GRAPHIK

Brennpunkt Wavelets

Brennpunkt Wavelets

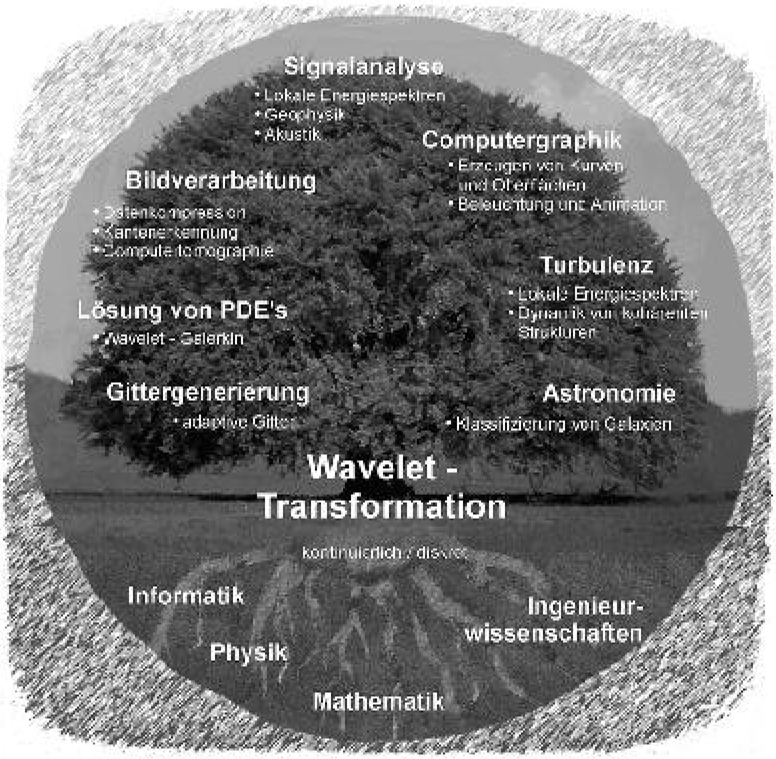
Thomas Fischer / debis Systemhaus,
Maria Haase / ICA, Computersimulation & Visualisierung

Im Jahr 2000: www = world wide wait ?

Im multimedialen Zeitalter müssen immer größere Datenmengen analysiert, gespeichert und übertragen werden. Um Engpässe oder gar Staus auf den DatenHighways zu vermeiden, wird es zunehmend wichtiger, den Datentransfer über das Netz - insbesondere von Bildern - möglichst schnell und kostengünstig durchzuführen. Software-Hersteller und Online-Anbieter versuchen folgerichtig, effiziente, der Anwendung angepaßte, Kompressionstechniken bereitzustellen, die die Information möglichst dichtgepackt übertragen. Im Wettstreit zwischen den verschiedenen Kompressionsverfahren gewinnen Wavelet-Algorithmen immer mehr an Bedeutung.

Was sind Wavelets ?

Wavelets bieten neue Möglichkeiten, Funktionen zu beschreiben und zu transformieren. Dadurch gestatten sie adaptive, lokale Frequenzanalysen. Die Grundidee ist sehr einfach: Man definiert einen Wavelet-Prototyp, eine Funktion, die nur in einem eng be-grenzten Bereich von Null verschieden ist, einige Oszillationen aufweist und ein möglichst kompaktes Frequenzband abdeckt. Aus diesem Basis-Wavelet generiert man durch zwei Operationen, nämlich Dehnen bzw. Stauchen und Verschieben, eine ganze Familie von Wavelets. Zerlegt man eine vorgegebene Funktion in eine Reihe derartiger Wavelet-Funktionen, so lassen sich an jeder Stelle dieser Funktion Aussagen über deren *lokalen* Frequenzinhalt machen. Insofern vereinigen Wavelets Ideen der Fourier-Analyse, der Finite-Elemente-Methoden und des Multigrid-Verfahrens. Im Gegensatz zu traditionellen Fourier-Techniken, die eine Zerlegung in reine, zeitlich unbegrenzte Sinus- und Cosinus-Schwingungen ermöglichen, sind Wavelet-Techniken geradezu prädestiniert, nichtstationäre, realitätsnahe Funktionen auf ihre lokalen Eigenschaften, wie transiente Phänomene, markante Sprünge und Spitzen, lokale Frequenzanteile etc. zu untersuchen. Wavelets werden oft als *mathematisches Mikroskop* bezeichnet, da man Funktionen lokal mit verschiedenen Vergrößerungen und mit unterschiedlicher *Optik*, d.h. mit unterschiedlichen Wavelet-Prototypen, untersuchen kann. Während sich Fourier-Analysen nur auf trigonometrische Funktionen stützen, ist man bei der Wahl des Basis-Wavelets weitgehenst frei, so daß man Wavelets entwickeln kann, die optimal für die jeweiligen Anwendungen ausgelegt sind. Es gibt Wavelets mit Sprüngen (Haar-Wavelets), es gibt selbstähnliche, rekursiv definierte orthogonale Wavelets mit kompaktem Träger (Daubechies-Wavelets), Wavelets mit verschwindenden Momenten, usw. - der Kreativität sind kaum Grenzen gesetzt. Wichtig für die Praxis ist lediglich Lokalität der Basisfunktion im physikalischen und im Fourier-Raum.



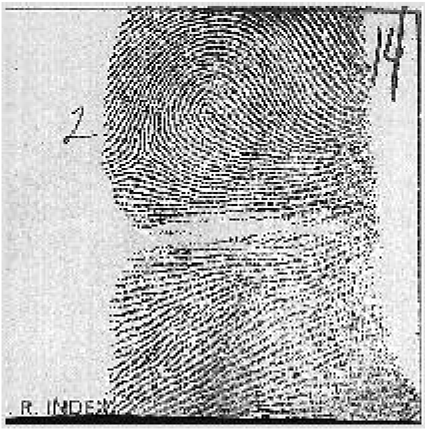
Wo sind die Wurzeln ?

Wavelets gehören zu den Themenkreisen, mit denen sich Wissenschaftler aus dem Ingenieurbereich und der Mathematik in den zurückliegenden 15 Jahren besonders intensiv auseinandergesetzt haben. Die Wurzeln reichen zurück bis in die Anfänge dieses Jahrhunderts und liegen in der reinen sowie der angewandten Mathematik und in der Physik. Der eigentliche Startschuß fiel jedoch Anfang der achtziger Jahre, als Morlet und Grossmann Funktionsfamilien einführten, die eine lokale Frequenzanalyse seismischer Signale zur Auffindung von Erdöllagerstätten erlaubten. In den folgenden Jahren kam es zusammen mit anderen Fachbereichen wie der Signalverarbeitung und den Ingenieurwissenschaften zu einer rapiden Entwicklung der theoretischen Grundlagen für die kontinuierliche und diskrete Wavelet-Transformation. Der wesentliche Durch- bruch der Methode erfolgte durch die Arbeiten von Mallat und Daubechies. Stephane Mallat entwickelte die mathematischen Grundlagen für die Multiskalen-Analyse und zeigte ihren Zusammenhang mit den sogenannten Quadrature Mirror Filters, die man in der Signalverarbeitung verwendet. Ingrid Daubechies gelang die Konstruktion von Familien orthogonaler Wavelet-Basisfunktionen, die eine schnelle Wavelet-Transformation gestatten. Sie ist im Aufwand sogar der schnellen Fourier-Transformation noch überlegen. Die theoretischen Grundlagen sind nun so weit entwickelt, daß man die Wavelet-Transformation schon als Standardmethode innerhalb der mathematischen Werkzeuge betrachten kann. Mittlerweile nimmt die Anzahl der potentiellen Anwendungsgebiete rapide zu, vergleichbar einem Baum, der sich in viele Äste verzweigt.

Bilder enthalten eine Fülle von Informationen auf allen Skalen. Ein 24-Bit-Farbbild mit 256x256 Pixel benötigt mehr als 0.2 MByte Speicherplatz! Ist man dazu gezwungen, größere Mengen von Bildern zu speichern, zu analysieren oder über Datenleitungen zu übertragen, hat man sehr schnell astronomische Datenmengen zu verarbeiten, die eine Kompression unumgänglich machen.

Multiskalen-Analyse

Das FBI hat in seiner Datenbank etwa 30 Millionen Fingerabdrücke gespeichert, Tendenz steigend (täglicher Zuwachs ungefähr 30 000 - 50 000!). Für einen einzigen Fingerabdruck benötigt man etwa 0.6 MByte Speicher, d.h. für alle Fingerabdrücke käme man im Augenblick auf eine Größenordnung von ca. 200 TByte. Da für die Archivierung und Analyse derartiger Datenmengen effiziente Kompressionsverfahren dringend erforderlich sind, wurden zusammen mit dem National Institute of Standards and Technology in Los Alamos verschiedene Kompressionsalgorithmen getestet und verglichen. Der Wavelet-Algorithmus, der auf der Multiskalen-Analyse basiert, schnitt am besten ab und wird jetzt beim FBI als Standard für die Bilddatenkompression und Rekonstruktion verwendet.



Fingerprint

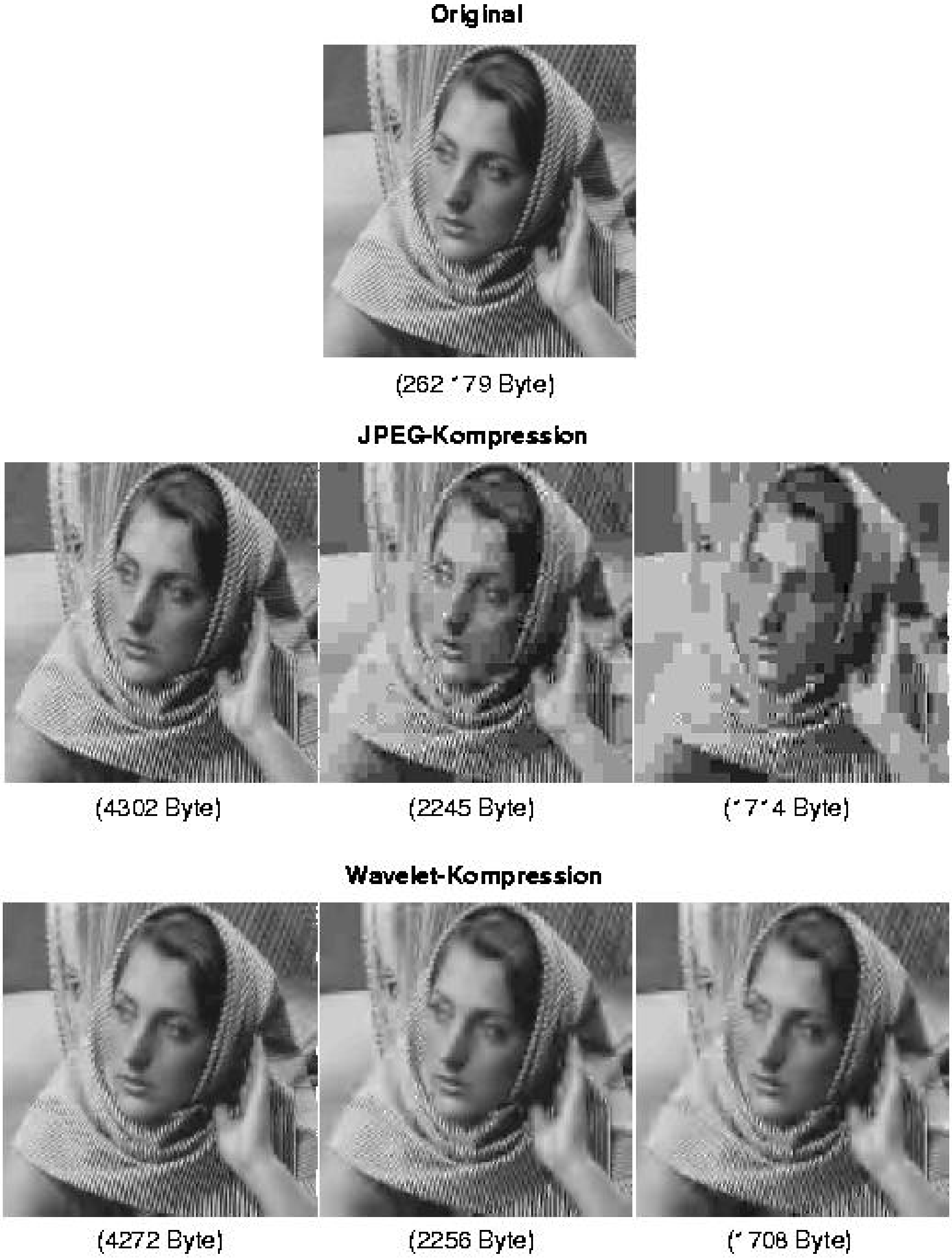
In der Kartographie verwendet man Karten mit unterschiedlichen Maßstäben, um die Menge der Informationen übersichtlich zu gestalten und grobe Karten nicht mit Details zu überlasten. Während auf einer Weltkarte die Umrisse von Kontinenten und Ländern ersichtlich sind, zeigen Karten in immer größeren Maßstäben mehr und mehr Details. In der Multiskalen-Analyse geht man ähnlich vor. Man zerlegt ein Signal, beispielsweise die Graustufenwerte einer Bildzeile, mit Hilfe eines Tiefpaß- und eines Hochpaßfilters in einen geglätteten, gröberen Datensatz und in die Details, die Differenz zum Original. Das gemittelte Signal wird erneut in eine geglättete Version und die Details zerlegt. Führt man diese Zerlegung fort, so ergibt sich schließlich eine grobe Mittelung und eine Folge von Details auf unterschiedlichen Skalen. Mit Hilfe der Multiskalen-Analyse lassen sich orthogonale Systeme von Wavelet-Basisfunktionen konstruieren, die eine effiziente Transformation der Bilddaten in Wavelet-Koeffizienten ermöglichen. Im allgemeinen sind sehr viele dieser Koeffizienten so klein, daß man sie vernachlässigen und aus dem reduzierten Datensatz ein Bild rekonstruieren kann, dessen Abweichungen vom Original kaum wahrnehmbar sind. So lassen sich durch Transformation in den Wavelet-Raum die Datenmengen erheblich reduzieren. Wavelet-Verfahren ermöglichen heute wesentlich höhere Kompressionsraten als herkömmliche Standards wie beispielsweise JPEG und sind daher eines ihrer erfolgreichsten Anwendungsgebiete.

Die Bildfolge auf der nächsten Seite zeigt die Unterschiede zwischen einer Wavelet-Kompression (mit LuraWave) und der JPEG-Kompression für unterschiedliche Kompressionsraten. Bei JPEG wird das Bild in 8x8 Pixelfelder unterteilt, die dann einer Cosinus-Transformation unterworfen werden. Für höhere Kompressionsraten kann man diese 8x8-Pixel-Rasterung deutlich erkennen.

Potentielle Anwendungen

Im Bereich der **digitalen Bildverarbeitung** gibt es neben der Kompression von Bilddaten eine Vielzahl weiterer Anwendungsbereiche für Wavelets, z.B. Unterdrückung von Rauschen, Extraktion und Hervorhebung von Merkmalen, Texturanalysen und Mustererkennung.

Wavelet-Methoden werden zunehmend in der biomedizinischen Bildverarbeitung eingesetzt, beispielsweise in der Bildaufnahme und Datenarchivierung von Computer- und Kernspintomographien, Verbesserung von Mammographien etc.



In der **Computergraphik** sind Wavelets im Bereich der Modellierung von Kurven, Flächen und 3D-Objekten von Interesse. Außerdem eröffnen Wavelet-Verfahren durch ihre Fähigkeit des *Hineinzoomens* schnelle Methoden zur Berechnung von Beleuchtung und Animation virtueller Szenen sowie für Strahlungs- und Reflexionsprobleme.

Die **Signalanalyse** ist das klassische Anwendungsgebiet der Wavelets. Im Gegensatz zu Fourier-Transformationen ermöglichen Wavelet-Transformationen, die zeitliche Entwicklung des Frequenzinhalts eines Signals zu untersuchen und lokale Energiespektren zu berechnen. Neuere Untersuchungen zeigen eine verblüffende Ähnlichkeit zwischen der Wavelet-Transformation und der biologischen Informationsverarbeitung, die dem menschlichen Hören und Sehen zugrunde liegt. Daher lassen sich Wavelets erfolgreich bei der Analyse akustischer Signale und für die

Erkennung typischer Merkmale (z.B. in EKGs) einsetzen. Eine weitere interessante Anwendung ist sicherlich im Bereich der Qualitätskontrolle zu sehen.

Moderne Teleskope und Bildaufnahmetechniken sind heute qualitativ so hochentwikkelt, daß man mittlerweile etwa 100 Millionen Galaxien erkennt. Diese bilden Strukturen auf unterschiedlichen Skalen und sind mehr oder weniger hierarchisch organisiert. In der **Astronomie** versucht man, mit Hilfe von schnellen Wavelet-Transformationen die hierarchische Ordnung dieser ungeheuren Datenmengen zu entschlüsseln und die einzelnen Cluster und Supercluster automatisch zu katalogisieren. Eine genaue Kenntnis der Gesamtheit der Materie und ihrer Verteilung im Universum ist erforderlich, um zwischen verschiedenen kosmologischen Szenarien zur Entstehung des Weltalls entscheiden zu können.

Eine weitere, außerordentlich nützliche Eigenschaft von Wavelets ist ihre Fähigkeit, Singularitäten in einem Signal aufzuspüren und ihre Stärke quantitativ zu messen. Man macht sich diese Besonderheit bei der **Turbulenzanalyse** zunutze, indem man die multifraktalen Eigenschaften turbulenter Strömungen bestimmt und somit versucht, den Energietransport bei voll entwickelter Turbulenz besser zu verstehen und zu modellieren. Wavelet-Cospektren werden verwendet, um Intermittenz zu untersuchen.

2D-Querschnitt des Konzentrationsfeldes
in einem turbulenten Freistrahl
(LIF-Messungen, ETH Zürich

Konzentrationsverlauf
und Wavelet-Transformation

Im Bereich numerischer Simulationen werden Wavelets zur Lösung **partieller Differentialgleichungen** und zur Generierung adaptiver Netze eingesetzt. Die Vorteile von Wavelets kommen besonders dann zum Tragen, wenn Funktionen approximiert werden sollen, die in ihrem Verlauf oder in dessen Ableitungen Sprünge aufweisen. Daher ist zu erwarten, daß Wavelet-Galerkin-Verfahren bei hyperbolischen Differentialgleichungen oder bei starken Anisotropien interessant werden.

Literatur

[1] Strang, G., Nguyen, T.: Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1996

[2] Stollnitz, E.J., DeRose, T.D., Salesin, D.H.: Wavelets for Computer Graphics, Theory and Applications, Morgan Kaufmann Publishers, SanFrancisco, California, 1996

[3] Aldroubi, A., Unser, M.: Wavelets in Medicine and Biology, CRC Press, New York, 1996

[4] Kovacevic, J., Daubechies, I. (eds.): Special Issue on Wavelets, Proceedings of the IEEE, Vol.84 (4), 1996

[5] Amara`s Wavelet Page: http://www.amara.com/current/wavelet.html

[6] Wavelet Digest: http://www.wavelet.org/cm/ms/what/wavelet/index.html

[7] LuraWave: Online-Demonstration zur Kompression von Bilddaten: http://www.luratech.com

Thomas Fischer
debis Systemhaus GEI
Magirusstr.43, 89077 Ulm
Tel.: 0731/9344 1712
Fax: 0731/9344 1700
E-Mail: thofisch@debis.com

Dr. Maria Haase
ICA, Abteilung Computersimulation und Visualisierung
Pfaffenwaldring 27, 70565 Stuttgart
Tel.: 0711/685 3700
Fax: 0711/685 3758
E-Mail: mh@ica.uni-stuttgart.de