

Beitrag zur Verwendung von Zernike-Polynomen bei der automatischen Interferenzstreifenauswertung

F. M. Küchel, Th. Schmieder, H. J. Tiziani

Institut für Technische Optik
Universität Stuttgart*)

Prof. Dr. E. Menzel zum 65. Geburtstag gewidmet

Eingegangen am 10. März 1983

Inhalt

Bei der automatischen Messung und anschließenden analytischen Darstellung von Phasenfrontdifferenzen in Zweistrahlinterferometern erhebt sich das Problem der Verteilung der Meßpunkte über das Interferogramm. Die Anzahl und Anordnung der Stützstellen beeinflußt stark die Varianz der Koeffizienten einer Zernike-Entwicklung der Phasenfront. Da zur Messung von Phasenfronten mit großen Gradienten $\partial\varphi/\partial x$ und $\partial\varphi/\partial y$ die Stützstellen sehr eng gelegt werden müssen, wird eine Kombination aus lokaler und globaler ausgleichender Interpolation vorgeschlagen, bei der die Entwicklungskoeffizienten mit hoher Genauigkeit bei kurzen Rechenzeiten ermittelt werden können.

Abstract

Contribution to the automatic fringe analysis using Zernike polynomials. When measuring wavefront-differences in two-beam interferometers the distribution problem of the sampling points arises. The mean square of the coefficients of a Zernike polynomial fit is strongly influenced by the number and location of sampling points. Wavefronts with big gradients demand high density of sampling point distribution. A combination of local and global interpolation is proposed, where the coefficients are determined with high precision and short computing time.

1. Einleitung

An unserem Institut befassen wir uns mit der interferometrischen Prüfung von optischen Komponenten, speziell aber mit der Prüfung asphärischer Flächen. Dazu werden computergenerierte Hologramme (CGH) benutzt [1]. Zur Berechnung dieser Hologramme müssen die optisch wirksamen Komponenten des Interferometers quantitativ bekannt sein, so daß mit Hilfe eines optischen Strahldurchrechnungsprogramms die beiden interferierenden

*) Pfaffenwaldring 9, 7000 Stuttgart 80.

Wellenfronten in der Ebene des Hologramms berechnet werden können. Insbesondere ist es erforderlich, die Wirkung eines Linsen-Kompensations-systems im Prüfarm des Interferometers, das bereits einen großen Teil der Asphärität des Prüflings kompensiert, genau zu kennen. Hierzu wird in einem ersten Schritt ein Hologramm berechnet und aufgezeichnet, bei dem die Soll-daten und die Solljustierung zugrunde gelegt werden. Außerdem wird die asphärische Fläche durch eine hochpräzise sphärische Fläche ersetzt, um den Istzustand des Hilfssystems zu bestimmen. Die analytische Darstellung der berechneten Wellenfronten geschieht durch Koeffizienten der über dem kreisförmigen Hologramm orthogonalen Zernike-Polynome, die bis zum 10ten Grad berücksichtigt werden. Unsere automatische Interferenzstreifenauswertung hat nun zum Ziel, einen Satz von „gemessenen“ Koeffizienten zu liefern, die die Abweichung der Ist-Wellenfront von der gerechneten Soll-Wellenfront darstellen. In vielen Fällen ist es dann möglich, den Ist-Zustand des Interferometers zunächst durch systematisches Justieren dem Soll-Zustand näherzubringen. Verbleibende Abweichungen, die nicht eindeutig zugeordnet werden können, werden als Korrekturfunktion in die Berechnung des eigentlichen Prüf hologramms für die Asphäre mit aufgenommen. Durch dieses Konzept ist es möglich, auch ohne hochpräzise, teure Fertigung insbesondere beim Linsenkompensationssystem eine hohe Prüfgenauigkeit für die asphärische Fläche zu erreichen. Schließlich kann aus der gemessenen Abweichung der Phasenfront in der Hologrammebene bei der endgültigen Prüfung der asphärischen Fläche auf die Abweichung des Prüflings von der Sollform zurückgerechnet werden.

2. Messung der Phasenfront

Zur meßtechnischen Ermittlung der Koeffizienten der Zernike-Polynome müssen zwei Teilprobleme gelöst werden:

- A) Ermittlung der Phasenverteilung an einzelnen Stützstellen innerhalb des Interferogramms.
- B) Berechnung der Koeffizienten der Zernike-Entwicklung aus den Phasenwerten.

Die Phasenverteilung ist keine der Messung direkt zugängliche Größe. Es existieren jedoch verschiedene Methoden, um aus der Intensitätsverteilung die Phasenverteilung zu gewinnen. Die am Institut angewandten Verfahren sind:

1. Halbautomatische Ein-Interferogramm-Methode

Zuordnung der Ordnungszahlen zu den Streifen vom Benutzer und Eingabe der Stützstellen (Streifenmaxima und -minima) mit Hilfe eines Graphischen Tablett in den Computer. Diese Methode ist weit verbreitet, siehe z. B. [2]. Anschließend kann eine Anpassung von Zernike-Polynomen an die Daten nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme durchgeführt werden.

2. Automatische Ein-Interferogramm-Methode

Programmgesteuertes Abscannen eines Streifeninterferogramms in Richtung senkrecht zu den Streifen mit Hilfe einer Fernsehkamera, Detektion der Intensitätsmaxima und -minima, Anbringen von Ordnungszahlen (Monotonität der Streifenphase wird vorausgesetzt). Fit der auf diese Weise an nichtäquidistanten Stützstellen erhaltenen Phasenwerte durch einen frei vorgebbaren Satz von Zernike-Polynomen.

3. 3-Interferogramm-Methode

Messung der Intensitätswerte in einem festen Raster von 64 Spalten und 64 Zeilen; anschließend wird die Phase der Referenzwelle zunächst um $\pi/2$, dann um π verschoben (Drehung einer Plan-Parallelplatte um einen kleinen Winkel) und die Intensitäten an den Rasterpunkten jeweils von neuem gemessen. Der Algorithmus zur Gewinnung der Phaseninformation aus den drei Intensitätsmessungen und eine genaue Untersuchung der Eigenschaften dieser digitalen Methode sind ausführlich in [3] beschrieben.

4. Automatische Ein-Interferogramm-Methode mit Phasenmessung durch Fourier-Transformation

Einstellung einer relativ starken Verkippung der Referenzwelle, so daß ca. 30–60 Streifen innerhalb der Pupille liegen, die als „Trägerfrequenz“ dienen. Automatisches Abscannen des Interferogramms in einem Raster von 64 Spalten und 256 Zeilen innerhalb der Pupille mit der Fernsehkamera. Die Extraktion der Phaseninformation aus den gemessenen Intensitätswerten geschieht nach einer neuen Methode [4] mit Hilfe einer zweimaligen Fourier-Transformation, wobei ein „Seitenband“ analysiert wird.

Die Verfahren nach 3. und 4. liefern die Phasenwerte modulus 2π . Die Sprungstellenbeseitigung bereitet jedoch keine Schwierigkeiten, solange der Gradient der Phasenfront (im Falle der FT-Methode ohne die Verkippung) 32 Streifen/Interferogrammdurchmesser nicht überschreitet. Bei dem Verfahren nach 4. werden nach erfolgter Sprungstellenbeseitigung die Phasenwerte durch Mittelung von jeweils 4 aufeinanderfolgenden Werten einer Spalte wie bei 3. in einem 64×64 Raster dargestellt.

Die Verfahren nach 1 und 2 unterscheiden sich von denen nach 3 und 4 in mehrerer Hinsicht:

Die Phasenverteilung wird bei den Verfahren nach 1 und 2 aus der Lage der Streifenmaxima und -minima gewonnen. Diese sind jedoch nur mit großer Unsicherheit angebbar, da der Intensitätsverlauf hier eine waagrechte Tangente hat und zudem durch eine ungleichmäßige Ausleuchtung verfälscht werden kann. Außerdem besteht immer die Schwierigkeit, sich für eine „optimale“ Streifendichte entscheiden zu müssen. Bei zunehmender Verkippung der Referenzwelle und entsprechend zunehmender Streifendichte wird zwar das gesamte Interferogramm gut mit Stützstellen abgedeckt, die Streifen selbst werden jedoch immer gerader, so daß nun die Koordinaten der Maxima und Minima mit weit höherer Genauigkeit angegeben werden müssen.

Demgegenüber werden die Phasenwerte bei den Methoden 3 und 4 in einem festen Stützstellenraster nach Abb. 1 ermittelt. Hier gehen in die ermittelten

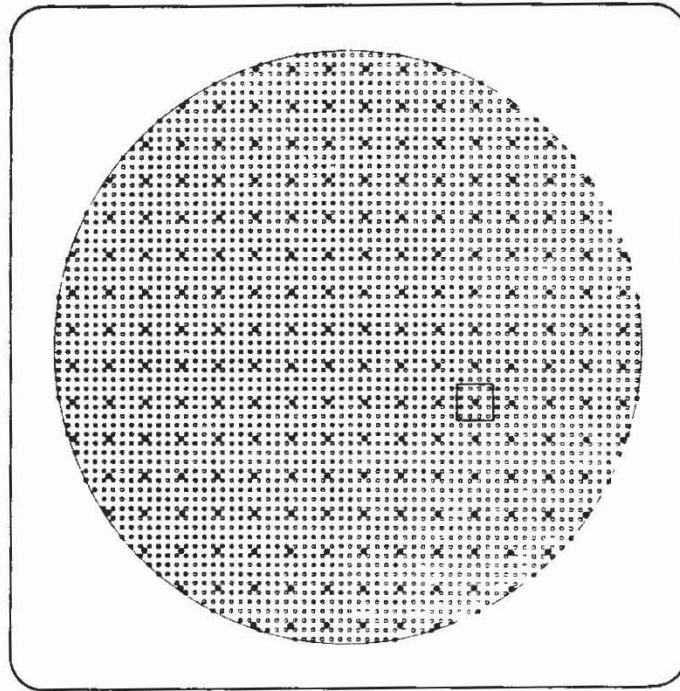


Abb. 1. Gewähltes Raster mit 64 Spalten und 64 Zeilen, auf dessen 3228 Kreuzungspunkten Phasenwerte berechnet werden. Eingeschaltetes Subraster vom gleichen Typ (vgl. auch Abb. 4a) mit 16 Spalten und 16 Zeilen, auf dessen 208 Kreuzungspunkten Phasenwerte durch ausgleichende Interpolation berechnet werden.

Phasenwerte die gemessenen Intensitäten an den Stützstellen ein, wodurch einerseits eine höhere Genauigkeit erreicht wird, andererseits jedoch auch Nichtlinearitäten des Detektors eine Rolle spielen. Glücklicherweise haben die Nichtlinearitäten praktisch nur einen sehr geringen Einfluß auf die Meßgenauigkeit.

Die Verfahren 3 und 4 liefern etwa die gleichen Genauigkeiten. Für die 3-Interferogramm-Methode muß eine (vom Rechner gesteuerte) Einrichtung zur Phasenschiebung der Referenzwelle vorgesehen werden, bei der FT-Methode muß in einer Koordinate eine dichtere Stützstellenanordnung gewählt werden.

Neben den am Institut realisierten Methoden der Phasenmessung existieren noch weitere Verfahren, wie z.B. „AC-Interferometrie“ [5] und „Heterodyne Interferometrie“ [6, 7, 8]. Insbesondere die Heterodyne-Interferometrie kann noch höhere Auflösungen liefern, ist jedoch mit ungleich größerem Geräteaufwand verbunden.

Wesentlich bei den automatischen Methoden 2, 3 und 4 ist die Erkennung der Lage und des Durchmessers des Interferogramms, gemessen im Koordinatensystem der Fernsehkamera. Wir verwenden eine Hamamatsu C 1000 Kamera, die unter DMA mit unserem Rechner pdp 11-34 verbunden ist. Die Kamera besitzt eine Auflösung von 1024×1024 Pixels. Eine Alternative wäre die Benutzung einer CCD array Kamera. Zur Lösung des angesproche-

nen Problems werden zusätzlich zum synthetischen Hologramm, dessen wahrer Durchmesser genau bekannt ist, rechts und links symmetrisch zwei breite Hilfsbalken aufgezeichnet, deren Länge dem Hologrammdurchmesser entspricht und deren Abstand $9/8$ des Hologrammdurchmessers beträgt. Durch Antasten dieser Hilfsbalken wird die Größe, Lage und Orientierung des Interferogramms (identisch mit dem Hologramm) automatisch festgestellt.

Im gleichen Unterprogramm werden dann die Koordinaten der Gitterpunkte, auf denen später die Intensitäten gemessen werden, im Koordinatensystem der Fernsehkamera berechnet. Für die 3-Interferogramm-Methode werden dann 3×3228 gemessene Intensitätswerte, für die 1-Interferogramm-Methode mit Fourier-Transformation 1×12912 gemessene Intensitätswerte zu jeweils 8 Bit im Rechner gespeichert. Diese Datenmenge paßt noch gut in den MOS-Speicher des Rechners.

3. Berechnung der Koeffizienten der ersten 66 Zernike-Polynome

3.1 Darstellung der Phasenfront durch Zernike-Polynome

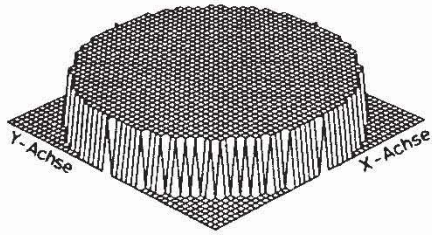
Es ist aus mehreren Gründen zweckmäßig, die an diskreten Stützstellen gemessenen Phasenwerte durch einen analytischen Ausdruck bzw. ganz speziell durch die Koeffizienten von Zernike-Polynomen darzustellen. Wir können die Zernike-Koeffizienten direkt in das Programm zur Hologrammaufzeichnung eingeben. Außerdem gestatten sie einen unmittelbaren Vergleich mit den durch die Rechnung erhaltenen Koeffizienten, was z. B. für die Justierung des Interferometers und speziell des asphärischen Prüflings wichtig ist. Hieraus erwächst auch der Wunsch, möglichst auch noch kleine Koeffizienten hoher Ordnung signifikant ermitteln zu können, da sich verschiedene Freiheitsgrade der Justage oft hauptsächlich in diesen Koeffizienten unterscheiden.

Die Zernike-Polynome [9, 10] haben einige Eigenschaften, die sie für die Aufgabe, die Phasenwerte „bestmöglich“ darzustellen, besonders geeignet machen. Die wichtigste ist die der Orthogonalität über dem Einheitskreis, also

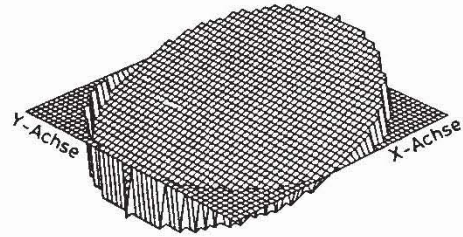
$$\int_{\Theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 U_i(r, \Theta) U_j(r, \Theta) r dr d\Theta = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ \frac{\pi}{n+1} & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

wobei hier für die Zernike-Polynome, die aus dem Produkt einer nur vom Radius r und einer zweiten nur vom Winkel Θ abhängigen Funktion gebildet sind, nur eine einfache Indizierung verwendet wurde. Es gilt

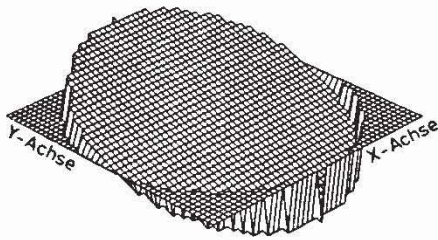
$$U_j(r, \Theta) = U_{np}(r, \Theta) = R_n^m(r) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} m\Theta \quad (2)$$

Zernike - Polynom
Nr 1

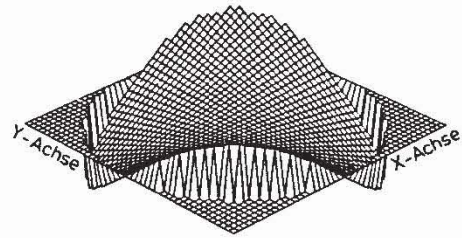
Nr 2



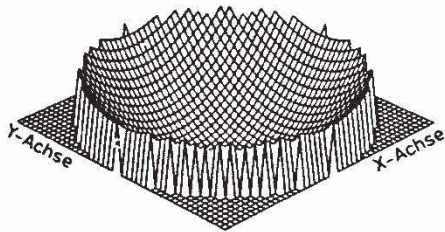
Nr 3



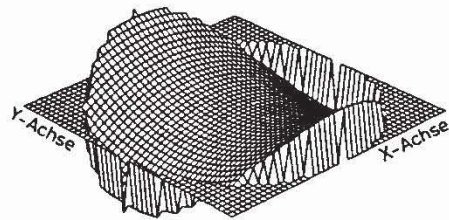
Nr.4



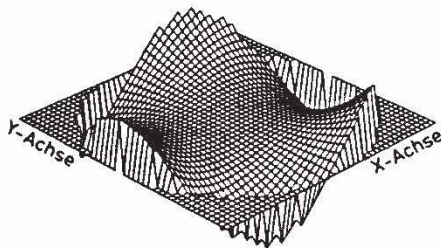
Nr.5



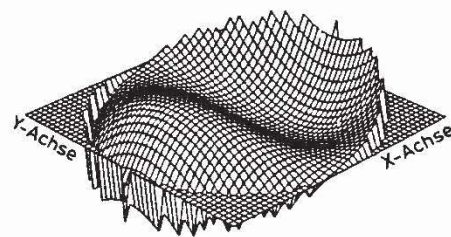
Nr.6



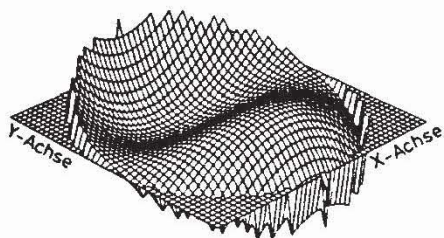
Nr 7



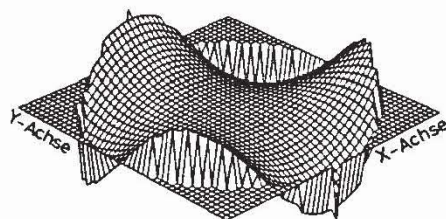
Nr. 8

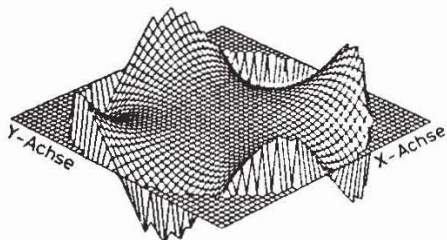


Nr.9

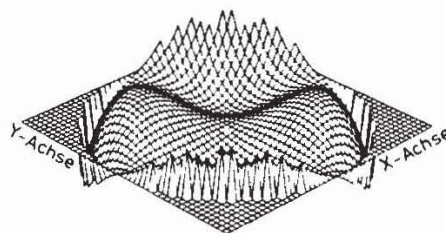


Nr 10

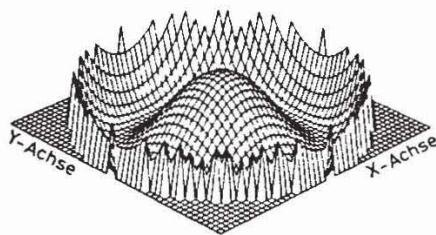


Zernike - Polynom
Nr. 11

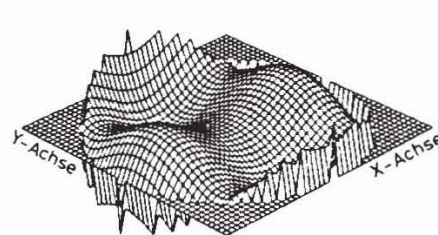
Nr 12



Nr 13



Nr 14



Nr 15

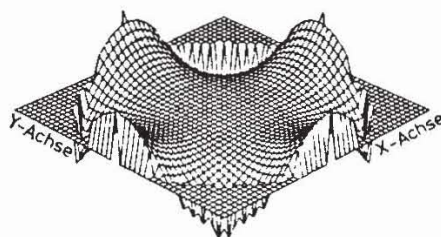


Abb. 2. Zernike Polynome.

Zernike Polynom Nr. 1

$$U_1(r, \Theta) = 1$$

Konstanter Term

Zernike Polynom Nr. 2

$$U_2(r, \Theta) = r \cdot \sin \Theta$$

Kippung in x -Richtung

Zernike Polynom Nr. 3

$$U_3(r, \Theta) = r \cdot \cos \Theta$$

Kippung in y -Richtung

Zernike Polynom Nr. 4

$$U_4(r, \Theta) = r^2 \cdot \sin 2\Theta$$

Astigmatismus mit den Achsen bei 45° .

Zernike Polynom Nr. 5

$$U_5(r, \Theta) = 2r^2 - 1$$

Defokussierung

Zernike Polynom Nr. 6

$$U_6(r, \Theta) = r^2 \cdot \cos 2\Theta$$

Astigmatismus mit den Achsen bei 0° und 90° .

Zernike Polynom Nr. 7

$$U_7(r, \Theta) = r^3 \cdot \sin 3\Theta$$

Zernike Polynom Nr. 8

$$U_8(r, \Theta) = (3r^3 - 2r) \sin \Theta$$

Koma entlang der x -Achse

Zernike Polynom Nr. 9

$$U_9(r, \Theta) = (3r^3 - 2r) \cos \Theta$$

Koma entlang der y -Achse

Zernike Polynom Nr. 10

$$U_{10}(r, \Theta) = r^3 \cdot \cos 3\Theta$$

Zernike Polynom Nr. 11

$$U_{11}(r, \Theta) = r^4 \cdot \sin 4\Theta$$

Zernike Polynom Nr. 12

$$U_{12}(r, \Theta) = (4r^4 - 3r^3) \sin 2\Theta$$

Zernike Polynom Nr. 13

$$U_{13}(r, \Theta) = 6r^4 - 6r^2 + 1$$

Sphärische Aberration

Zernike Polynom Nr. 14

$$U_{14}(r, \Theta) = (4r^4 - 3r^2) \cos 2\Theta$$

Zernike Polynom Nr. 15

$$U_{15}(r, \Theta) = r^4 \cdot \cos 4\Theta$$

Hier läuft m in Zweierschritten von $+n$ bis $-n$, wobei n den Grad des Polynoms bedeutet. Die sin-Funktion wird benützt für $m > 0$, die cos-Funktion für $m \leq 0$. Für p gilt dann:

$$p = \frac{n-m}{2} \quad (3a)$$

und für die „Numerierung“ j der Polynome erhält man

$$j = \frac{n(n+1)}{2} + p + 1 = \frac{n(n+2) - m}{2} + 1 \quad (3b)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die sich hierdurch ergebende Reihenfolge nicht einheitlich gehandhabt wird. Wir haben uns hierin [10] angeschlossen. Die ersten 15 Zernike-Polynome sind in Abb. 2 dargestellt.

Die vom Radius abhängigen Polynome $R_n^{+m}(r)$ sind gegeben durch [9]:

$$R_n^{+m}(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} r^{(n-2s)} \quad (4)$$

Eine tatsächliche Phasenfront $W(r, \Theta)$ kann durch eine Reihenentwicklung $w(r, \Theta)$ nach Zernike-Polynomen mit N Gliedern dargestellt werden:

$$W(r, \Theta) \approx w(r, \Theta) = \sum_{j=1}^N A_j U_j(r, \Theta) \quad (5)$$

Ist $W(r, \Theta)$ analytisch gegeben, so können die Entwicklungskoeffizienten nach

$$A_j = \frac{n+1}{\pi} \int_{\Theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 W(r, \Theta) U_j(r, \Theta) r dr d\Theta \quad (6)$$

berechnet werden. Da die Zernike-Polynome ein vollständiges Funktionensystem bilden, gilt unter gewissen einschränkenden Bedingungen für die zu approximierende Phasenfront $W(r, \Theta)$ für den Approximationsfehler $\delta(r, \Theta)$:

$$\delta(r, \Theta) = W(r, \Theta) - w(r, \Theta) = \sum_{j=N+1}^{\infty} A_j U_j(r, \Theta) \quad (7)$$

Aus der Orthogonalität der Zernike-Polynome folgt für das Fehlerquadratintegral Δ_N für eine Entwicklung mit N Gliedern:

$$\begin{aligned}
\Delta_N &= \int_{\Theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 [\delta(r, \Theta)]^2 r dr d\Theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [W(r, \Theta) - \sum_{j=1}^N A_j U_j(r, \Theta)]^2 r dr d\Theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [W(r, \Theta)]^2 r dr d\Theta - 2 \sum_{j=1}^N A_j \int_0^{2\pi} \int_0^1 W(r, \Theta) U_j(r, \Theta) r dr d\Theta \\
&\quad + \sum_{j=1}^N A_j^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [U_j(r, \Theta)]^2 r dr d\Theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [W(r, \Theta)]^2 r dr d\Theta - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\pi}{n+1} \right) A_j^2 \tag{8}
\end{aligned}$$

wobei neben (1) die Beziehungen (5) und (6) verwendet wurden. Man sieht, daß die Δ_N für wachsendes N eine monoton fallende Folge bilden, jeder neue Entwicklungsterm also *unabhängig* von allen anderen zur detaillierteren Darstellung von $W(r, \Theta)$ beiträgt. Aus (7) und (8) läßt sich auch eine Methode zur Berechnung der Varianz V der Phasenfront $W(r, \Theta)$ ableiten, die bekanntlich in engem Zusammenhang mit der Strehlschen Definitionshelligkeit im Gaußschen Bildpunkt steht [11].

3.2 Ein schneller numerischer Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten der Zernike-Entwicklung

Bei der praktischen Durchführung der Entwicklung der Phasenfront $W(r, \Theta)$ hat man es abgesehen von systematischen Fehlern in den gemessenen Phasenwerten, die hier aber nicht betrachtet werden sollen, mit zwei Typen von Fehlern zu tun:

- a) Dem unvermeidlichen Approximationsfehler $\delta(r, \Theta)$, da der Ansatz nicht unendlich lang gewählt werden kann.
- b) Zufälligen Fehlern in den berechneten Entwicklungskoeffizienten, da die gemessenen Werte φ_i der Phasenfront mit zufälligen (normalverteilten) Fehlern behaftet sind und man nur in endlich vielen Stützstellen messen kann.

Die Zielsetzung bei der Ausgestaltung eines mathematischen Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten A_j muß sein, bei möglichst kurzen Rechenzeiten eine möglichst hohe Genauigkeit bei der Darstellung der Wellenfront zu erhalten. Interessant wird das Problem dadurch, daß die Einflüsse nach a) und b) gegenläufig sind, und neben der Anzahl auch die Verteilung der Stützstellen im Einheitskreis einen wesentlichen Einfluß auf die erreichbare Genauigkeit der Koeffizienten hat.

Die geeignete mathematische Methode zur Berechnung der N Entwicklungskoeffizienten aus einer endlichen Anzahl M von Meßwerten, wobei stets $M > N$ oder besser $M \gg N$ vorausgesetzt wird, ist die Gaußsche Aus-

gleichung nach kleinster Fehlerquadratsumme. Um die Zusammenhänge aufzuzeigen, wird das Verfahren kurz wiederholt. Es wird eine fest gewählte Verteilung der fortlaufend durchnummerierten Stützstellen ξ_i im Einheitskreis vorausgesetzt. Bei der Ausgleichsrechnung werden zunächst die M Fehlergleichungen notiert:

$$\sum_{j=1}^N \{A_j U_j(\xi_i)\} - w(\xi_i) = d(\xi_i); \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

und es wird zur Bestimmung der N freien Koeffizienten A_j gefordert:

$$\sum_{i=1}^M \{d(\xi_i)\}^2 \rightarrow \text{Min} \quad (10)$$

Die „Fehler“ $d(\xi_i)$, deren Quadratsumme minimiert wird, setzen sich zusammen aus den systematischen Approximationsfehlern $\delta(\xi_i)$ nach Gl. (7) und normalverteilten zufälligen Meßfehlern $\varepsilon(\xi_i)$. Wir wollen im Moment annehmen, daß keine Meßfehler in den $d(\xi_i)$ enthalten seien. Dann liefert die Ausgleichsrechnung solche Koeffizienten A_j , daß die Quadratsumme der Approximationsfehler $\delta(\xi_i)$ an den Stützstellen minimiert wird, wogegen die Entwicklungskoeffizienten nach (6) das Fehlerquadratintegral (8) minimieren. Nur wenn die „wahre Funktion“ durch den Ansatz exakt darstellbar ist, erhält man die „wahren Koeffizienten“ der Zernike-Entwicklung. Durch einen Ansatz mit sehr vielen Gliedern ist der zu erwartende Approximationsfehler bei allen auch vom experimentellen Standpunkt her vernünftigen Wellenfronten (nicht in der Nähe einer „Kauistik“) zu vernachlässigen. Dann muß man sich nur noch für die Wirkung der normalverteilten zufälligen Meßfehler $\varepsilon(\xi_i)$ auf die ermittelten Koeffizienten A_j interessieren. Bei gegebener Varianz der Meßwerte ist es möglich, die Varianzen der Koeffizienten A_j explizit anzugeben [12]. Damit ist jedoch ein von der Art der praktischen Durchführung der Ausgleichsrechnung unabhängiges Kriterium gefunden, um die anstehenden Fragen beurteilen zu können, nämlich:

- Wie sind die Stützstellen am besten zu verteilen?
- Wieviele Stützstellen sind erforderlich, um bei der gewählten Ansatzlänge die Koeffizienten mit ausreichender Genauigkeit zu erhalten?

Mit den gemessenen Phasenwerten

$$\varphi(\xi_i) = W(\xi_i) + \varepsilon(\xi_i) = w(\xi_i) + \delta(\xi_i) + \varepsilon(\xi_i) \quad (11)$$

an den Stützstellen ergibt sich für (9) zunächst

$$\sum_{j=1}^N A_j U_j(\xi_i) = \varphi(\xi_i); \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (12)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\bar{U}\bar{A} = \bar{\varphi} \quad (13)$$

Die Forderung (10) führt in bekannter Weise auf das lineare Normalgleichungssystem, indem Gl. (13) von links mit \bar{U}^T multipliziert wird.

$$\bar{U}^T \bar{U} \bar{A} = \bar{U}^T \bar{\varphi} \quad (14)$$

Der Lösungsvektor \bar{A} ergibt sich durch Multiplikation von links mit der Inversen der Normalgleichungsmatrix $\bar{U}^T \bar{U}$:

$$\bar{A} = (\bar{U}^T \bar{U})^{-1} \bar{U}^T \bar{\varphi} = \bar{G} \bar{\varphi} \quad (15)$$

Die „Gewichtsmatrix“ \bar{G} ist eine Matrix mit M Spalten und N Zeilen, die vollständig ohne Kenntnis der Meßwerte bei einer fest eingehaltenen Stützstellenanordnung ein für alle Mal vorausberechnet werden kann. Diese Matrix wird daher zeilenweise im Rechner abgespeichert; zur Berechnung eines beliebig ausgewählten Entwicklungskoeffizienten A_j muß dann lediglich das Skalarprodukt der j -ten Zeile von \bar{G} mit dem Vektor der Meßwerte gebildet werden, also

$$A_j = \sum_{i=1}^M G_{ji} \cdot \varphi(\xi_i) \quad (16)$$

G_{ji} sind die Elemente der Matrix \bar{G} .

3.3 Fragen der Rechengenauigkeit und der Fehlerfortpflanzung

Wir sind auf den Formalismus der Ausgleichsrechnung auch deshalb explizit eingegangen, weil in zahlreichen Veröffentlichungen, die sich mit der Darstellung gemessener Wellenfronten durch Polynome beschäftigen, propagiert wird, zur Berechnung der Zernike-Koeffizienten wegen der schlechten numerischen Kondition des direkten Lösungsweges den Umweg über das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren zu beschreiten [10, 13, 14]. Wang und Silva [15] haben durch die Berechnung der Eigenwerte bzw. Konditionszahlen der $N \times N$ Matrix der Normalgleichungen $\bar{U}^T \bar{U}$ für verschiedene Ansatzlängen N (bis max. 10ten Grad, entsprechend 66 Polynomen) und Stützstellenzahlen M für zwei verschiedene Stützstellenanordnungen gezeigt, welche *numerische* Stabilität bei der Inversion der Normalgleichungsmatrix bei einer Entwicklung nach Zernike-Polynomen oder alternativ nach einer gewöhnlichen Potenzreihe mit x, y -Polynomen zu erwarten ist. Dem wurde das Gram-Schmidt-Verfahren gegenübergestellt. Die Untersuchungen zeigten eindeutig, daß bei Verwendung von Zernike-Polynomen die numerische Stabilität so gut ist, daß sich der Umweg, zunächst nach anderen, über den gewählten Stützstellen orthogonalen Funktionen zu entwickeln, erübrigt. Die Normalgleichungsmatrix, die sich bei den x, y -Potenzen ergibt, ist demgegenüber sehr schlecht konditioniert.

Die gute numerische Kondition bei Verwendung von Zernike-Polynomen läßt sich leicht begründen. Das Element a_{ij} der Normalgleichungsmatrix ent-

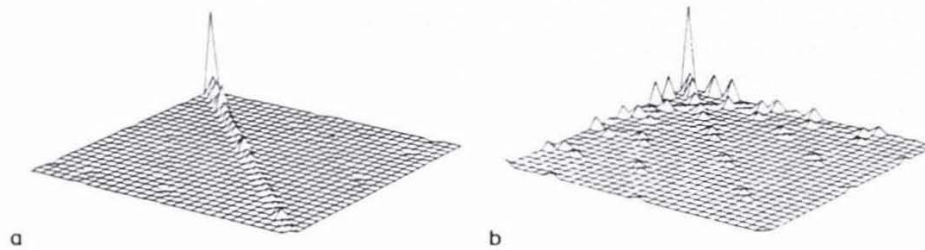


Abb. 3. a) Normalgleichungsmatrix bei einem Ansatz mit Zernike-Polynomen.
b) Normalgleichungsmatrix bei einem Ansatz mit x, y -Polynomen.

steht, indem die Summe der Glieder des Produktes der beiden Polynome U_i und U_j über alle M Stützstellen ξ_m gebildet wird, also

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^M U_i(\xi_m) U_j(\xi_m) \quad (17)$$

Bei einer „gleichmäßigen“ Verteilung der M Stützstellen über dem Einheitskreis ist die Bildung der Summe nach (17) sehr ähnlich einer numerischen Integration. Wegen der Orthogonalitätseigenschaft (1) sind daher alle Nichtdiagonalelemente von kleinem Betrag, während die Diagonalelemente groß sind. Dies ist bekanntlich bei positiv definiten Matrizen das Anzeichen für eine gute Invertierbarkeit. Eine graphische Gegenüberstellung der Normalgleichungsmatrizen für eine Zernike-Entwicklung und eine Entwicklung mit x, y -Polynomen bis zum 6ten Grad bei gleicher Stützstellenanordnung ist in den Abbn. 3a und 3b gegeben. Man beachte, daß in Abb. 3b manche Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen beträchtliche Werte haben und viele Diagonalelemente annähernd Null sind.

Es ist jedoch nicht zulässig, aus der numerischen Kondition des *Verfahrens*, mit dem die Koeffizienten der Zernike-Entwicklung berechnet werden, auf die statistische Unsicherheit der Koeffizienten bei Anwesenheit von Rauschen in den Meßwerten zu schließen. Dies soll anhand der Gewichtsmatrix \bar{G} nach (15) plausibel gemacht werden: Nur durch \bar{G} sind die gesuchten Entwicklungskoeffizienten mit den Meßwerten $\bar{\varphi}$ verknüpft, \bar{G} ergibt sich aber ausschließlich aus der gewählten Ansatzlänge N und der Anzahl M sowie der Anordnung der Stützstellen. Würden sich für zwei verschiedene Verfahren, \bar{G} zu berechnen, im theoretischen Sinne verschiedene Gewichtsmatrizen $\bar{G}_1 \neq \bar{G}_2$ ergeben, hätte die Ausgleichsrechnung keine eindeutige Lösung. Daß sich die praktisch erhaltenen Matrizen bei gegebener Stellenzahl des Rechners unterscheiden können, ist ein rein numerisches Problem und hat nichts damit zu tun, wie stark sich das „Rauschen“ in den Meßwerten in einem „Rauschen“ der Koeffizienten niederschlägt.

Für die berechnete Gewichtsmatrix \bar{G} läßt sich folgende Aussage machen: Die Summe der Elemente der ersten Zeile muß 1 sein, bei allen übrigen Zeilen muß sich 0 ergeben. Dies erkennt man sofort, wenn man für die zu approximierende Funktion $W(r, \theta)$ eine Konstante annimmt, also lauter gleiche

Werte $\varphi(\xi_i)$. Betrachtet man zwei verschiedene Stützstellenanordnungen mit gleicher Stützstellenanzahl M und vergleicht die zugehörigen Gewichtsmatrizen \bar{G}_1 und \bar{G}_2 , so erhebt sich die Frage, welche bei gegebener Varianz σ_M der Meßwerte die genaueren Werte für die Koeffizienten A_j nach Gl. (16) liefert. Intuitiv wird man die Matrix für günstiger erachten, bei der die Meßwerte mit Gewichten mit möglichst ähnlichen Beträgen multipliziert werden, bei denen die Elemente der Zeilen also eine möglichst kleine Varianz besitzen, da sich die zufälligen Fehler dann gut „wegmitteln“ können. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß gibt hierfür die mathematische Begründung: Seien $\sigma^2(\xi_i)$ die Varianzen der stochastisch unabhängigen Meßwerte in den Stützstellen ξ_i , so folgt mit (16) für die Varianz σ_j^2 des j -ten Koeffizienten der Zernike-Entwicklung:

$$\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^M G_{ji}^2 \cdot \sigma^2(\xi_i) \quad (18)$$

Nimmt man zur Vereinfachung in allen Stützstellen gleiche Varianzen an, so vereinfacht sich (18) zu

$$\sigma_j^2 = \sigma_M^2 \cdot \sum_{i=1}^M G_{ji}^2 = \sigma_M^2 \cdot g_j \quad (19)$$

Es läßt sich zeigen, daß die Größen g_j die Diagonalelemente der Matrix $(\bar{U}^T \bar{U})^{-1}$ sind, die zur Berechnung von \bar{G} ohnehin benötigt wird. Eine anschauliche Größe beim Vergleich der „Qualität“ zweier Stützstellenanordnungen ist der Kehrwert von g_j , der angibt, um welchen Faktor die Varianz des Koeffizienten gegenüber der Varianz der Meßwerte vermindert wird.

Mit der Kenntnis der Entwicklungskoeffizienten A_j und ihrer Varianzen σ_j läßt sich nun sowohl eine fundierte Entscheidung über die Signifikanz betragskleiner Koeffizienten treffen, als auch die Varianz der durch N Glieder approximierten Wellenfront $\varphi_N(r, \Theta)$ an jeder Stelle (r, Θ) berechnen. Dazu wird die Varianzoperation auf Gl. (5) angewendet, wobei die Koeffizienten A_j als stochastisch unabhängig betrachtet werden:

Aus

$$\varphi_N(r, \Theta) = \sum_{j=1}^N U_j(r, \Theta) \cdot A_j \quad (20)$$

folgt für die Varianz des ausgeglichenen Wertes $\varphi_N(r, \Theta)$:

$$\begin{aligned} \sigma_N^2(r, \Theta) &= \sum_{j=1}^N \{U_j(r, \Theta)\}^2 \cdot \sigma_j^2 \\ &= \sigma_M^2 \cdot \sum_{j=1}^N \{U_j(r, \Theta)\}^2 \cdot g_j \end{aligned} \quad (21)$$

Tabelle 1:
Mittelwerte von $1/g_j$ für verschiedene Anordnungen

Anordnung	Abb. Nr.	Stützstellen- zahl M	$MW = \frac{1}{65} \cdot \sum_{j=2}^{66} 1/g_j$
Raster 1	4a	316	4,71
Raster 2	4b	322	3,11
Biene	4c	313	4,14
Spot 1	4d	330	5,28
Spot 2	4e	330	3,85
Fresnel	4f	325	4,89
Zufall	4g	330	3,23

Falls ein Schätzwert s_M^2 für σ_M^2 nicht durch wiederholte Messungen der gleichen Phasenfront gewonnen werden kann, ergibt er sich in bekannter Weise aus:

$$s_M^2 = \left(\frac{1}{M - N} \right) \sum_{i=1}^M \left\{ \varphi(\xi_i) - \sum_{j=1}^N A_j U_j(\xi_i) \right\}^2 \quad (22)$$

3.4 Vergleich verschiedener Stützstellenanordnungen

Wir wollten uns eine Vorstellung darüber verschaffen, in welchem Maße die Anordnung der Stützstellen einerseits, sowie die Anzahl M der Stützstellen bei gegebener Ansatzlänge N andererseits, die Varianz der einzelnen Entwicklungskoeffizienten beeinflusst. Zu diesem Zweck haben wir für insgesamt 7 verschiedene Anordnungen mit jeweils ca. gleicher Stützstellenanzahl im Bereich zwischen 313 und 332 Stützstellen bei einer festen Ansatzlänge N von 66 Koeffizienten (entsprechend dem 10ten Grad) die Reziproken der Größen g_j nach Gl. (19) berechnet und aufgezeichnet.

Die Konstante der Zernike-Entwicklung ist uninteressant, da sie auch in den verschiedenen Verfahren zur Phasenmessung willkürlich ist. Beim Vergleich der Stützstellenanordnungen wurde der Wert g_0 daher nicht berücksichtigt. Zur globalen Kennzeichnung der Qualität einer Anordnung wurde der Mittelwert von $1/g_j$ für $j = 2, \dots, 66$ gebildet. Diese Mittelwerte sind zusammen mit den Stützstellenzahlen für die 7 Anordnungen in Tab. 1 angegeben.

Die Abbildungen 4a bis 4g zeigen die verschiedenen Anordnungen, wobei zur besseren Übersicht jeweils geringere Stützstellenzahlen eingezeichnet werden, „Raster 1“ ist wie „Raster 2“ durch eine gerade Anzahl von Zeilen und Spalten gekennzeichnet. Bei „Raster 1“, das auch für unsere automatische Streifenbewertung realisiert wurde, liegen die äußersten Rasterlinien ein halbes Rasterintervall vom Rand entfernt, bei „Raster 2“ ein ganzes Rasterintervall. Der große Einfluß der Anordnung wird in der Abb. 5 deutlich,

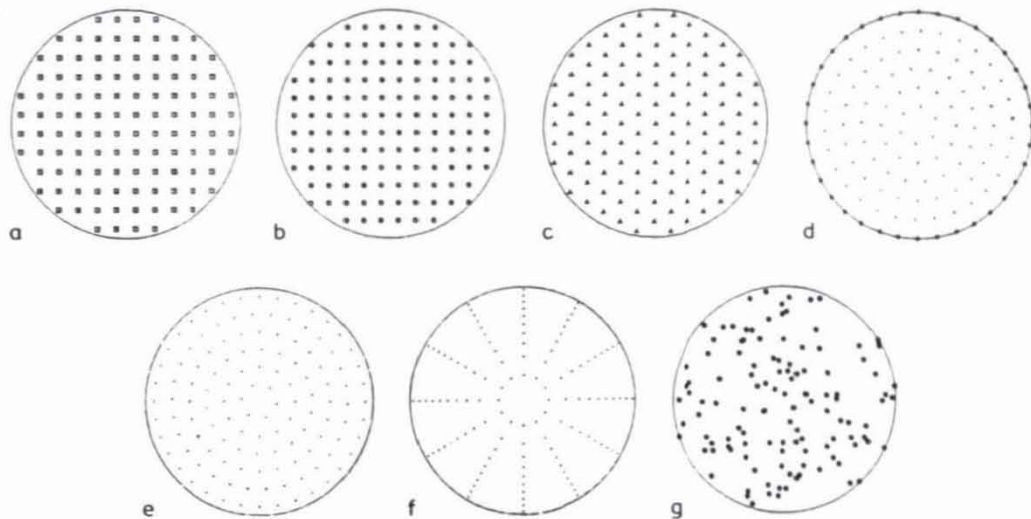


Abb. 4. a) Stützstellenanordnungen.

- a) „Raster 1“ (hier mit 112 Stützstellen).
- b) „Raster 2“ (hier mit 124 Stützstellen).
- c) „Biene“ (hier mit 121 Stützstellen).
- d) „Spot 1“ (hier mit 126 Stützstellen).
- e) „Spot 2“ (hier mit 126 Stützstellen).
- f) „Fresnel“ (hier mit 120 Stützstellen).
- g) „Zufall“ (hier mit 120 Stützstellen).

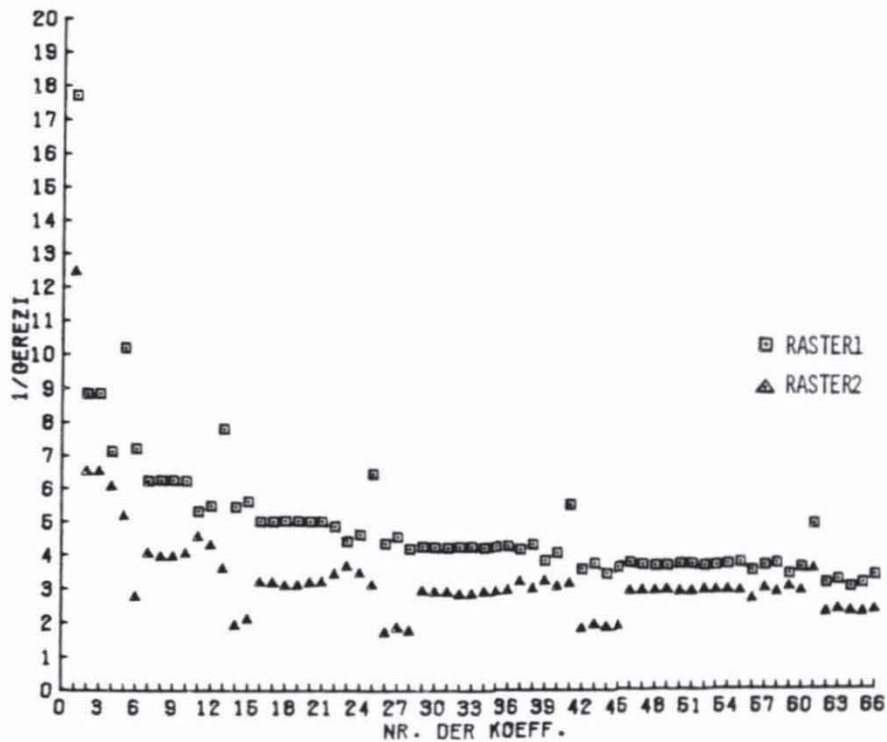


Abb. 5. Vergleich von Raster 1 und Raster 2 vom Typ der Abbildungen 4 a und 4 b.
 Raster 1 hat 316 Stützstellen, Raster 2 hat 332 Stützstellen.

wo die Werte $1/g_j$ (in der Abb. 1/GEREZI) gegenübergestellt sind. Man sieht, daß die Varianzen der Koeffizienten 6, 14, 15, 26, 27, 28 bei „Raster 2“ rund dreimal so groß sind wie bei „Raster 1“, obwohl bei „Raster 2“ mehr Stützstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.

Die Stützstellenanordnung „Biene“ nach Abb. 4c wurde z. B. von J. Kross [16] im Zusammenhang mit der interpolierenden Darstellung von Wellenfronten bzw. Bildfehlern durch Zernike-Polynome benutzt. Die Anordnung nach Abb. 4c ist dadurch gekennzeichnet, daß die Fläche eines um die Stützstelle gekennzeichneten regelmäßigen Sechsecks π/M beträgt, die Fläche aller M Sechsecke also gleich der Fläche des Einheitskreises ist. Erstaunlich ist, daß trotz dieses Versuchs, den Einheitskreis möglichst „gleichmäßig“ zu besetzen, „Raster 1“ überlegen ist.

Die Stützstellenanordnungen „Spot 1“ und „Spot 2“ nach Abb. 4d und Abb. 4e sollen nach einem Vorschlag in [17] benutzt werden, wenn ein „Spot Diagramm“ eines optischen Systems gerechnet werden soll. Für eine gewählte Anzahl A von Ringen ergeben sich bei „Spot 1“ und „Spot 2“ die Radien zu:

$$\text{Spot 1: } r_i = \frac{i}{A}; \quad i = 1, 2, \dots, A$$

$$\text{Spot 2: } r_i = \frac{2i}{2A + 1}; \quad i = 1, 2, \dots, A$$

Die Anzahl a_i der Stützstellen auf dem i -ten Ring wird zu

$$a_i = 6 \cdot i; \quad i = 1, 2, \dots, A$$

gewählt, der „Startwinkel“ $\Theta_0(i)$ wird zu

$$\Theta_0(i) = (i - 1) \cdot 7,5^\circ$$

gewählt, „Spot 1“ lieferte von allen untersuchten Anordnungen die besten Ergebnisse; für die praktische Realisierung ist es jedoch ungünstig, daß der äußerste Ring mit dem Rand des Interferogramms zusammenfällt, der durch Fresnelsche Beugungserscheinungen und andere Unregelmäßigkeiten gestört sein kann.

Die Anordnung „Fresnel“ nach Abb. 4f ist nach unseren Erfahrungen besonders geeignet, wenn mit wenigen Stützstellen und wenigen Entwicklungskoeffizienten eine „Handauswertung“ vorgenommen werden soll. Bei A Ringen ergeben sich die Radien zu

$$r_i = \sqrt{\frac{2i-1}{2A}}; \quad i = 1, 2, \dots, A$$

Die Einteilung in Sektoren ist trivial. Es muß beachtet werden, daß für eine Entwicklung bis zum n -ten Grad mindestens $2n$ Sektoren und $n/2 + 1$ Ringe erforderlich sind. Besser ist es, die Anzahl der Ringe gleich dem höchsten Polynom-Grad zu wählen. Der in Tab. 1 angegebene Wert gilt für 25

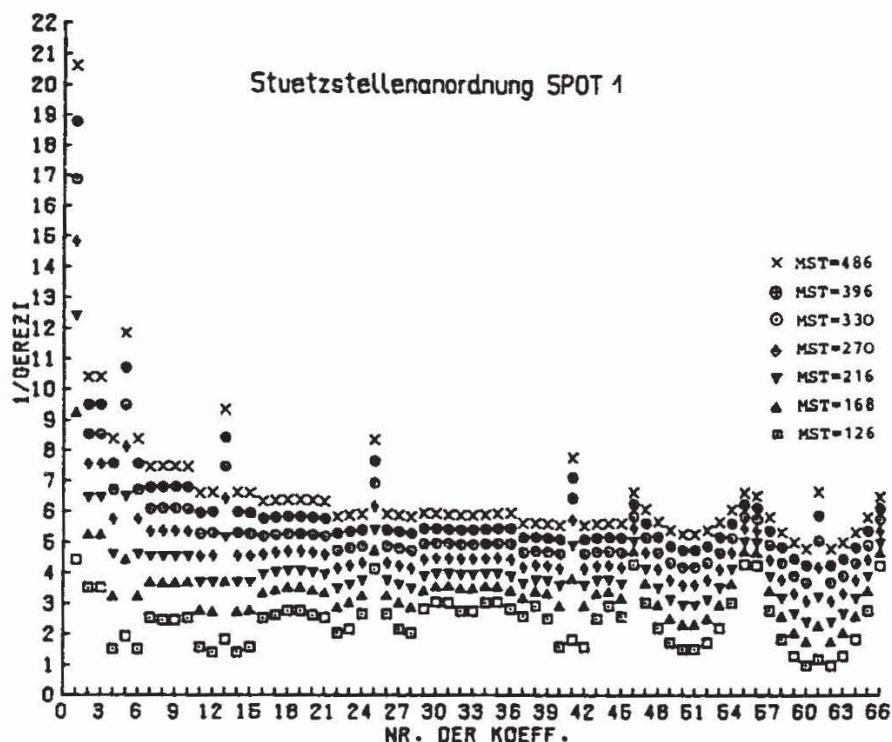


Abb. 6. Einfluß der Stützstellenanzahl am Beispiel „Spot 1“ (siehe auch Abb. 4d). Man beachte die „Girlanden“ bei den geringen Stützstellenzahlen.

Sektoren und 13 Ringe, was bei ca. 325 Stützstellen als optimales Verhältnis gefunden wurde. Ungünstig ist hier die stark ungleichmäßige Verteilung der Stützstellen.

Die Anordnung „Zufall“ nach Abb. 4g wurde hinzugenommen, um die systematischen Anordnungen besser beurteilen zu können.

Der Einfluß der Anzahl MST der Stützstellen bei vorgegebener Anordnung wurde ebenfalls für verschiedene Anordnungen untersucht und soll anhand der Anordnung „Spot 1“ in Abb. 6 veranschaulicht werden. Typisch ist die „Girlandenbildung“ bei den hohen Koeffizienten bei kleiner werdender Stützstellenzahl, die mehr oder weniger bei allen Anordnungen auftrat.

Anhand der Untersuchungen der verschiedenen Anordnungen mit verschiedenen Stützstellenzahlen fiel schließlich die Entscheidung zugunsten des Rasters 1 mit 16 Spalten und 16 Zeilen, wobei 208 Stützstellen innerhalb des Interferogramms liegen. Dieses Raster ist als kleine schwarze Rauten, eingeschachtelt in das Raster vom gleichen Typ mit 64 Spalten und 64 Zeilen, in Abb. 1 zu sehen. Die sich hierbei für $1/g_j = 1/GEREZI$ ergebenden Werte sind in Abb. 7 dargestellt.

3.5 Globale und lokale Interpolation

Es wurde schon erwähnt, daß bei unseren automatischen Streifenanalyse-Programmen (3-Interferogramm-Methode und FT-Methode) die Phasen in einem 64×64 Raster nach Abb. 1 gemessen werden. Dieses engmaschige

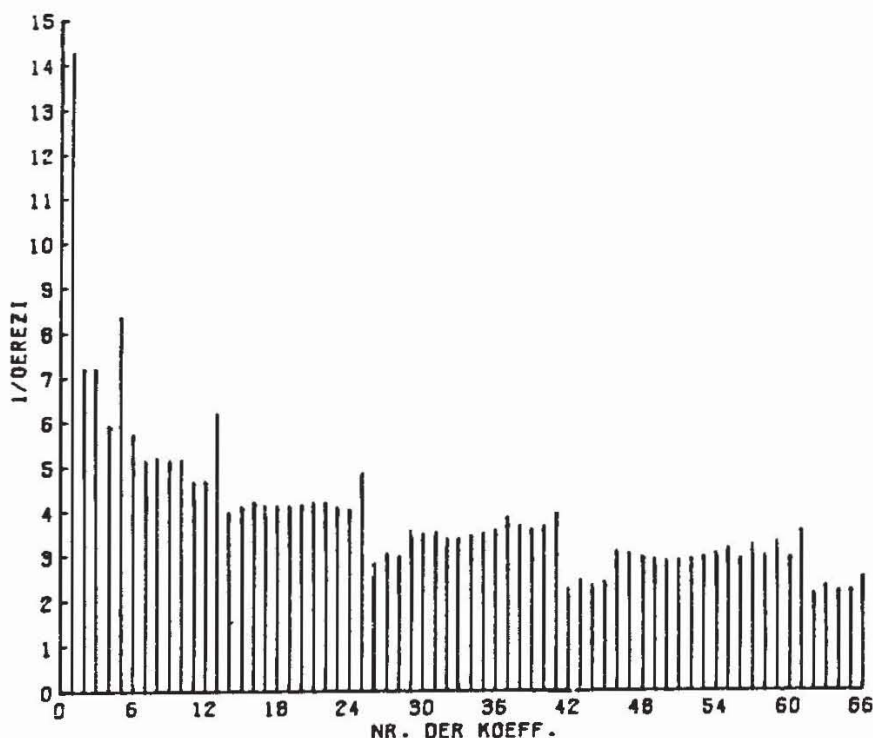


Abb. 7. Gewichtsreziproke für die Anordnung „Raster 1“ mit 208 Stützstellen. Siehe auch Abb. 1. Der Mittelwert ohne Koeffizient Nr. 1 ist hier 3,75.

Gitter ist notwendig, um auch bei Wellenfronten mit großen Gradienten $\partial\varphi/\partial x$ bzw. $\partial\varphi/\partial y$ die Phasensprünge beseitigen zu können.

Die Einbeziehung aller 3228 Phasenwerte in die Ausgleichsrechnung würde jedoch bedeuten, daß für die Berechnung jedes der 66 Koeffizienten das Produkt aus 3228 Meßwerten mit 3228 Gewichten gebildet werden müßte. Darüber hinaus ist die Berechnung der Matrix \bar{G} mit 213048 Elementen auch auf einem Großrechner nicht leicht, wenn nicht unmöglich.

Obwohl die Verwendung aller Phasenwerte in einer *globalen* Interpolationsformel vom theoretischen Standpunkt aus ideal wäre, scheint uns die Methode, zunächst durch *lokale* Interpolation die Datenmenge zu reduzieren, weitaus praxisnäher. Durch ausgleichende Interpolationsformeln können auch hierbei die zufälligen Fehler stark vermindert werden.

Von Vorteil ist, daß durch die „Einschachtelung“ des verwendeten 16×16 Rasters vom Typ der Abb. 4a mit 208 Stützstellen in das 64×64 Raster außer bei den Randpunkten mit einer einheitlichen, einfachen Interpolationsformel gerechnet werden konnte, die in Abb. 8 wiedergegeben ist.

Für die Randpunkte, für die die Zelle nach Abb. 7 nicht mehr vollständig ist, wurden andere Formeln, in die 8, 9, 10 und 12 Punkte eingehen, verwendet. Bei der in Abb. 8 angegebenen Formel ist die Varianz des interpolierten Wertes um den Faktor 10,67 geringer als die der einzelnen Phasenwerte. Bei den Formeln für die Randpunkte ergeben sich die Faktoren 1,60, 2,41, 3,84 und 6,86. Genaugenommen dürfte bei der Analyse der Varianzen der Zernikekoeffizienten also nicht mit einem einheitlichen Wert σ_M^2 für alle 208 Stützstellen gerechnet werden. Die in Abb. 8 angegebenen Faktoren, um die bei

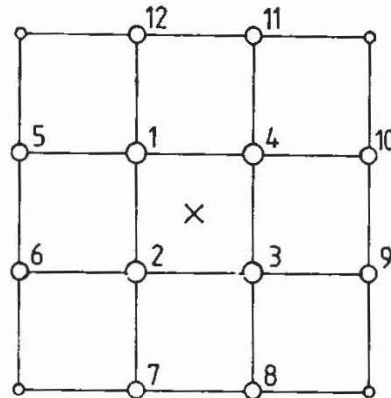


Abb. 8. Ausgleichende Interpolationsformel für den Mittelpunkt einer 4×4 Zelle.

$$F = \{2F(1) + 2F(2) + 2F(3) + 2F(4) + F(5) + F(6) + F(7) + F(8) + F(9) + F(10) + F(11) + F(12)\}/16.$$

dem gewählten Raster die Varianzen der Zernike-Koeffizienten geringer sind als die der Stützstellenwerte, können also rund mit einem Faktor 10 multipliziert werden, wenn von den Varianzen der Phasenwerte ausgegangen wird.

4. Zusammenfassung

Bei automatischen Verfahren der Interferogrammauswertung kommt der überlegten Auswahl und Anordnung der Meßwerte sowie der geschickten Weiterverarbeitung der erheblichen Datenmenge mit dem Rechner große Bedeutung zu, wenn trotz kurzer Meß- und Rechenzeiten auch bei verrauschten Meßwerten eine hohe Genauigkeit in den Entwicklungskoeffizienten erreicht werden soll. Für die praktische Durchführung der Ausgleichsrechnung erweist sich dabei die Eigenschaft der Orthogonalität der Zernike-Polynome in zweifacher Hinsicht als ausgesprochen günstig:

Da die Koeffizienten voneinander unabhängig sind, kann für eine feste Stützstellenanordnung der rechenzeitaufwendige Teil der Ausgleichsrechnung vorweg durchgeführt werden, und zwar unabhängig von den akuten Meßwerten. Dies ist möglich, da die nachträglich zu treffende *Auswahl* der Polynome, die bei der Darstellung des Ergebnisses berücksichtigt werden sollen, den Zahlenwert der einzelnen Koeffizienten nicht verändert. Die Zernike-Polynome sind auch im Fall diskreter, „gleichmäßig“ über dem Einheitskreis verteilter Stützstellen nahezu „orthogonal“, so daß die Rechnung mit hoher numerischer Stabilität verbunden ist. Als Faustregel kann gelten, daß die Anzahl M der Stützstellen mindestens das zweifache, besser das dreifache der Anzahl N berücksichtigter Entwicklungsterme betragen soll. Außerdem sollte darauf geachtet werden, daß sich etliche Stützstellenpunkte dicht am Rand des Interferogramms befinden. Dann ist damit zu rechnen, daß sich die Koeffizienten der Entwicklung mit höherer Genauigkeit ergeben, als die zugrunde liegenden Meßwerte besaßen. Es wurde gezeigt, wie sich die Varianzen der Koeffizienten mit den Regeln der Ausgleichsrechnung bei Bedarf exakt ermitteln lassen.

Unser Interferometer zur Prüfung asphärischer Flächen steht zusammen mit dem Rechner im ersten Stock eines fünfstöckigen Gebäudes in einem gewöhnlichen Büroraum. Wir erreichen im normalen Tagesbetrieb mit beiden automatischen Verfahren zur Phasenmessung (3-Interferogramm-Methode und Fourier-Transformations-Methode) eine Standardabweichung in den 3228 Phasenwerten von rund $\lambda/15$. Durch die ausgleichende Wirkung sowohl der lokalen Interpolation als auch der globalen Ausgleichsrechnung erhalten wir gemessene Reproduzierbarkeiten der Koeffizienten der Zernike-Entwicklung von ca. $\lambda/100$. Wir haben das Gefühl, daß sich bei einer „ruhigeren“ Umgebung dieses Ergebnis noch einmal um einen Faktor 10 verbessern ließe. Damit wäre die Meßgenauigkeit in der gleichen Größenordnung, mit der Wellenfronten sinnvollerweise gerechnet werden. Bei der verwendeten Ansatzlänge bis zum 10ten Grad ist auch kein systematischer Approximationsfehler zu erwarten.

Wir möchten Herrn Dipl.-Phys. B.Dörband für viele Diskussionen über die automatische Interferogrammauswertung danken. Herr Dörband hat auch die ersten drei der im zweiten Abschnitt genannten Verfahren zur Messung der Phasenfront realisiert. Unser Dank gilt auch Herrn Dipl.-Ing. W.Krause, der stets in allen Fragen des Rechners und Programmierens behilflich war. Dem BMFT sei für die finanzielle Unterstützung des Projektes 13 N 5260 gedankt.

Literatur

- [1] Tiziani, H.J.: Prospects of testing aspheric surfaces with computer-generated holograms.
Aspheric Optics: Design, Manufacture, Testing (SIRA), October 22–23, 1980, London, England. SPIE Volume 235, S. 72–79.
- [2] Guenther, A.H., D.H.Liebenberg, Eds., Optical Interferograms – Reduction and Interpretation, ASTM SMP 666, American Society for Testing and Materials, 1978.
- [3] Dörband, B., Optik **60** (1982) 161.
- [4] Takeda, M., H.Ina and S.Kobayashi, J. Opt. Soc. Am. **72** (1982) 156.
- [5] Johnson, G.W., D.C.Leiner, D.T.Moore, SPIE Vol. 126, Clever Optics (1977) 152.
- [6] Bruning, J.H., In Optical shop testing, D. Malacara ed. John Wiley & Sons, New York (1978).
- [7] Mottier, F.M., Opt. Eng. **18** (1979) 464.
- [8] Massie, N.A., Appl. Opt. **19** (1980) 156.
- [9] Born, M. and E.Wolf: Principles of Optics. Pergamon Press, New York (1975) S. 464.
- [10] Malacara, D., Zernike Polynomials and Wavefront Fitting. Optical shop testing. John Wiley & Sons, New York (1978) Appendix 2, S. 489.
- [11] Barakat, R., J. Opt. Soc. Am. **70** (1980) 739.
- [12] Zurmühl, R., Praktische Mathematik. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1965).
- [13] Rimmer, M.P., C.M.King, and D.G.Fox, Appl. Opt. **11** (1972) 2790.
- [14] Loomis, J., In [2], S. 71.
- [15] Wang, J.Y. and D.E.Silva, Appl. Opt. **19** (1980) 1510.
- [16] Kross, J., Optik **29** (1969) 65.
- [17] Cox, A., A System of Optical Design. The Focal Press, London, New York (1964), S. 378.