)のNSCBC (Navier- Stokes Characteristic Boundary Condition)を用い、 $y=0$ を断熱すべりなし壁面境界とし、その他の境界については無反射流出境界とした。

なお、参照計算用格子を用いた計算ケース（本文では以降レファレンスデータという）では、境界近傍ノードに対して低次精度コンパクトフィルタを用い、境界ノードを除くすべてのノードにおいてフリーパラメータ $\alpha=0.45$ とした。詳しくは3.2節に後述する。いずれの計算条件においても双極渦が壁面に衝突する渦運動をよく解像できるように双極渦と壁面近傍において格子が細くなるように格子伸長を行った。以降、空間の一階微分を ∇ で、フィルタをかけた値を $\hat{\cdot}$ で、格子間隔を Δx で表す。各物理量は、 R_0 、無限遠方における音速 c_∞ 、

Table 3-1 Computational condition

The number of grid points $N_x \times N_y$	Minimum grid spacing Δx	Time step Δt
841 × 421	0.025	0.01
421 × 211	0.05	0.01
1681 × 841 (Reference)	0.0125	0.005

Table 3-2 Notation of filtering method ($N_x \times N_y=841 \times 421$).

Name	The combination of filters	Name	The combination of filters
NF	N-N-N-N-N-10 _{C0.45} -	6HO0.46	N-6 _{CB0.46} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.45	N-2 _{C0.45} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	6HO0.47	N-6 _{CB0.47} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.46	N-2 _{C0.46} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	6HO0.48	N-6 _{CB0.48} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.47	N-2 _{C0.47} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	6HO0.49	N-6 _{CB0.49} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.48	N-2 _{C0.48} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	6HO0.495	N-6 _{CB0.495} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.49	N-2 _{C0.49} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	6HO0.499	N-6 _{CB0.499} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.495	N-2 _{C0.495} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	4HO0.45	N-4 _{CB0.45} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.499	N-2 _{C0.499} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	4HO0.46	N-4 _{CB0.46} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
EB	N-4 _{EB} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	4HO0.47	N-4 _{CB0.47} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
10HO0.45	N-10 _{CB0.45} -10 _{CB0.45} -10 _{CB0.45} -10 _{CB0.45} -10 _{C0.45} -	4HO0.48	N-4 _{CB0.48} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
6HO0.495-0.495	N-6 _{CB0.495} -6 _{CB0.495} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	4HO0.49	N-4 _{CB0.49} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
6HO0.499-0.499	N-6 _{CB0.499} -6 _{CB0.499} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	4HO0.495	N-4 _{CB0.495} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
6HO0.45	N-6 _{CB0.45} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -	4HO0.499	N-4 _{CB0.499} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -

Notes: “N” means the value at the node is not filtered. Arabic numbers mean the order of filters at the node. Subscript “C” means compact centered filter, “E” means explicit filter, “B” means boundary filter, Arabic number means the value of free parameter of compact filters at the node. “HO” means Higher Order boundary filter, “LOC” means Lower Order Centered filter. For example, “4HO0.499” means 4th order boundary filter (its free parameter is set to be 0.499 at the first node away from the boundary).

粘性係数 μ_∞ , 密度 ρ_∞ , 温度 T_∞ によって無次元化した. 流体は空気とし, レイノルズ数 $Re=(\rho_\infty c_\infty R_0)/\mu_\infty=1 \times 10^4$, プラントル数 $Pr=0.72$, 比熱比 $\gamma=1.4$ とした. また, 粘性係数は Power Law で近似し, $\mu=T^{2/3}$ とした. 双極渦は 2 章と同様に与えた. ここで, 単渦の半径 $Rc=0.5$, 渦の強さの係数 $C=0.25$ とした. 渦の誘起速度 u_0 に基づくマッハ数を $M=u_0/c_\infty=0.1$ とした. 時間発展には, 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いた. 表 3-1 に本研究で用いた計算条件を示す. ここで, フィルタの精度の次数とコンパクトフィルタ・陽的フィルタを区別するため, 以下のように略式の表記を用いる. N はフィルタをかけないこと, 数字は精度の次数, 添え字の C はコンパクト(Compact)フィルタであることを示し, E は陽的(Explicit)フィルタを表す.

Table 3-3 Notation of filtering method in the present paper ($N_x \times N_y = 421 \times 211$).

Name	The combination of filters
LOC0.45-Coarse	N-2 _{C0.45} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.49-Coarse	N-2 _{C0.49} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.495-Coarse	N-2 _{C0.495} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.499-Coarse	N-2 _{C0.499} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
LOC0.4999-Coarse	N-2 _{C0.4999} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
EB-Coarse	N-4 _{EB} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
6HO0.45-Coarse	N-6 _{CB0.45} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
6HO0.499-Coarse	N-6 _{CB0.499} -6 _{CB0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
4HO0.45-Coarse	N-4 _{CB0.45} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -
4HO0.499-Coarse	N-4 _{CB0.499} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -

Notes: “N” means the value at the node is not filtered. Arabic numbers mean the order of filters at the node. Subscript “C” means compact centered filter, “E” means explicit filter, “B” means boundary filter, Arabic number means the value of free parameter of compact filters at the node. “HO” means Higher Order boundary filter, “LOC” means Lower Order Centered filter. For example, “4HO0.499-Coarse” means 4th order boundary filter (its free parameter is set to be 0.499 at the first node away from the boundary) is used on coarse grids.

Table 3-4 Filtering method for reference data in the present paper ($N_x \times N_y = 1681 \times 841$).

Name	The combination of filters
Reference	N-2 _{C0.45} -4 _{C0.45} -6 _{C0.45} -8 _{C0.45} -10 _{C0.45} -

Notes: “N” means the value at the node is not filtered. Arabic numbers mean the order of filters at the node. Subscript “C” means compact centered filter.

また、境界フィルタを区別するため、境界フィルタのみ **B** を用いる。たとえば、境界ではフィルタをかけず、境界より 1 つ内側では 4 次精度境界コンパクトフィルタ、境界より 2 つ内側では 4 次精度コンパクトフィルタ、境界より 3 つ内側では 6 次精度コンパクトフィルタ、境界より 4 つ内側では 8 次精度コンパクトフィルタ、これらより計算領域内部のノードに 10 次精度コンパクトフィルタを用いることを (N-4_{CB}-4_C-6_C-8_C-10_C-) と表す。添え字の数字はそのノードにおけるコンパクトフィルタのフリーパラメータの値を示す。本研究で計算を行った境界近傍のフィルタの組み合わせについて表 3-2 および表 3-3 に示す。また、レファレンスデータにおける境界近傍のフィルタの組み合わせについて表 3-4 に示す。

3.1 Visbal and Gaitonde のコンパクトフィルタについて

(1)境界近傍でフィルタの精度の次数を低下させる場合

境界ではフィルタをかけず，境界より1つ内側では2次精度コンパクトフィルタ，境界より2つ内側は4次精度コンパクトフィルタ，境界より3つ内側は6次精度コンパクトフィルタ，境界より4つ内側は8次精度コンパクトフィルタ，それ以外のノードでは10次精度コンパクトフィルタを用いる方法である．それぞれの精度の次数によって式(3-1)中の係数は異なる．フーリエ解析によって求められる伝達関数を(3-2)に示す．それぞれのコンパクトフィルタの伝達関数は数学的に求めることができる．代表してこのコンパクトフィルタの伝達関数の導出を示す．

$$\alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (f_{i+n} + f_{i-n}) \quad (3-1)$$

$$T(w) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n \cos(nw)}{1 + 2\alpha \cos(w)} \quad (3-2)$$

$f_j = c_k \exp(ikx_j)$ として，等間隔格子 $x_j = j\Delta x$ とおく．

(3-1)式に代入して

フィルタオペレータを δ_x^f として，

$$\begin{aligned} & \delta_x^f \alpha c_k \exp(ik(j-1)\Delta x) + \delta_x^f c_k \exp(ikj\Delta x) + \delta_x^f \alpha c_k \exp(ik(j+1)\Delta x) \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (c_k \exp(ik(j-n)\Delta x) + c_k \exp(ik(j+n)\Delta x)) \end{aligned}$$

両辺を $c_k \exp(ikj\Delta x)$ で割ると，

$$\begin{aligned} \delta_x^f \alpha \exp(-ik\Delta x) + \delta_x^f + \delta_x^f \alpha \exp(ik\Delta x) &= \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (\exp(-nik\Delta x) + \exp(nik\Delta x)) \\ \delta_x^f &= \frac{\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (\exp(-nik\Delta x) + \exp(nik\Delta x))}{1 + \alpha (\exp(-ik\Delta x) + \exp(ik\Delta x))} \end{aligned}$$

ここで，三角関数の関係から $\exp(ik\Delta x) = \cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x)$ であり，

$$\cos(k\Delta x) = \frac{\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x)}{2}, \quad \sin(k\Delta x) = \frac{\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)}{2i}$$

$$\delta_x^f = \frac{\sum_{n=0}^N a_n \cos(nk\Delta x)}{1 + 2\alpha \cos(k\Delta x)}$$

この計算手法には、図 3-1(1)に示すような伝達関数となるため、いかなる波数成分もフィルタによって増幅されることがないという特長がある。しかし、低次精度フィルタを用いるため、格子間隔が粗くなると計算の誤差が大きくなる。そのため、格子間隔を境界近傍で十分に細かくする必要がある。さらに、図 3-1(1)に示すようにコンパクトフィルタの同じ α で比較した場合、低次精度になるほど、低波数領域でも伝達関数の実部が 1 より小さくなり、フィルタの影響が低波数領域にも及ぶことが欠点としてあげられる。これに対応するため、Visbal and Gaitonde (1998)では粗いメッシュを用いる場合には、境界より 1 つ内側のノードにおける 2 次精度コンパクトフィルタの α の値を適切な値に調整する必要があるが空力音への影響は明らかにされてこなかった。そこで、境界より 1 つ内側のノードにおけるフィルタの伝達関数の実部の特性が空力音に与える影響を調べるとともに格子解像度と境界より 1 つ内側のノードにおける最適な伝達関数に対して与える影響との関係について調査を行う。また、格子解像度に応じて空力音の数値計算に適切な伝達関数の特性が変わるのかを調査する。

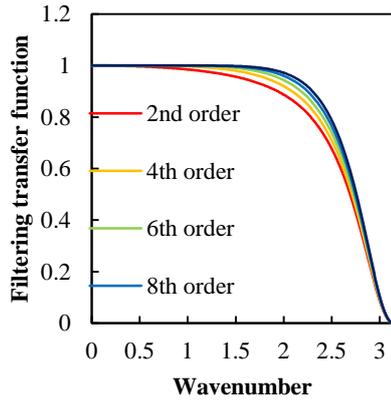
(2)境界近傍でも高次精度フィルタを用いる場合

式(3-3)に示す境界コンパクトフィルタ（フーリエ解析によって求められる伝達関数は式(3-4)）を用いれば、境界を除く全計算領域で最大 10 次精度のフィルタを用いることが可能となる。しかしながら、境界コンパクトフィルタでは、図 3-2 に示すように、フィルタの伝達関数の実部の高波数の領域が 1 以上となることにより、高波数の一部の波数成分が増幅されてしまうという欠点がある。その増幅の程度については、精度の次数および α の値によって虚部の大きさが変わる。図 3-3 に示すように、高波数の一部の波数においてフィルタの伝達関数の虚部が 0 にならない。フィルタの伝達関数の虚部は数値分散に影響を与え、図 3-3 の場合には、フィルタは数値的な不安定性を持つ。虚部の値についても精度の次数および α の値に依存する。例えば境界近傍において 8 次精度境界コンパクトフィルタを用いた場合（若松，渡邊, 2014）では、フリーパラメータ α の値を 0.49 や 0.495 にした場合においては、境界近傍において数値的な振動を抑制できず計算が不安定となっている。このように高次精度境界コンパクトフィルタではその伝達関数の実部と虚部の特性によって計算結果に重大な影響がある場合がある。そこで、本研究においては、空力音の数値計算において一般的な 10 次精度のフィルタをインテリアフィルタとして使い、境界近傍のフィルタの取り扱い方法として Gaitonde and Visbal(2000)において提案されている境界より一つ内側で 4 次精度境界コンパクトフィルタを用いる方法(4HO)及び境界より一つ内側で 6 次精度境界コンパクトフィルタを用いる方法(6HO)での伝達関数の実部と虚部の特性が空力音の計算に及ぼす影響を調べる。

$$\alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} = \sum_{n=1}^{11} a_{n,i} f_n \quad (3-3)$$

$$T(w) = \frac{\sum_{n=1}^{11} a_{n,i} \{ \cos[(n-i)w] + I \sin[(n-i)w] \}}{1 + 2\alpha \cos(w)} \quad (3-4)$$

(1)



(2)

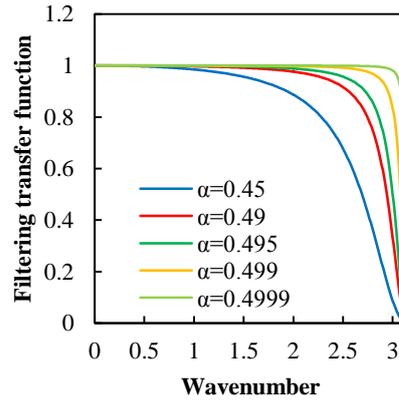
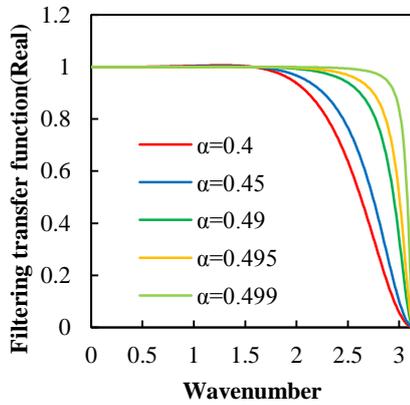


Fig.3-1 (1) Filtering transfer function of compact filter (the free parameter is set to be 0.45) and (2) Filtering transfer function of 2nd order filter.

(1)



(2)

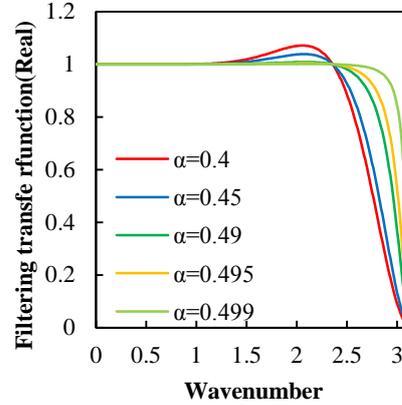


Fig.3-2 Filtering transfer function (Real part) at the first node away from the boundary of (1) 4th order boundary compact filter and (2) 6th order boundary compact filter.

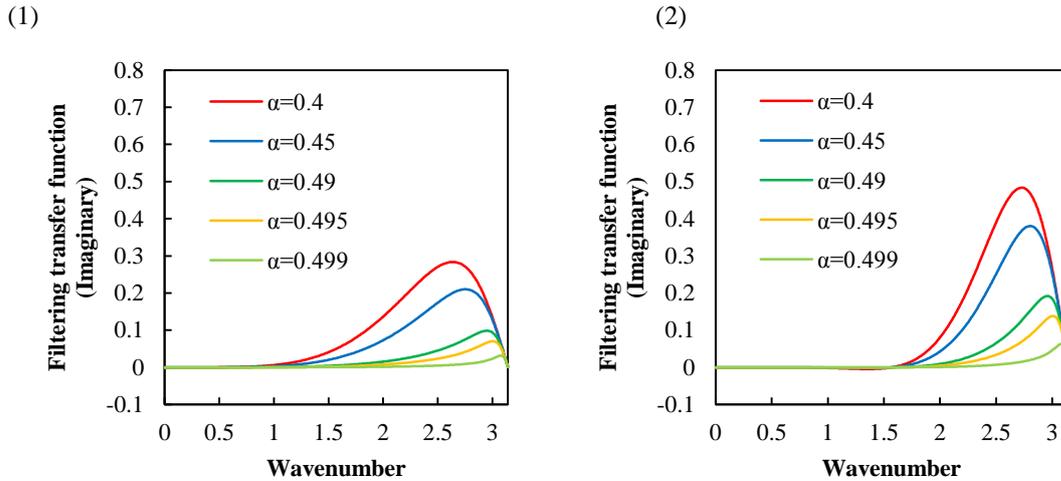


Fig.3-3 Filtering transfer function (Imaginary part) at the first node away from the boundary of (1) 4th order boundary compact filter and (2) 6th order boundary compact filter.

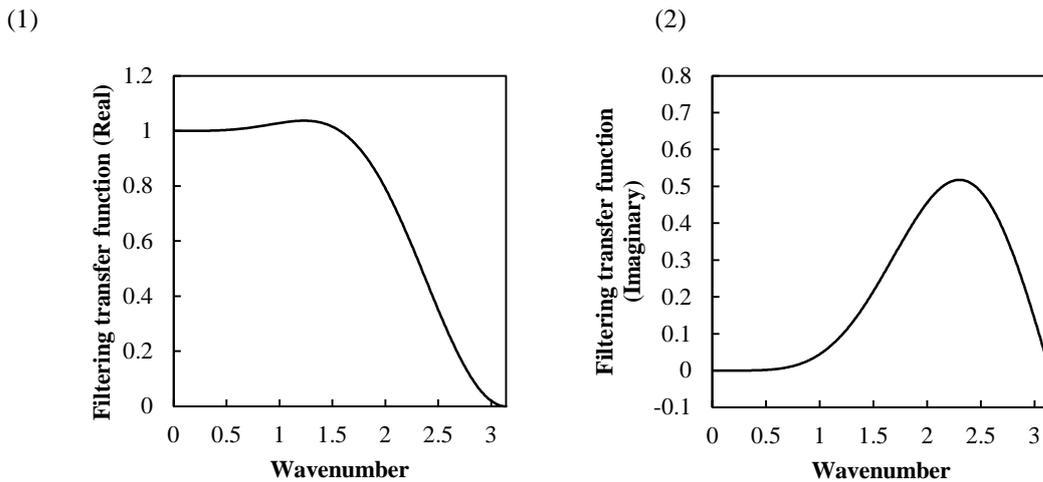


Fig.3-4 Filtering transfer function of 4th order explicit boundary filter proposed by Lele(1992) (1) Real part, (2) Imaginary part.

(3)境界より1つ内側のノードで4次精度陽的フィルタ (Lele(1992)) を用いる場合
境界より1つ内側のノードで式(3-5)に示す4次精度陽的フィルタ (Lele(1992)) を用いる方法である。フーリエ解析によって求められる、その特性を図3-4に示す。境界コンパクトフィルタでの伝達関数と比較して、低波数領域からフィルタの影響を受ける。フィルタの伝達関数の実部では、1以上となる波数領域があり、比較的到低波数成分が増幅されることが分かる。また、虚部の影響を受ける波数範囲が前述した境界コンパクトフィルタと比較して広いことが分かる。(1),(2)で述べた方法では、実際の数値計算を行う場合には、コンパ

クトフィルタのフリーパラメータ α の最適値が既知である必要がある。一方、本方法は、境界より 1 つ内側のノードにおいて陽的なフィルタを用いることによって α の最適値についての考慮を必要としない。そこで、この伝達関数が空力音の計算に及ぼす影響について調べる。また、この方法が格子解像度に依存するかどうかを調査する。

$$\hat{f}_2 = \frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{16}(f_1 + 6f_3 - 4f_4 + f_5) \quad (3-5)$$

3・2 レファレンスデータの取り扱い

本研究においては、レファレンスデータの選定においては、以下の点を考慮した。前述のように、高次精度境界コンパクトフィルタではフィルタの伝達関数の実部が 1 以下という条件および虚部が 0 という条件を満足しない。また、このことが空力音におよぼす影響については、系統的に調査を行った先行研究はない。そのため、単調な特性により安定的に解を得られることおよびいずれの波数成分も増幅されないことを重視し、境界近傍には低次精度コンパクトフィルタを用い格子点数を増加させて空間解像度を上げた計算を行った ($N-2_c-4_c-6_c-8_c-10_c-$)。計算結果は、フリーパラメータ α を全ノードに対して 0.45 および 0.49 に設定した場合でも、図 3-5 のように観測点(0, 69.9)における圧力変動の値が $t=80$ から $t=200$ まで、ほぼ一致したことから、レファレンスデータとして用いるのに十分な空間解像度があり、計算結果が収束しているとみなした。よって、以降、レファレンスデータとして格子点数 $N_x \times N_y = 1681 \times 841$ (最小格子間隔 $\Delta x_{\min} = 0.0125$)、 $\alpha = 0.45$ に設定して得られた計算結果を用いる。

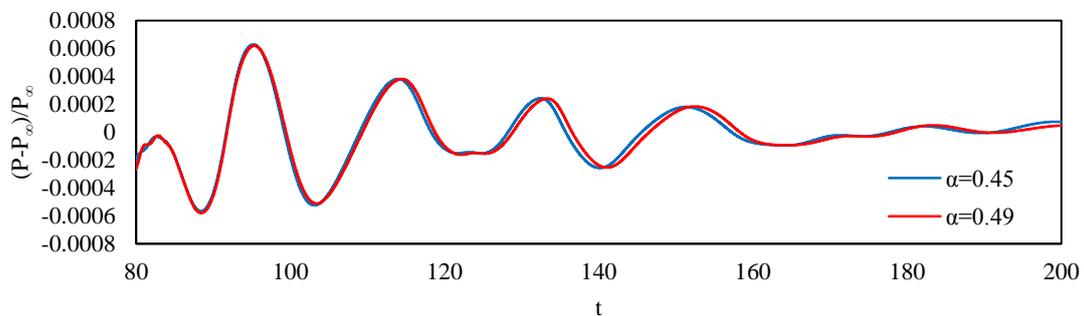


Fig.3-5 Acoustic waves observed at (0, 69.9) in the case of $\alpha=0.45$ and $\alpha=0.49$, ($N_x \times N_y = 1681 \times 841$, $\Delta x_{\min} = 0.0125$). Acoustic waves calculated by each parameter are almost the same.

3.3 結果および考察

3.3.1 境界フィルタの種類とフリーパラメータの影響

境界近傍でフィルタを用いない場合 (NF) では、計算が発散した。このことから、境界近傍のスキームによって発生する高波数成分の誤差を取り除くため、境界近傍においてもローパスフィルタを適用することが不可欠であると言える。次にフィルタごとの計算結果について述べる。

(1)境界近傍でコンパクトフィルタの精度の次数を低下させる場合

図 3-6 に、観測点(0, 69.9)における圧力変動について示す。フリーパラメータ α の値にかかわらず、本計算条件においては音の大きさにほとんど違いは観察されなかった。一方で、 α を 0.45 から 0.495 に近づけ、除去される波数範囲をより高波数に限定すると、レファレンスデータとの位相のずれが小さい結果が得られ、特に、 $\alpha=0.495$ とした場合においては、 $t=80$ から $t=160$ までほぼレファレンスデータと位相が一致した。一方で、 $\alpha=0.499$ とするとレファレンスデータと位相の差が観察された。これは、 $\alpha=0.499$ では、高すぎるフリーパラメータ α の値で、空間差分スキームで十分に解像されない波数領域を十分に除去できなかったためであると考えられる。このことから、必ずしも α を 0.5 に極めて近い値に設定することが空力音の数値計算に適切というわけではなく、計算条件に応じて適切な値を探索する必要があることが分かった。

また、図 3-7 に渦運動について示す。渦運動についても、 $\alpha=0.45$ では双極渦はレファレンスデータよりも小さく回るが、 α を大きくするほど大きく回り、特に $\alpha=0.495$ とした場合では、ほぼレファレンスデータと一致した。しかしながら、 $\alpha=0.499$ とした場合では、双極渦はレファレンスデータよりも大きく回るという結果になった。渦運動においても必ずしも α を 0.5 に極めて近い値に設定することが適切ではなく、計算条件に応じて適切な値を探索する必要があることが分かった。

このように、境界近傍でコンパクトフィルタの精度の次数を低下させる場合には、境界より 1 つ内側のノードの 2 次精度コンパクトフィルタの α への依存性が強く観察されることが分かった。それは、2 次精度コンパクトフィルタの伝達関数が α に強く影響を受けるためであると考えられる。本計算条件において α を 0.495 に設定することで渦運動および空力音についてレファレンスデータと極めて近い計算結果を得られたのは、数値振動を生じる高波数成分を除去しながら、2 次精度ではあるものの除去する波数領域を高波数に限定した伝達関数となったためであると考えられる。

(2)境界近傍で高精度境界コンパクトフィルタを用いる場合

境界近傍に 10 次精度境界コンパクトフィルタを用いた場合 (10H00.45)、計算は発散した。このことから、境界コンパクトフィルタを用いた場合には先行研究 (若松, 渡邊, 2014) のように必ずしも計算が安定にできるとは限らないことが確かめられた。

これは、フィルタの伝達関数の実部が 1 以下という条件を満たさないことによって一部の波数成分が増幅されることで不安定化されるとともに、伝達関数の虚部が 0 ではないので、計算を不安定にしたと考えられる。

さらに、6 次精度境界コンパクトフィルタを境界より 1 つ・2 つ内側に適用する場合には、どちらのノードにおいても α を 0.5 に近づけることがフィルタの伝達関数の虚数成分を小さくするために有効であるが、どちらのノードにおいても $\alpha=0.495, 0.499$ を適用し、極めて高い波数のみ除去する伝達関数を用いた場合 (6HO0.495-0.495 および 6HO0.499-0.499) では、計算が発散した。このことから、6 次精度境界コンパクトフィルタの適用にあたっては、高波数成分を効果的に除去できるよう境界より 2 つ内側のノードのフィルタでは $\alpha=0.45$ に固定し、境界より 1 つ内側のフィルタの α の値が空力音に及ぼす影響を調べた。図 3-8 に 6HO0.45 および 6HO0.499 の観測点(0, 69.9)における圧力変動の結果を示す。t=95 付近の音の大きさをどちらの場合においてもやや過小に評価するとともにレファレンスデータとの位相のずれが大きい。次に、渦変形について図 3-9 に示すが、二次渦の渦度の絶対値を大きく予測し、このことで双極渦と二次渦とのペアの渦運動に影響があることが分かった。これは、この境界コンパクトフィルタの伝達関数の実部が 1 以上となることで一部の波数成分が増幅され、二次渦の渦度の絶対値が強められ双極渦と二次渦とのペアが大きく回ることで発生する音の位相がずれたと考えられる。このことから、6 次精度コンパクトフィルタの組み合わせを用いることは空力音の数値計算に不適切であると考えられる。

図 3-10 に示すように、4 次精度境界コンパクトフィルタを用いると音の大きさはほとんどレファレンスデータと一致する。音のレファレンスデータとの位相差が小さく抑えられている。これは、境界より 1 つ内側のノードにおける 4 次精度境界コンパクトフィルタは 6 次精度以上の境界コンパクトフィルタと比較して高波数成分の増幅がきわめて小さく抑えられるためであると考えられる。また、発生する空力音において α の値を変えても、あまり位相差が観察されなかったことから、4 次精度境界コンパクトフィルタ伝達関数への依存性が小さいと考えられる。図 3-11 に示すように渦変形においても α への依存性はあまり観察されず、レファレンスデータに近い計算結果が得られた。このことから、渦運動は 4 次精度境界コンパクトフィルタの伝達関数への依存性は小さいと考えられる。これは、4 次精度境界コンパクトフィルタは、 α を 0.5 から低下させても実部の値が 1 より増加するのは微小に抑えられており、高波数成分の増幅は小さく抑えられ α を 0.5 から低下させても二次渦の渦度の異常な増大は生じないと考えられる。レファレンスデータに近い適切な空力音および渦運動の計算が可能な伝達関数の特性であることから、4 次精度境界コンパクトフィルタは、有益なフィルタリング手法であると考えられる。

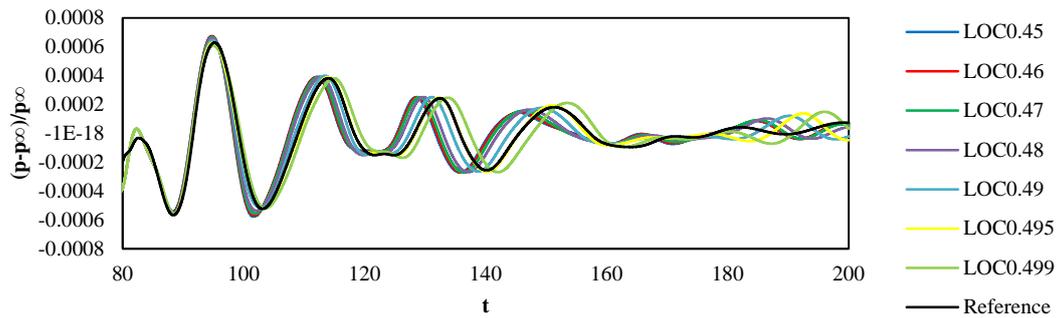


Fig.3-6 Acoustic waves observed at (0, 69.9) in the case of LOC approach ($N_x \times N_y = 841 \times 421$, $\Delta x_{\min} = 0.025$). The value of free parameter at the first point away from the boundary has serious effects on computations of aerodynamic sound.

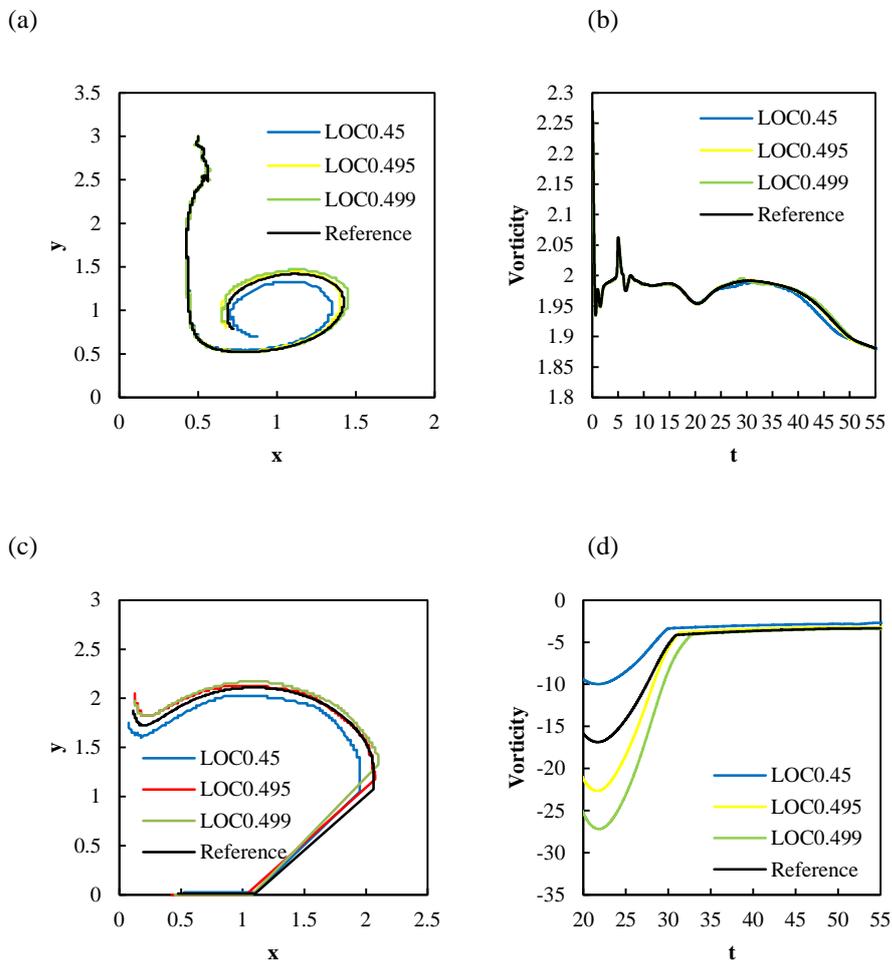


Fig.3-7 Vortex dipole and secondary vortex in the cases of LOC0.45, LOC0.495 and LOC0.499 ($N_x \times N_y = 841 \times 421$, $\Delta x_{\min} = 0.025$). (a) The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (b) Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (c) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (d) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$.

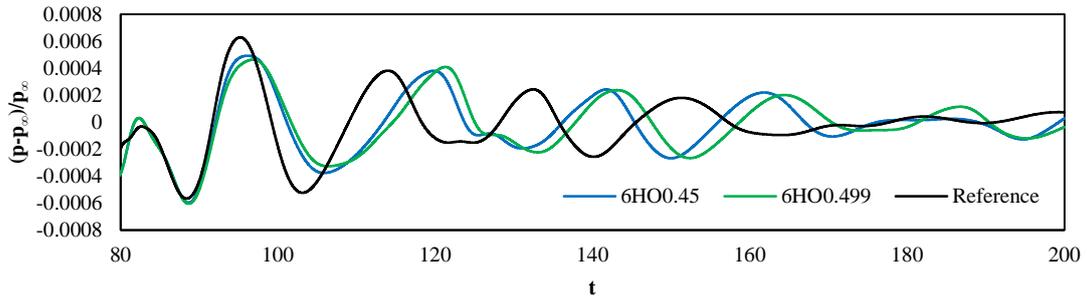


Fig.3-8 Acoustic waves observed at (0, 69.9) in the cases of 6HO0.45 and 6HO0.499 ($N_x \times N_y = 841 \times 421$, $\Delta x_{\min} = 0.025$). The higher values of parameter at the first point away from the boundary are not appropriate in this case.

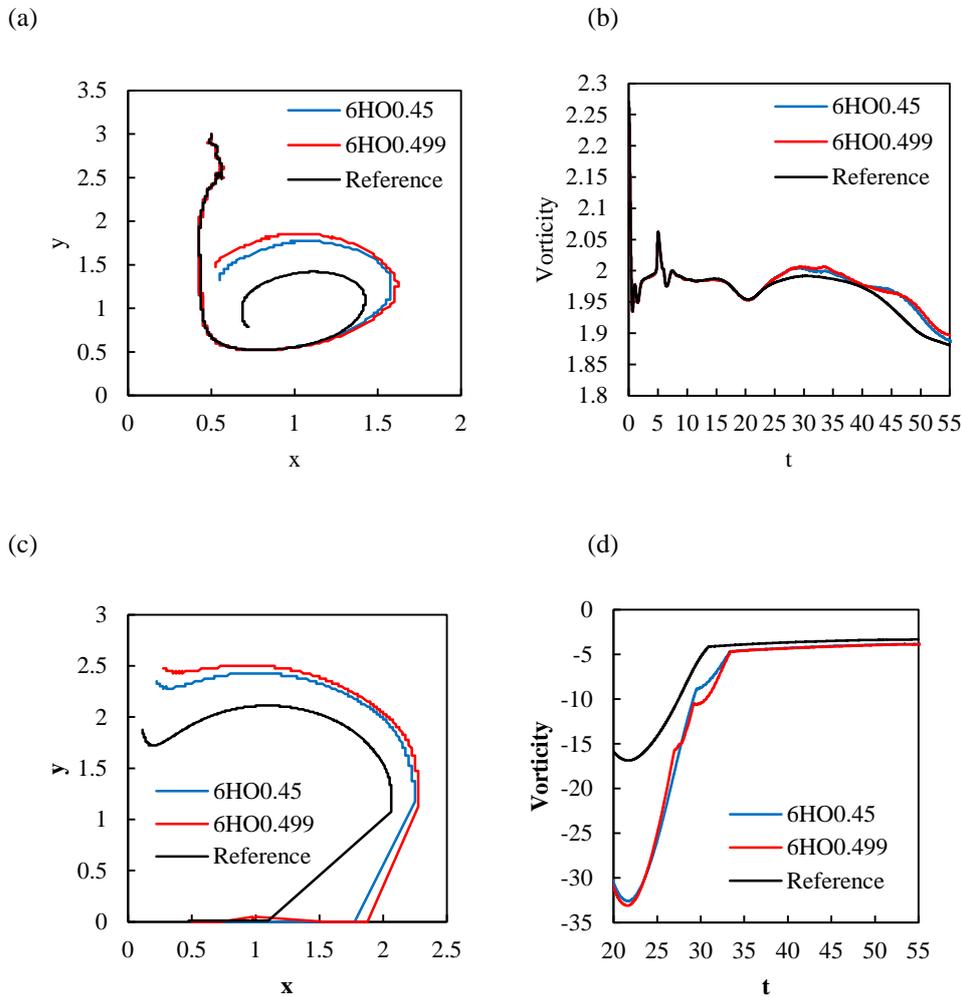


Fig.3-9 Vortex dipole and secondary vortex in the cases of 6HO0.45 and 6HO0.499. (a) The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (b) Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (c) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (d) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$. 6HO0.45 and 6HO0.499 generate stronger secondary vorticity, its vortex motion is different from the reference.

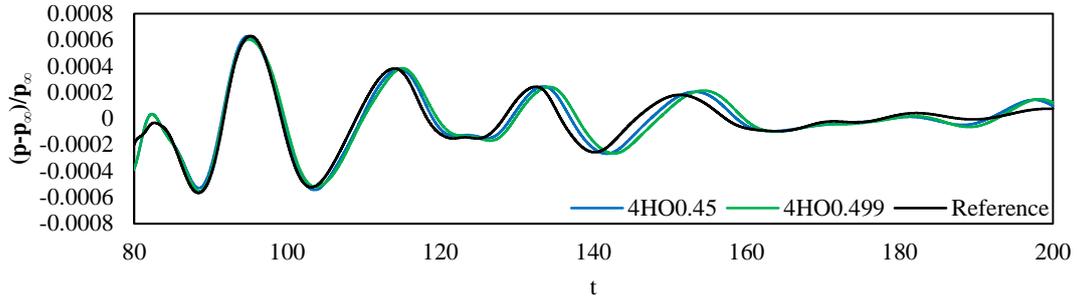


Fig.3-10 Acoustic waves observed at (0, 69.9) in the cases of 4HO0.45 and 4HO0.499 ($N_x \times N_y = 841 \times 421$, $\Delta x_{\min} = 0.025$). The value of free parameter of 4th order boundary compact filter has a little influence on computations of aerodynamic sound.

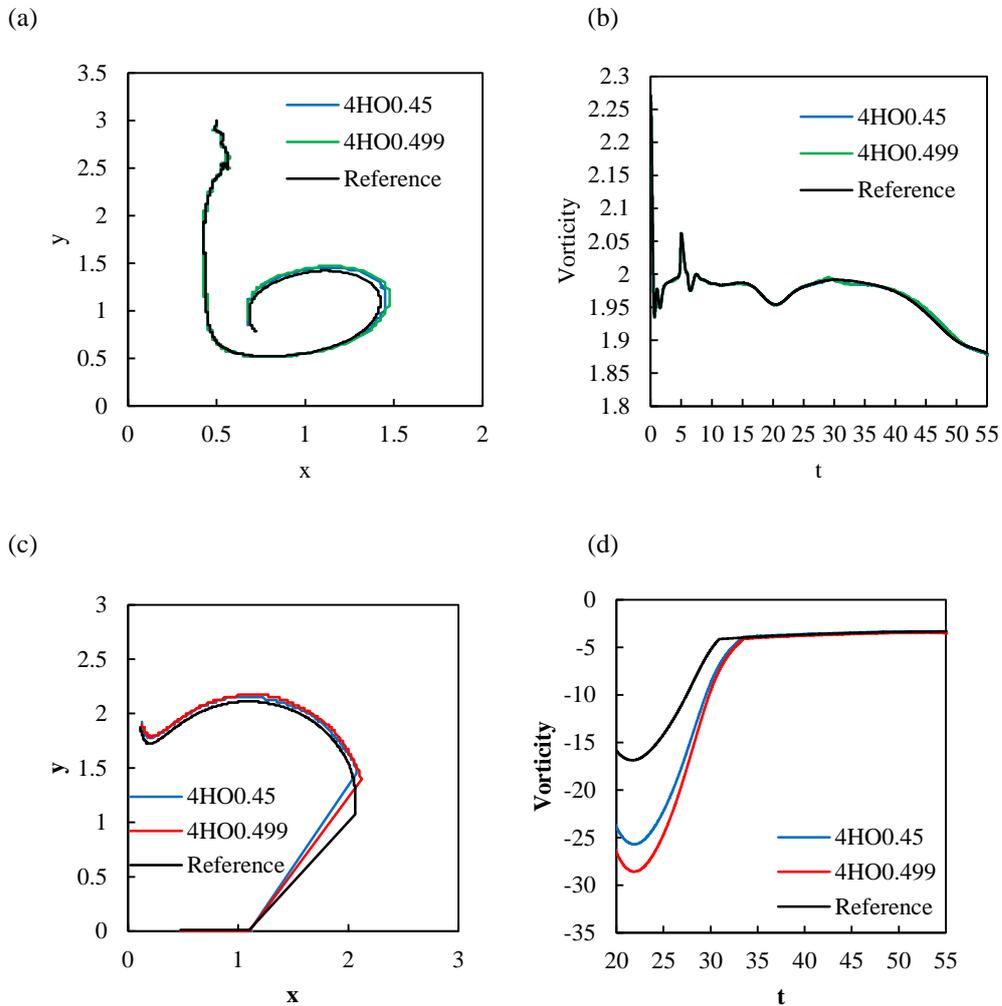


Fig.3-11 Vortex dipole and secondary vortex in the cases of 4HO0.45 and 4HO0.499 ($N_x \times N_y = 841 \times 421$, $\Delta x_{\min} = 0.025$). (a) The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (b) Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (c) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (d) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$. The value of free parameter of 4th order boundary compact filter has a little influence on vortex motion.

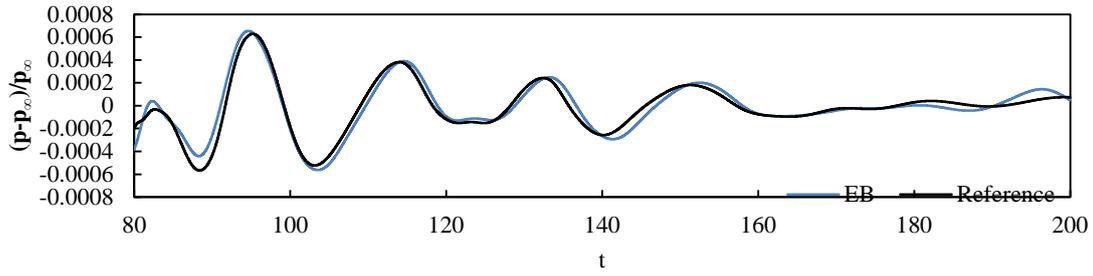


Fig.3-12 Acoustic waves observed at (0, 69.9) in the condition of EB ($N_x \times N_y = 841 \times 421$, $\Delta x_{\min} = 0.025$). The difference between EB and the reference is observed locally, the overall phase shift is small.

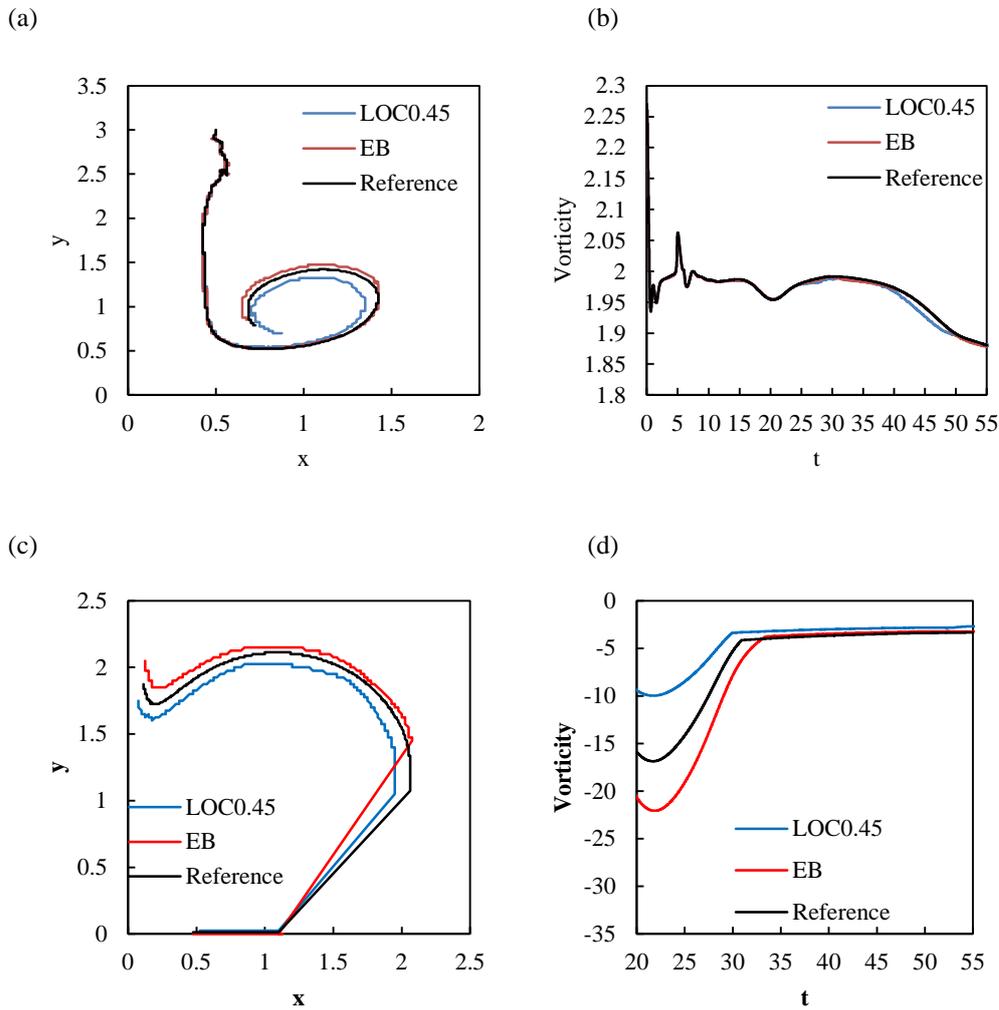


Fig.3-13 Vortex dipole and secondary vortex in the condition of EB ($N_x \times N_y = 841 \times 421$, $\Delta x_{\min} = 0.025$). (a) The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (b) Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (c) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (d) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$. Vortex motion of vortex dipole and secondary vortex is similar to the reference. The vorticity of secondary vortex computed in the case of EB is weaker than the reference.

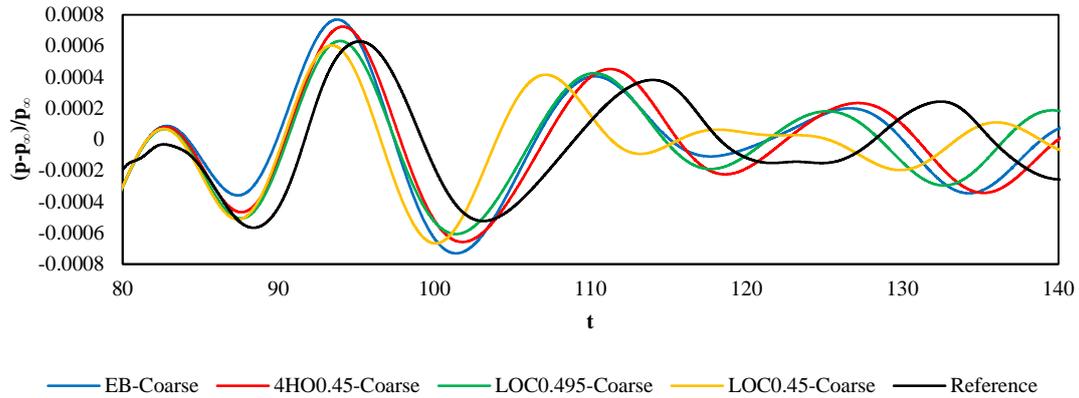


Fig.3-14 Acoustic wave observed at the point (0, 69.9) ($N_x \times N_y = 421 \times 211$, $\Delta x_{\min} = 0.05$).

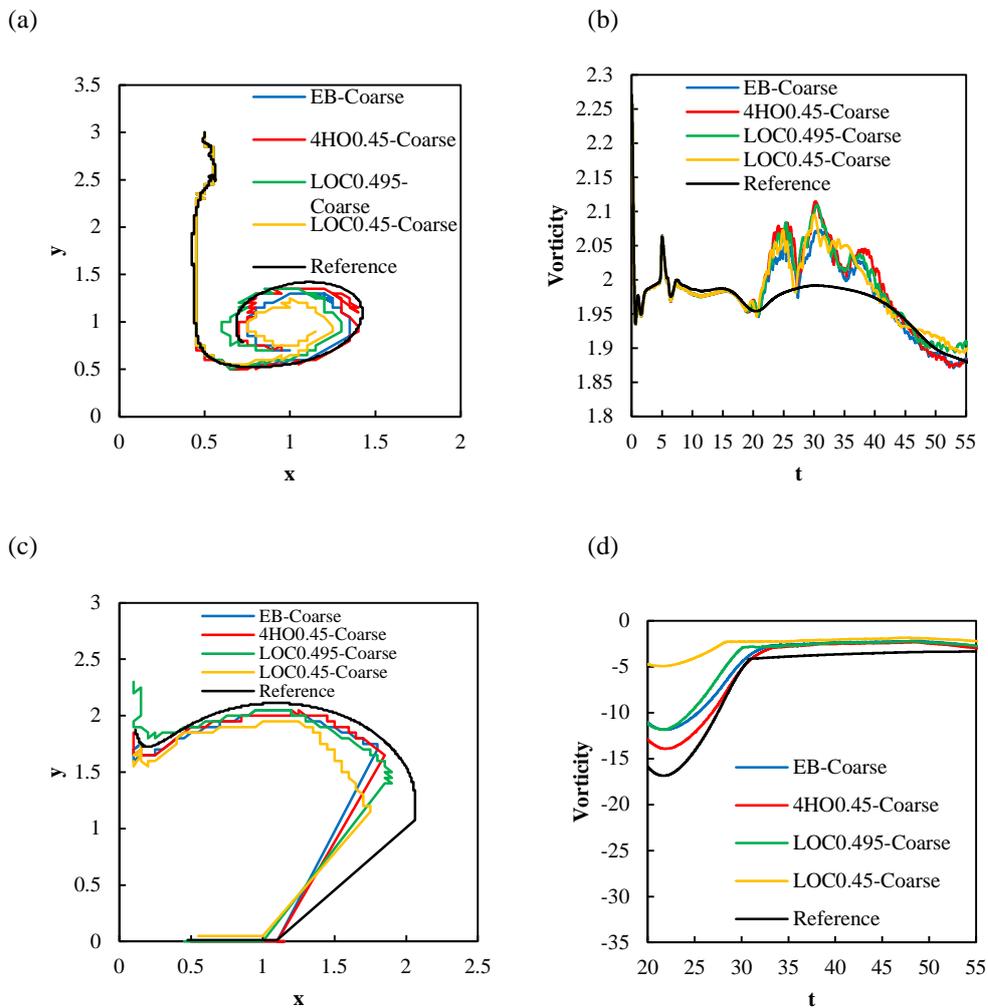


Fig.3-15 Vortex dipole and secondary vortex ($N_x \times N_y = 421 \times 211$, $\Delta x_{\min} = 0.05$). (a) The position of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (b) Time evolution of vortex dipole's maximum vorticity from $t=0$ to $t=55$, (c) The position of secondary vortex minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$, (d) Time evolution of secondary vortex's minimum vorticity from $t=20$ to $t=55$.

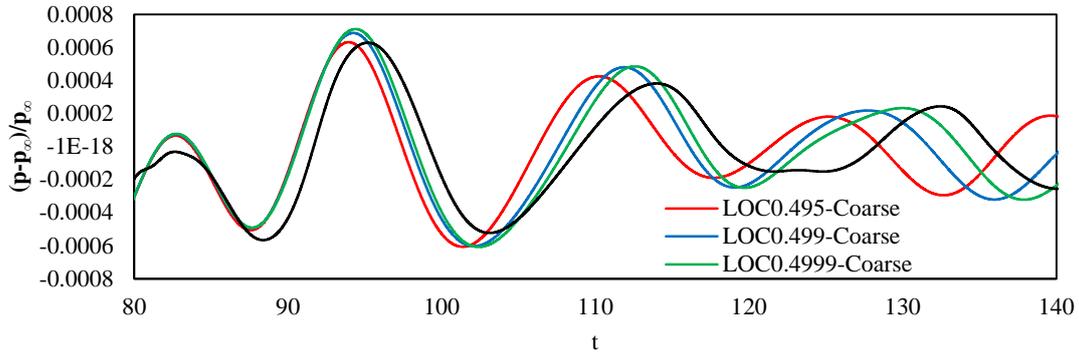


Fig.3-16 Acoustic wave observed at the point (0, 69.9) in the condition of LOC approach ($N_x \times N_y = 421 \times 211$, $\Delta x_{\min} = 0.05$). LOC0.4999-Coarse is the most appropriate in this condition.

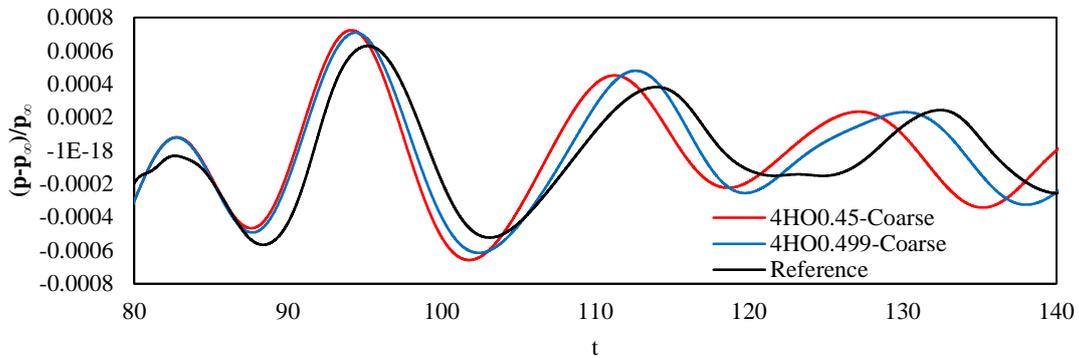


Fig.3-17 Acoustic wave observed at the point (0, 69.9) in the condition of 4HO0.45-Coarse and 4HO0.499-Coarse ($N_x \times N_y = 421 \times 211$, $\Delta x_{\min} = 0.05$). 4HO0.499-Coarse is better than 4HO0.45-Coarse in this condition.

(3)境界より1つ内側のノードで4次精度陽的フィルタ (Lele(1992)) を用いる場合

LOC0.45 を用いた場合には、レファレンスデータと比較して、観測点で観察される音波は位相が進んでいることが観察されたが、図 3-12 に示すように EB で 4 次精度の陽的フィルタを用いると、そのような位相のずれはあまり観察されず、レファレンスデータとよく位相が一致している。これは同じ格子解像度であっても、フィルタの精度の次数を 2 次から 4 次へと増加させたことによる効果であると考えられる。また、図 3-13 に示すように渦変形では、二次渦の強さを LOC0.45 よりもレファレンスデータに近く評価できており、双極渦および二次渦の渦運動はレファレンスデータとほぼ同じである。

3.3.2 空間解像度を低下させた場合

3.3.1 節において、格子点数 841×421 の場合で有望であることが見いだされた 3 つの計算方法について空間解像度の影響を明らかにするため、格子点数 421×211 の計算を行った。

まず、図 3-14 に、格子点数 841×421 で最適となったフリーパラメータ α の値で計算を行った。EB では、図 3-14 に示すように、位相のずれが観察されるとともに音の大きさを 20% ほど過大に評価する。これは図 3-4 に示したように、このフィルタの伝達関数の特性の比較的 low 波数領域を増幅することが原因と考えられる。また、LOC および 4HO ではレファレンスデータとの位相差が観察され、また、音の大きさを過大に評価することが分かった。

次に、格子点数 421×211 の場合における最適なフリーパラメータ α の値を探索した。

LOC では、位相のずれが最小となる最適なフリーパラメータ α の値は、図 3-16 に示すように計算を行ったフリーパラメータ α の中では 0.4999 であり、きわめて高波数の波のみを除去する伝達関数が適切であった。格子点数 841×421 の場合で最適であった 0.495 とは異なり、格子解像度によって適切な伝達関数が異なることが分かった。4HO でのフリーパラメータ α の影響について示す。 $N_x \times N_y = 841 \times 421$ の場合に最適なフリーパラメータ α の値は 0.45 であったが、格子解像度を低下させた $N_x \times N_y = 421 \times 211$ の場合には図 3-17 に示すように位相のずれが最小となる最適なフリーパラメータ α の値は 0.499 であった。

このように、格子解像度によって適切なフィルタの伝達関数はことなり、LOC と 4HO では空間解像度が低下する場合には、極めて高波数成分のみを除去する伝達関数を用いることによって数値計算で生じる空力音の位相のずれを小さくすることが可能であることを示した。

以上により、10 次精度コンパクトフィルタに組み合わせる境界近傍のフィルタについて、2 つの方法が有望であることが見出せた。

境界より 1 つ内側のノードにおいて 4 次精度境界コンパクトフィルタを用いそのフリーパラメータ α を格子解像度に合わせて最適化する方法および境界より 1 つ内側のノードにおいて 4 次精度陽的フィルタを用いる方法である。

3.4 Kim の境界フィルタを用いた場合

Kim のフィルタは以下の式であらわされる。 $\hat{\Delta}f_i = \hat{f}_i - f_i$ として、 \hat{f}_i は f_i のフィルタをかけた値である。インテリアフィルタは式(3-6)、境界のフィルタは式(3-7)、境界より 1 つ内側のノードのフィルタは式(3-8)、境界より 2 つ内側のノードのフィルタは式(3-9)で表わされる。

$$\beta \hat{\Delta}f_{i-2} + \alpha \hat{\Delta}f_{i-1} + \hat{\Delta}f_i + \alpha \hat{\Delta}f_{i+1} + \beta \hat{\Delta}f_{i+2} = \sum_{m=1}^3 a_m (f_{i-m} - 2f_i + f_{i+m}) \quad (3-6)$$

$$\hat{\Delta}f_1 + \gamma_{F01} \hat{\Delta}f_2 + \gamma_{F02} \hat{\Delta}f_3 = 0 \quad (3-7)$$

$$\gamma_{F10}\hat{\Delta}f_1 + \hat{\Delta}f_2 + \gamma_{F12}\hat{\Delta}f_3 + \gamma_{F13}\hat{\Delta}f_4 = 0 \quad (3-8)$$

$$\gamma_{F20}\hat{\Delta}f_1 + \gamma_{F21}\hat{\Delta}f_2 + \hat{\Delta}f_3 + \gamma_{F23}\hat{\Delta}f_4 + \gamma_{F24}\hat{\Delta}f_5 = \sum_{m=0, \neq 2}^5 b_{F2m}(f_{1+m} - f_3) \quad (3-9)$$

空間差分スキームは、2章のスキームの組み合わせの検証で、異常な結果とならないことが明らかになった。境界で Adam(1977)の3次精度コンパクトスキーム、境界よりひとつ内側では4次精度 Pade スキーム、それ以外のノードでは6次精度コンパクトスキームを用いた。コンパクトフィルタには、上記の Kim のコンパクトフィルタ、境界近傍に Kim の境界フィルタを用いた。その他の計算条件は前節と同じである。レファレンスデータは、空間差分スキームの組み合わせは上記の組み合わせを用いて、インテリアフィルタとして10次精度 Gaitonde のコンパクトフィルタ、境界フィルタとして低次精度 Gaitonde のコンパクトフィルタを用いた。フィルタのフリーパラメータは0.45とした。図3-18に示すように、Kim の境界より2つ内側のコンパクトフィルタの伝達関数は、 $T(\pi) > 0$ である特徴がある。このため、波数 π の成分を完全に除去できない。また、高波数成分についても、zhanxin のフィルタと比較して十分に除去することができない。比較のため、同じカットオフ波数 $Kc=0.85\pi$ のフィルタをもちいる。(厳密には、zhanxin のカットオフ波数の定義は Kim のフィルタのカットオフ波数の定義とは異なるため、カットオフ波数 $Kc=0.85\pi$ とはならないがきわめて近い値であるためカットオフ波数 $Kc=0.85\pi$ とみなす。)

図3-19に示すように、境界より二つ内側のノードのフィルタを $T(\pi)=0$ を満たすように設定することによって、位相のずれを改善することができた。このことから、Kim のフィルタを用いた際に位相がずれる一因として、境界より二つ内側のノードのフィルタが $T(\pi)=0$ を満たす伝達関数となっていないことがあげられる。

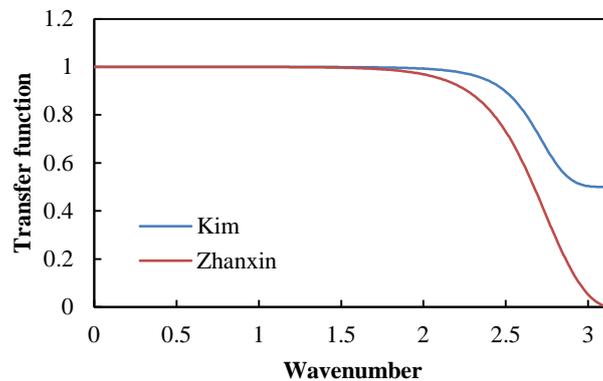


Fig.3-18 Real part of transfer function of compact filter developed by Kim and Zhanxin at the point of two points away from boundary.

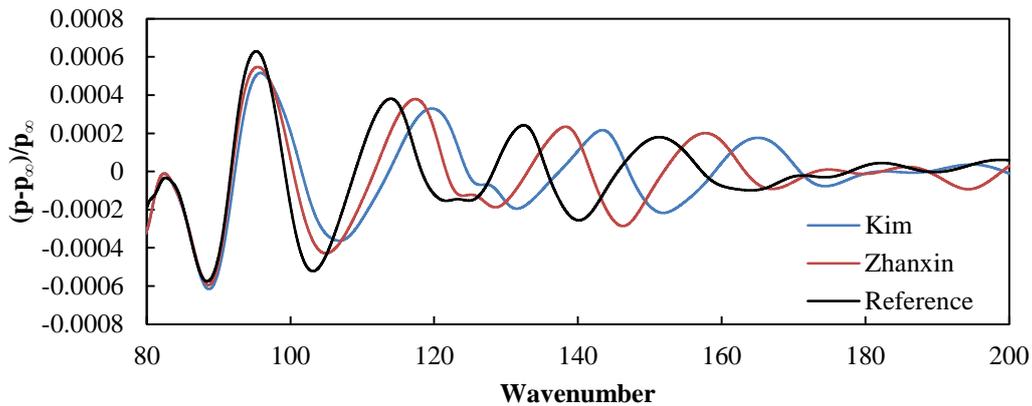


Fig.3-19 Acoustic wave observed at the point (0, 69.9).

3.5 3章のまとめ

第3章では、計算空力音響での課題のひとつである数値境界条件のうち境界フィルタの影響について検討を行った。コンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの計算手法を用いた2次元圧縮性流体解析を実施し、境界および境界より一つ内側のノードのフィルタが、壁面近傍に真の物理的音響ソースがある場合に、渦と壁面との干渉による渦変形およびそれによって発生する空力音の計算結果に与える影響を調べ以下の知見を得た。

- ① Gaitonde and Visbal(2000)が提案した境界近傍に4次精度境界コンパクトフィルタを用いた場合には、音響場についてもレファレンスデータに近い値を得られることが明らかになった。これは、4次精度境界コンパクトフィルタの伝達関数の実部での増幅は α によらずに微小であり、空力音の原因となる双極渦の渦運動が4次精度コンパクトフィルタの実部での増幅の影響をほとんど受けないためであると考えられる。さらに、フリーパラメータ α の選択が空力音の計算結果に与える影響は2次精度コンパクトフィルタを用いる場合と比較して小さいという優れた特徴があることを見出した。以上より、空力音の数値計算に適切な境界より1つ内側のノードでは、Gaitonde and Visbal(2000)の4次精度境界コンパクトフィルタを用いる方法が適切であると考えられる。
- ② Visbal and Gaitonde(1998)が提案した境界近傍でフィルタの精度の次数を低下させる場合には、観察される空力音は、境界より1つ内側のノードにおける2次精度コンパクトフィルタのフリーパラメータ α の値に強く影響を受けることが明らかになった。これは、二次精度コンパクトフィルタの伝達関数は α の影響を受け、音波発生メカニズムを支配する渦と壁面との相互作用による渦運動が境界より1つ内側のノードにおける2次精度コンパクトフィルタのフリーパラメータ α の大きさに影響を強く受けるためであると考えられる。

- ③ Gaitonde and Visbal(2000)が提案した境界近傍に6次精度境界コンパクトフィルタを用いた場合には、音響場についてレファレンスデータとの位相のずれが大きい。双極渦の渦運動については、レファレンスデータと大きくかい離する。これは、音波発生メカニズムを支配する双極渦と二次渦の渦運動が6次精度境界コンパクトフィルタの伝達関数の特性（6次精度境界コンパクトフィルタでは、実部が高波数領域で1以上となり、高波数成分が増幅されることおよび虚部が高波数領域で0とならず、数値的な不安定性を含む）のために壁面上の二次渦の渦度の絶対値を過大に評価するという影響を強く受けるためであると考えられる。
- ④ 境界より1つ内側のノードにLele(1992)の4次精度陽的フィルタを用いることによって、境界より1つ内側のノードにおける最適なフリーパラメータ α を考慮することなくレファレンスデータとの位相のずれが少ない解を得ることができる計算手法を構築した。ただし、格子解像度の影響を受けやすいことに留意する必要がある。
- ⑤ 境界より2つ内側の伝達関数の特性において波数 κ において伝達関数が0とならない場合には、渦と壁面との相互作用によって発生する空力音の位相にずれが生じる場合があった。

第4章 コンパクトスキームとコンパクトフィルタを用いた衝撃波捕獲法の評価

4.1 支配方程式

支配方程式は直交座標系で記述された1次元圧縮性オイラー方程式である。ただし、 ρ は密度、 u は x 方向速度、 p は圧力、 E_T は式(4-4)に示すように運動エネルギーと内部エネルギーの和を示す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial(E_T u)}{\partial x} + \frac{\partial(pu)}{\partial x} = 0 \quad (4-3)$$

$$E_T = \frac{1}{2} \rho u u + \frac{p}{\gamma - 1} \quad (4-4)$$

4.2 Sod Problem

Sod Problem では一次元の衝撃波管内流れを扱う。Sod(1978)により提案された、一次元圧縮性オイラー方程式を用いたスキームの衝撃波捕獲性能評価の問題である。この問題は計算手法の衝撃波捕獲性能を調査する研究に多く用いられているため、スキームの性能によって衝撃波捕獲性能の相対比較が可能である。本研究の目的である、コンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの衝撃波捕獲性能の評価に適しているのでこの問題を用いることにした。空気を想定し、比熱比 $\gamma=1.4$ とした。クーラン数 $CFL=1.0$ とした。厳密解は関係する式により理論的に求めることができる。厳密解は論文のグラフ中、黒線で示す。

4.3 Shu-Osher Problem

Shu-Osher 問題は、衝撃波とエントロピー波の干渉問題である。エントロピー波は、数値散逸に対して敏感である。ローパスフィルタは高波数成分に数値散逸を与えるような作用を生じるため、衝撃波を含む流れにおけるローパスフィルタの性能の検証に適切な問題である。初期条件は、Kawai and Lele(2008)に従い、計算領域は $-5 \leq x \leq 5$ とし、等間隔格子を

用い、格子点数 $N_x=201, 401, 1001$ とした。コンパクトフィルタのフリーパラメータの影響を調べるため、フリーパラメータの値を $0.4, 0.45, 0.49, 0.495, 0.499$ とした。レファレンスデータを格子点数 1001 でフリーパラメータ 0.45 の場合とした。時間刻み $\Delta t=1.0 \times 10^{-4}$ とした。空気を想定し、比熱比 $\gamma=1.4$ とした。

Shu-Osher 問題においては、8 次精度境界コンパクトフィルタを用いた場合では、 $x=-5$ の境界近傍において計算が不安定になり、妥当な計算結果が得られなかったため、境界近傍は低次精度コンパクトフィルタを用いることによって対応させた。具体的には、境界ではフィルタを用いず、境界より 1 つ内側では二次精度コンパクトフィルタ、境界より 2 つ内側では 4 次精度コンパクトフィルタ、境界より 3 つ内側は 6 次精度コンパクトフィルタを用いた。コンパクトフィルタのフリーパラメータは境界近傍においても 8 次精度コンパクトフィルタでのフリーパラメータと同じに設定した。

Table4-1 Initial conditions of Sod problem

	$0 \leq x < 0.5$	$0.5 \leq x \leq 1$
Density	1	0.125
Pressure	1	0.1
Velocity	0	0

Table2-2 Boundary condition of Sod problem

	$x=0$	$x=1$
Density	1	0.125
Pressure	1	0.1
Velocity	0	0

Table4-3 Initial conditions of Shu-Osher problem

	$-5 \leq x < -4$	$-4 \leq x \leq 5$
Density	3.857143	$1+0.2\sin(5x)$
Pressure	10.33333	1
Velocity	2.629369	0

Table4-4 Boundary conditions of Shu-Osher problem

	$x=-5$	$x=5$
Density	3.857143	$1+0.2\sin(5x)$
Pressure	10.33333	1
Velocity	2.629369	0

4.4 計算条件

本研究では、コンパクトスキームの解像度ならびにコンパクトフィルタの伝達関数の特性が非線形性の強い流れ場特に、衝撃波を含む圧縮性流れの計算結果に与える影響を明らかにするため、表1に示す組み合わせで、Sod's problem を解いた。さまざまな解像度で比較を行うため、コンパクトスキームには、Leleによって開発された3重対角6次精度、3重対角8次精度、5重対角10次精度コンパクトスキーム、およびKimによって開発された5重対角4次精度コンパクトスキーム(Kim, 2013)を用いた。具体的には2.3.1節に述べる。さまざまな伝達関数で比較を行うため、コンパクトフィルタには、Lele, Gaitonde, Zhanxin, およびKimによって開発されたコンパクトフィルタを用いた。具体的には2.3.2節に述べる。

また、空間差分スキームは3重対角6次精度コンパクトスキームに固定し、ローパスフィルタに8次精度コンパクトフィルタを用いてShu-Osher問題を解いた。

圧縮性オイラー方程式の時間発展には、4次精度Runge-Kutta法を用い、コンパクトフィルタはRunge-Kutta法のすべての段において用いた。クーラン数CFL=1.0とした。空間刻み $\Delta x=0.01$ 、格子点数 $N_x=101$ の等間隔格子とした。

本研究では、以下の4種類の検討を実施する。

- ①コンパクトフィルタの影響（空間微分は、Leleの3重対角6次精度コンパクトスキームに固定）
- ②コンパクトフィルタの影響（空間微分は、Kimの5重対角4次精度コンパクトスキームに固定）
- ③コンパクトスキームの影響1（コンパクトフィルタは、Gaitondeの8次精度コンパクトフィルタに固定）
- ④コンパクトスキームの影響2（コンパクトフィルタは、Kimの6次精度コンパクトフィルタ（カットオフ波数 0.88π ）に固定）

Table4-5 The number of filters assessed in the present paper (This table was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese))

		Compact scheme			
		Lele			Kim
		6th order (LS6)	8th order (LS8)	10th order (LS10)	4th order (KS4)
Compact filter	Lele (LF)	3	/	/	/
	Kim (KF)	1	1	1	9
	Gaitonde (GF)	4	4	4	4
	Zhanxin (ZF)	5	/	/	/

そのコンパクトフィルタのフリーパラメータを0.4, 0.45, 0.49, 0.495, 0.499の5種類にして、フリーパラメータの影響を調べた。また、格子点数を201,401,1001の3種類にして、格子解像度の影響を調べた。

以降、 $\hat{\cdot}$ は1階微分および $\hat{\cdot}$ はフィルタをかけた値を表す。 Δx は、格子間隔を示す。スキームの精度が6次精度の場合はS6のように、フィルタの精度が8次精度の場合はF8のように略記する。また、スキームやフィルタの種類は開発者の頭文字で略記する(LeleはL, GaitondeはG, ZhanxinはZ, KimはK)。例えばLeleの6次精度コンパクトスキームはLS6, Gaitondeの8次精度コンパクトフィルタはGF8となる。なお、Kimのコンパクトフィルタでとくにカットオフ波数の記載がない場合にはカットオフ波数 0.88π である。

4.4.1 コンパクトスキーム

Leleのコンパクトスキームは式(4-5)で表される。本研究では、数多くの研究で用いられている3重対角6次精度、3重対角の中で最も解像度の高い3重対角8次精度、最高の精度をもつ5重対角10次精度コンパクトスキームを用いた。本研究では、文献(Lele, 1992)に記載されている係数を用いた。それらの分散誤差の特性を図4-1(a)に示す。図より、この3種類のコンパクトスキームでは、精度が向上するほど解像度が向上する。境界には、境界に対応した4次精度のスキームを用いた。Carpenter, et al.(1993)により、この4次精度境界スキームの不安定性が指摘されているが、本研究においては考慮しない。また、境界より1つ内側のノードでは式(4-6)に示す4次精度Padéスキーム、境界より2つ内側のノードでは式(2-7)に示す3重対角6次精度スキームを用いることにより境界に対応させた。

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6\Delta x} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (4-5)$$

境界部で4次精度の境界コンパクトスキーム、境界より一つ内側のノードで式(7)の4次精度Padéスキームを用いる組み合わせである。

$$f'_1 + 3f'_2 = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{17}{6}f_1 + \frac{3}{2}f_2 + \frac{3}{2}f_3 - \frac{1}{6}f_4 \right) \quad (4-6)$$

境界から一つ内側のノードでは次の4次精度Padéスキームを用いる。

$$\frac{1}{4}f'_1 + f'_2 + \frac{1}{4}f'_3 = \frac{3}{2} \frac{f_3 - f_1}{2\Delta x} \quad (4-7)$$

境界より二つ内側のノードでは以下の3重対角6次精度コンパクトスキームを用いる。

$$\frac{1}{3}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{3}f'_{i+1} = \frac{1}{9}\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{14}{9}\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (4-8)$$

Kim の 4 次精度コンパクトスキーム(Kim, 2013)は, 式(4-12)で表される. その分散誤差の特性を図 4-1(a)に示す. Kim の 4 次精度コンパクトスキームは, Lele のコンパクトスキームよりも低次精度ではあるが, スキームの解像度を向上させるよう最適化している. 境界では式(4-9), 境界より 1 つ内側のノードでは式(4-10)および 2 つ内側のノードでは式(4-11)のそれぞれ Kim の境界に対応した 4 次精度のスキームを同時に用いた. 本研究ではいずれも文献(Kim, 2013)に記載されている係数を用いた.

$$f'_i + \gamma_{01}f'_{i\pm 1} + \gamma_{02}f'_{i\pm 2} = \pm \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=0, \neq 0}^6 b_{0m}(f_{i+m} - f_i) \quad (4-9)$$

$$\gamma_{10}f'_i + f'_{i\pm 1} + \gamma_{12}f'_{i\pm 2} + \gamma_{13}f'_{i\pm 3} = \pm \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=0, \neq 1}^6 b_{1m}(f_{i+m} - f_{i\pm 1}) \quad (4-10)$$

$$\gamma_{20}f'_i + \gamma_{21}f'_{i\pm 1} + f'_{i\pm 2} + \gamma_{23}f'_{i\pm 3} + \gamma_{24}f'_{i\pm 4} = \pm \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=0, \neq 2}^6 b_{2m}(f_{i+m} - f_{i\pm 2}) \quad (4-11)$$

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^3 a_m(f_{i+m} - f_{i-m}) \quad (4-12)$$

4.4.2 コンパクトフィルタ

Lele のコンパクトフィルタは, 式(4-13)で表される. 6 次精度コンパクトフィルタ及び 2 種類の 4 次精度コンパクトフィルタを用いた. 境界近傍には, 4 次精度の陽的なフィルタを用いた. 本研究では, いずれも文献(Lele, 1992)に記載されている係数を用いた. フィルタ伝達関数の特性を図 4-1(b)に示す. 図より, それぞれの伝達関数が異なるためフィルタにより除去される波数の範囲が異なる.

$$\hat{\beta}f_{i-2} + \hat{\alpha}f_{i-1} + \hat{f}_i + \hat{\alpha}f_{i+1} + \hat{\beta}f_{i+2} = \alpha f_i + \frac{b}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + \frac{c}{2}(f_{i+2} + f_{i-2}) + \frac{d}{2}(f_{i+3} + f_{i-3}) \quad (4-13)$$

$$\hat{f}_1 = \frac{15}{16}f_1 + \frac{1}{16}(4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - f_5) \quad (4-14)$$

$$\hat{f}_2 = \frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{16}(f_1 + 6f_3 - 4f_4 + f_5) \quad (4-15)$$

$$\hat{f}_3 = \frac{5}{8}f_3 + \frac{1}{16}(-f_1 + 4f_2 + 4f_4 - f_5) \quad (4-16)$$

Kim の 6 次精度コンパクトフィルタは, 式(4-22)で表される. Kim のコンパクトフィルタは Lele の 6 次精度コンパクトフィルタを変形したに過ぎない. なお, Lele のフィルタは, α をフリーパラメータとして任意のカットオフ波数のコンパクトフィルタ作成しうるが, Kim のコンパク

トフィルタは、Lele のフィルタを変形することによって得られ、そのフリーパラメータはカットオフ波数である。本研究においては、Kim(2013)に記載されている境界近傍のカットオフ波数の組み合わせ（境界では 0.66π ，境界より一つ内側のノードでは 0.715π ，境界より二つ内側のノードでは 0.825π ）に固定した。境界近傍以外のノードにおいては、図 4-1(e)に示すような伝達関数を持つ 0.6π ， 0.65π ， 0.7π ， 0.75π ， 0.8π ， 0.85π ， 0.88π ， 0.9π ，および 0.95π の 9 つのカットオフ波数(Kc)とした。

そのフィルタ伝達関数の特性は、図 2-1(e)のようになる。

$$\beta\hat{\Delta}f_{i-2} + \alpha\hat{\Delta}f_{i-1} + \hat{\Delta}f_i + \alpha\hat{\Delta}f_{i+1} + \beta\hat{\Delta}f_{i+2} = \sum_{m=1}^3 a_m (f_{i-m} - 2f_i + f_{i+m}) \quad (4-22)$$

ここで、 $\hat{\Delta}f_i = \hat{f}_i - f_i$ である。

ローパスフィルタには Kim の 6 次精度コンパクトフィルタを用い、境界近傍においても Kim の境界フィルタを用いた。

$$\hat{\Delta}f_1 + \gamma_{F01}\hat{\Delta}f_2 + \gamma_{F02}\hat{\Delta}f_3 = 0 \quad (4-23)$$

$$\gamma_{F10}\hat{\Delta}f_1 + \hat{\Delta}f_2 + \gamma_{F12}\hat{\Delta}f_3 + \gamma_{F13}\hat{\Delta}f_4 = 0 \quad (4-24)$$

$$\gamma_{F20}\hat{\Delta}f_1 + \gamma_{F21}\hat{\Delta}f_2 + \hat{\Delta}f_3 + \gamma_{F23}\hat{\Delta}f_4 + \gamma_{F24}\hat{\Delta}f_5 = \sum_{m=0, \neq 2}^5 b_{F2m} (f_{1+m} - f_3) \quad (4-25)$$

Gaitonde の開発したコンパクトフィルタは、式(4-17)で表される。

$$\alpha\hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha\hat{f}_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (f_{i+n} + f_{i-n}) \quad (4-17)$$

ここで、 α はフリーパラメータであり一般的には $0.4 < \alpha \leq 0.495$ 程度の範囲で用いることが多い。Kawai, et al.(2010)が 8 次精度で $\alpha=0.495$ を用いていることから、本研究でも、8 次精度フィルタ ($\alpha=0.4, 0.45, 0.49, 0.495$) を対象とした。ここで、右辺の係数 $a_0 \sim a_4$ は以下のように表される。

$$a_0 = \frac{93+70\alpha}{128}, \quad a_1 = \frac{7+18\alpha}{16}, \quad a_2 = \frac{-7+14\alpha}{32}, \quad a_3 = \frac{1-2\alpha}{16}, \quad a_4 = \frac{-1+2\alpha}{128}$$

境界近傍では、伝達関数の実部が高波数領域において 1 以上となることから一部の波数を増幅させ、かつ、伝達関数の虚部が 0 という条件を満足しないことから、計算が不安定化する場合があることが指摘されているものの、精度の面で優位性があることから、Gaitonde の 8 次精度の境界フィルタを用いる。境界を除くすべてのノードで同じ α の値を用いた。境界ではフィルタを用いない。これらのフィルタ伝達関数の特性を図 4-1(c)に示す。

図より、 α の値が 0.5 に近づくほど、除去される波数の範囲が高波数側に限定されることが分かる。

$$\alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} = \sum_{n=1}^9 a_{n,i} \phi_n \quad (4-18)$$

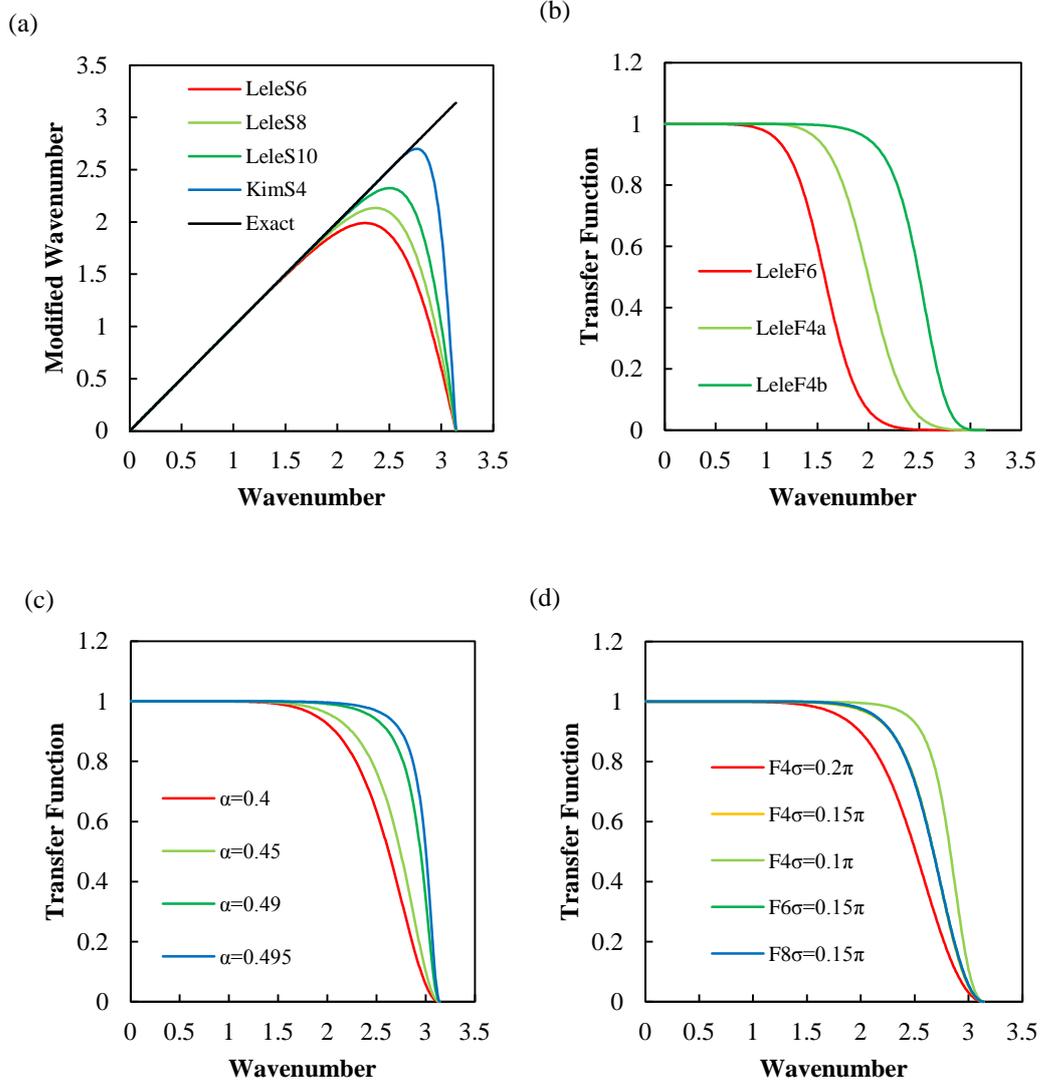


Fig.4-1 Plots of modified wavenumber for first derivative approximations of compact scheme developed by (a) Lele (Lele, 1992) and Kim (Kim, 2013) and filtering transfer function developed by (b) Lele (Lele, 1992), (c) Gaitonde (Gaitonde and Visbal, 2000), (d) Zhanxin (Zhanxin, et al., 2009). For instance, S6 means 6th order compact finite difference scheme and F8 means 8th order filter. α is a free parameter of Gaitonde's compact filter. σ is a halfwidth of Zhanxin's compact filter (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

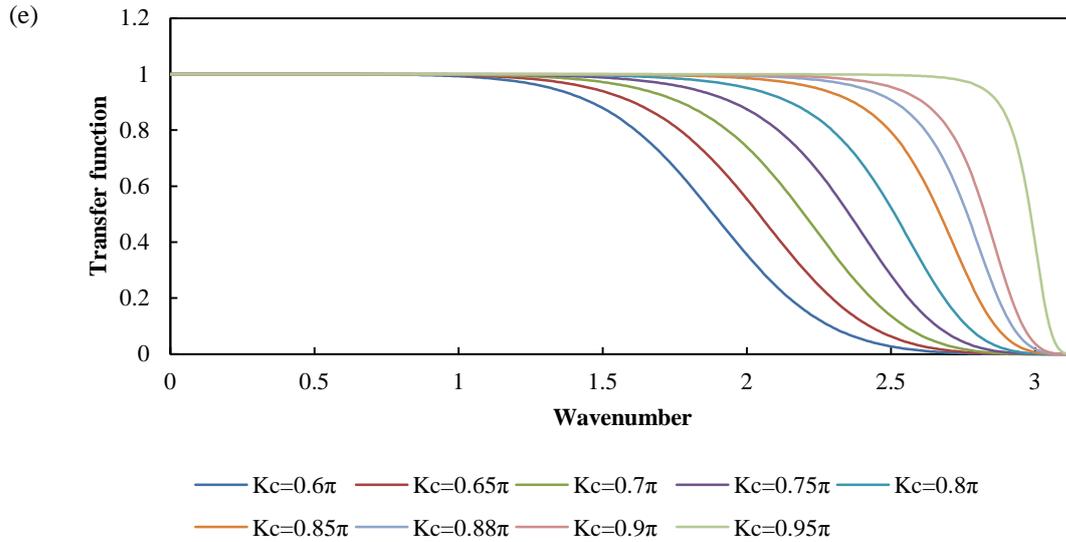


Fig.4-1 Plots of filtering transfer function developed by (e) Kim(Kim, 2013)

Zhanxin のコンパクトフィルタ (Zhanxin, et al., 2009)は, 式(4-19)で表される.

$$\beta \hat{f}_{i-2} + \alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} + \beta \hat{f}_{i+2} = \sum_{l=0}^n \frac{P_l}{2} (f_{i+l} + f_{i-l}) \quad (4-19)$$

例えば 4 次精度半値幅 0.2π のコンパクトフィルタを $F4\sigma=0.2\pi$ と略記する. 本研究では, 4 次精度 $\sigma=0.2\pi$, 4 次精度 $\sigma=0.15\pi$, 4 次精度 $\sigma=0.1\pi$, 6 次精度 $\sigma=0.15\pi$, 8 次精度 $\sigma=0.15\pi$ を用いた. 境界近傍では, 計算領域内部と同じ精度で同じ半値幅の境界対応の境界フィルタを用いた. 境界ではフィルタをかけない.

$$\sum_{m=1}^5 a_{im} \hat{f}_m = \sum_{n=1}^6 b_{in} f_n \quad (4-20)$$

$$\sum_{m=1}^5 a_{im} \hat{f}_{N+1-m} = \sum_{n=1}^6 b_{in} f_n \quad (4-21)$$

本研究では, 文献(Zhanxin, 2009)に記載されている係数を用いた. これらのフィルタ伝達関数の特性を図 4-1(d)に示す. 4 次精度 $\sigma=0.15\pi$, 6 次精度 $\sigma=0.15\pi$, 8 次精度 $\sigma=0.15\pi$ はほぼ同じ結果を与え, 図では重なっている.

4.4.3 時間発展

時間発展は 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いた. 具体的な計算方法は以下の通りである. コンパクトフィルタは Runge-Kutta 法のすべての段において用いた.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = S(f, t) \text{ とし,}$$

$$S_1 = S(f^n, t_n)$$

$$S_2 = S(f^n + \Delta t S_1/2, t_n + \Delta t/2)$$

$$S_3 = S(f^n + \Delta t S_2/2, t_n + \Delta t/2)$$

$$S_4 = S(f^n + \Delta t S_3, t_n + \Delta t)$$

$$f^{n+1} = f^n + \Delta t (S_1 + 2S_2 + 2S_3 + S_4)/6$$

4.5 計算結果の評価方法 (Sod problem)

Sod 問題での各条件における解析精度の評価には、衝撃波近傍の速度のオーバーシュート、膨張波後端近傍の速度のオーバーシュート、膨張波後端から衝撃波までの速度分布の誤差の L1, L2 ノルム、およびを用いた。まず、衝撃波近傍のオーバーシュートは、衝撃波捕獲の性能を示す最も基本的かつ重要な指標であることから用いた。次に、膨張波後端近傍のオーバーシュートは、コンパクトフィルタの伝達関数の衝撃波捕獲性能に及ぼす影響が明確にわかることから用いた。また、膨張波後端から衝撃波までの速度分布の誤差については、衝撃波捕獲法では衝撃波などの急な勾配のある部分で発生した数値的な振動がなめらかな領域に影響を及ぼさないことが重要であり、定量的な評価を行うために用いた。

$$L1norm = \sum_{i=i_{EE}}^{i_s} |u_i - u_{i,exact}|$$

$$L2norm = \sqrt{\sum_{i=i_{EE}}^{i_s} |u_i - u_{i,exact}|^2}$$

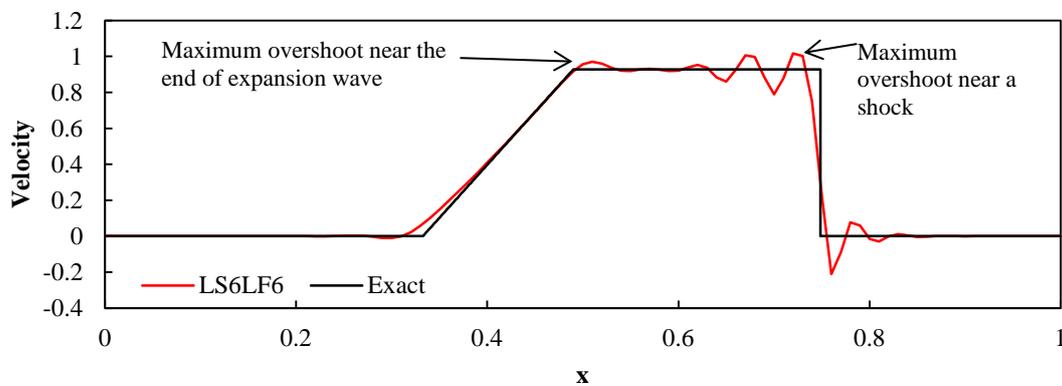


Fig.4-2 Performance index of Sod problem

4.6 コンパクトフィルタの伝達関数の影響（空間微分は，Lele の 3 重対角 6 次精度コンパクトスキームに固定）

本節では，Sod 問題において，空間差分スキームを 3 重対角 6 次精度コンパクトスキームに固定し，伝達関数の特性（シャープさ，カットオフ波数）や精度の次数の異なる種々のコンパクトフィルタと組み合わせた場合の衝撃波・膨張波捕獲性能について述べる．

4.6.1 Lele のコンパクトフィルタおよび Kim のコンパクトフィルタ（カットオフ波数 0.88π ）

図 4-3 に，LS6LF6, LS6LF4a, LS6LF4b, LS6KF6 を用いた場合の計算結果を示す．

膨張波の領域においては，フィルタの伝達関数によらず，レファレンスデータとよく一致しており，膨張波の領域においては，フィルタの伝達関数の影響は小さいと考えられる．

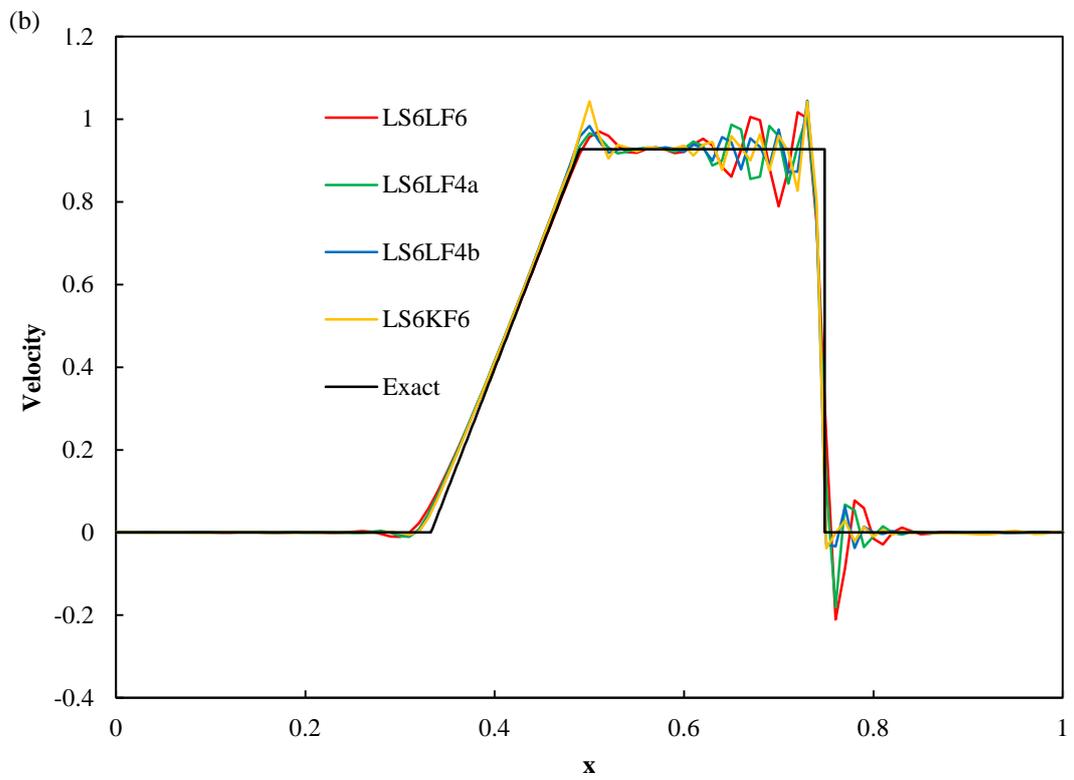
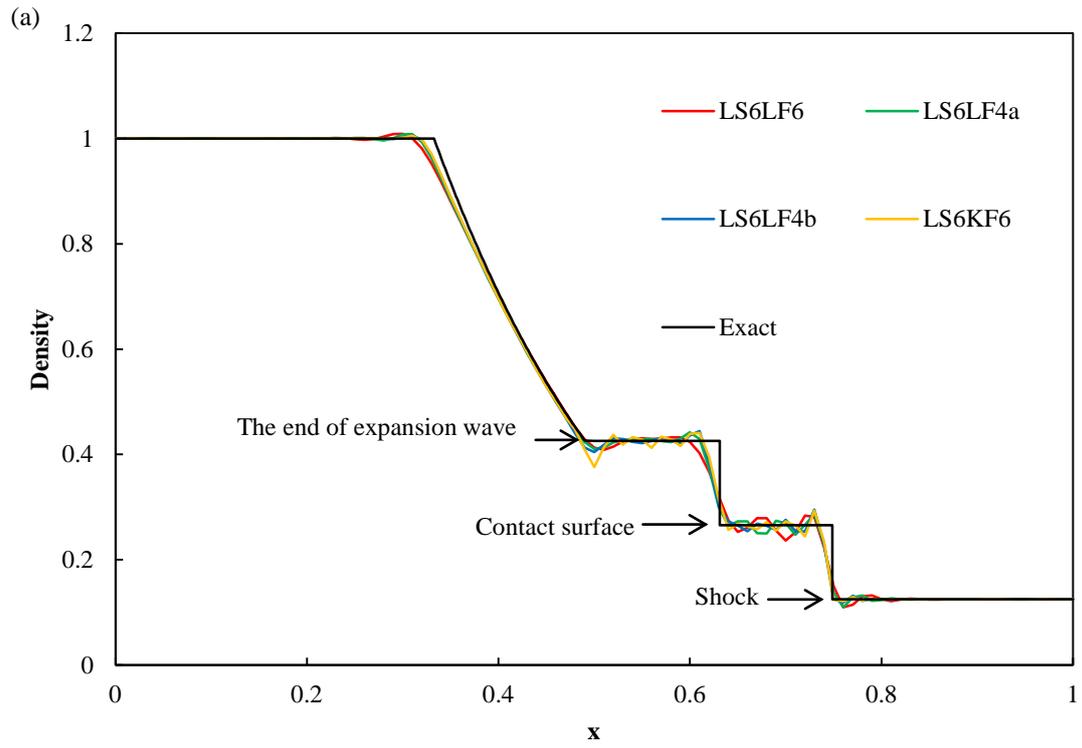
膨張波後端においては，内部エネルギーではあまりフィルタの種類による影響は観察されないものの密度，圧力，速度の各物理量に関しては厳密解との差にフィルタの伝達関数による影響が観察される．膨張波後端での速度の誤差では，LS6LF4b よりも低波数からフィルタの影響が及ぶ LS6LF4a が最も小さくなっている．しかしながら，LS6LF4a よりも低波数からフィルタの影響がおよぶ LS6LF6 においては LS6LF4a よりも膨張波後端での速度のオーバーシュートが大きくなっている．Kim のコンパクトフィルタ（カットオフ波数 0.88π ）を用いた場合では，Lele のコンパクトフィルタと比較して，膨張波後端近傍での誤差が大きくなるのが分かる．これは，LS6 の解像度と比較して高すぎるカットオフ波数となる伝達関数を持つフィルタを選択したことが原因であると考えられる．このことから，5 重対角コンパクトフィルタをもちいて，膨張波後端での速度のオーバーシュートを低下させるには，カットオフ波数を空間差分スキームで十分解像できる波数程度に設定することが効果的であることが分かった．膨張波後端から衝撃波までの間の領域では，特に LS6LF6 の場合に，密度，速度，圧力，内部エネルギーのいずれにおいても誤差が大きくなっている．これは，図 2-1(b)に見られるように，LS6 の解像度に比べて，LF6 の伝達関数によって除去される範囲は低い波数にまで及んでおり，除去される波数の範囲がより大きいためであると考えられる．

また，速度及び内部エネルギーの計算結果において，特に LS6LF6 を用いると衝撃波付近でのアンダーシュートが大きくなるのが分かった．また，LS6LF4a, LS6LF4b, LS6LF6 とともに，膨張波後端近傍での数値振動が比較的小さく抑えられる．一方，衝撃波でのアンダーシュートは LS6LF6 と LS6LF4a で大きくなる傾向にある．

4.6.2 Gaitonde コンパクトフィルタ

図 2-4 に、Gaitonde の 8 次精度コンパクトフィルタを用いた場合の計算結果を示す。膨張波の領域においては、Gaitonde のフィルタのフリーパラメータによらず、レファレンスデータとよく一致しており、膨張波の領域においては、Gaitonde のコンパクトフィルタのフリーパラメータの値によって生じる伝達関数の違いの影響は小さいと考えられる。LS6 と Gaitonde の 8 次精度コンパクトフィルタの組み合わせでは、フリーパラメータの値を 0.5 に近づけるほど、密度、速度、圧力、内部エネルギーのいずれにおいても膨張波後端近傍での数値振動が特に激しくなることが分かった。特に、Kawai らの用いている LS6GF8 で $\alpha = 0.495$ とした場合には、数値振動が最大となり、これは、LS6 で十分に解像できない波数の波の除去に Gaitonde のコンパクトフィルタを用いているが、 α の値が大きくなるほど、除去する波数の範囲が高波数の波に限定されるため、 α が 0.5 に近づくほど、LS6 で解像できない波の除去が不十分になるためであると考えられる。

Lele の 6 次精度コンパクトスキームと Gaitonde のコンパクトフィルタを組み合わせた場合のコンパクトフィルタのフリーパラメータが衝撃波とエントロピー波の干渉に及ぼす影響を 4.3 節で説明した Shu-osher 問題を用いて検証した。図 4-5 に示すように格子点数 201 では、フリーパラメータの影響が顕著に観察される。具体的には、 $\alpha = 0.4$ では、衝撃波とエントロピー波との干渉現象をよく再現できておらず、レファレンスデータと大きな差が観察される。一方、 α の値を 0.5 に近づけて増加させるとレファレンスデータに近い結果が得られるようになる。これは、フィルタで除去する波数範囲を高波数側のみに限定することによって、比較的高い波数成分の影響まで入れることができたためであると考えられる。 $\alpha = 0.499$ では、衝撃波近傍における数値振動が今回検証したほかのフリーパラメータでの計算結果に比べて大きくなることに注意が必要である。 $\alpha = 0.499$ では、空間差分スキームで十分解像できない波数成分を十分に除去できていないためであると考えられる。図 4-6 および図 4-7 に示すように、格子点数を 401, 1001 と増加させると、フリーパラメータの影響は小さくなる。格子点数 401 の場合には、 $\alpha = 0.499$ を除くと、 $x > 0.8$ においては、ほぼいずれのフリーパラメータの値を用いた場合においても計算結果はレファレンスデータと一致している。一方、 $0.5 < x < 0.75$ ではフリーパラメータの影響が観察され、フリーパラメータを 0.5 に近づけるほどレファレンスデータに近い結果が得られた。



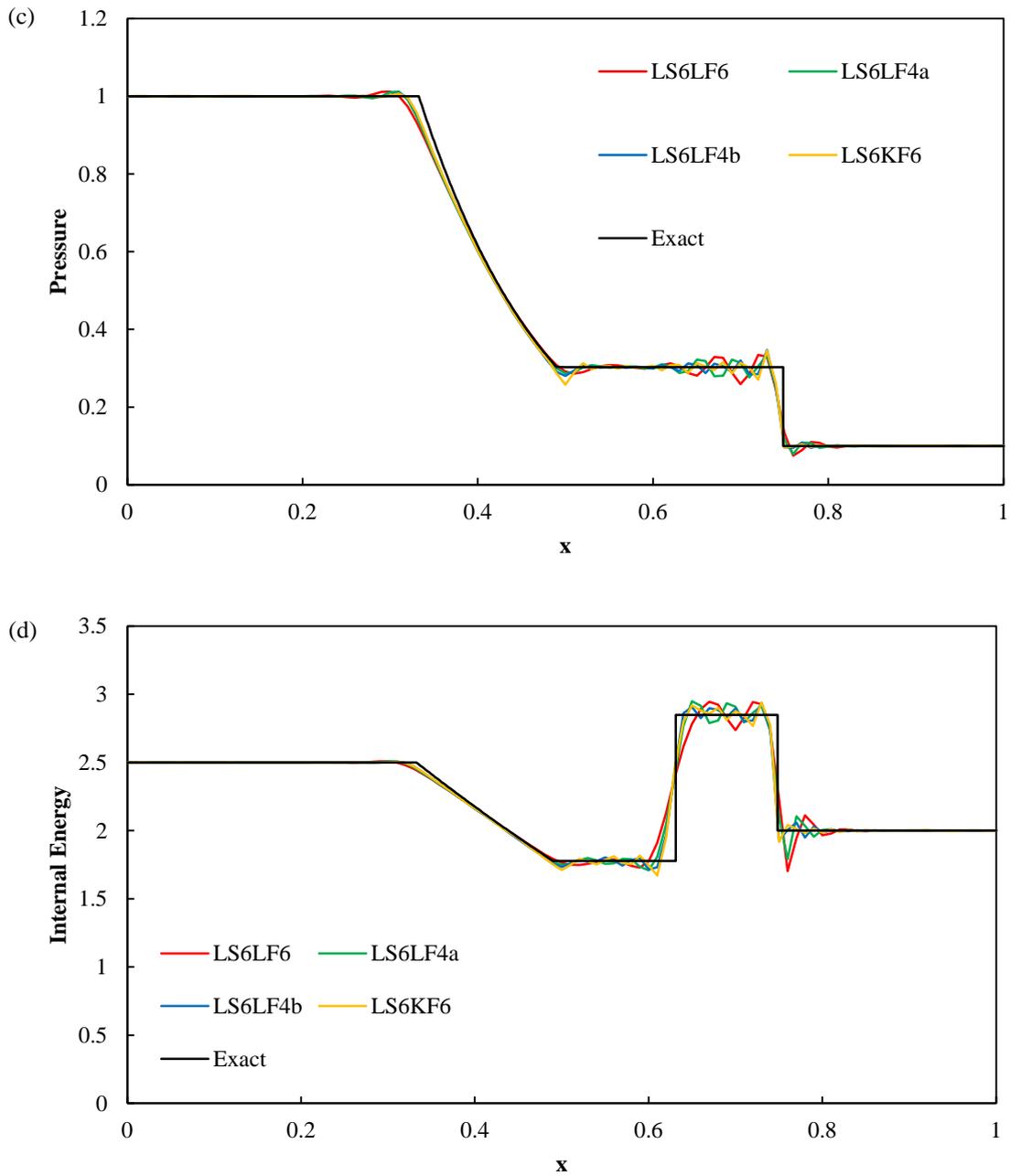
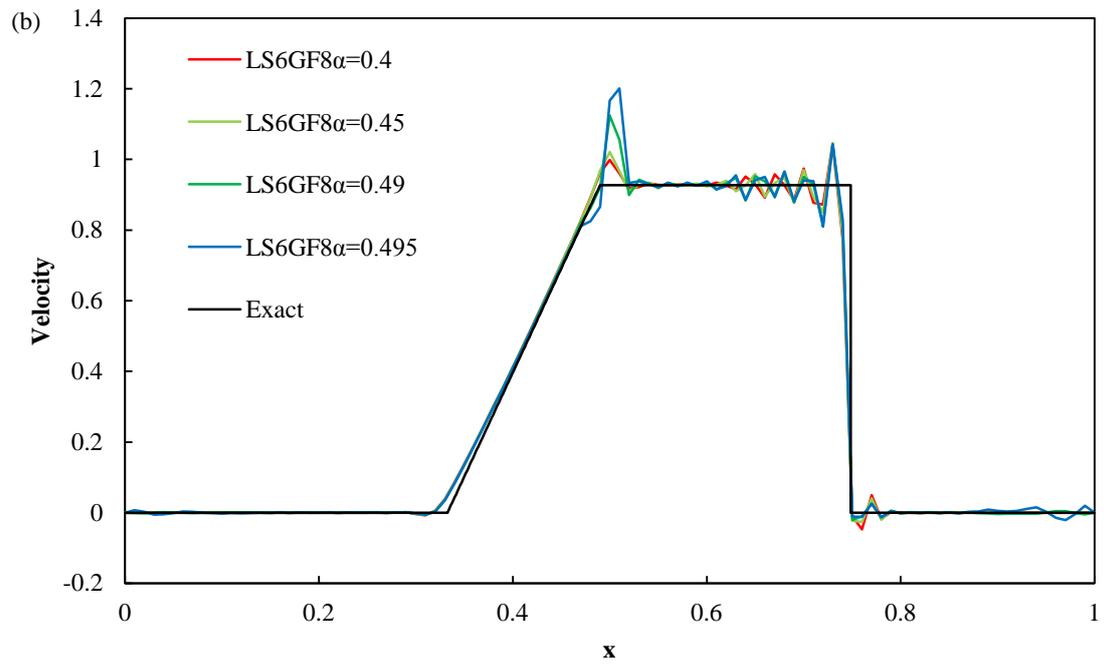
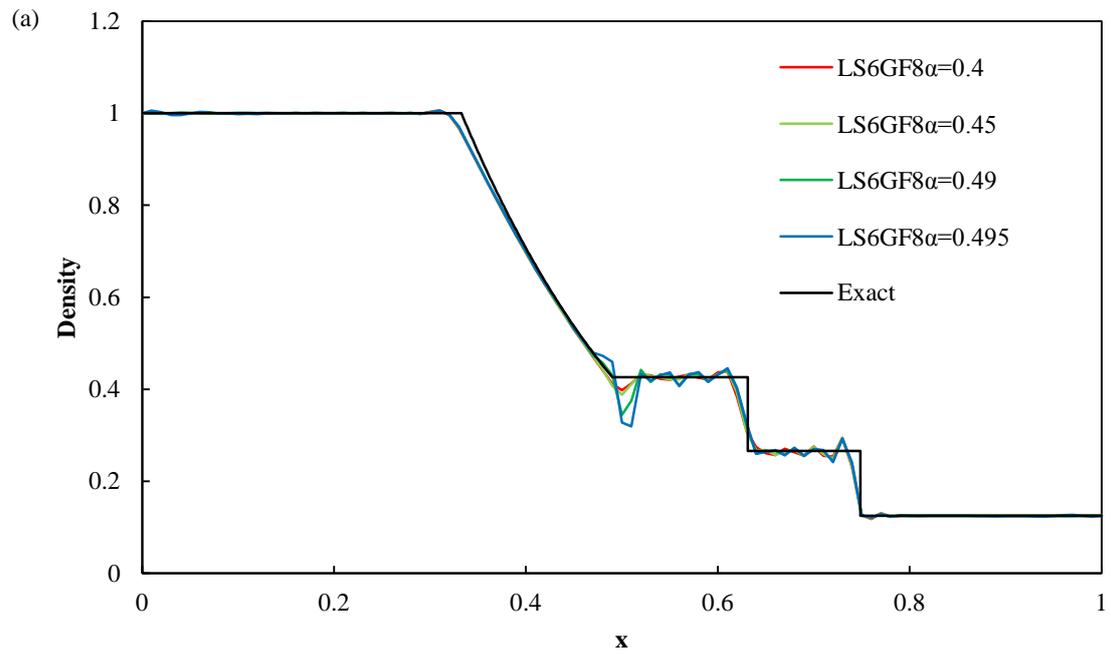


Fig.4-3 Lele's 6th order compact scheme(LS6) combined with Lele's compact filters(LF)and Kim's compact filter(KF). (a) Density, (b) velocity, (c) pressure and (d) internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points. The error of velocity and pressure field from the end of expansion wave to shock is large incase using LS6LF6. The undershoot of velocity and internal energy near shock is large in case using LS6LF6 and LS6LF4a. The numerical oscillation near the end of expansion wave is small (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).



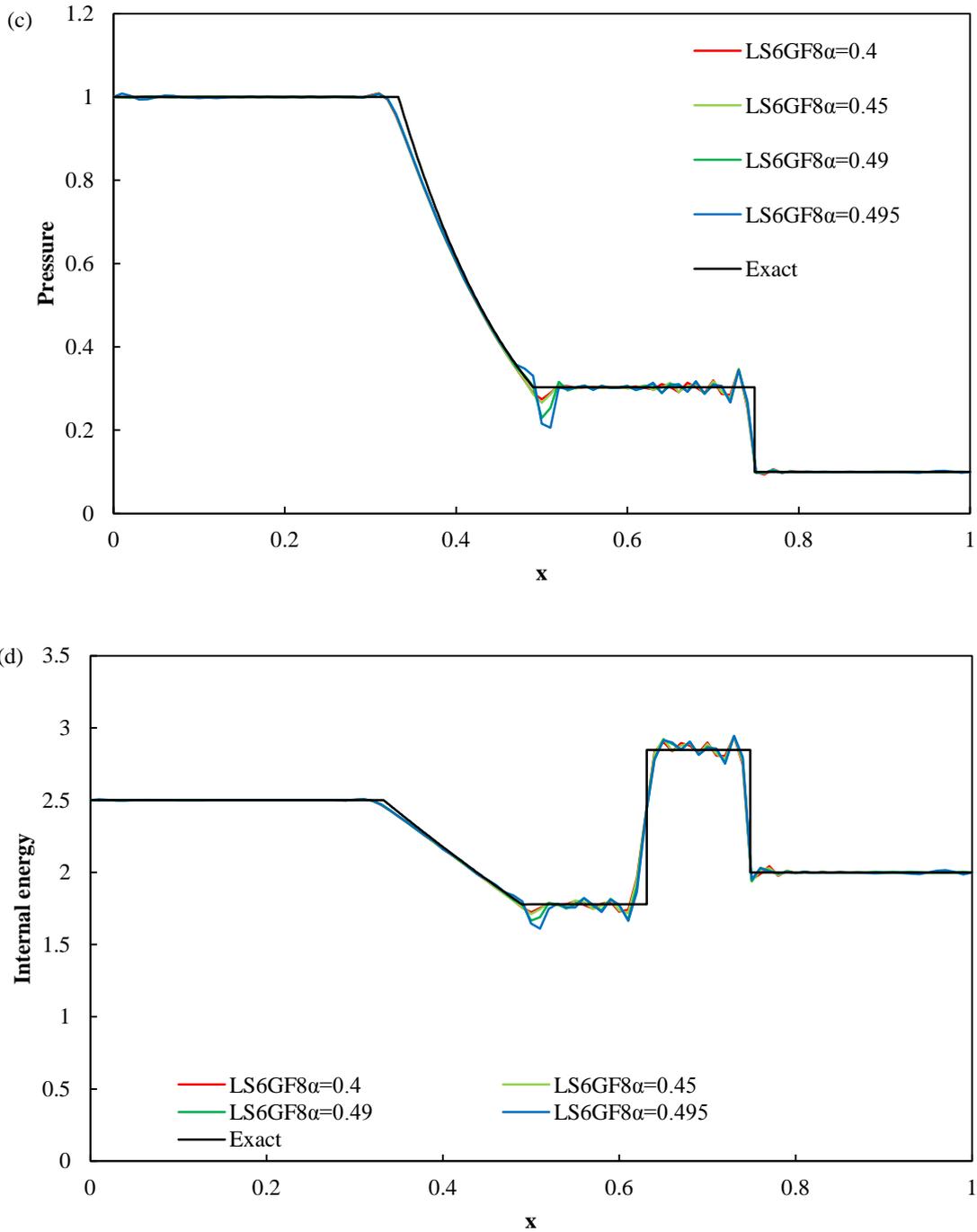


Fig.4-4 Lele's 6th order compact scheme (LS6) combined with Gaitonde's 8th order compact filters(GF8). (a) Density, (b) velocity, (c) pressure and (d) internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points. The density, velocity and pressure errors at the end of expansion wave are large (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

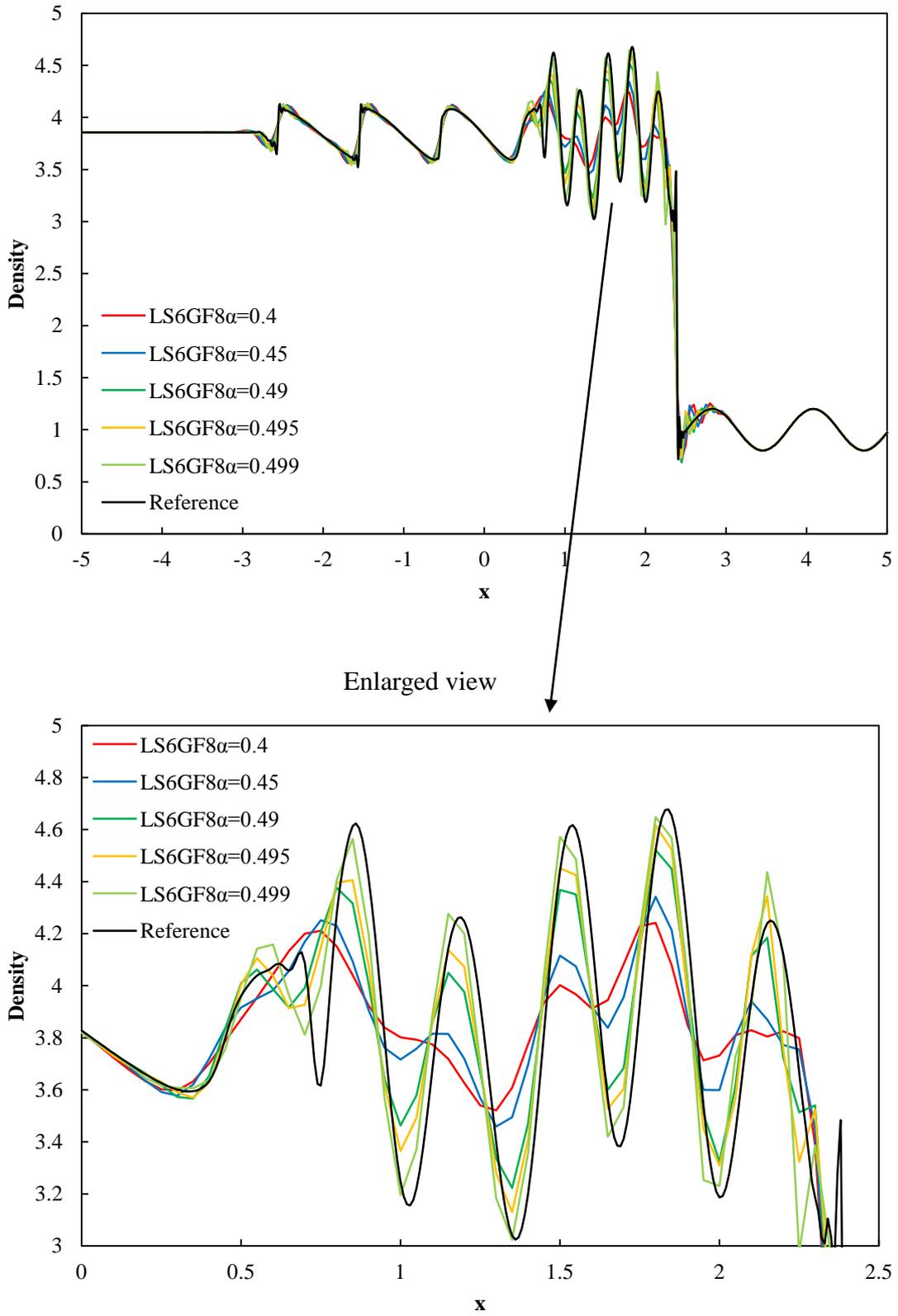


Fig.4-5 Density distribution of Shu-Osher problem at the time $t=1.8$ in case of 201 grid points

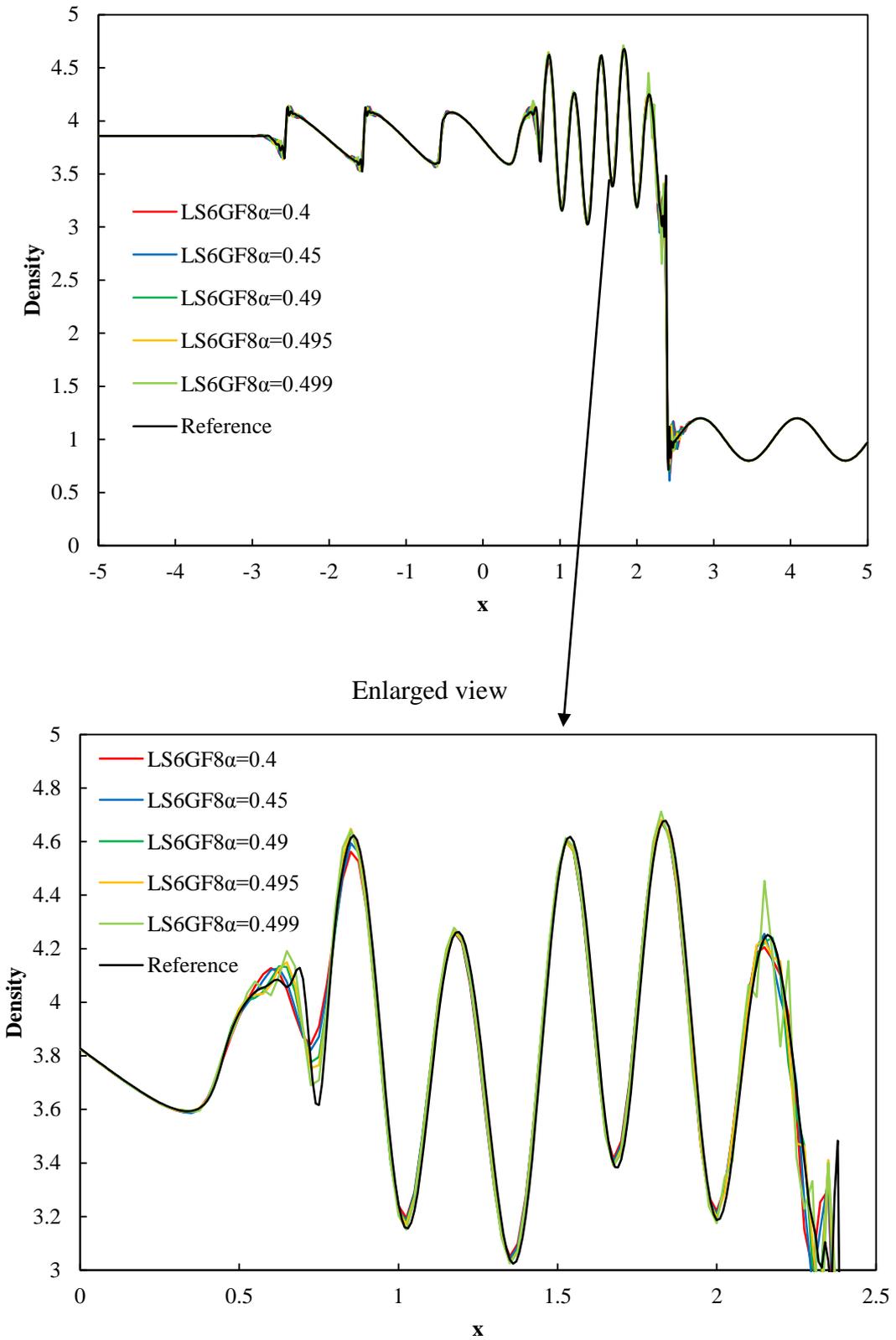


Fig.4-6 Density distribution of Shu-Osher problem at the time $t=1.8$ in case of 401 grid points

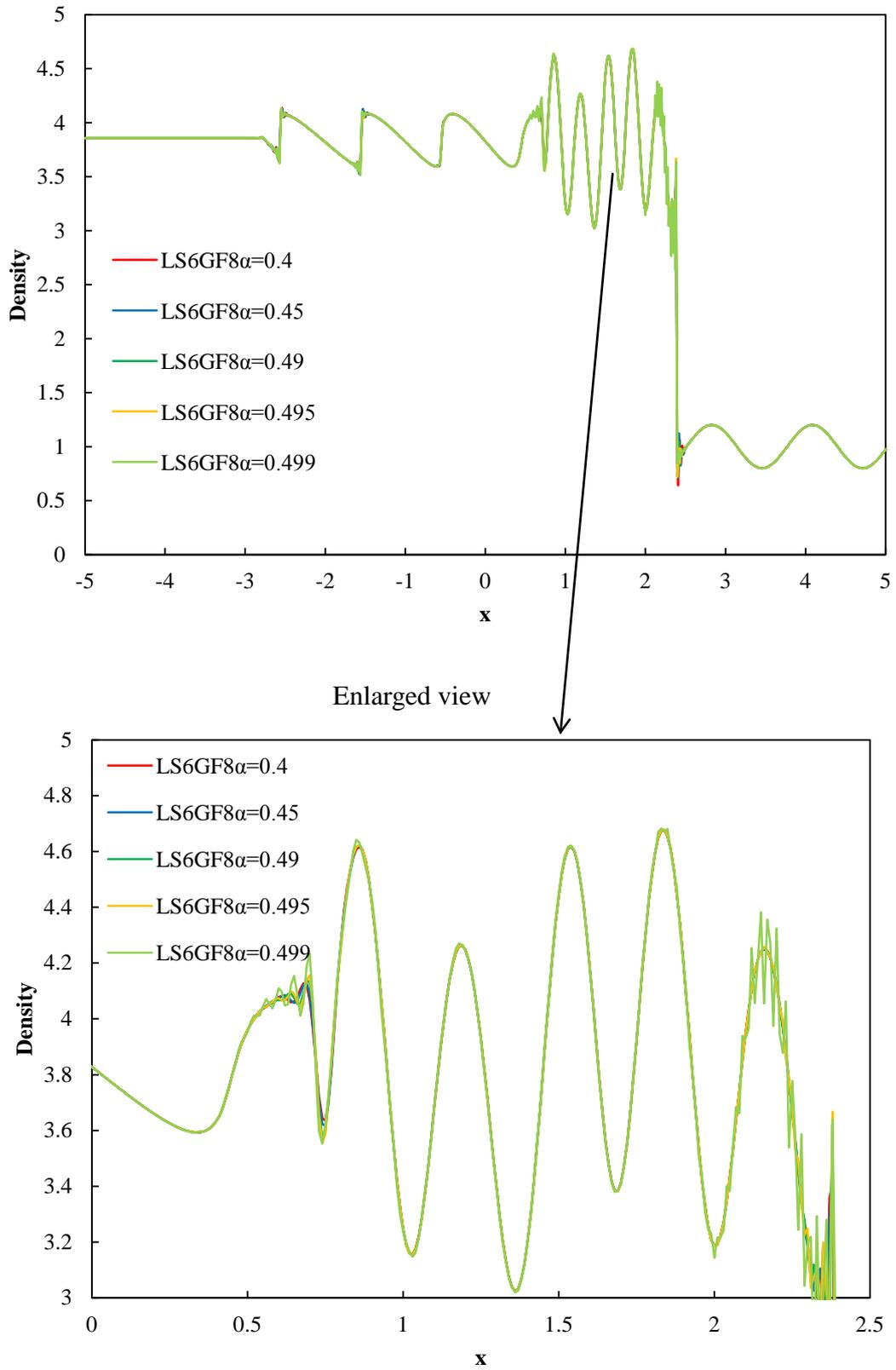
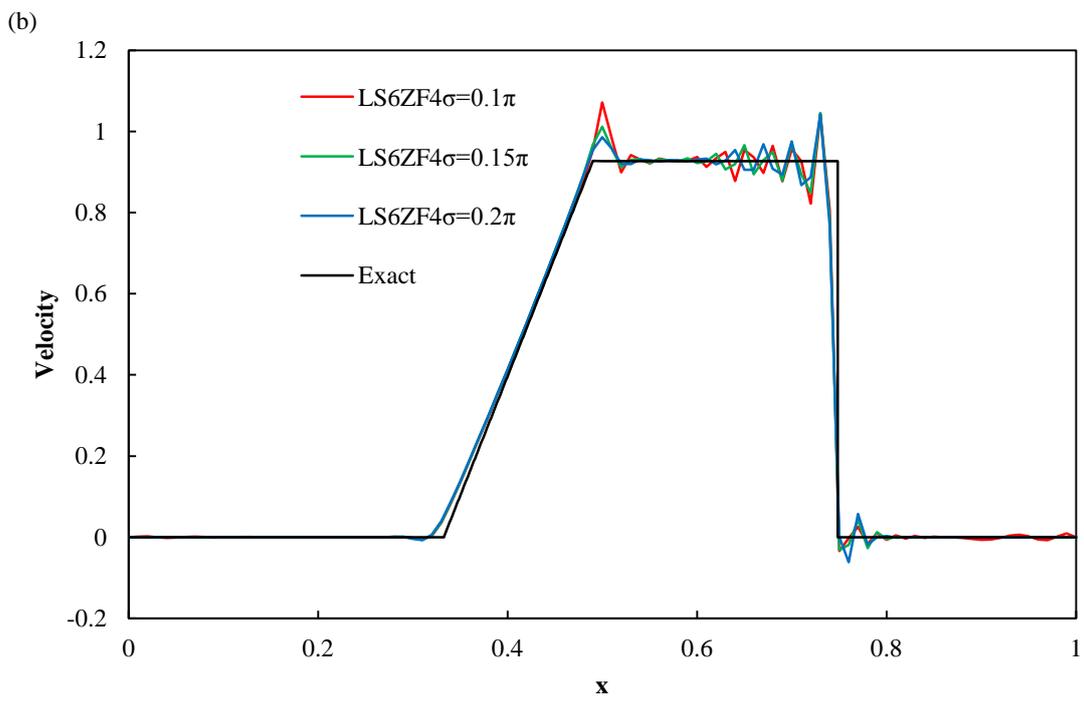
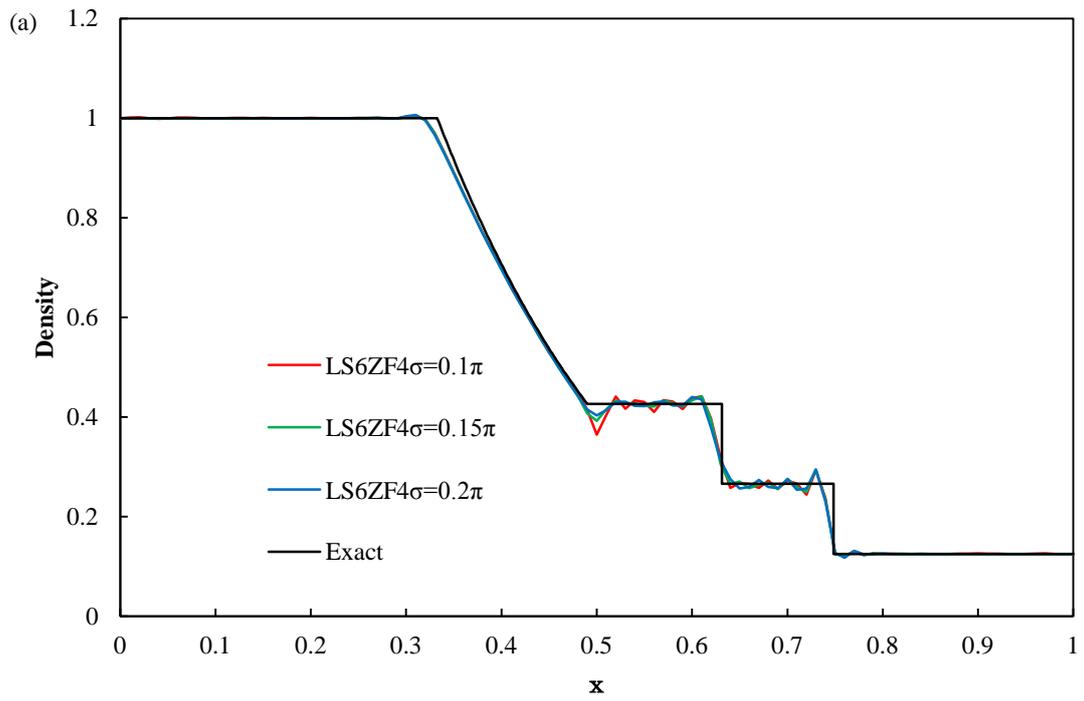


Fig.4-7 Density distribution of Shu-Osher problem at the time $t=1.8$ in case of 1001 grid points



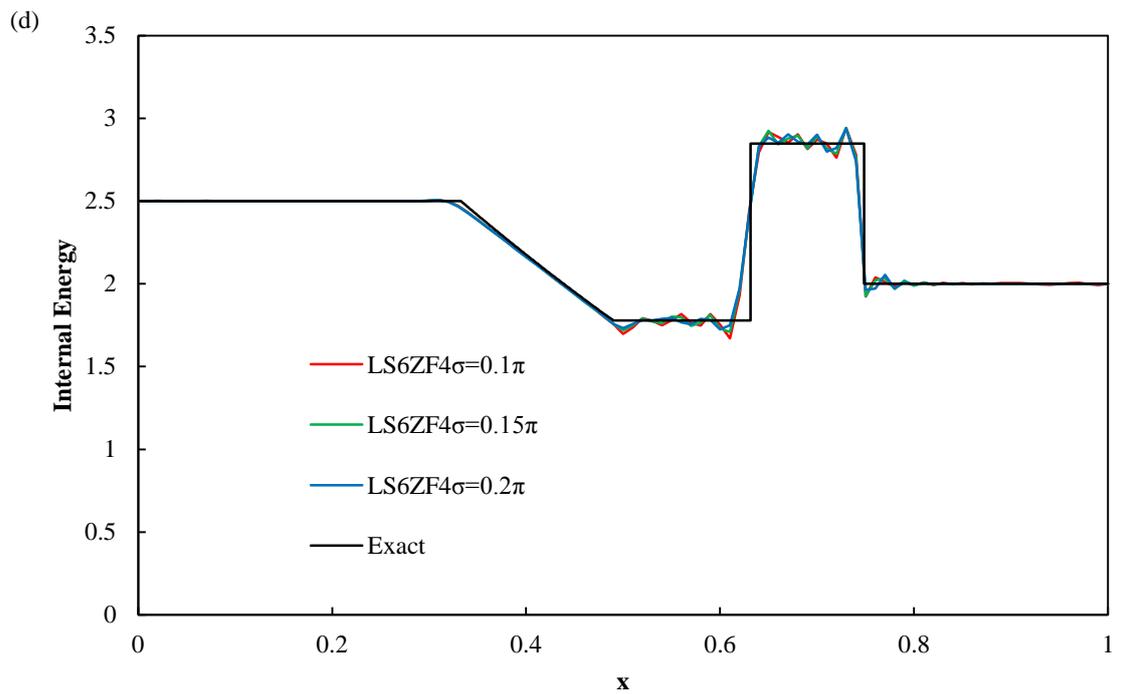
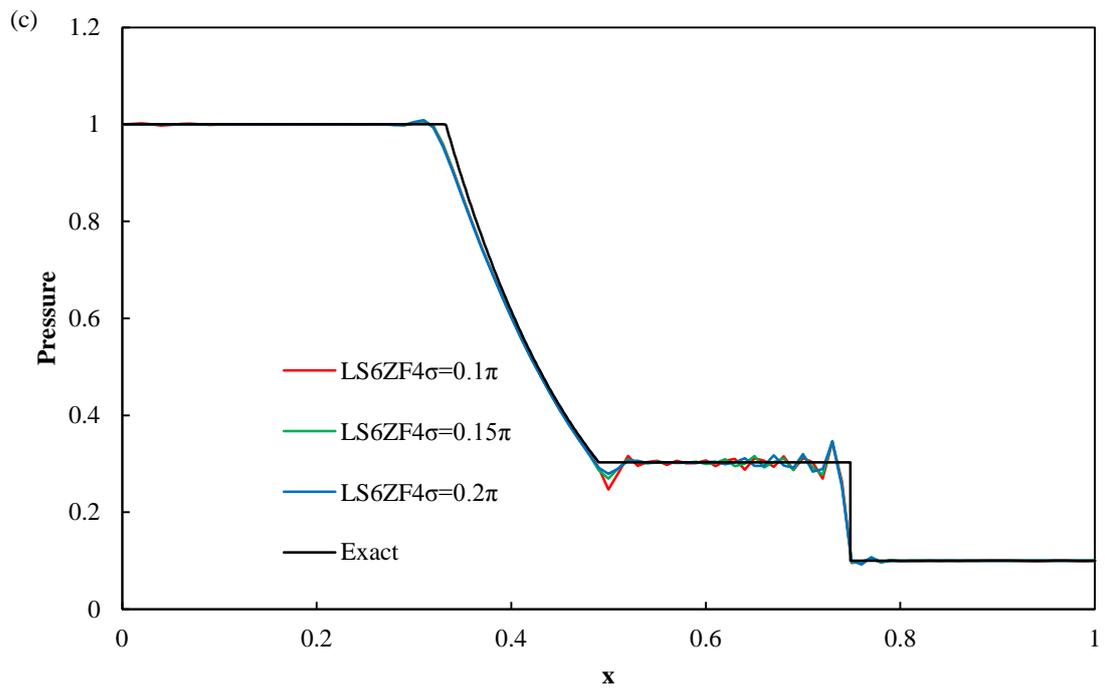


Fig.4-8 Lele's 6th order compact scheme(LS6) combined with Zhanxin's 4th order filter(ZF4). (a) Density, (b) velocity, (c) pressure and (d) internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

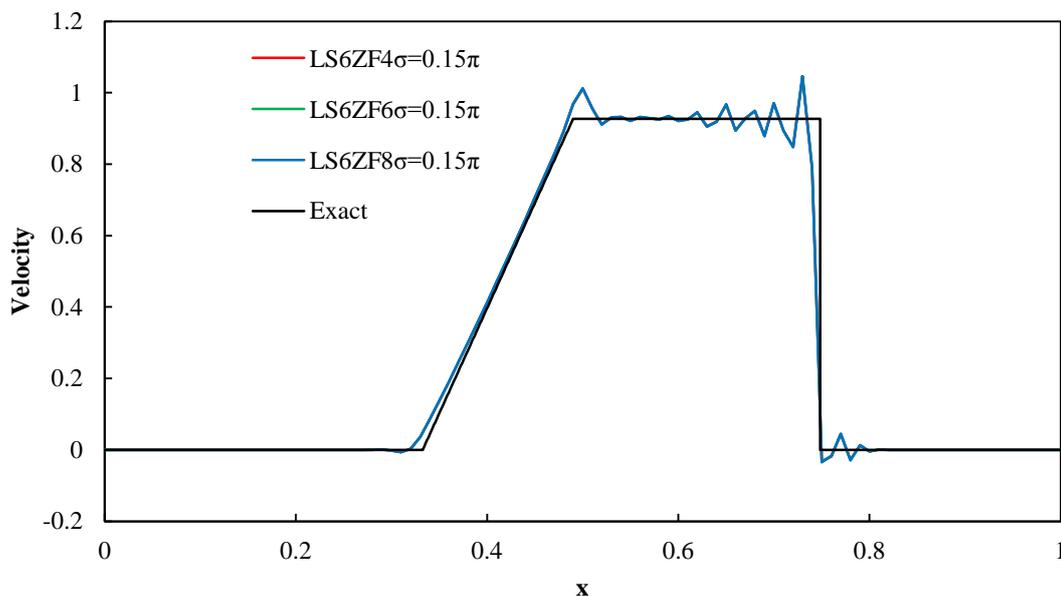


Fig.4-9 Lele's 6th order compact scheme(LS6) combined with Zhanxin's filter(ZF4). Density, velocity, pressure and internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

衝撃波近傍においては、 $\alpha=0.499$ とした場合には数値振動が今回検証したほかのフリーパラメータでの計算結果に比べて大きくなることに注意が必要である。格子点数 1001 の場合には、 $\alpha=0.499$ を除いて、レファレンスデータにほぼ一致している。 $\alpha=0.499$ では、 $0.5 < x < 0.7$ および $2 < x < 2.4$ において数値振動が生じている。この結果から本計算条件で検討を行ったフリーパラメータの値においては、格子点数 201 ではフリーパラメータの影響が大きかったが、401, 1001 においてはフリーパラメータの影響が小さくなったことから、格子点数への依存性が観察された。

本計算条件において、 $\alpha=0.499$ の伝達関数は、いずれの格子点数においても数値振動を抑えられなかったことから、この伝達関数を非線形性の強い衝撃波等の数値計算に用いることは不適當であると考えられる。

4.6.3 Zhanxin コンパクトフィルタ

半値幅の影響

図 2-8 に、フィルタの精度を 4 次精度に固定して、半値幅を変えた場合の結果について示す。膨張波の領域においては、Zhanxin のフィルタの半値幅によらず、レファレンスデータとよく一致しており、膨張波の領域においては、Zhanxin のコンパクトフィルタのフリーパラメータの影響は小さいと考えられる。

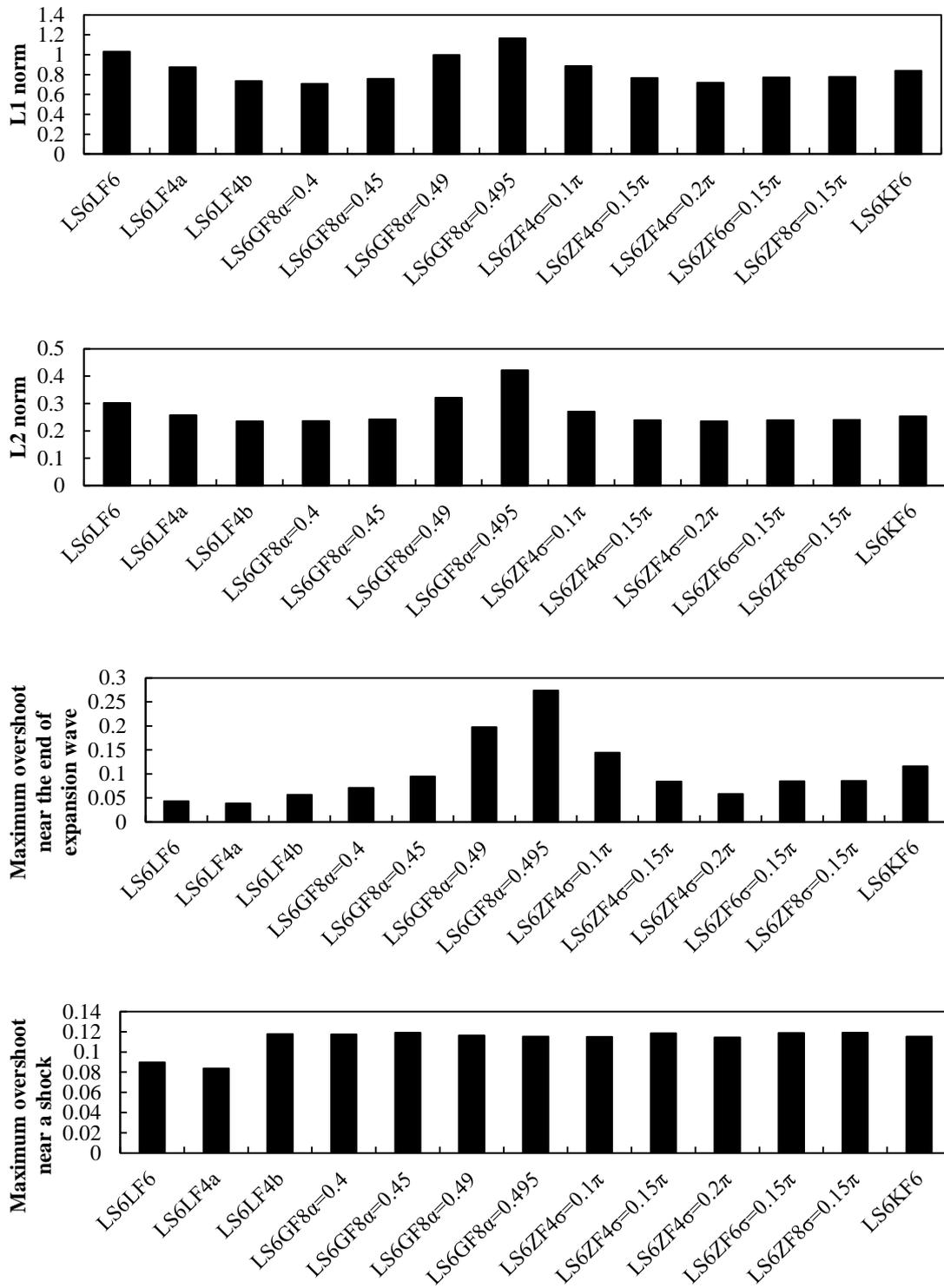


Fig.4-10 An assessment of compact filters on the condition that 6th order compact scheme is used for spatial derivatives. These figures show that using Gaitonde’s compact filter its free parameter $\alpha=0.495$ makes the largest L1 and L2norm and overshoot near the end of expansion wave (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

検証を行った3種類のコンパクトフィルタの中では、半値幅が小さいほど、膨張波の後端近傍での密度・圧力のアンダーシュートおよび速度のオーバーシュートが大きくなるということが分かった。これは、Zhanxinのコンパクトフィルタはいずれも、6次精度コンパクトスキームのよく解像できる波数よりも大きすぎるカットオフ波数となる伝達関数であるため最も半値幅の大きいフィルタが、膨張波後端において誤差が少なくなったのだと考えられる。

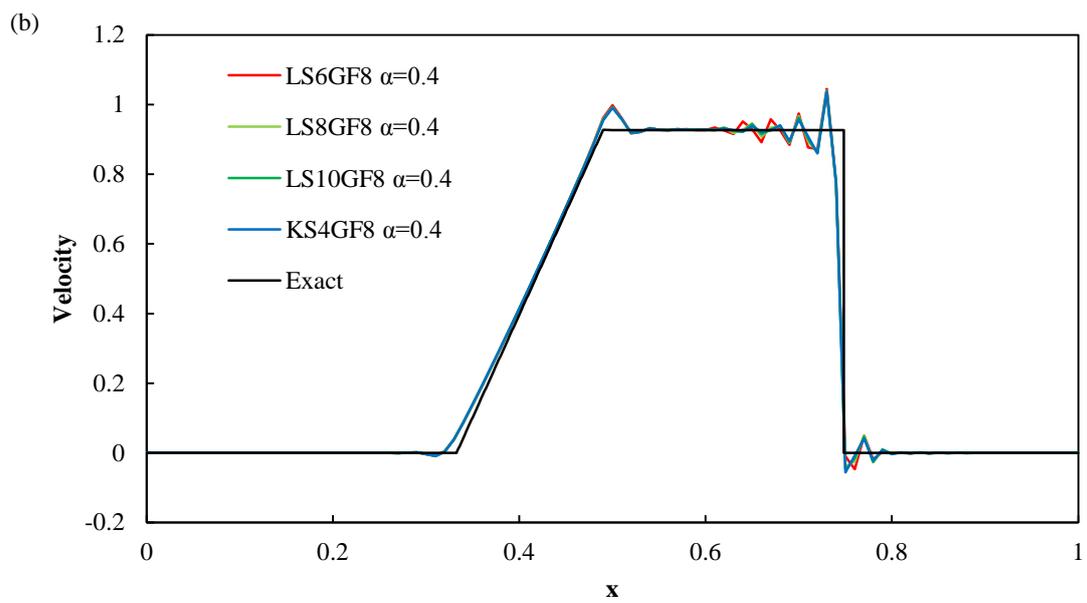
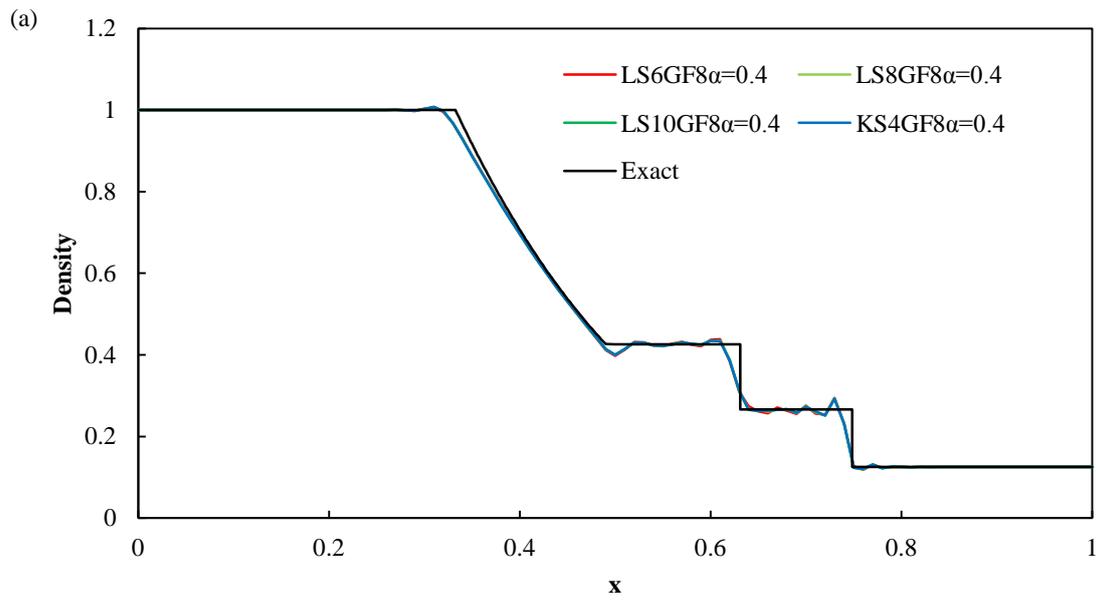
精度の影響

図4-9に、半値幅を 0.15π に固定して、フィルタの精度を変えた場合の計算結果を示す。計算結果はほぼ同じ結果となったため、代表として速度場を示す。本計算条件では、Zhanxinコンパクトフィルタの精度は計算結果にほとんど影響を与えないことが分かった。これは、半値幅 0.15π とした場合では、精度の次数を変化させた場合でも、フィルタの伝達関数がほぼ同じになるためであると考えられる。

図4-10に、Leleの6次精度コンパクトスキームと各種コンパクトフィルタを組み合わせた場合のL1、L2ノルム、膨張波後端近傍のオーバーシュート、および衝撃波近傍のオーバーシュートについてのまとめを示す。L1ノルムおよびL2ノルムは、フィルタの伝達関数の影響を受け、カットオフ波数が6次精度コンパクトスキームの解像度と比較して低すぎる場合には、膨張波から衝撃波までの等速部分において、グラフ上では厳密解は直線となるが数値振動の波長が長く、直線部分をよく再現できていない。これは、カットオフ波数が低すぎるために、直線部分を構成するのに重要な高波数成分までも除去することが原因であると考えられる。一方、フィルタのカットオフ波数が6次精度コンパクトスキームの解像度よりも高すぎる場合には、膨張波から衝撃波までの等速部分において、グラフ上では厳密解は直線となるが数値振動の波長が短く振動的になり、直線部分をよく再現できていない。これは、6次精度コンパクトスキームの解像度と比較して高すぎるカットオフ波数となる伝達関数であるので、数値的な振動の原因となる高波数成分を十分に除去できなかったためであると考えられる。

また、膨張波後端近傍でのオーバーシュートはフィルタの伝達関数の影響を強く受けることが明らかになった。6次精度コンパクトスキームの解像度に応じたカットオフ波数の伝達関数を持ちいることでオーバーシュートを小さくできることが分かった。一方で、6次精度コンパクトスキームの解像度よりも高すぎるカットオフ波数の伝達関数を用いた場合においては、オーバーシュートが増大することが分かった。これは、高すぎるカットオフ波数の伝達関数では、高波数成分を十分に除去できなかったためであると考えられる。

衝撃波近傍でのオーバーシュートはフィルタの伝達関数によって差があまり観察されない。このことから、フィルタの伝達関数の影響を受けにくいことが分かった。



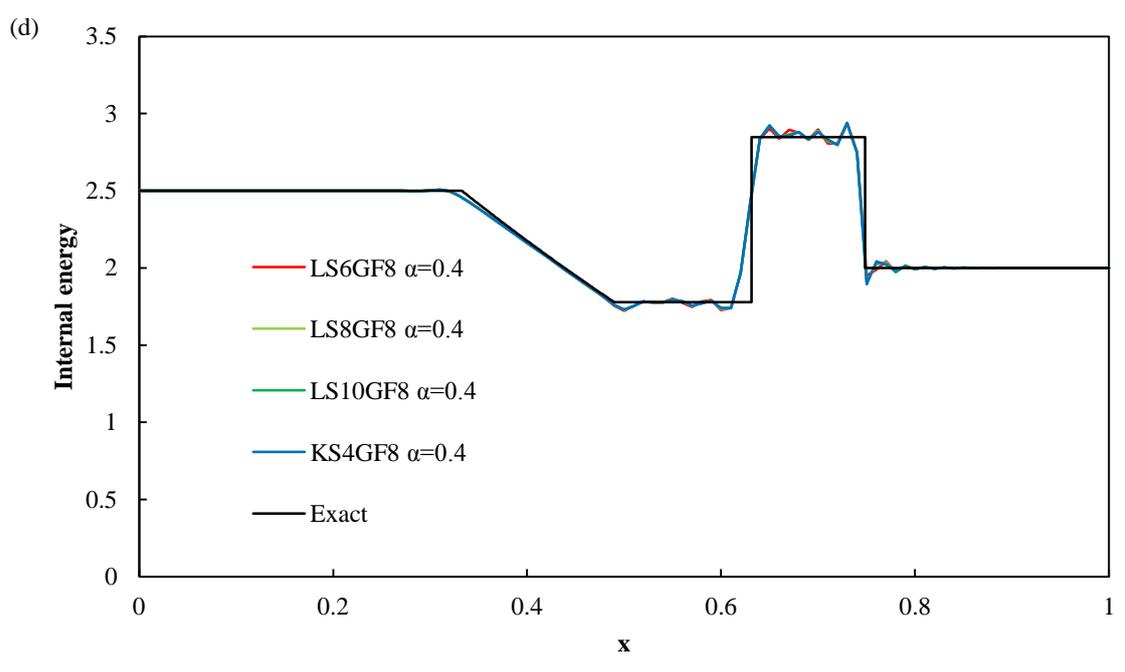
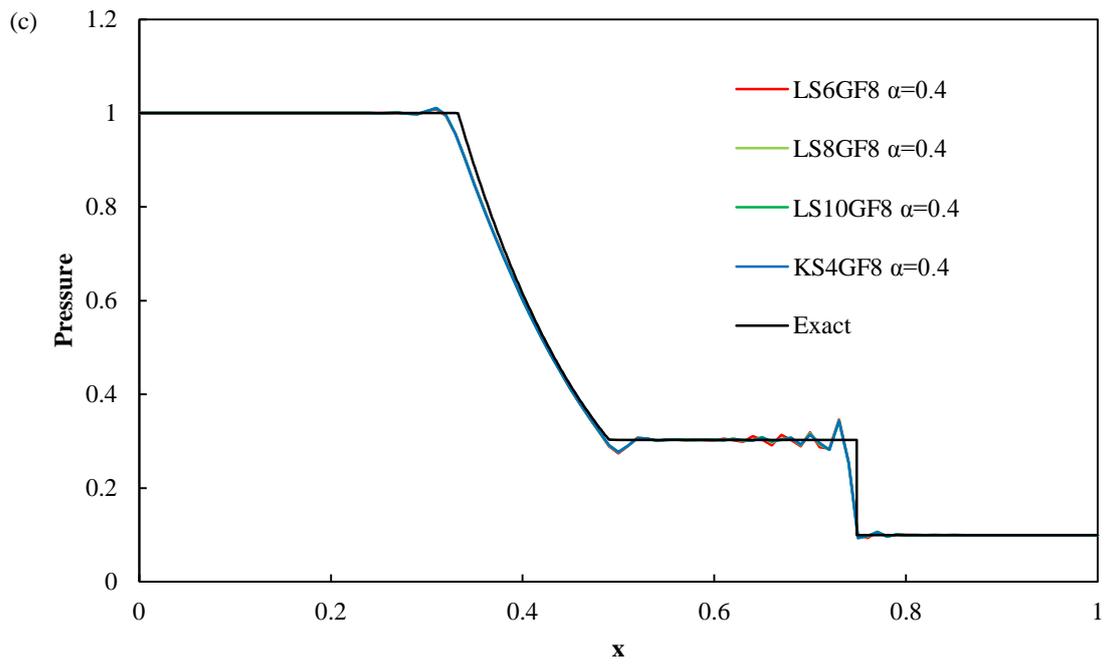
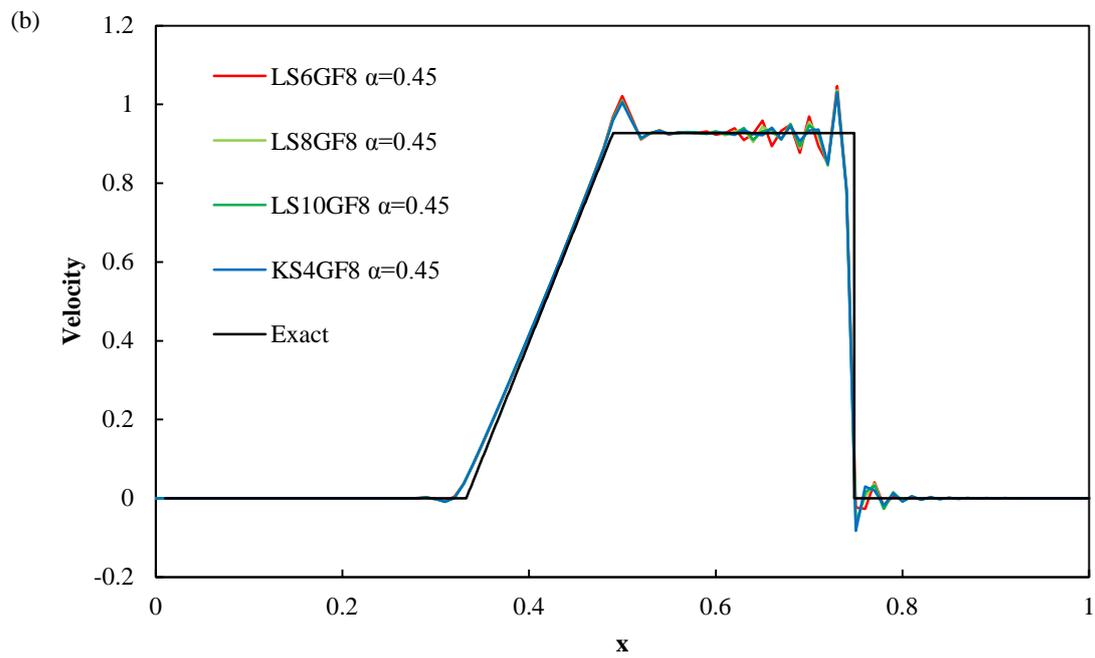
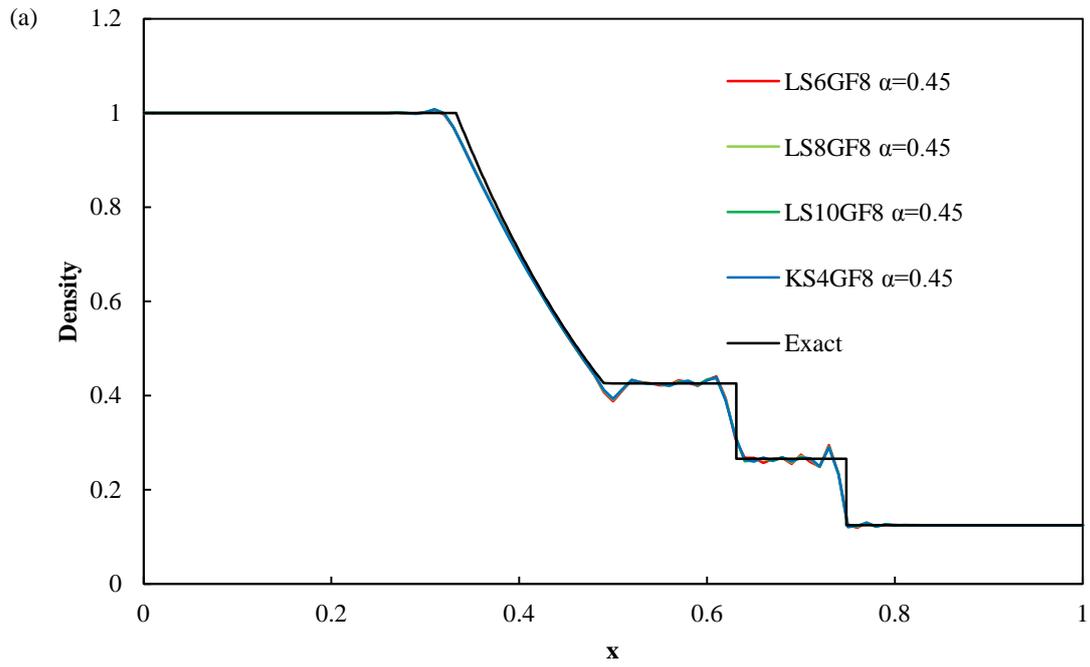


Fig.4-11 Compact schemes combined with Gaitonde's 8th order compact filter(GF8)($\alpha=0.4$). (a) Density, (b) velocity, (c) pressure and (d) internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points. The results are almost same. These combinations of compact schemes and compact filters can avoid numerical oscillations near boundary (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).



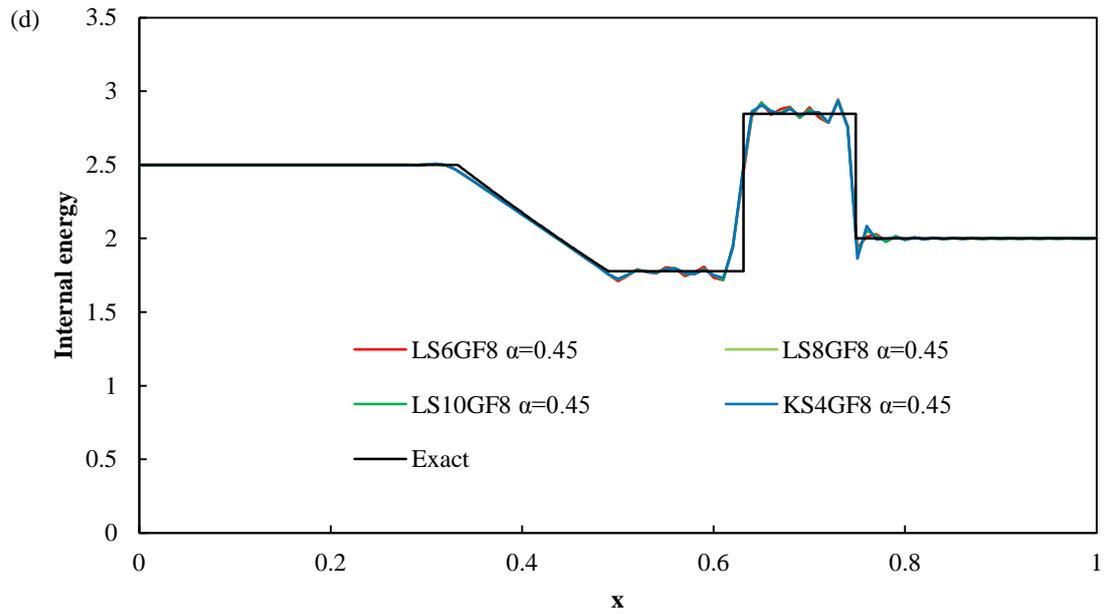
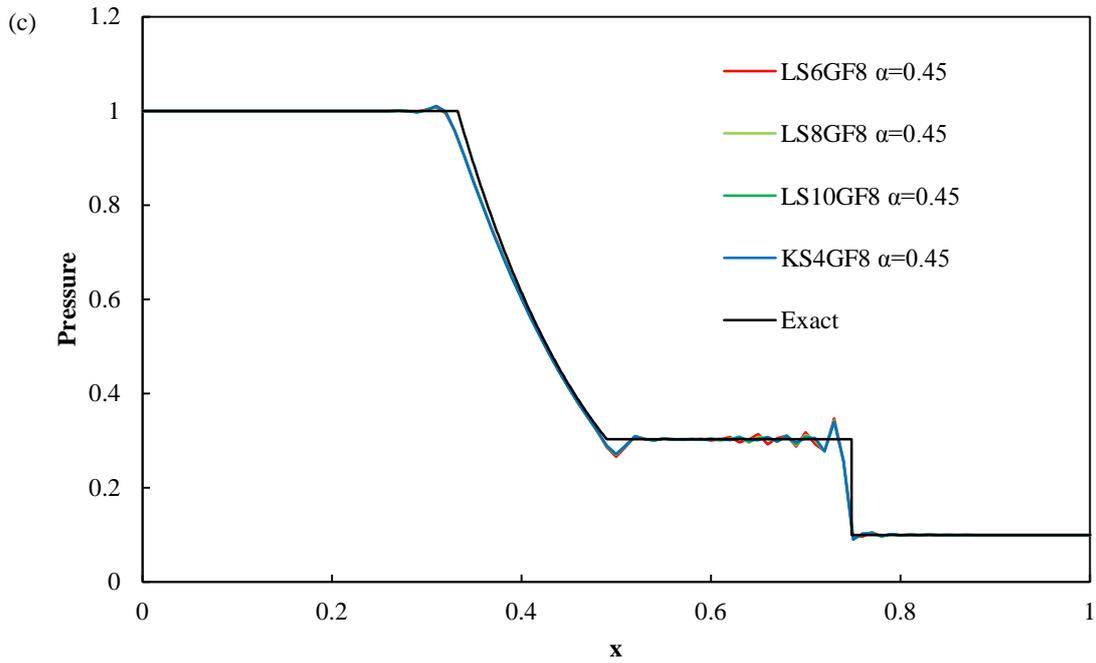
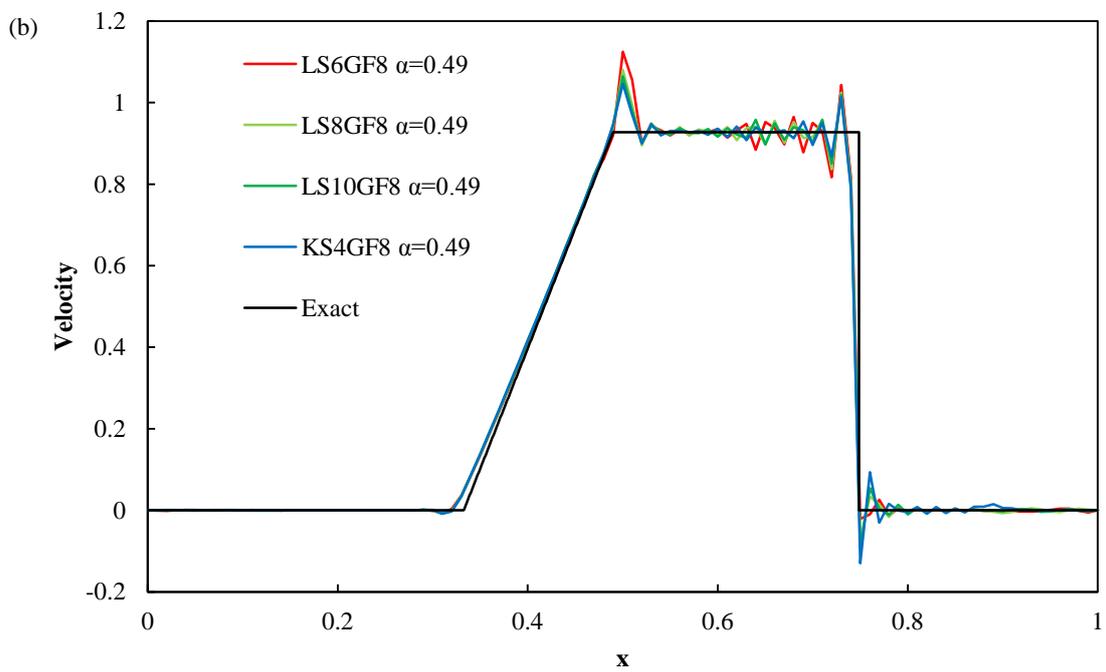
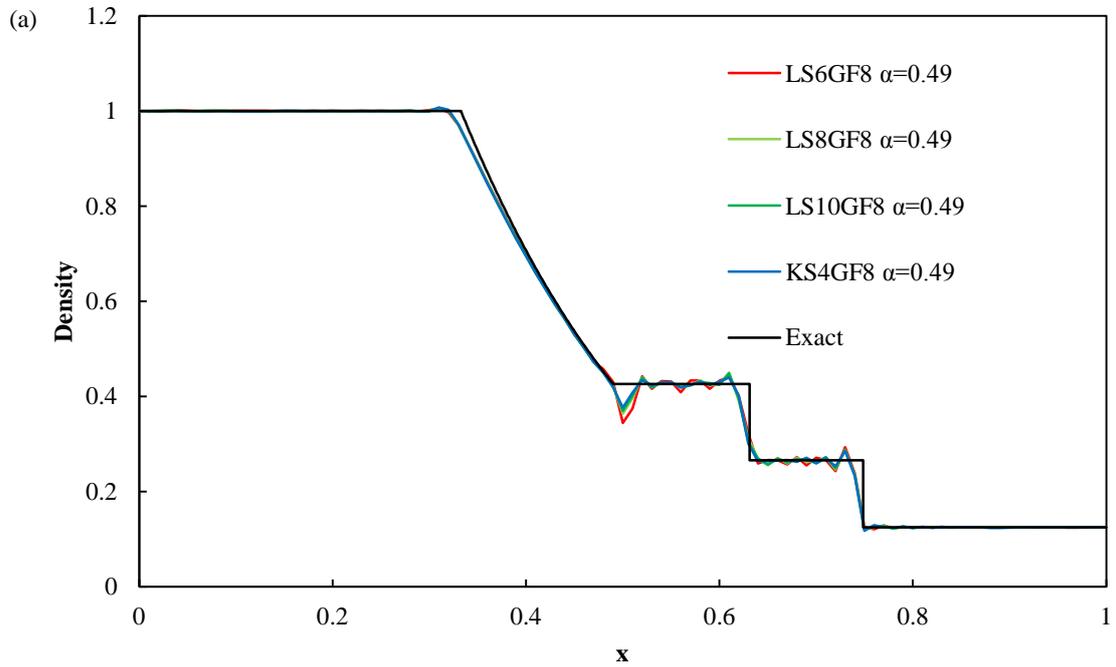


Fig.4-12 Compact schemes combined with Gaitonde's 8th order compact filter(GF8 $\alpha=0.45$) . (a) Density, (b) velocity, (c) pressure and (d) internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points. The results are almost same, but there is little difference at the end of expansion wave and shock. These combinations of compact schemes and compact filters can avoid numerical oscillations near boundary (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).



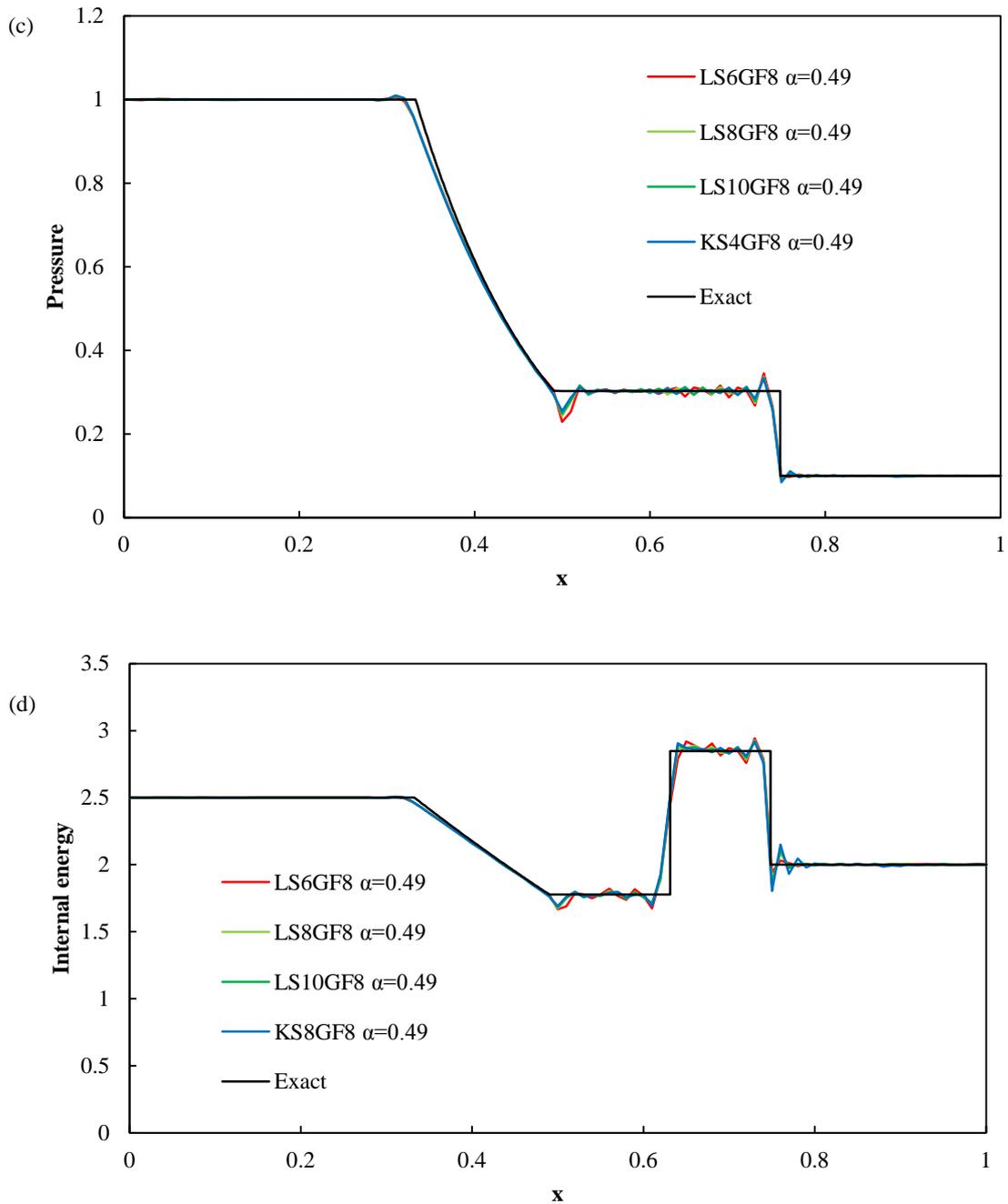
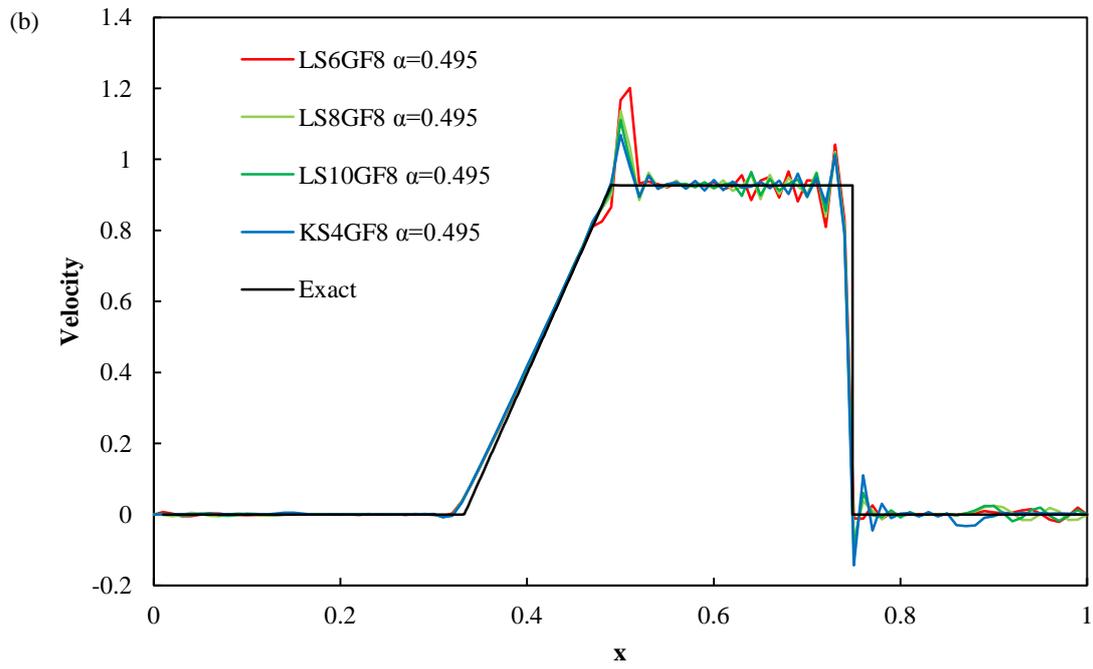
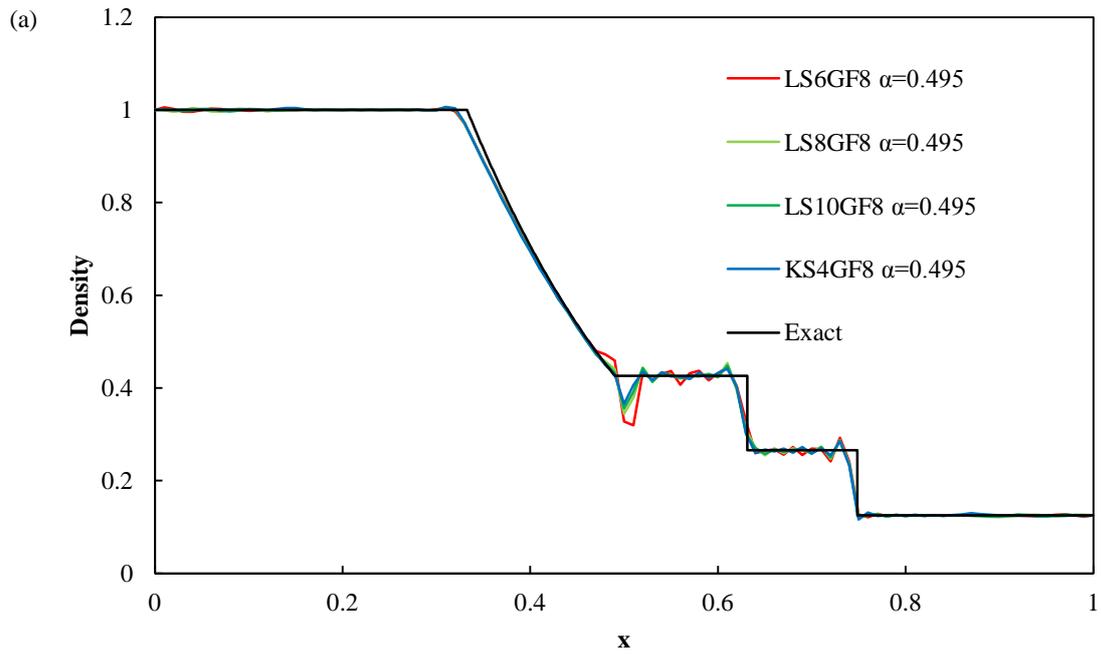


Fig.4-13 Compact schemes combined with Gaitonde's 8th order compact filter(GF8)($\alpha=0.49$). (a) Density, (b) velocity, (c) pressure and (d) internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points. There is little difference near the end of expansion wave and near shock. These combinations of compact schemes and compact filters cannot avoid numerical oscillations perfectly near boundary (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).



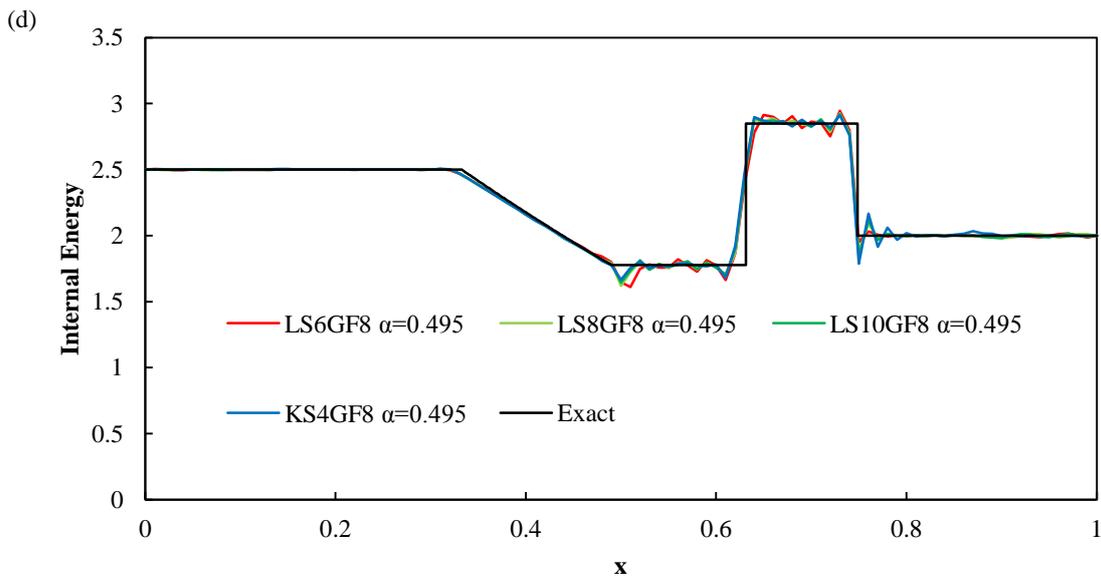
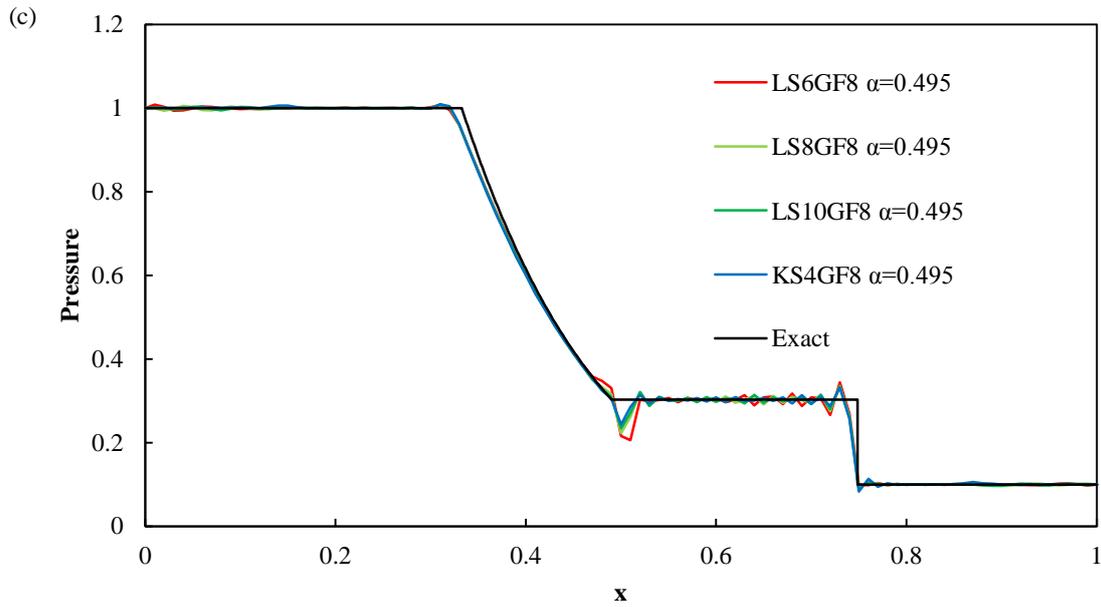


Fig.4-14 Compact schemes combined with Gaitonde's 8 th order compact filter(GF8 $\alpha=0.495$). (a) Density, (b) velocity, (c) pressure and (d) internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points. Lele's 6th order compact scheme makes huge error near the end of expansion wave and shock. Higher order compact schemes make smaller error at the end of expansion wave. At the boundary ($x=1$), these combinations of compact schemes and compact filters make large error (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

4.7 コンパクトスキームの影響 (Gaitonde コンパクトフィルタの場合)

本章では、コンパクトフィルタを Gaitonde のコンパクトフィルタに固定し、空間差分スキームを LS6, LS8, LS10, および KS4 とした場合の影響について述べる。特に、空間差分スキームの解像度の面から分析を行う。

図 4-11 から図 4-14 に Gaitonde のコンパクトフィルタを用いた場合の計算結果を示す。コンパクトフィルタのフリーパラメータ α を 0.4 に設定するといずれのスキームを用いた場合でも計算結果にほとんど差は観察されない。 α を 0.5 に近づけると、特に膨張波後端において、 $\alpha=0.495$ とした場合に、スキームごとの特性が顕著に観察される。一方で、衝撃波については、 $\alpha=0.4$ ではいずれのスキームを用いた場合でも計算結果にほとんど差は観察されない。また、 α を 0.5 に近づけた場合においてもあまり差は観察されない。

図 4-15 に、Gaitonde コンパクトフィルタを用いた場合の L1, L2 ノルム、膨張波後端近傍でのオーバーシュート、および衝撃波近傍でのオーバーシュートについて示す。本計算条件の中では、カットオフ波数を比較的小さくすることが L1 ノルムや L2 ノルムを低減するのに有効であることが分かった。これは、数値振動の原因となる高波数成分を十分除去できるためであると考えられる。また、L1 ノルムおよび L2 ノルムの低減には、高解像度スキームを用いることが特に、コンパクトフィルタのフリーパラメータ α を 0.5 に近づけたときに有効であることが分かった。これは、高解像度スキームを用いることで、高波数成分の微分を低解像度スキームと比較してより正確に計算できるため、フィルタのカットオフ波数を高くしても分散誤差を小さくできるためであると考えられる。

また、膨張波後端近傍における速度のオーバーシュートの低減には、フリーパラメータを比較的小さくすることと高解像度スキームを用いることが有効であると考えられる。

衝撃波近傍におけるオーバーシュートの最大値は、 α を 0.4 にした場合にはスキームの解像度による差はほとんど観察されず、 α を 0.5 に近づけるほどスキームの解像度による差が拡大するが、膨張波後端での差と比較すると小さく、フィルタの伝達関数の影響をあまり受けないと考えられる。

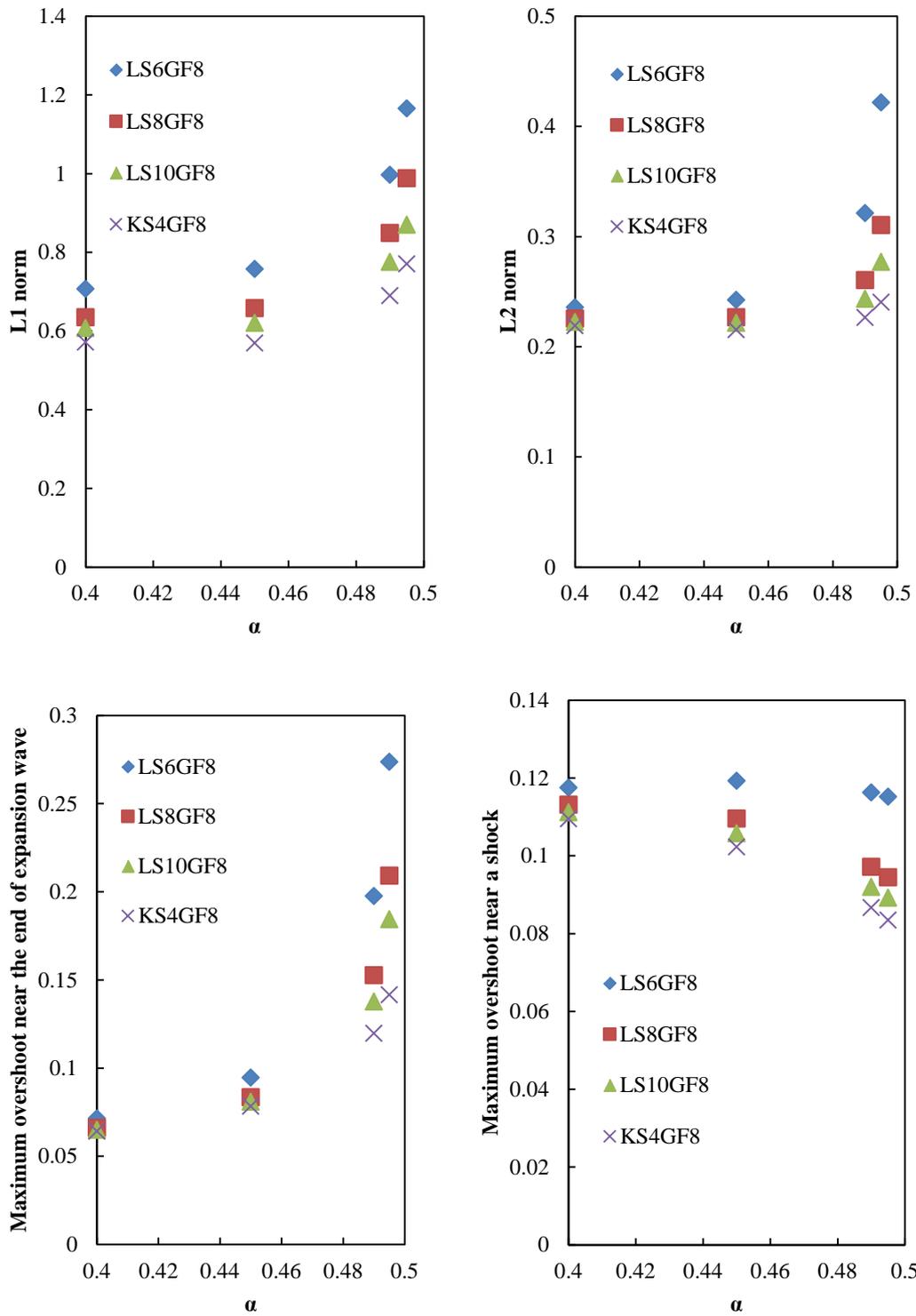


Fig.4-15 An influence of the value of free parameter α . Each value of α , higher order compact scheme makes smaller error (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

4.8 Kimのコンパクトフィルタのカットオフ波数の影響（空間微分は、Kimの5重対角4次精度コンパクトスキームに固定）

Kimの4次精度コンパクトスキームと組み合わせた場合のKimの6次精度コンパクトフィルタのカットオフ波数が衝撃波捕獲に及ぼす影響について Sod 問題を用いて検証した。

本節においては、Sod 問題での $t=0.1415$ における速度分布の計算結果と厳密解との差異を用いて上記の影響を検証する。

L1 ノルムおよび L2 ノルムについては、それぞれ 0.85π および 0.88π で極小値をとることが分かった。これは、4次精度の Kim のコンパクトスキームの解像度に応じた波数であり、用いたスキームの解像度の影響を受けたものと考えられる。このことから、L1 ノルムを小さくするためには、用いるスキームの解像度に応じてカットオフ波数を設定するのがよいと考えられる。

膨張波後端のオーバーシュートは、 0.65π で極小値をとり、カットオフ波数の影響を強く受けることが明らかになった。膨張波後端のオーバーシュートを小さくするためには、用いるスキームの解像度よりも少し小さいカットオフ波数を選ぶことが有効であると考えられる。

図 4-16(d)に、衝撃波近傍におけるオーバーシュートを示す。衝撃波近傍でのオーバーシュートは 0.75π の場合に極大値をとり、 0.95π で最小となった。しかしながら、衝撃波近傍におけるオーバーシュートは膨張波後端でのオーバーシュートと比較して小さく、衝撃波捕獲におけるカットオフ波数の影響は少ない。

一方で、膨張波後端から衝撃波までの誤差はカットオフ波数の影響を強く受ける。その L1 および L2 ノルムが極小となるのはカットオフ波数がそれぞれ 0.85π 、 0.88π の場合である。また、 0.88π の場合では、膨張波後端でのオーバーシュートおよび衝撃波近傍でのオーバーシュートについてはほかの波数での値に比べて突出して大きいわけではない。

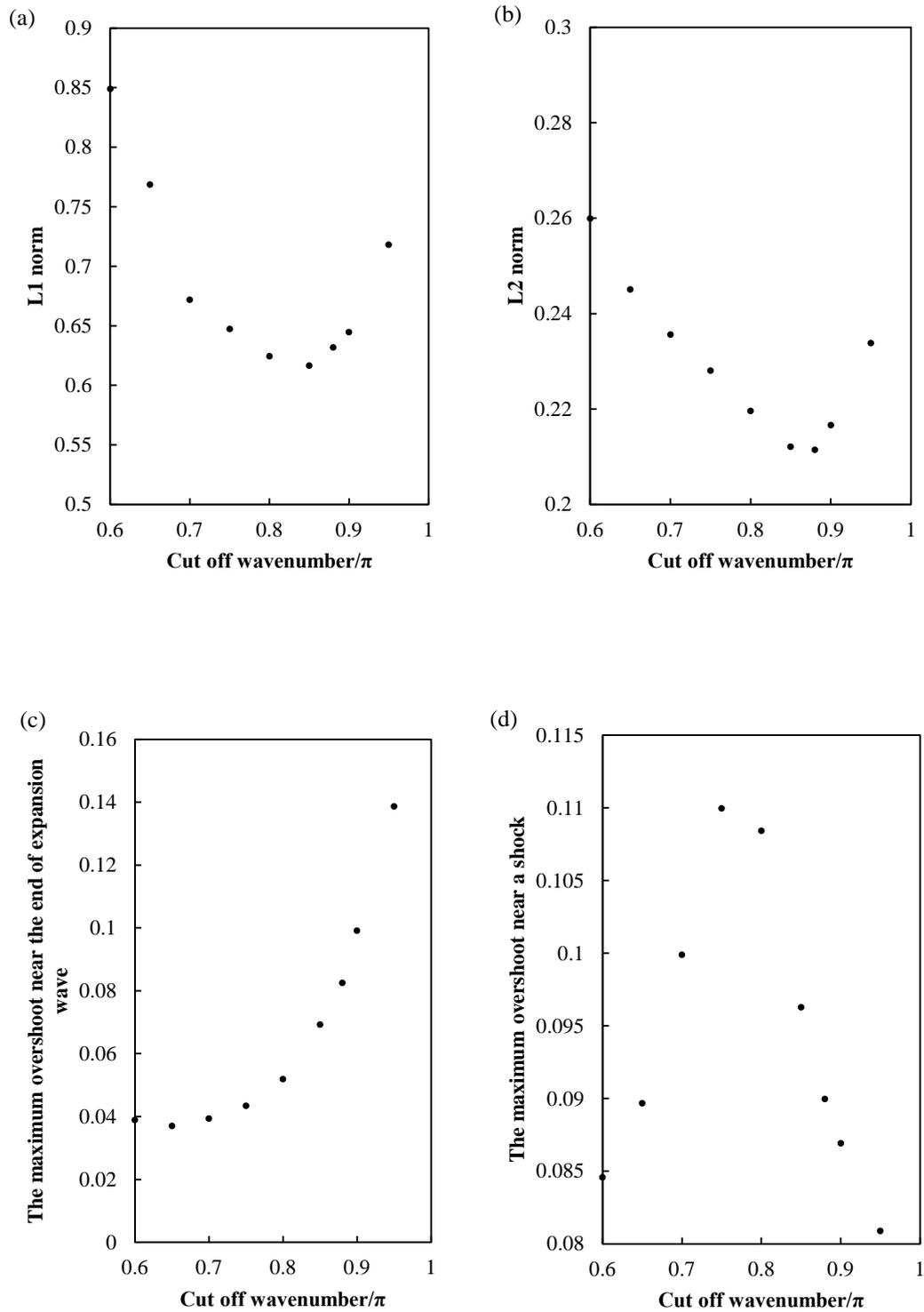
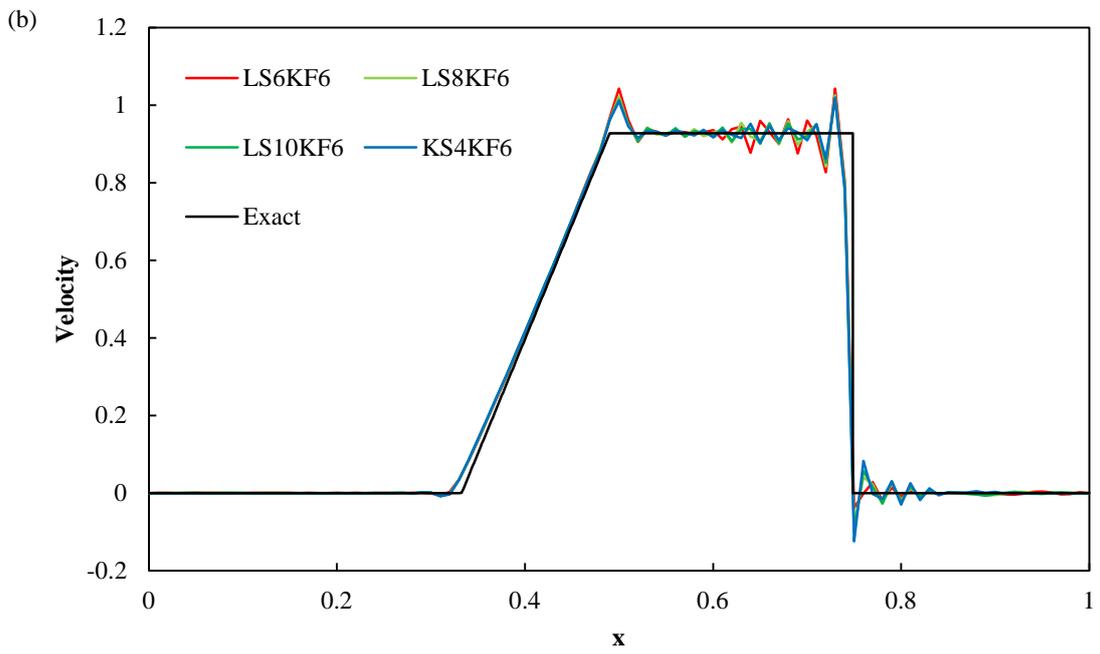
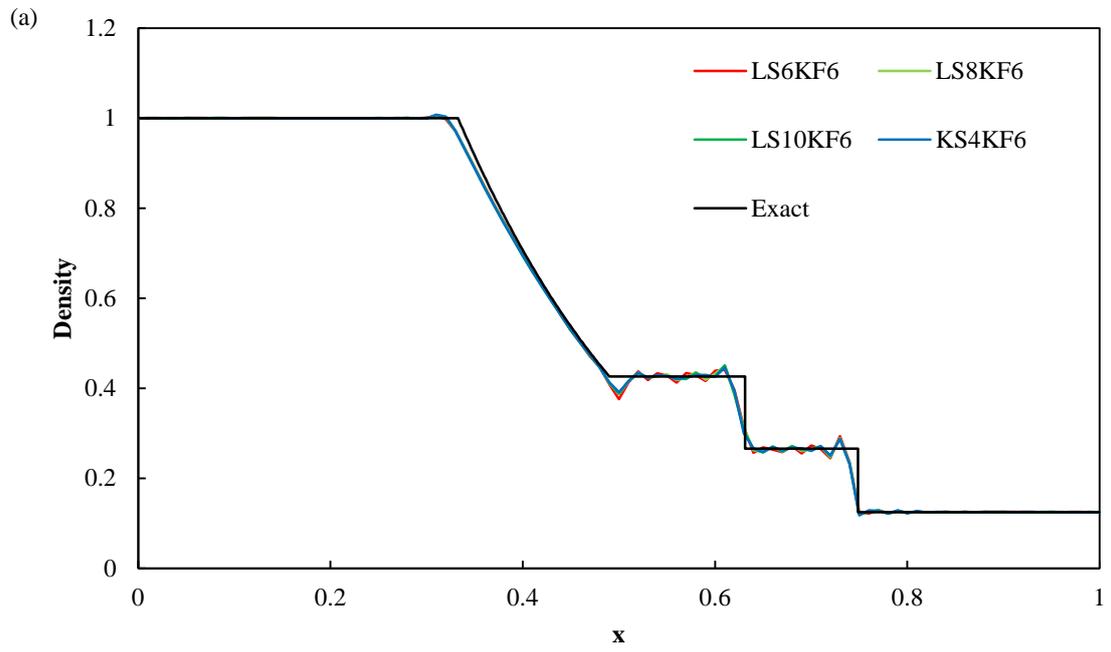


Fig.4-16 An assessment of compact filters on the condition that Kim's 4th order compact scheme and Kim's 6th order compact filter is used. (a)L1 norm, (b)L2 norm, (c)The maximum overshoot near the expansion wave, (d) The maximum overshoot near a shock (This figure was quoted from Wakamatsu, et al. (2014), Proceedings of computational fluid dynamics symposium (in Japanese)).



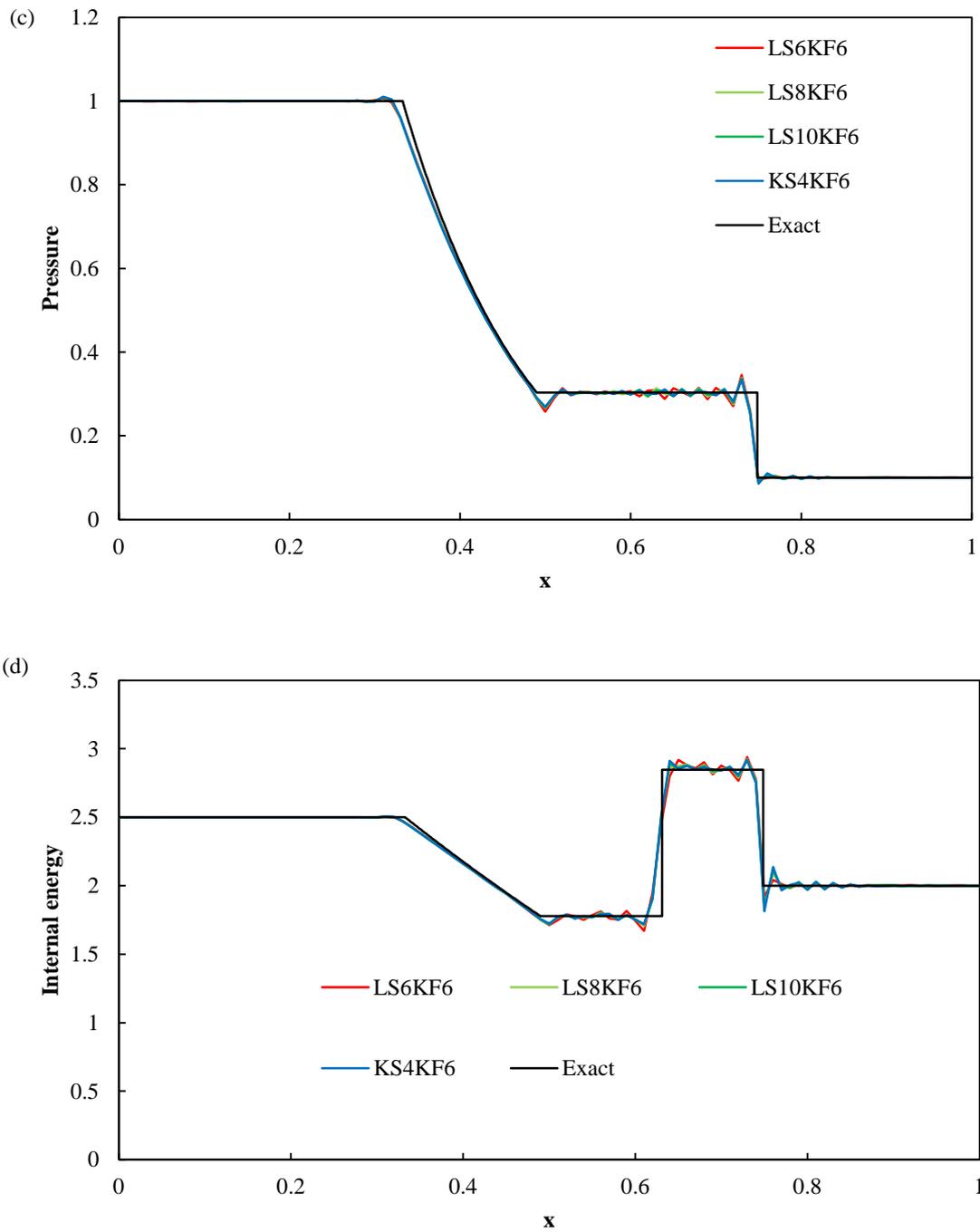


Fig.4-17 Lele's 6th 8th 10th order compact scheme (LS6,LS8,LS10) or Kim's 4th order compact scheme(KS4) combined with Kim's 6th order compact filter(KF6). (a) Density, (b) velocity, (c) pressure and (d) internal energy profiles are presented at $t=0.1415$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 101 grid points. KS4 is the best to combine with KF6 (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

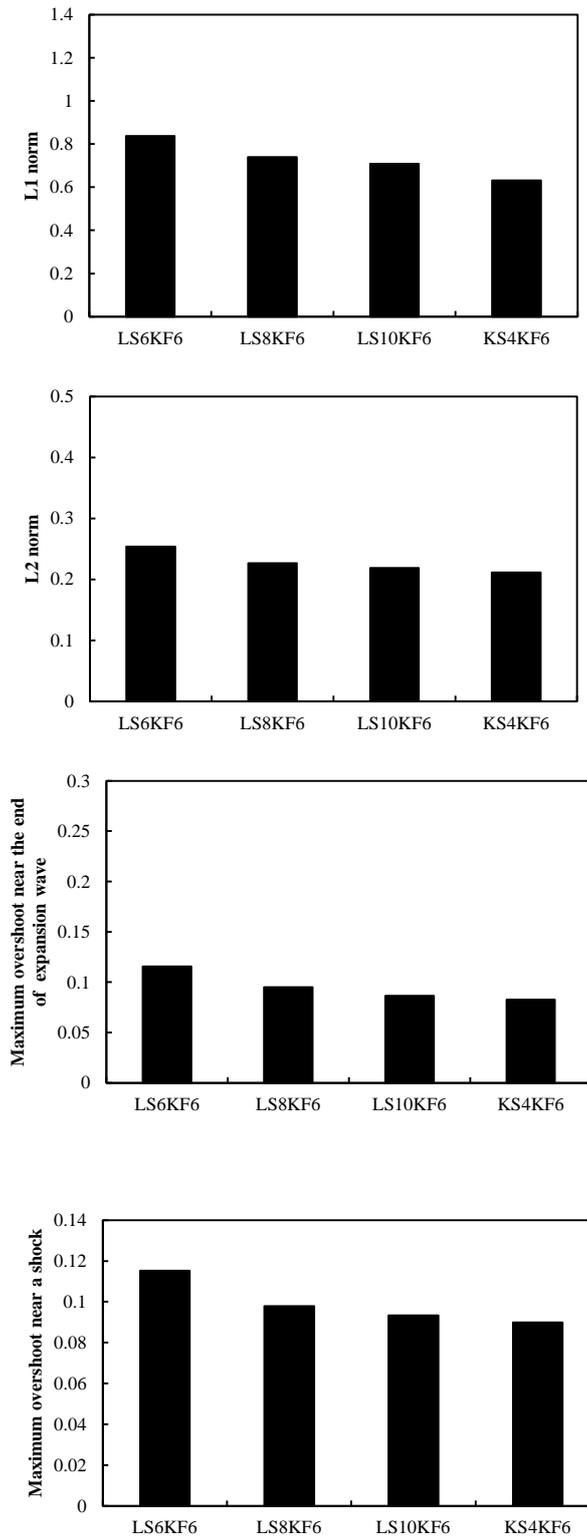


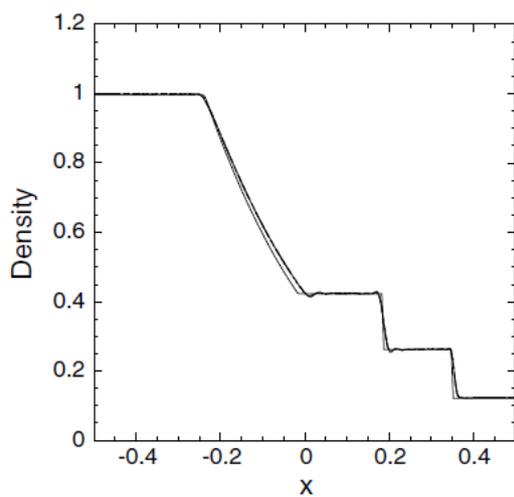
Fig.4-18 An assessment in case that Kim's 6th order compact filter(KF6) is used. In each index, LS6KF6 is the largest and KF6 combined with Lele's higher order compact scheme is smaller. KF4KF6 is the smallest (This figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).

Table 2-6. Initial conditions of Sod problem(Kawai, et al.(2010))

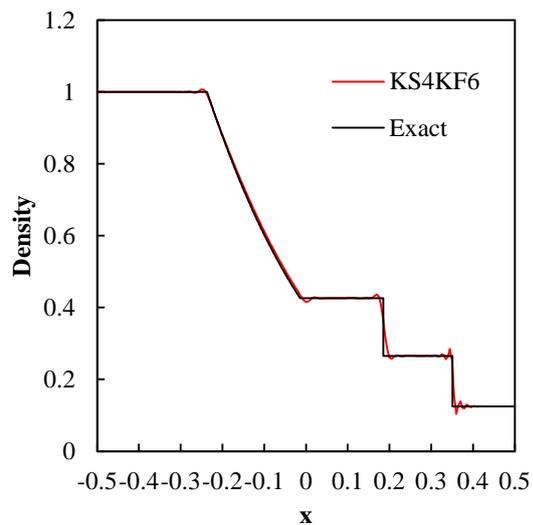
	$-0.5 \leq x \leq 0$	$0 < x \leq 0.5$
Density	1	0.125
Pressure	1	0.1
Velocity	0	0

Table 2-7. Boundary conditions of Sod problem

	$x=-0.5$	$x=0.5$
Density	1	0.125
Pressure	1	0.1
Velocity	0	0

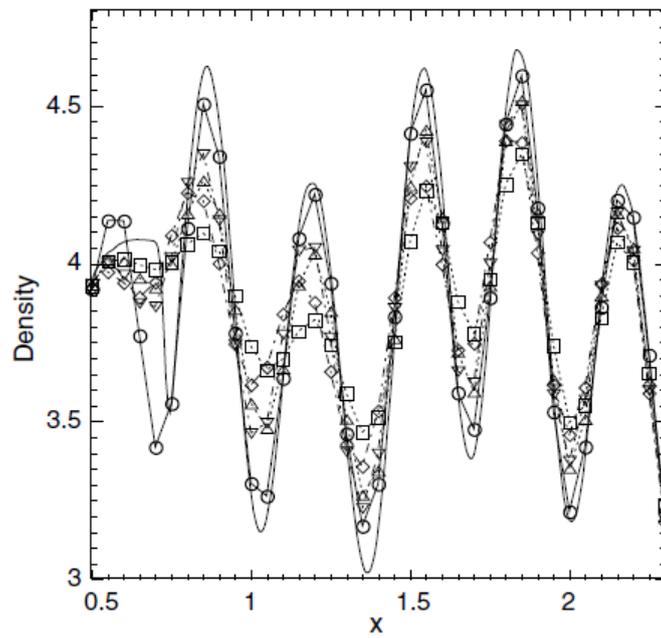


Kawai and Lele. (2008)

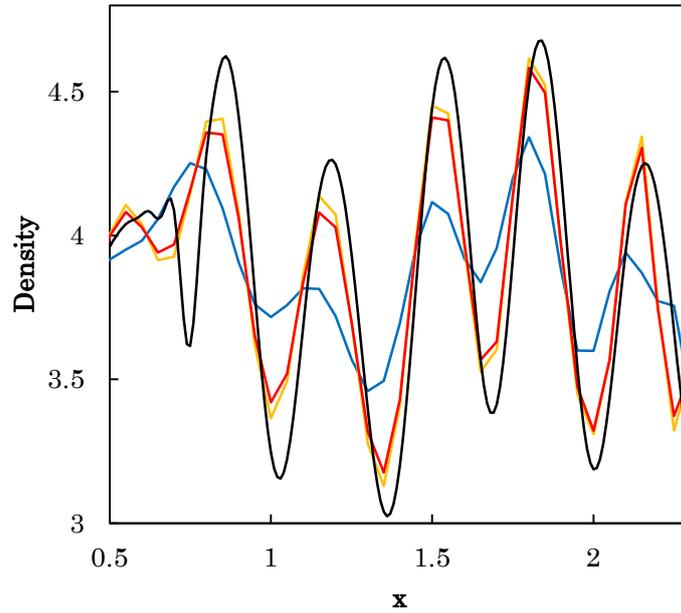


The present paper

Fig.4-19 Comparison of the density profile used localized artificial diffusivity developed by Kawai, et al. and the density profile used Kim's 4 th order compact scheme combined with Kim's 6th order compact filter(KS4KF6). Left figure is quoted from Kawai, et al., 227 (2008) pp. 9512 Fig.16(a), Journal of Computational Physics. Density profiles are presented at $t=0.2$ with a time step of $\Delta t=1.0 \times 10^{-5}$. Simulations are performed on a uniformly spaced grid with 201 grid points . Although at a shock, KS4KF6 can not avoid numerical oscillations perfectly, at the end of expansion wave and a contact surface, errors in both cases are almost same (Right figure was reprinted from Wakamatsu, et al. (2014), Transactions of the JSME(in Japanese)).



Kawai and Lele (2008)



— LS6GF8 $\alpha=0.45$ — LS6GF8 $\alpha=0.495$
— KS4KF6K $c=0.88\pi$ — Reference

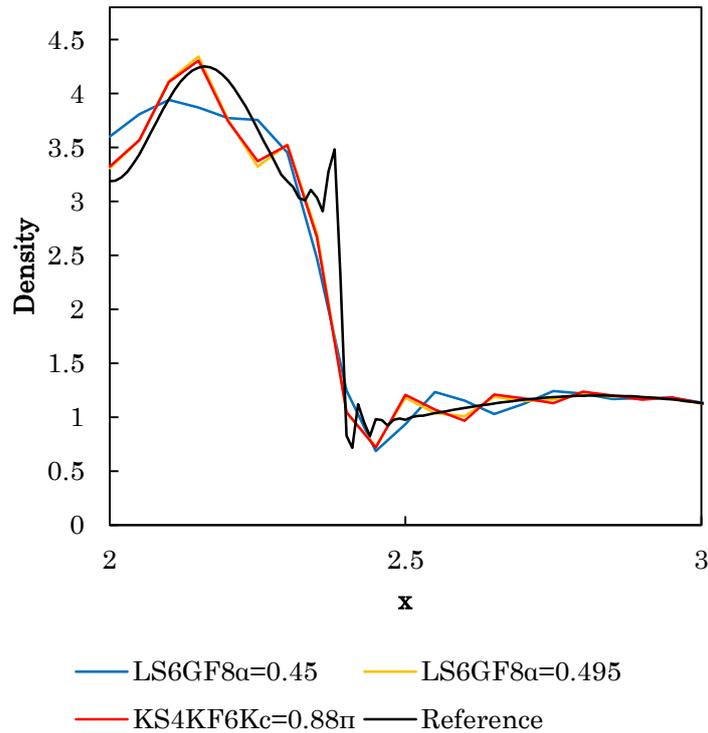


Fig.4-20 Density distribution of Shu-Osher problem at the time $t=1.8$ in case of 201 grid points
The upper figure is quoted from Kawai and Lele, Journal of Computational Physics 227, (2008).

4.9 コンパクトスキームの影響（カットオフ波数 0.88π の場合）

本節では、コンパクトフィルタを Kim のコンパクトフィルタ（カットオフ波数 0.88π ）に固定し、空間差分スキームを LS6, LS8, LS10, および KS4 とした場合の影響について述べる。

図 4-17 に、 $KF6Kc=0.88\pi$ と各種コンパクトスキームを組み合わせた場合の計算結果を示す。また、図 4-18 に、 $KF6Kc=0.88\pi$ と各種コンパクトスキームを組み合わせた場合の L1, L2 ノルム、膨張波後端近傍のオーバーシュート、および衝撃波近傍のオーバーシュートについて示す。いずれの指標においても、LS6KF6 が最大となり、Lele のコンパクトスキームの精度を向上すると減少した。KS4 が最小となった。これは、KS4 は Lele のコンパクトスキームに比べてより高波数の波まで解像できる性質があり、カットオフ波数 0.88π の伝達関数は高い波数に限定して除去する性質のため、この伝達関数に適切な解像度のスキームであったためと考えられる。

このことから、本計算条件において、カットオフ波数 0.88π に組み合わせる空間差分スキームとしては、KS4 を用いるのが適当であると考えられる。

さらに、本研究において用いた様々なコンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせで、L2 ノルムが最小となった、KS4KF6Kc=0.88 π について、Kawai and Lele.(2008)と比較を行った。計算条件について初期条件を表 4-6 に、境界条件を表 4-7 に示す。計算領域は、 $-0.5 \leq x \leq 0.5$ 、格子間隔は $\Delta x=0.005$ 、時間刻みは $\Delta t=1 \times 10^{-5}$ とした。結果を図 4-19 に示す。衝撃波近傍での振動は、KS4KF6Kc=0.88 π では十分に抑制できない一方で、膨張波後端や接触不連続面での誤差は Kawai and Lele.(2008)の結果とほぼ同じであった。

次に、定量的な比較を衝撃波厚さおよび接触不連続面厚さを用いて行う。Kawai and Lele (2008)で用いられている人工拡散を用いた場合の衝撃波および接触不連続面厚さの定義を次式に示す。

$$\frac{\delta}{\Delta x} = \frac{\Delta \rho}{\Delta x \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{\max}} \quad (4-26)$$

Kawai and Lele の人工拡散を用いた場合の衝撃波厚さは、2.94 および接触不連続面の厚さは 3.68 であったのに対し、本研究で用いた KS4KF6 の組み合わせでは、衝撃波厚さは 1.55 および接触不連続面の厚さは 3.50 となり、本研究で用いた KS4KF6 は人工拡散を用いた場合よりも衝撃波厚さおよび接触不連続面厚さにおいては良い結果を得た、これは、衝撃波近傍や接触不連続面近傍において人工的な粘性や拡散を加えていないためであると考えられる。

衝撃波捕獲で最も適切であった組み合わせである Kim のコンパクトスキームと Kim のコンパクトフィルタカットオフ波数 0.88 π の組み合わせを Shu-Osher 問題に適用した。LS6GF8 $\alpha=0.495$ とほぼ同じ計算結果を得た。衝撃波捕獲において Sod 問題では、KS6KF8 は LS6GF8 $\alpha=0.495$ に対して誤差が小さく優位性が観察されたが、Shu-Osher 問題では優位性は観察されなかった。これは、Sod 問題の密度比が 8 に対し、Shu-Osher 問題では、約 3 程度と小さく、コンパクトスキームの解像度があまり影響を与えなかったためであると考えられる。エントロピー波の再現では KS6KF8 の結果を Kawai and Lele(2008)の結果と比較した。その結果、人工拡散のスキームには及ばないものの、7 次精度の WENO よりも適切であり、9 次精度 WCNS と同じ程度に再現できることが分かった。

Kawai and Lele (2008)では、人工拡散を入れる位置や人工拡散の大きさを決めるのに、センサーを用いている。一方、本研究では、センサーを用いず、衝撃波近傍などで特殊な取り扱いをせずに衝撃波近傍の数値振動を小さく抑え、波動をよくとらえるコンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせを見出した。

4.10 4章のまとめ

第4章では、計算空力音響での課題のひとつである衝撃波や急峻な波動現象を伴う圧縮性流れの数値計算に、コンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせを用いた場合について、一次元衝撃波管問題である Sod 問題を対象として評価を行った。

- ① 衝撃波近傍で生じる数値振動を低減するには高解像度スキームを用いることが適切である。特に、非常に高解像度スキームとその解像度に応じたカットオフ波数となるフィルタを用いることにより、衝撃波および接触不連続面をシャープにとらえることができるという一定の長所を作り出すことを見出した。数値振動を低減する目的でフィルタを併用すると、フィルタ伝達関数に過敏に応答せず、グリッド点を増やすことによってコンパクトスキームの特徴が活用された急峻な波動現象を再現できることがわかった。
- ② 膨張波近傍で生じる数値振動を低減するには高解像度スキームを用いることが適切である。フィルタの伝達関数の影響を強く受けることが分かり、特にスキームの解像度と同じもしくは少し小さい程度のカットオフ波数を選択するのが良いことが分かった。
- ③ エントロピー波と衝撃波の干渉問題においては、エントロピー波の生成領域では、その誤差を小さくするために、高波数成分のみを除去するフィルタを用いることが有効である。

第5章 結論

5.1 本研究の概要

空力音や衝撃波は、騒音の原因となる環境問題であり対策が必要とされている。数値計算により音波の発生のメカニズムと伝播する音波を同時に捉える計算法（計算空力音響学）として、非定常圧縮性流れでの微分の計算に適した高解像度性の特徴を持つコンパクトスキームを用いることが有効である。コンパクトスキームでは散逸が働かないため、よく解像できない高波数成分の除去にコンパクトフィルタを組み合わせることが多い。それらの組み合わせには、数値境界条件や衝撃波の発生や急峻な波動現象を含む非定常流れ場の計算法における課題があった。そこで、本研究においては、空間差分スキームの解像度とフィルタの伝達関数に着目して高解像度性と計算安定性を両立できる数値境界条件と衝撃波や急峻な波動現象の計算に対する欠点を克服できる計算手法を研究し、コンパクトスキームの高解像度性の潜在力を生かす伝達関数をもつコンパクトフィルタを組み合わせた具体的な計算法をそれぞれに対して提案した。

5.2 本論文のまとめ

5.2.1 数値境界近傍でのスキーム

- ① コンパクトスキームで十分解像できる波数領域以外を十分に除去できる伝達関数のフィルタを用いると、渦運動およびそれにより発生する空力音の計算値は境界スキームの違いによる影響を受けない。
- ② コンパクトスキームで十分解像できる波数よりもずっと高い波数のみを除去できる伝達関数のフィルタを用いると、渦運動やそれによって発生する空力音は境界スキームの影響を強く受けることが分かった。適切なスキームの組み合わせを用いると、粗い格子で、位相のずれが少なく計算できることが分かった。境界で Adam(1977)の3次精度境界コンパクトスキーム、境界より1つ内側で4次精度 Padé スキームを用いるか、組み合わせた場合においても修正波数の異常な増幅が生じないことが示されている Jordan(2009)の4次精度境界コンパクトスキームを用いることが適切であることがわかった。一方、境界に Lele (1992)の4次精度境界コンパクトスキーム、境界より一つ内側のノードに4次精度 Padé スキームを用いる場合には、壁面近傍で数値的な振動を生じて、それに伴い特異な渦度分布・音響場を形成する場合があります、不適切である。

5.2.2 数値境界近傍でのフィルタ

- ① Gaitonde and Visbal(2000)が提案した境界近傍に4次精度境界コンパクトフィルタを用いた場合には、音響場についてもレファレンスデータに近い値を得られることが明らかになった。これは、4次精度境界コンパクトフィルタの伝達関数の実部での増幅は α によらずに微小であり、空力音の原因となる双極渦の渦運動が4次精度コンパクトフィルタの実部での増幅の影響をほとんど受けないためであると考えられる。
- ② Visbal and Gaitonde(1998)が提案した境界近傍でフィルタの精度の次数を低下させる場合には、観察される空力音は、境界より1つ内側のノードにおける2次精度コンパクトフィルタのフリーパラメータ α の値に強く影響を受けることが明らかになった。
- ③ Gaitonde and Visbal(2000)が提案した境界近傍に6次精度境界コンパクトフィルタを用いた場合には、渦運動を適切に計算することができず、音の位相のずれが大きい。
- ④ 境界より1つ内側のノードにLele(1992)の4次精度陽的フィルタを用いることによって、境界より1つ内側のノードにおける最適なフリーパラメータ α を考慮することなくレファレンスデータとの位相のずれが少ない解を得ることができる計算手法を構築した。ただし、格子解像度の影響を受けやすいことに留意する必要がある。
- ⑤ 境界より2つ内側の伝達関数の特性において波数 π において伝達関数が0とならない場合には、渦と壁面との相互作用によって発生する空力音の位相にずれが生じる場合があった。

5.2.3 急峻な波動現象でのスキームとフィルタ

- ① 衝撃波近傍で生じる数値振動を低減するには高解像度スキームを用いることが適切である。特に、非常に高解像度スキームとその解像度に応じたカットオフ波数となるフィルタを用いることにより、衝撃波および接触不連続面をシャープにとらえることができるという一定の長所を作り出すことを見出した。数値振動を低減する目的でフィルタを併用すると、フィルタ伝達関数に過敏に反応せず、グリッド点を増やすことによってコンパクトスキームの特徴が活用された急峻な波動現象を再現できることがわかった。
- ② 膨張波近傍で生じる数値振動を低減するには高解像度スキームを用いることが適切である。フィルタの伝達関数の影響を強く受けることが分かり、特にスキームの解像度と同じもしくは少し小さい程度のカットオフ波数を選択するのが良いことが分かった。
- ③ エントロピー波と衝撃波の干渉問題においては、エントロピー波の生成領域では、その誤差を小さくするために、高波数成分のみを除去するフィルタを用いることが有効である。

5.3 将来の研究展望

壁近傍や衝撃波近傍をセンサ等によって特定しコンパクトスキームやコンパクトフィルタの組み合わせを WCNS における重み付け法や LAD におけるセンサを用いるなど適切に調節できるようになれば，高解像度スキームの潜在力を最大限生かす，騒音の原因となる空力音や衝撃波に有効な数値計算法が確立できることが期待できる。

参考文献

- Adam, Y., Highly accurate compact implicit methods and boundary conditions, *Journal of Computational Physics*, Vol. 24 (1977), pp. 10-22.
- Alquadi, I. M., An assessment of filtering technique for high-order aeroacoustics simulations, *Proceedings of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference* (2006), Paper No. AIAA2006-2632.
- Carpenter, M. H., Gottlieb, D. and Abarbanel, S., The stability of numerical boundary treatments for compact high order finite difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol.108 (1993), pp.272-295.
- Cook, A. W. and Cabot, W. H., Hyperviscosity for shock-turbulence interactions, *Journal of Computational Physics*, Vol.203, (2005), pp.379-385.
- 出川智啓, 弘中一也, 前川博, 高見創, 双極渦と壁面の衝突角度の変化による渦運動と音響場の関係, 第24回数値流体力学シンポジウム (2010), CD(C6-1).
- Deng, X., Maekawa, H. and Shen, C., A class of high order dissipative compact schemes, *Proceedings of the 27th AIAA Fluid Dynamics Conference* (1996). Paper No. AIAA96-1972.
- Gaitonde, D. V. and Visbal, M. R., Pade-type higher-Order boundary filters for the Navier-Stokes equations, *AIAA Journal*, Vol.38, No.11 (2000), pp.2103-2112.
- Gaitonde, D. V. and Visbal, M. R., High-order schemes for Navier-Stokes equations: Algorithm and implementation into FDL3DI, AFRL-VA-WP-TR-1998-3060 (1998).
- 弘中一也, 前川博, 高見創, 出川智啓, 壁近傍の渦と誘起された二次渦によって発生する音響場に関する研究, 日本機械学会山梨講演会講演論文集 (2009), pp.124-125.
- Ikeda, T., Sumi, T. and Kurotaki, T., Interface conditions of finite difference compact schemes for computational aeroacoustics, *AIAA Journal*, Vol.47, No.11 (2009), pp. 2658-2665.
- Jiang, G. S. and Shu, C. W., Efficient implementation of weighted ENO schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol.126 (1996), pp.202-228.
- Johnsen, E., Larsson, J., Bhagatwala, A.V., Cabot, W.H., Moin, P., Olson, B.J., Rawat, P.S., Shankar, S.K., Sjögreen, B., Yee, H.C., Zhong, X. and Lele, S. K., Assessment of high-resolution methods for numerical simulations of compressible turbulence with shock waves, *Journal of Computational Physics*, Vol.229 (2010), pp.1213-1237.
- Jordan, S. A., The spatial resolution properties of composite compact finite differencing, *Journal of Computational Physics*, Vol. 221(2007), pp.558-576.
- Jordan, S. A., Improving the spatial resolution and stability by optimizing compact finite differencing templates, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 131 (2009), 121402.
- Kawai, S. and Fujii, K., Compact scheme with filtering for Large-Eddy Simulation of transitional boundary layer, *AIAA Journal*, Vol.46, No.3 (2008), pp.690-700.
- Kawai, S. and Lele, S. K., Localised artificial diffusivity scheme for discontinuity capturing on curvilinear meshes, *Journal of Computational Physics*, Vol.227, (2008), pp.9498-9526.
- Kawai, S., Shankar, S. K. and Lele, S. K., Assessment of localized artificial diffusivity scheme for large eddy simulation of compressible turbulent flows, *Journal of Computational Physics*, Vol.229 (2010), pp.1739-1762.
- Kim, J. W., Quasi-disjoint pentadiagonal matrix systems for the parallelization of compact finite – difference schemes and filters, *Journal of Computational Physics*, Vol.241 (2013), pp.168-194.
- Kitamura, K., Shima, E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations, *Journal of Computational Physics*, Vol.245 (2013), pp.62-83.
- Koutsavdis, E.K., Blaisdell, G.A., Lyrantzis, On the use of compact schemes with spatial filtering in computational aeroacoustics, *Proceedings of the 37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (1999), Paper No. AIAA 99-0360.
- Lele, S. K., Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *Journal of Computational*

- Physics, Vol.103 (1992), pp.16-42.
- Liou, M. S., Open problems in numerical fluxes: proposed solutions, Proceedings of 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference (2011), Paper No. AIAA 2011-3055.
- Nonomura, T., Iizuka, N., Fujii, K., Free stream and vortex preservation properties of high order WENO and WCNS on curvilinear grids, Computers and Fluids, Vol.39 (2010), pp.197-214.
- Orlandi, P., Vortex dipole rebound from a wall, Physics of Fluids A, Vol.2 (1990), pp.1429-1436.
- Pirrozzoli, S., Numerical Methods for High-Speed Flows, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol.43, (2011), pp.163-194.
- Poinsot, T. J. and Lele S. K., Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows, Journal of Computational Physics, Vol.101 (1992), pp.104-129.
- Roe, P. L., Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, Journal of Computational Physics, Vol.43, (1981), pp.357-372.
- 佐藤翔平, 左志峰, 井上洋平, 前川博, 衝撃波を伴う流れの基礎研究への応用, 第 92 期日本機械学会流体工学部門講演会, USB
- Sod, G. A., A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 27 (1978), pp.1-31.
- 滝口貴, 渡辺大輔, 前川博, コンパクトスキームの圧縮性流れの高解像度シミュレーションへの応用, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.72, No.721 (2006), pp.104-112.
- Leer, B. V., Towards the ultimate conservative difference schemes, Journal of Computational Physics, 32 (1979), pp.101-136.
- Visbal, M. R. and Gaitonde, D. V., High order accurate methods for unsteady vortical flows on curvilinear meshes, Proceedings of the 36th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (1998), Paper No. AIAA paper 98-0131.
- Visbal, M. R. and Gaitonde, D. V., Computation of aeroacoustic fields on general geometrics using compact differencing and filtering schemes, AIAA Paper 99-3706, 30th AIAA Fluid Dynamics Conference (1999).
- Visbal, M. R. and Gaitonde, D.V., Shock capturing using compact differencing based methods, Proceedings of 43rd AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit (2005).
- 若松裕紀, 前川博, 渡辺大輔, 壁面に衝突する渦による音響場の解析, 日本流体力学学会年会 2008 講演要旨集(2008a), p.303.
- 若松裕紀, 前川博, 渡辺大輔, 尾形陽一, 双極渦の壁面衝突における衝突の角度と音波の関係, 第 22 回数値流体力学シンポジウム(2008b), p.32.
- 若松裕紀, 渡邊裕章, コンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの圧縮性流れ数値計算への適用性評価, 日本機械学会論文集, Vol. 80, No. 816 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014fe0227.
- 若松裕紀, 渡邊裕章, ローパスフィルタのカットオフ波数が衝撃波捕獲に及ぼす影響, 第 28 回数値流体力学シンポジウム講演論文集(2014), DVD.
- 若松裕紀, 渡邊裕章, 井上洋平, 前川博, 壁面近傍のスキームが壁面近傍渦運動から発生する空力音の数値計算に与える影響, 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 823 (2015), DOI: 10.1299/transjsme.14-00544.
- Wang, H., Zeng, Y., Tang, H., Zhu, M., Lu, S., The effect of filtering schemes on the sound field, Advanced Materials Research, Vol.702 (2013), pp.297-303.
- Yokoyama, H., Tsukamoto, Y., Kato, C. and Iida, A., Self-sustained oscillations with acoustic feedback in flows over a backward forcing step with a small upstream step, Physics of Fluids, Vol.19 (2007), 106104.
- Zhanxin, L., Qubai, H., Hi, H. and Jixuan, Y., Optimized compact filtering schemes for computational aeroacoustics, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.60 (2009), pp.827-845.

謝辞

学位論文をまとめるにあたり，ご指導いただきました，前川教授に心より感謝申し上げます．特に，数々の効果的なアドバイスをいただき，研究を進めることができました．

また，九州大学渡邊准教授にも効果的なアドバイスをいただきました．

論文審査にご参画いただきました，電気通信大学宮寄教授，大川教授，Matuttis Hans-Georg 准教授，東京理科大学山本教授にはお忙しいなか大変貴重なご指導ご助言をいただきましたこと，心より感謝申し上げます．

関連論文の印刷公表の方法及び時期

(1) 若松裕紀、渡邊裕章

論文題目「コンパクトスキームとコンパクトフィルタの組み合わせの圧縮性流れ数値計算への適用性評価」

平成26年8月 日本機械学会論文集80巻（本文との関連 第4章）

(2) 若松裕紀、渡邊裕章、井上洋平、前川博

論文題目「壁面近傍のスキームが壁面近傍渦運動から発生する空力音の数値計算に与える影響」

平成27年3月 日本機械学会論文集81巻（本文との関連 第2章）