

# Wärmeübertragung in einem axial rotierenden, durchströmten Rohr im Bereich des thermischen Einlaufs

## Teil 2: Einfluß der Rotation auf eine laminare Strömung

B. Weigand und H. Beer, Darmstadt, BRD

### Heat transfer in an axially rotating pipe in the thermal entrance region. Part 2: Effect of rotation on laminar pipe flow

**Abstract.** The effects of tube rotation on the temperature distribution and the heat transfer to a fluid flowing inside a tube are examined by analysis in the thermal entrance region. The flow is assumed to be hydrodynamically fully developed. The rotation has a destabilizing effect on the laminar pipe flow, causing a transition to turbulent flow. Therefore, a remarkable increase in heat transfer with increasing rotational Reynolds number can be observed. The thermal entrance length decreases remarkably with growing rotational Reynolds number.

**Zusammenfassung.** Der Einfluß der Rotation auf das Temperaturprofil und die Wärmeübergangszahl einer laminaren Rohrströmung im Bereich des thermischen Einlaufs wird theoretisch untersucht. Es wird angenommen, daß das Geschwindigkeitsprofil voll ausgebildet ist. Die Rotation hat einen destabilisierenden Einfluß auf die Laminarströmung, die umschlägt und turbulent wird. Aufgrund der Anfachung der Turbulenz durch die Rotation verbessert sich die Wärmeübertragung mit steigender Rotations-Reynoldszahl und die thermische Einlauflänge nimmt beträchtlich ab.

### Formelzeichen

$a$	Temperaturleitzahl
$C_n, \bar{C}_n, C_1, C_3$	Konstanten
$c_p$	spezifische Wärme bei konstantem Druck
$D$	Rohrdurchmesser
$E$	Funktion nach Gl. (16)
$H_n$	Eigenfunktionen
$l$	hydrodynamischer Mischungsweg
$l_q$	thermischer Mischungsweg
$N = Re_\varphi / Re$	Reynoldszahlenverhältnis
$Nu$	Nusseltzahl
$Nu_\infty$	Nusseltzahl für die thermisch voll ausgebildete Strömung
$Pr$	Prandtlzahl
$Pr_t$	turbulente Prandtlzahl
$\dot{q}$	Wärmestromdichte
$Re_*$	Schubspannungsreynoldszahl
$R_n$	Eigenfunktionen
$Re = \bar{v}_z D / \nu$	Durchfluß-Reynoldszahl
$Re_\varphi = v_{\varphi\omega} D / \nu$	Rotations-Reynoldszahl
$R$	Rohrradius
$r$	Koordinate in radialer Richtung
$\tilde{r} = r/R$	Dimensionslose Koordinate in radialer Richtung
$T$	Temperatur

$T_b$	“bulk temperature”
$\bar{v}_z$	mittlere Axialgeschwindigkeit
$v$	Geschwindigkeit
$y^+ = (1 - \tilde{r}) Re_*$	dimensionsloser Wandabstand
$\eta$	Integrationsvariable
$\xi$	Integrationsvariable
$\theta, \bar{\theta}$	dimensionslose Temperaturen
$\lambda$	Wärmeleitzahl
$\lambda_n$	Eigenwerte
$\nu$	kinematische Viskosität
$\rho$	Dichte
$\varphi$	tangentiale Koordinate
$\psi, \bar{\psi}$	Hilfsfunktionen

### Indizes

$m$	in der Rohrmitte
$r$	radial
$w$	an der Rohrwand
$z$	axial
$0$	am Rohreintritt
$0$	ohne Rotation
$\varphi$	tangential

## 1 Einleitung

Rotierende Strömungen liegen bei einer Vielzahl strömungs- und wärmetechnischer Vorgänge und Verfahren vor. In der Praxis handelt es sich hierbei meist um turbulente Strömungen. Ungeachtet dessen ist aber auch die laminare Rohrströmung mit aufgeprägter Rotation von erheblichem Interesse. Überlagert man einer laminaren Rohrströmung eine Starrkörperrotation, so wird die Strömung instabil und turbulente Schwankungsbewegungen werden angefacht. Mackrodt [1] konnte 1971 die Stabilitätsgrenze für diese Strömung theoretisch bestimmen und sie experimentell verifizieren. Er stellte fest, daß die Stabilitätsgrenze für eine Hagen-Poiseuille-Strömung bei  $Re = 165,76$ ,  $Re_\varphi = 53,92$  liegt. Auch Murakami und Kikuyama [2] wiesen durch Messungen der Geschwindigkeitsprofile einen destabilisierenden Einfluß der Rotation auf die laminare, voll ausgebildete Rohrströmung nach. Bild 1 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Mit wachsender Rotation nähert sich das Axialgeschwindigkeits-

profil der hydrodynamisch voll ausgebildeten Strömung immer mehr dem einer voll turbulenten Rohrströmung an. Kikuyama u. a. [3] konnten durch eine Modifikation der Prandtl'schen Mischungswegtheorie diesen Einfluß der Rotation auf das Geschwindigkeitsprofil und auf den Druckverlust für die hydrodynamisch ausgebildete Strömung in rotierenden Rohren berechnen. Reich u. a. [4] erweiterten den Mischungswegansatz aus [3] und berechneten für den Fall der hydrodynamisch und thermisch voll entwickelten Strömung mit konstanter Beheizung der Rohrwand das Axialgeschwindigkeitsprofil, die Temperaturverteilung und die Nusseltzahl. Es zeigte sich, daß die Wärmeübertragung im laminar durchströmten Rohr mit wachsender Rohrrotation besser wird. Dies ist eine Folge der destabilisierenden Wirkung der Rotation auf die Strömung, die kurz nach dem Eintritt in die rotierende Rohrstrecke instabil wird und umschlägt.

Der thermische Einlaufbereich bei hydrodynamisch voll ausgebildeter Strömung wurde bislang noch nicht untersucht. Ziel dieser Arbeit ist es deshalb, den Einfluß der Rotation auf die Temperaturverteilung und auf die Wärmeübertragung im thermischen Einlaufbereich zu untersuchen. Es werden die beiden Randbedingungen

- konstanter Wärmestrom an der Rohrwand
- konstante Rohrwandtemperatur

betrachtet.

## 2 Analyse

Reich u. a. [4] berechneten für den Fall der hydrodynamisch voll entwickelten Strömung das Axialgeschwindigkeitsprofil (Bild 1). Sie setzten bei ihren Betrachtungen ein inkompressibles, Newton'sches Fluid mit konstanten Stoffwerten voraus. Eine weitere Annahme bestand in einem Ansatz für die Tangentialgeschwindigkeitsverteilung, der schon den Berechnungen in [3] zugrunde lag. Es wurde angenommen, daß das Fluid unter dem Einfluß der Rohrdrehung näherungsweise wie ein starrer Körper rotiert, daß also

$$\frac{v_\varphi}{v_{\varphi w}} = \frac{r}{R} \tag{1}$$

ist. Bild 2 zeigt die Tangentialgeschwindigkeit der ausgebildeten Strömung für zwei verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen, mit der Rotations-Reynoldszahl als Parameter. Die eingetragenen Meßwerte aus [3] zeigen, daß die Annahme der Starrkörperrotation für die hydrodynamisch voll ausgebildete Strömung gerechtfertigt ist. Bild 1 zeigt Axialgeschwindigkeitsprofile, die unter den oben angegebenen Annahmen berechnet wurden. Der destabilisierende Einfluß der Rotation ist deutlich erkennbar. Mit wachsender Rotations-Reynoldszahl sinkt die Maximalgeschwindigkeit ab und das Profil wird völliger, was durch die stärkere Anfachung der Turbulenz mit wachsender Rohrrotation zu erklären ist. Der Vergleich mit Meßwerten aus [3] zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung.

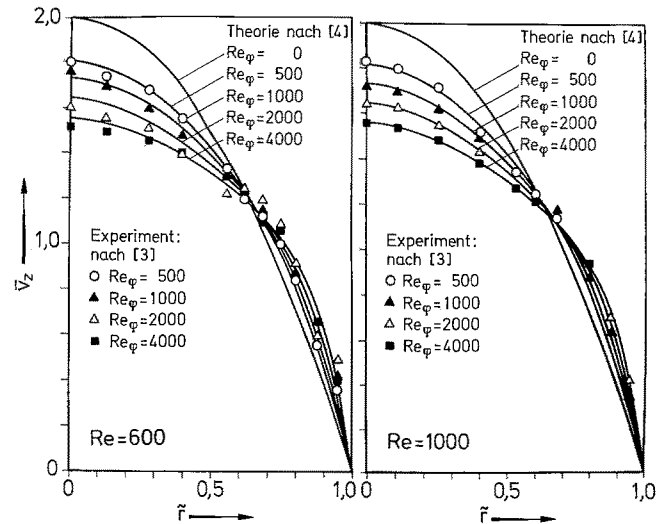


Bild 1. Einfluß der Rotations-Reynoldszahl auf die Axialgeschwindigkeitsprofile

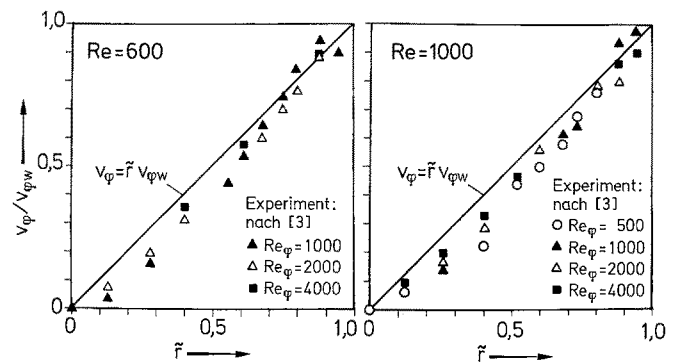


Bild 2. Einfluß der Rotations-Reynoldszahl auf die Tangentialgeschwindigkeitsverteilung

Unter den gleichen grundlegenden Annahmen wie in Teil 1 dieser Arbeit [5], erhält man die Energiegleichung in der folgenden Form:

$$\varrho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left\{ \lambda - \varrho c_p l l_q \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\} r \frac{\partial T}{\partial r} \right]. \tag{2}$$

Die in Gl. (2) auftretenden Mischungswege  $l$  und  $l_q$  sind hierbei unter Hinweis auf [4] durch die folgenden Gleichungen gegeben

$$\frac{l}{R} = 0,4 \sqrt{N} \frac{\tilde{l}_0}{R}. \tag{3}$$

$$\frac{l_q}{R} = \frac{0,4}{Pr_t} \sqrt{N} \frac{\tilde{l}_0}{R}. \tag{4}$$

Aus den Gln. (2) bis (4) wird deutlich, daß der turbulente Wärmetransport proportional  $Re_\varphi$  erfolgt. Der hydrodynamische Mischungsweg  $\tilde{l}_0/R$  für das nicht rotierende, turbulent durchströmte Rohr ist durch die modifizierte Interpolationsformel nach Nikuradse [6] zu bestimmen.

$$\frac{\tilde{l}_0}{R} = (1 - e^{-r^{*2/6}}) (0,14 - 0,08 \bar{r}^2 - 0,06 \bar{r}^4). \tag{5}$$

Entsprechend Gl. (3) wird der Mischungsweg  $l/R$  durch die Rohrrotation angefacht. Die turbulente Prandtlzahl ist nach Messungen von Ludwig [6] bekannt und wurde als Polynom 4. Grades angenähert:

$$\frac{1}{Pr_t} = \frac{\tilde{l}q_0}{\tilde{l}_0} = 1,53 - 2,82 \tilde{r}^2 + 3,85 \tilde{r}^3 - 1,48 \tilde{r}^4 \quad (6)$$

Die in den Gln. (5) und (6) auftretende Größe  $\tilde{r} = r/R$  ist der dimensionslose Radius. Zu der Energiegleichung (2) treten noch die Randbedingungen

$$T(z=0, r) = T_0 \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (8)$$

Als Randbedingung an der Rohrwand werden zwei Fälle untersucht:

Konstanter Wärmestrom an der Rohrwand

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{q}_{r,w} \quad (9)$$

Konstante Rohrwandtemperatur

$$T(z, r=R) = T_w \quad (10)$$

### 2.1 Konstanter Wärmestrom an der Rohrwand

Bei der Betrachtung eines konstanten Wärmestromes an der Wand wird von der Energiegleichung (2) mit den Randbedingungen (7)–(9) ausgegangen. Die Gln. (2) und (7)–(9) lassen sich durch das Einführen der gleichen dimensionslosen Größen wie im ersten Teil dieser Arbeit umformen:

$$\theta = \frac{T - T_0}{\frac{\dot{q}_{r,w} R}{\lambda}}$$

$$\tilde{z} = \frac{z}{R} \frac{2}{Re Pr}; \quad Re = \frac{\tilde{v}_z D}{\nu}; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (11)$$

$$\tilde{v}_z = \frac{v_z}{\tilde{v}_z}; \quad \tilde{r} = \frac{r}{R}.$$

Damit erhält man aus Gl. (2)

$$\tilde{v}_z \tilde{r} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[ E(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right] \quad (12)$$

und aus den Randbedingungen (7)–(9)

$$\theta(\tilde{z}=0, \tilde{r}) = 0 \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0 \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = -1 \quad (15)$$

mit der Funktion

$$E(\tilde{r}) = 1 - Pr Re \frac{l}{R} \frac{l_q}{R} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{r}} \quad (16)$$

Kuo u. a. [7] untersuchten experimentell den Einfluß der Rotation auf die Wärmeübertragung in einem laminar durchströmten, rotierenden Rohr. Bei dem verwendeten Versuchsaufbau mit einer rotierenden, beheizten Rohrlänge von  $L_{Rot}/D=8$  und Wasser als Strömungsmedium konnte jedoch nur der Einfluß auf die thermische und hydrodynamische Anlaufströmung untersucht werden. Bei konstanter Durchfluß-Reynoldszahl zeigte sich eine deutliche Verbesserung des Wärmeübergangs mit zunehmender Rotations-Reynoldszahl. Für den Fall der Wärmeübertragung im axial durchströmten, rotierenden Rohr mit konstantem Wärmestrom an der Rohrwand wurden von Reich [4] die Nusseltzahl und die Temperaturverteilung für die thermisch voll ausgebildete Strömung angegeben. Die thermische Anlaufströmung für ein axial durchströmtes, nichtrotierendes Rohr, mit verschiedenen Randbedingungen an der Rohrwand, wurde in [8] ausführlich diskutiert.

Die Berechnung der Temperaturverteilung im Fluid und der örtlichen Nusseltzahl erfolgt nun analog zum Teil 1 [5] dieser Arbeit. Gleichung (12) mit den Randbedingungen (13)–(15) wird mit Hilfe des Separationsansatzes  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  gelöst, wobei  $\theta_1$  die voll ausgebildete Temperaturverteilung beschreibt.  $\theta_2$  bestimmt im wesentlichen die Temperaturverteilung für kleine  $z$ . Auf die einzelnen Schritte der Berechnung wird hier nicht näher eingegangen. Es werden nur die Ergebnisse angegeben. Die Temperaturverteilung lautet:

$$\theta(\tilde{r}, \tilde{z}) = -2 \tilde{z} + \psi(\tilde{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(\tilde{r}) e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}} \quad (17)$$

mit der Funktion  $\psi(\tilde{r})$

$$\psi(\tilde{r}) = \bar{\psi}(\tilde{r}) + C_3 \quad (18)$$

$$\psi(\tilde{r}) = - \int_0^{\tilde{r}} \left( \frac{2}{\eta E(\eta)} \int_0^{\eta} \tilde{v}_z(\xi) \xi d\xi \right) d\eta - 2 \int_0^1 \psi(\tilde{r}) \tilde{r} \tilde{v}_z d\tilde{r} \quad (19)$$

Die lokale Nusseltzahl ergibt sich aus

$$Nu = \frac{D}{T_w - T_b} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_w \quad (20)$$

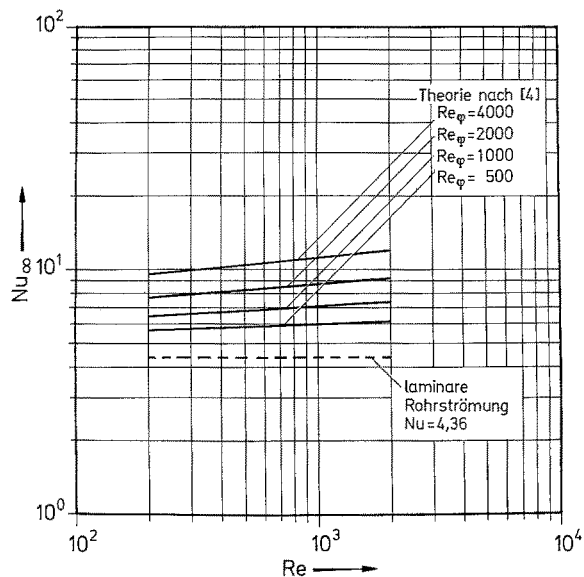
$$Nu = \frac{-2}{\bar{\psi}(1) + C_3 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(1) e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}}} \quad (21)$$

Der Term  $\bar{\psi}(1) + C_3$  ist hierbei durch  $Nu_{\infty}$ , also die Nusseltzahl für die hydrodynamisch und thermisch voll entwickelte Strömung bestimmt [4]:

$$Nu_{\infty} = \frac{-2}{\bar{\psi}(1) + C_3} \quad (22)$$

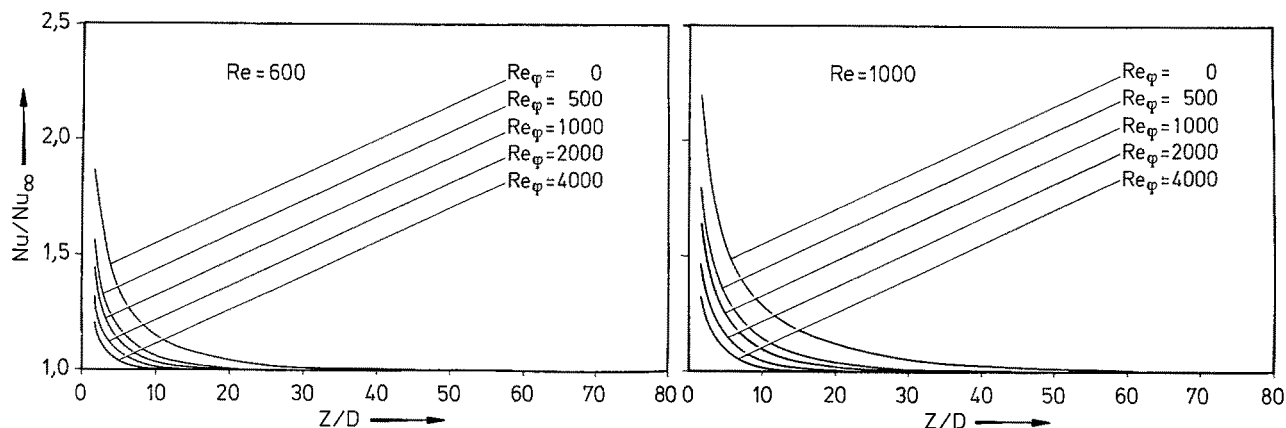
Die Konstanten  $C_n$  in Gl. (17) und Gl. (21) lassen sich durch den folgenden Ausdruck beschreiben:

$$C_n = \frac{R_n(1)}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{\int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} R_n^2 d\tilde{r}} \quad (23)$$



**Bild 3.** Verlauf der Nusseltzahl für die hydrodynamisch und thermisch voll ausgebildete Strömung über der Durchfluß-Reynoldszahl mit  $Re_\phi$  als Parameter. Konstanter Wärmestrom der Rohrwand

In Tabelle 1 sind die Werte von  $C_n R_n(1)$ , die Eigenwerte  $\lambda_n$  und auch die Nusseltzahl  $Nu_\infty$  für zwei verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen und verschiedene Rotations-Reynoldszahlen aufgeführt. Damit läßt sich die Nusseltzahl nach Gl. (21) an einer beliebigen Stelle  $z/D$  berechnen. Die Ergebnisse der analytischen Betrachtungen sind in den folgenden Bildern für Luft ( $Pr = 0,71$ ) dargestellt. Bild 3 zeigt den Verlauf der Nusseltzahl  $Nu_\infty$  der ausgebildeten Strömung, aufgetragen über der Durchfluß-Reynoldszahl, mit der Rotations-Reynoldszahl als Parameter. Für  $Re_\phi = 0$  nimmt  $Nu_\infty$  den konstanten Wert 4,36 der voll entwickelten laminaren Rohrströmung mit konstantem Wärmestrom an der Wand an. Mit steigender Rotations-Reynoldszahl wird die Wärmeübertragung durch die auftretende Turbulenz intensiviert. Dies geht auch aus Gl. (2) hervor, aus der man ersieht, daß der übertragene Wärmestrom proportional zu  $Re_\phi$  ansteigt. In Bild 4 sind die Gegebenheiten des thermischen Anlaufs dargestellt. Es ist die örtliche Nusseltzahl über der Axialkoordinate  $z/D$ , mit  $Re_\phi$  als Parameter, aufgetragen. Man erkennt, daß die thermische Einlaufänge mit wachsendem  $Re_\phi$  stark abnimmt. Dies ist wiederum eine Folge der auftre-



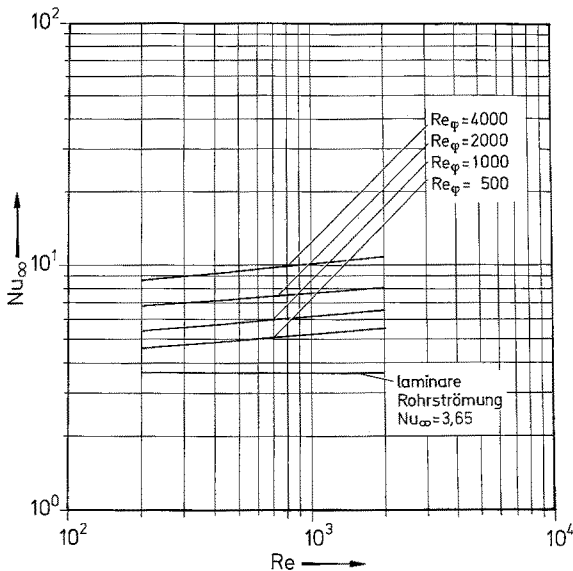
**Bild 4.** Verlauf von  $Nu/Nu_\infty$  über der Rohrlänge mit der Rotations-Reynoldszahl als Parameter. Konstanter Wärmestrom an der Rohrwand

**Tabelle 1.** Eigenwerte und Konstanten für verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen ( $Pr = 0.71$ ). Konstanter Wärmestrom an der Rohrwand

$Re_\phi$	$\lambda_0^2$	$\lambda_1^2$	$\lambda_2^2$	$\lambda_3^2$	$\lambda_4^2$	$C_0 R_0(1)$	$C_1 R_1(1)$	$C_2 R_2(1)$	$C_3 R_3(1)$	$C_4 R_4(1)$	$Nu_\infty$
<b>Re = 600</b>											
0	0,00	12,87	41,91	87,11	148,26	0,00	0,1983	0,0692	0,0365	0,0230	4,36
500	0,00	20,66	64,10	130,45	220,07	0,00	0,1341	0,0521	0,0287	0,0185	5,85
1000	0,00	26,27	80,42	162,48	272,74	0,00	0,1103	0,0445	0,0251	0,0164	6,85
2000	0,00	35,69	107,73	215,69	360,45	0,00	0,0857	0,0363	0,0211	0,0140	8,35
4000	0,00	51,07	152,47	303,12	504,12	0,00	0,0632	0,0282	0,0169	0,0114	10,56
<b>Re = 1000</b>											
0	0,00	12,87	41,91	87,11	148,26	0,00	0,1983	0,0692	0,0365	0,0230	4,36
500	0,00	20,96	65,06	132,39	223,24	0,00	0,1302	0,0506	0,0280	0,0182	5,99
1000	0,00	26,85	82,34	166,26	279,02	0,00	0,1058	0,0426	0,0242	0,0159	7,08
2000	0,00	36,63	111,13	222,67	371,87	0,00	0,0813	0,0341	0,0200	0,0133	8,72
4000	0,00	52,82	158,49	315,51	524,51	0,00	0,0593	0,0260	0,0157	0,0107	11,18

**Tabelle 2.** Eigenwerte und Konstanten für verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen ( $Pr=0.71$ ). Konstante Wandtemperatur

$Re_\varphi$	$\lambda_0^2$	$\lambda_1^2$	$\lambda_2^2$	$\lambda_3^2$	$\lambda_4^2$	$-C_0 H_0(1)$	$-C_1 H_1(1)$	$-C_2 H_2(1)$	$-C_3 H_3(1)$	$-C_4 H_4(1)$
<i>Re = 600</i>										
0	3,64	22,29	56,95	107,65	174,31	1,495	1,086	0,925	0,832	0,767
500	5,09	33,17	84,50	158,99	256,54	2,184	1,283	1,068	0,963	0,891
1000	6,07	41,13	104,76	196,81	317,24	2,648	1,428	1,169	1,055	0,985
2000	7,58	54,01	138,17	259,27	417,28	3,365	1,635	1,317	1,186	1,109
4000	9,74	74,68	192,16	360,67	580,03	4,411	1,923	1,514	1,361	1,275
<i>Re = 1000</i>										
0	3,64	22,29	56,95	107,65	174,31	1,495	1,086	0,925	0,832	0,767
500	5,23	33,62	85,52	160,98	259,97	2,237	1,321	1,085	0,972	0,900
1000	6,29	41,91	106,77	200,76	323,69	2,737	1,482	1,197	1,071	0,993
2000	7,84	55,43	141,75	266,38	429,04	3,484	1,72	1,358	1,210	1,123
4000	10,29	77,21	198,76	373,60	601,36	4,654	2,056	1,586	1,406	1,307



**Bild 5.** Einfluß der Rotations-Reynoldszahl auf die Nusseltzahl der voll ausgebildeten Strömung. Konstante Rohrwandtemperatur

tenden Turbulenz, die den Energieaustausch stark begünstigt und somit zu einer verkürzten thermischen Einlauf-länge beiträgt.

2.2 Konstante Wandtemperatur

Für den Fall der konstanten Rohrwandtemperatur tritt zur Energiegleichung (2) und den Randbedingungen (7) und (8) anstatt der Randbedingungen (9) die geänderte Randbedingung (10) hinzu.

$$T(z, r=R) = T_w \tag{10}$$

Für das nichtrotierende, laminar durchströmte Rohr mit konstanter Rohrwandtemperatur existiert eine Vielzahl von theoretischen und experimentellen Arbeiten [8]. Die Ausbildung der thermischen Grenzschicht bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung für das axial rotierende Rohr mit

konstanter Rohrwandtemperatur wurde bislang noch nicht untersucht.

Die Energiegleichung (2) und die Randbedingungen (7), (8) und (10) werden genauso dimensionslos gemacht wie in Abschn. 2.1. Die einzigen Unterschiede bestehen in der Verwendung einer neuen dimensionslosen Temperatur und der geänderten Randbedingung (10):

$$\tilde{\theta} = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \tag{24}$$

Mit den dimensionslosen Größen nach Gl. (11) erhält man die Energiegleichung

$$\tilde{v}_z \tilde{r} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[ E(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{r}} \right] \tag{25}$$

und die Randbedingungen

$$\tilde{\theta}(\tilde{z}=0, \tilde{r}) = 1 \tag{26}$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0 \tag{27}$$

$$\tilde{\theta}(\tilde{z}, \tilde{r}=1) = 0 \tag{28}$$

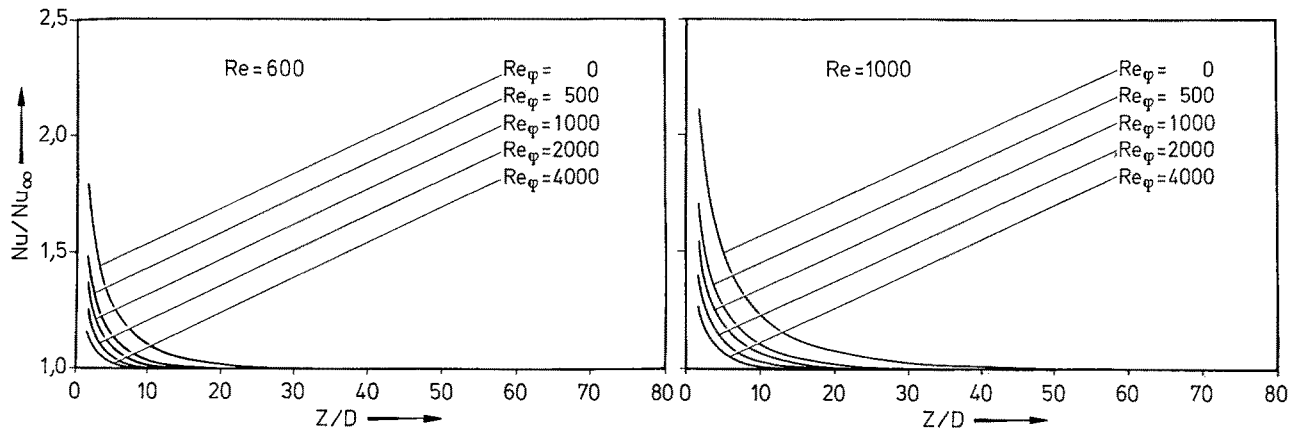
mit der Funktion  $E(\tilde{r})$  nach Gl. (16).

Die Berechnung der Temperaturverteilung im Fluid und der örtlichen Nusseltzahl erfolgt analog zu Teil 1 [5] dieser Arbeit. Deshalb werden die einzelnen Schritte der Berechnung hier nicht wiederholt. Die Temperaturverteilung ergibt sich zu

$$\tilde{\theta}(\tilde{r}, \tilde{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n H_n(\tilde{r}) e^{-\lambda_n^2 \tilde{z}} \tag{29}$$

mit den Konstanten  $\bar{C}_n$

$$\bar{C}_n = \frac{H'_n(1)}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{\int_0^1 \tilde{v}_z(\tilde{r}) \tilde{r} H_n^2 d\tilde{r}} \tag{30}$$



**Bild 6.** Verlauf der bezogenen Nusseltzahl  $Nu/Nu_\infty$  über der Axialkoordinate  $z/D$  mit  $Re_\phi$  als Parameter. Konstante Rohrwandtemperatur

Als örtliche Nusseltzahl erhält man mit Hilfe der Gl. (20)

$$Nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n H'_n(1) e^{-\lambda_n^2 \bar{z}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n \frac{H'_n(1)}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 \bar{z}}} \quad (31)$$

Die Nusseltzahl für die hydrodynamisch und thermisch voll ausgebildete Strömung ergibt sich als Grenzwert der Gl. (31) für große Werte von  $\bar{z}$ .

$$\lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} Nu = Nu_\infty = \lambda_0^2 \quad (32)$$

Die Konstanten  $\bar{C}_n H'_n(1)$  und die Eigenwerte  $\lambda_n$  sind in Tabelle 2 für zwei verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen und verschiedene Rotations-Reynoldszahlen gegeben. Mit Hilfe der Gl. (31) und Tabelle 2 kann die lokale Nusseltzahl an jeder gewünschten Stelle  $z/D$  berechnet werden. In Bild 5 ist für die ausgebildete Strömung  $Nu_\infty$  über  $Re$ , mit der Rotations-Reynoldszahl als Parameter aufgetragen. Zunehmende Rohrrotation führt zu einer Verbesserung der Wärmeübertragung. Für  $Re_\phi = 0$  ergibt sich die Nusseltzahl der laminaren Rohrströmung mit konstanter Rohrwandtemperatur,  $Nu_\infty = 3,65$ . Bild 6 zeigt, im Bereich des thermischen Anlaufs, für zwei verschiedene Durchfluß-Reynoldszahlen den Verlauf der lokalen Nusseltzahl über  $z/D$ , mit  $Re_\phi$  als Parameter. Genau wie im Fall des konstanten Wärmestroms an der Rohrwand, erkennt man auch hier den Einfluß der Turbulenz auf die Ausbildung der thermischen Grenzschicht. Mit wachsender Rohrrotation verkleinert sich die Einlauflänge.

### 3 Schlussfolgerungen

Aufgrund der Rohrrotation wird die laminare Eintrittsströmung turbulent. Da die turbulenten Austauschgrößen mit wachsender Rohrrotation angefacht werden, verbessert sich die Wärmeübertragung mit steigender Rotations-Reynoldszahl. Die Einlauflänge nimmt mit wachsender Rotations-Reynoldszahl stark ab.

### Literatur

1. Mackrodt, P. A.: Stabilität von Hagen-Poiseuille-Strömungen mit überlagerter starrer Rotation. Mitt. MPI Strömungsforschung und Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen 55 (1971)
2. Murakami, M.; Kikuyama, K.: Turbulent flow in axially rotating pipes. J. Fluids Eng. 12 (1980) 97–103
3. Kikuyama, K.; Murakami, M.; Nishibori, K.; Maeda, K.: Flow in an axially rotating pipe. Bull. JSME 26 (1983) 506–513
4. Reich, G.; Weigand, B.; Beer, H.: Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe – 2. Effect of rotation on laminar pipe flow. Int. J. Heat Mass Transfer 32 (1989) 563–574
5. Weigand, B.; Beer, H.: Wärmeübertragungen in einem axial rotierenden, durchströmten Rohr im Bereich des thermischen Anlaufs. Teil 1. Wärme-Stoffübertrag. 24 (1989) 191–202
6. Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Braun 1982
7. Kur, C. Y.; Iida, H. T.; Taylor, J. H.; Kreith, F.: Heat transfer in flow through rotating ducts. J. Heat Transfer 82 (1960) 139–151
8. Shah, R. K.; London, A. L.: Advances in heat transfer. Laminar flow forced convection in ducts. New York: Academic Press 1978

Prof. Dr.-Ing. H. Beer  
 Dipl.-Ing. B. Weigand  
 Institut für Technische Thermodynamik  
 Petersenstraße 30  
 6100 Darmstadt

Eingegangen am 7. November 1988