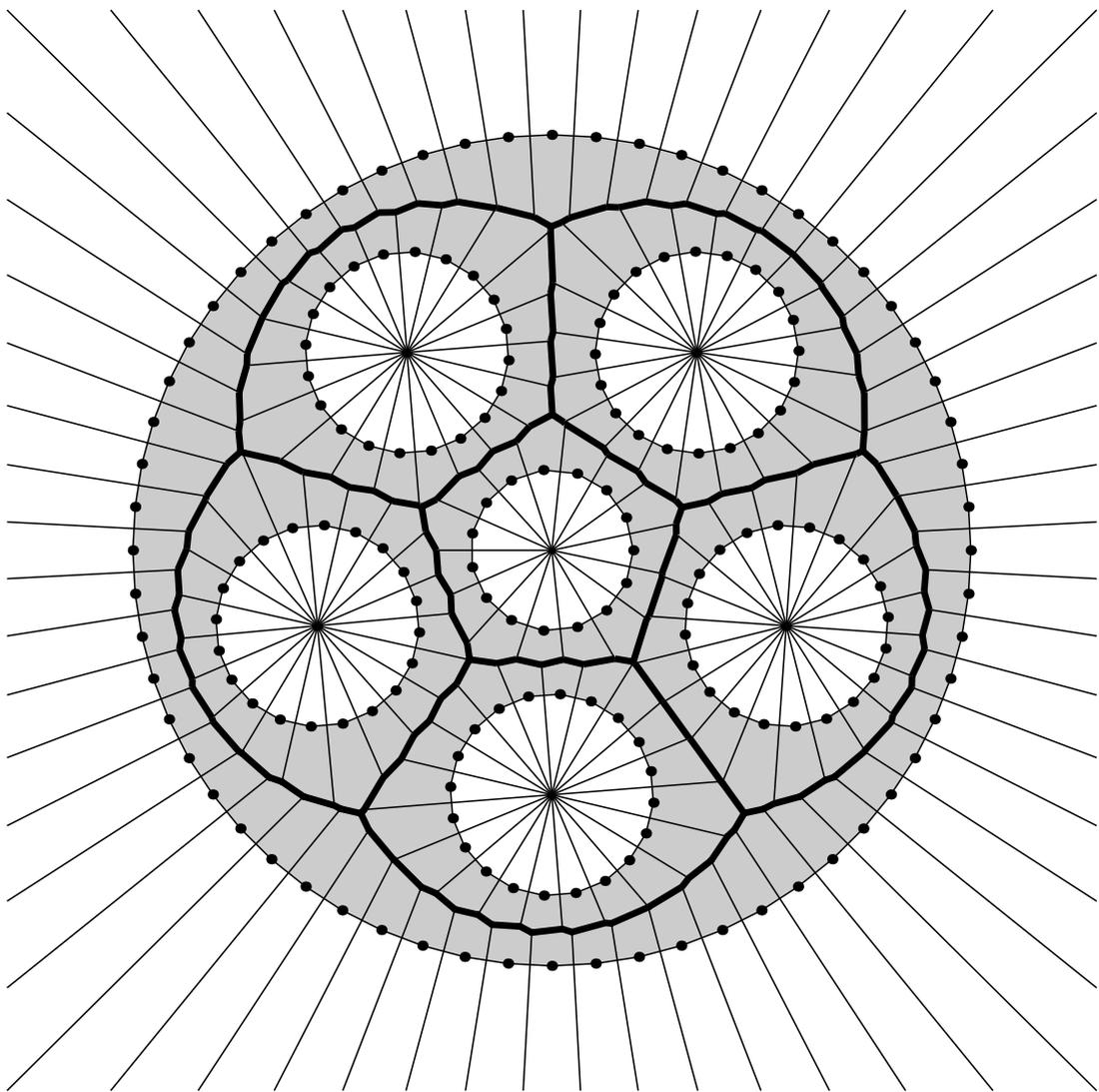


Mediale Achsen und Voronoj-Diagramme in der euklidischen Ebene

Joachim Wipper



Diplomarbeit unter Leitung von Prof. Dr. Klaus Höllig
Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart

Das Titelbild zeigt die aus dem Voronoi-Diagramm gewonnene Approximation der medialen Achse eines durch sieben Kreise berandeten Gebietes (siehe auch Seite 81).

Ich danke Herrn Prof. Dr. Klaus Höllig für den Themenvorschlag zu dieser Diplomarbeit und seiner hervorragenden Betreuung, sowie meinem Bruder Andreas Wipper, der mir bei der Korrektur eine große Hilfe war.

Hiermit versichere ich, diese Diplomarbeit selbständig und nur unter Zuhilfenahme der im Literaturverzeichnis aufgeführten Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Stuttgart, den 17. August 1997

Joachim Wipper

Zusammenfassung

Die mediale Achse wurde 1967 von Harry Blum zur Darstellung und Analyse ebener abgeschlossener Gebiete eingeführt. Sie besteht aus dem Abschluß der Menge aller Mittelpunkte maximaler Kreisscheiben. Eine Kreisscheibe heißt dabei maximal, sofern sie ganz in dem Gebiet enthalten und nicht echte Teilmenge einer ebenfalls in dem zu betrachtenden Gebiet liegenden Kreisscheibe ist. Auf der medialen Achse operiert die sogenannten Radiusfunktion. Sie ordnet jedem Punkt der medialen Achse den Radius der zugehörigen maximalen Kreisscheibe zu und ermöglicht damit die exakte Rekonstruktion des zugrundeliegenden Gebietes aus der medialen Achse. Hieraus resultiert eine zur Parametrisierung des Randes alternative Darstellung von Gebieten in der euklidischen Ebene.

Die mediale Achse ist lokale Symmetrieachse, dimensionsreduzierend und führt auf einen Graphen, welcher mit Hilfe der metrischen Informationen der Radiusfunktion eine automatisierte Analyse ebener Gebiete mittels graphentheoretischer Konzepte ermöglicht. Dementsprechend breit ist das Spektrum an Einsatzgebieten. Unter anderem gehören hierzu die Strukturanalyse von Bauteilen, die Netzgenerierung für Finite-Element-Methoden, die Bewegungsplanung in der Robotik, Anwendungen der digitalen Bildverarbeitung wie Bilderkennung und -kompression, das Design von Werkstücken und das Lösen geometrischer Probleme wie zum Beispiel die Berechnung von Parallelkurven.

Diese Arbeit faßt zunächst alternative Definitionen, Eigenschaften und Anwendungsgebiete medialer Achsen zusammen. Im Vordergrund steht jedoch die exakte Berechnung beziehungsweise die Approximation medialer Achsen abgeschlossener Gebiete in der euklidischen Ebene.

Entscheidendes Hilfsmittel ist hierbei das Voronoi-Diagramm – jene Partition der euklidischen Ebene, die jedem Punkt einer vorgegebenen Menge diejenigen Punkte der euklidischen Ebene zuordnet, deren Abstände zu diesem kleiner als zu allen anderen Punkten der besagten Menge sind. Klassische Probleme der geometrischen Datenverarbeitung, wie zum Beispiel das der nächsten Nachbarn oder die Bestimmung eines minimal spannenden Baumes, lassen sich auf die Berechnung des zugehörigen Voronoi-Diagramms zurückführen. Darüber hinaus erhält man aus dessen geometrischen Dual die Delaunay-Triangulierung.

Für den Fall einfach polygonal berandeter Gebiete wird der Begriff des Voronoi-Diagramms von Punktmengen auf Mengen von Geradensegmenten und Punkten erweitert. Neben der Untersuchung der Eigenschaften dieser verallgemeinerten Voronoi-Diagramme wird ein Algorithmus zu deren Berechnung vorgestellt. Es wird gezeigt, daß die mediale Achse eines polygonalen Gebietes eine einfach zu charakterisierende Teilmenge des verallgemeinerten Voronoi-Diagramms des Randpolygons ist und im Fall konvexer polygonaler Gebiete sogar mit diesem übereinstimmt. Die Berechnung der medialen Achse eines einfach polygonal berandeten Gebietes kann somit auf die Bestimmung des zugehörigen verallgemeinerten Voronoi-Diagramms des Randes zurückgeführt werden.

Analog erfolgt die Berechnung medialer Achsen mehrfach zusammenhängender polygonaler Gebiete. Hierzu wird, nach einer eingehenden Analyse der zugehörigen verallgemeinerten Voronoi-Diagramme, der zuvor eingesetzte Algorithmus zur Berechnung der verallgemeinerten Voronoi-Diagramme einfacher Polygone auf den Fall der Ränder mehrfach zusammenhängender polygonaler Gebiete erweitert.

Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich schließlich mit der Approximation medialer Achsen r -regulärer Mengen. Diese wird zunächst auf die Approximation des zugehörigen Voronoi-Diagramms des Randes durch das Voronoi-Diagramm einer auf dem Rand verteilten diskreten Punktmenge zurückgeführt. Zur Näherung der medialen Achse werden dabei genau jene Kanten dieses klassischen Voronoi-Diagramms herangezogen, die ganz in dem zu betrachtenden Gebiet enthalten sind. Somit fußt die Berechnung der approximierten medialen Achse auf den bekannten und effizienten Algorithmen zur Bestimmung von Voronoi-Diagrammen diskreter Punktmengen. Es wird gezeigt, daß die Approximation gegen die exakte mediale Achse konvergiert, sofern die Menge der approximierenden Randpunkte gegen den Rand des Gebietes strebt. Darüber hinaus wird eine Abschätzung für die Abweichung des Gebietes von dessen Rekonstruktion, welche aus der approximierten medialen Achse gewonnen werden kann, entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1	Mediale Achsen	10
1.1	Definition der medialen Achse	10
1.2	Eigenschaften der medialen Achse	12
1.3	Einsatzgebiete	15
2	Mediale Achsen einfacher polygonaler Gebiete	19
2.1	Voronoj-Diagramme und mediale Achsen	19
2.2	Algorithmus	26
2.3	Komplexitätsbetrachtung	31
2.4	Anmerkungen	34
3	Mediale Achsen mehrfach zusammenhängender polygonaler Gebiete	36
3.1	Eigenschaften der Voronoj-Diagramme	36
3.2	Algorithmus	44
3.3	Komplexitätsbetrachtung	49
3.4	Anmerkungen	51
4	Approximation medialer Achsen	53
4.1	Topologische Grundlagen	53
4.2	Approximation von Voronoj-Diagrammen	57
4.3	Approximation der medialen Achse	62
4.4	Algorithmus	68
4.5	Anmerkungen	71
A	Implementierung	72
A.1	Mediale Achsen polygonaler Gebiete	72
A.1.1	Datenstruktur	72
A.1.2	Syntax	73
A.1.3	Beispiele	74
A.2	Approximation medialer Achsen	80
A.2.1	Datenstruktur	80
A.2.2	Syntax	80
A.2.3	Beispiele	81

Symbole

\mathbb{E}^2	euklidische Ebene
$d(a, b)$	euklidischer Abstand der Punkte a und b
\mathcal{F}	Menge der abgeschlossenen Teilmengen von \mathbb{E}^2
\mathcal{G}	Menge der offenen Teilmengen von \mathbb{E}^2
\mathcal{K}	Menge der kompakten Teilmengen von \mathbb{E}^2
\mathcal{R}	Menge jener r -regulären Teilmengen von \mathbb{E}^2 , deren Rand lokal nur endlich viele Krümmungsextrema besitzt
$\text{cl}(M)$	Abschluß der Menge M
$\text{in}(M)$	das Innere der Menge M
M^c	Komplement der Menge M in \mathbb{E}^2 , $M^c = \mathbb{E}^2 \setminus M$
$CH(M)$	konvexe Hülle der Menge M
(a, b)	das offene, a und b verbindende Geradensegment
$[a, b]$	das abgeschlossene, a und b verbindende Geradensegment
$\langle a, b \rangle$	Verbindungsgerade von a und b
$p(q, [a, b])$	Projektion von q auf $[a, b]$
$\text{proj}(p)$	Menge der Punkte von $\partial\Omega$, die den Abstand zu p minimieren
$I(q, [a, b])$	Bild von q auf $[a, b]$
$h(e_i, e_j)$	Halbebene der Punkte p , die näher bei e_i als bei e_j liegen
$B(X, Y)$	Bisektor der Mengen X und Y
$\tilde{B}(X, Y)$	Teilbisektor von X und Y (Voronoj-Kante)
$\text{us}(p)$	Upstream des Punktes $p \in \Omega$
$\partial\Omega$	Rand des Gebietes Ω
$\partial\Omega_{[p, q]}$	zwischen p und q liegender Teil von $\partial\Omega$
$\partial\Omega_0$	äußerer Rand von Ω
$\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_H$	innere Ränder von Ω
$\partial_n\Omega$	n -te Approximation des Randes $\partial\Omega$
$\partial_n\Omega_k$	n -te Approximation des k -ten Teilrandes von Ω
Ω^n	n -te Rekonstruktion von Ω
$VB(A, B)$	offener Voronoj-Bereich von A bezüglich B
$V(p)$	abgeschlossener Voronoj-Bereich von p bezüglich $\partial\Omega$
$V_n(p)$	abgeschlossener Voronoj-Bereich von p bezüglich $\partial_n\Omega$
$VP(A)$	Voronoj-Polygon von A
$VD(A)$	Voronoj-Diagramm von A

$\mathcal{B}(\Omega)$	Menge der maximalen Kreisscheiben in Ω
$F(\Omega)$	Menge der Punkte von Ω , deren Projektion mindestens zweielementig ist
$M(\Omega)$	mediale Achse des Gebietes Ω
$\widetilde{M}(\Omega)$	Menge der Mittelpunkte maximaler Kreisscheiben
$M_n(\partial_n\Omega)$	n -te Approximation der medialen Achse
$\widetilde{M}(p)$	Punkte der medialen Achse, in deren Projektion $p \in \partial\Omega$ liegt
$\widetilde{M}_n(p)$	Punkte von $M_n(\partial_n\Omega)$, in deren Projektion $p \in \partial_n\Omega$ liegt
$r(p)$	Radiusfunktion der medialen Achse
(p_n)	Folge von Elementen p_n
$\underline{\lim} F_n$	Schnitt aller Häufungsmengen der in \mathcal{F} konvergenten Teilfolgen von (F_n)
$\overline{\lim} F_n$	Vereinigung aller Häufungsmengen der in \mathcal{F} konvergenten Teilfolgen von (F_n)
$p_n \rightarrow p$	Folge (p_n) konvergiert gegen p
ε_n	Rekonstruktionsfehler der n -ten Approximation
ω_n	Abweichung der n -ten Randapproximation Ω^n von Ω
$G(K, E)$	Graph mit der Knotenmenge K und Kantenmenge E
G^*	dualer Graph zu G
$G(M(\Omega))$	Graph der medialen Achse $M(\Omega)$
$ M $	Anzahl der Elemente, die in der Menge M enthalten sind
$\lceil a \rceil$	kleinste natürliche Zahl $\geq a$ (Gaußklammer)
$\text{ld } a$	Logarithmus dualis von a
$\mathcal{O}(n)$	von der Ordnung n (Landau-Notation)
$m \bmod n$	Rest der ganzzahligen Division m/n

Kapitel 1

Mediale Achsen

Ziel dieses Kapitels ist es, den Begriff der medialen Achse zu motivieren und zu definieren. Anschließend werden die Eigenschaften der medialen Achse untersucht und einige ihrer Anwendungen vorgestellt.

1.1 Definition der medialen Achse

Harry Blum führte 1967 die mediale Achse (auch Skelett oder symmetrische Achse genannt) zur effizienten Beschreibung ebener biologischer Formen ein, da er die Mittel zur Formbeschreibung in der Topologie als zu allgemein, auf der anderen Seite aber die der euklidischen oder projektiven Geometrie als zu restriktiv erachtete. Insbesondere sah er nicht die Möglichkeit, biologische Formen in einer dem natürlichen Wachstum und der daraus resultierenden Vielfachheit und Flexibilität angemessenen Weise zu beschreiben. Darüber hinaus sollte der neue Formbegriff sowohl zur Klassifikation als auch zur Differenzierung der zu beschreibenden Formen dienen. In Analogie zum Wachstum „aus der Mitte“ verlagerte Blum deshalb die Beschreibung einer Form von ihrem Rand weg in das Innere derselben (intrinsische Darstellung).

Seine Definition der medialen Achse richtet sich dabei an der folgenden Modellvorstellung aus: in der Ebene beginnt sich von dem Rand der Form ein Feuer in gleichbleibender Geschwindigkeit nach allen Richtungen auszubreiten. Die Punkte der Ebene, an denen verschiedene Feuerfronten aufeinandertreffen, bilden die mediale Achse. Trägt man dabei für jeden Punkt die verstrichene Zeit bis zum Beginn des Brennens in z -Richtung ab, so besteht die mediale Achse aus den Graten dieses „Zeitengebirges“. Im linken Teilbild der Abbildung 1.1 wird alternativ die verstrichene Zeit mit Hilfe unterschiedlicher Graustufen dargestellt. Je dunkler ein Punkt, desto länger hat es gedauert, bis auch er von dem Feuer erfaßt wurde.

Blum führte in [3] eine zu diesem „inversen Wachstum“ äquivalente Definition der medialen Achse ein, deren Grundlage nun bereitgestellt werden soll. Bezeichne $d(a, b)$ im folgenden den euklidischen Abstand zweier Punkte a, b der euklidischen

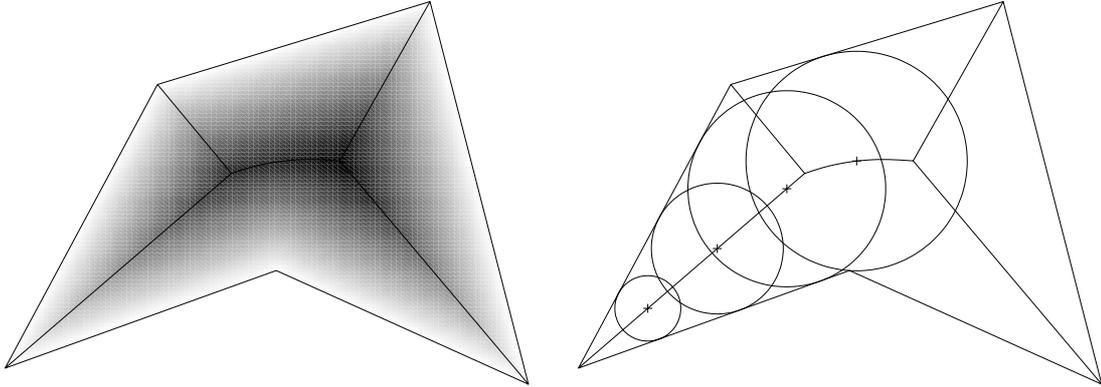


Abbildung 1.1: alternative Definitionen der medialen Achse

Ebene \mathbb{E}^2 . Sei Ω eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{E}^2 , a ein Punkt der euklidischen Ebene, so ist $d(a, \Omega) := \min\{d(a, p) \mid p \in \Omega\}$ der Abstand des Punktes a von Ω . Dieser Abstand ist aufgrund der Abgeschlossenheit von Ω eindeutig, was jedoch für das Element $p \in \Omega$, zu dem a den minimalen Abstand einnimmt, nicht gelten muß. Die geschlossene Kreisscheibe $K_r(p) := \{x \in \mathbb{E}^2 \mid d(p, x) \leq r\}$ um x mit Radius r heißt *maximal in Ω* , sofern es keine weitere, $K_r(p)$ ganz enthaltende Kreisscheibe in Ω gibt.

$$\mathcal{B}(\Omega) := \{K_r(p) \subseteq \Omega \mid K_{r'}(p') \subseteq \Omega \wedge K_r(p) \subseteq K_{r'}(p') \Rightarrow K_{r'}(p') = K_r(p)\}$$

ist schließlich die Menge aller in Ω enthaltenen maximalen Kreisscheiben.

Definition 1.1 Sei Ω eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte Teilmenge der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 , $\partial\Omega$ deren Rand. Die abgeschlossene Menge

$$M(\Omega) := \text{cl}(\{p \in \Omega \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : K_r(p) \in \mathcal{B}(\Omega)\}) \quad (1.1)$$

aller Mittelpunkte der in Ω enthaltenen maximalen Kreisscheiben und deren Häufungspunkte heißt *mediale Achse* von Ω . Die Funktion $r : M(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ gegeben durch

$$r(p) := d(p, \partial\Omega) \quad (1.2)$$

wird als *Radiusfunktion* der medialen Achse $M(\Omega)$ bezeichnet.

Das rechte Teilbild der Abbildung 1.1 zeigt die mediale Achse eines einfachen Gebietes und exemplarisch einige maximale Kreisscheiben, deren Mittelpunkte durch kleine Kreuze gekennzeichnet sind.

Gebräuchlich ist auch die folgende Fußpunkt-Definition der medialen Achse. Ein Punkt x des Randes $\partial\Omega$ heißt *Fußpunkt* (auch Projektionspunkt) von $p \in \Omega$, sofern $d(p, x) = d(p, \partial\Omega)$ gilt. Die Menge $F(\Omega)$ aller Punkte von Ω , die mindestens

zwei Fußpunkte besitzen, liegt dicht in $M(\Omega)$ [6]. Dies impliziert $\text{cl}(F(\Omega)) = M(\Omega)$ und führt somit auf die folgende alternative Darstellung der medialen Achse

$$M(\Omega) = \text{cl} \left(\{p \in \Omega \mid \exists x, y \in \partial\Omega, x \neq y \text{ mit} \right. \\ \left. d(p, x) = d(p, y) = d(p, \partial\Omega)\} \right). \quad (1.3)$$

In der Literatur sind weitere, zu den gewählten nicht äquivalente Definitionen der medialen Achse zu finden. Variationen ergeben sich durch Verwendung offener Gebiete, offener Kreisscheiben und durch den Verzicht auf die Hinzunahme der Häufungspunkte [3] [6] [26].

Der Vorteil der gewählten Definition mittels maximaler Kreisscheiben ist, daß diese sich in homogener Weise auch auf höhere Dimensionen übertragen läßt. So wird die mediale Achse (mediale Fläche oder Menge) eines Körpers im \mathbb{E}^n als Abschluß der Menge aller Mittelpunkte der maximalen n -dimensionalen Sphären, die ganz in $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ enthalten sind, definiert. Insbesondere der Fall $n = 3$ ist Gegenstand heutiger Untersuchungen [12] [36].

1.2 Eigenschaften der medialen Achse

Die Definition der medialen Achse als Abschluß der Menge aller Mittelpunkte der maximalen Kreisscheiben in Ω impliziert die Kompaktheit von $M(\Omega)$. Daß die Menge $\widetilde{M}(\Omega)$ der Mittelpunkte maximaler Kreisscheiben ohne die explizite Hinzunahme ihrer Häufungspunkte im allgemeinen nicht abgeschlossen ist, zeigt das Beispiel in Abbildung 1.2.

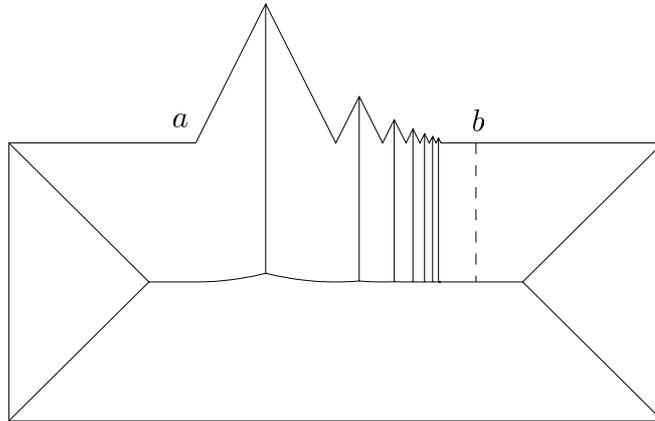


Abbildung 1.2: nicht abgeschlossene mediale Achse

Hier wurde auf dem Segment (a, b) eine Folge von Punkten x_i , $i \in \mathbb{N}$ gewählt, die gegen b konvergiert – etwa $x_i := \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})b$. Ersetzt man jedes dieser Teilstücke (x_i, x_{i+1}) durch eine dreieckige Ausbuchtung der Höhe $h_i := d(x_{i+1}, x_i)$, so enthält $\widetilde{M}(\Omega)$ zwar zu jeder Ausbuchtung einen Teil der zugehörigen Winkelhalbierenden, nicht jedoch das von b ausgehende Grenzsegment, welches in der Abbildung 1.2 gestrichelt dargestellt ist.

Das Ausgangsgebiet Ω läßt sich mit Hilfe der medialen Achse $M(\Omega)$ und der zugehörigen Radiusfunktion $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ exakt rekonstruieren, denn es gilt der sogenannte Rekonstruktionssatz [15]:

$$\Omega = \bigcup_{p \in M(\Omega)} K_{r(p)}(p). \quad (1.4)$$

Dieser rechtfertigt die Identifizierung von medialer Achse $M(\Omega)$ und zugehöriger Radiusfunktion $r(p)$ mit dem Gebiet Ω . Dem Rechnung tragend bezeichnet man die mediale Achse zusammen mit ihrer Radiusfunktion auch als *mediale Achsen Transformation*.

Eine hervorragende Eigenschaft der ebenen medialen Achsen, die sich letztendlich die meisten Analysealgorithmen zunutze machen, ist die Tatsache, daß $M(\Omega)$ im zweidimensionalen Fall zu einem Graphen $G(M(\Omega))$ führt [5]. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, daß die mediale Achse „dünn“, das heißt ein-dimensional ist [26]. Da für das Innere $\text{in}(M(\Omega))$ der medialen Achse

$$\text{in}(M(\Omega)) = \emptyset \quad (1.5)$$

gilt, besteht $M(\Omega)$ nur aus Kurvensegmenten und/oder Punkten der Ebene. Die Knoten des zugehörigen Graphen $G(M(\Omega))$ sind dabei die Anfangs- und Verzweigungspunkte von $M(\Omega)$, also jene $p \in M(\Omega)$, die nur einen oder mehr als zwei Fußpunkte in $\partial\Omega$ besitzen. Die Kanten werden durch die die Knoten verbindenden Kurvensegmente der medialen Achse gebildet und bestehen aus den Punkten $p \in M(\Omega)$, die genau zwei Fußpunkte besitzen.

Ist $\partial\Omega$ eine einfache, zweimal stetig differenzierbare Kurve (C^2) und die Krümmung von beschränkter Variation, so hat $G(M(\Omega))$ eine baumähnliche Struktur [8]. Dieselben Voraussetzungen implizieren eine weitere Eigenschaft, die Grundlage der meisten Unterteilungsalgorithmen zur Berechnung der medialen Achse ist. Existiert eine Kreisscheibe $K_r(p)$ beim Punkt p der medialen Achse, die in mehr als einem Punkt tangential zu $\partial\Omega$ verläuft, so kann Ω in zwei Teilgebiete Ω_l und Ω_r unterteilt werden, welche jeweils $K_r(p)$ enthalten und für die $\partial(\Omega_l \cap \Omega_r) = \partial K_r(p)$ und $M(\Omega) = M(\Omega_r) \cup M(\Omega_l)$ gilt.

Chiang zeigt in [8], daß bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten vom Geschlecht n (Gebiete „mit Löchern“) $G(M(\Omega))$ genau n einfache Zyklen besitzt, sofern der Rand stückweise C^2 und dessen Krümmung von beschränkter Variation ist. Dabei umfaßt jeder Zyklus genau ein Loch.

Des weiteren ist die mediale Achse invariant bezüglich Translationen, Rotationen und einheitlicher Skalierung, jedoch nicht gegenüber allgemeinen affinen Abbildungen (z.B. unterschiedliche Skalierung in x - und y -Richtung) [6].

Eine mitunter sehr störende Eigenschaft ist die extreme Sensitivität der medialen Achse gegenüber leichten Modifikationen des Randes, wie sie auch in Abbildung 1.2 zu sehen ist. Hier fügt die Hinzunahme jeder auch noch so kleinen Ausbuchtung von $\partial\Omega$ der medialen Achse einen weiteren Ast hinzu.

Dagegen gibt es jedoch auch Störungen bezüglich denen die Punktmenge von $M(\Omega)$ invariant bleibt. Ein Beispiel dafür zeigt die nachfolgende Abbildung 1.3. Ausgangsgebiet ist hier ein Quadrat, dessen mediale Achse aus den beiden Dia-

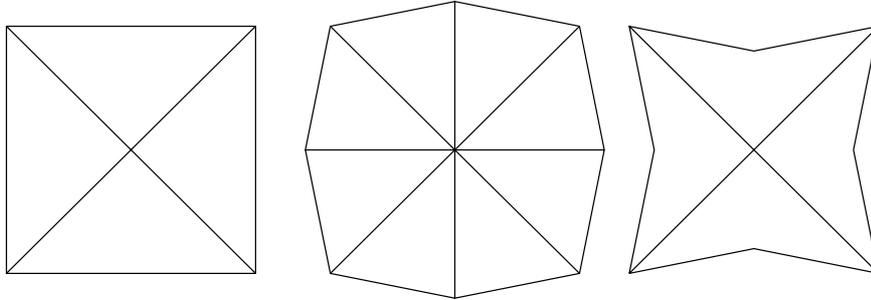


Abbildung 1.3: Verhalten der medialen Achse bei Änderung des Randes

gonalen besteht (linkes Teilbild). Die beiden anderen Teilbilder entstehen durch das Einfügen eines zusätzlichen Punktes in jeder Seitenmitte, die anschließend in Normalenrichtung symmetrisch zum Mittelpunkt verschoben werden. Entfernen sich die Punkte vom Mittelpunkt des Quadrats (Mitte), so ändert sich auch die mediale Achse, während die Annäherung der hinzugefügten Punkte zum Mittelpunkt die mediale Achse unverändert läßt. Anhand der Radiusfunktion lassen sich jedoch diese Gebiete mit identischer medialen Achse unterscheiden.

Chaney untersucht in [7] die Abhängigkeit der medialen Achse vom Rand des zugehörigen Gebietes. Er verwendet dabei als Maß für die Komplexität von $M(\Omega)$ die Anzahl der Äste, die mit der Anzahl der Extrema der Krümmung auf dem Rand korreliert. Auch gibt es einen lokalen Zusammenhang zwischen der Krümmung der medialen Achse und der Krümmung des zugehörigen Randes [8].

Daß die mediale Achse und somit auch der zugehörige Graph $G(M(\Omega))$ nicht notwendigerweise zusammenhängend ist, zeigt das Gegenbeispiel in Abbildung 1.4. Hier setzt sich Ω aus zwei sich berührenden, abgeschlossenen Kreisscheiben zu-

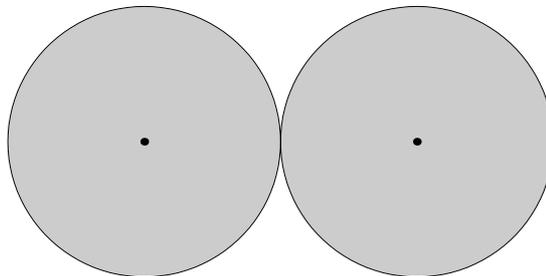


Abbildung 1.4: nicht zusammenhängende mediale Achse

sammen. $M(\Omega)$ besteht in diesem Fall aus den beiden Kreismittelpunkten. Sherbrooke, Patrikalakis und Wolter konnten in [36] jedoch zeigen, daß bei zusammenhängenden, kompakten Mannigfaltigkeiten Ω des \mathbb{R}^n mit einfach geometrisch

stetigem (G^1) und stückweise zweifach stetig differenzierbarem Rand auch die zugehörige mediale Achse zusammenhängend ist. Dies beruht auf der Existenz eines starken Deformationsretrakts zwischen einer solchen Mannigfaltigkeit und der zugehörigen medialen Achse, welcher im Falle des Pfadzusammenhangs von Ω auch den Pfadzusammenhang von $M(\Omega)$ impliziert.

1.3 Einsatzgebiete

Gebietszerlegungen und Strukturanalyse

Eine wichtige Anwendung der medialen Achsen Transformation besteht in der automatisierten Gittergenerierung – zum Beispiel für finite Element-Methoden [1] [15] [37] [39]. Da ein gutes Gitter die geometrischen Charakteristiken des zu partitionierenden Gebietes berücksichtigen muß, waren manuelle Vorgaben bisher meist unumgänglich. Ein Einsatz der medialen Achse ermöglicht eine vollkommene Automatisierung und somit eine wesentliche Beschleunigung dieses Arbeitsschrittes.

Die Berechnung des Gitters verläuft dabei in drei Teilschritten. Zunächst erfolgt eine grobe Unterteilung des Gebietes mit Hilfe der medialen Achse in einfache Teilgebiete, die im zweiten Teilschritt trianguliert werden. Anschließend muß die so gewonnene Triangulierung noch geglättet werden.

Die mediale Achse kann auch zur Komplexitätsreduktion eingesetzt werden [1]. So lassen sich mit ihrer Hilfe jene Teile des Ausgangsgebietes ermitteln, die für das makroskopische Verhalten der Fläche eine untergeordnete Rolle spielen. Die zu diesen Teilen zugehörigen Abschnitte der medialen Achse werden entfernt und aus den verbleibenden Segmenten mit Hilfe des Rekonstruktionssatzes ein vereinfachtes Modell gewonnen (defeaturing). Sofern diese Teilgebiete, nicht aber ihre genauen Abmessungen benötigt werden, kann der Rechenaufwand durch eine Dimensionsreduktion verringert werden, indem zum Beispiel eine kreisförmige Aussparung zu einem Punkt zusammengezogen wird. Als Maß für derartige Analysen bieten sich das Verhältnis von Segmentlängen der medialen Achse zum durchschnittlichen Durchmesser der zugehörigen maximalen Kreisscheiben, oder das Verhältnis der Länge eines Randsegments zum durchschnittlichen Radius jener Kreisscheiben, die das Segment berühren, an. Auch kann die Radiusfunktion selbst zur Identifizierung sehr dünner Bereiche herangezogen werden. Mit geeigneten Maßen lassen sich so bei Bedarf erste Approximationen für physikalische Untersuchungen gewinnen.

Die mediale Achsen Transformation bildet außerdem einen guten Ausgangspunkt für die Strukturanalyse von beliebigen Formen. So können mit ihrer Hilfe Symmetrien, Periodizitäten, gegenseitige Lage und Zusammenhänge zwischen den Randsegmenten erkannt werden. Dem Analyseprozeß kommt dabei wesentlich die dimensionsreduzierende Eigenschaft und die graphenähnliche Gestalt der medialen Achse zugute, die sowohl den Speicherbedarf als auch die Analysezeit

reduziert.

Im ebenen Fall kann der Graph der medialen Achse mit Hilfe der Radiusfunktion zu einem Flußgraph erweitert werden, wie er zum Beispiel im VLSI-Design (resistance networks) [28] oder in der Robotik [13] benötigt wird. Bewegt sich ein Roboter in einem Gebiet, so ist die mediale Achse jener Weg, der den Abstand zum Rand maximiert. Insbesondere kann die mediale Achsen Transformation so auch zur Kollisionserkennung eingesetzt werden. Analog dazu bilden im VLSI-Design bestimmte Baugruppen die Löcher in dem für die elektrischen Leiterbahnen zur Verfügung stehenden Gebiet. Mit Hilfe des Flußgraphen läßt sich dann entscheiden, wie und wo diese Leiterbahnen verlegt werden können (vergleiche Abbildung A.3 im Anhang).

Digitale Bildverarbeitung und Formerkennung

Die mediale Achse dient auch der Formerkennung, etwa in der Mikrobiologie [8], oder der Texterkennung. Brandt [6] entwickelte darüber hinaus das Modell einer Dokumentverwaltung, in der die zu verwaltenden Objekte in Form ihrer medialen Achse abgelegt werden. Sie ermöglicht neben einer starken Datenkompression auch die freie Skalierbarkeit der Objekte und deren flexible, systemübergreifende Darstellung, die nicht auf einer beschränkten Menge von Basisobjekten aufbaut.

Dazu ist zunächst ausgehend von einer digitalisierten Vorlage die mediale Achse zu berechnen [6] [8] [9] [29]. Die dafür eingesetzten Algorithmen können in die folgenden Klassen unterteilt werden [6] [30]:

- *grassfire simulation*: Adaptiert das Vorgehen der Blum'schen Modellvorstellung. Hierbei wird die mediale Achse durch die isotropische Ausbreitung einer Löschrfront aus dem Gebiet „herausgeschält“. Problematisch dabei ist jedoch, daß eine solche echte Isotropie im digitalen Raum nicht erreicht werden kann.
- *boundary tracking*: Verwendet den Zusammenhang und die Struktur der medialen Achse, um ausgehend von einem beliebigen Mittelpunkt einer maximalen Kreisscheibe die mediale Achse sukzessive zu berechnen. Die Konstruktion benachbarter Punkte erfolgt dabei mit Hilfe von Tangenten an den Rand. Alternativ hierzu können die diskreten Punkte des Randes auch als Knoten eines Polygons aufgefaßt werden, dessen mediale Achse sich mit den in den folgenden Kapiteln vorgestellten Algorithmen berechnet läßt.
- *distance transformation*: Mittels einer Metrik wird zu jedem Punkt des Gebietes ein Abstand berechnet, mit dessen Hilfe die relevanten Punkte anschließend isoliert werden. Die Wahl der Metrik entscheidet dabei maßgeblich über die Eigenschaften der resultierenden Menge und die Komplexität der Berechnung [8].

- *topological thinning*: Hierbei werden iterativ die Punkte entfernt, deren Löschung die topologische Struktur des Gebietes nicht verändert. Die topologische Bedeutung eines Pixels wird dabei meist anhand seiner unmittelbaren 3×3 -Nachbarschaft festgestellt. Die resultierende Menge ist jedoch meist keine mediale Achse im Sinne der vorgestellten Definitionen.

Die Problematik dieser Algorithmen liegt in der im vorhergehenden Abschnitt erläuterten Sensitivität der medialen Achse gegenüber kleinen Randmodifikationen wie sie in digitalen Räumen zwangsläufig auftreten. Solche Störungen können durch Analyse der medialen Achse selbst, etwa durch Vergleich der Radien an den Blättern und benachbarten Knoten von $G(M(\Omega))$ erkannt und beseitigt werden [6]. Alleinige Manipulation der medialen Achse führt jedoch stets zu einer Inkonsistenz zwischen Rand und medialer Achse. Chaney [7] schlägt deshalb eine skalierbare Variante der medialen Achse vor, deren Komplexitätsmaß die Anzahl der Segmente der medialen Achse ist, die wiederum mit der Anzahl der Krümmungsextrema des Randes korreliert. Infolge dessen erfolgt vor der Berechnung der medialen Achse zunächst eine Glättung des Randes, um die Anzahl dieser Extrema auf einen gewünschten Wert zu reduzieren, womit Inkonsistenzen vermieden werden.

Alternativ dazu gewichtet Ogniewicz [30] jede Kante der medialen Achse mit Hilfe unterschiedlicher Residuen, deren Werte ein Maß für die Stabilität gegenüber Störungen des Randes und geometrischer Abbildungen liefern. Dies führt zu einer hierarchischen Struktur der medialen Achse, deren einzelne Auflösungsstufen durch Schwellwertbildung ermittelt werden können. Somit entfällt insbesondere eine jeweilige Neuberechnung der modifizierten medialen Achse wie sie bei der Glättung des Randes notwendig ist.

Design

Die mediale Achse kann ebenfalls zu Designzwecken eingesetzt werden. Dies bietet sich insbesondere dort an, wo symmetrische Formen erzeugt oder zusammengefügt werden sollen. Liegen zum Beispiel die einzelnen Module in Form ihrer medialen Achse vor, so ermöglicht die dimensionsreduzierende Eigenschaft von $M(\Omega)$ eine verbesserte Übersicht beim Zusammenbau und die dabei benötigten Informationen über Symmetrien und Abstände können direkt aus den zugehörigen Radiusfunktionen gewonnen werden.

Darüber hinaus lassen sich symmetrische Objekte weit intuitiver auf der Ebene ihrer medialen Achse modifizieren und manipulieren. Diese Ansätze bedürfen jedoch eines effizienteren Verfahrens zur Rekonstruktion des eigentlichen Objekts Ω aus $M(\Omega)$ als das durch den Rekonstruktionssatz gegebene. So entwickelten Gelston und Dutta [12] für den zwei- und dreidimensionalen Fall eine Methode, Ω aus einer in Form von kubischen Splines beziehungsweise Coon Patches gegebenen medialen Achse und Radiusfunktion durch Konstruktion charakteristischer Kreise beziehungsweise Sphären zu rekonstruieren.

Eine mögliche Anwendung dieser Technik besteht in der Computeranimation. In natürlicher und effizienter Form wird so zunächst das Skelett des Körpers erstellt und zur Festlegung von Bewegungspfaden genutzt. Anschließend werden dann mit Hilfe der Radiusfunktion die Objekte sowie die über die mediale Achse definierte Bewegung berechnet.

Geometrische Probleme

Elementare geometrische Probleme wie die Bestimmung des Randpunktes, der am Nächsten zu einem vorgegebenen Punkt liegt („closest boundary point“) oder der Ermittlung des größten, ganz in Ω enthaltenen Kreises, können direkt mit Hilfe der Radiusfunktion gelöst werden. Die im ersten Abschnitt vorgestellte Motivation der medialen Achse mit Hilfe von Feuerfronten legt auch die Verwendung der medialen Achse bei der Berechnung von Parallelkurven (Offsetkurven) nahe [8], die zum Beispiel bei der Fräsersteuerung Verwendung finden.

Kapitel 2

Mediale Achsen einfacher polygonaler Gebiete

In diesem Kapitel sollen die speziellen Eigenschaften der medialen Achse von Gebieten untersucht werden, deren Rand ein einfaches Polygon ist. Als entscheidendes Hilfsmittel erweist sich hierbei das für Geradensegmente verallgemeinerte Voronoi-Diagramm. Schließlich wird ein $\mathcal{O}(n \log n)$ -Algorithmus von D. T. Lee [24] zur Berechnung der medialen Achse vorgestellt.

2.1 Voronoi-Diagramme und mediale Achsen

Seien p und q zwei verschiedene Punkte der euklidischen Ebene, so bezeichne (p, q) das offene, $[p, q]$ das geschlossene, p und q verbindende Geradensegment. Diese Segmente sind Teilmengen der durch p und q definierten Gerade $\langle p, q \rangle$.

Definition 2.1 Sei $F = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ eine Folge von $n \geq 3$ verschiedenen Punkten (*Knoten*) der euklidischen Ebene. Die Menge

$$P := \bigcup_{i=0}^{n-1} [p_i, p_{i+1 \bmod n}] \quad (2.1)$$

heißt *einfaches Polygon* mit den *Kanten* $[p_i, p_{i+1 \bmod n}]$, wenn diese sich nur in den Endpunkten aufeinanderfolgender Kanten schneiden und je drei aufeinanderfolgende Knoten von F nicht kollinear sind. Eine abgeschlossene, nichtleere, beschränkte Teilmenge Ω der euklidischen Ebene heißt *einfaches polygonales Gebiet*, sofern ihr Rand $\partial\Omega$ ein einfaches Polygon ist.

Im folgenden sei $\partial\Omega$ stets ein einfaches Polygon im Sinne der Definition 2.1, Ω also topologisch äquivalent zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe.

Definition 2.2 Die *Projektion* $p(q, [a, b])$ des Punktes q auf das abgeschlossene Segment $[a, b]$ ist der Schnittpunkt der Geraden $\langle a, b \rangle$ mit ihrer Orthogonalen

durch den Punkt q . Das Bild $I(q, [a, b])$ des Punktes q auf dem Segment $[a, b]$ ist jener Punkt von $[a, b]$, der den Abstand bezüglich der euklidischen Metrik von $[a, b]$ zu q minimiert.

Die Projektion $p(q, [a, b])$ muß im Gegensatz zum Bild $I(q, [a, b])$ nicht Bestandteil des Segments $[a, b]$ sein. Vielmehr schränkt die Projektion auf das Segment $[a, b]$ ein und dient aufgrund der Beziehung $d(q, [a, b]) = \min\{d(q, x) \mid x \in [a, b]\} = d(q, I(q, [a, b]))$ der Abstandsmessung eines Punktes von einem Segment.

Wie schon angedeutet erweist sich eine Verallgemeinerung des nach dem russischen Mathematiker Georgi Feodosjewitsch Voronoi (1868 – 1908) benannten Voronoi-Diagramms als wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung der medialen Achse.

Das klassische Voronoi-Diagramm einer endlichen Menge $Q \subset \mathbb{E}^2$ von Punkten ordnet jedem Element aus Q genau die Menge von Punkten der euklidischen Ebene zu, die näher bei diesem als bei allen anderen der vorgegebenen Punkte liegen. Diese sogenannten Voronoi-Bereiche sind zusammenhängend, und die Vereinigung ihrer Grenzlinien, auch Bisektoren genannt, bilden das Voronoi-Diagramm, dessen Dual zur Delaunay-Triangulierung führt, sofern höchstens drei Punkte auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Auf den Grenzlinien der Voronoi-Bereiche liegen genau die Punkte, deren Abstände zu mindestens zwei der vorgegebenen Punkte minimal sind, woraus sich für das verallgemeinerte Voronoi-Diagramm auch die entscheidende Verwandtschaft zur medialen Achse ergibt. Zunächst muß jedoch der Begriff des Voronoi-Diagramms von Punktmengen auf Segmentmengen verallgemeinert werden.

Definition 2.3 Sind X und Y nichtleere, abgeschlossene, beschränkte Teilmengen der euklidischen Ebene, so heißt die Menge

$$B(X, Y) := \{p \in \mathbb{E}^2 \mid d(p, X) = d(p, Y)\} \quad (2.2)$$

Bisektor von X und Y .

Da $\partial\Omega$ ein einfaches Polygon ist treten nur Bisektoren von Knoten und Geradensegmenten, im nachfolgenden kurz als *Elemente* bezeichnet, auf. Abbildung 2.1 zeigt die aus den drei möglichen Kombinationen dieser Elemente resultierenden Bisektoren.

Der linke Teil stellt hierbei einen Knoten-Knoten-Bisektor dar, welcher aus der Mittelsenkrechten zur Verbindungsgeraden von p und q besteht. Das mittlere Teilbild zeigt einen aus drei Teilbisektoren, die im folgenden durch eine Tilde gekennzeichnet sind, bestehenden Knoten-Segment-Bisektor. Bezeichne r das offene Segment (p, q) , so setzt sich $B([p, q], f)$ aus Teilen der beiden Knoten-Knoten-Bisektoren $B(p, f)$, $B(q, f)$ und dem Bisektor $\tilde{B}(f, (p, q))$ zusammen. Letzterer besteht gemäß Definition 2.3 aus denjenigen Punkten von \mathbb{E}^2 , die sowohl vom

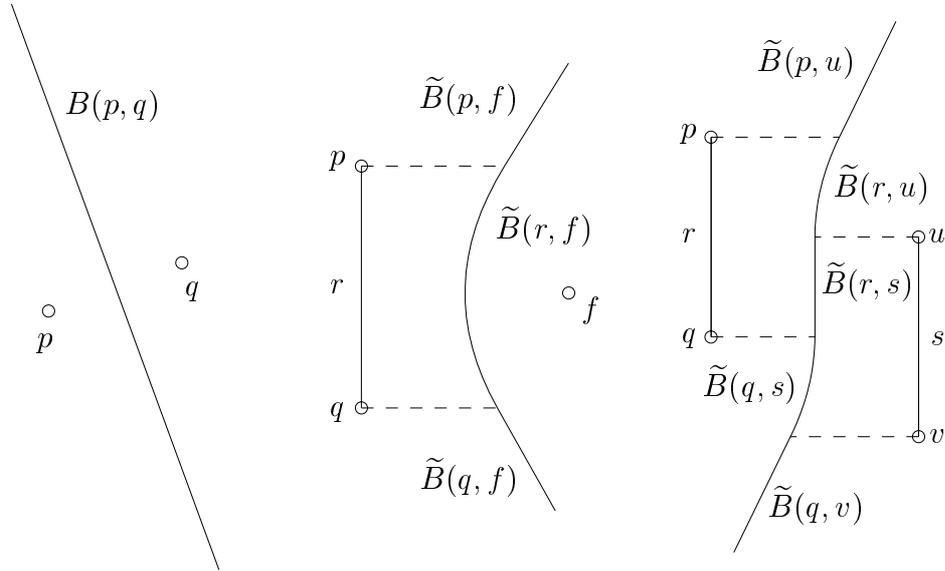


Abbildung 2.1: mögliche Bisektorentypen

offenen Segment $\langle p, q \rangle$, als auch von dem Punkt f gleichweit entfernt sind. Dies sind gerade die Punkte der Parabel mit Fokus f und Leitlinie $\langle p, q \rangle$, eingeschränkt auf das offene Segment zwischen p und q . Die Orthogonalen der Segmente durch die zugehörigen Endpunkte sind in Abbildung 2.1 gestrichelt dargestellt. Sie markieren auf dem Bisektor zugleich die Grenzen der Teilbisektoren.

Der dritte Teil von Abbildung 2.1 zeigt schließlich den Bisektor zweier Segmente, der sich aus fünf Teilbisektoren zusammensetzt. Sei $r = \langle p, q \rangle$ und $s = \langle u, v \rangle$, so kommt zu den aus den beiden vorhergehenden Fällen bekannten Bisektorentypen hier noch der Bisektor $\tilde{B}(r, s)$ – ein Teil der Winkelhalbierenden von $\langle p, q \rangle$ und $\langle u, v \rangle$, beziehungsweise im Falle paralleler Segmente der Mittellinie von $\langle p, q \rangle$ und $\langle u, v \rangle$ hinzu.

Jeder der gezeigten Bisektoren unterteilt die euklidische Ebene in zwei Halbebenen, welche durch die nachfolgende Definition festgelegt werden.

Definition 2.4 Sind e_i und e_j zwei Elemente, so bezeichne

$$h(e_i, e_j) := \{p \in \mathbb{E}^2 \mid d(p, e_i) < d(p, e_j)\} \tag{2.3}$$

die Halbebene der Punkte, die näher bei e_i als bei e_j liegen.

Analog zum klassischen Fall werden nun mit Hilfe dieser Halbebenen die Begriffe Voronoi-Bereich, Voronoi-Polygon und Voronoi-Diagramm definiert.

Definition 2.5 Sei M eine nichtleere endliche Menge von Elementen, e ein weiteres, nicht in M enthaltenes Element, so wird der *Voronoi-Bereich* $VB(e, M)$

von e bezüglich M definiert durch

$$VB(e, M) := \bigcap_{e_i \in M} h(e, e_i). \quad (2.4)$$

Als *Voronoi-Polygon* wird der Rand eines solchen Voronoi-Bereiches bezeichnet, das heißt $VP(e, M) := \partial VB(e, M)$. Die Gesamtheit aller Voronoi-Bereiche der Elemente aus M bildet das *Voronoi-Diagramm* $VD(M)$ von M , das heißt

$$VD(M) := \bigcup_{e_i \in M} VB(e_i, M \setminus e_i). \quad (2.5)$$

Sofern M aus dem Kontext ersichtlich ist, werden $VB(e, M)$ und $VP(e, M)$ in diesem Kapitel verkürzt als $VB(e)$ und $VP(e)$ geschrieben. Da lediglich die Anteile des Voronoi-Diagramms von Interesse sind, die ganz in Ω liegen, wird in den nachfolgenden Abbildungen auf die Darstellung der Voronoi-Kanten außerhalb Ω verzichtet.

Abbildung 2.2 zeigt die Voronoi-Diagramme eines konvexen Polygons (links) und eines nichtkonvexen Polygons (rechts). Ein einfaches Polygon P , sowie das von P umschlossene Gebiet Ω werden dabei als *konvex* bezeichnet, wenn für je zwei Punkte $p, q \in \Omega$ auch stets $[p, q]$ ganz in Ω liegt. Sofern P ein konvexes Polygon ist, sind auch die Voronoi-Bereiche aller Kanten des Polygons konvex [40].

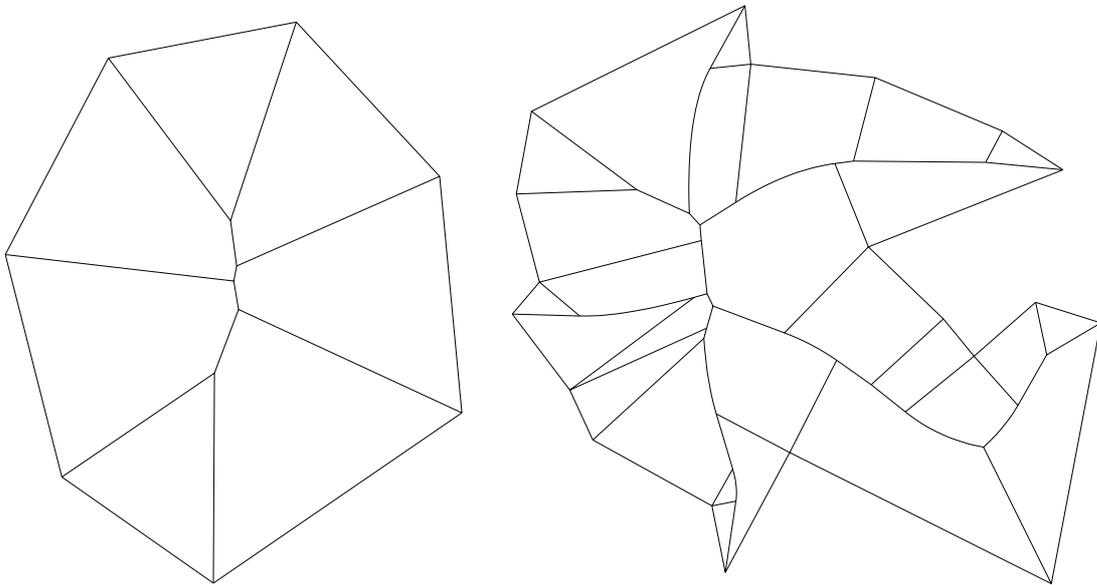


Abbildung 2.2: Voronoi-Diagramme einfacher Polygone

Die Vereinigung aller Voronoi-Polygone ist in der euklidischen Ebene die Komplementärmenge des Voronoi-Diagramms, weswegen $VD(M)$ alternativ auch als

$\bigcup_{e \in M} VP(e)$ definiert werden kann. Diese Definition ist insbesondere dann vorteilhafter, wenn der graphähnliche Charakter des Voronoj-Diagramms hervorgehoben werden soll. Da die Komplementarität die Identifizierung der beiden Mengen rechtfertigt, sollen diese im folgenden nicht mehr explizit unterschieden werden.

Im klassischen Fall sind die Voronoj-Bereiche von Punktmenge nur durch Geradensegmente berandet. Aufgrund der Erweiterung auf Segmentmengen und der oben genannten Bisektoreigenschaften kommen nun jedoch auch Parabelsegmente als Randstücke in Frage. Trotz dessen sollen in Analogie zur klassischen Definition die Begriffe *Voronoj-Kanten* für die einzelnen Bisektorsegmente eines Voronoj-Polygons und *Voronoj-Knoten* für deren gemeinsamen Punkte verwendet werden.

Zur Unterscheidung des Innenbereiches vom Außenbereich eines Polygons sei dieses im Nachfolgenden stets gegen den Uhrzeigersinn orientiert, so daß die Innenfläche des Polygons beim Durchlauf der Segmente gemäß der Orientierung stets zur Linken liegt. Somit ist der Begriff des Innenwinkels wohldefiniert und ermöglicht die Unterscheidung von zwei verschiedenen Knotentypen. Ein Knoten heißt *konvex*, wenn der zugehörige Innenwinkel kleiner π ist und *reflex*, wenn er größer π ist (der Fall gleich π wird durch Definition 2.1 ausgeschlossen).

Ist e_i ein konvexer Knoten, so enthält der zugehörige Voronoj-Bereich $VB(e_i)$ außer e_i selbst keine weiteren Punkte der euklidischen Ebene (direkte Folgerung aus dem Satz von Pythagoras). Demzufolge sollen unter dem Begriff „Elemente des Polygons“ nur noch die Kanten und reflexen Knoten des Polygons verstanden werden.

Die Berechnung der medialen Achse erfolgt mit Hilfe eines divide et impera-Ansatzes, dessen Atome die nachfolgend definierten Ketten sind.

Definition 2.6 Sei $F = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ die Knotenfolge eines einfachen Polygons P und $s_i := (p_i, p_{i+1 \bmod n})$ für $0 \leq i < n$. Die Folge

$$C = (p_j, s_j, p_{j+1}, s_{j+1}, \dots, p_{k-1}, s_{k-1}, p_k) \quad \text{mit } k > j \quad (2.6)$$

heißt *Kette*, wenn die Knoten p_j und p_k konvex, alle dazwischenliegenden (p_{j+1} bis p_{k-1}) jedoch reflex sind.

Eine Kette beginnt bei einem konvexen Knoten, umfaßt alle dazwischenliegenden reflexen Knoten und Kanten und endet mit dem bezüglich der Orientierung nächsten konvexen Knoten. Im Falle eines konvexen Polygons (alle Knoten sind konvex) bildet jede Kante ein Kette. Somit läßt sich das Polygon auch durch eine Folge von Ketten darstellen, das heißt $P = (C_1, C_2, \dots, C_l)$ mit $l \leq n$.

Abbildung 2.3 zeigt die acht Ketten C_1, \dots, C_8 eines einfachen Polygons P . Diese sind zur Hervorhebung durch kleine Trennstriche an den konvexen Knoten markiert. Im Inneren des Polygons befinden sich die Bezeichner der Elemente e_0 bis e_{11} (Segmente und reflexe Knoten des Polygons). Ist m die Anzahl der reflexen

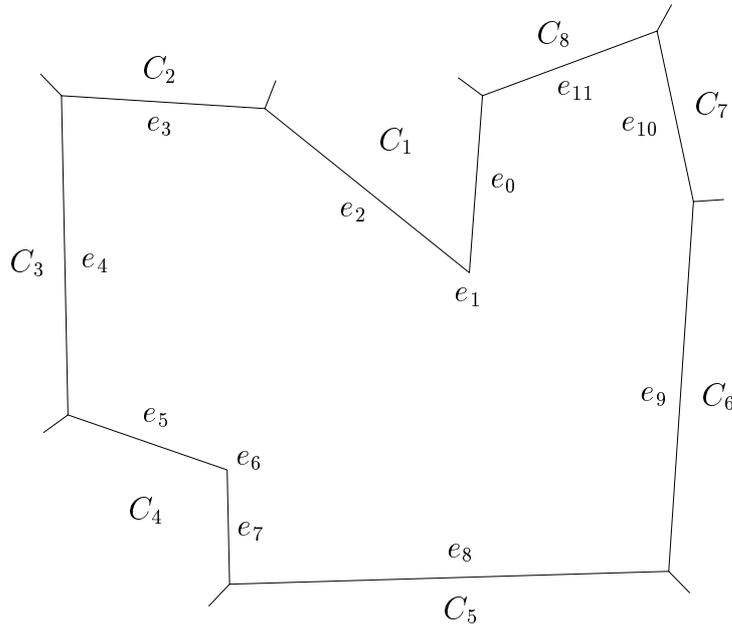


Abbildung 2.3: Ketten eines einfachen Polygons

Knoten von P , so umfaßt das Voronoi-Diagramm des Polygons $n + m$ Voronoi-Bereiche, sofern P n Kanten besitzt. Nachfolgend sollen nun einige Eigenschaften der Voronoi-Bereiche betrachtet werden.

Lemma 2.1 Sei e_i Element eines einfachen Polygons P , p ein Punkt des Voronoi-Bereichs $VB(e_i)$ und $p_i := I(p, e_i)$ sein Bild auf dem Element e_i . So gilt $[p, p_i] \subset VB(e_i)$.

Beweis: Sei $q \in [p, p_i] \setminus \{p_i\}$. Angenommen q liegt nicht in $VB(e_i)$, so gibt es ein Element e_j in P mit $q \in \text{cl}(VB(e_j))$. Ist $q_i := I(q, e_i)$ und $q_j := I(q, e_j)$, so erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung $d(p, q_j) \leq d(p, q) + d(q, q_j)$. Mit $d(q, q_j) = d(q, e_j) \leq d(q, e_i)$ folgt hieraus $d(p, q_j) \leq d(p, q) + d(q, e_i)$. Die Identität der Bilder $p_i = q_i$ und $d(p, q_i) = d(p, q) + d(q, q_i)$ implizieren schließlich die Beziehung $d(p, q_j) \leq d(p, e_i)$, weshalb im Widerspruch zur Annahme p nicht in $VB(e_i)$ liegen kann. Da p_i selbst in e_i liegt sind somit alle Punkte des Segments $[p, p_i]$ im Voronoi-Bereich von e_i enthalten. \square

Da im Gegensatz zum Fall konvexer Polygone die Voronoi-Kanten nicht-konvexer Polygone auch Parabelsegmente sein können, sind hier die zugehörigen Voronoi-Bereiche im allgemeinen ebenfalls nicht konvex. Es gilt jedoch die schwächere Eigenschaft des Pfadzusammenhangs.

Satz 2.1 Jeder Voronoi-Bereich $VB(e_i)$ eines einfachen Polygons ist pfadzusammenhängend. Das heißt, für je zwei Punkte $p, q \in VB(e_i)$ gibt es einen p und q verbindenden Polygonzug, der ganz in $VB(e_i)$ enthalten ist.

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Lemma 2.1. Dieses besagt, daß $[p, I(p, e_i)]$ und $[q, I(q, e_i)]$ jeweils ganz in $VB(e_i)$ enthalten sind. Ist e_i ein reflexer Knoten, so gilt $I(p, e_i) = I(q, e_i)$ und die beiden geschlossenen Segmente bilden bereits den p und q verbindenden Pfad. Sofern e_i ein Segment ist, begrenzen $I(p, e_i)$ und $I(q, e_i)$ das Teilsegment $[I(p, e_i), I(q, e_i)]$, das ganz in e_i enthalten und somit Teil von $VB(e_i)$ ist. In diesem Falle besteht der verbindende Pfad zwischen den Punkten $p, I(p, e_i), I(q, e_i)$ und q . \square

Von Interesse ist nun das Verhalten des Bildes eines Punktes, der entlang dem Voronoi-Polygon $VP(e_i) = \partial VB(e_i)$ läuft. Nachfolgendes Lemma besagt zunächst, daß sich die Verbindungslinien zweier Punkte auf dem Rand des Voronoi-Bereiches mit ihren jeweiligen Bildern nicht kreuzen können.

Lemma 2.2 Seien p und q zwei Punkte auf dem Voronoi-Polygon $VP(e_i)$, p_i beziehungsweise q_i deren Bilder auf e_i , so enthält entweder eines der Segmente $s_1 := [p, p_i]$ und $s_2 := [q, q_i]$ das andere, oder sie haben bis auf einen eventuell existierenden gemeinsamen Endpunkt einen leeren Schnitt.

Beweis: Angenommen keines der beiden Segmente s_1, s_2 enthält das andere und s_1 schneidet s_2 im Punkt u . Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d(u, p_i) \leq d(u, q_i)$, so gilt $d(q, q_i) = d(q, u) + d(u, q_i) \geq d(q, u) + d(u, p_i) \geq d(q, p_i)$. Im Fall der Ungleichheit $d(q, q_i) > d(q, p_i)$ steht dies im Widerspruch zur Eigenschaft, daß das Bild q_i stets den Abstand $d(q, v)$ für alle $v \in \partial\Omega$ minimiert. Folglich kann ein solcher Schnittpunkt u nur dann existieren, sofern er mit $p_i = q_i$ zusammenfällt. \square

Der Fall, daß eines der Segmente s_1 und s_2 das andere enthält, tritt zum Beispiel dann auf, wenn e_i ein reflexer Knoten ist und sowohl p als auch q auf einer Voronoi-Kante von $VP(e_i)$ liegen, die mit e_i inzidiert. Eine Folgerung von Lemma 2.2 ist, daß bei einem orientierten Durchlauf von $VP(e_i)$ die zugehörigen Bilder das erzeugende Element e_i monoton überstreichen.

Das nachfolgende Lemma gibt nun Aufschluß über den Aufbau des Voronoi-Diagramms und deckt seine Verwandtschaft zur Definition der medialen Achse mittels maximaler Kreisscheiben auf.

Lemma 2.3 Die Voronoi-Bereiche $VB(e_i)$ und $VB(e_j)$ zweier verschiedener Elemente e_i und e_j teilen genau dann eine Voronoi-Kante $\tilde{B}(e_i, e_j)$, wenn es einen Punkt p mit $r := d(p, e_i) = d(p, e_j)$ gibt und die Kreisscheibe $K_r(p)$ um p mit Radius r keine Punkte von $\partial\Omega$ in ihrem Inneren enthält.

Beweis: Sei p ein Punkt der Voronoi-Kante $\tilde{B}(e_i, e_j)$, so ist nach Definition 2.3 $d(p, e_i) = d(p, e_j) =: r$. Angenommen die Kreisscheibe $K_r(p)$ enthält einen Punkt q des Polygons in ihrem Inneren, so ist $d(p, q) < r$. Dies impliziert für das zu q gehörende Element e_k die Beziehung $d(p, e_k) \leq d(p, q) < r = d(p, e_i)$, weshalb im Widerspruch zur Voraussetzung p Element des Voronoi-Bereichs $VB(e_k)$ sein muß.

Existiert hingegen eine Kreisscheibe $K_r(p)$ um p mit Radius $r = d(p, e_i) = d(p, e_j)$, die keinen Punkt von $\partial\Omega$ in ihrem Inneren enthält, so minimieren e_i und e_j unter allen Elementen des Polygons den Abstand von p zum Rand $\partial\Omega$. Infolgedessen ist p Element der Voronoi-Kante $\tilde{B}(e_i, e_j)$. \square

Somit ist die Menge aller Voronoi-Polygone genau die Menge der Punkte, zu denen es eine Kreisscheibe gibt, die mindestens zwei Elemente des Polygons berührt. Wie der nachfolgende Satz zeigt, spielen dabei jene Voronoi-Kanten eine besondere Rolle, die zu einem inzidierenden Knoten-Segment-Paar gehören.

Satz 2.2 Die mediale Achse $M(\Omega)$ eines von dem einfachen Polygon P begrenzten Gebietes Ω ist das auf Ω eingeschränkte Voronoi-Diagramm $VD(P)$ ohne jene Bisektorensegmente, die mit reflexen Knoten inzidieren.

Beweis: Laut alternativer Fußpunkt-Definition (1.3) der medialen Achse müssen die beiden Tangentialpunkte der maximalen Kreisscheibe verschieden sein, was für Voronoi-Kanten nicht inzidierender Elemente stets erfüllt ist. Gemeinsame Fußpunkte können also nur durch inzidierende Elemente entstehen. Die Schnittmenge enthält in diesem Fall als einziges Element den Inzidenzpunkt beider Elemente, der stets Endpunkt eines Segments und somit Knoten des Polygons ist. Da konvexe Knoten nie als Bilder von Punkten der Bisektorsegmente auftreten können, bleibt noch der Fall reflexer Knoten zu untersuchen. Ein solcher Knoten ist stets Bild aller Punkte seines abgeschlossenen Voronoi-Bereichs. Dies impliziert, daß gerade bei jenen Voronoi-Kanten die Berührungspunkte der beiden Elemente zusammenfallen, die durch ein inzidentes Knoten-Segment-Paar entstehen. Folglich sind diese aus $VD(\partial\Omega)$ zu entfernen um $M(\Omega)$ zu erhalten. \square

Abbildung 2.4 zeigt die medialen Achsen, die durch Entfernen dieser Kanten aus den in Abbildung 2.2 gezeigten Voronoi-Diagrammen entstehen. Da konvexe Polygone keine reflexen Knoten besitzen, sind in diesem Fall Voronoi-Diagramm und mediale Achse identisch.

2.2 Algorithmus

Der nachfolgende rekursive Algorithmus von Lee [24] berechnet zunächst den in Ω liegenden Anteil des Voronoi-Diagramms $VD(\partial\Omega)$ eines einfachen Polygons $\partial\Omega$, aus dem gemäß Satz 2.2 die zugehörige mediale Achse $M(\Omega)$ gewonnen wird.

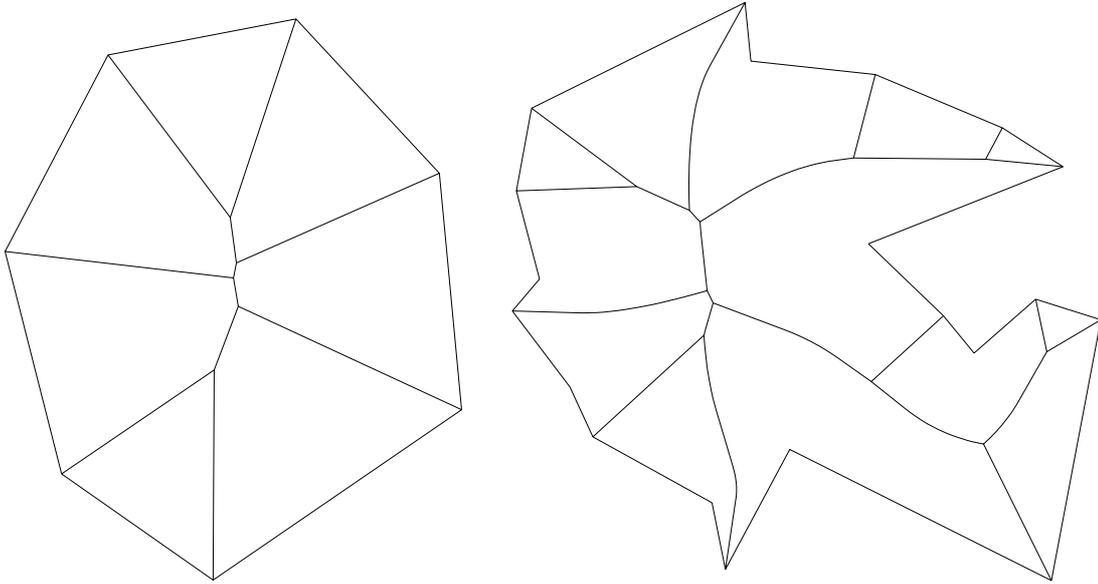


Abbildung 2.4: mediale Achsen einfacher Polygone

Sei dazu $F = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ gegen den Uhrzeigersinn orientiert, p_0 ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein konvexer Knoten und somit Anfangsknoten einer Kette. Die Kettendarstellung des Polygonzugs sei $S = (C_1, C_2, \dots, C_h)$, wobei die Anzahl $h \leq n$ der Ketten in S von der Zahl und dem Muster abhängt, in dem die m reflexen Knoten des Polygons in der Knotenliste verstreut sind. Schließlich bezeichne $N := n + m$ die Anzahl der Elemente in P .

Die einzelnen Schritte zur Berechnung des Voronoi-Diagramms $VD(P) = VD(S)$ faßt Algorithmus 2.1 zusammen.

```

function  $VD(S) = \text{VoronoiDiagramm}(C_1, \dots, C_h)$ 
if  $h == 1$ 
1.  $VD(S) = \text{Segmentnormalen}$  an alle Knoten in  $C_1$ 
else
2.  $S_l := (C_1, \dots, C_{\lceil h/2 \rceil})$ 
    $S_r := (C_{\lceil h/2 \rceil + 1}, \dots, C_h)$ 
3.  $VD(S_l) = \text{VoronoiDiagramm}(S_l)$ 
    $VD(S_r) = \text{VoronoiDiagramm}(S_r)$ 
4.  $VD(S) = \text{Merge}(VD(S_l), VD(S_r))$ 
end

```

Algorithmus 2.1: Berechnung des Voronoi-Diagramms

Als Abbruchkriterium der Rekursion dient die Anzahl h der Ketten in S . Ist $h = 1$, so enthält S nur noch eine elementare Kette. In diesem Fall besteht das zugehörige Voronoi-Diagramm aus den Segmentnormalen durch die reflexen

Knoten und den beiden die Kette abschließenden konvexen Knoten (Schritt 1). Abbildung 2.5 zeigt das Voronoi-Diagramm einer solchen elementaren Kette. Die Kanten der Kette sind hier als durchgezogene, die Voronoi-Kanten als gestrichelte Segmente dargestellt.

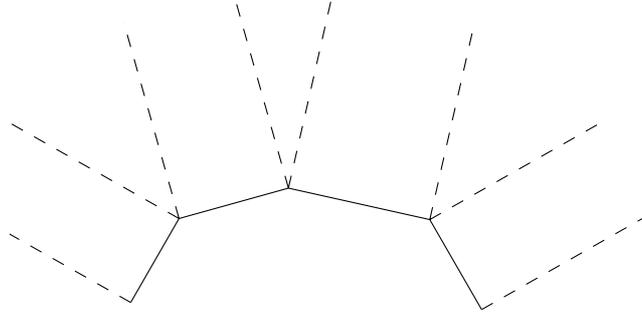


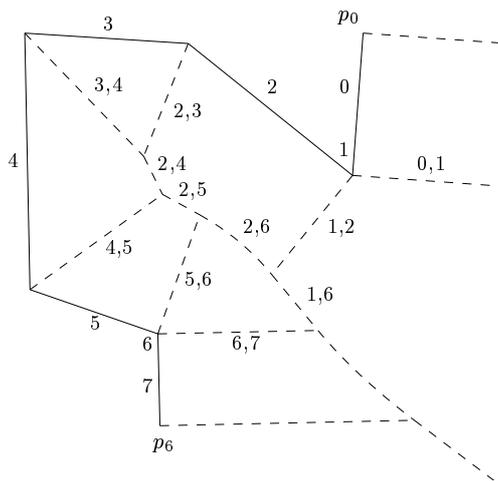
Abbildung 2.5: Voronoi-Diagramm einer elementaren Kette

Enthält S mehr als eine Kette (else-Zweig), so erfolgt zunächst eine Halbierung von S in die beiden Teillisten S_l und S_r (Schritt 2), deren zugehörige Voronoi-Diagramme $VD(S_l)$ und $VD(S_r)$ anschließend getrennt berechnet werden. Durch das Zusammenfügen dieser beiden Voronoi-Teildiagramme erhält man schließlich das gesuchte Voronoi-Diagramm $VD(S)$. Hierzu dient die Funktion Merge, deren Hauptaufgabe die Konstruktion des sogenannten Merge-Bisektors $B := B(S_l, S_r)$ ist. Dieser trennt $VB(S_l)$ und $VB(S_r)$, besteht also aus Teilbisektoren der Elementen von S_l und S_r . Seien e_i, \dots, e_k und e_{k+1}, \dots, e_l die Elemente dieser Teillisten.

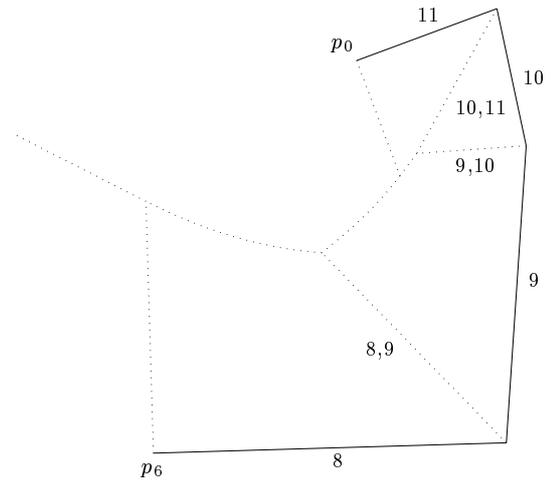
Aufgrund der Kettendefinition ist der Knoten p , mit dem sowohl e_k als auch e_{k+1} inzidieren, konvex. Demzufolge beginnt B bei p mit $B(e_k, e_{k+1})$, der Winkelhalbierenden dieser beiden Segmente. B ist von p ab in das Innere des Polygonzugs orientiert. Der Bisektor $B(e_k, e_{k+1})$ bleibt solange Bestandteil von B , bis er entweder auf eine Kante von $VP(e_k)$ oder von $VP(e_{k+1})$ trifft. Diese Kanten sind wiederum Bisektorensegmente der Art $\tilde{B}(e_k, e_u)$ bzw. $\tilde{B}(e_{k+1}, e_v)$. Liegt der Schnittpunkt von $s_1 := B(e_k, e_{k+1}) \cap \tilde{B}(e_k, e_u)$ vor $s_2 := B(e_k, e_{k+1}) \cap \tilde{B}(e_{k+1}, e_v)$, so sind ab s_1 die Punkte des Bisektors näher bei e_u denn bei e_k . Demzufolge muß B nun mit dem Bisektor $B(e_u, e_{k+1})$ fortgesetzt werden. Andernfalls wird B durch $B(e_{k+1}, e_v)$ erweitert.

Der Konstruktionsvorgang beginnt von neuem, indem dieses neue Teilstück von B wiederum mit den Voronoi-Polygonen der beiden erzeugenden Elemente geschnitten wird, um den nächsten Teilbisektor von B zu bestimmen. Der Konstruktionszyklus ist beendet, sofern in S_l das erste Element e_i und in S_r das letzte Element e_l erreicht wird, oder beide Voronoi-Polygone keinen Schnittpunkt mit dem zuletzt konstruierten Teilstück von B aufweisen.

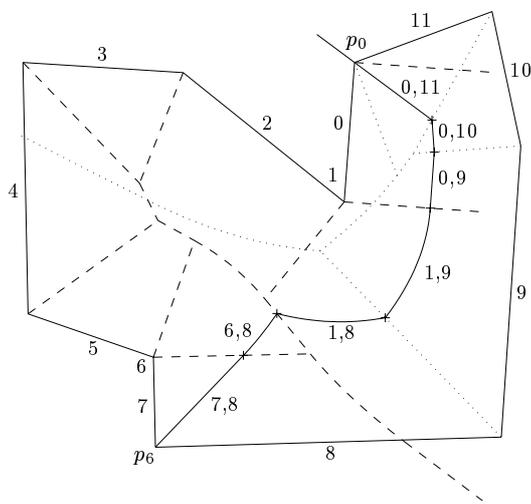
Anhand des in Abbildung 2.6 gezeigten Beispiels soll die Konstruktion von B veranschaulicht werden. Die beiden oberen Teilbilder zeigen die Teillisten S_l und S_r und ihre zugehörigen Voronoi-Teildiagramme. Diese sollen gemäß dem zuvor



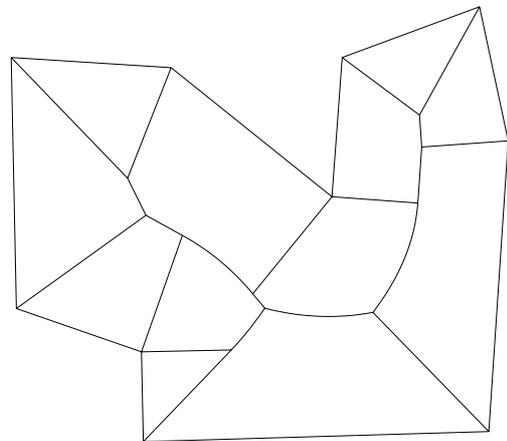
linkes Voronoi-Diagramm



rechtes Voronoi-Diagramm



Konstruktion des Merge-Bisektors



Voronoi-Diagramm

Abbildung 2.6: Merging von Voronoi-Teildiagrammen

beschriebenen Verfahren zu einem Voronoi-Diagramm zusammengeführt werden. Zur Vereinfachung werden die Elemente e_i nur durch ihre Nummern i und die Bisektorsegmente $\tilde{B}(e_i, e_j)$ durch die Zahlenpaare i, j der erzeugenden Elemente gekennzeichnet.

Die Teillisten sind $S_l = (C_1, \dots, C_4)$, $S_r = (C_5, \dots, C_8)$ (vergleiche Abbildung 2.3 auf Seite 24). Der Startknoten p ist im gezeigten Polygon p_6 , Startbisektor ist $\tilde{B}(e_7, e_8)$. Dieser schneidet $\tilde{B}(e_6, e_7)$ vor $\tilde{B}(e_8, e_9)$, und somit wird ab dem Schnittpunkt der Merge-Bisektor durch $\tilde{B}(e_6, e_8)$ fortgesetzt, welcher wiederum zunächst den Knoten-Knoten-Bisektor $\tilde{B}(e_1, e_6)$ schneidet, weswegen B durch $\tilde{B}(e_1, e_8)$ fortgesetzt wird. Dieser Bisektor schneidet zuerst eine Kante des rechten Voronoi-Polygons, weshalb nun erstmalig das rechte Element im Merge-Bisektor ausgetauscht werden muß. Folglich ist mit $\tilde{B}(e_1, e_9)$ fortzufahren. Es folgen noch $\tilde{B}(e_0, e_9)$, $\tilde{B}(e_0, e_{10})$ bis schließlich $\tilde{B}(e_0, e_{11})$ erreicht wird, der die jeweils letzten Elemente der Teillisten S_l und S_r verbindet und bei p_0 endet.

Der Bisektor B unterteilt Ω in zwei Teilgebiete und es sind noch die Anteile des linken Voronoi-Diagramms, die rechts des Bisektors liegen (gestrichelte Linien) und die Reste des rechten Voronoi-Diagramms, die links des Bisektors liegen (gepunktete Linien), zu entfernen (Abbildung 2.6 rechts unten).

Die Konstruktion des Merge-Bisektors in Schritt 4 des Algorithmus 2.1 besteht somit hauptsächlich darin, zu zwei gegebenen Voronoi-Polygonen und einem Bisektor den ersten Schnitt des Bisektors mit einem der beiden Voronoi-Polygone zu bestimmen. Von besonderer Hilfe ist dabei die Folgerung von Lemma 2.2, die besagt, daß beim orientierten Durchlauf eines Voronoi-Polygons die Bilder das zugehörige Element monoton überstreichen. Dies bewirkt, daß die Bilder von Punkten des Merge-Bisektors auf den linken und rechten Elementen monoton von p_6 nach p_0 wandern, wobei jedoch auch Elemente ausgelassen werden können (im Beispiel e_2 bis e_5). Deswegen werden die Voronoi-Polygone linker Elemente gegen den Uhrzeigersinn, die Voronoi-Polygone der rechten Elemente dagegen im Uhrzeigersinn orientiert und auf Schnittpunkte mit dem Bisektor B untersucht. Sofern ein Element im vorhergehenden Zyklus nicht ausgetauscht wurde, wird die Schnittpunktsuche bei der zuletzt getesteten Voronoi-Kante wieder aufgenommen. Somit wird neben dem Element auch das zugehörige Voronoi-Polygon nur einfach überstrichen.

Man erhält schließlich die in Abbildung 2.7 dargestellte mediale Achse von Ω mit Hilfe des Satzes 2.2, durch Entfernen jener Voronoi-Kanten, die mit den reflexen Knoten von P inzidieren.

Für den Algorithmus 2.2 zur Berechnung der medialen Achse verbleibt somit nur die Aufbereitung der Daten und die Entfernung der Voronoi-Kanten, die nicht in $M(\Omega)$ enthalten sind.

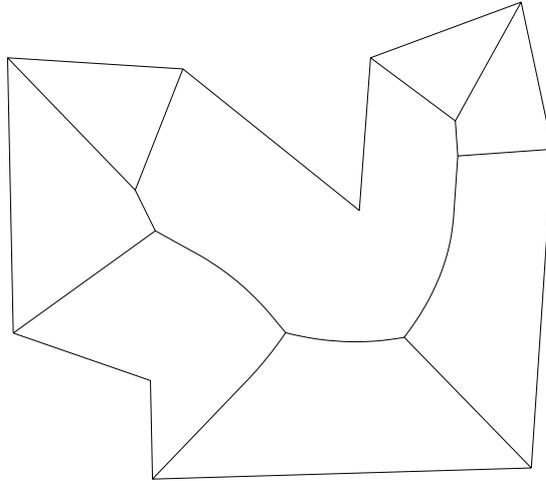


Abbildung 2.7: mediale Achse zu Abbildung 2.6

function $M(\Omega)=\text{MedialeAchse}(P)$

1. orientiere P gegen den Uhrzeigersinn
2. Umindizierung der Knoten von P , so daß p_0 konvexer Knoten ist
3. baue Kettenliste S von P auf
4. $VD(P)=\text{VoronoiDiagramm}(S)$
5. $M(\Omega)=VD(P)$ ohne die mit reflexen Knoten inzidenten Voronoi-Kanten

Algorithmus 2.2: Berechnung der medialen Achse

2.3 Komplexitätsbetrachtung

In diesem Abschnitt soll die Komplexität des vorhergehend beschriebenen Algorithmus zur Berechnung der medialen Achse eines einfach polygonal berandeten Gebietes Ω untersucht werden. Hilfsmittel ist hierbei der zu $VD(\partial\Omega)$ gehörende Graph $G = G(K, E)$, dessen Knotenmenge K sowohl aus den Knoten des einfachen Polygons $\partial\Omega$ als auch den Voronoi-Knoten von $VD(\partial\Omega)$ besteht. E bezeichne schließlich die Kantenmenge von G , welche außer den Voronoi-Kanten auch die Kanten des Ausgangspolygons umfaßt. Für die Komplexitätsbetrachtung ist neben G auch der zugehörige duale Graph, der nun nachfolgend definiert wird, von Interesse.

Definition 2.7 Man gewinnt zu einem Graphen G den zugehörigen *geometrisch dualen Graphen*, kurz *dualen Graphen* G^* , indem man jede Facette und zusätzlich das Äußere von G durch je einen Knoten repräsentiert. Zwei Knoten von G^* teilen genau dann eine gemeinsame Kante, wenn die zugehörigen Facetten eine gemeinsame Kante teilen.

Im klassischen Fall des Voronoi-Diagramms von Punktmenge führt der duale

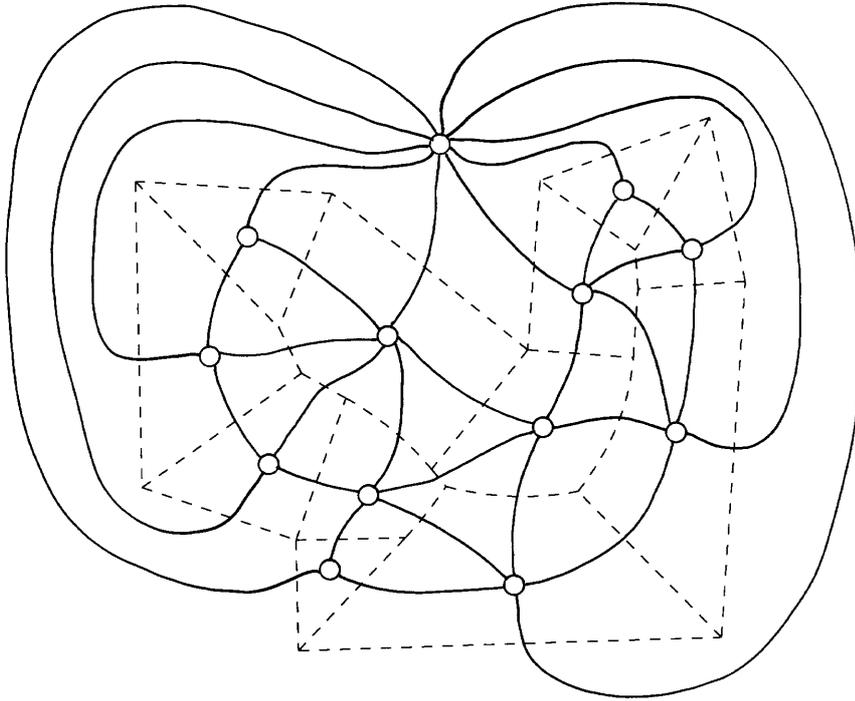


Abbildung 2.8: dualer Graph

Graph des Voronoi-Diagramms zur Delaunay-Triangulierung, sofern höchstens drei Punkte auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Abbildung 2.8 zeigt, daß G^* für das verallgemeinerte Voronoi-Diagramm im allgemeinen keine Triangulierung ist. Es gelten jedoch stets die folgenden Beziehungen zwischen einem Graphen G und seinem Dual G^* [18]. Der Prozeß des Dualisierens ist selbstinvers, das heißt $(G^*)^* = G$. Es folgt unmittelbar aus der Definition des Duals, daß die Facettenzahl von G der Knotenzahl von G^* entspricht und umgekehrt. Dagegen ist die Kantenzahl bezüglich der Dualisierung invariant, da die Kanten hier lediglich „gedreht“ werden. Schließlich ist G genau dann plättbar, wenn G^* plättbar ist. Diese Eigenschaften implizieren den folgenden Satz:

Satz 2.3 Das Voronoi-Diagramm eines einfachen Polygons P mit n Kanten und m reflexen Knoten besteht aus $\mathcal{O}(n)$ Voronoi-Kanten und $\mathcal{O}(n)$ Voronoi-Knoten.

Beweis: Sei $G(K, E)$ die Graphendarstellung von $VD(P)$, $k = |K|$, $e = |E|$ und f die Anzahl der Facetten in $G(K, E)$. Jede Facette wird durch mindestens 3 Kanten begrenzt, wobei jede Kante selbst genau zwei Facetten trennt. Somit gilt $e \geq \frac{3f}{2}$. Mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes [18]

$$k - e + f = 2 \quad (2.7)$$

folgt hieraus

$$f \leq 2k - 4 \quad (2.8)$$

und

$$e \leq 3k - 6 . \quad (2.9)$$

Für den dualen Graphen G^* ist die Zahl der Knoten $k = n + m + 1$. Dies ergibt zusammen mit (2.9): $e \leq 3(n + m + 1) - 4 = 3(n + m) - 1$. Da die Kantenzahl für G und G^* identisch sind und $m < n$ gilt, folgt somit, daß die Zahl der Voronoi-Kanten von $VD(P)$ $\mathcal{O}(n)$ ist.

Analog ergibt sich aus (2.8) für G^* die Abschätzung $f \leq 2(n + m + 1) - 2 = 2(n + m)$. Da die Facettenanzahl von G^* der Knotenanzahl von G entspricht ergibt sich hieraus die zweite Behauptung von Satz (2.3). \square

Ist h die Anzahl der Ketten des einfachen Polygons P , so bilden die rekursiven Aufrufe des Algorithmus zur Berechnung des Voronoi-Diagramms einen binären Baum mit $\lceil \lg h \rceil$ Merge-Ebenen. Hierbei bezeichne $\lceil \lg h \rceil$ den gegebenenfalls zur nächsthöheren ganzen Zahl aufgerundete Logarithmus zur Basis Zwei von h . Der Baum für das zuvor behandelte Beispiel hat somit $\lceil \lg 8 \rceil = 3$ Merge-Ebenen und ist in Abbildung 2.9 dargestellt.

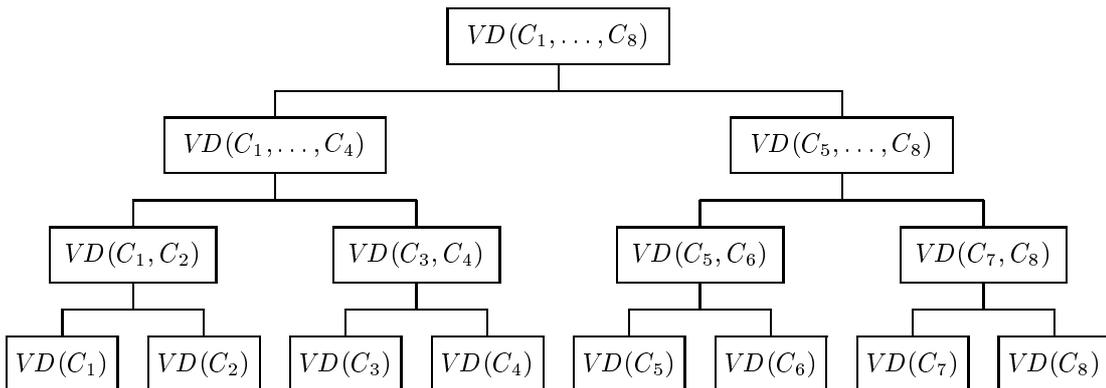


Abbildung 2.9: Merge-Baum für die Berechnung des Voronoi-Diagramms

Für die Anzahl h der Ketten des Polygons P gilt $3 \leq h \leq n$, wobei die obere Grenze für konvexe Polygone erreicht wird. Somit ist im schlechtesten Fall h von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.

Da der Schnittverlauf über die Voronoi-Polygone stets monoton ist, ergibt sich für die Konstruktion der Merge-Bisektoren in den Knoten des Merge-Baumes eine lineare Laufzeit. Innerhalb einer Ebene des Baumes sind darüber hinaus die Elemente in den Ketten der Knoten disjunkt. Deshalb ist die Komplexität innerhalb einer Ebene ebenfalls $\mathcal{O}(n)$.

Die Gesamtkomplexität der Berechnung des Voronoi-Diagramms eines einfachen Polygons ergibt sich schließlich aus dem Produkt der Komplexität innerhalb einer Ebene des Rekursionsbaumes und der Anzahl der Merge-Ebenen, ist also $\mathcal{O}(n \lg n)$. Dies ist zugleich die Komplexität der Berechnung der gesuchten medialen Achse, da der Aufwand zum Entfernen der unerwünschten Voronoi-Kanten in

$VD(\partial\Omega) \setminus M(\Omega)$ linear in der Zahl der Knoten des polygonalen Randes, das heißt $\mathcal{O}(n)$, ist. Folglich wird die Zahl der dazu benötigten Schritte von der Berechnung des Voronoi-Diagramms dominiert.

2.4 Anmerkungen

Die Ergebnisse dieses Kapitels ermöglichen eine genauere Untersuchung der Vorgänge in Abbildung 1.3 auf Seite 14, da es sich bei den gezeigten Beispielen um einfache polygonale Gebiete handelt. Es wurde gezeigt, daß bei symmetrischen Randmodifikationen die mediale Achse unter Umständen invariant bleibt. Diese Aussage trifft zwar für die Menge $M(\Omega)$, nicht jedoch für die innere Struktur der medialen Achse zu, wie der linke Teil von Abbildung 2.10 belegen soll.

Im Falle des Einheitsquadrates besteht die mediale Achse gerade aus den Winkelhalbierenden der vier Randsegmente, die sich im Mittelpunkt des Quadrates treffen. Eine Störung der Kantenmitten um den Betrag $0 < s < 1/2$ bewirkt, daß diese Winkelhalbierenden ab dem Schnittpunkt mit den Randsegmentnormalen durch die zugehörigen Knotenbisektoren (gepunktet) fortgesetzt werden.

Die Frage ist nun, ob mit Hilfe dieser Zusatzinformationen die Störung eindeutig festliegt, diese also anhand der medialen Achse ohne Zuhilfenahme der Radiusfunktion erkannt und beseitigt werden kann. Sei dazu z die Kantenlänge des Polygons, h die Länge des Winkelhalbierensegments der medialen Achse und α_1, α_2 die in Abbildung 2.10 gezeigten Teilwinkel.

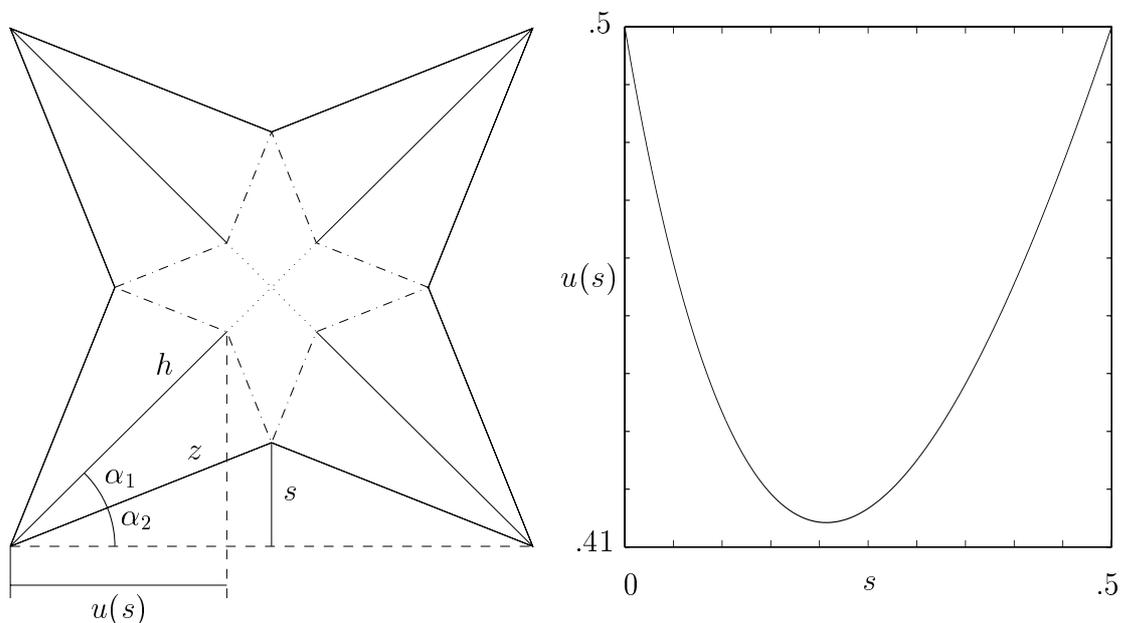


Abbildung 2.10: Struktur der medialen Achse in Abhängigkeit der Auslenkung

Es ist $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/4$ und $\alpha_2 = \arctan(2s)$, woraus $\alpha_1 = \pi/4 - \arctan(2s)$

folgt. Auch implizieren die elementaren Beziehungen $\cos \alpha_1 = z/h$ sowie $h^2 = 2u^2$ die Gleichung $u = z/(\sqrt{2} \cos \alpha_1)$. Hieraus ergibt sich, zusammen mit $z = \sqrt{s^2 + 1/4}$, schließlich für die x -Koordinate (und zugleich auch y -Koordinate) $u(s)$ des Endpunktes der ersten Winkelhalbierenden in Abhängigkeit der Störung s

$$u(s) = \frac{\sqrt{s^2 + \frac{1}{4}}}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \arctan(2s) \right)} \quad .$$

Der Graph dieser Funktion ist im rechten Teil der Abbildung 2.10 dargestellt. Ihm kann entnommen werden, daß die Zuordnung $s \mapsto u(s)$ nicht eindeutig umkehrbar ist, woraus folgt, daß auch die innere Struktur der medialen Achse keinen eindeutigen Schluß auf die Art der Störung des Randes zuläßt. Dies impliziert, daß der vorgestellte Algorithmus nur dann umkehrbar ist, sofern er zu den Segmenten der medialen Achse auch die zugehörigen Radien der maximalen Kreisscheiben liefert.

Kapitel 3

Mediale Achsen mehrfach zusammenhängender polygonaler Gebiete

Aufbauend auf die zuvor gewonnenen Ergebnisse behandelt dieses Kapitel die Eigenschaften und die Berechnung der medialen Achsen im Falle polygonaler Gebiete „mit Löchern“ nach einem Algorithmus von V. Srinivasan und L. R. Nackman [38].

3.1 Eigenschaften der Voronoi-Diagramme

Definition 3.1 Ein *mehrfach zusammenhängendes polygonales Gebiet* Ω ist eine abgeschlossene, nichtleere, beschränkte, zusammenhängende Teilmenge der euklidischen Ebene, deren Rand aus mindestens zwei, höchstens aber endlich vielen disjunkten einfachen Polygonen besteht.

Der Polygonzug des Randes $\partial\Omega$, der ganz Ω umfaßt, wird als *äußerer Rand* bezeichnet und im folgenden mit $\partial\Omega_0$ abgekürzt. Die H verbleibenden Polygonzüge $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_H$ von $\partial\Omega$ heißen *innere Ränder* von Ω . Abbildung 3.1 zeigt das grau hinterlegte Gebiet Ω , dessen Rand aus dem äußeren Polygon Ω_0 und den zwei inneren Polygonen $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ besteht.

Das im folgenden untersuchte Prinzip zur Konstruktion von $VD(\partial\Omega)$ besteht darin, ausgehend von $VD(\partial\Omega_0)$ durch sukzessive Hinzunahme der $VD(\partial\Omega_i)$ das gewünschte Voronoi-Diagramm $VD(\bigcup_{j=0}^H \partial\Omega_j)$ zu konstruieren. Wie sich herausstellen wird, sind hierbei Voronoi-Bereiche ganzer Polygone von Interesse, weswegen der Begriff des Voronoi-Bereichs, der in Definition 2.5 nur für einzelne Elemente geprägt wurde, nun auf Mengen von Elementen zu erweitern ist.

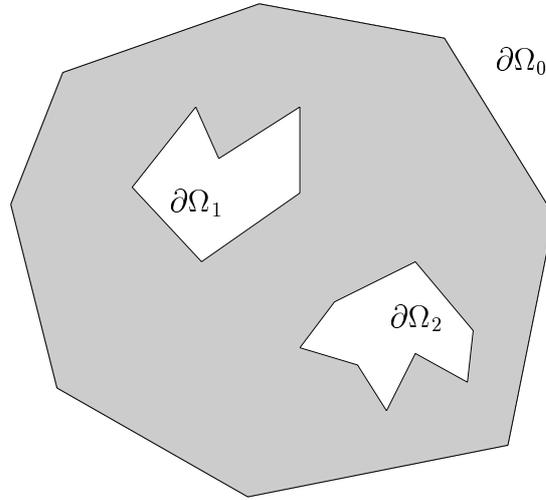


Abbildung 3.1: mehrfach zusammenhängendes polygonal berandetes Gebiet

Definition 3.2 Sind M_1 und M_2 zwei nichtleere, finite, disjunkte Mengen von Elementen, so bezeichne

$$VB(M_1, M_2) := \{p \in \mathbb{E}^2 \mid d(p, M_1) < d(p, M_2)\} \quad (3.1)$$

die Menge aller Punkte der euklidischen Ebene, die näher bei M_1 als bei M_2 liegen.

Der Voronoi-Bereich einer Elementmenge M_1 steht dabei in elementarer Verbindung zu den Voronoi-Bereichen der einzelnen Elemente von M_1 , denn es gilt:

Lemma 3.1

$$VB(M_1, M_2) = \bigcup_{e_i \in M_1} VB(e_i, M_2) = \bigcup_{e_i \in M_1} \bigcap_{e_j \in M_2} h(e_i, e_j). \quad (3.2)$$

Beweis: Zu beweisen ist nur die erste Gleichheit, da die zweite unmittelbar aus Definition 2.5 folgt. Sei zunächst $p \in VB(M_1, M_2)$. Gemäß Definition 3.2 gibt es somit ein $e_k \in M_1$ mit $d(p, e_k) = d(p, M_1)$ und es gilt $d(p, e_k) < d(p, M_2) \leq d(p, e_j)$ für alle e_j aus M_2 . Infolgedessen liegt p auch in allen Halbebenen $h(e_k, e_j)$ mit $e_j \in M_2$. Nach (2.4) ist p deshalb Element des Voronoi-Bereichs $VB(e_k, M_2)$ und dementsprechend auch in der Vereinigung $\bigcup_{e_i \in M_1} VB(e_i, M_2)$.

Ist hingegen $p \in \bigcup_{e_i \in M_1} \bigcap_{e_j \in M_2} h(e_i, e_j)$, so gibt es ein $e_k \in M_1$, so daß $p \in h(e_k, e_j)$ für alle $e_j \in M_2$ erfüllt ist. Nach Definition 2.4 folgt hieraus $d(p, e_k) < d(p, e_j)$ ebenfalls $\forall e_j \in M_2$. Dies impliziert $d(p, M_1) \leq d(p, e_k) < d(p, M_2)$ und somit $p \in VB(M_1, M_2)$. \square

Wie das folgende Lemma zeigen wird, ist in Analogie zu Lemma 2.1 auch der Voronoi-Bereich $VB(M_1, M_2)$ im verallgemeinerten Sinne sternförmig mit dem Kern M_1 .

Lemma 3.2 Zu jedem $p \in VB(M_1, M_2)$ gibt es einen Punkt $q \in M_1$, so daß das p und q verbindende Geradensegment $[p, q]$ vollständig in $VB(M_1, M_2)$ enthalten ist.

Beweis: Aus $p \in VB(M_1, M_2)$ folgt nach Lemma 3.1 die Existenz eines Elements $e_k \in M_1$, in dessen Voronoi-Bereich $VB(e_k, M_2)$ der Punkt p liegt. Nach Lemma 2.1 ist $[p, I(p, e_k)] \subset VB(e_k, M_2)$. Da im Beweis dieses Lemmas die Eigenschaft, daß die Elemente e_i und e_k Teile ein und desselben Polygons P sind, nicht eingeht, kann dieses auch hier angewandt werden. Für $q = I(p, e_k)$ ist somit die Aussage des zu beweisenden Lemmas erfüllt. \square

Die verallgemeinerte Sternförmigkeit war ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis, daß Voronoi-Bereiche einzelner Elemente pfadzusammenhängend sind (Lemma 2.1). In Analogie dazu ermöglicht das vorhergehende Lemma nun dieselbe Aussage für die zu untersuchenden Voronoi-Bereiche von Randelementmengen.

Satz 3.1 $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ ist pfadzusammenhängend.

Beweis: Zu zeigen ist, daß für je zwei Punkte $p, q \in VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ ein verbindender Polygonzug existiert, der ganz in $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ enthalten ist. Nach Lemma 3.2 gibt es zu p, q Punkte $p_0, q_0 \in \partial\Omega_{i+1}$, so daß $[p, p_0]$ und $[q, q_0]$ ganz in $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ enthalten sind. Da $\partial\Omega_{i+1}$ selbst ein einfaches Polygon ist, das ebenfalls im Voronoi-Bereich von $\partial\Omega_{i+1}$ liegt, existiert eine polygonale Verbindung zwischen p_0 und q_0 und somit auch zwischen p und q . \square

Darüber hinaus gilt für den Voronoi-Bereich jenes Randpolygons $\partial\Omega_{i+1}$, das bei der sukzessiven Konstruktion von $VB(\partial\Omega)$ hinzugenommen wird, folgendes Lemma:

Lemma 3.3 $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ ist beschränkt.

Beweis: Nach Lemma 3.1 ist

$$VB\left(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j\right) = \bigcup_{e_k \in \partial\Omega_{i+1}} VB\left(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j\right). \quad (3.3)$$

Da $\partial\Omega_{i+1}$ ein einfaches Polygon ist besteht $\partial\Omega_{i+1}$ nach Definition 2.1 aus endlich vielen Elementen. Das heißt $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ ist eine Vereinigung endlich vieler Mengen und infolgedessen beschränkt, wenn alle Voronoi-Bereiche der zu $\partial\Omega_{i+1}$ gehörenden Elemente selbst beschränkt sind. Daß dies der Fall

ist, zeigt der folgende Widerspruchsbeweis: Angenommen es gibt ein Element $e_k \in \partial\Omega_{i+1}$, dessen Voronoi-Bereich unbeschränkt ist, so muß es einen Punkt $p \in VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ geben, der nicht in dem von $\partial\Omega_0$ umschlossenen Gebiet liegt, weil dieses nach Definition 3.1 beschränkt ist. Da jedoch $\partial\Omega_{i+1}$ und somit auch e_k im Inneren von $\partial\Omega_0$ enthalten sind, folgt aus der Wahl von p die Beziehung $d(p, \partial\Omega_0) < d(p, e_k)$. Im Widerspruch zur Annahme ist also $p \in VB(\partial\Omega_0, \bigcup_{j=1}^{i+1} \partial\Omega_j)$ und $VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ somit beschränkt. \square

Zur weiteren Untersuchung der Eigenschaften der Voronoi-Bereiche wird die *konvexe Hülle* $CH(M)$ einer nichtleeren Menge $M \subset \mathbb{E}^2$ als technisches Hilfsmittel benötigt. $CH(M)$ ist die Menge, die zu je zwei Punkten $p, q \in M$ auch die Punkte des p und q verbindenden geschlossenen Geradensegments $[p, q]$ enthält. Der Rand der konvexen Hülle eines Polygons P mit Knotenfolge $F = (p_0, \dots, p_{n-1})$ ist wiederum ein Polygon, dessen Knoten eine Teilfolge von F bilden.

Die gegenseitige Lage zweier innerer Randpolygone ist, wie das nachfolgende Lemma nun zeigen wird, von großer Relevanz für die zugehörigen Voronoi-Bereiche.

Lemma 3.4 Seien $\partial\Omega_i, \partial\Omega_j$ zwei einfache Polygone. Ist $\partial\Omega_i$ nicht vollständig in $CH(\partial\Omega_j)$ enthalten, so gibt es einen Knoten $v \in \partial\Omega_i$ und eine bei v beginnende Halbgerade g_v , die ganz in $VB(\partial\Omega_i, \partial\Omega_j)$ enthalten ist.

Beweis: Da laut Voraussetzung $\partial\Omega_i$ nicht vollständig in $CH(\partial\Omega_j)$ enthalten ist gibt es mindestens einen Knoten im Polygon $\partial\Omega_i$, der ebenfalls nicht in $CH(\partial\Omega_j)$ liegt. Sei v (einer) dieser Knoten und e die beziehungsweise eine der Kanten e_i von $\partial CH(\partial\Omega_j)$, die den Abstand $d(v, e_i)$ minimieren (vergleiche Abbildung 3.2). e wird durch zwei Knoten p, q von $\partial\Omega_j$ erzeugt, deren Verbindungsgerade $\langle p, q \rangle$ die euklidische Ebene in zwei Halbebenen h und \bar{h} teilt, so daß $CH(\partial\Omega_j)$ in h, v jedoch in \bar{h} liegt. g_v sei nun jene Halbgerade, die orthogonal zu $\langle p, q \rangle$ ist, bei v beginnt und ganz in \bar{h} liegt.

Sei u ein Punkt auf g_v , so folgt aufgrund der Konstruktion von g_v $d(u, v) < d(u, \partial\Omega_j)$ und somit $g_v \subset VB(v, \partial\Omega_j)$. Da v ein Knoten des Polygons $\partial\Omega_i$ ist folgt mit Lemma 3.1 die zu beweisende Behauptung $g_v \subset VB(\partial\Omega_i, \partial\Omega_j)$. \square

Im Sinne einer effizienten Konstruktion sollte bei Hinzunahme eines weiteren inneren Randes der zu konstruierende Voronoi-Bereich $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ von möglichst „einfacher Gestalt“ sein. Dies hängt, wie nun gezeigt werden soll und wie die Voraussetzungen des vorhergehenden Lemmas bereits angedeutet haben, von der Lage des hinzuzunehmenden inneren Randes $\partial\Omega_{i+1}$ ab.

Satz 3.2 Enthält die konvexe Hülle $CH(\partial\Omega_{i+1})$ kein $\partial\Omega_j$ für $1 \leq j \leq i$ vollständig, so ist $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ einfach zusammenhängend.

Beweis: Eine hinreichende Bedingung dafür, daß $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ nur einfach zusammenhängt, ist, daß jede ganz in $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ enthaltene einfach geschlossene Kurve C zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ohne

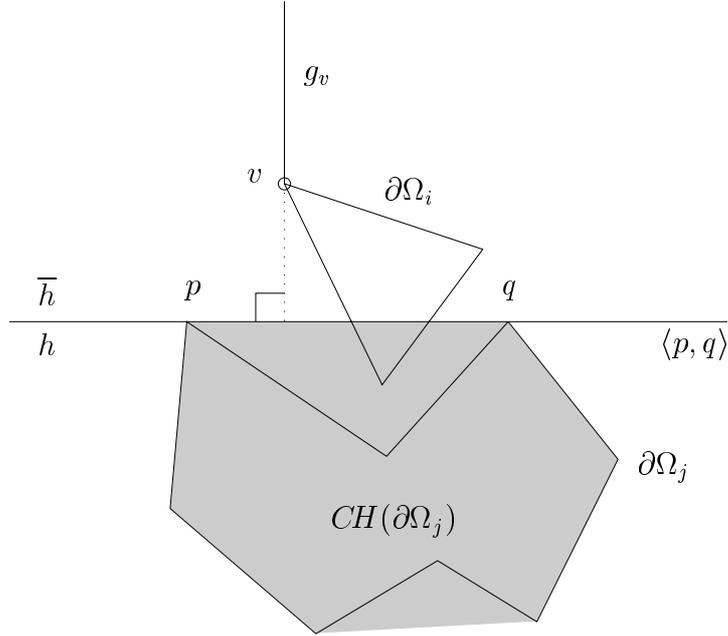


Abbildung 3.2: Skizze zum Beweis von Lemma 3.4

dabei $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ zu verlassen. Sei $\text{in}(C)$ das Innere des von C umschlossenen Gebietes. Angenommen es gibt einen Punkt $p \in \text{in}(C)$, der nicht in $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ liegt, so ist $p \in \text{cl}(VB(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j, \partial\Omega_{i+1}))$. Dies impliziert nach Lemma 3.2 die Existenz eines $k \in \{0, \dots, i\}$, so daß die Verbindungsgerade $[p, I(p, \partial\Omega_k)]$ ganz in $\text{cl}(VB(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j, \partial\Omega_{i+1}))$ enthalten ist. Da $CH(\partial\Omega_{i+1})$ nach Voraussetzung $\partial\Omega_k$ nicht vollständig enthält gibt es nach Lemma 3.4 einen Knoten $v \in \partial\Omega_k$ und eine Halbgerade g_v , die ganz in $VB(\partial\Omega_k, \partial\Omega_{i+1})$ enthalten sind (vergleiche Abbildung 3.3). Sei S der Streckenzug von p zu $I(p, \partial\Omega_k)$, von dort entlang $\partial\Omega_k$ zu v und weiter mit g_v (in Abbildung 3.3 gepunktet). Aufgrund dieser Konstruktion ist S ganz in $\text{cl}(VB(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j, \partial\Omega_{i+1}))$ enthalten und unbeschränkt. Die Beschränktheit von C , $p \in \text{in}(C)$ und die spezielle Wahl von S implizieren die Existenz eines Schnittpunktes s von C mit S . Nun ist einerseits $s \in S \subset \text{cl}(VB(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j, \partial\Omega_{i+1}))$, andererseits nach Voraussetzung aber auch Element von C und somit in $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$. Der Widerspruch ergibt sich aus der Disjunktheit dieser beiden Mengen. Infolgedessen kann der Ausgangspunkt p von S nicht außerhalb $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ liegen. \square

Bleibt nun die Frage, ob und wie die Voraussetzungen des Lemmas 3.2 erfüllt werden können. Hierbei erweist sich die Reihenfolge, in der die inneren Randkurven zur Konstruktion des gesamten Voronoi-Diagramms herangezogen werden, als von entscheidender Wichtigkeit.

Lemma 3.5 Sei Y_j die maximale y -Koordinate der Knoten von $\partial\Omega_j$. Ist $Y_{j+1} \leq Y_j$ für alle $1 \leq j < H$ erfüllt, so enthält $CH(\partial\Omega_{i+1})$ kein $\partial\Omega_j$ mit $1 \leq j \leq i$ ganz.

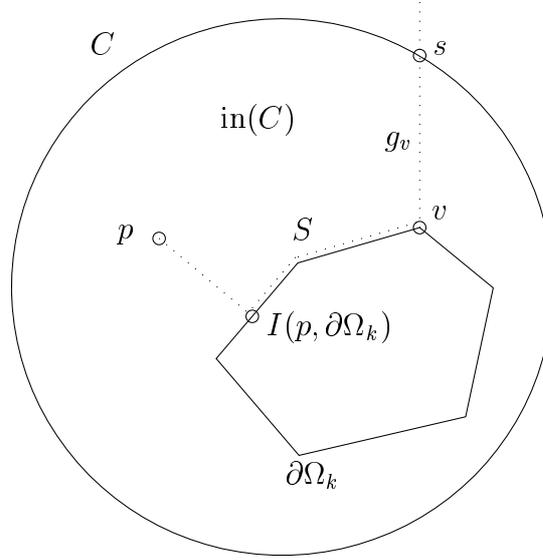


Abbildung 3.3: Skizze zum Beweis von Lemma 3.2

Beweis: Sei $i \in \{1, \dots, H-1\}$ fest, so folgt für alle j zwischen 1 und i mit $Y_{i+1} < Y_j$ die Aussage unmittelbar, da der zu Y_j gehörende Knoten selbst außerhalb von $CH(\partial\Omega_{i+1})$ liegt. Gilt jedoch $Y_{i+1} = Y_j$ so implizieren die in Definition 3.1 festgelegten Eigenschaften, daß sowohl der Schnitt $\partial\Omega_{i+1} \cap \partial\Omega_j$ leer als auch $\partial\Omega_j$ nicht in $\partial\Omega_{i+1}$ enthalten ist, woraus ebenfalls $\partial\Omega_j \not\subset CH(\partial\Omega_{i+1})$ folgt. \square

Seien im folgenden nun die inneren Polygone von Ω gemäß Lemma 3.5 nach absteigenden maximalen y -Koordinaten angeordnet. Die vorhergehenden Untersuchungen münden nun in den nachfolgenden Satz, der die Form des Merge-Bisektors $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$, welcher die beiden Voronoi-Bereiche $VB(\partial\Omega_{i+1})$ und $VB(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ trennt, beschreibt. Dieser ist, analog zur Merge-Bisektor-Konstruktion bei einfachen polygonalen Gebieten, zur Konstruktion des Voronoi-Diagramms $VD(\bigcup_{j=0}^{i+1} \partial\Omega_j)$ zu berechnen.

Satz 3.3 $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ ist eine einfache, geschlossene Kurve.

Beweis: Der Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ ist Rand des Voronoi-Bereiches $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ und besteht somit aus Teilen von Bisektoren der Elemente aus $\partial\Omega_{i+1}$ und $\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j$. Allgemein sind die Bisektoren zweier Elemente stets unbeschränkt und frei von Selbstdurchdringungen. Da jedoch der Voronoi-Bereich $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ gemäß Lemma 3.3 selbst beschränkt ist, kann der Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ stets nur Segmente dieser Element-Bisektoren enthalten. Ein Segment entsteht dabei durch den Schnitt eines Bisektors mit jeweils mindestens zwei weiteren Bisektoren. Infolgedessen besteht $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$

aus einer zusammenhängenden Kette von Bisektorsegmenten, die den Rand von $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ bildet. $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ ist nach den Sätzen 3.1 beziehungsweise 3.2 pfadzusammenhängend und einfach zusammenhängend, woraus schließlich folgt, daß $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ eine einfache, geschlossene Kurve ist. \square

Der gegen den Uhrzeigersinn orientierte Merge-Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ unterteilt $VD(\partial\Omega_{i+1})$ und $VD(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ jeweils in zwei Teile. Folgendes Lemma gibt nun darüber Auskunft, welche Teile für das zu konstruierende Voronoi-Diagramm $VD(\bigcup_{j=0}^{i+1} \partial\Omega_j)$ von Interesse sind.

Lemma 3.6 $VD(\bigcup_{j=0}^{i+1} \partial\Omega_j)$ besteht aus der Vereinigung des Anteils von $VD(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ außerhalb $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ und dem Anteil von $VD(\partial\Omega_{i+1})$ innerhalb des Bisektors.

Beweis: Sei $\Delta_i := \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j$, so gilt nach Definition 2.5 und Lemma 3.1

$$VD(\Delta_{i+1}) = \bigcup_{e_k \in \Delta_{i+1}} VB(e_k, \Delta_{i+1} \setminus e_k),$$

woraus mit Unterteilung der Menge $\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \partial\Omega_{i+1}$

$$VD(\Delta_{i+1}) = \left(\bigcup_{e_k \in \Delta_i} VB(e_k, \Delta_{i+1} \setminus e_k) \right) \cup \left(\bigcup_{e_k \in \partial\Omega_{i+1}} VB(e_k, \Delta_{i+1} \setminus e_k) \right) \quad (3.4)$$

gewonnen wird. Die beiden Mengen dieser Vereinigung sollen nun getrennt betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \bigcup_{e_k \in \Delta_i} VB(e_k, \Delta_{i+1} \setminus e_k) &= \bigcup_{e_k \in \Delta_i} \bigcap_{e_j \in \Delta_{i+1} \setminus e_k} h(e_k, e_j) \\ &= \bigcup_{e_k \in \Delta_i} \left[\left(\bigcap_{e_j \in \Delta_i \setminus e_k} h(e_k, e_j) \right) \cap \left(\bigcap_{e_j \in \partial\Omega_{i+1}} h(e_k, e_j) \right) \right] \\ &= \left(\bigcup_{e_k \in \Delta_i} \bigcap_{e_j \in \Delta_i \setminus e_k} h(e_k, e_j) \right) \cap \left(\bigcup_{e_k \in \Delta_i} \bigcap_{e_j \in \partial\Omega_{i+1}} h(e_k, e_j) \right) \\ &= VD \left(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \right) \cap VB \left(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j, \partial\Omega_{i+1} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Analog folgt für die zweite Menge der Vereinigung in (3.4)

$$\begin{aligned} \bigcup_{e_k \in \partial\Omega_{i+1}} VB(e_k, \Delta_{i+1} \setminus e_k) &= \bigcup_{e_k \in \partial\Omega_{i+1}} \bigcap_{e_j \in \Delta_{i+1} \setminus e_k} h(e_k, e_j) \\ &= \bigcup_{e_k \in \partial\Omega_{i+1}} \left[\left(\bigcap_{e_j \in \Delta_i} h(e_k, e_j) \right) \cap \left(\bigcap_{e_j \in \partial\Omega_{i+1} \setminus e_k} h(e_k, e_j) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\bigcup_{e_k \in \partial\Omega_{i+1}} \bigcap_{e_j \in \Delta_i} h(e_k, e_j) \right) \cap \left(\bigcup_{e_k \in \partial\Omega_{i+1}} \bigcap_{e_j \in \partial\Omega_{i+1} \setminus e_k} h(e_k, e_j) \right) \\
&= VB \left(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \right) \cap VD(\partial\Omega_{i+1}). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (3.4) bis (3.6) implizieren schließlich

$$\begin{aligned}
VD \left(\bigcup_{j=0}^{i+1} \partial\Omega_j \right) &= \left[VD \left(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \right) \cap VB \left(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j, \partial\Omega_{i+1} \right) \right] \\
&\cup \left[VB \left(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \right) \cap VD(\partial\Omega_{i+1}) \right]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Da $VB(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j, \partial\Omega_{i+1})$ und $VB(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ die Teile der euklidischen Ebene außerhalb und innerhalb des Bisektors $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ sind, folgt die Behauptung. \square

Bei der Konstruktion des Merge-Bisektors im Falle einfacher polygonaler Gebiete konnte stets ein konvexer Knoten als Startpunkt der Konstruktion gewählt werden. Wie in Satz 3.3 gezeigt wurde ist der hier zu konstruierende Merge-Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ eine einfache, geschlossene Kurve, weshalb noch ein geeigneter Startpunkt gefunden werden muß. Hierzu dient das folgende Lemma.

Lemma 3.7 Sei v ein Knoten der konvexen Hülle eines inneren Randes $\partial\Omega_{i+1}$, h_v eine Halbebene, die $CH(\partial\Omega_{i+1})$ vollständig enthält und auf deren Rand v liegt, g_v die Halbgerade $\subset \mathbb{E}^2 \setminus h_v$, die orthogonal zum Rand der Halbebene h_v ist und bei v beginnt. So ist g_v ganz im Abschluß des Voronoi-Bereichs $VB(v, \partial\Omega_{i+1} \setminus v)$ enthalten und schneidet den Merge-Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ im Punkt s .

Beweis: g_v ist ganz in $\text{cl}(VB(v, \partial\Omega_{i+1} \setminus v))$ enthalten, da nach Voraussetzung die konvexe Hülle von $\partial\Omega_{i+1}$ Teilmenge der Halbebene h_v ist. Aus der Orthogonalität von g_v zum Rand von h_v folgt, daß der Abstand jedes Punktes p der Geraden zu v kürzer ist als der Abstand von p zu einem beliebigen Punkt auf dem Rand $\partial\Omega_{i+1}$, ausgenommen v selbst. Zu berücksichtigen ist hierbei der Sonderfall, daß eine der mit v inzidierenden Kanten von $\partial CH(\partial\Omega_{i+1})$ in ∂h_v liegt. In diesem Fall ist g_v Teil des Voronoi-Polygons von v , weshalb der Voronoi-Bereich von v abgeschlossen sein muß.

Der Schnitt $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j) \cap g_v$ ist nicht leer, da nach Satz 3.3 der Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ eine einfache, geschlossene Kurve ist, die den Knoten v in ihrem Inneren enthält. Da g_v bei v beginnt und unbeschränkt ist, existiert ein Schnitt mit dem Merge-Bisektor. \square

Der gesuchte Schnittpunkt s kann nicht direkt bestimmt werden, weil zu Beginn der Konstruktion der Merge-Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ selbst unbekannt ist. Da dieser jedoch aus Teilen von Element-Bisektoren besteht gibt es ein geeignetes Element $e_k \in \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j$ das folgende Aussage erfüllt, sofern v , h_v und g_v gemäß Lemma 3.7 gewählt werden.

Lemma 3.8 Für einen beliebigen Punkt s der euklidischen Ebene gilt:

$$\begin{aligned} s &\in B(v, e_k) \cap g_v \cap \text{cl} \left(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k) \right) \\ \iff s &\in B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j) \cap g_v \cap \text{cl} \left(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Beweis: Angenommen s liegt in $B(v, e_k) \cap g_v \cap \text{cl}(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k))$. Zu zeigen ist, daß hieraus $s \in B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$, also $d(s, \partial\Omega_{i+1}) = d(s, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ folgt. Aufgrund der Konstruktion von g_v und der Voraussetzung $s \in g_v$ folgt $d(s, v) \leq d(s, p)$ für alle $p \in \partial\Omega_{i+1}$. Somit ist $d(s, v) = d(s, \partial\Omega_{i+1})$. Analog impliziert $s \in \text{cl}(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k))$ die Gleichung $d(s, e_k) = d(s, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$. Aufgrund der Voraussetzung ist s auch Punkt des Bisektors $B(v, e_k)$, das heißt $d(s, v) = d(s, e_k)$, woraus mit den vorherigen Überlegungen die gewünschte Beziehung $d(s, \partial\Omega_{i+1}) = d(s, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ und somit $s \in B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ folgt.

Der Schluß für $s \in B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j) \cap g_v \cap \text{cl}(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k))$ erfolgt analog, denn aus $s \in \text{cl}(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k))$ folgt $d(s, e_k) = d(s, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$. Die Wahl von v und die Konstruktion von g_v implizieren $d(s, v) = d(s, \partial\Omega_{i+1})$, woraus schließlich mit $d(s, \partial\Omega_{i+1}) = d(s, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ die zu beweisende Beziehung $d(s, v) = d(s, e_k)$ und somit $s \in B(v, e_k)$ folgt. \square

3.2 Algorithmus

Analog zum Fall einfacher polygonaler Gebiete wird die mediale Achse eines mehrfach zusammenhängenden polygonalen Gebietes aus dem zugehörigen Voronoj-Diagramm gewonnen. Zu dessen Berechnung entwickelten Srinivasan und Nackman [38] den nachfolgenden Algorithmus.

Gegeben sind die $H + 1$ einfachen Polygone $\partial\Omega_i$, die den Rand des zu untersuchenden Gebietes bilden. Der äußere Rand $\partial\Omega_0$ sei gegen, die inneren Ränder $\partial\Omega_i$, $1 \leq i \leq H$ im Uhrzeigersinn orientiert, so daß das Innere des Gebietes stets zur Linken der Kanten liegt.

Die Berechnung der medialen Achse eines mehrfach zusammenhängenden polygonalen Gebietes gliedert sich in die im Algorithmus 3.1 dargestellten Schritte.

Im ersten Schritt wird $VD(\partial\Omega_0)$ mit Hilfe des im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Algorithmus von Lee gewonnen. Anschließend sind die inneren Ränder gemäß Lemma 3.5 nach absteigenden maximalen y -Koordinaten Y_i der Knoten anzuordnen (2). Der dritte Schritt besteht aus einer Schleife über die

- function** $M(\bigcup_{j=0}^H \partial\Omega_j) = \text{MedialeAchse}(\partial\Omega_0, \dots, \partial\Omega_H)$
1. berechne $VD(\partial\Omega_0)$
 2. bestimme zu jedem inneren Rand $\partial\Omega_j$ den Punkt v_j mit der größten y -Koordinate Y_j und ordne die $\partial\Omega_j$ nach absteigenden Y_j
 3. **for** $i = 0 : H - 1$
 - a. berechne $VD(\partial\Omega_{i+1})$
 - b. $[s, e_{i+1}] := \text{Startpunkt}(v_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$
 - c. $VD(\bigcup_{j=0}^{i+1} \partial\Omega_j) = \text{Merge}(VD(\partial\Omega_{i+1}), VD(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j), s, v_{i+1}, e_{i+1})$
 - end**
 4. $M(\bigcup_{j=0}^H \partial\Omega_j) = VD(\bigcup_{j=0}^H \partial\Omega_j)$ ohne die mit reflexen Knoten inzidierenden Voronoi-Kanten

Algorithmus 3.1: Berechnung der medialen Achse

inneren Ränder, die nun der Reihe nach in das bestehende Voronoi-Diagramm eingefügt werden.

Für die Berechnung der Voronoi-Diagramme $VD(\partial\Omega_{i+1})$ innerer Ränder in Schritt 3a muß der Lee'sche Algorithmus modifiziert werden. Hier ist zu beachten, daß diese Polygone im Uhrzeigersinn orientiert sind und somit im Gegensatz zum äußeren Rand unter Umständen keine konvexen Knoten enthalten. In diesem Fall ist ganz $\partial\Omega_{i+1}$ eine elementare Kette. Folglich besteht das zugehörige Voronoi-Diagramm nur aus den bei den Knoten beginnenden Segmentnormalen (Abbildung 3.5 rechts oben).

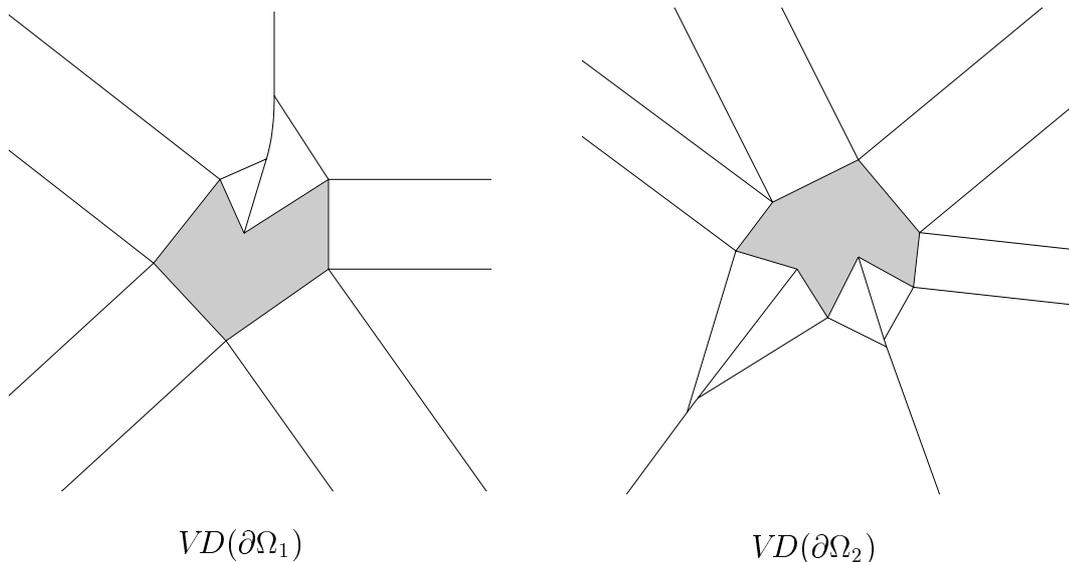


Abbildung 3.4: Voronoi-Diagramme der inneren Ränder von Abbildung 3.1

Sofern $\partial\Omega_{i+1}$ mindestens zwei konvexe Knoten enthält (Abbildung 3.4 rechts)

kann analog zur Berechnung der Voronoi-Diagramme einfacher Polygone $\partial\Omega_{i+1}$ binär unterteilt werden. Auch entspricht die Konstruktion des Merge-Bisektors diesem Fall. Lediglich beim abschließenden Mergen besteht der Unterschied, daß der Merge-Bisektor nicht bei einem weiteren konvexen Knoten endet, sondern unbeschränkt bleibt. Auch ist zu berücksichtigen, daß der Merge-Prozeß in diesem Fall auf einem statt auf zwei getrennten links/rechts Voronoi-Diagrammen operiert. Die Konstruktion des Voronoi-Diagramms bei Polygonen mit nur einem konvexen Knoten (Abbildung 3.4 links) erfolgt wie beim abschließenden Mergen des vorhergehenden Falls.

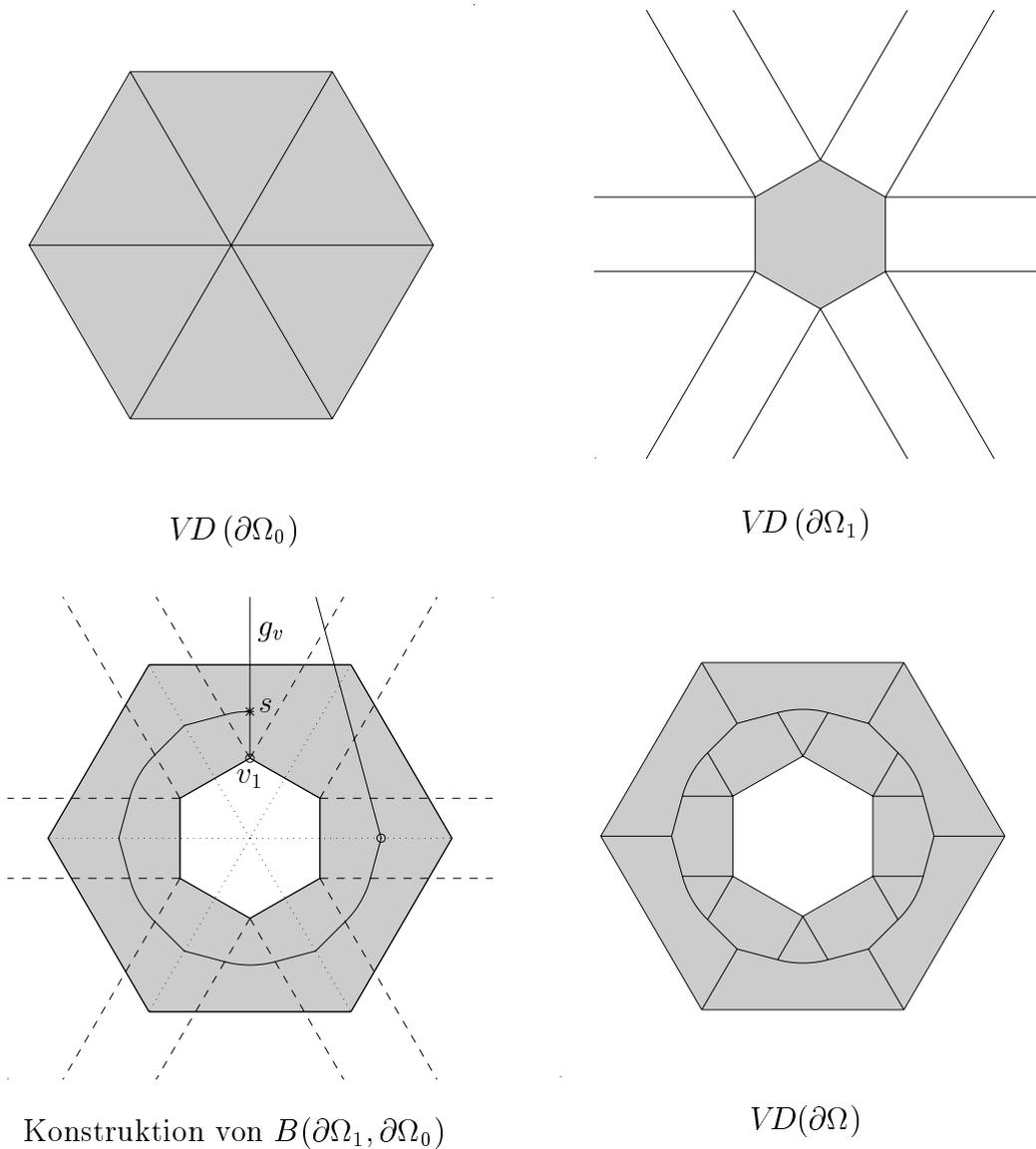


Abbildung 3.5: Merging von Voronoi-Diagrammen ganzer Ränder

Zum Einpassen des Voronoi-Diagramms $VD(\partial\Omega_{i+1})$ in das bereits berechnete

$VD(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ ist der zugehörige Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ zu konstruieren. Gemäß Satz 3.3 ist dieser eine einfache, geschlossene Kurve, zu deren Konstruktion ein geeigneter Startpunkt s mit Hilfe eines Verfahrens gefunden werden muß (Schritt 3b), was später erläutert wird.

Ausgehend von s kann nun die Konstruktion des Merge-Bisektors auf die gewohnte Weise durchgeführt werden (Schritt 3c). Der Startbisektor ist dabei $B(v_{i+1}, e_k)$, $VD(\partial\Omega_{i+1})$ das linke und $VD(\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ das rechte Voronoi-Teildia-gramm. Da der zu konstruierende Merge-Bisektor eine einfache, geschlossene Kurve ist, besteht das Abbruchkriterium der Konstruktion aus dem Wiedererreichen der beiden Startelemente v_{i+1} und e_k .

Abbildung 3.5 zeigt die Konstruktion anhand eines einfachen Beispiels (Voronoi-Diagramm und mediale Achse des Gebietes in Abbildung 3.1 sind im Anhang auf Seite 76 zu finden). Konstruiert werden soll das Voronoi-Diagramm eines Gebietes, dessen Rand aus zwei regelmäßigen Sechsecken besteht. Die Voronoi-Diagramme des äußeren Randes $\partial\Omega_0$ beziehungsweise inneren Randes $\partial\Omega_1$ sind oben links beziehungsweise oben rechts dargestellt. Das Teilbild links unten zeigt den Verlauf der Merge-Bisektor-Konstruktion, das resultierende Voronoi-Diagramm $VD(\bigcup_{j=0}^{i+1} \partial\Omega_j)$ wird rechts unten dargestellt.

Analog zum Fall einfacher polygonaler Gebiete gewinnt man die mediale Achse von Ω aus dem Voronoi-Diagramm $VD(\partial\Omega)$ durch Entfernen jener Voronoi-Kanten, die mit reflexen Knoten inzidieren (Schritt 4). Abbildung 3.6 zeigt die aus dem in Abbildung 3.5 dargestellten Voronoi-Diagramm gewonnene mediale Achse.

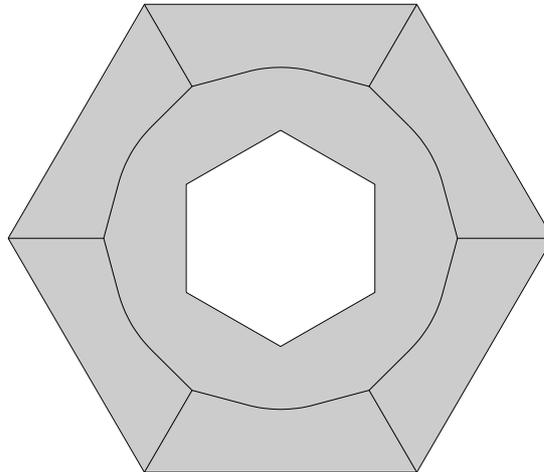


Abbildung 3.6: mediale Achse zu Abbildung 3.5

Die Startpunktsuche in Schritt 3b des Algorithmus 3.1 erfolgt mit Hilfe der beiden Lemmata 3.7 und 3.8. Als v wird hierzu (einer) der Knoten $\partial\Omega_{i+1}$ mit der maximalen y -Koordinate, und als g_v die bei v beginnende Vertikale gewählt. Ausgehend von v wird dann entlang der Halbgeraden g_v der Schnittpunkt $s =$

$g_v \cap B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ gesucht. Dies entspricht laut Lemma 3.8 der Suche nach jenem Element e_k , für das $s \in B(v, e_k) \cap g_v \cap \text{cl}(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k))$ erfüllt ist, woraus sich folgende, in Algorithmus 3.2 dargestellte Strategie zur Startpunktsuche ableitet.

```

function  $[s, e_k] = \text{Startpunkt}(v, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ 
1. finde  $e_k \in \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j$  so, daß  $v \in VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k)$ 
2. while true
   a.  $s := g_v \cap \text{cl}(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k)) \cap B(v, e_k)$ 
   b. if  $s \neq \emptyset$ 
       return
   else
       ersetze  $e_k$  durch jenes Element  $e_\lambda \in \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j$ , für das  $g_v$ 
       von  $VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k)$  in  $VB(e_\lambda, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_\lambda)$  übergeht.
   end
end

```

Algorithmus 3.2: Startpunktsuche

Zunächst wird im ersten Schritt das Element e_k aus $\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j$ gesucht, das den Abstand zu v minimiert, das heißt in dessen Voronoi-Bereich v und infolgedessen auch der erste Abschnitt der Halbgeraden g_v liegt. Danach wird g_v auf den Abschluß dieses Voronoi-Bereichs $VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k)$ eingeschränkt und mit dem ebenfalls auf $\text{cl}(VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k))$ restringierten Bisektor $B(v, e_k)$ geschnitten (Schritt 2a). Ist dieser Schnitt nichtleer, so besteht er nach Lemma 3.8 aus dem gesuchten Schnittpunkt $s = B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j) \cap g_v$.

Andernfalls muß im else-Zweig (2b) jenes Element beziehungsweise der zugehörige Voronoi-Bereich gefunden werden, in den g_v beim Verlassen von $VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k)$ eintritt. Dieses ersetzt e_k , worauf ein erneuter Durchlauf des Rumpfes der while Schleife (2) erfolgt. Sofern die Halbgerade g_v beim Verlassen von $VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k)$ auf den Bisektor zweier weiterer Elemente fällt, ist jenes als neues e_k zu wählen, dessen Voronoi-Bereich links von g_v liegt, da der Bisektor $B(\partial\Omega_{i+1}, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j)$ gegen den Uhrzeigersinn konstruiert werden soll. Die Existenz von s und somit die Terminierung der while-Schleife ist durch Lemma 3.7 gesichert.

Abbildung 3.7 zeigt den Verlauf der Startpunkt-konstruktion. Im linken Teilbild liegt v in $VB(e_4, \partial\Omega_0 \setminus e_4)$, jedoch schneidet in diesem Voronoi-Bereich der Bisektor $B(v, e_4)$ die Halbgerade g_v nicht. Da g_v als nächstes den Bisektor $B(e_3, e_4)$ schneidet, wird e_4 durch e_3 ersetzt. Dieser Prozeß wird solange iteriert, bis $e_k = e_1$ ist. Hier liegt der Schnittpunkt s , des in der Abbildung gepunkteten Bisektors $B(v, e_1)$, innerhalb des zugehörigen Voronoi-Bereichs $VB(e_1, \partial\Omega_0 \setminus e_1)$ und ist somit der gesuchte Startpunkt.

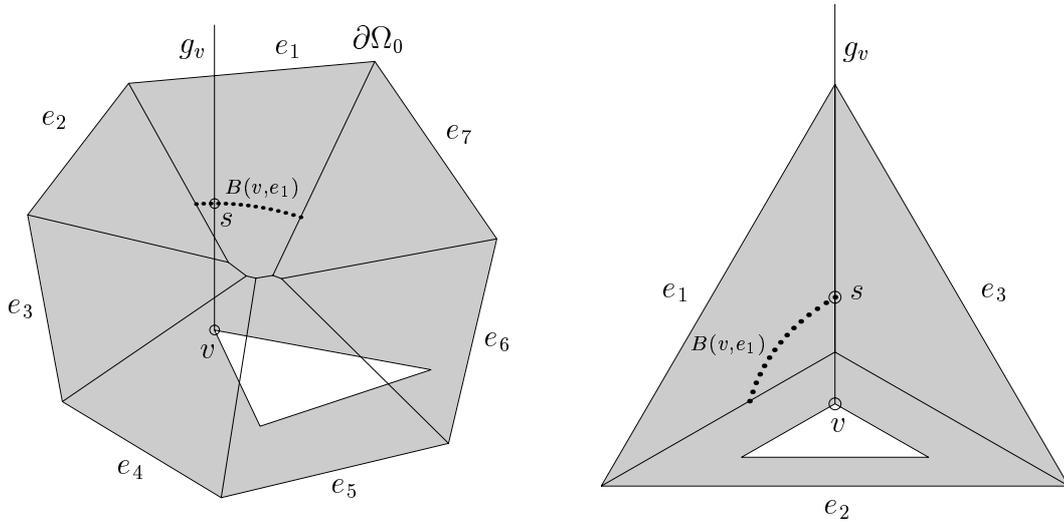


Abbildung 3.7: Voronoi-Bereich-Wechsel bei der Startpunktsuche

Das rechte Teilbild der Abbildung 3.7 zeigt den Fall, daß g_v mit dem Bisektor jener beiden Elemente e_1 und e_3 zusammenfällt, deren Voronoi-Bereiche an den Startbereich $VB(e_2, \partial\Omega_0 \setminus e_2)$ grenzen. In diesem Fall ist e_1 das gesuchte Element, dessen Bisektor die Halbgerade g_v im Punkt s schneidet, da der zugehörige Voronoi-Bereich links von g_v liegt.

3.3 Komplexitätsbetrachtung

Bezeichne n_i die Anzahl der Knoten des Polygons $\partial\Omega_i$ und sei $N := \sum_{i=0}^H n_i$ die Gesamtzahl aller Knoten. In Abschnitt 2.3 wurde gezeigt, daß der Aufwand zur Berechnung des Voronoi-Diagramms $VD(\partial\Omega_0)$ im ersten Schritt des Algorithmus 3.1 von der Ordnung

$$\mathcal{O}(n_0 \text{ ld } n_0) \tag{3.9}$$

ist.

Die Bestimmung der größten y -Koordinate Y_i jedes inneren Polygons benötigt jeweils $\mathcal{O}(n_i)$ und das anschließende Sortieren dieser H reellen Zahlen, zum Beispiel mit dem Quicksort-Verfahren [34], $\mathcal{O}(H \text{ ld } H)$ Schritte. Die Zeitkomplexität der zweiten Zeile beträgt somit

$$\mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^H n_i + H \text{ ld } H \right) . \tag{3.10}$$

In einer Iteration der nachfolgenden Schleife wird zunächst das Voronoi-Diagramm des inneren Polygons $\partial\Omega_{i+1}$ berechnet (3a). Die Komplexität des dazu

eingesetzten Verfahrens ist analog zum nicht modifizierten Lee'schen Algorithmus $\mathcal{O}(n_{i+1} \text{ld } n_{i+1})$ (vergleiche Komplexitätsuntersuchung in Abschnitt 2.3). In der sich daran anschließenden Startpunktsuche (3b) muß gemäß Algorithmus 3.2 zunächst jenes Element e_k gesucht werden, in dessen Voronoi-Bereich der Knoten v von $\partial\Omega_{i+1}$ liegt. Dies ist durch die Minimierung des Abstands $d(v, e_k)$ charakterisiert. Somit muß der Abstand jedes der $\sum_{j=0}^i n_j$ Elemente in $\bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j$ zu v berechnet werden.

Im nachfolgenden Schritt 2a ist zunächst die Halbgerade g_v auf den Voronoi-Bereich des Elements e_k einzuschränken. Dies erfordert den Schnitt von g_v mit allen Voronoi-Kanten von $VB(e_k, \bigcup_{j=0}^i \partial\Omega_j \setminus e_k)$. Die Anzahl dieser Kanten ist im schlechtesten Fall $\sum_{j=0}^i n_j - 1$. Das Aufstellen des Bisektors $B(v, e_k)$ und der anschließende Schnitt mit der eingeschränkten Halbgeraden benötigt schließlich einen weiteren Schritt, erhöht dadurch jedoch die Komplexität des gesamten Schritts 2a nicht. Auch die Ausführungszeit für 2b ist konstant, da mit der Berechnung der Schnittpunkte von g_v mit den Voronoi-Kanten zugleich die Elemente bekannt werden, deren Voronoi-Bereiche an den von e_k grenzen. Die Ausführung der gesamten Schleife in Schritt 2 benötigt infolgedessen $\mathcal{O}(\sum_{j=0}^i n_j)$ Zeitschritte, sofern in 2a die Ergebnisse vorhergehender Iterationen berücksichtigt werden. Dies ist zugleich die Komplexität der gesamten Startpunktsuche und somit auch für Schritt 3b in Algorithmus 3.1.

Wie in Kapitel 2.3 gezeigt wurde ist der Aufwand zur Konstruktion des Merge-Bisektors zweier Voronoi-Diagramme linear in der Anzahl der zugehörigen Elemente. Für Schritt 3c impliziert dies die Komplexität $\mathcal{O}(\sum_{j=0}^{i+1} n_j)$. Sie dominiert zugleich den Aufwand des Schritts 3b, womit sich für eine Iteration der for-Schleife in Algorithmus 3.1 eine Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(n_{i+1} \text{ld } n_{i+1} + \sum_{j=0}^{i+1} n_j)$ ergibt. Folglich erfordert die Ausführung der gesamten Schleife

$$\sum_{i=1}^H \mathcal{O} \left(n_i \text{ld } n_i + \sum_{j=0}^i n_j \right) \quad (3.11)$$

Schritte.

Der Aufwand zur Berechnung des Voronoi-Diagramms von $\partial\Omega$ ergibt sich aus der Summe der Terme (3.9) bis (3.11), ist also

$$\mathcal{O}(n_0 \text{ld } n_0) + \mathcal{O} \left(H \text{ld } H + \sum_{i=1}^H n_i \right) + \sum_{i=1}^H \mathcal{O} \left(n_i \text{ld } n_i + \sum_{j=0}^i n_j \right) .$$

Auflösen der Summen liefert

$$\sum_{i=0}^H \mathcal{O}(n_i \text{ld } n_i) + \mathcal{O}(H \text{ld } H) + \mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^H n_i \right) + \sum_{i=1}^H \mathcal{O} \left(\sum_{j=0}^i n_j \right) . \quad (3.12)$$

Hierbei kann der erste Summand zu

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^H \mathcal{O}(n_i \text{ld } n_i) &= \mathcal{O}\left(\text{ld}\left(\prod_{i=0}^H n_i^{n_i}\right)\right) \leq \mathcal{O}\left(\text{ld}\left(\prod_{i=0}^H N^{n_i}\right)\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\text{ld } N^{\sum_{i=0}^H n_i}\right) = \mathcal{O}(N \text{ld } N) \end{aligned} \quad (3.13)$$

vereinfacht werden und dominiert aufgrund der Beziehungen $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^H n_i) < \mathcal{O}(N)$ und $H < N$ den zweiten und dritten Summanden in (3.12). Für den vierten Summand gilt schließlich

$$\sum_{i=1}^H \mathcal{O}\left(\sum_{j=0}^i n_j\right) < \sum_{i=1}^H \mathcal{O}(N) = \mathcal{O}(HN), \quad (3.14)$$

weswegen (3.12) mit Hilfe von (3.13) und (3.14) durch

$$\mathcal{O}(N(\text{ld } N + H)) \quad (3.15)$$

abgeschätzt werden kann.

Das abschließende Entfernen der Voronoi-Kanten die mit reflexen Knoten inzidieren benötigt schließlich noch weitere $\mathcal{O}(N)$ Schritte (Anzahl der Voronoi-Kanten), erhöht jedoch die Komplexität (3.15) nicht mehr, die somit zugleich Komplexität des Algorithmus 3.1 ist.

3.4 Anmerkungen

Gürsoy erweitert in [15] den vorgestellten Algorithmus auf mehrfach zusammenhängende Gebiete, deren Ränder außer Geraden- zusätzlich auch Kreissegmente enthalten können. Aus den hieraus resultierenden Elementkombinationen ergeben sich neue Bisektortypen, die aber allesamt Kegelschnitte sind.

Der betrachtete Algorithmus von V. Srinivasan und L. R. Nackman zur Berechnung der medialen Achse von mehrfach zusammenhängenden, polygonal berandeten Gebieten ist nicht optimal, sondern läßt sich mit Hilfe eines 1979 von D.G. Kirkpatrick [21] entwickelten Algorithmus auf eine Laufzeit von $\mathcal{O}(N \text{ld } N)$ verbessern. In Diesem wird zunächst ein pseudo minimal spannender Baum für die Knoten und Segmente aufgebaut. Dieser wird in zwei Teilbäume pseudo-separiert, für die rekursiv die Voronoi-Diagramme konstruiert und anschließend wieder zusammengefügt werden. Für eine konkrete Implementierung ist dieser Algorithmus jedoch nicht geeignet [38]. Auch befinden sich in der Arbeit von Kirkpatrick keine Hinweise auf eine Implementierung.

Die beiden behandelten Algorithmen zur Berechnung der Voronoi-Diagramme von Rändern polygonaler Gebiete eignen sich nicht zur Parallelisierung, da die Aufteilung in Ketten keine gerechte Lastverteilung sichert. Ein 1993 von Goodrich et al. [14] entwickelter Algorithmus ermöglicht mit Hilfe einer modifizierten

Subdivision die parallele Berechnung des Voronoi-Diagramms von n nicht notwendigerweise zusammenhängenden Segmenten mit $\mathcal{O}(n)$ Prozessoren in einer $\mathcal{O}(1d^2 n)$ Zeit. Dazu wird je nach Lage der Segmente die Ebene in $\mathcal{O}(n)$ Teilbereiche zerlegt, denen je ein Prozessor zugeordnet wird. Die Berechnung des Voronoi-Diagramms (und somit auch der medialen Achse) erfolgt durch ein Verfahren, das abwechselnd ein horizontales und ein vertikales Merging durchführt.

Kapitel 4

Approximation medialer Achsen

Dieses Kapitel behandelt die Berechnung der medialen Achse für allgemeinere als die zuvor betrachteten polygonalen Gebiete. Ein möglicher Ansatz hierzu ist die Verwendung weiterer Randelementarten, wie zum Beispiel Kreissegmente [15]. Als unerwünschter Nebeneffekt ergibt sich hieraus jedoch eine Vervielfältigung der Bisektorentypen, wodurch die Algorithmen und Datenstrukturen an Komplexität zunehmen. Deshalb wird nachfolgend der dazu alternative Ansatz der Approximation gewählt.

Hierbei wird der Rand selbst mit einfachen Objekten approximiert und aus diesen eine Näherung der medialen Achse gewonnen. Zur Approximation bieten sich zum Beispiel Polygonzüge an. Jedoch sind die der Approximation zugrundeliegenden Voronoi-Bereiche dann von einfachster Gestalt, wenn $\partial\Omega$ durch diskrete Punkte angenähert wird. Dies ist in Abbildung 4.1 für fünfzig auf dem Rand des in Kapitel 2 untersuchten Gebiets (grau hinterlegt) verteilte Punkte dargestellt.

In diesem Fall sind die Voronoi-Bereiche konvex, polygonal berandet und somit einfach zu berechnen. Es fällt zugleich auf, daß jene Voronoi-Kanten, die ganz im Inneren von Ω enthalten sind, bereits eine gute Approximation der medialen Achse (siehe Abbildung 2.7 auf Seite 31) bilden. Dies ist der Ansatz von Brandt [6], der nachfolgend weiter untersucht werden soll.

4.1 Topologische Grundlagen

Die für Approximationen notwendigen Begriffe wie Stetigkeit und Konvergenz bedürfen einer topologischen Struktur in dem zu untersuchenden Raum. Die nachfolgend vorgestellten Definitionen und die sich daraus ergebenden Resultate der mathematischen Morphologie sind den Büchern von Matheron [25] und Serra [35] entnommen.

Im folgenden bezeichnen \mathcal{F} , \mathcal{G} und \mathcal{K} die Mengen aller bezüglich der durch die euklidische Metrik auf \mathbb{E}^2 induzierten Topologie abgeschlossenen, offenen und kompakten Teilmengen der euklidischen Ebene. Da Ω und $M(\Omega)$ abgeschlossene

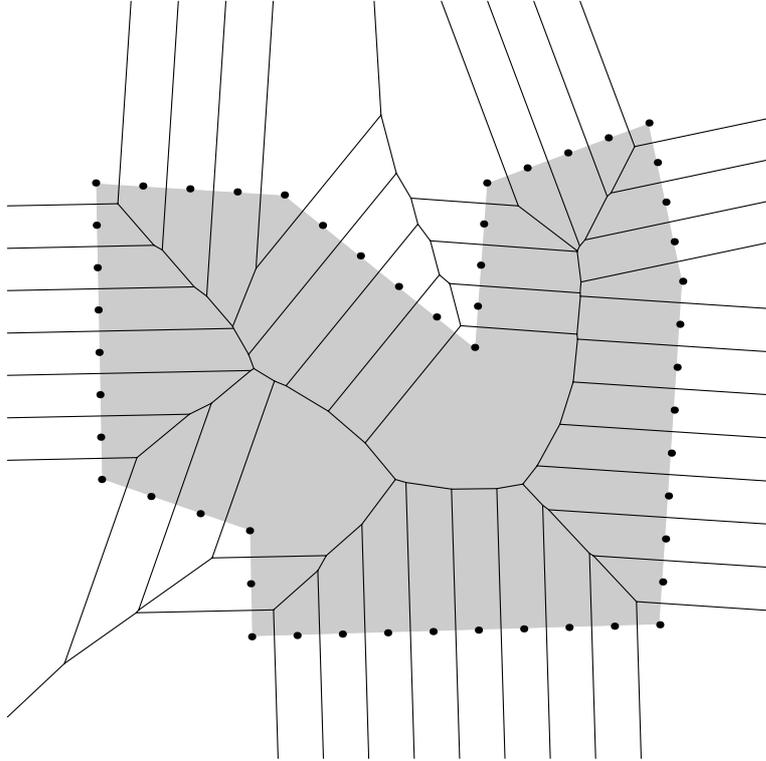


Abbildung 4.1: Voronoi-Diagramm einer Punktmenge

Mengen sind, stellt die Berechnung der medialen Achse eine Transformation vom Typ $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ dar, die somit von besonderem Interesse ist.

Als topologische Struktur für \mathcal{F} wird die Hit-Miss-Topologie gewählt. In ihr werden die Elemente von \mathcal{F} aufgrund ihres Schnittverhaltens gegenüber Teilmengen der euklidischen Ebene zueinander in Beziehung gesetzt. Sei $M \subseteq \mathbb{E}^2$, so ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^M &:= \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap M = \emptyset\} \quad \text{beziehungsweise} \\ \mathcal{F}_M &:= \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap M \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen der euklidischen Ebene, die M *verfehlen* beziehungsweise *treffen*. Sind $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$ und $K \in \mathcal{K}$ so wird die *Hit-Miss-Topologie* auf \mathcal{F} mit Hilfe der Basis

$$\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_n}^K = \mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n} \quad (4.2)$$

definiert.

Der Raum \mathcal{F} ist zusammen mit der Hit-Miss-Topologie hausdorffsch, separabel und, im Gegensatz zu \mathbb{E}^2 , kompakt, weshalb es genügt, die Konvergenzuntersuchungen auf abzählbare Folgen zu beschränken. Eine Folge (F_n) von Elementen aus \mathcal{F} *konvergiert* genau dann gegen das Grenzelement $F \in \mathcal{F}$, kurz $F_n \rightarrow F$, wenn

1. jede offene Menge G , die F trifft, bis auf endliche viele Ausnahmen auch alle F_n trifft und
2. jede kompakte Menge K , die F verfehlt, auch bis auf endliche viele Ausnahmen alle F_n verfehlt.

Für konkrete Untersuchungen sind jedoch die beiden folgenden Bedingungen günstiger:

$$\forall x \in F \exists (x_n) \text{ mit } x_n \in F_n, \text{ so da\ss } x_n \rightarrow x \quad (4.3)$$

$$\forall (x_{n_k}) \text{ mit } x_{n_k} \in F_{n_k} \text{ und } x_{n_k} \rightarrow x \text{ folgt } x \in F. \quad (4.4)$$

Hierbei besagt die zu 1. äquivalente Beziehung (4.3), daß jedes Element x von F Häufungspunkt einer Folge von Punkten in F_n ist und die zu 2. äquivalente Beziehung (4.4), daß der Häufungspunkt jeder konvergenten Teilfolge (x_{n_k}) mit Elementen in F_{n_k} Element von F ist.

Sei (F_n) eine beliebige Folge in \mathcal{F} so bezeichne $\underline{\lim} F_n$ den Schnitt beziehungsweise $\overline{\lim} F_n$ die Vereinigung aller Häufungsmengen der in \mathcal{F} konvergenten Teilfolgen von (F_n) . Eine Folge konvergiert somit genau dann, wenn $\underline{\lim} F_n = \overline{\lim} F_n$ gilt. $\underline{\lim} F_n$ ist zugleich die größte Menge in \mathcal{F} , welche (4.3) und $\overline{\lim} F_n$ die kleinste Menge, welche (4.4) erfüllt.

Eine Abbildung $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ heißt *halbstetig nach oben*, wenn für alle $K \in \mathcal{K}$ die Menge $\psi^{-1}(\mathcal{F}^K)$ offen, und *halbstetig nach unten*, wenn für alle $G \in \mathcal{G}$ die Menge $\psi^{-1}(\mathcal{F}_G)$ offen in \mathcal{F} bezüglich der Hit-Miss-Topologie ist. Hierzu äquivalent sind die nachfolgenden Beziehungen, welche die Verbindung zu den beiden Stetigkeitsbedingungen (4.3) und (4.4) herstellen. Die Abbildung $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ist

$$\text{halbstetig nach oben} \iff \overline{\lim} \psi(F_n) \subseteq \psi(F) \quad (4.5)$$

$$\text{halbstetig nach unten} \iff \psi(F) \subseteq \underline{\lim} \psi(F_n) \quad (4.6)$$

$$\text{stetig} \iff \psi(F_n) \rightarrow \psi(F) \quad (4.7)$$

für alle $F \in \mathcal{F}$ und jede konvergente Folge $F_n \rightarrow F$ erfüllt ist.

Wie sich in den nachfolgenden Abschnitten herausstellen wird sind für die Konvergenz der Approximation einige zusätzlichen Anforderungen an Ω unerläßlich. Hierzu dienen die nachfolgenden Begriffe.

Die *Minkowski-Addition* \oplus operiert auf der Potenzmenge der euklidischen Ebene und wird definiert durch $A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, wobei die Addition $a + b$ von Elementen der Mengen $A, B \subseteq \mathbb{E}^2$ in dem \mathbb{E}^2 zugrundeliegenden Vektorraum \mathbb{R}^2 durchzuführen ist. Hierzu dual ist die durch $A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$ definierte *Minkowski-Subtraktion*.

Eine kompakte Menge $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ heißt *r-regulär*, wenn sie morphologisch offen und abgeschlossen bezüglich einer abgeschlossenen Kreisscheibe K_r mit Radius $r > 0$ ist, das heißt, wenn $\Omega = (\Omega \ominus K_r) \oplus K_r = (\Omega \oplus K_r) \ominus K_r$ gilt.

r-reguläre Mengen haben die folgenden Eigenschaften [6]:

- sowohl Ω wie auch $\text{cl}(\Omega^c)$ kann als Vereinigung von abgeschlossenen Kreisscheiben mit Radius r dargestellt werden
- zu jedem Punkt von $\partial\Omega$ existiert die Tangente an $\partial\Omega$
- $\partial\Omega$ besteht lokal aus der Vereinigung endlich vieler einfach geschlossener Teilränder
- in jedem Punkt von $\partial\Omega$ ist die Krümmung definiert und der zugehörige Krümmungsradius kleiner oder gleich dem Regularitätsparameter r
- die Anzahl der Krümmungsextrema ist lokal nicht notwendigerweise endlich

Abbildung 4.2 zeigt eine r -reguläre Menge und die zugehörigen Kreisscheiben mit Radius r .

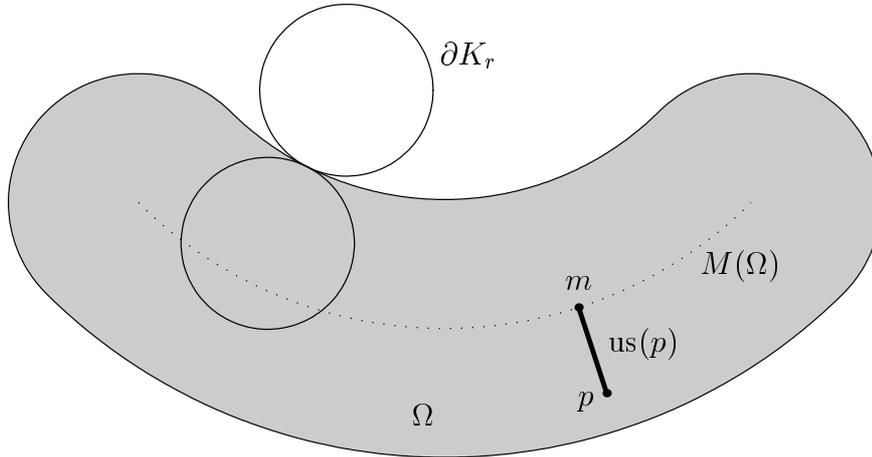


Abbildung 4.2: r -reguläre Menge und Upstream

Der *Upstream* $\text{us}(p)$ eines Punktes $p \in \Omega$ bezeichne schließlich die abgeschlossene Menge

$$\text{us}(p) := \{q \in \Omega \mid d(q, \partial\Omega) = d(q, p) + d(p, \partial\Omega)\} . \quad (4.8)$$

Er ist, wie in Abbildung 4.2 fett dargestellt, ein Geradensegment $[p, m]$ zwischen p und einem Punkt m der gepunktet abgebildeten medialen Achse $M(\Omega)$.

Bezeichne nachfolgend \mathcal{R} die Menge aller r -regulären Mengen in \mathcal{F} , deren Rand zusätzlich lokal nur endlich viele Krümmungsextrema besitzt. Für $\Omega \in \mathcal{R}$ ist die Abbildung $\text{us} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$, die jedem Punkt in Ω den zugehörigen Upstream zuordnet, stetig [6]. Darüber hinaus ist in diesem Fall die Menge aller Mittelpunkte maximaler Kreisscheiben in Ω abgeschlossen, weshalb es der in Definition (1.1) explizit geforderten Hinzunahme der Häufungspunkte zur medialen Achse nicht bedarf.

4.2 Approximation von Voronoj-Diagrammen

Die Voronoj-Bereiche wurden in (2.4) als Schnittmengen offener Halbebenen definiert. Im polygonalen Fall implizierte die endliche Anzahl der diese Halbebenen erzeugenden Elemente die Offenheit der Voronoj-Bereiche. Da im Gegensatz hierzu jedoch die Zahl der Elemente $p \in \partial\Omega$ meist überabzählbar ist und die Schnittmengen unendlich vieler offener Mengen im allgemeinen nicht offen sind, wird im Hinblick auf die durchzuführenden Konvergenzuntersuchungen die Definition der Voronoj-Bereiche leicht modifiziert.

Definition 4.1 Sei $\Omega \in \mathcal{F}$ und $p \in \partial\Omega$. Die Abbildung $V : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{F}$, welche p den zugehörigen abgeschlossenen Voronoj-Bereich zuordnet, wird definiert durch

$$V(p) := \{u \in \mathbb{E}^2 \mid d(u, p) = d(u, \partial\Omega)\} . \quad (4.9)$$

Approximiert werden soll die Menge $\widetilde{M}(\Omega)$ aller Mittelpunkte maximaler Kreisscheiben in Ω , die nach (1.1) dicht in $M(\Omega)$ liegt und deshalb vereinfachend ebenfalls als mediale Achse bezeichnet wird. Wie die Voronoj-Bereiche soll auch $\widetilde{M}(\Omega)$ mit Hilfe der euklidischen Metrik charakterisiert werden.

Eine notwendige Bedingung für die Maximalität der Kreisscheibe $K_{r_u}(u)$ in Ω ist die Maximalität des zugehörigen Radius, das heißt $r_u = d(u, \partial\Omega)$. Darüber hinaus darf es keine Kreisscheibe $K_{r_v}(v)$ um $v \in \Omega \setminus \{u\}$ mit $r_v = d(v, \partial\Omega)$ geben, für die $K_{r_u}(u) \subsetneq K_{r_v}(v)$, also $d(u, v) + r_u \leq r_v$ gilt. Dies führt zu der gesuchten Darstellung der Menge aller Mittelpunkte maximaler Kreisscheiben

$$\widetilde{M}(\Omega) := \{u \in \Omega \mid \forall v \in \Omega \setminus \{u\} : d(v, \partial\Omega) < d(v, u) + d(u, \partial\Omega)\} . \quad (4.10)$$

Hieraus folgt zusammen mit (4.8) für den Upstream der Punkte $u \in \widetilde{M}(\Omega)$ unmittelbar die Beziehung $us(u) = \{u\}$.

Sei nachfolgend $\Omega \in \mathcal{F}$, so soll nun ein Zusammenhang zwischen den Elementen des Randes $\partial\Omega$ und der medialen Achse hergestellt werden, welcher die Berechnung derselben ermöglicht. Hierzu dienen die Fuß- oder Projektionspunkte, wie sie bereits aus der alternativen Darstellung (1.3) der medialen Achse bekannt sind.

Definition 4.2 Ist $u \in \Omega$, so bezeichne

$$\text{proj}(u) := \{q \in \partial\Omega \mid d(u, q) = d(u, \partial\Omega)\} \quad (4.11)$$

die Menge aller *Projektionspunkte* von u und

$$\widetilde{M}(p) := \{u \in \widetilde{M}(\Omega) \mid p \in \text{proj}(u)\} \quad (4.12)$$

die Punkte der medialen Achse, in deren Projektion $p \in \partial\Omega$ liegt.

Da aufgrund der Abgeschlossenheit von $\partial\Omega$ jeder Punkt der medialen Achse mindestens einen Projektionspunkt besitzt, gilt

$$\widetilde{M}(\Omega) = \bigcup_{p \in \partial\Omega} \widetilde{M}(p) . \quad (4.13)$$

Für weitere Untersuchungen ist der Darstellung (4.12) wiederum eine metrische Variante vorzuziehen, die nun bereitgestellt wird.

Lemma 4.1 Ist $p \in \partial\Omega$, so gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(p) = \{u \in V(p) \cap \Omega \mid \forall v \in V(p) \cap \Omega \setminus \{u\} : \\ d(v, p) < d(v, u) + d(u, p)\} . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Beweis: Die Gleichheit der Darstellungen (4.12) und (4.14) wird durch die jeweilige Teilmengenbeziehung gezeigt.

Sei zunächst $u \in \widetilde{M}(\Omega)$. Hieraus folgt nach (4.10) $\forall v \in \Omega \setminus \{u\} : d(v, \partial\Omega) < d(v, u) + d(u, \partial\Omega)$. Die Forderung $p \in \text{proj}(u)$ impliziert $d(u, \partial\Omega) = d(u, p)$ und somit $u \in V(p)$. Wird die Wahl von v zusätzlich noch auf $V(p)$ eingeschränkt, so folgt mit $d(v, \partial\Omega) = d(v, p)$ schließlich die gewünschte Beziehung $\forall v \in V(p) \cap \Omega \setminus \{u\} : d(v, p) < d(v, u) + d(u, p)$.

Ist andererseits $u \in V(p) \cap \Omega$ und $\forall v \in V(p) \cap \Omega \setminus \{u\} : d(v, p) < d(v, u) + d(u, p)$, so folgt für $v \in V(p) \cap \Omega \setminus \{u\}$ die Gleichung $d(v, p) = d(v, \partial\Omega)$ und für $v \in \Omega \setminus V(p)$ die Ungleichung $d(v, \partial\Omega) < d(v, p)$. Beide Fälle $v \in V(p) \cap \Omega \setminus \{u\}$ und $v \in \Omega \setminus V(p)$, also $v \in \Omega \setminus \{u\}$, implizieren $d(v, \partial\Omega) < d(v, u) + d(u, \partial\Omega)$, woraus $u \in \widetilde{M}(\Omega)$ folgt. $u \in V(p) \cap \Omega$ impliziert $d(u, p) = d(u, \partial\Omega)$ und erzwingt somit noch die Zusatzbedingung $p \in \text{proj}(u)$ von (4.12). \square

Die Darstellung (4.14) besagt, daß die Suche nach dem zu $p \in \partial\Omega$ gehörenden Anteil der medialen Achse $\widetilde{M}(p)$ auf den Voronoi-Bereich von p beschränkt werden kann. Darüber hinaus ist es möglich, ohne Kenntnis der Punkte $u \in \Omega \setminus V(p)$ diese Menge $\widetilde{M}(p)$ in $V(p)$ zu identifizieren. Dies führt zu der alternativen Darstellung

$$\widetilde{M}(p) = V(p) \cap \widetilde{M}(\Omega) , \quad (4.15)$$

die den Zusammenhang zwischen dem Anteil $\widetilde{M}(p)$ der medialen Achse und dem Randpunkt p prägnant zusammenfaßt.

Das Voronoi-Diagramm führt somit wiederum zu einem natürlichen divide et impera Ansatz bei der Berechnung der medialen Achse. Da $\partial\Omega$ meist überabzählbar ist, muß jedoch das Voronoi-Diagramm selbst mit Hilfe von Teilmengen des Randes approximiert werden, zu deren Spezifikation die nachfolgende Definition dient.

Definition 4.3 Ist $\Omega \in \mathcal{F}$, so heißt die Folge $(\partial_n \Omega)$ *approximierende Randfolge*, wenn ihre Glieder $\partial_n \Omega$ n -elementige Teilmengen von $\partial \Omega$ sind und die zugehörige *Abweichung* ω_n , definiert durch

$$\omega_n := \max_{p \in \partial \Omega} d(p, \partial_n \Omega) , \quad (4.16)$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

In der Hit-Miss-Topologie impliziert $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$ die Konvergenz der Randapproximation, das heißt $\partial_n \Omega \rightarrow \partial \Omega$. Bezeichne nachfolgend $V_n : \partial_n \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ die Voronoi-Funktion, welche dem Punkt p der n -ten Randapproximation den zugehörigen Voronoi-Bereich

$$V_n(p) := \{u \in \mathbb{E}^2 \mid d(u, p) = d(u, \partial_n \Omega)\} \quad (4.17)$$

bezüglich $\partial_n \Omega$ zuordnet, so folgt aus $\partial_n \Omega \subseteq \partial \Omega$ unmittelbar

$$V(p) \subseteq V_n(p) \quad \forall p \in \partial_n \Omega . \quad (4.18)$$

Ziel ist die Konvergenz der Voronoi-Bereiche $V_n(p_n) \rightarrow V(p)$ unter den Voraussetzungen $p_n \rightarrow p$ und $\partial_n \Omega \rightarrow \partial \Omega$. In Vorbereitung hierzu bedarf es jedoch noch des folgenden Hilfsmittels.

Lemma 4.2 Ist $(\partial_n \Omega)$ eine approximierende Randfolge und $u_n \rightarrow u$ mit $u_n, u \in \Omega$, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, \partial_n \Omega) = d(u, \partial \Omega) . \quad (4.19)$$

Beweis: Die Dreiecksungleichung impliziert

$$d(u_n, \partial_n \Omega) \leq d(u_n, u) + d(u, \partial_n \Omega) . \quad (4.20)$$

Zur Abschätzung des zweiten Summanden der rechten Seite sei $p \in \partial \Omega$ ein Punkt, in dessen Voronoi-Bereich u liegt. Hieraus folgt insbesondere $d(u, p) = d(u, \partial \Omega)$. Aufgrund $\partial_n \Omega \rightarrow \partial \Omega$ gibt es eine Folge (p_n) von $p_n \in \partial_n \Omega$, die gegen p konvergiert. $d(u, \partial_n \Omega) = \min\{d(u, q) \mid q \in \partial_n \Omega\}$ impliziert die Abschätzung $d(u, \partial_n \Omega) \leq d(u, p_n)$, welche zusammen mit (4.20) für den Grenzübergang die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, \partial_n \Omega) \leq d(u, p) = d(u, \partial \Omega) \quad (4.21)$$

liefert.

Für die Abschätzung von oben ergibt wiederum die Dreiecksungleichung

$$d(u, \partial \Omega) \leq d(u, u_n) + d(u_n, \partial_n \Omega) + d(\partial_n \Omega, \partial \Omega) . \quad (4.22)$$

Als Majorante des Abstands der n -ten Randapproximation zu $\partial\Omega$ dient die in (4.16) definierte Abweichung ω_n , da

$$\begin{aligned} d(\partial_n\Omega, \partial\Omega) &= \min\{d(p, q) \mid p \in \partial_n\Omega, q \in \partial\Omega\} \\ &\leq \max_{p \in \partial\Omega} d(p, \partial_n\Omega) = \omega_n . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ implizieren (4.22), (4.23) und $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$ die Ungleichung

$$d(u, \partial\Omega) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, \partial_n\Omega) , \quad (4.24)$$

aus der zusammen mit (4.21) die zu beweisende Beziehung (4.19) folgt. \square

Dieses Lemma ermöglicht nun die gewünschte Konvergenzaussage für die Voronoi-Bereiche.

Satz 4.1 Gilt $p_n \rightarrow p$ mit $p_n \in \partial_n\Omega, p \in \partial\Omega$ für eine gegen $\partial\Omega$ konvergierende approximierende Randfolge $(\partial_n\Omega)$ und ist die Voronoi-Funktion $V : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{F}$ stetig, so folgt $V_n(p_n) \rightarrow V(p)$.

Beweis: Nachzuweisen sind die beiden Konvergenzkriterien (4.3) und (4.4).

Zunächst wird gezeigt, daß jeder Punkt u in $V(p)$ Häufungspunkt einer Folge (u_n) mit $u_n \in V_n(p_n)$ ist. Die Stetigkeit der Voronoi-Funktion V impliziert mit $p_n \rightarrow p$ die Konvergenz der Bilder $V(p_n) \rightarrow V(p)$. Demzufolge gibt es zu jedem $u \in V(p)$ eine konvergente Folge $u_n \rightarrow u$ mit $u_n \in V(p_n)$. Da $V(p_n)$ Teilmenge von $V_n(p_n)$ ist, folgt hieraus unmittelbar $u_n \in V_n(p_n)$.

Bleibt zu zeigen, daß der Häufungspunkt jeder konvergenten Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \in V_{n_k}(p_{n_k})$ in $V(p)$ liegt. Sei hierzu $u_{n_k} \rightarrow u$ eine solche konvergente Teilfolge, so folgt aus der Dreiecksungleichung

$$d(u, p_{n_k}) \leq d(u, u_{n_k}) + d(u_{n_k}, p_{n_k}) . \quad (4.25)$$

Da u_{n_k} im Voronoi-Bereich von p_{n_k} liegt, gilt $d(u_{n_k}, p_{n_k}) = d(u_{n_k}, \partial_{n_k}\Omega)$. Hieraus folgt zusammen mit (4.25) und Lemma 4.2 nach Grenzübergang $d(u, p) \leq d(u, \partial\Omega)$, weshalb u im Voronoi-Bereich $V(p)$ liegen muß. \square

Wie in dem Beweis zu sehen war hängt die Konvergenz $V_n(p_n) \rightarrow V(p)$ wesentlich von der Stetigkeit der Voronoi-Funktion $V : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{F}$ ab. Daß diese aber im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden kann illustriert das Gegenbeispiel in Abbildung 4.3.

Sei (p_n) eine gegen p konvergente Folge von Punkten auf dem offenen Segment (p, q) . $V(p_n)$ ist ein zusammenhängendes Teilstück der Normalen zu (p, q) durch p_n und wird einerseits durch $M(\Omega)$, andererseits durch die nach außen gerichtete Winkelhalbierende der konvexen Ecke begrenzt. $V(p_n)$ konvergiert gegen die in

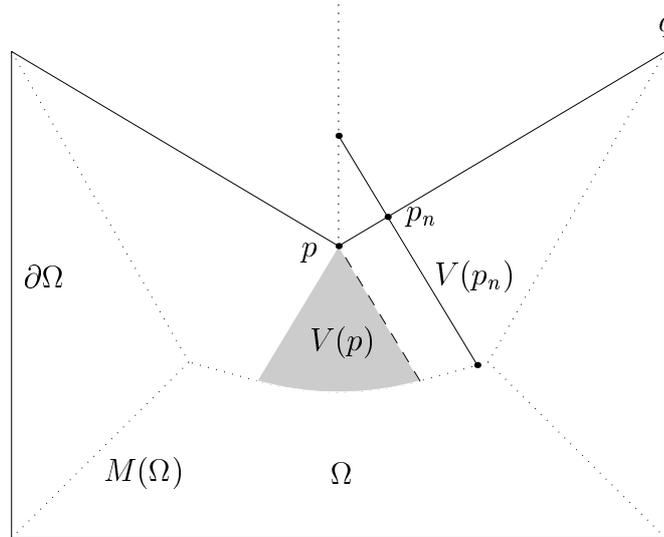


Abbildung 4.3: Beispiel einer unstetigen Voronoi-Funktion

Abbildung 4.3 gestrichelt dargestellte Voronoi-Kante von $V(p)$. Der grau hinterlegte Voronoi-Bereich des Punktes p ist jedoch weit größer als diese Häufungsmenge von $(V(p_n))$, das heißt $\underline{\lim} V(p_n)$ ist echte Teilmenge von $V(p)$. Infolgedessen ist die gezeigte Voronoi-Funktion nicht halbstetig nach unten. Jedoch gilt

Lemma 4.3 Die Voronoi-Funktion $V : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{F}$ ist halbstetig nach oben.

Beweis: Sei $p_n \rightarrow p$ mit $p_n, p \in \partial\Omega$, so ist zu zeigen, daß der Häufungspunkt u jeder konvergenten Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \in V(p_{n_k})$ in $V(p)$ liegt. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man

$$d(u, p) \leq d(u, u_{n_k}) + d(u_{n_k}, p_{n_k}) + d(p_{n_k}, p). \quad (4.26)$$

$u_{n_k} \in V(p_{n_k})$ impliziert $d(u_{n_k}, p_{n_k}) = d(u_{n_k}, \partial\Omega)$, weshalb mit der Stetigkeit der euklidischen Norm beim Grenzübergang aus (4.26) die Abschätzung $d(u, p) \leq d(u, \partial\Omega)$ und somit $u \in V(p)$ folgt. \square

Wie dem Gegenbeispiel in Abbildung 4.3 entnommen werden kann hängt die Stetigkeit der Voronoi-Funktion von der Beschaffenheit des Randes $\partial\Omega$ ab. Der nachfolgende Satz gibt eine hinreichende (nicht aber notwendige) Bedingung an, für welche Gebiete die Voronoi-Funktion stetig ist, woraus wie zuvor gezeigt, die gewünschte Konvergenz der Voronoi-Bereiche folgt.

Satz 4.2 Aus $\Omega \in \mathcal{R}$ folgt die Stetigkeit der Voronoi-Funktion $V : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{F}$.

Beweis: Da in Lemma 4.3 bereits die Halbstetigkeit nach oben gezeigt wurde, ist lediglich noch die Halbstetigkeit nach unten zu beweisen. Hierzu muß gezeigt

werden, daß für alle $p \in \partial\Omega$ mit $p_n \rightarrow p$ und $u \in V(p)$ eine Folge (u_n) mit $u_n \in V(p_n)$ existiert, so daß u_n gegen u konvergiert.

Im Falle $p = u$ kann $u_n = p_n$ gewählt werden. Sei deshalb nun $u \in V(p) \cap \text{in}(\Omega)$. Die r -Regularität von Ω impliziert, daß der Voronoi-Bereich $V(p)$ in der Normalen zu $\partial\Omega$ durch p enthalten ist [6]. Aufgrund dessen enthält $\widetilde{M}(p) = V(p) \cap \widetilde{M}(\Omega)$ nur einen einzigen Punkt, der nachfolgend mit m bezeichnet werden soll. Somit ist $u \in [p, m]$. Sei (v_n) die Folge jener Punkte entlang der nach innen gerichteten Normalen zu $\partial\Omega$ durch p_n mit $d(p_n, v_n) = \varepsilon$ und $0 < \varepsilon \ll d(p, u)$. Bedingt durch die Voraussetzungen an Ω ist die Upstream-Funktion stetig, weshalb $us(v_n)$ gegen $us(v)$ mit $v \in [p, m]$ und $d(p, v) = \varepsilon$ konvergiert. Infolgedessen existieren nach (4.3) Folgenpunkte $u_n \in us(v_n)$ mit $u_n \rightarrow u$. Diese bilden aufgrund $us(v_n) \subset V(p_n)$ die gesuchte Folge mit $u_n \in V(p_n)$ und $u_n \rightarrow u$.

Der Beweis für $u \in V(p) \cap \Omega^c$ kann durch eine analoge Konstruktion geführt werden, da $\text{cl}(\Omega^c)$ ebenfalls eine r -reguläre Menge mit lokal endlich vielen Krümmungsextrema ist. \square

Aufgrund dieser Resultate sei Ω im folgenden stets Element von \mathcal{R} , das heißt r -regulär, und die Zahl der Krümmungsextrema von $\partial\Omega$ lokal endlich. Da der Regularitätsparameter r beliebig klein sein darf ist dies in der Praxis keine zu starke Einschränkung für Ω und erlaubt so im Rahmen der Rechengenauigkeit auch die Approximation der medialen Achse polygonaler Gebiete. Jedoch verdeutlicht das Beispiel auf Seite 83 im Anhang die klare Überlegenheit der in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellten Algorithmen zur exakten Berechnung von $M(\Omega)$.

Wie in den topologischen Grundlagen bemerkt wurde gilt für r -reguläre Mengen $\widetilde{M}(\Omega) = M(\Omega)$, was nachfolgend die direkte Approximation von $M(\Omega)$ ermöglicht.

4.3 Approximation der medialen Achse

Dieser Abschnitt behandelt nun die Gewinnung einer Näherung der medialen Achse aus der Approximation des Voronoi-Diagramms $VD(\partial\Omega)$. Wie Abbildung 4.4 zeigen soll müssen dazu neben Ω auch die Glieder der approximierenden Randfolgen $\partial_n\Omega$ gewissen Mindestanforderungen genügen.

Hier weicht das Voronoi-Diagramm an jener Stelle zu sehr von der medialen Achse ab, an der sich Ω stark verjüngt. Somit ist dort eine sinnvolle Approximation von $M(\Omega)$ nicht möglich, was auf eine ungünstige Verteilung der approximierenden Randpunkte zurückzuführen ist. Folglich werden Kriterien benötigt, die eine vorhersehbare Struktur des Voronoi-Diagramms implizieren. Diese werden durch das nachfolgende Lemma gegeben. Sei dazu $\partial\Omega$ so orientiert, daß das Innere von Ω stets zur Linken liegt. Dies induziert zugleich eine Anordnung der approximierenden Randpunkte auf den Teilrändern $\partial_n\Omega_k$ von $\partial_n\Omega$.

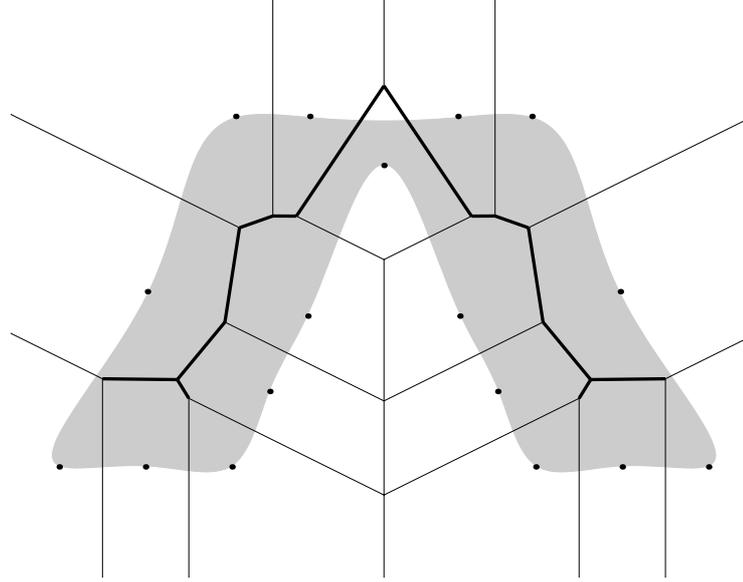


Abbildung 4.4: Zu grobe Approximation des Randes

Lemma 4.4 Ist die Approximationsgüte $\omega_n < 2r$, so teilt $p \in \partial_n \Omega_k$ mit seinem Nachfolger $q \in \partial_n \Omega_k$ eine gemeinsame Voronoi-Kante $\tilde{B}(p, q)$, welche das Teilstück $\partial\Omega_{[p,q]}$ von $\partial\Omega$ zwischen p und q genau einmal schneidet.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß alle Punkte $u \in \partial\Omega_{[p,q]}$ in $V_n(p) \cup V_n(q)$ liegen. Da Ω r -regulär ist, können sich nur diejenigen Punkte von $\partial_n \Omega$ im Inneren der Kreisscheibe $K_{2r}(u)$ befinden, die auf demselben Teilrand $\partial\Omega_k$ von $\partial\Omega$ wie p und q liegen (vergleiche Abbildung 4.5). Aus $\omega_n < 2r$ folgt $r' := \min\{d(p, u), d(q, u)\} < r$. Angenommen u ist weder in $V_n(p)$ noch in $V_n(q)$ enthalten, so muß es einen weiteren Approximationspunkt $o \in \partial_n \Omega_k$ geben, der im Inneren von $K_{r'}(u)$ liegt und für den $u \in V_n(o)$ gilt. Die r -Regularität von Ω impliziert $o \in \partial\Omega_{[p,q]}$, weshalb o im Widerspruch zur Voraussetzung Nachfolger von p sein muß.

Da $\partial\Omega_{[p,q]}$ eine stetige Kurve ist und $p \in V_n(p)$ sowie $q \in V_n(q)$ sind, muß es einen Schnittpunkt des Bisektors $B(p, q)$ mit $\partial\Omega_{[p,q]}$ geben, dessen Eindeutigkeit aus der Konvexität der Voronoi-Bereiche folgt. \square

Um jene Voronoi-Kanten, welche die mediale Achse approximieren, kennzeichnen zu können, werden die Voronoi-Kanten von $V_n(p)$ nach dem folgenden, in Abbildung 4.6 dargestellten Schema bezeichnet.

Sei $\tilde{B}_{p,1} := \tilde{B}(p, q)$ die Voronoi-Kante des Punktes p mit dessen Nachfolger q in $\partial_n \Omega$. Durchläuft man das Voronoi-Polygon von p gegen den Uhrzeigersinn, so werden die auf $\tilde{B}_{p,1}$ folgenden Voronoi-Kanten mit $\tilde{B}_{p,2}, \dots, \tilde{B}_{p,k_p}$ bezeichnet, wobei \tilde{B}_{p,k_p} die Voronoi-Kante von p mit dessen Vorgänger o sei. Die Knoten $v_{p,l}$ dieses Teil-Voronoi-Polygons sind gegeben durch $v_{p,l} := \tilde{B}_{p,l} \cap \tilde{B}_{p,l+1}$.

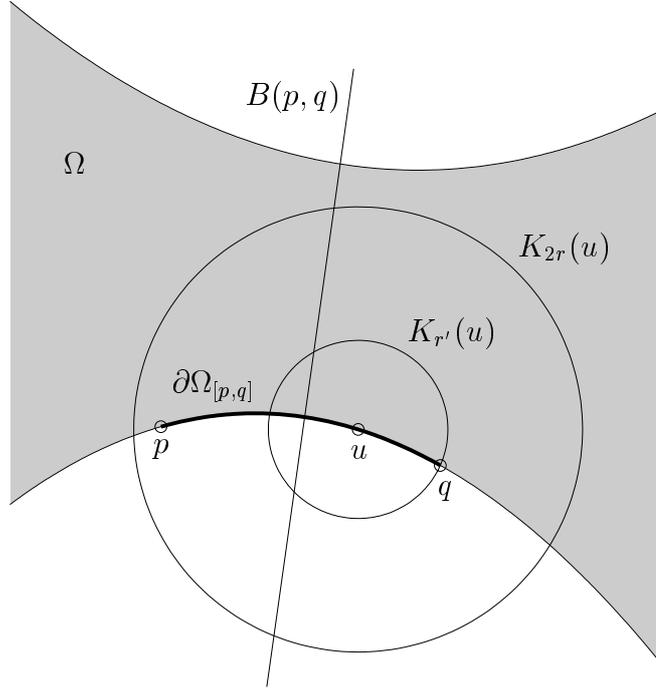


Abbildung 4.5: Skizze zum Beweis von Lemma 4.4

Diese Kennzeichnungen ermöglichen die Definition der folgenden, für die Approximation der medialen Achse relevanten, Mengen.

Definition 4.4 Jener Anteil $\widetilde{M}_n(p)$ des Voronoi-Polygons $V_n(p)$ von $p \in \partial_n \Omega$, der die mediale Achse approximiert, wird definiert als

$$\widetilde{M}_n(p) := \left(\bigcup_{l=2}^{k_p-1} \widetilde{B}_{p,l} \right) \cup v_{p,1} . \quad (4.27)$$

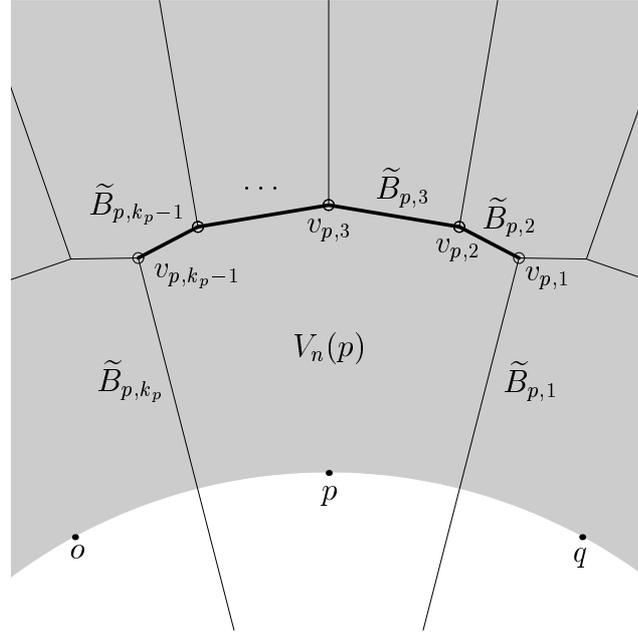
Die Gesamtheit dieser Anteile bildet die *approximierte mediale Achse* $M_n(\partial_n \Omega)$ mit

$$M_n(\partial_n \Omega) := \bigcup_{p \in \partial_n \Omega} \widetilde{M}_n(p) . \quad (4.28)$$

Schließlich bezeichne

$$\Omega^n := \bigcup_{m \in M_n(\partial_n \Omega)} K_{d(m, \partial_n \Omega)}(m) . \quad (4.29)$$

jene Näherung von Ω , welche aus der approximierten medialen Achse rekonstruiert werden kann.

Abbildung 4.6: Bezeichner der $M(\Omega)$ approximierenden Segmente von $V_n(\partial_n \Omega)$

Die explizite Hinzunahme des Voronoi-Polygonknotens $v_{p,1}$ in (4.27) wird für den Fall $k_p = 2$ benötigt. So bildet zum Beispiel bei der Approximation der medialen Achse einer Kreisscheibe mit Hilfe äquidistant auf dem Kreisrand verteilter Approximationspunkte gerade dieser Punkt die mediale Achse und ist zugleich Schnittpunkt aller Voronoi-Kanten.

Im folgenden soll nun bewiesen werden, daß die approximierte mediale Achse $M_n(\partial_n \Omega)$ gegen die gesuchte mediale Achse $M(\widetilde{\Omega})$ konvergiert. Hierzu wird im ersten Schritt gezeigt, daß die einzelnen Anteile $\widetilde{M}_n(p)$ konvergieren.

Lemma 4.5 Ist $\Omega \in \mathcal{R}$, $p_n \in \partial_n \Omega$, $p \in \partial \Omega$ und $p_n \rightarrow p$, so konvergiert $\widetilde{M}_n(p_n)$ gegen $\widetilde{M}(p)$.

Beweis: Betrachtet wird zunächst die Folge der Punkte $v_{p_n,1}$, die nach Definition 4.4 in $\widetilde{M}_n(p_n)$ enthalten sind. $v_{p_n,1}$ ist als Knoten des Voronoi-Diagramms $VD(\partial_n \Omega)$ in mindestens drei verschiedenen Voronoi-Bereichen von Punkten aus $\partial_n \Omega$ enthalten. Diese liegen wiederum alle auf dem Rand der Kreisscheibe $K_v := K_{d(v_{p_n,1}, \partial_n \Omega)}(v_{p_n,1})$, weshalb es keine weitere K_v umfassende Kreisscheibe in $\partial_n \Omega$ geben kann. Infolgedessen ist K_v maximal. $\widetilde{M}_n(p_n)$ ist Teilmenge des Voronoi-Bereichs $V_n(p_n)$, der aufgrund der Voraussetzungen gegen $V(p)$ strebt. Wie zuvor im Beweis von Satz 4.2 schon erwähnt wurde enthält $V(p) \cap M(\Omega)$ wegen $\Omega \in \mathcal{R}$ genau einen Punkt m . Die Maximalität von K_v impliziert die Konvergenz von $(v_{p_n,1})$ gegen m , dem einzigen Mittelpunkt einer maximalen Kreisscheibe in

$V(p)$. Ein vollkommen analoger Beweis kann für alle weiteren Voronoi-Knoten in $\widetilde{M}_n(p_n)$ geführt werden. Da diese Knotenfolgen ebenfalls gegen m streben gilt dies auch für alle Punkte der Segmente $\widetilde{B}_{p_n,2}$ bis $\widetilde{B}_{p_n,k_{p_n}-1}$, da diese durch die besagten Knoten begrenzt sind. Das heißt: für jede Folge m_n von Punkten $m_n \in \widetilde{M}_n(p_n)$ gilt $m_n \rightarrow m$ und insbesondere $v_{p_n,1} \rightarrow m$, womit die beiden Konvergenzkriterien (4.3) und (4.4) bewiesen sind. \square

Dieses Lemma erlaubt nun schließlich die Konvergenzaussage für die gesamte approximierende mediale Achse.

Satz 4.3 Ist $\Omega \in \mathcal{R}$ und konvergiert die approximierende Randfolge $(\partial_n \Omega)$ gegen $\partial \Omega$, so gilt $M_n(\partial_n \Omega) \rightarrow M(\Omega)$.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß zu jedem Punkt $m \in M(\Omega)$ eine Folge (m_n) mit $m_n \in M_n(\partial_n \Omega)$ und $m_n \rightarrow m$ existiert. Sei $p \in \text{proj}(m) \subseteq \partial \Omega$, so gilt $M(\Omega) \cap V(p) = \{m\}$. Außerdem gibt es aufgrund $\partial_n \Omega \rightarrow \partial \Omega$ eine Folge $p_n \rightarrow p$, mit $p_n \in \partial_n \Omega$. Wählt man zu dieser speziell $m_n = v_{p_n,1} \in \widetilde{M}_n(p_n)$, so folgt nach Lemma 4.5 $m_n \rightarrow m$.

Bleibt nachzuweisen, daß die Häufungspunkte konvergenter Teilfolgen (m_{n_k}) mit $m_{n_k} \in M_{n_k}(\partial_{n_k} \Omega)$ in $M(\Omega)$ liegen. Nach Gleichung (4.28) gibt es zu jedem m_{n_k} ein $p_{n_k} \in \partial_{n_k} \Omega$, so daß $m_{n_k} \in \widetilde{M}_{n_k}(p_{n_k})$. Die $\widetilde{M}_{n_k}(p_{n_k})$ verdichten sich aufgrund Lemma 4.5 für $n_k \rightarrow \infty$ zu einelementigen Mengen, weshalb die Konvergenz von (m_{n_k}) die Konvergenz von (p_{n_k}) also $p_{n_k} \rightarrow p$ impliziert, so daß m_{n_k} gegen $m \in V(p) \cap M(\Omega)$ und somit in $M(\Omega)$ selbst konvergiert. \square

Von Interesse ist noch eine Abschätzung für den Fehler der Approximation. Als Maß hierfür wird die Abweichung der rekonstruierten Menge Ω^n von der Ausgangsmenge Ω gewählt.

Definition 4.5 Sei $\Omega \in \mathcal{R}$, so heißt die Größe

$$\varepsilon_n := \max_{p \in \partial \Omega^n} d(p, \partial \Omega) . \quad (4.30)$$

Rekonstruktionsfehler der n -ten Approximation.

Ein wichtige Rolle bei der nachfolgenden Fehlerabschätzung spielt die Tatsache, daß die Punkte der approximierenden Randfolgen ebenfalls auf dem Rand der Rekonstruktion Ω^n liegen, das heißt

Lemma 4.6 Es ist $\partial_n \Omega \subset \partial \Omega^n$.

Beweis: Aus $p \in \partial_n \Omega$ folgt für alle m in $M_n(\partial_n \Omega)$ die Beziehung $d(m, \partial_n \Omega) = \min_{q \in \partial_n \Omega} d(m, q) \leq d(m, p)$, weshalb p , sofern es in Ω^n enthalten ist, nach (4.29) auf $\partial \Omega^n$ liegen muß. $v_{p,1} \in \widetilde{M}_n(p) \subset V(p)$ impliziert $d(v_{p,1}, p) = d(v_{p,1}, \partial_n \Omega)$, woraus mit $p \in K_{d(v_{p,1}, \partial_n \Omega)}(v_{p,1})$ nach Definition 4.4 auch $p \in \Omega^n$ folgt. \square

Dieses Lemma findet nun bei der eigentlichen Abschätzung des Rekonstruktionsfehlers Verwendung.

Satz 4.4 Erfüllt die Abweichung ω_n der Randapproximation $\partial_n\Omega$ die Beziehung $\omega_n < r$, so gilt für den Rekonstruktionsfehler

$$\varepsilon_n \leq \frac{\omega_n^2}{r}. \quad (4.31)$$

Beweis: Da nach Lemma 4.6 die approximierenden Randpunkte in $\partial_n\Omega$ exakt rekonstruiert werden genügt es, die Fehlerbetrachtung auf die Punkte u , zwischen jenen beiden benachbarten Punkten $p, q \in \partial_n\Omega$ zu beschränken, welche die maximale Abweichung ω_n erzeugen. Sei $R := d(p, v_{p,1})$, so liegen diese u auf dem Rand der Kreisscheibe $K_R(v_{p,1})$ (Abbildung 4.7).

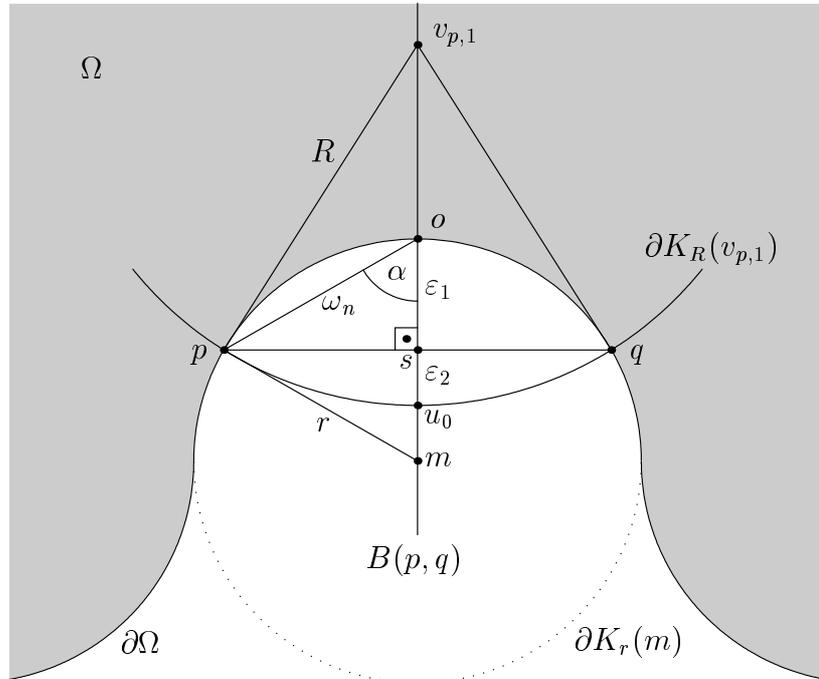


Abbildung 4.7: maximaler Rekonstruktionsfehler

Aufgrund $\omega_n < r$ verläuft $\partial\Omega$ innerhalb jener Linse, welche durch den Schnitt der beiden Kreisscheiben mit Radius r , auf deren Rändern p und q liegen, definiert ist. Sei u_0 der Schnittpunkt von $B(p, q)$ und $\partial\Omega$, so wird der Fehler $d(u_0, \partial\Omega)$ genau dann maximal, wenn $\partial\Omega_{[p,q]}$ Teil eines Kreises mit Radius r ist. Bezeichne o den Schnittpunkt von $B(p, q)$ mit $\partial\Omega$, so gilt in diesem Fall $d(u_0, \partial\Omega) = d(u_0, o) =: \varepsilon$.

Die Berechnung von ε erfolgt mit Hilfe der beiden Teilabstände $\varepsilon_1 := d(o, s)$ und $\varepsilon_2 := d(s, u_0)$, wobei s den Schnittpunkt von $[p, q]$ und $B(p, q)$ bezeichne.

Darüber hinaus sei α der Winkel zwischen $[o, p]$ und $[o, m]$. Für den Abstand der beiden Punkte p und o gilt aufgrund der Voraussetzungen an p und q $d(p, o) = \omega_n$. Im Dreieck opm folgt mit Hilfe des Kosinussatzes $\cos \alpha = \omega_n/(2r)$. Entsprechend ergibt sich im Dreieck ops aus $\cos \alpha = \varepsilon_1/\omega_n$ die Beziehung

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_n^2}{2r}. \quad (4.32)$$

Im gleichen Dreieck liefert der Satz des Pythagoras $d(p, s) = \sqrt{\omega_n^2 - \omega_n^4/(4r^2)}$. Hieraus folgt, zusammen mit $(R - \varepsilon_2)^2 + d(p, s)^2 = R^2$ (Pythagoras im Dreieck $v_{p,1}ps$),

$$\varepsilon_2 = R - \sqrt{R^2 - \omega_n^2 + \frac{\omega_n^4}{4r^2}}, \quad (4.33)$$

womit für $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ folgt

$$\varepsilon = \frac{\omega_n^2}{2r} + R - \sqrt{R^2 - \omega_n^2 + \frac{\omega_n^4}{4r^2}}. \quad (4.34)$$

Wird R kleiner, so vergrößert sich der Teilfehler ε_2 . Die r -Regularität von Ω impliziert $R \geq r$. Dies ergibt im Grenzfall $R = r$ zusammen mit (4.34)

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \frac{\omega_n^2}{2r} + r - \sqrt{\frac{4r^4 - 4r^2\omega_n^2 + \omega_n^4}{4r^2}} \\ &\leq \frac{\omega_n^2}{2r} + \frac{2r^2}{2r} - \frac{2r^2 - \omega_n^2}{2r}, \end{aligned}$$

woraus schließlich die zu beweisende Beziehung (4.31) folgt. \square

4.4 Algorithmus

Die Untersuchungen des vorhergehenden Abschnitts münden nun in den Algorithmus 4.1 zur Berechnung der approximierten medialen Achse. Die Eingabedaten bestehen aus den n Punkten der Randapproximation $\partial_n\Omega$ und der zugehörigen Nachbarschaftsrelation.

function $M_n(\partial_n\Omega) = \text{ApproximierteMedialeAchse}(\partial_n\Omega)$

1. berechne $VD(\partial_n\Omega)$
2. extrahiere $M_n(\partial_n\Omega)$ aus $VD(\partial_n\Omega)$

Algorithmus 4.1: Berechnung der approximierten medialen Achse

Im ersten Schritt wird zunächst das Voronoi-Diagramm der approximierenden Randpunkte berechnet. Da die Berechnung des Voronoi-Diagramms einer Punktmenge zu den Standardaufgaben der computerorientierten Geometrie zählt und

das zugehörige Grundprinzip bereits mit Algorithmus 2.1 auf Seite 27 vorgestellt wurde, erfolgt nun lediglich eine informelle Übersicht der dazu benötigten Schritte. Eine genau Beschreibung sowie die zugehörigen theoretischen Grundlagen können den Werken von Preparata/Shamos [32] oder Aumann/Spitzmüller [2] entnommen werden.

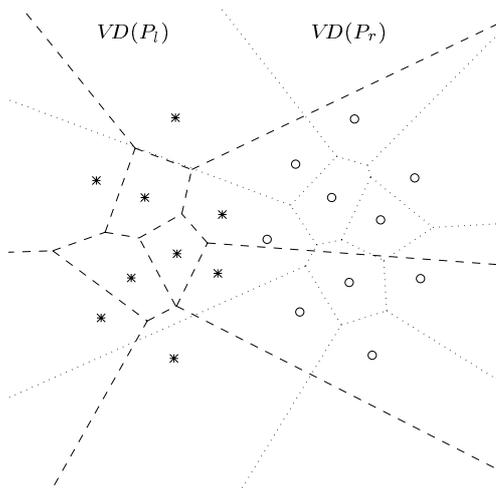
Ausgangspunkt ist die Menge P von n Punkten der euklidischen Ebene. Diese wird in zwei etwa gleich große Teilmengen P_l und P_r geteilt, wobei die x -Koordinaten der Punkte in P_l stets kleiner sind als diejenigen der Punkte in P_r . Nun werden rekursiv die beiden Voronoi-Teildiagramme $VD(P_l)$ und $VD(P_r)$ berechnet, die anschließend wieder zusammengefügt werden müssen. Dies erfolgt durch Konstruktion des zugehörigen Merge-Bisektors $B(P_l, P_r)$. Das Grundprinzip ähnelt auch hier stark dem polygonalen Fall und soll mit Hilfe der Abbildung 4.8 erläutert werden.

Gegeben sind die oben links dargestellten Voronoi-Teildiagramme $VD(P_l)$ (gestrichelt) und $VD(P_r)$ (gepunktet). $B(P_l, P_r)$ setzt sich aus Teilbisektoren vom Typ $\tilde{B}(p_l, p_r)$ zusammen, wobei $p_l \in P_l$ und $p_r \in P_r$ ist. Im Gegensatz zum polygonalen Fall ist zunächst ein geeignetes Startsegment für $B(P_l, P_r)$ zu finden. Hierzu dienen die beiden konvexen Hüllen $CH(P_l)$ und $CH(P_r)$. Bezeichnen $s_u = (p_{l,u}, p_{r,u})$ und $s_o = (p_{l,o}, p_{r,o})$ die beiden Segmente, welche zur Konstruktion von $CH(P)$ aus $CH(P_l)$ und $CH(P_r)$ benötigt werden, so beginnt $B(P_l, P_r)$ mit einem Segment des Bisektors $B(p_{l,u}, p_{r,u})$ und endet mit einem Segment des Bisektors $B(p_{l,o}, p_{r,o})$ (Abbildung 4.8 rechts oben).

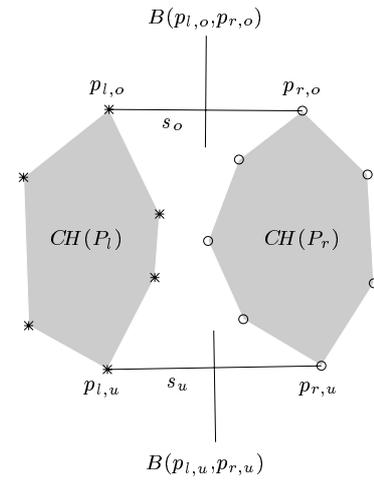
Analog zum polygonalen Fall (vergleiche Seite 29) wird nun, beginnend mit $B(p_{l,u}, p_{r,u})$, der Merge-Bisektor $B(P_l, P_r)$ konstruiert. Hierzu wird der erste Schnittpunkt mit einem Bisektor der beiden Voronoi-Teildiagramme gesucht. Im Beispiel ist dies der Bisektor von $p_{r,u}$ mit einem weiteren Punkt q der rechten Teilmenge P_r . Infolgedessen wird das rechte Element ausgetauscht und $B(P_l, P_r)$ mit $B(p_{l,u}, q)$ fortgesetzt. Dieser Bisektor schneidet wiederum $\tilde{B}(p_{l,u}, v)$, weshalb nun das linke Element gewechselt, der Merge-Bisektor also durch $B(v, q)$ fortgesetzt wird. Dieses „Reißverschlußverfahren“ wird bis zum Erreichen des Schlußbisektor $B(p_{l,o}, p_{r,o})$ iteriert. Der resultierende Merge-Bisektor ist in Abbildung 4.8 unten links fett hervorgehoben. Zuletzt sind noch die Anteile von $VD(P_l)$, die rechts, und die Anteile von $VD(P_r)$, die links des Merge-Bisektors liegen, zu entfernen. Das resultierende Voronoi-Diagramm $VD(P)$ ist unten rechts dargestellt.

Dem Voronoi-Diagramm $VD(\partial_n \Omega)$ können nun im zweiten Schritt des Algorithmus 4.1 jene Kanten entnommen werden, die die mediale Achse approximieren. Nach Definition 4.4 und Satz 4.3 sind dies für $p \in \partial_n \Omega$ gerade $\tilde{B}_{p,2}, \dots, \tilde{B}_{p,k_p-1}$, also jene Voronoi-Kanten von $V_n(p)$, die ganz in Ω liegen.

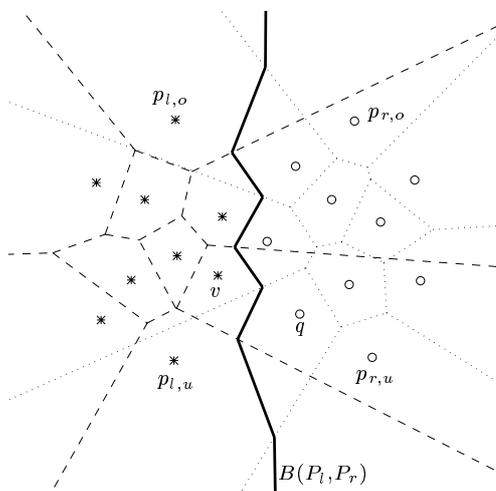
Ein besonderer Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß die Approximationspunkte verschiedener Teilränder von $\partial \Omega$ bei der Berechnung des zugehörigen Voronoi-Diagramms nicht unterschieden werden müssen. Vielmehr wird die zu den Punkten gehörende Nachbarschaftsrelation erst bei der Identifizierung der zu extrahierenden Voronoi-Kanten benötigt. Dies schlägt sich auch in der Komple-



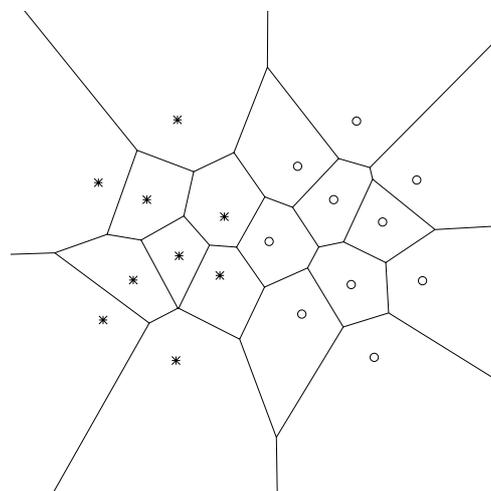
Voronoi-Teildiagramme



Start- und End-Teilbisektor



Konstruktion des Merge-Bisektors



Voronoi-Diagramm

Abbildung 4.8: Konstruktion des Merge-Bisektors

xität des Algorithmus 4.1 nieder, für die gilt:

Satz 4.5 Die Berechnung der approximierten medialen Achse $M_n(\partial_n\Omega)$ mit Hilfe einer n -elementigen Randapproximation $\partial_n\Omega$ benötigt $\mathcal{O}(n \text{ ld } n)$ Operationen.

Beweis: Wie sich analog zum polygonalen Fall beweisen läßt erfordert die Berechnung des Voronoi-Diagramms von n Punkten $\mathcal{O}(n \text{ ld } n)$ Operationen [32].

Zur Identifizierung der die mediale Achse approximierenden Voronoi-Kanten werden zu jedem Punkt $p \in \partial_n\Omega$ die zugehörigen Voronoi-Kanten in $V_n(p)$ höchstens einmal überstrichen. Da jede Kante in genau zwei Voronoi-Bereichen liegt, ist die Laufzeit für den zweiten Schritt des Algorithmus 4.1 linear in der Anzahl der Voronoi-Kanten. Analog zum Beweis von Satz 2.3 folgt auch hier mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes, daß diese $\mathcal{O}(n)$ ist. Folglich wird die Laufzeit des Algorithmus 4.1 durch die Komplexität des ersten Schrittes dominiert. \square

4.5 Anmerkungen

Da bei zunehmender Dichte der Approximationspunkte auch die Zahl der die mediale Achse approximierenden Segmente zunimmt, diese jedoch immer kürzer werden, bietet es sich für die weitere Verarbeitung an, die Teilsegmente durch eine Spline-Approximation zu ersetzen. Abzuwägen ist dabei der verringerte Speicherbedarf gegen den durch die zusätzliche Approximation hinzukommenden Fehler.

Ein andere Möglichkeit die Datenmenge zu reduzieren, ohne dabei Verluste in der Approximationsgüte hinnehmen zu müssen, ist die adaptive Verteilung der Approximationspunkte auf dem Rand. Hierbei werden auf jenen Randabschnitten mehr Punkte verteilt, deren zugehörige mediale Achse eine starke Krümmung aufweist. Dazu kann zunächst die mediale Achse durch äquidistant auf dem Rand verteilte Punkte angenähert werden. Anschließend sind die Winkel zwischen inzidierenden Voronoi-Kanten zu betrachten. Unterschreiten diese einen Toleranzwert, so sind weitere Approximationspunkte auf denjenigen Randsegmenten zu verteilen, die in den Voronoi-Bereichen der Punkte liegen, welche die Kanten erzeugen. Vorteilhaft ist hierbei auch, daß das resultierende verfeinerte Voronoi-Diagramm mit Hilfe eines inkrementellen Verfahrens nur lokal neu berechnet werden muß. Zwar sind diese inkrementellen Algorithmen, welche jeden Punkt einzeln in ein bestehendes Voronoi-Diagramm einfügen, nicht optimal, doch erreichen sie mit Hilfe von Hash-Tabellen eine nahe an die optimale Laufzeit heranreichende Performance [6].

Anhang A

Implementierung

A.1 Mediale Achsen polygonaler Gebiete

A.1.1 Datenstruktur

Die in Kapitel 2 und 3 vorgestellten Algorithmen wurden alle in MATLAB [27] implementiert. Die dabei zu verwaltenden geometrischen Objekte – Knoten, Geraden- und Parabelsegmente – werden in ihrer jeweiligen Bézierdarstellung [19] gespeichert. Diese bietet folgende Vorteile:

- Die Endpunktinterpolationseigenschaft der Bézierdarstellung ermöglicht exakte Übergänge der einzelnen Segmente.
- Das kanonische Parametergebiet $[0, 1]$ führt zu gut konditionierten polynomialen Gleichungssystemen, die beim Schnitt von Bisektoren zu lösen sind.
- Bei der Konstruktion der Voronoi-Diagramme ist teilweise eine Umorientierung von Segmenten erforderlich, welche durch Vertauschen der Kontrollpunkt-Reihenfolge erfolgen kann.
- Die Tangentialrichtungen an den Segmentenden, die zur Lagebestimmung von Punkten benötigt werden, ergeben sich direkt aus den Kontrollpunkten.
- Beim Bisektorenschnitt ist der Schnittpunkt selbst Kontrollpunkt der restringierten Bisektoren. Zusätzlich ist höchstens ein weiterer Kontrollpunkt mittels einem de Casteljau-Schritt neu zu berechnen.

Sofern beim Schnitt der Bisektoren mindestens ein Parabelsegment beteiligt ist, wird das Lösen des zugehörigen polynomialen Gleichungssystems mit Hilfe der Bezout-Resultante [19] auf die Nullstellenberechnung eines Polynoms vom Grad ≤ 4 zurückgeführt. Aufgrund der dabei vorhandenen numerischen Ungenauigkeiten und der zwangsläufig anfallenden Diskretisierungsfehler müssen Schnitt- und Endpunkte innerhalb einer gewissen Toleranzumgebung identifiziert werden.

Dementsprechend sind auch die zugehörigen Parameterwerte der Béziersegmente anzupassen, die sich nur im kanonischen Parameterintervall $[0, 1]$ bewegen dürfen.

Da die bei der Berechnung der medialen Achse zu konstruierenden Voronoi-Teildiagramme unbeschränkt sind, jedoch nur jene Segmente interessieren, die im Inneren des von $\partial\Omega_0$ beschränkten Gebiets liegen, genügt es, die Berechnungen auf eine $\partial\Omega_0$ umfassende bounding box einzugrenzen.

MATLAB stellt als einziges Datenformat Matrizen beliebiger Dimension zur Verfügung. Deshalb werden alle Objekte in der festen Form eines 10×1 -Vektors \mathbf{o} gespeichert. Hierbei enthält das erste Element $\mathbf{o}(1)$ das Typkennzeichen des gespeicherten Objekts. Für die Bisektoren werden Geraden- (Typ=1) und Parabelsegmente (Typ=2) benötigt. Da der Rand des Ausgangsgebietes programmintern ebenfalls in Objekte zerlegt wird, gibt es für die Knoten zusätzlich den Typ 0. Die nachfolgenden drei Zahlenpaare $\mathbf{o}(2:3) =: p_0$, $\mathbf{o}(4:5) =: p_1$ sowie $\mathbf{o}(6:7) =: p_2$ dienen zur Speicherung der Bézier-Kontrollpunkte. Bei Geradensegmenten wird in dem nicht benötigten dritten Kontrollpunkt p_2 der zugehörige Richtungsvektor $p_1 - p_0$ abgelegt. Im Bisektorfall enthalten $\mathbf{o}(8)$ und $\mathbf{o}(9)$ die Nummern des linken und rechten Elements, welche den Bisektor bilden. Dagegen ist der Elementfall durch $\mathbf{o}(8) = \mathbf{o}(9)$ gekennzeichnet. Schließlich klassifiziert $\mathbf{o}(10)$ den Typ des Bisektors anhand der erzeugenden Elemente. Unterschieden werden hier

$\mathbf{o}(10)$	Bisekortyp
1	Knoten-Knoten-Bisektor
2	linearer Knoten-Segment-Bisektor
3	Segment-Segment-Bisektor
4	parabolischer Knoten-Segment-Bisektor

Hierbei sind die Bisektoren vom Typ 2 genau jene, die mit den reflexen Knoten des Polygons inzidieren. Infolgedessen besteht $VD(\partial\Omega) \setminus M(\Omega)$ genau aus den Bisektoren vom Typ 2.

A.1.2 Syntax

Die Syntax der MATLAB-Funktion `medaxpoly` zur Berechnung der medialen Achse eines polygonal berandeten Gebietes lautet

```
[M, V, OP, OI] = medaxpoly(P, I)
[M, V, OP, OI] = medaxpoly(P, I, DebugLevel)
```

P ist die $2 \times N$ -Matrix der Knoten aller Polygone $\partial\Omega_0, \dots, \partial\Omega_H$. Dabei entspricht eine Spalte von P je einem Knoten, dessen x -Koordinate in der ersten und die y -Koordinate in der zweiten Zeile gespeichert wird. Die Knoten jedes Polygons $\partial\Omega_i$ müssen in P aufeinanderfolgend abgespeichert sein und werden durch je eine Spalte der $2 \times (H + 1)$ -Indexmatrix I indiziert. $I(1, 1)$ ist der erste, $I(2, 1)$ der letzte Knoten des äußeren Randes. Analog erfolgt die Indizierung der inneren Ränder $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_H$ durch $I(1:2, 2:H+1)$. Die Redundanz in der zweiten

Zeile von I ermöglicht somit die Speicherung weiterer Informationen in den nicht indizierten Spalten beziehungsweise Zeilen von P .

Ausgegeben wird die $(10 \times \cdot)$ -Objektmatrix M der medialen Achse $M(\Omega)$. Die einzelnen Segmente sind dabei in der zuvor beschriebenen Objekt-Form gespeichert. Auf Wunsch gibt die Funktion `medaxpoly` zusätzlich die Objektmatrix V des zugehörigen Voronoi-Diagramms zurück, wobei eine Spalte von V einer Voronoi-Kante entspricht. OP ist schließlich die in Objektform umgewandelte und durch OI indizierte Matrix der Polygone, welcher die Nummern der einzelnen Elemente in $\partial\Omega$ entnommen werden können.

Über den optionalen Parameter `DebugLevel` $\in \mathbb{N}_0$ kann zusätzlich bestimmt werden, in welchem Umfang Informationen über den aktuellen Berechnungsstand auszugeben sind. Je größer `DebugLevel` gewählt wird, umso detaillierter ist die meist graphische Darstellung der Zwischenergebnisse. Zur Verfügung stehen dabei die folgende Werte:

DebugLevel	Wirkung
0	keine Informationen (default)
1	graphische Ausgabe der medialen Achse
2	zeigt die Voronoi-Diagramme der einzelnen Polygone an
3	schrittweise Konstruktion der Merge-Bisektoren
> 3	zusätzliche numerische Informationen der Teilfunktionen

Dabei umfaßt die Stufe n stets auch alle Informationen der vorhergehenden Stufen 1 bis $n - 1$.

A.1.3 Beispiele

Beispiel 1

Die Knotenmatrix P und die zugehörige Indexmatrix I des in Abbildung 3.1 auf Seite 37 gezeigten mehrfach zusammenhängenden polygonalen Gebietes sind

$P =$

Columns 1 through 12

46	12	3	11	44	89	97	78	35	24	36	53
90	78	55	23	4	13	53	84	72	58	45	57

Columns 13 through 22

53	39	59	73	83	82	73	68	63	53
72	63	38	45	33	24	29	19	27	30

$I =$

1	9	15
8	14	22

Hierbei besteht $\partial\Omega$ aus den drei in der nachfolgenden Tabelle aufgelisteten einfachen Polygonen.

Rand	Speicherbereich	Knoten
$\partial\Omega_0$	P(:, 1: 8)	(46 90), ..., (78 84)
$\partial\Omega_1$	P(:, 9:14)	(35 72), ..., (39 63)
$\partial\Omega_2$	P(:, 15:22)	(59 38), ..., (53 30)

Beim Aufruf $[M, V, OP, OI] = \text{medaxpoly}(P, I, 2)$ werden neben der medialen Achse sowohl die Voronoi-Diagramme der inneren Ränder (vergleiche Abbildung 3.4 auf Seite 45) als auch die Voronoi-Diagramme nach dem Einfügen der einzelnen inneren Ränder (Abbildung A.1) angezeigt.

Die resultierende Objektmatrix M der medialen Achse lautet auszugsweise

```

M =
  1.0000    1.0000    2.0000    2.0000    1.0000    2.0000
 63.0000   73.0000   82.5155   70.5910   66.8197   66.5967
 27.0000   29.0000   52.9295   62.4253   57.3607   57.0000
 55.8453   76.2996   70.5910   66.8197   66.5967   58.7063
 17.6240   18.3341   62.4253   57.3607   57.0000   48.9161
 -7.1547    3.2996   78.3288   68.3847   -0.2229   63.2987
 -9.3760  -10.6659   58.7656   59.8930   -0.3607   51.6637
 32.0000   44.0000   39.0000   39.0000   38.0000   38.0000
 34.0000   30.0000   14.0000   20.0000   20.0000   21.0000
  3.0000    3.0000    4.0000    4.0000    3.0000    4.0000 ...

```

Hierbei ist zum Beispiel der erste Teilbisektor ein von den Elementen 32 und 34 gebildetes Geradensegment zwischen den Punkten (63|27) und (55.8453|17.6240). M ist eine Teilmatrix von V , die durch das Entfernen der Bisektoren vom Typ 2 entsteht. So wird von dem nachfolgenden Ausschnitt der Voronoi-Matrix V nur das dritte Objekt, ein Segment-Segment-Bisektor, übernommen.

```

V =
  1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
 68.0000   68.0000   63.0000   53.0000   53.0000   59.0000
 19.0000   19.0000   27.0000   30.0000   30.0000   38.0000
 73.5429   61.7331   55.8453   49.3785   43.9576   51.2184
 16.2285   15.0832   17.6240   17.9284   36.7818   43.8362
  5.5429   -6.2669   -7.1547   -3.6215   -9.0424   -7.7816
 -2.7715   -3.9168   -9.3760  -12.0716    6.7818    5.8362
 30.0000   31.0000   32.0000   34.0000   35.0000   36.0000
 31.0000   32.0000   34.0000   35.0000   36.0000   37.0000
  2.0000    2.0000    3.0000    2.0000    2.0000    2.0000 ...

```

Die zu den in der 8. und 9. Zeile gespeicherten Nummern gehörenden Randelemente können der Elementmatrix OP entnommen werden. Sie repräsentiert den

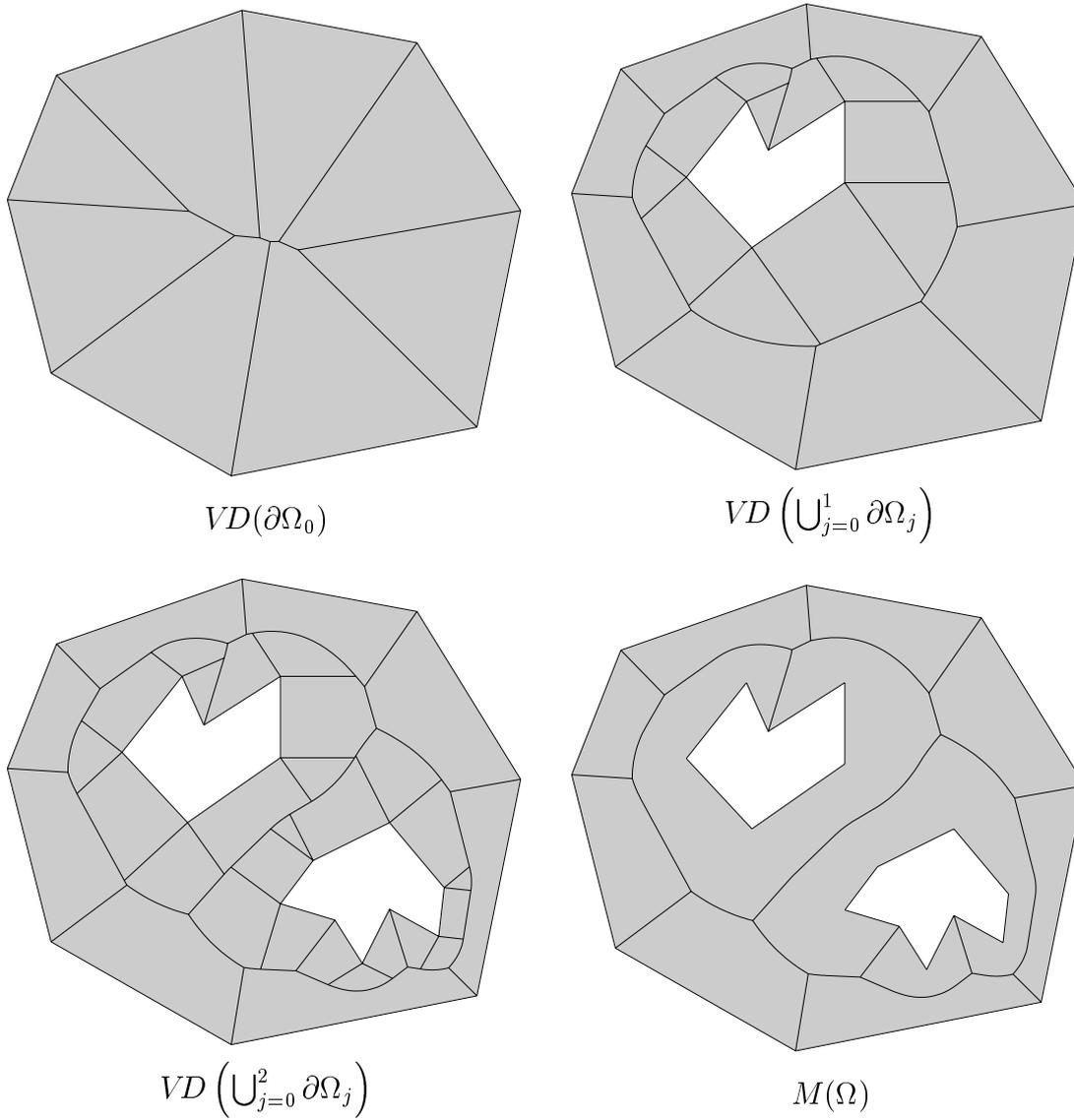


Abbildung A.1: sukzessive Hinzunahme innerer Voronoi-Diagramme

Rand in Objektform.

OP =

0	1	0	1	0	1	0	1	0
46	46	12	12	3	3	11	11	44
90	90	78	78	55	55	23	23	4
1	12	1	3	1	11	1	44	1
0	78	0	55	0	23	0	4	0
0	-34	0	-9	0	8	0	33	0
0	-12	0	-23	0	-32	0	-19	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0 ...

Zusätzlich gibt der Eintrag in der vierten Zeile von OP bei Knotenobjekten (Typ 0 in der ersten Zeile) an, ob es sich um einen konvexen (1) oder reflexen Knoten (0) handelt. Der Knoten mit der jeweils höchsten y -Koordinate eines Randes wird in der zehnten Zeile durch eine 1 gekennzeichnet. Da sich in OP aufgrund der Speicherungsstruktur die Anzahl der Randlelemente gegenüber der Knotenmatrix P verdoppelt, ist die Indizierung der einzelnen Ränder in OP entsprechend anzupassen. Hierzu dient die nachfolgend aufgeführte Indexmatrix OI für OP.

OI =

1	17	29
16	28	44

Beispiel 2

Als Gebiet wurde das Bestückungsschema eines idealisierten PC-Mainboards gewählt. Jedes der insgesamt 50 Bauteile wird durch einen inneren Polygonzug repräsentiert. Die Gesamtzahl N der Knoten aller Ränder beträgt 284. Abbildung A.2 zeigt das aus insgesamt 1.195 Voronoi-Kanten bestehende Voronoi-Diagramm. Hiervon sind 866 Geradensegmente und die restlichen 329 Parabelsegmente. Für die in Abbildung A.3 dargestellte mediale Achse mußten 480 mit reflexen Knoten inzidente Geradensegmente entfernt werden. Sie besteht somit aus 715 Voronoi-Kanten.

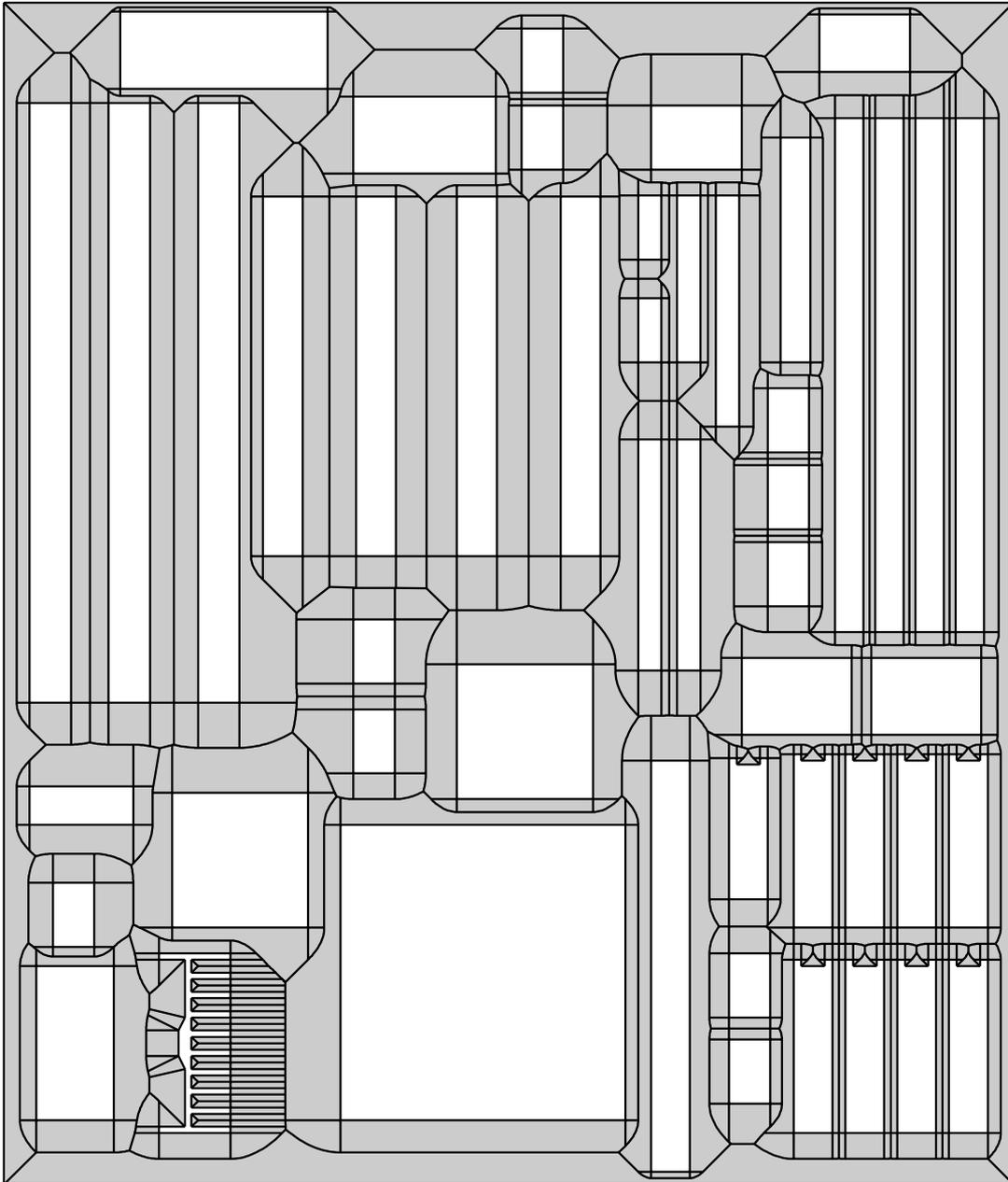


Abbildung A.2: Voronoi-Diagramm eines Computer-Mainboards

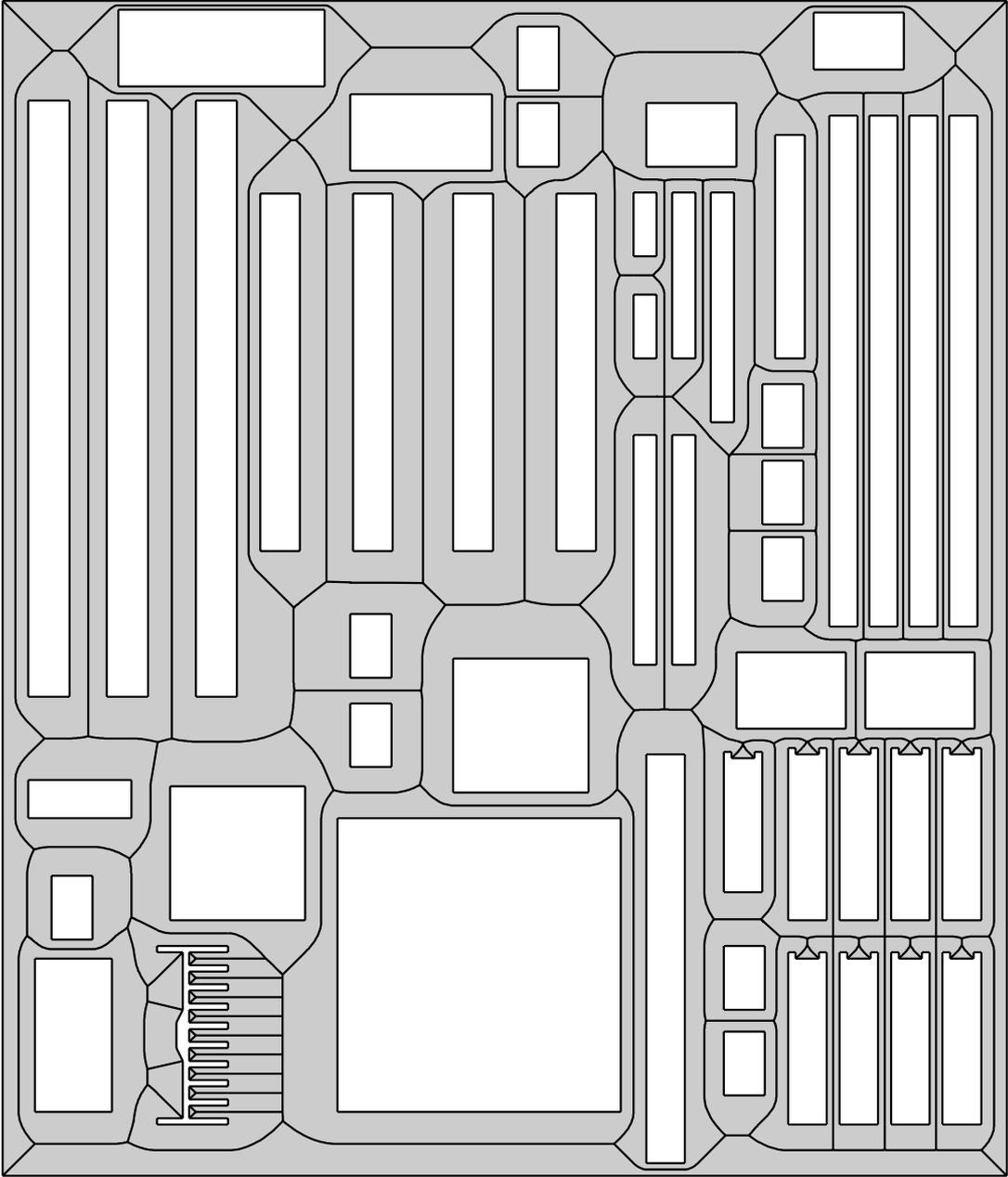


Abbildung A.3: mediale Achse des Computer-Mainboards

A.2 Approximation medialer Achsen

A.2.1 Datenstruktur

Die Implementierung des Algorithmus zur Approximation medialer Achsen erfolgte wiederum in MATLAB, wobei jedoch aus Geschwindigkeitsgründen zur Berechnung des Voronoi-Diagramms der Sweep-Line-Algorithmus von Steve Fortune [11] in Form eines externen C-Programms hinzugezogen wird.

Die Datenstruktur ähnelt der des Algorithmus zur Berechnung medialer Achsen polygonaler Gebiete. Hierbei ergibt sich jedoch eine Reduktion des Speicherbedarfs durch die Eigenschaft, daß die Voronoi-Kanten stets Geradensegmente sind und infolgedessen kein Typ-Kennzeichen und kein dritter Bézierpunkt benötigt wird.

Jedes Objekt $o(1:7,1)$ hat somit den folgenden Aufbau: $o(1:2) =: p_0$ und $o(3:4) =: p_1$ sind die beiden Bézierpunkte des Segments, $o(5:6)$ die Nummern jener Punkte der approximierenden Randfolge, die das Segment erzeugen. Schließlich kennzeichnet $o(7)$ die Lage der Voronoi-Kante. Unterschieden werden hier Segmente, die vollständig im Inneren des Gebietes liegen (Wert 2) oder nicht (Wert 1). Die Segmente vom Typ 1 und 2 bilden das Voronoi-Diagramm, diejenigen vom Typ 2 die approximierte mediale Achse.

A.2.2 Syntax

Die Syntax der MATLAB-Funktion `medaxapprox` zur Approximation medialer Achsen lautet

```
[M, V, OP, OI] = medaxapprox(P, I)
[M, V, OP, OI] = medaxapprox(P, I, PlotType)
```

Die Matrix P der Punkte auf $\partial\Omega$ und die zugehörige Indexmatrix I der Teilränder haben das gleiche Speicherformat wie die gleichnamigen Matrizen im polygonalen Fall, repräsentieren hier jedoch eine diskrete Approximation des Randes. Da die Berechnung des Voronoi-Diagramms extern erfolgt, wurde hier auf eine Debug-Option verzichtet, allerdings kann mit Hilfe des Arguments `PlotType` die Visualisierung des Ergebnisses gesteuert werden. Zur Verfügung stehen hier

PlotType	Ausgabe
0	kein plot (default)
1	nur approximierte mediale Achse plotten
2	nur das Voronoi-Diagramm plotten
3	Kombinationsplot (V grün, M rot)

Zurückgegeben wird die $(7 \times .)$ -Matrix M jener Segmente von $VD(P)$, welche die approximierte mediale Achse bilden. M ist Teilmatrix von V , der Objektmatrix

des zu den Punkten in P gehörenden Voronoi-Diagramms. Die $(3 \times n)$ -Matrix OP enthält die Approximationspunkte der Matrix P und in der dritten Zeile deren Punktnummern. Die Reihenfolge der Punkte in OP kann sich aufgrund der Orientierung des Randes gegenüber P unter Umständen ändern. OI ist schließlich der Indexvektor der Teilränder in OP .

A.2.3 Beispiele

Beispiel 1

Das Titelbild dieser Arbeit zeigt ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand aus sieben Kreisen besteht und durch 175 Punkte approximiert wird. Die Punktmatrix der approximierenden Randfolge ist (auszugsweise)

$P =$

7.0000	6.9617	6.8470	6.6574	6.3948	6.0622
0.0000	-0.7317	-1.4554	-2.1631	-2.8472	-3.5000 ...

Der zugehörige Indexvektor zur Kennzeichnung der Teilränder lautet

$I =$

1	61	81	101	121	141	161
60	80	100	120	140	160	175

Der Programmaufruf mit $[M, V, OP, OI] = \text{medaxapprox}(P, I)$ liefert die folgenden Ergebnisse.

$M =$

-0.3372	-0.1378	0.3375	0.5710	-0.8504	-0.9964
-6.4348	-6.3748	-6.4400	-6.3247	-6.2771	-6.2910
-0.1378	0.3375	0.5710	0.9989	-0.3372	-0.8504
-6.3748	-6.4400	-6.3247	-6.3068	-6.4348	-6.2771
45.0000	45.0000	46.0000	46.0000	44.0000	44.0000
109.0000	108.0000	108.0000	107.0000	109.0000	110.0000
2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000 ...

Hierbei besteht M genau aus jenen Objekten von V , deren Typkennzeichen in der siebten Zeile gleich 2 ist.

$V =$

-0.8504	-0.1378	-0.3372	-0.1378	1.2772	0.3375
-6.2771	-6.3748	-6.4348	-6.3748	-6.1220	-6.4400
0.0000	0.0000	-0.1378	0.3375	0.0000	0.5710
-4.1176	-4.1176	-6.3748	-6.4400	-4.1176	-6.3247
109.0000	108.0000	45.0000	45.0000	106.0000	46.0000
110.0000	109.0000	109.0000	108.0000	107.0000	108.0000
1.0000	1.0000	2.0000	2.0000	1.0000	2.0000 ...

Die Punkte des ersten Teilrandes waren im Uhrzeigersinn angeordnet und wurden deshalb umorientiert. Hieraus folgt $OP(1:2, 60:-1:1)=P(:, 1:60)$ und zusammen mit der Zeile der Punktnummern ist

OP=

6.9617	6.8470	6.6574	6.3948	6.0622	5.6631
0.7317	1.4554	2.1631	2.8472	3.5000	4.1145
1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000	6.0000 ...

Da I alle Punkte in P referenziert, ist OI identisch mit I, das heißt

OI =

1	61	81	101	121	141	161
60	80	100	120	140	160	175

Insgesamt umfaßt das Voronoi-Diagramm 462 Voronoi-Kanten, von denen 190 die mediale Achse approximieren. Diese sind auf dem Titelbild fett dargestellt.

Für die in Abbildung A.4 gezeigte approximierte mediale Achse wurde die Zahl der Randpunkte auf 1.000 erhöht. Hierbei steigt die Zahl der Voronoi-Kanten auf 2.495 wovon 1.015 Segmente M bilden.

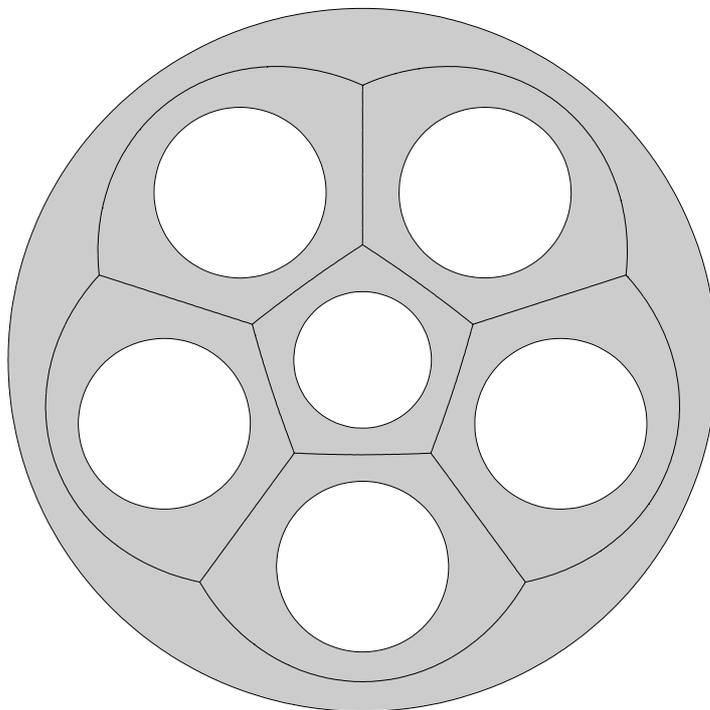


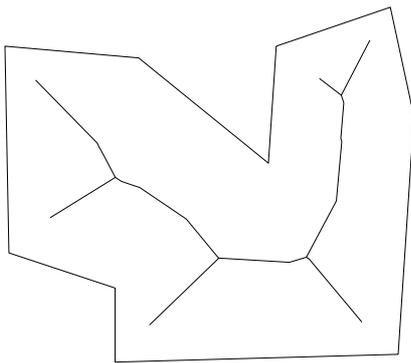
Abbildung A.4: Gebiet des Titelbilds mit 1.000 Approximationspunkten

Beispiel 2

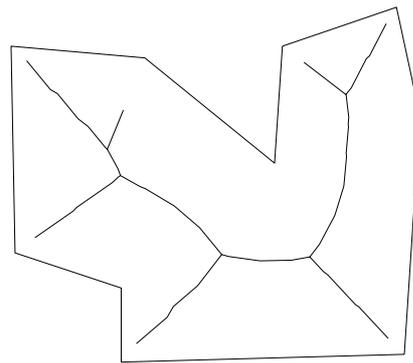
Das zweite Beispiel soll die Konvergenzgeschwindigkeit der Approximation im polygonalen Fall illustrieren. Hierzu dient noch einmal das Beispiel von Seite 54. Abbildung A.5 zeigt die approximierten medialen Achsen für $\partial_{20}\Omega$, $\partial_{50}\Omega$, $\partial_{100}\Omega$ und $\partial_{1000}\Omega$, wobei die Punkte äquidistant entlang $\partial\Omega$ verteilt wurden. Die Zahl der resultierenden Segmente kann der nachfolgenden Tabelle entnommen werden.

Approximationspunkte	Voronoi-Kanten	davon in M
20	53	22
50	112	48
100	228	98
1.000	2.298	998

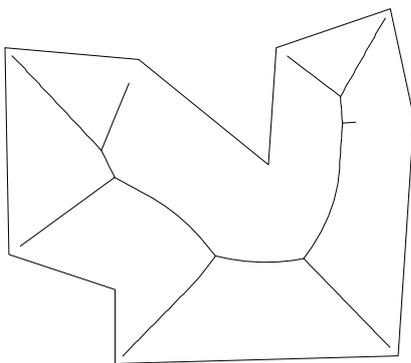
Wie zu sehen ist konvergieren jene Teile der approximierten medialen Achse besonders schlecht, die zu einer konvexen Ecke gehören, deren Winkel nahe bei π liegt.



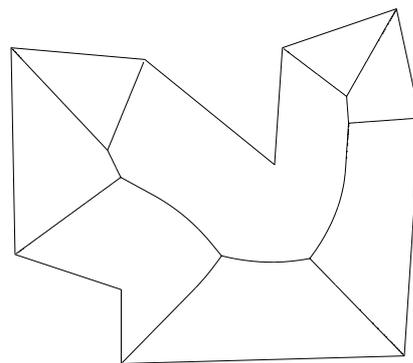
20 Approximationspunkte



50 Approximationspunkte



100 Approximationspunkte



1.000 Approximationspunkte

Abbildung A.5: Mediale Achsen verschiedener Approximationsgüten

Beispiel 3

Als komplexeres Beispiel dient abschließend die Weltkarte in der Mercator-Projektion [22]. Da diese, wie an Grönland zu erkennen ist, polnahe Regionen stark verzerrt, wurde auf die Darstellung der Antarktis sowie, zur Reduktion der Komplexität, auf kleinere Inseln verzichtet. Die aus 2.966 Punkten bestehenden Rohdaten der Küstenlinien wurden mit Hilfe periodischer kubischer Splines [33] interpoliert und durch deren Auswertung an Zwischenstellen die Zahl der Approximationspunkte auf 17.182 erhöht. Im Gegensatz zu den vorherigen Darstellungen, sind die Landmassen, welche die Löcher in einem von einer Ellipse berandeten Gebiet bilden, grau hinterlegt. Das Voronoi-Diagramm der Approximationspunkte umfaßt 51.143, die approximierte mediale Achse 17.293 Geradensegmente.

Kleine Äste der medialen Achse, wie zum Beispiel zwischen Südamerika und Afrika, sind entweder auf eine schwache Konvergenz (vergleiche zweites Beispiel) oder auf kleine Krümmungen des Randes zurückzuführen. Die starke Verästelung, wie zum Beispiel in Südostasien, beruht dahingegen auf einer mangelhaften Glättung der Randdaten oder einer hohen Zahl von kleinen Inseln.

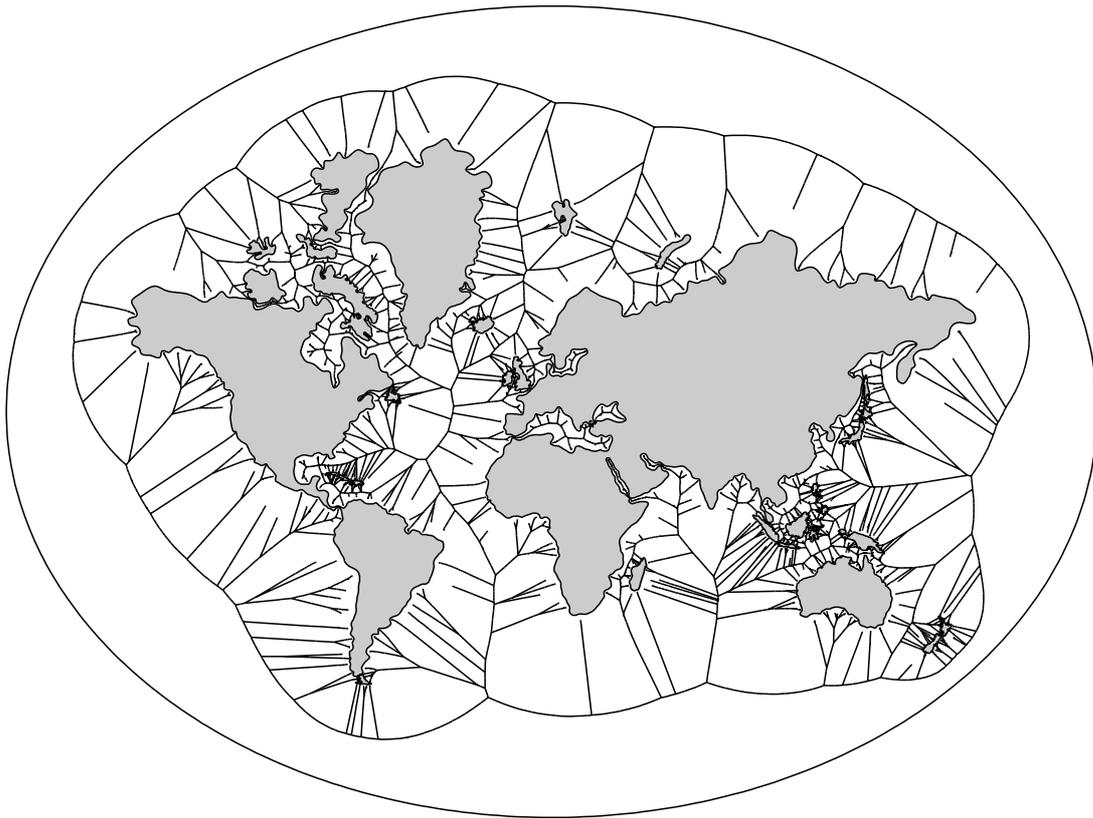


Abbildung A.6: approximierte mediale Achse der Mercator-Weltkarte

Aufgrund der hohen Dichte der Geradensegmente im Voronoi-Diagramm, wurde auf die Darstellung desselben verzichtet.

Literaturverzeichnis

- [1] C.G. Armstrong, et al.: *Medials for Meshing and More*. Proceedings, 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, Seiten 277-288, 1995
- [2] G. Aumann, K. Spitzmüller: *Computerorientierte Geometrie*. B.I. Wissenschaftsverlag, 1993
- [3] H. Blum: *A transformation for extracting new descriptors of shape*. In Proc. Symp. Models for Perception of Speech and Visual Form, W. Whalen-Dunn (Herausgeber), Cambridge, MA, MIT Press, Seiten 362-380, 1967
- [4] H. Blum: *Biological shape and visual science (Part I)*. Journal of Theoretical Biology 38, Seiten 205-287, 1973
- [5] H. Blum, R.N. Nagel: *Shape Description Using Weighted Symmetric Axis Features*. Pattern Recognition, Vol. 10, Seiten 167-180, 1978
- [6] J. W. Brandt: *Theory and application of the skeleton representation of continuous shapes*. PhD Dissertation, University of California, Davis, 1991
- [7] R. D. Chaney: *Complexity as a Scale-Space for the Medial Axis Transform*. A.I. Memo No. 1397, Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, 1993
- [8] C.-S. Chiang: *The Euclidean distance transform*. PhD Dissertation, Purdue University, 1992
- [9] L. Cinque, C. Guerra, S. Levialdi: *Computing shape description transforms on a multiresolution architecture*. CVGIP: Image Understanding 55, No. 3, Seiten 287-295, 1992
- [10] J. Dugundji: *Topology*. Allyn and Bacon Inc. Boston, 6. Auflage, 1970
- [11] S. Fortune: *A Sweepline Algorithm for Voronoi Diagrams*. Algorithmica, No. 2, Seiten 153-174, 1987
- [12] S.M. Gelston, D. Dutta: *Boundary surface recovery from skeleton curves and surfaces*. Computer Aided Geometric Design 12, Seiten 27-51, 1995

- [13] O. Giering, J. Hoschek (Herausgeber): *Geometrie und ihre Anwendungen*. Carl Hanser Verlag, 1994
- [14] M.T. Goodrich, C. Ó'Dúnlaing, C.K. Yap: *Constructing the Voronoi diagram of a set of line segments in parallel*. *Algorithmica* 9, Seiten 128-141, 1993
- [15] H.N. Gürsoy: *Shape interrogation by medial axis transform for automated analysis*. PhD Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1989
- [16] H.N. Gürsoy, N.M. Patrikalakis: *Automated interrogation and adaptive subdivision of shape using medial axis transform*. *Advances in Engineering Software Workstn.* 13, No. 5/6, Seiten 287-302, 1991
- [17] H.N. Gürsoy, N.M. Patrikalakis: *An Automatic Coarse and Fine Surface Mesh Generation Scheme Based on Medial Axis Transform: Part I Algorithms / Part II Implementation*. *Engineering with Computers* 8, Seiten 121-137 und 179-196, 1992
- [18] F. Harary: *Graphentheorie*. R. Oldenburg Verlag, 1974
- [19] J. Hoschek, D. Lasser: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B. G. Teubner Stuttgart, 2. Auflage, 1992
- [20] B. W. Kernighan, D. M. Ritchie: *Programmieren in C*. Carl Hanser Verlag, 2. Ausgabe, 1990
- [21] D.G. Kirkpatrick: *Efficient Computation of Continuous Skeletons*. IEEE 20th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Seiten 18-27, 1979
- [22] D. Laugwitz: *Differentialgeometrie*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1960
- [23] D.T. Lee, R.L. Drysdale: *Generalization of Voronoi Diagrams in the Plane*. *SIAM Journal of Computation*, Vol. 10, No. 1, Seiten 73-87, 1981
- [24] D.T. Lee: *Medial Axis Transformation of a Planar Shape*. *IEEE Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence* 4, No. 4, Seiten 363-369, 1982
- [25] G. Matheron: *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & Sons, 1975
- [26] G. Matheron: *Examples of Topological Properties of Skeletons*. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*, J. Serra (Herausgeber), Seiten 217-238, 1988
- [27] MathWorks Inc.: *MATLAB Version 4, User's Guide*. Prentice Hall, 1995

- [28] S.N. Meshkat, C.M. Sakkas: *Voronoi Diagram for Multiply-Connected Polygonal Domains II: Implementation and Application*. IBM Journal of Research and Development 31, No. 3, Seiten 373-381, 1987
- [29] F. Meyer: *Skeletons in Digital Spaces*. Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances, J. Serra (Herausgeber), Seiten 257-296, 1988
- [30] R.L. Ogniewicz: *Discrete Voronoi Skeletons*. Hartung-Gorre Verlag Konstanz, 1993
- [31] F.P. Preparata: *The Medial Axis of a Simple Polygon*. Lecture Notes in Computer Science, Proc. 6th. Symp. Mathematical Foundations of Computer Science, Seiten 443-450, 1977
- [32] F.P. Preparata, M.I. Shamos: *Computational Geometry*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1988
- [33] U. Reif, K. Höllig: *Einführung in die geometrische Datenverarbeitung*. Skript zur gleichnamigen Vorlesung, Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart, Wintersemester 1996/1997
- [34] R. Sedgewick: *Algorithms in C++*. Addison-Wesley, 1992
- [35] J. Serra: *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982
- [36] E.C. Sherbrooke, N.M. Patrikalakis, F.-E. Wolter: *Differential and Topological Properties of Medial Axis Transforms*. Juni 1995, Graphical Models and Image Processing, noch nicht erschienen
- [37] V. Srinivasan, L.R. Nackman, J-M. Tang, S.N. Meshkat: *Automatic Mesh Generation Using the Symmetric Axis Transformation of Polygonal Domains*. IBM Research Division, Research Report 90A005786, 1990
- [38] V. Srinivasan, L.R. Nackman: *Voronoi Diagram for Multiply-Connected Polygonal Domains I: Algorithm*. IBM Journal of Research and Development 31, No. 3, Seiten 361-372, 1987
- [39] T.K.H. Tam, C.G. Armstrong: *2D finite element mesh generation by medial axis subdivision*. Advances in Engineering Software Workstn. 13, No. 5/6, Seiten 313-324, 1991
- [40] C. Yao, J. Rokne: *A straightforward algorithm for computing the medial axis of a simple polygon*. International Journal of Computer Mathematics 39, Seiten 51-60, 1991