Institut für Formale Methoden der Informatik
Abteilung Theoretische Informatik
Universität Stuttgart
Universitätsstraße 38
D–70569 Stuttgart

Studienarbeit Nr. 2417

Kaskadenzerlegung spezieller Automatenklassen

Jan Philipp Wächter

Studiengang: Informatik

Prüfer: Prof. V. Diekert

Betreuer: Dr. M. Kufleitner

begonnen am: 18. Januar 2013

beendet am: 19. Juli 2013

CR-Klassifikation: F.4.m

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Der Begriff des endlichen Automaten spielt für die Informatik eine große Rolle. Vom Chip-Design über die Progammimplementierung bis hin zur Sprach- und Automatentheorie findet er Anwendung. Dies ist Grund genug sich mit endlichen Automaten genauer zu beschäftigen. Auf algebraischer Seite ist der endliche Automat eng verwandt mit der Halbgruppe oder dem Monoid. Zwar sind diese Konzepte weniger anschaulich als ein endlicher Automat, sie erlauben jedoch einen anderen Blickwinkel und machen die mathematische Betrachtung an einigen Stellen einfacher.

Durch das Krohn-Rhodes-Theorem [4] ist bekannt, dass sich eine beliebige endliche Halbgruppe in einfache Gruppen und FlipFlops zerlegen lasst. Die Rückkopplungsfreiheit dieser Zerlegung motiviert den Begriff der „Kaskadenzerlegung“. Während die einfachen Gruppen, die dabei auftreten, in der ursprünglichen Halbgruppe selbst enthalten sind, ist dies beim FlipFlop nicht notwendigerweise der Fall. Es stellt sich daher die Frage: Gibt es eine Menge von strukturell möglichst einfachen Halbgruppen, die als Bausteine eine Zerlegung jeder – auch komplexeren – Halbgruppe so ermöglichen, dass jeder verwendete Baustein in der Halbgruppe selbst enthalten ist? Ist die Menge endlich und wie funktioniert die Zerlegung? Angetrieben durch diese Fragestellung werden im Folgenden Zerlegungen von Halbgruppen und Monoiden aus speziellen Klassen genauer untersucht, für die die Frage nach den Bausteinen beantwortet werden kann.

Das erste Kapitel führt dabei in die wichtigsten Begriffe der Thematik ein und vereinbart Konventionen und Notation, die in den anschließenden Kapiteln Verwendung finden. Insbesondere findet eine Definition der Zerlegung einer Halbgruppe durch den Begriff des Divisors und des Kranzprodukts statt. Am Ende werden noch einige Halbgruppen genauer vorgestellt, die später, z. B. als Bausteine, von Bedeutung sind.

Nachdem aus dem ersten Kapitel bekannt ist, worum es sich bei einer Transformationshalbgruppe handelt, behandelt das zweite Kapitel wie eine solche in ihre starken Zusammenhangskomponenten zerlegt werden kann. Zunächst wird dabei die Zerlegung sogenannter $\mathcal{R}$-trivialer Halbgruppen besprochen. Diese gehören zu Transformationshalbgruppen, deren starke Zusammenhangskomponenten trivial sind. Die Zerlegung liefert dabei einen Beweise für eine Richtung von Stifflers Theorem [7], das die $\mathcal{R}$-trivialen Halbgruppen über ihre Zerlegung charakterisiert. Anschließend wird der Ansatz auf Transformationshalbgruppen mit nicht-trivialen starken Zusammenhangskomponenten verallgemeinert. Durch diese Verallgemeinerung wird es dann möglich sein, eine Aussage ähnlich zur einen Richtung von Stifflers Theorem über Halbgruppen, bei denen die Greensche $\mathcal{R}$-Relation mit der Greenschen $\mathcal{H}$-Relation übereinstimmt, zu machen.

Diese Aussage wird im dritten Kapitel im Wesentlichen erneut bestätigt. Allerdings findet dies hier über eine andere Herangehensweise statt. Zugrunde liegt dabei die sogenannte „Holonomie-Zerlegung“, deren wichtigste Ideen zunächst kurz vorgestellt werden.

Die Holonomie-Zerlgeung liefert einen Beweis für das Krohn-Rhodes-Theorem, worauf anschließend ebenfalls kurz eingegangen wird. Dies geschieht im Zuge der Untersuchung von Konstanten, die zu einer Transformationshalbgruppe hinzugenommen werden können. Während Konstanten normalerweise beliebig viele Zustandswechsel in einer Transformationshalbgruppe ermöglichen, ist es möglich die Anzahl dieser Wechsel einzuschränken. In einigen Fällen reichen die so eingeschränkten Konstanten jedoch vollkommen aus, was anschließend untersucht wird. Diese Untersuchung bestätigt schließlich das Ergebnis aus dem zweiten Kapitel weitgehend.

Das vierte Kapitel befasst sich mit der Zerlegung sogenannter 0-einfacher Halbgruppen. Auch für diese ist es möglich eine Menge von Bausteinen zu bestimmen. Abschließend wird diskutiert, welche Probleme sich beim Versuch die Zerlegung von 0-einfachen Halbgruppen auf komplexere Halbgruppen zu übertragen ergeben und welche Auswirkungen auf eine mögliche Menge von Bausteinen für allgemeine Halbgruppen dies hat.

Im letzten Kapitel findet sich schließlich eine Zusammenfassung aller vorherigen Ergebnisse.

1 Grundlagen

1.1 Einfache Halbgruppentheorie

Hinter jedem Automaten verbirgt sich eine Halbgruppe, deswegen ist es nötig sich mit diesen auseinanderzusetzen, bevor eine tiefer gehende Beschäftigung mit Automaten oder Transformationshalbgruppen möglich ist. In diesem Abschnitt werden daher einige einfache Begriffe der Halbgruppentheorie eingeführt.

Am Beginn steht dabei die Definition einer Halbgruppe selbst:

1.1.1 Grundbegriffe

Definition (Halbgruppe)**.** *Ein Tupel* $(S, *)$ *aus einer nicht-leeren Menge* S *mit einer Verknüpfung* $* : S \times S \to S$ *heißt* Halbgruppe*, falls die Verknüpfung assoziativ ist, d. h. falls für alle* $r, s, t \in S$ *gilt:*

$$(r * s) * t = r * (s * t)$$

Konvention. *Für Halbgruppen (und daher auch für Monoide und Gruppen) werden im Folgenden folgende Konventionen benutzt:*

- *Wie bereits in der Definition der Halbgruppe wird die Verknüpfung nicht als Funktion in der Form* $*(s, t)$ *sondern in Infix-Notation* $s * t$ *geschrieben.*
- *In der Regel wird auf die explizite Angabe der Halbgruppenverknüpfung verzichtet, es wird also* S *statt* $(S, *)$ *geschrieben.*
- *Insbesondere dann, wenn keine Verknüpfung angegeben ist, aber auch in anderen Fällen, wird bei der Verknüpfung zweier Halbgruppenelement das Verknüpfungssymbol ganz weggelassen. Es wird also* st *statt* $s * t$ *geschrieben. Die Verknüpfung eines Elements mit sich selbst wird insbesondere dann als Potenz geschrieben, also beispielsweise* $aa = a^2$ *aber auch* $aaa = a^3$*.*
- *Alle auftretenden Halbgruppen sind endlich, daher wird in der Regel nicht explizit auf die Endlichkeit einer Halbgruppe hingewiesen.*

In Halbgruppen gibt es einige besondere Elemente, z. B. idempotente Elemente oder Nullen.

Definition (Idempotent)**.** *Ein Element* e *einer Halbgruppe* S *heißt* idempotent*, wenn* $e^2 = e$ *gilt.*
Die Menge der idempotenten Elemente einer Halbgruppe S *wird mit* $E(S)$ *bezeichnet.*

Definition (Rechtsnull, Null)**.** *Ein Element a einer Halbgruppe S heißt* Rechtsnull*, wenn für alle Elemente $s \in S$ gilt: $sa = a$.*
Ein Element 0 einer Halbgruppe S heißt Null*, wenn für alle Elemente $s \in S$ gilt: $s0 = 0s = 0$.*

Hat eine Halbgruppe eine Null, so ist diese offensichtlich eindeutig.

Nun zu den beiden wichtigsten Spezialfällen einer Halbgruppe, die als weitgehend bekannt vorausgesetzt werden:

Definition (Monoid, Gruppe)**.** *Eine Halbgruppe M heißt* Monoid*, falls es ein eindeutiges* neutrales *Element $1 \in M$ gibt, sodass für alle Elemente $m \in M$ gilt:*

$$1m = m1 = m$$

Ein Monoid G heißt Gruppe*, falls es für jedes Element $g \in G$ ein eindeutiges* inverses *Element $g^{-1} \in G$ gibt, sodass gilt:*

$$gg^{-1} = g^{-1}g = 1$$

Konvention. *Auch für Monoide sollen einige Konventionen vereinbart werden:*

- *Das neutrale Element eines Monoids M wird 1_M oder ϵ_M geschrieben. Falls das zugehörige Monoid aus dem Kontext klar ist, wird 1 oder ϵ geschrieben.*
- *Aus jeder Halbgruppe S, die kein Monoid ist, geht durch Adjunktion eines neutralen Elements ein Monoid hervor, dieses wird mit S^1 bezeichnet. Für ein Monoid M gilt $M^1 := M$.*
- *Im Gegensatz dazu bezeichnet S^I das Monoid, das durch Adjunktion eines (neuen) neutralen Elements hervorgeht. Es wird als selbst dann ein neues Element aufgenommen, wenn S bereits ein Monoid ist und damit über ein neutrales Element verfügt. Das etwaige ursprüngliche neutrale Element ist dann kein solches mehr.*
- *Ebenso wie um ein neutrales Element kann eine Halbgruppe S auch um eine Null ergänzt werden. Die Halbgruppe, die um eine Null ergänzt wird, falls noch keine vorhanden ist, wird mit S^0 bezeichnet und die Halbgruppe, die um eine Null ergänzt wird unabhängig davon, ob bereits eine vorhanden ist, mit S^N.*

Um Aussagen über Halbgruppen treffen zu können, ist es oft ausreichend diese Aussagen lediglich für die erzeugenden Elemente der Halbgruppe zu zeigen.

Definition (Erzeugende Elemente)**.** *Eine Halbgruppe S heißt* erzeugt *durch die Elemente $a_1, a_2, \ldots$, falls sich jedes Element $s \in S$ als $s = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}$ schreiben lässt für $r \geq 1$.*
Ein Monoid M heißt erzeugt *durch die Elemente $a_1, a_2, \ldots$, falls sich jedes Element $m \in M$ als $m = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}$ schreiben lässt für $r \geq 0$.*
Eine Halbgruppe oder ein Monoid heißt endlich erzeugt*, falls sie bzw. es durch eine endliche Menge von Elementen erzeugt wird.*

Konvention. *Ist im Folgenden von Erzeugung, Erzeugern oder erzeugenden Elementen die Rede, ergibt sich aus dem Kontext, ob es sich dabei um die Erzeugung als Halbgruppe oder um die als Monoid handelt.*

Für Halbgruppen von großer Bedeutung ist der Spezialfall einer Äquivalenzrelation: Die Kongruenz.

Definition. *Sei $\triangle \subseteq S \times S$ eine Äquivalenzrelation für einer Halbgruppe S. $\triangle$ heißt* Linkskongruenz*, falls für alle Element $r, s, t \in S$ gilt:*

$$s \triangle t \implies rs \triangle rt$$

Analog heißt $\triangle$ Rechtskongruenz*, falls für alle Element $r, s, t \in S$ gilt:*

$$s \triangle t \implies sr \triangle tr$$

Gilt für alle Element $s, t, s', t' \in S$

$$s \triangle t \text{ und } s' \triangle t' \implies ss' \triangle tt',$$

so heißt $\triangle$ Kongruenz*.*

1.1.2 Greensche Relationen

Während die bisher eingeführten Begriffe weitgehend bekannt sein sollten, sind die folgenden Begriffe und Sätze enger an die Halbgruppentheorie gebunden. Details zu den vorgestellten Begriffen finden sich z. B. in [3].

Definition (Greensche Relationen)**.** *Seien $s, s' \in S$ zwei Elemente einer Halbgruppe S. Die Relationen $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$ und $\mathcal{H} \subseteq S \times S$ seien definiert durch:*

$$\begin{aligned}
s \,\mathcal{L}\, s' &:\Longleftrightarrow \exists l, l' \in S^1 : ls = s' \text{ und } l's' = s \\
s \,\mathcal{R}\, s' &:\Longleftrightarrow \exists r, r' \in S^1 : sr = s' \text{ und } s'r' = s \\
s \,\mathcal{J}\, s' &:\Longleftrightarrow \exists l, l', r, r' \in S^1 : lsr = s' \text{ und } l's'r' = s \\
s \,\mathcal{H}\, s' &:\Longleftrightarrow s \,\mathcal{L}\, s' \text{ und } s \,\mathcal{R}\, s'
\end{aligned}$$

Leicht überprüft man, dass es sich bei allen diesen Relationen um Äquivalenzrelationen handelt. Ebenfalls leicht lässt sich überprüfen, dass es sich bei $\mathcal{L}$ um eine Rechtskongruenz und bei $\mathcal{R}$ um eine Linkskongruenz handelt. Die Definition von $\mathcal{H}$ lässt sich auch schreiben als: $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Für Details hierzu siehe [3, S. 45ff.].

Für die Relationen $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ und $\mathcal{J}$ existiert jeweils eine äquivalente Definition. Hierzu sind jedoch zuerst einige weitere Begriffe nötig.

Definition (Linksideal, Rechtsideal, Ideal)**.** *Sei S eine Halbgruppe. Eine Teilmenge $I \subseteq S$ heißt* Linksideal*, falls für alle $s \in S$ und alle $i \in I$ gilt:*

$$si \in I$$

Analog heißt I Rechtsideal*, falls für alle $s \in S$ und alle $i \in I$ gilt:*

$$is \in I$$

Ist I sowohl Links- als auch Rechtsideal, so heißt I Ideal*.*

Man beachte, dass für ein Element $t \in S$ einer Halbgruppe S, $S^1t = \{st : s \in S^1\}$ ein Linksideal ist. Analog ist $tS^1 = \{ts : s \in S^1\}$ ein Rechtsideal und $S^1tS^1 = \{sts' : s, s' \in S^1\}$ ein Ideal. Der Übergang zum Monoid S^1 ist dabei nötig, damit t selbst enthalten ist.

Definition (Erzeugte (Links-/Rechts-)Ideale)**.** *Sei $t \in S$ ein Element einer Halbgruppe S. S^1t heißt* das von t erzeugte Linksideal*, tS^1* das von t erzeugte Rechtsideal *und S^1tS^1* das von t erzeugte Ideal*.*

Dies erlaubt nun eine äquivalente Charakterisierung der Greenschen Relationen über die erzeugten (Links-/Rechts-)Ideale, die sich durch einfaches Nachrechnen ergibt:

Lemma. *Für die Element $s, s' \in S$ einer Halbgruppe S gilt:*

$$\begin{aligned} s \mathrel{\mathcal{L}} s' &\iff S^1s = S^1s' \\ s \mathrel{\mathcal{R}} s' &\iff sS^1 = s'S^1 \\ s \mathrel{\mathcal{J}} s' &\iff S^1sS^1 = S^1s'S^1 \end{aligned}$$

Zu allen Elementen in einer $\mathcal{R}$-Klasse gehört also ein Rechtsideal. Damit lassen sich die $\mathcal{R}$-Klassen bezüglich Inklusion der jeweils zugehörigen Rechtsideale anordnen. Eine $\mathcal{R}$-Klasse R_1 heißt dann *kleiner* bzw. *kleiner gleich* R_2, wenn das zugehörige Rechtsideal von R_1 (echt) im zugehörigen Rechtsideal von R_2 enthalten ist. Analog funktioniert dies auch mit $\mathcal{L}$- und $\mathcal{J}$-Klassen.

In endlichen Halbgruppen lässt sich $\mathcal{J}$ noch auf eine weitere Art beschreiben:

Definition ($\mathcal{D}$)**.** *Seien $s, s' \in S$ zwei Elemente einer Halbgruppe S. Die Relationen $\mathcal{D}$ ist definiert dadurch, dass $s \mathrel{\mathcal{D}} s'$ gilt, falls es Elemente $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ $(n \geq 0)$ gibt mit:*

- $t_0 = s$,
- $t_{n+1} = s'$ *und*
- $t_i \mathrel{\mathcal{R}} t_{i+1}$ *oder* $t_i \mathrel{\mathcal{L}} t_{i+1}$ *für* $i = 0, 1, \ldots, n$.

Mithilfe der Definition zeigt man leicht, dass $\mathcal{D}$ eine Äquivalenzrelation ist. Da $\mathcal{L}$ und $\mathcal{R}$ kommutieren, lässt sich $\mathcal{D}$ jedoch wesentlich einfacher definieren (vgl. [3, S. 46]):

Lemma (Alternative Definition von $\mathcal{D}$)**.** *Für zwei Element s und s' einer Halbgruppe S gilt:*

$$\begin{aligned} s \mathrel{\mathcal{D}} s' &\iff \exists t \in S : s \mathrel{\mathcal{R}} t \text{ und } t \mathrel{\mathcal{L}} s' \\ &\iff \exists t \in S : s \mathrel{\mathcal{L}} t \text{ und } t \mathrel{\mathcal{R}} s' \end{aligned}$$

Es gilt nun, dass $\mathcal{D}$ (in endlichen Halbgruppen) mit $\mathcal{J}$ übereinstimmt (vgl. [3, S. 47]), weswegen beide Relationen im Folgenden gegeneinander ausgetauscht werden können[1]:

Lemma. *In einer endlichen Halbgruppe gilt:* $\mathcal{D} = \mathcal{J}$

Zwischen den Greenschen Relationen gibt es enge Zusammenhänge. Direkt aus der oben gegebenen Definition von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$ folgt beispielsweise, dass $\mathcal{R}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{J}$ ist, eben so wie $\mathcal{L}$; d. h. es gilt $s \mathrel{\mathcal{R}} s' \implies s \mathrel{\mathcal{J}} s'$ bzw. $s \mathrel{\mathcal{L}} s' \implies s \mathrel{\mathcal{J}} s'$. Eine $\mathcal{J}$-Klasse besteht also sowohl aus vollständigen $\mathcal{R}$- als auch aus vollständigen $\mathcal{L}$-Klassen, die sich ihrerseits wieder in vollständige $\mathcal{H}$-Klassen zerlegen lassen, denn $\mathcal{H}$ ist seinerseits sowohl Verfeinerung von $\mathcal{R}$ als auch von $\mathcal{L}$ (und damit natürlich auch von $\mathcal{J}$). Es gilt sogar ein noch stärkerer Zusammenhang, der hier nur anschaulich skizziert wird (Beweise und Details finden sich z. B. in [3]): Zerlegt man eine $\mathcal{J}$-Klasse J in $\mathcal{H}$-Klassen, dann lassen sich diese so in der Form $H_{i,\lambda}$ nummerieren, dass alle mit gleichem i genau eine $\mathcal{R}$-Klassen in J bilden und alle mit gleichem λ genau eine $\mathcal{L}$-Klasse. Außerdem sind alle diese $\mathcal{H}$-Klassen gleich groß.

Dies erlaubt folgende Darstellung einer $\mathcal{J}$-Klasse: Alle $\mathcal{H}$-Klassen einer $\mathcal{R}$-Klasse R_i werden in einer Zeile und alle $\mathcal{H}$-Klassen einer $\mathcal{L}$-Klasse L_λ in einer Spalte angeordnet. $\mathcal{H}$-Klassen, die ein Idempotentes enthalten, werden mit einem * versehen.

L_1	L_2		L_n	
$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$\dots$	$H_{1,n}$	R_1
$H_{2,1}$	$H_{2,2}$	$\dots$	$H_{2,n}$	R_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$H_{m,1}$	$H_{m,2}$	$\dots$	$H_{m,n}$	R_m

Alle $\mathcal{J}$-Klassen einer Halbgruppe werden wiederum entsprechend ihrer Ordnung von oben (größtes Ideal) nach unten (kleinstes Ideal) angeordnet. Ein Beispiel hierfür findet sich in Unterabschnitt 1.3.3.

Ein weiterer Zusammenhang ist der folgende, der später noch Verwendung finden wird. Sein links-rechts-duales Ergebnis wird auch als *Greens Lemma* bezeichnet.

Lemma 1. *Seien s und t zwei $\mathcal{R}$-äquivalente Element einer Halbgruppe S. Sei $(x, y) \in S \times S$ ein Paar von Elementen mit*

$$sx = t \qquad s = ty.$$

Die Rechtstranslation mit x ist dann eine $\mathcal{R}$-Klassen erhaltende Bijektion von $[s]_\mathcal{L}$ nach $[t]_\mathcal{L}$, deren inverse Abbildung die Rechtstranslation mit y ist.

Beweis. (Siehe [3, S. 49]) □

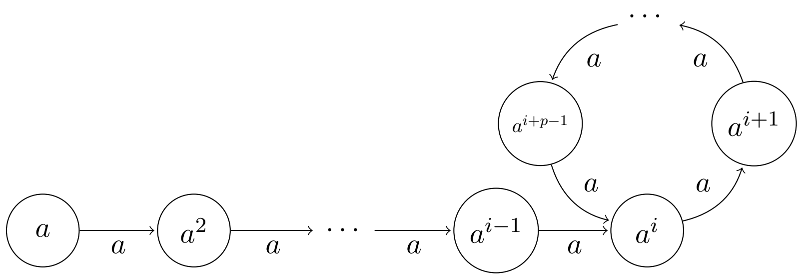
[1] In der Regel wird dabei $\mathcal{J}$ geschrieben werden

1.1.3 Monogenische Halbgruppen

Dieser Unterabschnitt widmet sich sogenannten *monogenischen* Halbgruppen, deren Untersuchung sich hier zwar als recht einfach herausstellt, aber auch große Auswirkungen auf allgemeine Halbgruppen besitzt.

Definition. *Eine (endliche) Halbgruppe S heißt* monogenisch *(oder* zyklisch*), wenn sie von nur einem Element erzeugt wird.*

Sei $S = \langle a \rangle_S$ eine von a erzeugte monogenische Halbgruppe. S wird dann im Wesentlichen durch zwei Parameter bestimmt: den Index i und die Periode p. i und p sind dabei als die kleinsten Zahlen (größer gleich 1) definiert, so dass $a^i = a^{i+p}$. Dies wird im Rechts-Cayley-Graph der Halbgruppe deutlicher:



Der Index i bezeichnet die Länge des Anfangsstücks und die Periode p die Länge des Kreises.

Aufgrund dieser Beschaffenheit monogenischer Halbgruppen gibt es dort stets eine (kleinste) Potenz ω, so dass a^ω idempotent ist, wähle dazu ω minimal, aber so, dass $\omega \geq i$ und $\omega \equiv 0 \mod p$. Da jedes Element s einer (beliebigen) Halbgruppe S Element der durch s aufgespannten monogenischen Unterhalbgruppe ist, gilt:

Korollar 1. *Zu jedem Element s einer Halbgruppe S findet sich eine (positive) Potenz ω, so dass s^ω idempotent ist.*

Bildet man das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Potenzen aller Elemente, so kommt man zu folgender Aussage:

Korollar (Fortsetzung von Korollar 1)**.** *In jeder Halbgruppe S findet sich eine (positive) Potenz ω, so dass s^ω für alle Elemente $s \in S$ idempotent ist.*

1.1.4 Idempotente Elemente

Für die Struktur einer Halbgruppe sind idempotente Element von wichtiger Bedeutung, daher haben Klassen, die ein solches Element enthalten, einen besonderen Namen[2]:

Definition (Reguläre $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$-, $\mathcal{H}$- und $\mathcal{J}$-Klassen)**.** *Eine $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$-, $\mathcal{H}$- oder $\mathcal{J}$-Klasse heißt* regulär*, falls sie ein Idempotentes enthält.*

[2]Die Definition in [3] unterscheidet sich von der hier gegeben, ist aber zu ihr äquivalent.

Die Regularität einer Klasse erlaubt einige wichtige Rückschlüsse auf deren Struktur. Dabei zunächst zu den $\mathcal{H}$-Klassen:

Lemma 2. *Eine $\mathcal{H}$-Klasse ist genau dann regulär, wenn sie (bezüglich der Halbgruppenverknüpfung) eine Gruppe bildet.*

Beweis. Für die Hinrichtung vergleiche [3, S. 50]. Für die Rückrichtung ist das neutrale Element der Gruppe idempotent. □

Lemma 3. *Die regulären $\mathcal{H}$-Klassen einer $\mathcal{J}$-Klasse sind als Gruppen betrachtet isomorph.*

Beweis. (Vgl. [3, S. 53]). □

Dieser Zusammenhang motiviert die folgende Definition:

Definition (Gruppenfrei)**.** *Eine Halbgruppe S heißt* gruppenfrei[3]*, wenn jede ihrer regulären $\mathcal{H}$-Klassen trivial ist, d. h. nur aus einem Element besteht.*

Aber auch über reguläre $\mathcal{J}$-Klassen lassen sich Aussagen machen. Zunächst ist unmittelbar klar, dass jede $\mathcal{J}$-Klasse regulär ist, wenn eine ihrer $\mathcal{R}$- oder $\mathcal{L}$-Klassen regulär ist. Andererseits gilt sogar:

Lemma 4. *In einer regulären $\mathcal{J}$-Klasse ist jede $\mathcal{R}$- und jede $\mathcal{L}$-Klasse regulär.*

Beweis. (Vergleiche [3, S. 51]) □

Die Position idempotenter Elemente in einer $\mathcal{J}$-Klasse erlaubt es Rückschlüsse auf die Multiplikation in der Halbgruppe zu ziehen. Zunächst sollte man dazu bemerken, dass das Produkt zweier Elemente s und t einer $\mathcal{J}$-Klasse nur in der selben oder einer kleineren $\mathcal{J}$-Klasse liegen kann, denn es gilt $S^1 st S^1 \subseteq S^1 s S^1$. Liegt st dabei in der selben $\mathcal{J}$-Klasse, lässt sich seine Position weiter einschränken:

Lemma. *Für zwei Elemente s und t einer Halbgruppe gilt:*

$$s \mathrel{\mathcal{J}} st \implies s \mathrel{\mathcal{R}} st \qquad \text{und} \qquad s \mathrel{\mathcal{J}} st \implies t \mathrel{\mathcal{L}} st \tag{1.1}$$

Beweis. Zu zeigen ist zunächst, dass es ein $x \in S$ gibt, so dass $stx = s$ ist. Es finden sich $a, b \in S$ derart, dass $s = astb$ gilt. Sei nun ω die kleinste Zahl großer 0, für die sowohl a^ω als auch $(tb)^\omega$ idempotent ist (Diese existiert nach Korollar 1 durch das kleinste gemeinsame Vielfache). Durch rekursives Einsetzen und Idempotenz gilt dann:

$$s = a^\omega s(tb)^\omega = a^\omega s(tb)^\omega (tb)^\omega = s(tb)^\omega = stb(tb)^{\omega-1}$$

Setzte also $x := b(tb)^{\omega-1}$. Analog findet sich auch $y \in S$ mit $yst = t$. □

[3] Oft wird auch der Begriff *aperiodisch* verwendet. Man beachte aber, dass dieser Begriff in [3] anders gebraucht wird.

Um eine Multiplikationsregel aufstellen zu können, fehlt nun nur noch ein Zusammenhang mit den idempotenten Elementen:

Lemma. *Seien s und t zwei Elemente einer Halbgruppe mit $s \mathcal{J} t$. Dann gilt:*

$$st \in [s]_{\mathcal{R}} \cap [t]_{\mathcal{L}} \Longleftrightarrow [s]_{\mathcal{L}} \cap [t]_{\mathcal{R}} \text{ ist reguläre } \mathcal{H}\text{-Klasse}$$

Beweis. (Vergleiche [3, S. 54]) □

Fasst man diese Aussagen zusammen ergibt sich eine Regel, wo das Produkt zweier Elemente der selben $\mathcal{J}$-Klasse zu finden ist:

Satz 1. *Seien s und t zwei Elemente aus der selben $\mathcal{J}$-Klasse einer Halbgruppe, dann gilt:*

$$\begin{aligned} [s]_{\mathcal{L}} \cap [t]_{\mathcal{R}} \text{ ist regulär} &\Longrightarrow st \in [s]_{\mathcal{R}} \cap [t]_{\mathcal{L}} \text{ und damit } s \mathcal{J} t \mathcal{J} st \\ [s]_{\mathcal{L}} \cap [t]_{\mathcal{R}} \text{ ist nicht regulär} &\Longrightarrow st \text{ liegt in einer kleineren } \mathcal{J}\text{-Klasse,} \\ &\quad\ \text{damit gilt } s \mathcal{J} t \not\mathcal{J} st \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Multiplikation zweier Elemente aus unterschiedlichen $\mathcal{J}$-Klassen kann schließlich nur in einer $\mathcal{J}$-Klasse liegen, deren Ideal in den Idealen der jeweiligen Elemente enthalten ist (wie man durch einfache Rechnung leicht einsieht).

1.2 Transformationshalbgruppen und Teilbarkeit

Bei einer Transformationshalbgruppe handelt es sich im Wesentlichen um eine Halbgruppe, die auf einer Menge von Zuständen operiert. Wie sich herausstellt, hat dieses Konstrukt nahe Verwandtschaft zum deterministischen endlichen Automaten

1.2.1 Grundbegriffe

Definition (Halbgruppenoperation, Monoidoperation)**.** *Sei Q eine Menge und S eine Halbgruppe. Q^Q bezeichne das Monoid bestehend aus der Menge der (vollständigen) Funktionen von Q nach Q mit der Identität auf Q als neutralem Element und der umgekehrten Funktionenkomposition $\circ^{-1}$ als Verknüpfung:*

$$(f \circ^{-1} g)(q) := g(f(q))$$

Ein Halbgruppenhomomorphismus $\alpha : S \to Q^Q$ heißt Halbgruppenoperation *von S auf Q.*
Ist S ein Monoid und α ein Monoidhomomorphismus, so heißt α Monoidoperation *von S auf Q.*

Für eine Monoidoperation muss also insbesondere $\alpha(1) = id_Q$ gelten. Operiert ein Monoid M auf einer Menge als Halbgruppe, so ist dies nicht zwangsläufig eine Monoidoperation (ein Gegenbeispiel findet sich weiter unten). Ist α allerdings eine Monoidoperation von S auf Q und S sogar eine Gruppe, so ist α auch ein Gruppenhomomorphismus.

Konvention. *Ist die verwendete Halbgruppenoperation aus dem Kontext zu erkennen, wird statt $\alpha(s)(q)$ schlicht $q \cdot s$ geschrieben. Da α ein Homomorphismus ist, gilt dann $(q \cdot s) \cdot t = q \cdot (st)$, daher können Klammern weggelassen werden.*

Da es sich bei α um einen Homomorphismus handelt, ist es ausreichend nur die Operation der Erzeugenden explizit anzugeben; daraus ergibt sich auch die Operation der zusammengesetzten Elemente.

Eine Halbgruppe S operiert stets auf sich selbst durch Rechtstranslation, dabei ist die Halbgruppenoperation die normale Halbgruppenverknüpfung ($s, t \in S$):

$$s \cdot t := st = s * t$$

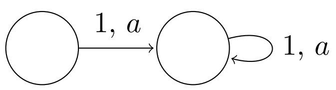
Die Definition einer Transformationshalbgruppe orientiert sich an der aus [2], insbesondere wird gefordert, dass die Halbgruppenoperation treu ist. Anders als in [2] sind Transformationshalbgruppen hier jedoch stets vollständig.

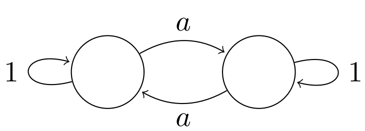
Definition (Transformationshalbgruppe, -monoid und -gruppe)**.** *Die Halbgruppe S operiere auf einer endlichen, nicht-leeren Menge Q.*
(Q, S) heißt Transformationshalbgruppe*, falls die Operation von S treu ist, d. h. falls sich für alle $S \ni s \neq s' \in S$ ein $q \in Q$ findet, sodass $q \cdot s \neq q \cdot s'$ ist.*
Ist S ein Monoid und operiert auch als solches, so heißt (Q, S) Transformationsmonoid*.*
Ist S dabei sogar eine Gruppe, so heißt (Q, S) Transformationsgruppe*.*

Eine ähnliche Operation wie das Adjungieren eines neutralen Elements zu einer Halbgruppe ist auch bei Transformationshalbgruppen möglich. Sei (Q, S) eine Transformationshalbgruppe. Ist (Q, S) bereits ein Transformationsmonoid, so gelte $(Q, S)^1 := (Q, S)$. Ist (Q, S) jedoch kein Transformationsmonoid (S kann dann aber trotzdem ein Monoid sein!), so sei $(Q, S)^1 := (Q, S^I)$, wobei $q \cdot 1_{S^I} = q$ für alle $q \in Q$ gelte.

Konvention. *Eine Transformationshalbgruppe lässt sich ähnlich wie ein endlicher Automat graphisch darstellen (hier jedoch ohne Start- oder Endzustände). Dabei werden der Einfachheit halber nur die Übergangskanten der Erzeugenden angegeben, die der restlichen Elemente ergeben sich dann durch Transitivität. Für Transformationsmonoide werden hierbei die mit 1 beschrifteten Kanten (dies sind dann stets Schleifen) nicht immer angegeben. Dies hat den Nebeneffekt, dass für eine Transformationshalbgruppe (Q, S) die graphische Darstellung mit der von $(Q, S)^1$ übereinstimmt. Ob das Monoid oder die Halbgruppe gemeint ist, ergibt sich aus dem Kontext oder ist explizit angegeben.*

Die graphische Darstellung einer Transformationshalbgruppe kann beispielsweise so aussehen:





Hier operiert die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (betrachtet als $\{1, a\}$) als Halbgruppe treu auf einer 4-elementigen Menge. Es handelt sich also tatsächlich um eine Transformationshalbgruppe, allerdings operiert das neutrale Element 1 nicht als Identität! Daher handelt es sich weder um ein Transformationsmonoid noch um eine Transformationsgruppe, obwohl $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ Gruppe und damit auch Monoid ist.

Gegeben eine Transformationshalbgruppe (Q, S) so ist das Bild der Operation von S eine Unterhalbgruppe von Q^Q, die sogenannte *Transitionshalbgruppe* von (Q, S). Da die Operation treu ist, ist sie isomorph zu S, wie sich durch leichte Rechnung zeigt. Aufgrund dieser Isomorphie soll die Unterscheidung von S und der Transitionshalbgruppe im folgenden fallen gelassen werden. Ist (Q, S) ein Transformationsmonoid bzw. eine Transformationsgruppe, so heißt die Transitionshalbgruppe auch Transitionsmonoid bzw. Transitionsgruppe.

Wie erwähnt operiert jede Halbgruppe auf sich selbst. Bei (S, S) handelt es sich jedoch nicht unbedingt um eine Transformationshalbgruppe, da die Rechtstranslation nicht notwendigerweise treu ist (für ein Gegenbeispiel vergleiche 1.3.5). Diese Treue ist jedoch gegeben, wenn S auf S^1 operiert, da offensichtlich aus $S \ni s \neq s' \in S$ folgt, dass $1 \cdot s = 1s \neq 1s' = 1 \cdot s'$ gilt. Für eine Halbgruppe S ist (S^1, S) also stets eine Transformationshalbgruppe. Die graphische Darstellung dieser Transformationshalbgruppe ist dann eng verwandt mit dem Rechts-Cayley-Graph der operierenden Halbgruppe, für Monoide stimmen sie sogar überein. Für ein Monoid $M = M^1$ ist (M, M) sogar ein Transformationsmonoid, was für allgemeine Transformationshalbgruppen (Q, M) nicht notwendigerweise gilt.

Konvention. *Die Transformationshalbgruppe (S^1, S) wird im Folgenden oft mit der Halbgruppe S identifiziert*[4]*. In anderen Worten: S wird auch als Transformationshalbgruppe (S^1, S) betrachtet.*

1.2.2 Zerlegen und Verknüpfen

Transformationshalbgruppen lassen sich in kleinere Bestandteile zerlegen. Andererseits lassen sich aus kleinen Transformationshalbgruppen auch wieder größere gewinnen.

Um Transformationshalbgruppen in kleinere Bestandteile zerlegen zu können, muss zunächst geklärt werden, wann eine Transformationshalbgruppe in einer (potentiell größeren) anderen Transformationshalbgruppe enthalten ist.

Definition (Überdeckendes Element, Überlagerung)**.** *Seien (Q, S) und (P, T) zwei Transformationshalbgruppen. Sei $\varphi : P \to_p Q$ eine partielle, surjektive Funktion.*
Ein Element $\hat{s} \in T$ heißt überdeckendes Element *von $s \in S$, falls für alle $p \in P$ gilt*

$$\varphi(p) \text{ ist definiert} \implies \varphi(p) \cdot s = \varphi(p \cdot \hat{s}),$$

kürzer auch als $\varphi(p) \cdot s \subseteq \varphi(p \cdot \hat{s})$ geschrieben.
Findet sich für jedes $s \in S$ ein überdeckendes Element (bezüglich φ), so heißt φ Überlagerung. *Ist φ eine Überlagerung, so schreibe $(Q, S) \prec_\varphi (P, T)$.*

[4] Dies entspricht dem Vorgehen in [2]

Ist $\hat{s}$ ein überdeckendes Element für s und $\hat{t}$ eines für t, so ist $\hat{s}\hat{t}$ ein überdeckendes Element für st. Es ist also ausreichend überdeckende Elemente für alle Erzeugenden einer Halbgruppe anzugeben, um zu zeigen, dass φ eine Überlagerung ist.

Definition (Divisor). *Gibt es für zwei Transformationshalbgruppen (Q, S) und (P, T) eine Überlagerung $\varphi : P \to_p Q$, so schreibe $(Q, S) \prec (P, T)$. (Q, S) heißt dann* Divisor *von (P, T).*

Durch einfache Rechnung zeigt sich, dass $\prec$ transitiv und reflexiv ist. Im Zusammenhang mit der Konvention S mit der Transformationshalbgruppe (S^1, S) zu identifizieren, ist durch die Definition auch die Schreibweise $S \prec T$ für Halbgruppen S und T abgedeckt. Oft wird bei Halbgruppen der Begriff des Divisors jedoch anders definiert: Dort gilt $S \prec T$, falls es eine Unterhalbgruppe T' in T gibt, die sich mittels eines surjektiven Morphismus auf S abbilden lässt. Diese Art der Definition ist allerdings äquivalent zu der hier gegebenen (vgl. [2, S. 13]).

Damit ist geklärt, wann Transformationshalbgruppen andere Transformationshalbgruppen enthalten. Wie lässt sich aber nun aus mehreren Transformationshalbgruppen eine neue Transformationshalbgruppen zusammenzusetzen? Dies geschieht über eine besondere Verknüpfung:

Definition (Kranzprodukt). *Seien (Q, S) und (P, T) zwei Transformationshalbgruppen. Sei S^P die Menge aller Funktionen von P nach S. Definiere auf $U = S^P \times T$ die Verknüpfung:*

$$\begin{aligned} * : U \times U &\to U \\ ((f, t), (g, r)) &\mapsto (h, tr) \;\; mit \;\; h : P \to S \\ &\qquad\qquad\qquad\quad p \mapsto f(p)g(p \cdot t) \end{aligned}$$

Damit operiert U auf $Q \times P$ über $(q, p) \cdot (f, t) = (q \cdot f(p), p \cdot t)$. Die Transformationshalbgruppe $(Q \times P, U)$ heißt dann Kranzprodukt *der Transformationshalbgruppen (Q, S) und (P, T), geschrieben als*

$$(Q \times P, U) = (Q, S) \wr (P, T)$$

Damit $(Q \times P, U)$ überhaupt eine Transformationshalbgruppe ist, müssen einige Bedingungen erfüllt sein: Zunächst muss U eine Halbgruppe sein, d. h. $*$ muss assoziativ sein. Dann muss die oben angegebene Operation auch tatsächlich eine Halbgruppenoperation sein, d. h. es muss $((q, p) \cdot (f, t)) \cdot (g, r) = (q, p) \cdot ((f, t) * (g, r))$ gelten, und schließlich muss die Operation auch noch treu sein. Nachrechnen der Bedingungen zeigt jedoch, dass sie tatsächlich erfüllt sind. Ebenfalls durch Nachrechnen zeigt sich, dass das Kranzprodukt $\wr$ assoziativ ist. Ebenfalls leicht lässt sich zeigen, dass $\prec$ und Kranzprodukt miteinander verträglich sind, in dem Sinne, dass aus $(Q, S) \prec (Q', S')$ und $(P, T) \prec (P', T')$ schon $(Q, S) \wr (P, T) \prec (Q', S') \wr (P', T')$ folgt (siehe dazu auch [2, S. 29]).

Anschaulich hängt beim Kranzprodukt das Verhalten der Operation in der linken vom Zustand in der rechten Komponente ab, nicht jedoch umgekehrt. Diese Abhängigkeitsstruktur wird auch als *rückkopplungsfrei* bezeichnet. Natürlich ist es auch möglich das

Verhalten in der linken Komponente unabhängig von dem in der rechten zu gestalten, die Funktionen sind dann einfach konstant. Dieser Spezialfall des Kranzprodukts beschreibt das *direkte Produkt* $\times$ der beiden Transformationshalbgruppen.

1.2.3 Hilfsmittel

Beim Zerlegen und Zusammensetzen von Transformationshalbgruppen wird es im Folgenden bequemer sein, wenn bereits einige Sätze und Lemmata darüber, wie dies vonstatten gehen kann, bekannt sind. Diese Sätze und Lemmata sollen hier aufgeführt und bewiesen werden.

Das erste Lemma behandelt die überdeckenden Elemente einer Rechtsnull.

Lemma 5. *Seien S und T zwei Halbgruppen und es gelte $(S^1, S) \prec (T^1, T)$ über die Überlagerung $\varphi : T^1 \to S^1$. Sei ferner $a \in S$ eine Rechtsnull und $\hat{a} \in T$ ein überdeckendes Element von a.*
Dann ist jede Potenz von $\hat{a}$ ebenfalls ein überdeckendes Element von a, insbesondere gibt es dabei eine Potenz k, so dass $\hat{a}^k$ idempotent ist.

Beweis. Sei $\hat{a} \in T$ ein beliebiges überdeckendes Element von a. Es gilt für alle $t \in T^1$, bei denen φ definiert ist, und für alle $k \geq 2$:

$$\varphi(t \cdot \hat{a}^k) = \varphi(t \cdot \hat{a}^{k-1}) \cdot a = a = \varphi(t) \cdot a$$

Damit ist gezeigt, dass alle Potenzen von $\hat{a}$ ebenfalls überdeckende Elemente von a sind.

Sei nun $\omega \geq 1$ die kleinste Potenz, so dass $\hat{a}^\omega$ idempotent ist (vgl. Korollar 1). Dann ist $k = \omega$ die gesuchte Potenz. □

Man beachte, dass aus der Aussage des Lemmas direkt folgt, dass für eine Rechtsnull ein idempotentes überdeckendes Element gewählt werden kann (sofern überhaupt ein überdeckendes Element existiert).

Das zweite Lemma verknüpft eine Halbgruppe mit dem Monoid, das aus ihr durch Adjunktion eines neutralen Elements hervorgeht:

Lemma 6. *Für eine Halbgruppe S gilt:*

$$S \prec S^1$$

Beweis. Für den Fall, dass S bereits ein Monoid ist, ist nichts zu zeigen. Sei also $S = S^1 \setminus \{1\}$. Definiere $\varphi : S^1 \to_p S^1$ über $s \mapsto s$. Offensichtlich ist φ damit surjektiv. Sei nun $s \in S^1$ und $t \in S$, dann gilt $\varphi(s \cdot t) = \varphi(st) = st = s \cdot t$. Also ist t überdeckendes Element für sich selbst. □

Zwei Resultate, die für die Zerlegung von Halbgruppen sehr wichtig sind, weil sie einen Zusammenhang zwischen Transformationshalbgruppen und den zugehörigen Halbgruppen aufzeigen, sind die folgenden:

Lemma 7. *Seien (Q, S) und (P, T) Transformationshalbgruppen. Dann gilt:*

$$(Q, S) \prec (P, T) \implies S \prec T$$

Beweis. (Vgl. [2, S. 13]) □

Lemma 8. *Sei (Q, S) eine Transformationshalbgruppe, für die es ein $q_0 \in Q$ mit $q_0 \cdot S = Q$ gibt. Dann gilt:*

$$(Q, S) \prec S$$

Beweis. (Vgl. [2, S. 25]) □

Das nächste Lemma sagt aus, dass überdeckende Elemente zu verschiedenen Elementen ebenfalls verschieden sind:

Lemma 9. *Es gelte für zwei Transformationshalbgruppen $(Q, S) \prec (P, T)$. Seien s und t zwei unterschiedliche Elemente aus S. Sei ferner $\hat{s} \in T$ ein überdeckendes Element für s und $\hat{t} \in T$ ein solches für t.*
Dann gilt: $\hat{s} \neq \hat{t}$

Beweis. Sei $\varphi : P \to_p Q$ die zugehörige Überlagerung. Da $s \neq t$ ist, gibt es ein Element $q \in Q$, so dass $q \cdot s \neq q \cdot t$ ist. Sei p ein Urbild von q unter φ (dieses existiert, da φ surjektiv ist), d. h. es gilt $\varphi(p) = q$ und $\varphi(p)$ ist insbesondere definiert. Dann ist $\varphi(p \cdot \hat{s}) = \varphi(p) \cdot s = q \cdot s \neq q \cdot t = \varphi(p) \cdot t = \varphi(p \cdot \hat{t})$ und somit $\hat{s} \neq \hat{t}$. □

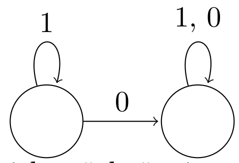
1.3 Einige Halbgruppen

Einige besondere Halbgruppen und Monoide werden später eine wichtige Rolle spielen, deswegen sollen sie in diesem Abschnitt vorgestellt und genauer untersucht werden.

1.3.1 U_1

U_1 ist das Monoid bestehend aus einer Null und einem neutralen Element. U_1 ist damit sowohl durch folgende Multiplikationstafel als auch als Transitionsmonoid des folgenden Transformationsmonoids (das auch den Rechts-Cayley-Graphen von U_1 darstellt) gegeben:

$*$	1	0
1	1	0
0	0	0



Anschaulich realisiert U_1 eine Operation, die nicht rückgängig gemacht werden kann: Nach dem Auftreten der 0, gibt es keine Möglichkeit mehr (wieder) in den linke Zustand zu gelangen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass U_1 genau alle Monoide M teilt, die keine Gruppe sind:

Satz 2. *Sei M ein Monoid, dann gilt:*

$$U_1 \prec M \iff M \text{ ist keine Gruppe}$$

Beweis. Zunächst zur **Hinrichtung**: Sie $\varphi : M \to_p U_1$ eine Überlagerung, sei ferner $m_1 \in \varphi^{-1}(1_{U_1})$ ein Urbild von 1_{U_1} und $\hat{0} \in M$ ein überdeckendes Element von $0 \in U_1$. Dann gilt $\varphi(m_1 \cdot \hat{0}^k) = \varphi(m_1 \cdot \hat{0}^{k-1}) \cdot 0 = 0$ für alle $k \geq 1$. Angenommen M ist eine Gruppe, dann gibt es ein $k \geq 1$ mit $\hat{0}^k = 1_M$ (die Ordnung von $\hat{0}$), d. h. es gilt

$$\varphi(m_1 \cdot \hat{0}^k) = \varphi(m_1 \cdot 1_M) = \varphi(m_1) = 1_{U_1},$$

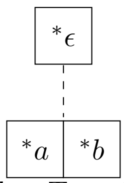
was einen Widerspruch darstellt.

Nun zur **Rückrichtung**: Da M keine Gruppe ist, gibt es ein Element $m_0 \in M$, das kein Links-Inverses besitzt. Definiere $\varphi : M \to_p U_1$ über $1_M \mapsto 1_{U_1}$ und $m \mapsto 0$ für $M \ni m \neq 1_M$. Offensichtlich ist φ dann surjektiv, außerdem ist φ auf ganz M definiert. Um zu zeigen, dass φ eine Überlagerung ist, dass also $(U_1, U_1) \prec_\varphi (M, M)$ gilt, bleibt nur noch zu zeigen, dass jedes Element in U_1 eine Überdeckung besitzt: Es ist $\varphi(m) \cdot 1_{U_1} = \varphi(m) = \varphi(m \cdot 1_M)$ und damit 1_M eine Überdeckung von 1_{U_1}. Außerdem ist $m \cdot m_0 \neq 1_M$ für alle $m \in M$ (sonst wäre m Links-Inverses von m_0). Damit ist $\varphi(m \cdot m_0) = 0 = \varphi(m) \cdot 0$ für alle m und m_0 also Überdeckung von 0. □

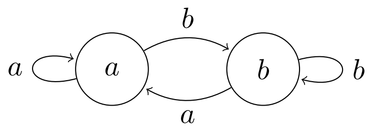
1.3.2 U_2

U_2 ist das Monoid zur Rechtsnull-Halbgruppe mit zwei Elementen oder auch ein zweielementiger FlipFlop (mit neutralem Element). Die Multiplikationstafel und $\mathcal{J}$-Klassen-Darstellung von U_2 lautet wie folgt:

$*$	ϵ	a	b
ϵ	ϵ	a	b
a	a	a	b
b	b	a	b



Außerdem ist U_2 auch das Transitionsmonoid des folgenden Transformationsmonoids, das ab jetzt als $(\{a, b\}, U_2)$ bezeichnet wird:



Sowohl in der Multiplikationstafel als auch im Transformationsmonoid erkennt man leicht, dass in U_2 sowohl a als auch b idempotent sind (d. h. es gilt $a^2 = a$ und $b^2 = b$). Tatsächlich ist U_2 Divisor genau jener Monoide, die in der selben $\mathcal{R}$-Klasse zwei idempotente Element besitzen:

Satz 3. *Sei M ein Monoid, dann gilt:*

$$U_2 \prec M \iff \exists e, f \in E(M) : e \neq f \text{ und } e \mathrel{\mathcal{R}} f$$

Beweis. Zunächst zur **Hinrichtung**: Sei $\varphi : M \to U_2$ eine Überlagerung. Sei ferner $\hat{a} \in M$ ein idempotentes überdeckendes Element für a und $\hat{b}$ ein solches für b (diese existieren nach Lemma 5). Dann ist $\hat{a}\hat{b}$ ein überdeckendes Element für b, denn es gilt für alle $m \in M$, bei denen φ definiert ist:

$$\varphi(m \cdot \hat{a}\hat{b}) = \varphi(m \cdot \hat{a}) \cdot b = b = \varphi(m) \cdot b$$

Sei $\omega \geq 1$ die kleinste Potenz, so dass $\hat{b}' := (\hat{a}\hat{b})^\omega$ idempotent ist (vgl. Korollar 1). Nach Lemma 5 ist $\hat{b}'$ wieder überdeckendes Element von b. Definiere $\hat{a}' := \hat{b}'\hat{a}$. Analog zur Rechnung oben, ist $\hat{a}'$ überdeckendes Element von a und damit verschieden zu $\hat{b}'$. Es gilt nun:

- $\hat{a}' \neq \hat{b}'$,
- $\hat{b}'^2 = \hat{b}'$ und
- $\hat{a}' = \hat{b}'\hat{a}$.

Außerdem gilt

- $\hat{a}'^2 = \hat{b}'\hat{a}\hat{b}'\hat{a} = \hat{b}'\hat{a}(\hat{a}\hat{b})^\omega\hat{a} = \hat{b}'(\hat{a}\hat{b})^\omega\hat{a} = \hat{b}'\hat{b}'\hat{a} = \hat{b}'\hat{a} = \hat{a}'$ und
- $\hat{a}'\hat{b}' = \hat{b}'\hat{a}\hat{b}' = \hat{b}'\hat{a}(\hat{a}\hat{b})^\omega = \hat{b}'(\hat{a}\hat{b})^\omega = \hat{b}'\hat{b}' = \hat{b}'$, da $\hat{b}'$ und $\hat{a}$ beide idempotent sind.

Damit erfüllen $e := \hat{a}'$ und $f := \hat{b}'$ alle Forderungen.

Nun zur **Rückrichtung**: Weil $e \mathcal{R} f$ gilt, gibt es x und $y \in M$ mit $ex = f$ und $fy = e$, dann gilt

$$\begin{aligned} ef &= ef^2 = e(ex)f = exf = f^2 = f \text{ und} \\ fe &= fe^2 = f(fy)e = fye = e^2 = e. \end{aligned}$$

Definiere dann $\varphi : M \to_p U_2$ über $1_M \mapsto \epsilon$, $e \mapsto a$ und $f \mapsto b$ (sonst undefiniert), womit φ surjektiv ist. Bezüglich φ ist $1_M =: \hat{\epsilon}$ ein überdeckendes Element von ϵ, $e =: \hat{a}$ eines von a und $f =: \hat{b}$ eines von b, dies zeigen die folgenden beiden Tabellen. In der linken ist jeweils der Wert für $\varphi(m \cdot \hat{u})$ eingetragen und in der rechten der Wert für $\varphi(m) \cdot u$, wobei $m \in \{1_M, e, f\}$ (dies sind alle Stellen, an denen φ definiert ist) und $u \in U_2$. Da die Werte übereinstimmen, ist die Bedingung für ein überdeckenden Element jeweils erfüllt.

m \ $\hat{u}$	1_M	e	f
1_M	ϵ	a	b
e	a	a	b
f	b	a	b

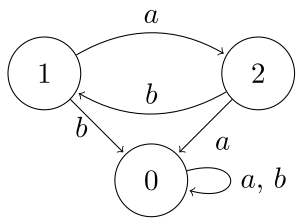
m \ u	ϵ	a	b
1_M	ϵ	a	b
e	a	a	b
f	b	a	b

□

1.3.3 B_2

B_2 ist als Transitionshalbgruppe der folgenden Transformationshalbgruppe gegeben[5]:

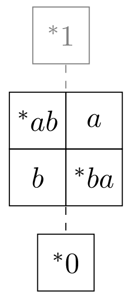
[5] ${B_2}^1$ kann auch als syntaktisches Monoid der Sprache zum regulären Ausdruck $(ab)^*$ gesehen werden.



Diese Transformationshalbgruppe wird von nun an mit (Q_3, B_2) bezeichnet.

Die Multiplikationstafel und $\mathcal{J}$-Klassen-Darstellung von B_2 (bzw. $B_2{}^1$) sieht dann wie folgt aus (0 kann hierbei z. B. auch als aa oder bb geschrieben werden):

$*$	1	a	b	ab	ba	0
1	1	a	b	ab	ba	0
a	a	0	ab	0	a	0
b	b	ba	0	b	0	0
ab	ab	a	0	ab	0	0
ba	ba	0	b	0	ba	0
0	0	0	0	0	0	0



Ebenso wie bei U_2 ist die Struktur der nicht-trivialen $\mathcal{J}$-Klasse von B_2 charakteristisch dafür, ob B_2 Divisor einer Halbgruppe ist oder nicht.

Satz. *Sei S eine Halbgruppe, dann gilt:*

$$\begin{aligned} B_2 \prec S \Longleftrightarrow \exists e, f \in E(S) : e \mathrel{\mathcal{J}} f, e \mathrel{\mathcal{R}} f, e \mathrel{\not\mathcal{L}} f \text{ und} \\ \text{weder } [e]_{\mathcal{R}} \cap [f]_{\mathcal{L}} \text{ noch } [e]_{\mathcal{L}} \cap [f]_{\mathcal{R}} \text{ ist regulär} \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst zur **Hinrichtung**: Hier soll eine stärkere Aussage gezeigt werden: Es gelte $(P, B_2) \prec (Q, S)$ für beliebige (nicht-leere) Mengen P und Q. Die eigentliche Aussage folgt dann für $P := B_2{}^1$ und $Q := S^1$. Sei nun $\varphi : Q \to_p P$ eine Überlagerung, $\hat{a} \in S$ ein überdeckendes Element für $a \in B_2$ und $\hat{b} \in S$ ein solches für $b \in B_2$. Sei ω so, dass s^ω idempotent für alle Element $s \in S$ (vgl. Korollar 1). Sei $q \in Q$ beliebig, aber so, dass $\varphi(q)$ definiert ist. Definiere $\hat{b}' := \hat{b}(\hat{a}\hat{b})^{\omega-1}$, dann ist $\hat{b}'$ ebenfalls überdeckendes Element für $b \in B_2$, denn es gilt $\varphi(q \cdot \hat{b}') = \varphi(q \cdot \hat{b}(\hat{a}\hat{b})^{\omega-1}) = \varphi(q \cdot \hat{b}(\hat{a}\hat{b})^{\omega-2}) \cdot ab = \cdots = \varphi(q \cdot \hat{b}) \cdot (ab)^{\omega-1} = \varphi(q) \cdot b(ab)^{\omega-1} = \varphi(q) \cdot b(ab)^{\omega-2} = \cdots = \varphi(q) \cdot b$. Außerdem ist $\hat{a}\hat{b}' = \hat{a}\hat{b}(\hat{a}\hat{b})^{\omega-1} = (\hat{a}\hat{b})^\omega$ idempotent. Definiere weiter $\hat{a}' := \hat{a}\hat{b}'\hat{a}$ und $\hat{b}'' := \hat{b}'\hat{a}'\hat{b}'$. Folgende Rechnung zeigt, dass $\hat{a}'$ ein überdeckendes Element für a und $\hat{b}''$ ein solches für b ist:

$$\begin{aligned} \varphi(q \cdot \hat{a}') &= \varphi(q \cdot \hat{a}\hat{b}'\hat{a}) = \varphi(q) \cdot aba = \varphi(q) \cdot a \\ \varphi(q \cdot \hat{b}'') &= \varphi(q \cdot \hat{b}'\hat{a}'\hat{b}') = \varphi(q) \cdot bab = \varphi(q) \cdot b \end{aligned}$$

Außerdem sind $\hat{a}'\hat{b}''$ und $\hat{b}''\hat{a}'$ idempotent:

$$\begin{aligned} \hat{a}'\hat{b}'' &= (\hat{a}\hat{b}'\hat{a})(\hat{b}'\hat{a}'\hat{b}') = \hat{a}\hat{b}'\hat{a}\hat{b}'(\hat{a}\hat{b}'\hat{a})\hat{b}' = (\hat{a}\hat{b}')^4 = \hat{a}\hat{b}' \\ \hat{b}''\hat{a}' &= (\hat{b}'\hat{a}'\hat{b}')\hat{a}' = \hat{b}'(\hat{a}\hat{b}'\hat{a})\hat{b}'(\hat{a}\hat{b}'\hat{a}) = \hat{b}'\hat{a}\hat{b}'\hat{a} = \hat{b}'\hat{a}' \end{aligned}$$

(Die letzte Zeile zeigt insbesondere auch $(\hat{b}'\hat{a}')^2 = \hat{b}'\hat{a}'$.) Außerdem gelten die Beziehungen $\hat{a}' \mathrel{\mathcal{R}} \hat{a}'\hat{b}''$, $\hat{b}'' \mathrel{\mathcal{R}} \hat{b}''\hat{a}'$, $\hat{a}' \mathrel{\mathcal{L}} \hat{b}''\hat{a}'$ und $\hat{b}'' \mathrel{\mathcal{L}} \hat{a}'\hat{b}''$, und damit insbesondere $\hat{a}'\hat{b}'' \mathrel{\mathcal{J}} \hat{b}''\hat{a}'$:

$$\begin{aligned}
(\hat{a}'\hat{b}'')\hat{a}' &= (\hat{a}\hat{b}')(\hat{a}\hat{b}'\hat{a}) = \hat{a}\hat{b}'\hat{a} = \hat{a}' &&= \hat{a}'(\hat{b}''\hat{a}') \\
(\hat{b}''\hat{a}')\hat{b}'' &= (\hat{b}'\hat{a}')(\hat{b}'\hat{a}'\hat{b}') = \hat{b}'\hat{a}'\hat{b}' = \hat{b}'' &&= \hat{b}''(\hat{a}'\hat{b}'')
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\hat{a}' \in \left[\hat{a}'\hat{b}''\right]_{\mathcal{R}} \cap \left[\hat{b}''\hat{a}'\right]_{\mathcal{L}} = \left[\hat{a}'\right]_{\mathcal{H}} \text{ und } \hat{b}'' \in \left[\hat{b}''\hat{a}'\right]_{\mathcal{R}} \cap \left[\hat{a}'\hat{b}''\right]_{\mathcal{L}} = \left[\hat{b}''\right]_{\mathcal{H}}$$

Außerdem ist weder $[\hat{a}']_{\mathcal{H}}$ noch $\left[\hat{b}''\right]_{\mathcal{H}}$ regulär, denn angenommen $[\hat{a}']_{\mathcal{H}}$ wäre regulär (die Argumentation für $\left[\hat{b}''\right]_{\mathcal{H}}$ verläuft analog), dann ist $[\hat{a}']_{\mathcal{H}}$ nach Lemma 2 eine Gruppe. Sei $k := \operatorname{ord} \hat{a}'$ die Ordnung von $\hat{a}'$ in dieser Gruppe. Es gilt also $\hat{a}'^{k+1} = \hat{a}'$ in S, in B_2 gilt jedoch $a^{k+1} = aa^k = 0$. Da $a \neq 0 \in B_2$ ist, gibt es $p \in P$, so dass $p \cdot 0 \neq p \cdot a$ ist. Sei q_p ein Urbild von p unter φ, damit ist insbesondere $\varphi(q_p)$ definiert. Es ergibt sich dann ein Widerspruch:

$$\begin{aligned}
\varphi(q_p) \cdot a = p \cdot a \neq p \cdot 0 = \varphi(q_p) \cdot 0 &= \varphi(q_p) \cdot a^{k+1} \\
&= \varphi(q_p \cdot \hat{a}')a^k = \cdots = \varphi(q_p \cdot \hat{a}'^{k+1}) \\
&= \varphi(q_p \cdot \hat{a}') = \varphi(q_p) \cdot a
\end{aligned}$$

Damit gilt auch $\hat{a}'\hat{b}'' \mathrel{\not\mathcal{H}} \hat{a}'$ und somit $\hat{a}'\hat{b}'' \mathrel{\not\mathcal{L}} \hat{a}' \mathrel{\mathcal{L}} \hat{b}''\hat{a}'$, ebenso wie $\hat{b}''\hat{a}' \mathrel{\not\mathcal{H}} \hat{a}'$ bzw. $\hat{b}''\hat{a}' \mathrel{\not\mathcal{R}} \hat{a}' \mathrel{\mathcal{R}} \hat{a}'\hat{b}''$. Die Aussage ist also für $e := \hat{a}'\hat{b}''$ und $f := \hat{b}''\hat{a}'$ erfüllt.

Nun zur **Rückrichtung**: Zur besseren Übersicht sollen zunächst die folgenden Bezeichnungen gelten:

$$\begin{aligned}
H_{\hat{ab}} &:= [e]_{\mathcal{H}} & \qquad H_{\hat{ba}} &:= [f]_{\mathcal{H}} \\
H_{\hat{a}} &:= [e]_{\mathcal{R}} \cap [f]_{\mathcal{L}} & \qquad H_{\hat{b}} &:= [e]_{\mathcal{L}} \cap [f]_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

Offensichtlich handelt es sich dabei jeweils genau um $\mathcal{H}$-Klassen, die aufgrund der Voraussetzungen auch paarweise verschieden sind. Außerdem bezeichne J die $\mathcal{J}$-Klasse von e und f. Definiere nun die offensichtlich surjektive (partielle) Funktion

$$\begin{aligned}
\varphi : S^1 &\to_p {B_2}^1 \\
s &\mapsto \begin{cases}
1_{{B_2}^1} & s = 1_{S^1} \\
a & s \in H_{\hat{a}} \\
b & s \in H_{\hat{b}} \\
ab & s \in H_{\hat{ab}} \\
ba & s \in H_{\hat{ba}} \\
0 & S^1 s S^1 \subsetneq J,
\end{cases}
\end{aligned}$$

die offensichtlich auch wohldefiniert ist.

Aufgrund der Voraussetzungen in Kombination mit Satz 1 lässt sich nun eine Multiplikationstafel aufstellen, die angibt wo sich ein Element befindet, dass sich aus der

Verknüpfung zweier Element aus den hier relevanten $\mathcal{H}$-Klassen ergibt. In der Tabelle ist dabei die $\mathcal{H}$-Klasse dieses Elements oder $\subsetneq J$, falls das Element in einer zu J (echt) kleineren $\mathcal{J}$-Klasse liegt, eingetragen.

	$H_{\hat{a}}$	$H_{\hat{b}}$	$H_{\widehat{ab}}$	$H_{\widehat{ba}}$
$H_{\hat{a}}$	$\subsetneq J$	$H_{\widehat{ab}}$	$\subsetneq J$	$H_{\hat{a}}$
$H_{\hat{b}}$	$H_{\widehat{ba}}$	$\subsetneq J$	$H_{\hat{b}}$	$\subsetneq J$
$H_{\widehat{ab}}$	$H_{\hat{a}}$	$\subsetneq J$	$H_{\widehat{ab}}$	$\subsetneq J$
$H_{\widehat{ba}}$	$\subsetneq J$	$H_{\hat{b}}$	$\subsetneq J$	$H_{\widehat{ba}}$

Seien nun $\hat{a} \in H_{\hat{a}}$, $\hat{b} \in H_{\hat{b}}$, $\widehat{ab} \in H_{\widehat{ab}}$ und $\widehat{ba} \in H_{\widehat{ba}}$ beliebig gewählt. Sei außerdem $\hat{0} := \hat{b}^2$, womit $S^1\hat{0}S^1 \subsetneq J$ und damit für $s \in S^1$ auch $S^1 s\hat{0}S^1 \subsetneq J$ bzw. $S^1\hat{0}sS^1 \subsetneq J$. Durch Vergleich (und Nachrechnen) der folgenden beiden Tabellen sieht man ein, dass es sich dabei jeweils um überdeckende Element für die Element aus B_2 handelt. In der linken Tabelle findet sich der Wert von $\varphi(s\cdot\hat{t})$ und in der rechten der von $\varphi(s)\cdot t$. Man beachte, dass alle Möglichkeiten für $s \in S^1$, so dass $\varphi(s)$ definiert ist, und alle Elemente $t \in B_2$ beachtet werden.

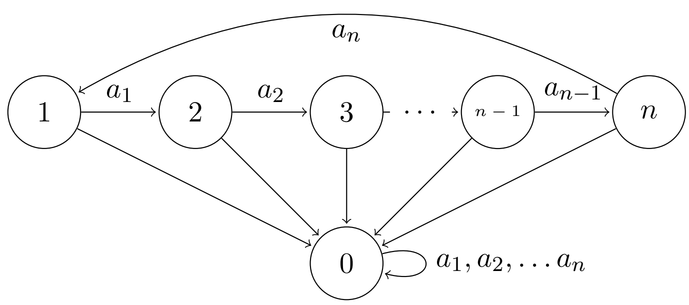
$\hat{t} =$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\widehat{ab}$	$\widehat{ba}$	$\hat{0}$
$s = 1_{S^1}$	a	b	ab	ba	0
$s \in H_{\hat{a}}$	0	ab	0	a	0
$s \in H_{\hat{b}}$	ba	0	b	0	0
$s \in H_{\widehat{ab}}$	a	0	ab	0	0
$s \in H_{\widehat{ba}}$	0	b	0	ba	0

$t =$	a	b	ab	ba	0
$s = 1_{S^1}$	a	b	ab	ba	0
$s \in H_{\hat{a}}$	0	ab	0	a	0
$s \in H_{\hat{b}}$	ba	0	b	0	0
$s \in H_{\widehat{ab}}$	a	0	ab	0	0
$s \in H_{\widehat{ba}}$	0	b	0	ba	0

Damit ist φ eine Überlagerung. $\square$

1.3.4 B_n

B_n erweitert B_2 um weitere Erzeugende. B_n ist dabei die Transitionshalbgruppe der folgenden Transformationshalbgruppe[6] (Q_{n+1}, B_n) (die unbeschrifteten Kanten stellen dabei Übergänge für alle Elemente aus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dar, für die noch keine kollidierend beschriftete Kante existiert):



B_n lässt sich für beliebiges $n \geq 2$ aus n vielen B_2 zusammen setzen:

[6] ${B_n}^1$ kann auch als syntaktisches Monoid der Sprache zum regulären Ausdruck $(a_1 a_2 \ldots a_n)^*$ gesehen werden.

Satz 4.

$$(Q_{n+1}, B_n) \prec \underbrace{(Q_3, B_2) \times (Q_3, B_2) \times \cdots \times (Q_3, B_2)}_{n\ mal}$$

und

$$(Q_{n+1}, B_n)^1 \prec \underbrace{(Q_3, B_2)^1 \times (Q_3, B_2)^1 \times \cdots \times (Q_3, B_2)^1}_{n\ mal}$$

Beweis. Zunächst seien die disjunkten Kopien von (Q_3, B_2) nummeriert als (Q_3^k, B_2^k) mit $1 \leq k \leq n$. Definiere dann $\varphi : \prod_{k=1}^n Q_3^k \to_p Q_{n+1}$ über

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \mapsto \begin{cases} i & \exists i : (b_i = 2 \text{ und } \forall j \neq i : b_j = 1) \\ 0 & \exists i : b_i = 0 \end{cases}$$

womit φ offensichtlich surjektiv ist. Um einzusehen, dass φ eine Überlagerung ist, verbleibt noch zu zeigen, dass jedes Element a_j mit $1 \leq j \leq n$ ein überdeckendes Element $\hat{a_j} = (\hat{a_j}^1, \hat{a_j}^2, \ldots, \hat{a_j}^n)$ hat. Definiere dazu $\hat{a_j}^k$ als:

$$\hat{a_j}^k = \begin{cases} a & j \equiv k-1 \mod n \quad (a_j \text{ ist eingehende Kante bei } k) \\ b & j = k \quad (a_j \text{ ist ausgehende Kante bei } k) \\ ab & \text{sonst} \quad (a_j \text{ führt zu } 0) \end{cases}$$

Sei nun $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ definiert und es gelte:

$$\varphi\left((b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot \hat{a_j}\right) = \varphi(b_1 \cdot \hat{a_j}^1, b_2 \cdot \hat{a_j}^2, \ldots, b_n \cdot \hat{a_j}^n) =: \varphi(b_1', b_2', \ldots, b_n')$$

1. Fall $\exists i : (b_i = 2 \text{ und } \forall j \neq i : b_j = 1)$ bzw. $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n) = i$: Nach Konstruktion von (Q_{n+1}, B_n) gilt nun

$$\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot a_j = \begin{cases} (i+1) \bmod n & j = i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $(i+1) \bmod n$ den kleinsten echt positiven Repräsentanten der Restklasse bezeichnet. Sei zunächst $j = i$, dann ist

$$\begin{aligned} \hat{a_j}^i &= b \\ \hat{a_j}^{i+1 \bmod n} &= a \\ \hat{a_j}^k &= ab \text{ für alle anderen } 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} b_i' &= b_i \cdot \hat{a_j}^i = 2 \cdot b = 1 \\ b_{i+1 \bmod n}' &= b_{i+1 \bmod n} \cdot \hat{a_j}^{i+1 \bmod n} = 1 \cdot a = 2 \\ b_k' &= b_k \cdot \hat{a_j}^k = 1 \cdot ab = 1 \text{ für alle anderen } 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Nach Definition ist dann $\varphi(b_1', b_2', \ldots, b_n') = i + 1 \bmod n$. Ist $j \neq i$, so gilt $\hat{a_j}^i \neq b$ und $b_i' = b_i \cdot \hat{a_j}^i = 2 \cdot \hat{a_j}^i = 0$ und damit auch $\varphi(b_1', b_2', \ldots, b_n') = 0$.

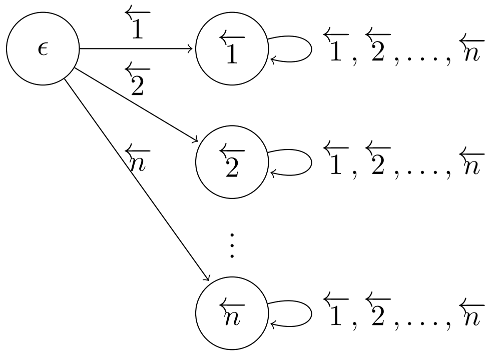
2. Fall $\exists i : b_i = 0$ bzw. $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$: Dann ist $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot a_j = 0 \cdot a_j = 0$ und $b_i \cdot \hat{a_j}^i = 0 \cdot \hat{a_j}^i = 0$. Damit ist auch $\varphi(b_1', b_2', \ldots, b_n') = 0$.

Die zweite Aussage des Satzes ergibt sich, da $(1, 1, \ldots, 1)$ ein überdeckendes Element von 1 ist. $\square$

1.3.5 A_n

A_n ist die Halbgruppe bestehend aus n Linksnullen. Es folgt die Multiplikationstafel von A_n und die graphische Darstellung von $({A_n}^1, A_n)$:

$*$	$\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{2}$	$\dots$	$\overleftarrow{n}$
$\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{1}$	$\overleftarrow{1}$	$\dots$	$\overleftarrow{1}$
$\overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{2}$	$\overleftarrow{2}$	$\dots$	$\overleftarrow{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\overleftarrow{n}$	$\overleftarrow{n}$	$\overleftarrow{n}$	$\dots$	$\overleftarrow{n}$



${A_n}^1$ lässt sich folgendermaßen zerlegen:

Satz 5.

$$A_n \prec {A_n}^1 \prec \underbrace{U_1 \wr U_1 \wr \dots \wr U_1}_{n \text{ mal}},$$

wobei $U_1 \prec {A_n}^1$ gilt.

Beweis. $U_1 \prec {A_n}^1$ gilt nach Satz 2 und $A_n \prec {A_n}^1$ nach Lemma 6. Für den letzten Teil definiere $\varphi : \prod_{k=1}^n U_1 \to {A_n}^1$ über

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto \begin{cases} \epsilon_{{A_n}^1} & u_1 = u_2 = \dots u_n = 1_{U_1} \\ \overleftarrow{i} & i = \min\{k : u_k = 0\}, \text{ falls } \exists 1 \leq k \leq n : u_k = 0 \end{cases},$$

womit φ surjektiv ist. Sei $\overleftarrow{j} \in A_n$. Definiere dann $\hat{\overleftarrow{j}} = (\hat{\overleftarrow{j}}^1, \hat{\overleftarrow{j}}^2, \dots, \hat{\overleftarrow{j}}^n)$ mit

$$\hat{\overleftarrow{j}}^l : \prod_{k=l+1}^{n} U_1 \to U_1 \text{ für } 1 \leq l \leq n$$

$$(u_{l+1}, u_{l+2}, \dots, u_n) \mapsto \begin{cases} 1 & u_{l+1} = u_{l+2} = \dots u_n = 1 \text{ und } l \neq j \\ 0 & u_{l+1} = u_{l+2} = \dots u_n = 1 \text{ und } l = j \\ 1 & \exists l < i \leq n : u_i = 0 \end{cases}$$

und $\hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}^1, \hat{\epsilon}^2, \dots, \hat{\epsilon}^n)$ mit

$$\hat{\epsilon}^l : \prod_{k=l+1}^{n} U_1 \to U_1 \text{ für } 1 \leq l \leq n$$

$$(u_{l+1}, u_{l+2}, \dots, u_n) \mapsto 1.$$

Offensichtlich ist $\hat{\epsilon}$ dann ein überdeckendes Element von $\epsilon \in {A_n}^1$. Um einzusehen, dass $\hat{\overleftarrow{j}}$ überdeckendes Element von $\overleftarrow{j}$ ist, sei $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ definiert und

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \hat{\overleftarrow{j}} = (u_1 \cdot \hat{\overleftarrow{j}}^1, u_2 \cdot \hat{\overleftarrow{j}}^2, \dots, u_n \cdot \hat{\overleftarrow{j}}^n) =: (u'_1, u'_2, \dots, u'_n).$$

1. Fall $u_1 = u_2 = \ldots u_n = 1_{U_1}$ bzw. $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \epsilon$: Dann ist

$$\begin{aligned} u'_l &= u_l \cdot \overleftarrow{j}^{\,l}(u_{l+1}, u_{l+2}, \ldots, u_n) \\ &= 1 \cdot \overleftarrow{j}^{\,l}(u_{l+1}, u_{l+2}, \ldots, u_n) = \begin{cases} 1 \cdot 1 = 1 & l \neq j \\ 1 \cdot 0 = 0 & l = j \end{cases} \end{aligned}$$

und damit $\varphi(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n) = \overleftarrow{j} = \epsilon \cdot \overleftarrow{j} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \overleftarrow{j}$.

2. Fall $\exists 1 \leq k \leq n : u_k = 0$ bzw. $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \overleftarrow{i}$, wobei $i = \min\{k : u_k = 0\}$: Dann gilt

$$\begin{aligned} u'_i &= u_i \cdot \overleftarrow{j}^{\,i}(u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n) \\ &= 0 \cdot \overleftarrow{j}^{\,i}(u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n) = 0 \end{aligned}$$

und für $l < i$:

$$\begin{aligned} u'_l &= u_l \cdot \overleftarrow{j}^{\,l}(u_{l+1}, u_{l+2}, \ldots, u_n) \\ &= 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Als ist auch $i = \min\{k : u'_k = 0\}$ und damit

$$\varphi(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n) = \overleftarrow{i} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \overleftarrow{j}.$$

Damit hat jedes Element aus ${A_n}^1$ ein überdeckendes Element. $\square$

2 Zerlegung in $\mathcal{R}$-Klassen

Dieses Kapitel beschreibt eine Möglichkeit der Zerlegung eines Transformationsmonoids in seine starken Zusammenhangskomponenten. Zunächst werden dabei die Halbgruppen untersucht, bei denen die Zusammenhangskomponenten trivial sind, anschließend wird der Ansatz auch auf den nicht-trivialen Fall verallgemeinert. Schließlich wird ein Spezialfall untersucht, in dem die starken Zusammenhangskomponenten ihrerseits weiter zerlegt werden können.

Der Name dieses Kapitels wird dabei dadurch motiviert, dass in einer Transformationshalbgruppe der Form (S^1, S) die starken Zusammenhangskomponenten eng verbunden mit den $\mathcal{R}$-Klassen sind.

2.1 Zerlegung in U_1

Welche Halbgruppen teilen ein Kranzprodukt aus mehreren U_1-Kopien? Die Antwort auf diese Frage liefert der folgende Satz nach der zugehörigen Definition:

Definition ($\mathcal{R}$-trivial)**.** *Eine Halbgruppe S heißt* $\mathcal{R}$-trivial*, falls für alle $s, t \in S$ gilt: $s \,\mathcal{R}\, t \implies s = t$*

Satz 6 (Stifflers Theorem)**.** *S ist $\mathcal{R}$-trivial $\iff S \prec U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1$*

Beweis. Siehe [7]. □

Stifflers Theorem klassifiziert die angesprochenen Halbgruppen. Man beachte, dass $\mathcal{R}$-triviale Halbgruppen stets gruppenfrei sind. Es gilt daher nach Satz 2 für alle $\mathcal{R}$-trivialen Monoide M (außer für das triviale Monoid selbst) auch $U_1 \prec M$. Im Weiteren wird die (einfachere) Hinrichtung von Stifflers Theorem bewiesen werden. Dieses Vorgehen soll dann später verallgemeinert werden.

Dazu ist zunächst ein weiterer Begriff notwendig:

Definition (Extensiv[1])**.** *Eine Transformationshalbgruppe (Q, S) heißt* extensiv*, wenn es eine Halbordnung[2] $\leq$ auf Q gibt, so dass für alle $q \in Q$ und alle $s \in S$ gilt: $q \cdot s \leq q$.*

Extensive Transformationshalbgruppen besitzen damit betrachtet als gerichteter Graph eine topologische Sortierung, da sie keine Zyklen enthalten können, die nicht schon Schlingen sind.

Zwischen extensiven Transformationshalbgruppen und $\mathcal{R}$-trivialen Halbgruppen besteht folgender Zusammenhang:

[1]Der Gebrauch des Begriffs *extensiv* folgt [5].
[2]Eine Halbordnung ist eine transitive, reflexive und antisymmetrische binäre Relation.

Lemma. *Sei S eine $\mathcal{R}$-triviale Halbgruppe. Dann ist (S^1, S) extensiv.*
Sei andererseits (Q, S) eine extensive Transformationshalbgruppe. Dann ist S $\mathcal{R}$-trivial.

Beweis. Sei zunächst S $\mathcal{R}$-trivial. Dann ist auch S^1 $\mathcal{R}$-trivial, denn angenommen es gibt $s \in S$ mit $s \mathrel{\mathcal{R}} 1_{S^1}$. Dann gibt es auch $x \in S^1$ mit $sx = 1$. Ist $x = 1$, so gilt $s = 1$ und damit $1 \in S$. Ist $x \neq 1$, so ist $S \ni sx = 1$. In beiden Fällen gilt dann $S = S^1$, womit S nicht $\mathcal{R}$-trivial wäre. Ein Element $s \in S^1$ kann also mit genau einer $\mathcal{R}$-Klasse und damit mit dem Rechtsideal sS^1 identifiziert werden. Die gesuchte Halbordnung vermittelt dann die Inklusionsbeziehung dieser Rechtsideale.

Sei nun für den anderen Teil (Q, S) eine extensive Transformationshalbgruppe[3]. Angenommen S wäre nicht $\mathcal{R}$-trivial. Dann gibt es zwei unterschiedliche Element $s, t \in S$ und $x, y \in S$, so dass $sx = t$ und $ty = s$ gilt. Sei nun $q \in Q$ beliebig. Es gilt $q \cdot s = q \cdot ty = q \cdot sxy \leq q \cdot sx = q \cdot t \leq q \cdot s$ und damit aufgrund der Antisymmetrie $q \cdot s = q \cdot t$. Weil die Operation von S treu sein muss, gilt dann $s = t$, woraus such ein Widerspruch ergibt. $\square$

Extensive Transformationshalbgruppen sind Divisor eines Kranzprodukts aus disjunkten Kopien von U_1:

Satz 7. *Sei (Q, S) eine extensive Transformationshalbgruppe und $n := |Q|$. Dann gilt:*

$$(Q, S) \prec \underbrace{U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1}_{n \text{ mal}}$$

Beweis. Ein Element $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \prod_{k=1}^n U_1$ heiße *wohlgeformt*, falls es $1 \leq i_0 \leq n$ gibt, so dass $u_1 = u_2 = \cdots = u_{i_0} = 1$ und $u_{i_0+1} = u_{i_0+2} = \cdots = u_n = 0$ gilt. i_0 heiße dann *aktiv.* Setzte nun $\leq$ auf Q beliebig zu einer Totalordnung fort und nummeriere Q als $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ so, dass $q_i \leq q_j \implies i \leq j$ gilt. Außerdem seien $<, \geq, \ldots$ auf Q die sinngemäßen Übertragen von $\leq$. Damit lässt sich jetzt $\varphi : \prod_{k=1}^n U_1 \to_p Q$ einfach definieren. Es sei $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = q_{i_0}$, falls $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ wohlgeformt und i_0 dabei aktiv ist. φ ist damit surjektiv und es bleibt nur noch zu zeigen, dass jedes Element $s \in S$ ein überdeckendes Element $\hat{s} = (\hat{s}^1, \hat{s}^2, \ldots, \hat{s}^n)$ besitzt. Definiere dieses als

$$\hat{s}^i : \prod_{k=i+1}^{n} U_1 \to U_1$$

$$(u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n) \mapsto \begin{cases} 1 & u_{i+1} = u_{i+2} = \cdots = u_n = 0 \text{ und } q_i \cdot s = q_i \\ 0 & u_{i+1} = u_{i+2} = \cdots = u_n = 0 \text{ und } q_i \cdot s < q_i \\ 1 & \exists i_0 : \; u_{i+1} = u_{i+2} = \cdots = u_{i_0} = 1, \\ & \qquad u_{i_0+1} = u_{i_0+2} = \cdots = u_n = 0 \text{ und} \\ & \qquad q_{i_0} \cdot s \geq q_i \\ 0 & \exists i_0 : \; u_{i+1} = u_{i+2} = \cdots = u_{i_0} = 1, \\ & \qquad u_{i_0+1} = u_{i_0+2} = \cdots = u_n = 0 \text{ und} \\ & \qquad q_{i_0} \cdot s < q_i \\ * & \text{sonst} \end{cases}$$

[3] Vergleiche für diese Richtung auch [5]

Das konkrete Verhalten im sonst-Fall ist unerheblich. Sei nun $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = q_{i_0}$ und $q_{i_0} \cdot s = q_{j_0}$ für $s \in S$. Man beachte, dass $j_0 \leq i_0$ gilt. Die Werte von $\hat{s}^i(u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n)$ mit $i > i_0$ sind unerheblich, da hier ohnehin bereits $u_i = 0$ gilt. Für die anderen Möglichkeiten gilt:

		$\hat{s}^i(u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n)$
$j_0 = i_0$	$i = i_0 = j_0$	1
	$i < i_0 = j_0$	1
$j_0 < i_0$	$j_0 < i = i_0$	0
	$j_0 < i < i_0$	0
	$1 \leq i \leq j_0$	1

Für $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n) := (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \hat{s}$ ergibt sich:

		u_i	u'_i
$j_0 = i_0$	$i > i_0$	0	0
	$i = i_0 = j_0$	1	1
	$i < i_0 = j_0$	1	1
$j_0 < i_0$	$i > i_0$	0	0
	$j_0 < i = i_0$	1	0
	$j_0 < i < i_0$	1	0
	$1 \leq i \leq j_0$	1	1

Damit ist $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$ wohlgeformt und j_0 dabei aktiv, also ist $\varphi((u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \hat{s}) = q_{j_0}$ und $\hat{s}$ ein überdeckendes Element für s. $\square$

Damit ist auch der Beweis für die Hinrichtung von Satz 6 erbracht: Ist S $\mathcal{R}$-trivial, so ist (S^1, S) extensiv und es gilt $(S^1, S) \prec U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1$.

2.2 Zerlegung in starke Zusammenhangskomponenten

2.2.1 Die starken Zusammenhangskomponenten

Im Fall einer extensiven Transformationshalbgruppe sind die starken Zusammenhangskomponenten (der dann als Graph betrachteten Transformationshalbgruppe) einzelne Knoten. Die Zerlegung soll nun auf starke Zusammenhangskomponenten, die aus mehr als einem Knoten bestehen, erweitert werden. Dabei muss beachtet werden, dass die Übergangskanten eines festen Halbgruppenelements, die von einem Knoten innerhalb einer starken Zusammenhangskomponente ausgehen, zu einem anderen Knoten in der Komponente aber insbesondere auch aus der Komponente heraus führen können. Deswegen wird für die starken Zusammenhangskomponenten eine ähnlich Operation wie das Einfügen eines Fehlerzustandes in einem endlichen Automaten ausgeführt.

Betrachte (Q, S) als Graph, die starken Zusammenhangskomponenten dieses Graphen seien $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$. S operiert nun auf allen $Q_i^0 := Q_i \dot{\cup} \{0\}$, in dem Sinne, dass für

$q \in Q_i$

$$q \cdot s = \begin{cases} q \cdot s & q \cdot s \in Q_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $0 \cdot s = 0$ für alle $s \in S$ gilt. Diese Operation ist allerdings nicht mehr notwendigerweise treu. Um die Treue wiederherzustellen, wird zunächst die Relation $\triangle$ definiert: Zwei Halbgruppenelemente s und t stehen dabei in Relation, falls ihre Operation auf Q_i^0 gleich ist. Leicht prüft man nach, dass es sich dabei um eine Kongruenz handelt. Damit ist die Menge $S_i = S/\triangle$ der Äquivalenzklassen unter dieser Relation eine Halbgruppe. Außerdem überträgt sich die Operation von S auf Q_i^0 in eine treue Operation von S_i auf Q_i^0. Damit ist $(Q_i^0, S_i) =: R_i^{(Q,S)}$ eine Transformationshalbgruppe. Sofern aus dem Zusammenhang klar ist, welche Transformationshalbgruppe (Q, S) gemeint ist, wird im Folgenden auch einfach R_i geschrieben.

Schließlich soll die Nummerierung dieser Transformationshalbgruppen bzw. der starken Zusammenhangskomponenten immer so gewählt sein, dass

$$\{q \cdot s : q \in Q_i, s \in S\} = Q_i \cdot S \subseteq Q_j \cdot S \implies i \leq j$$

gilt (topologische Sortierung auf den starken Zusammenhangskomponenten). Es gilt dann eine ähnliche Aussage, wie für extensive Transformationshalbgruppen: Sei $q \in Q_i$ und $q \cdot s \in Q_j$ (für beliebiges $s \in S$), dann gilt $Q_j \subseteq Q_i \cdot S$ und $Q_j \cdot S \subseteq Q_i \cdot S^2 = \{q \cdot st : q \in Q_i, s, t \in S\} \subseteq Q_i \cdot S$. Entsprechend der Nummerierung ist dann $j \leq i$.

Für die verallgemeinerte Zerlegung muss an den starken Zusammenhangskomponenten eine weitere Modifikation vorgenommen werden. Dazu muss zunächst ein beliebiger, aber fester Repräsentant $\check{q}_i \in Q_i$ gewählt werden. Es wird später nötig sein, von diesem Repräsentanten in R_i explizit in den Zustand 0 umschalten zu können. Für starke Zusammenhangskomponenten, aus denen mindestens eine Kante herausführt, ist dies bereits möglich. Alle anderen müssen um diese Möglichkeit ergänzt werden. Definiere:

$$\tilde{S}_i := \begin{cases} S_i & \exists q \in Q_i, s \in S : q \cdot s \notin Q_i \\ S_i^N & \text{sonst,} \end{cases}$$

Im zweiten Fall wird die Operation von S_i auf Q_i^0 um $q \cdot 0 = 0$ ergänzt. Da bisher die 0 in R_i nicht erreichbar war, ist die so ergänzte Operation von $\tilde{S}_i$ auf Q_i^0 treu und $\tilde{R}_i := (Q_i^0, \tilde{S}_i)$ ist eine Transformationshalbgruppe. Im ersten Fall gibt es bereits Elemente $q \in Q_i$ und $s \in S$, so dass $q \cdot [s] = 0$ ist. Außerdem gibt es ein Element $t \in S_i$ mit $\check{q}_i \cdot t = q$ (da es zwischen zwei Knoten in einer starken Zusammenhangskomponente immer einen Pfad gibt). Das Element $ts \in S_i = \tilde{S}_i$ überführt also $\check{q}_i$ nach 0, es soll daher als $0_{\tilde{R}_i}$ bezeichnet werden. Im zweiten Fall soll $0_{\tilde{R}_i}$ einfach die Null in S_i^N bezeichnen.

2.2.2 Die Zerlegung

Mit der eingeführten Notation ist es nun möglich die Zerlegung formal durchzuführen:

Satz 8. *Sei (Q, S) eine Transformationshalbgruppe und r die Anzahl der starken Zusammenhangskomponenten Q_i von (Q, S). Dann gilt:*

$$(Q, S) \prec \tilde{R}_1^{\,1} \wr \tilde{R}_2^{\,1} \wr \cdots \wr \tilde{R}_r^{\,1}$$

Beweis. Sei T_k das Transitionsmonoid von $\tilde{R_k}^1$ (damit ist $T_k = \tilde{S_k}^1 = \tilde{S_k}$, falls (Q, S) ein Transformationsmonoid ist, und $T_k = \tilde{S_k}^I$, falls (Q, S) kein Transformationsmonoid ist). Seien $\check{q}_k \in Q_k$ (für alle $1 \leq k \leq r$) wieder die Repräsentanten der starken Zusammenhangskomponenten. Dies liefert für jedes $q \in Q_k$ ein Element $t_k(q) \in T_k$ mit $\check{q}_k \cdot t_k(q) = q$, diese Elemente werden später benötigt.

Ein Element $(q_k, q_{k+1}, \ldots, q_r) \in \prod_{i=k}^r Q_i^0$ heiße *wohlgeformt*, falls es ein $k \leq i_0 \leq r$ gibt mit:

- $q_{i_0+1} = q_{i_0+2} = \cdots = q_r = 0$
- $q_{i_0} \neq 0$ (dann ist $q_{i_0} \in Q_i \subseteq Q$)
- $q_i = \check{q}_i \neq 0$ für alle $k \leq i < i_0$

i_0 heißt dann *aktiv*. Damit sei $\varphi : \prod_{i=1}^r Q_i^0 \to_p Q$ definiert über $q = (q_1, q_2, \ldots, q_r) \mapsto q_{i_0}$, falls q wohlgeformt und i_0 aktiv ist. φ ist offensichtlich surjektiv. Zu einem Element $s \in S$ definiere $\hat{s} = (\hat{s}^1, \hat{s}^2, \ldots, \hat{s}^r)$ über

$$\hat{s}^k : \prod_{i=k+1}^r Q_i^0 \to T_k$$

$$q = (q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_r) \mapsto \begin{cases} [s] & q_{k+1} = q_{k+2} = \cdots = q_r = 0 \\ 1_{T_k} & q \text{ wohlgeformt, } i_0 \text{ aktiv und} \\ & q_{i_0} \cdot s \in Q_j \text{ mit } j > k \\ t_k(q_{i_0} \cdot s) & q \text{ wohlgeformt, } i_0 \text{ aktiv und} \\ & q_{i_0} \cdot s \in Q_k \\ 0_{\tilde{R}_k} & q \text{ wohlgeformt, } i_0 \text{ aktiv und} \\ & q_{i_0} \cdot s \in Q_j \text{ mit } j < k \\ * & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Verhalten im sonst-Fall ist unerheblich.

Sie nun $q := (q_1, q_2, \ldots, q_r) \in \prod_{i=1}^r Q_i^0$ wohlgeformt und sei i_0 dabei aktiv. Es gilt also $\varphi(q) = q_{i_0} =: p \in Q_{i_0}$. Sei $s \in S$ ein beliebiges Element und sei $p \cdot s = p' \in Q_{j_0}$. Sei ferner

$$\begin{aligned} q \cdot \hat{s} &= (q_1 \cdot \hat{s}^1, q_2 \cdot \hat{s}^2, \ldots, q_r \cdot \hat{s}^r) \\ &=: (q_1', q_2', \ldots, q_r') =: q' \end{aligned}$$

Um q' ausrechnen zu können müssen zunächst die Werte von $\hat{s}$ ausgerechnet werden, diese Werte finden sich in der folgenden Tabelle. Ein $*$ fungiert hier als Platzhalter, der konkrete Wert ist dann nicht wichtig.

		$\hat{s}^k(q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_r)$
$j_0 = i_0$	$k > i_0 = j_0$	$*$
	$k = i_0 = j_0$	$[s]$
	$k < i_0 = j_0$	1_{T_k}
$j_0 < i_0$	$k > i_0 > j_0$	$*$
	$k = i_0 > j_0$	$[s]$
	$j_0 < k < i_0$	$0_{\tilde{R}_k}$
	$k = j_0 < i_0$	$t_k(q_{i_0} \cdot s)$
	$k < j_0 < i_0$	1_{T_k}

Damit lassen sich die Werte von q' jetzt ausrechnen:

		q_k	q'_k
$j_0 = i_0$	$k > i_0 = j_0$	0	0
	$k = i_0 = j_0$	$q_{i_0} = p$	$p \cdot [s] = p \cdot s = p'$
	$k < i_0 = j_0$	$\check{q}_k$	$\check{q}_k \cdot 1_{T_k} = \check{q}_k$
$j_0 < i_0$	$k > i_0 > j_0$	0	0
	$k = i_0 > j_0$	$q_{i_0} = p$	$p \cdot [s] = 0$
	$j_0 < k < i_0$	$\check{q}_k$	$\check{q}_k \cdot 0_{\tilde{R}_k} = 0$
	$k = j_0 < i_0$	$\check{q}_k$	$\check{q}_k \cdot t_k(q_{i_0} \cdot s) = q_{i_0} \cdot s = p'$
	$k < j_0 < i_0$	$\check{q}_k$	$\check{q}_k \cdot 1_{T_k} = \check{q}_k$

q' ist also wohlgeformt und j_0 dabei aktiv, außerdem gilt $q'_{j_0} = p'$ und daher $\varphi(q \cdot \hat{s}) = \varphi(q') = p' = p \cdot s = \varphi(q) \cdot s$. $\square$

2.2.3 Eigenschaften der starken Zusammenhangskomponenten

Dieser Unterabschnitt beleuchtet enige Eigenschaften der starken Zusammenhangskomponenten genauer.

Zunächst ist es nahezu trivial, dass die starken Zusammenhangskomponenten Divisoren der Transformationshalbgruppe sind:

Lemma 10.

$$R_i \prec (Q, S)$$

Beweis. Definiere

$$\varphi : Q \to_p Q_i^0$$
$$q \mapsto \begin{cases} q & q \in Q_i \\ 0 & q \in Q_j \text{ mit } j < i. \end{cases}$$

φ ist surjektiv. Außerdem ist $s \in S$ ein überdeckenden Element für $[s] \in S_i$: Sei zunächst $q \in Q_i$ und auch $q \cdot s \in Q_i$, dann gilt: $\varphi(q \cdot s) = q \cdot s = q \cdot [s] = \varphi(q) \cdot [s]$. Ist $q \in Q_i$, aber $q \cdot s \notin Q_i$, dann ist entsprechend der getroffenen Nummerierung $q \cdot s \in Q_j$ für $j < i$. Also gilt: $\varphi(q \cdot s) = 0 = \varphi(q) \cdot [s]$. Ist schließlich $q \in Q_j$ mit $j < i$, dann ist entsprechend der Nummerierung auch $q \cdot s \in Q_{j'}$ für ein $j' < i$. Es gilt daher: $\varphi(q) \cdot [s] = 0 = \varphi(q \cdot s)$. $\square$

Außerdem sind die starken Zusammenhangskomponenten von Transformationsmonoiden wieder Transformationsmonoide:

Lemma 11. *Sei (Q, M) ein Transformationsmonoid, dann ist jedes R_i und jedes $\tilde{R}_i$ ein Transformationsmonoid.*

Beweis. Zunächst ist klar, dass S_i ein Monoid mit $[1_M]$ als neutralem Element ist. Außerdem gilt: $q \cdot [1_M] = q \cdot 1_M = q$ für alle $q \in Q_i$, d. h. $[1_M]$ operiert tatsächlich als Identität auf Q_i, und entsprechend der Definition auch $0 \cdot [1_M] = 0$. Dass R_i ein Transformationsmonoid ist, überträgt sich nach Konstruktion direkt auch auf $\tilde{R}_i$. □

Zwischen R_i und $\tilde{R}_i$ gilt der folgende Zusammenhang:

Lemma 12.

$$R_i \prec \tilde{R}_i \prec R_i \times U_1$$

Beweis. Falls $\tilde{S}_i = S_i$ ist, ist $\tilde{R}_i = R_i$ und beide Aussagen sind trivial. Sei also $\tilde{S}_i = S_i^N$. Definiere für den rechten Teil $\tilde{R}_i \prec R_i \times U_1$:

$$\begin{aligned} \varphi : Q_i^0 \times U_1 &\to_p Q_i^0 \\ (q, u) &\mapsto \begin{cases} q & u = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

φ ist surjektiv und ferner hat jedes Element $s \in S_i^N$ ein überdeckendes Element. Für $s \in S_i$ ist dies $(s, 1)$ und für $s = 0 \in S_i^N$ ist es $(t, 0)$, wobei $t \in S_i$ beliebig gewählt werden kann. Denn es ist für $s \neq 0$ und $q \in Q_i$:

$$\begin{aligned} &\varphi(q,1) \cdot s = q \cdot s = \varphi((q,1) \cdot (s,1)) &\qquad &\varphi(q,0) \cdot s = 0 = \varphi((q,0) \cdot (s,1)) \\ &\varphi(q,1) \cdot 0 = 0 = \varphi((q,1) \cdot (t,0)) & &\varphi(q,0) \cdot 0 = 0 = \varphi((q,0) \cdot (t,0)) \end{aligned}$$

Es bleibt noch $R_i \prec \tilde{R}_i$ zu zeigen. Verwende dazu die Identität auf Q_i^0 als Überlagerung. Jedes Element aus S_i ist dann aufgefasst als Element aus S_i^N überdeckendes Element für sich selbst. □

Betrachtet man Transformationshalbgruppen der Form (S^1, S) für eine Halbgruppe S, so sind zwei Elemente $s, t \in S$ aus der selben starken Zusammenhangskomponente auch $\mathcal{R}$-äquivalent, schließlich gibt es einen Pfad von s nach t (dieser sei mit x beschriftet) und einen Pfad von t nach s (dieser sei mit y beschriftet). Für die Beschriftungen gilt dann $s \cdot x = t$ und $t \cdot y = s$. Damit gilt $s \mathrel{\mathcal{R}} t$. Umgekehrt definieren die vermittelnden Element zwischen zwei $\mathcal{R}$-äquivalenten Elementen $s, t \in S$ in (S^1, S) auch eine Kante, s und t liegen also in der selben starken Zusammenhangskomponente. Satz 8 liefert also im Wesentlichen eine Zerlegung von Halbgruppen in ihre $\mathcal{R}$-Klassen.

2.3 Zerlegung der starken Zusammenhangskomponenten

In diesem Abschnitt geht es nun darum, die starken Zusammenhangskomponenten R_i selbst weiter zu zerlegen. Dazu sollen zunächst die Halbgruppenelement aus S_i auf zwei Mengen verteilt werden:

$$S_i^{\sim} := \{s \in S_i : \exists q \in Q_i : q \cdot s \in Q_i\}$$
$$S_i^{\rightarrow} := \{s \in S_i : \exists q \in Q_i : q \cdot s \notin Q_i\}$$

In der ersten Menge $S_i^{\sim}$ sind alle Elemente, die eine Kante erzeugen, die innerhalb von Q_i verläuft (also deren Anfangs- und Endpunkt in Q_i liegt). In der zweiten Menge $S_i^{\rightarrow}$ sind alle Element, die eine Kante erzeugen, die in Q_i beginnt aber nicht in Q_i endet. Im allgemeinen Fall sind die beiden Mengen nicht disjunkt, ist dies aber der Fall, so lässt sich von R_i die 0 abtrennen:

Lemma 13. *Ist $S_i^{\sim} \cap S_i^{\rightarrow} = \emptyset$, so gilt:*

$$(Q_i, S_i^{\sim}) \prec R_i \prec \tilde{R}_i \prec U_1 \times (Q_i, S_i^{\sim}) \qquad \textit{falls } S_i^{\sim} \neq \emptyset \tag{2.1}$$
$$R_i = \tilde{R}_i \prec U_1 \times (Q_i, 1) \qquad \textit{falls } S_i^{\sim} = \emptyset \tag{2.2}$$

1 bezeichnet hier das triviale Monoid und $(Q_i, 1)$ das zugehörige Transformationsmonoid.

Beweis. Für $S_i^{\sim} = \emptyset$ gilt $S_i = \tilde{S}_i$ nach Definition von $\tilde{S}_i$. Für $S_i^{\sim} \neq \emptyset$ gilt $R_i \prec \tilde{R}_i$ nach Lemma 12 und $(Q_i, S_i^{\sim}) \prec R_i$ gilt mittels der Identität auf Q_i betrachtet als (surjektive) partielle Funktion $Q_i^0 \rightarrow_p Q_i$ als Überlagerung. Elemente aus $S_i^{\sim} \subseteq S_i$ sind dabei überlagernde Element für sich selbst, denn für $s \in S_i^{\sim}$ gilt $s \notin S_i^{\rightarrow}$ und daher $q \cdot s \in Q_i$ für alle $q \in Q_i$.

Für den hinteren Teil definiere:

$$\varphi : U_1 \times Q_i \rightarrow_p Q_i^0$$
$$(u, q) \mapsto \begin{cases} q & u = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

φ ist offensichtlich surjektiv. Sei $s \in S_i$, definiere dann als überdeckendes Element

$$U_1 \times S_i^{\sim} \ni \hat{s} := \begin{cases} (1, s) & s \in S_i^{\sim} \\ (0, t) & s \notin S_i^{\sim}, \end{cases}$$

wobei $t \in S_i^{\sim}$ beliebig bzw. $t = 1$ ist. Ist $s \in S_i^{\sim}$, so gilt, wie bereits erwähnt, $q \cdot s \in Q_i$ für alle $q \in Q_i$. Damit gilt:

$$\varphi(1, q) \cdot s = q \cdot s = \varphi(1, q \cdot s) = \varphi((1, q) \cdot (1, s))$$
$$\varphi(0, q) \cdot s = 0 \cdot s = 0 = \varphi(0, q \cdot s) = \varphi((0, q) \cdot (1, s))$$

Ist $s \notin S_i^{\sim}$, so gilt $q \cdot s \notin Q_i$ für alle $q \in Q_i$. Damit ist $q \cdot s = 0$ und

$$\varphi(1, q) \cdot s = q \cdot s = 0 = \varphi(0, q \cdot t) = \varphi((1, q) \cdot (0, t))$$
$$\varphi(0, q) \cdot s = 0 \cdot s = 0 = \varphi(0, q \cdot t) = \varphi((0, q) \cdot (0, t)).$$

Ist $\tilde{S}_i = S_i^N$ (dies ist der Fall, falls $S_i^{\rightarrow} = \emptyset$), so definiere $\hat{0} := (0, t)$ als überdeckendes Element für $0 \in S_i^N$. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(1,q) \cdot 0 = q \cdot 0 = 0 = \varphi(0, q \cdot t) = \varphi((1,q) \cdot (0,t))\\ \varphi(0,q) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0 = \varphi(0, q \cdot t) = \varphi((0,q) \cdot (0,t)).\end{aligned}$$

□

Interessant sind mit diesen Erkenntnissen jene Transformationsmonoide (Q, M), in denen $S_i^{\sim}$ und $S_i^{\rightarrow}$ für alle starken Zusammenhangskomponenten disjunkt sind:

Satz 9. *Sei (Q, M) ein Transformationsmonoid, für das $S_i^{\sim} \cap S_i^{\rightarrow} = \emptyset$ für alle starken Zusammenhangskomponenten $1 \leq i \leq r$ gilt. Dann gilt*

$$(Q, M) \prec (U_1 \times (Q_1, S_1^{\sim})) \wr (U_1 \times (Q_2, S_2^{\sim})) \wr \cdots \wr (U_1 \times (Q_r, S_r^{\sim}))$$

und $(Q_i, S_i^{\sim}) \prec (Q, M)$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Beweis. Nach Lemma 11 sind alle R_i und nach Konstruktion damit auch alle $\tilde{R}_i$ Transformationsmonoide, es gilt also $\tilde{R}_i^1 = \tilde{R}_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. Mit Satz 8 gilt dann:

$$(Q, M) \prec \tilde{R}_1 \wr \tilde{R}_2 \wr \cdots \wr \tilde{R}_r$$

Nach Lemma 13 ist $\tilde{R}_i \prec U_1 \times (Q_i, S_i^{\sim})$. Man beachte dazu, dass $1 \in S_i^{\sim}$ und damit $S_i^{\sim} \neq \emptyset$ für alle $1 \leq i \leq r$ gilt.

Ebenfalls nach Lemma 13 gilt $(Q_i, S_i^{\sim}) \prec R_i$ und nach Lemma 10 schließlich auch $(Q_i, S_i^{\sim}) \prec (Q, M)$. □

Für extensive Transformationsmonoide sind die Mengen stets disjunkt (entweder bildet ein Element eine Schleife an einem Knoten, oder eben nicht). Außerdem ist dort $(Q_i, S_i^{\sim}) = (\{q\}, 1)$. Satz 7 ergibt sich damit in einem gewissen Sinne als Spezialfall des vorherigen Satzes.

Für welche Transformationsmonoide sind die Mengen nun jeweils disjunkt? Der nächste Unterabschnitt betrachtet als wichtiges Beispiel hierfür eine besondere Art von Halbgruppen bzw. Monoiden.

2.3.1 Halbgruppen mit $\mathcal{R} = \mathcal{H}$

Eine Halbgruppe S erfüllt die Bedingung $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ genau dann, wenn jede $\mathcal{R}$-Klasse bereits eine $\mathcal{H}$-Klasse ist, oder anders ausgedrückt, wenn

$$s \,\mathcal{R}\, t \implies s \,\mathcal{H}\, t$$

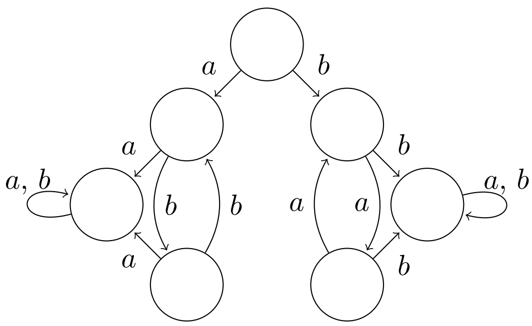
für alle $s, t \in S$ gilt. Die Bedingung wird beispielsweise von $\mathcal{R}$-trivialen oder von kommutativen Halbgruppen erfüllt.

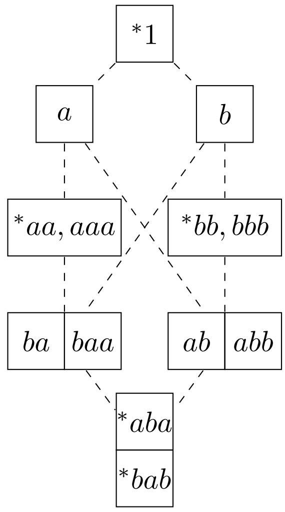
In Halbgruppen, die $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ erfüllen, ergibt sich mit Hilfe von Lemma 1 eine interessante Aussage: Sei S eine solche Halbgruppe. Betrachte die Transformationshalbgruppe

(S^1, S) und sei darin $[s] \in S_i^{\sim}$, d. h. es gibt $q \in Q_i \subseteq S^1$ mit $q \cdot s =: q' \in Q_i$. Damit gilt $q \mathrel{\mathcal{R}} q'$ in S^1. Weil für S $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ gilt, gilt dies auch für S^1 (wie man sich leicht überlegt). Also gilt auch $q \mathrel{\mathcal{L}} q'$. Nach Lemma 1 ist die Rechtstranslation mit s eine $\mathcal{R}$-Klassen erhaltende Bijektion von $[q]_{\mathcal{L}}$ nach $[q']_{\mathcal{L}} = [q]_{\mathcal{L}}$, in diesem Fall also eine Permutation auf $[q]_{\mathcal{H}} = Q_i$. Es gilt damit $p \cdot s \in Q_i$ für alle Elemente $p \in Q_i$. Damit ist $s \notin S_i^{\rightarrow}$ und die Mengen $S_i^{\sim}$ und $S_i^{\rightarrow}$ somit disjunkt. Durch Iteration ergibt sich für jedes $[s] \in S_i^{\sim}$ eine inverse Permutation und damit ein inverses Element. Ist $S_i^{\sim}$ nicht leer, so ist $S_i^{\sim}$ also eine Gruppe und $(Q_i, S_i^{\sim})$ eine Transformationgruppe.

Mit Satz 9 lässt sich jedes Monoid M, das $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ erfüllt, in U_1 und (Transformations-)Gruppen zerlegen. Ist M dabei selbst keine Gruppe, so ist nach Satz 2 U_1 Divisor von M. Die einzelnen Bausteine im Kranzprodukt sind dann alle ihrerseits Divisoren von M!

Allerdings lassen sich auch Monoide in U_1 und Gruppen zerlegen, so dass diese jeweils Divisor des Monoids sind, für die die Bedingung $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ nicht erfüllt ist. Ein Beispiel hierfür ist das folgende Transformationsmonoid, dessen entsprechende Zerlegung sich nach Satz 9 ergibt. Die $\mathcal{J}$-Klassen-Darstellung zeigt, dass die $\mathcal{R} = \mathcal{H}$-Eigenschaft nicht erfüllt ist.





3 Holonomie-Zerlegung

3.1 Eine kurze Einführung

Die Holonomie-Zerlegung erlaubt es allgemeine Transformationshalbgruppen in Holonomie-Transformationshalbgruppen zu zerlegen. Eine detaillierte Beschreibung (mit formalem Beweis) dieser Zerlegung ist sehr aufwändig, daher findet sich hier nur eine kurze Einführung in die wichtigsten Begriffe. Die Details und Beweise finden sich in [2] oder in der hier verwendeten Anschauung in [6]; ähnliche Ansätze finden sich auch in [1].

Bei der Holonomie-Zerlegung wird es nötig sein, Transformationshalbgruppen um Konstanten zu erweitern. Diese Operation kann auch auf Objekten der Form $(Q, \emptyset)$ durchgeführt werden. Sie erhalten daher einen besonderen Namen.

Definition (Verallgemeinerte Transformationshalbgruppen)**.** *Jede Transformationshalbgruppe (Q, S) ist eine verallgemeinerte Transformationshalbgruppe.*
Außerdem ist $(Q, \emptyset)$ für eine nicht-leere Menge Q ebenfalls eine verallgemeinerte Transformationshalbgruppe.
Die Definition von verallgemeinerten Transformationsmonoiden und -gruppen erfolgt analog.

Definition. *Sei (Q, S) eine Transformationshalbgruppe oder sei Q eine nicht-leere Menge und $S = \emptyset$. $\overline{(Q, S)}$ bezeichnet dann die Transformationshalbgruppe, die aus (Q, S) durch Erweiterung um Konstanten hervorgeht, d. h. S wird zunächst zu S' so erweitert, dass sich für jedes $q \in Q$ ein $\bar{q} \in S'$ findet, für das $p \cdot \bar{q} = q$ für alle $p \in Q$ gilt. Ist ein entsprechendes Element nicht in S vorhanden, so wird in S' ein neues Element aufgenommen. Die Verknüpfung in S' ist dann durch*

$$\begin{aligned} s *_{S'} t &:= s *_S t & \qquad s *_{S'} \bar{q} &:= \bar{q} \\ \bar{q} *_{S'} s &:= \overline{q \cdot s} & \qquad \bar{q} *_{S'} \bar{p} &:= \bar{p} \end{aligned}$$

für alle $s, t \in S$ und $q, p \in Q$ mit $\bar{q}, \bar{p} \notin S$ gegeben.

Man überprüft leicht, dass $\overline{(Q, S)}$ wohldefiniert ist und dass die Verknüpfungsregeln auf dann gelten, wenn $\bar{q}$ oder $\bar{p}$ bereits in S vorhanden war. Eine genauere Betrachtung der Konstanten findet sich in einem späteren Abschnitt.

In Zentrum der Holonomie-Zerlegung (insbesondere in der Anschauung nach [6]) einer Transformationshalbgruppe (Q, S) steht ein Graph, dessen Knoten

- alle Mengen der Form $Q \cdot s$ für $s \in S$,
- die Menge Q selbst und

- alle Elemente aus Q

sind. Diese Menge der Knoten sei V. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden wird ein einzelnes Element auch als ein-elementige (Teil-)Menge gesehen. Der Graph verfügt über zwei Arten von Kanten. Zunächst über die Inklusionskanten I: Hier gibt es eine Kante von einer Menge X zu einer Menge X', wenn $X \subsetneq X'$ ist und es keine Menge Y als Knoten im Graph gibt, so dass $X \subsetneq Y \subsetneq X'$ gilt. Mit anderen Worten, die reflexiven und transitiven Kanten werden aus der Inklusionsbeziehung herausgenommen. Die Inklusionskanten können offensichtlich keine Zyklen bilden. Die anderen Kanten sind Aktionskanten A. Eine Menge X hat eine mit $s \in S$ beschriftete Kante zur Menge $X \cdot s$ (für alle $s \in S$).

Sei zu einem Knoten X des Graphen $G_X := \{s \in S : X \cdot s = X\}$ die Menge der Halbgruppenelemente, die bezüglich der Aktionskanten eine Schleife an X bilden. Die Operation dieses Elements entspricht einer Permutation auf X, daher besitzt G_X Gruppenstruktur (sofern G_X nicht leer ist, was insbesondere bei Transformationsmonoiden nicht möglich ist, da $1 \in G_X$). Zu einem Vater-Knoten[1] X bezeichne P_X die Menge der direkten Nachfolger von X bezüglich der Inklusionskanten. Da $g \in G_X$ eine Permutation auf X definiert, definiert g auch eine Permutation auf P_X. Für einen Vater-Knoten X ist $H_X := (P_X, G_X)$ daher eine verallgemeinerte Transformationsgruppe. P_X heißt *Pflasterung* von X und die Elemente aus P_X *Ziegelsteine*. G_X heißt *Holonomie-Gruppe*, sofern $G_X \neq \emptyset$ ist, und es gilt $G_X \prec S$.

Bilden einige Aktionskanten (mit möglicherweise unterschiedlichen Beschriftungen) einen Zyklus, so sind alle Mengen, die darin vorkommen gleich groß, und die Operation der Beschriftung einer Kanten bildet eine Bijektion von der Ursprungsmenge (also dem Knoten, bei dem die Kante beginnt) in die Zielmenge (also dem Knoten, bei dem die Kante endet). Außerdem finden sich aufgrund der Assoziativität bzw. Homomorphie-Eigenschaft der Halbgruppen-Operation zwischen zwei Mengen X und X' des Zyklus Elemente $s, s' \in S$, so dass $X' = X \cdot s$ und $X = X' \cdot s'$ ist. Durch Iteration findet sich sogar ein $k \geq 0$, so dass die Operation von $s'(ss')^k s$ auf X' die Identität darstellt. Definieren dann $s^- := s'(ss')^k$, damit ist die Operation von $s^- s$ auf X' die Identität. Es lässt sich zeigen, dass H_X und $H_{X'}$ isomorph zueinander sind (sofern X und X' Vater-Knoten des Graphen auf einem Zyklus sind), in dem Sinne dass P_X und $P_{X'}$ über s und s^- in Bijektion stehen und dass entweder $G_X = G_{X'} = \emptyset$ oder $H_X \prec H_{X'}$ und $H_{X'} \prec H_X$ gilt.

Aus jeder starken Zusammenhangskomponente des Graphen bezüglich der Aktionskanten, die aus Vater-Knoten besteht, wird nun ein Repräsentant X_i gewählt. Für einen Vater-Knoten X bezeichne $i(X)$ den Index des Repräsentanten der starken Zusammenhangskomponente von X (es ist also $X \in X_{i(X)}$). Mit $t_i(X) \in S$ soll (für alle $X \neq X_i$ in der Komponente von X_i) ein beliebiges, aber festes Element bezeichnet werden, für das $X_i \cdot t_i(X) = X$ gilt. Für X_i selbst sei $t_i(X_i) := 1_{S^1} =: t_i(X_i)^-$. Man beachte, dass zwar nicht notwendigerweise $t_i(X_i) \in S$ aber immer $t_i(X_i)s, st_i(X_i), t_i(X_i)^- s, st_i(X_i)^- \in S$ für alle $s \in S$ gilt. Die Repräsentanten können (ohne Lücken) derart von 1 bis r num-

[1] Gemeint ist dabei ein Knoten, der mindestens eine ausgehende Inklusionskante besitzt.

merieren werden, dass

$$Y \subsetneq X \implies i(Y) < i(X) \quad \text{und} \quad \exists s \in S : Y = X \cdot s \implies i(Y) \leq i(X)$$

gilt. Daraus ergibt sich $Q = X_r$.

Die Holonomie-Zerlegung von (Q, S) ergibt dann

$$(Q, S) \prec \overline{H_1} \wr \overline{H_2} \wr \cdots \wr \overline{H_r} \text{ und } G_i \prec S \text{ für alle } 1 \leq i \leq r,$$

wobei $H_i := H_{X_i} =: (P_i, G_i)$ ist. Um die eigentliche Überlagerung definieren zu können, definiere zunächst rekursiv

$$\begin{aligned}
\tau : \bigcup_{k=1}^{r} \prod_{i=k}^{r} P_i &\to V \\
b_r &\mapsto b_r \\
(b_k, b_{k+1}, \dots, b_r) &\mapsto \begin{cases} b_k \cdot t_k(\tau) & i(\tau(b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_r)) = k, \\ & \tau := \tau(b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_r) \\ \tau(b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_r) & i(\tau(b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_r)) \neq k \end{cases}
\end{aligned}$$

Anschaulich verfolgt τ einen Pfad von Inklusionskanten: Am Anfang wird das durch b_r bestimmte Kind ausgewählt. Danach lässt sich rekursiv prüfen, welcher Knoten bisher ausgewählt war. Relevant ist dann das durch b_k gegebene Kind des Repräsentanten der starken Zusammenhangskomponente X_k dieses bisher ausgewählten Knotens. Dieses muss möglicherweise noch vom Repräsentanten in den eigentlichen Knoten umgerechnet werden. Es zeigt sich, dass $\tau(b_1, b_2, \dots, b_r) \in Q$ gilt! Die gesuchte Überlagerung φ ist dann τ eingeschränkt auf $\prod_{i=1}^{r} P_i \to Q$.

Um die überdeckenden Elemente beschreiben zu können, ist es zuerst sinnvoll von jedem Vater-Knoten X einen Weg über die Inklusionskanten zu jedem seiner Nachfahren Y (also nicht nur den direkten Nachfahren) festzulegen. Dieser Pfad soll mit $p^{X \to Y}$ bezeichnet werden. Formal soll $p^{X \to Y}$ als Sequenz von Knoten betrachtet werden. Der erste dieser Knoten $p_0^{X \to Y}$ ist X und der letzte $p_l^{X \to Y}$ ist Y. Dieser Weg kann zunächst beliebig gewählt werden, er sollte jedoch eine Konsistenzbedingung erfüllen: Liegt X' auf dem Weg von X nach Y, so soll $p^{X' \to Y}$ ein Endstück von $p^{X \to Y}$ sein.

Bezeichne $\overline{H_i} =: (P_i, \overline{G_i})$. Ein überdeckendes Element für $s \in S$ ist $\hat{s} = (\hat{s}^1, \hat{s}^2, \dots, \hat{s}^r)$ mit

$$\begin{aligned}
\hat{s}^k : \prod_{i=k+1}^{r} P_i &\to \overline{G_k} \\
b := (b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_r) &\mapsto \begin{cases} \dfrac{t_i(v) s t_i(v \cdot s)^-}{p_1^{X \to v \cdot s} t_k(X)^-} & \begin{array}{l} v := \tau(b), i(v) = i(v \cdot s) = k \\ v := \tau(b), v \cdot s \subsetneq X \text{ mit} \\ i(X) = k \end{array} \\ * & \mathit{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Im sonst-Fall ist das Verhalten unerheblich, es ist aber sinnvoll dann auf 1_{G_k} abzubilden, falls dies möglich ist (was insbesondere für Transformationsmonoide immer der Fall ist!).

3.2 Konstanten

Von einer Transformationsgruppe $\overline{(Q,G)}$ lassen sich die Konstanten wieder abtrennen. Es gilt:

Lemma 14. *Sei* (Q,G) *eine Transformationsgruppe. Dann gilt:*

$$\overline{(Q,G)} \prec \overline{(Q,\emptyset)}^1 \wr (G,G)$$

Beweis. (Vgl. [6, S. 6]) □

Die Konstanten lassen sich schließlich durch U_2 realisieren.

Lemma 15.

$$\overline{(Q,\emptyset)}^1 \prec \underbrace{(\{a,b\},U_2) \times (\{a,b\},U_2) \times \cdots \times (\{a,b\},U_2)}_{\lceil \log_2 |Q| \rceil \text{ } mal}$$

Beweis. Betrachte eine Element aus $\{a,b\}^{\lceil \log_2 |Q| \rceil}$ als Binärzahl. Dies sind

$$2^{\lceil \log_2 |Q| \rceil} \geq |Q|$$

viele. Assoziiere jedes Element $q \in Q$ mit einer solchen Binärzahl i_q. q_i bezeichne dann das Element aus q, das mit i assoziiert ist (falls ein solches existiert). $\varphi : \{a,b\}^{\lceil \log_2 |Q| \rceil} \to_p Q$ mit $i \mapsto q_i$, falls q_i definiert ist, ist dann surjektiv. Außerdem ist i_q ein überdeckendes Element für $\bar{q}$. Ein überdeckendes Element für 1 ist offensichtlich $(1,1,\ldots,1)$. □

Damit liefert die Holonomie-Zerlegung einen Beweis für das Krohn-Rhodes-Theorem, eines der wichtigsten Resultate der Theorie endlicher Halbgruppen (vgl. auch [4] und [2, S. 39]):

Satz (Krohn-Rhodes)**.** *Sei* (Q,S) *eine Transformationshalbgruppe. Dann gilt für ein* l*:*

$$(Q,S) \prec (Q_1,S_1) \wr (Q_2,S_2) \wr \cdots \wr (Q_l,S_l),$$

wobei für alle $1 \leq i \leq l$ *entweder*

- $Q_i = S_i = G$ *für eine nicht-triviale einfache Gruppe* G *oder*
- $(Q_i,S_i) = (\{a,b\},U_2)$ *gilt.*

Im ersten Fall gilt außerdem $G \prec S$*.*

Der Beweis dieses Theorems über die Holonomie-Zerlegung verläuft dann im Wesentlichen auf folgende Art und Weise: Die Transformationshalbgruppe (Q,S) ist Divisor von $\overline{H_1} \wr \overline{H_2} \wr \cdots \wr \overline{H_r}$. Von den einzelnen $\overline{H_i}$ lässt sich nach Lemma 14 der Gruppenanteil (sofern überhaupt vorhanden) von den Konstanten trennen. Die Konstanten lassen sich dann nach Lemma 15 weiter zerlegen. Anschließen müssen die Gruppenanteilen nur noch sukzessive in ihre (nicht-trivialen) Normalteiler zerlegt werden (siehe dafür z. B. [2, S. 40]).

Über Elemente der Form $\bar{q}$ lässt sich in einer Transformationshalbgruppe $\overline{(Q,S)}$ beliebig oft zwischen den Elementen aus Q wechseln. Oft ist eine unbegrenzte Anzahl an Wechseln allerdings gar nicht nötig.

Definition. *Sei Q eine nicht-leere Menge. $\bar{Q}$ hat dann über $\bar{q} * \bar{p} := \bar{p}$ Halbgruppenstruktur. Definiere die Transformationshalbgruppe*[2]

$$\overline{(Q}\overset{n}{,}\overline{\emptyset)} := (Q \times \{0,1,2,\dots,n\}, \bar{Q})$$

über die treue Halbgruppenoperation ($q, p \in Q$, $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$)

$$(q,i) \cdot \bar{p} := \begin{cases} (p,i) & i > 0, p = q \\ (p, i-1) & i > 0, p \neq q \\ (q,0) & i = 0. \end{cases}$$

Sei (Q,G) eine Transformationsgruppe mit $|Q| > 1$, so hat $G \,\dot{\cup}\, \bar{Q}$ Halbgruppenstruktur über ($g, h \in G$, $q, p \in Q$)

$$g * h := g *_G h \qquad g * \bar{q} := \bar{q}$$
$$\bar{q} * g := \overline{q \cdot g} \qquad \bar{q} * \bar{p} := \bar{p}.$$

Definiere die Transformationshalbgruppe

$$\overline{(Q}\overset{n}{,}\overline{G)} := (Q \times \{0,1,2,\dots,n\}, G \,\dot{\cup}\, \bar{Q})$$

über die treue Halbgruppenoperation ($q, p \in Q$, $g \in G$, $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$)

$$(q,i) \cdot \bar{p} := \begin{cases} (p,i) & i > 0, p = q \\ (p, i-1) & i > 0, p \neq q \\ (q,0) & i = 0 \end{cases}$$
$$(q,i) \cdot g := (q \cdot g, i)$$

Sei $(\{q\}, G)$ eine Transformationsgruppe, definiere $\overline{(\{q\}}\overset{n}{,}\overline{G)} := (\{q\} \times \{0,1,2,\dots,n\}, G)$ über die treue Halbgruppenoperation gegeben durch $(q,i) \cdot g := (q \cdot g, i)$. Setzte $\bar{q} := g$ für $g \in G$ beliebig.

In diesen Transformationshalbgruppen kann mittels Konstanten n-mal in einen bestimmten Zustand gewechselt werden. Eine erneute Konstantenanwendung ist anschließend ohne Wirkung. Wird dabei die Konstante $\bar{q}$ auf den Zustand (q,i) angewendet, so verringert sich der Zähler i nicht!

Auch hier lassen sich die Konstanten abseparieren:

Lemma 16. *Sei (Q,G) eine Transformationsgruppe. Dann gilt:*

$$\overline{(Q}\overset{n}{,}\overline{G)} \prec \overline{(Q}\overset{n}{,}\overline{\emptyset)}^{1} \wr (G,G)$$

[2] An dieser Stelle ist es angebracht einen Dank an die Betreiber und Mitglieder von `http://tex.stackexchange.com/` auszusprechen, insbesondere an die, die auf meine Frage bezüglich der Darstellung von $\overline{(Q}\overset{n}{,}\overline{\emptyset)}$ geantwortet haben.

Beweis. Definiere $\varphi : (Q \times \{0,1,2,\dots,n\}) \times G \to Q \times \{0,1,2,\dots,n\}$ über $((q,i),g) \mapsto (q \cdot g, i)$. φ ist surjektiv (wähle $g = 1$). Für $h \in G$ ist $\hat{h} := (1,h)$ (wobei 1 die konstante Funktion ist, die alle Werte in G auf 1 abbildet) ein überdeckendes Element, denn es gilt (für $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$):

$$\begin{aligned}
\varphi(((q,i),g) \cdot \hat{h}) &= \varphi(((q,i),g) \cdot (1,h)) \\
&= \varphi((q,i),gh) = q \cdot gh \\
&= \varphi((q,i),g) \cdot h
\end{aligned}$$

Für $p \in Q$ definiere $\hat{\bar{p}} = (\hat{\bar{p}}^{\bar{Q}}, 1_G)$ als überdeckendes Element von $\bar{p}$, dabei sei $\hat{\bar{p}}^{\bar{Q}} : G \to \bar{Q}^1$ definiert über $g \mapsto \overline{p \cdot g^{-1}}$. Es gilt tatsächlich (für $i \in \{1,2,\dots,n\}$):

$$\begin{aligned}
\varphi(((q,i),g) \cdot \hat{\bar{p}}) &= \varphi(((q,i),g) \cdot (\hat{\bar{p}}^{\bar{Q}}, 1_G)) \\
&= \varphi((q,i) \cdot \overline{p \cdot g^{-1}}, g) \\
&= \varphi((p \cdot g^{-1}, i-1), g) \\
&= (p \cdot g^{-1} g, i-1) = (p, i-1) \\
&= (q \cdot g, i) \cdot \bar{p} = \varphi((q,i),g) \cdot \bar{p}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi(((q,0),g) \cdot \hat{\bar{p}}) &= \varphi(((q,0),g) \cdot (\hat{\bar{p}}^{\bar{Q}}, 1_G)) \\
&= \varphi((q,0) \cdot \overline{p \cdot g^{-1}}, g) \\
&= \varphi((q,0),g) = (q \cdot g, 0) \\
&= (q \cdot g, 0) \cdot \bar{p} = \varphi((q,0),g) \cdot \bar{p}
\end{aligned}$$

□

Ähnlich wie bei „normalen“ Konstanten, lässt sich $\overline{(Q}^{n}, \overline{\emptyset)}^{1}$ weiter aufspalten:

Lemma 17.

$$\overline{(Q}^{n}, \overline{\emptyset)}^{1} \prec \underbrace{{A_{|Q|}}^1 \wr {A_{|Q|}}^1 \wr \cdots \wr {A_{|Q|}}^1}_{n+1 \ mal}$$

Beweis. Sei $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$. Identifiziere $q_i \in Q$ mit $\overleftarrow{i} \in {A_{|Q|}}^1$. Definiere dann

$$\begin{aligned}
\varphi : \prod_{i=0}^{n} {A_{|Q|}}^1 &\to_p Q \times \{0,1,2,\dots,n\} \\
(a_0, a_1, \dots, a_n) &\mapsto \ (a_i, i) \text{ falls } a_k \neq \epsilon \text{ für alle } k \geq i \text{ und} \\
&\qquad\qquad\qquad a_k = \epsilon \text{ für alle } k < i \text{ gilt.}
\end{aligned}$$

Die Surjektivität von φ ist offensichtlich. Als überdeckendes Element von $\bar{q}_j \in \bar{Q}$ definiere $\hat{\bar{q}}_j := (\hat{q}_j^0, \hat{q}_j^1, \ldots, \hat{q}_j^n)$ wobei $\hat{q}_j^n := \overleftarrow{j}$ und für $0 \leq i < n$

$$\hat{q}_j^i : \prod_{k=i+1}^{n} {A_{|Q|}}^1 \to {A_{|Q|}}^1$$

$$(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n) \mapsto \begin{cases} \overleftarrow{j} & a_{i+1} \neq q_j \text{ und} \\ & a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n \neq \epsilon \\ \epsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Sei nun $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (q_{j'}, i)$ für $q_{j'} \in Q$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_k &= \epsilon \text{ für } k < i, \\ a_i &= q_{j'} = \overleftarrow{j'} \neq \epsilon \text{ und} \\ a_k &\neq \epsilon \text{ für } k > i. \end{aligned}$$

Für $i > 0$ und $Q \ni q_j \neq q_{j'}$ gilt

$$\begin{aligned} a_k \cdot \hat{q}_j^k &= a_k \cdot \epsilon = a_k = \epsilon \text{ für } k < i - 1 \\ a_{i-1} \cdot \hat{q}_j^{i-1} &= a_{i-1} \cdot \overleftarrow{j} = \overleftarrow{j} = q_j \neq \epsilon \\ a_k \cdot \hat{q}_j^k &= a_k \neq \epsilon \text{ für } k \geq i \end{aligned}$$

und daher $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot \bar{q}_j = (q_j, i-1) = \varphi((a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot \hat{\bar{q}}_j)$. Für $i > 0$ und $q_j = q_{j'}$ gilt

$$\begin{aligned} a_k \cdot \hat{q}_j^k &= a_k \cdot \epsilon = a_k = \epsilon \text{ für } k < i - 1 \\ a_{i-1} \cdot \hat{q}_j^{i-1} &= a_{i-1} \cdot \epsilon = a_{i-1} = \epsilon \\ a_k \cdot \hat{q}_j^k &= a_k \neq \epsilon \text{ für } k \geq i \end{aligned}$$

und daher $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot \bar{q}_j = (q_j, i) = \varphi((a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot \hat{\bar{q}}_j)$. Für $i = 0$ gilt schließlich $a_k \neq \epsilon$ für alle $0 \leq k \leq n$ und damit für $q_j \in Q$:

$$\varphi(q_{j'}, a_1, \ldots, a_n) \cdot \bar{q}_j = (q_{j'}, 0) \cdot \bar{q}_j = (q_{j'}, 0) = \varphi((q_{j'}, a_1, \ldots, a_n) \cdot \hat{\bar{q}}_j)$$

□

3.3 Spezialfälle der Holonomie-Zerlegung

Der letzte Abschnitt hat Konstanten eingeführt, die nur endlich oft einen Zustandswechsel erlauben. Es stellt sich nun die Frage nach dem Nutzer solch eingeschränkter Konstanten. In diesem Abschnitt werden daher Spezialfälle untersucht, in denen diese Konstanten für die Holonomie-Zerlegung ausreichend sind.

3.3.1 Forderungen an (Q, M)

Es werden nun keine Transformationshalbgruppen mehr, sondern nur noch Transformationsmonoide (Q, M) betrachtet. Außerdem wird eine weitere Forderung an (Q, M) gestellt: Die Pfade entlang der Inklusionskanten im Graph der Holonomie-Zerlegung von (Q, M) sollen sich in eine Menge von Sorten $\mathbf{K} := \{K_1, K_2, \ldots, K_k\}$ einordnen lassen. Für die Sorten soll eine Sortierung existieren und allein anhand der Sorte eines Pfades $b \in \prod_{i=1}^{r} P_i$ soll es für ein Element $m \in M$ möglich sein zu bestimmen, ob m ein *sortenerhaltendes* oder ein *sortenwechselndes* Element ist. Für ein sortenwechselndes Element m soll gelten, dass $b \cdot \hat{m}$ ein Pfad einer echt kleineren Sorte ist als b. Diese Sorte darf nur von m, nicht aber von b abhängen; sie heißt Nachfolgesorte der Sorte von b unter m. Da die neue Sorte echt kleiner ist, ist die Anzahl der möglichen Sortenwechsel für einen Pfad b durch eine Konstante c_b beschränkt. Für ein sortenerhaltendes Element m soll gelten, dass es auf jedem Pfad der Sorte einen Knoten X mit $X \cdot m = X$ gibt. Schließlich soll für jeden Pfad b die Sorte nach Anwendung von $\hat{m}$ und anschließender Anwendung von $\hat{n}$ mit der Sorte nach Anwendung von $\hat{mn}$ übereinstimmen ($m, n \in M$ seien dabei beliebig).

Damit operiert M auf der Menge der Sorten: $K \cdot m$ sei die Nachfolgesorte von K unter m. Wie in Unterabschnitt 2.2.1 beschrieben, lässt sich mithilfe dieser Operation ein (treues) Transformationsmonoid $(\mathbf{K}, M')$ bilden.

Später werden einige Transformationsmonoide untersucht, die diese Forderungen erfüllen. Davor soll aber die Frage, welche Konsequenz diese (zunächst recht willkürlich erscheinenden) Forderungen haben, geklärt wurden.

Sei b ein Pfad zu $q := \tau(b)$ auf dem sich ein Knoten X mit $X \cdot m = X$ für ein Element $m \in M$ befindet (ohne Einschränkung sei X der bezüglich Inklusion größte solche Knoten auf b). Es ist nun möglich ohne Verwendung von Konstanten diesen Pfad in einen zum Knoten $q \cdot m$ zu überführen. Dazu wird der Pfad in zwei Teile geteilt: Der erste geht von Q bis X und der zweite von X bis q. Der erste Pfadteil soll unverändert bleiben, dazu wird auf den Repräsentanten X_i der dazu gehörigen Knoten stets 1_{G_i} angewendet. Ist X kein Vater-Knoten, so ist $X = \{q\} = X \cdot m = \{q \cdot m\}$ und der entstehende Pfad korrekt. Ist X ein Vater-Knoten, so wende bei $X_{i(X)}$ wie üblich $t_{i(X)}(X) m t_{i(X)}(X)^-$ an. Dies überführt den nächsten Knoten Y auf dem Pfad in den Knoten $Y \cdot m$. Ist Y kein Vater-Knoten, so ist die Aussage gezeigt. Ist Y ein Vater-Knoten, so ist auch $Y \cdot m$ ein Vater-Knoten und Y besitzt den selben Repräsentanten $X_{i(Y)}$ wie $Y \cdot m$. Die Anwendung von $t_{i(Y)}(Y) m t_{i(Y)}(Y \cdot m)^-$ überführt den auf dem Pfad nächsten Knoten Z in $Z \cdot m$. Für Z und $Z \cdot m$ kann Induktion angewendet werden.

Diese Überlegung motiviert die Zerlegung

$$(Q, M) \prec \overline{H}_1^{c} \wr \overline{H}_2^{c} \wr \cdots \wr \overline{H}_r^{c} \wr (\mathbf{K}, M'),$$

wobei c das Maximum aller c_b für alle möglichen Pfade b ist. Sei $P_i^c := P_i \times \{0, 1, \ldots, c\}$. Lifte τ zu einer Funktion

$$\bigcup_{k=1}^{r} \prod_{i=k}^{r} P_i^c \to V,$$

wobei die Zähler-Werte einfach ignoriert werden sollen. Definiere als Überlagerung

$$\psi : \left(\prod_{i=1}^{r} P_i^c \right) \times \{K_1, K_2, \ldots, K_k\} \to_p Q$$

mit $((b_1, i_1, b_2, i_2, \ldots, b_r, i_r), K) =: (b, K) \mapsto \tau(b)$, falls b ein Pfad der Sorte K ist und $i_j \geq c_b$ für alle $1 \leq j \leq r$ gilt. Man beachte, dass ψ surjektiv ist, da jeder Pfad zu einer Sorte gehört und die Zähler groß genug gewählt werden können. Definiere $\hat{m} := (\hat{m}^1, \hat{m}^2, \ldots, \hat{m}^r, [m])$ als überlagerndes Element für $m \in M$ über:

$$\hat{m}^i : \left(\prod_{j=i+1}^{r} P_j^c \right) \times \{K_1, K_2, \ldots, K_k\} \to G_i \cup \overline{P_i}$$

$$(b, K) \mapsto \begin{cases} t_i(v) s t_i(v \cdot s)^- & v := \tau(b), i(v) = i(v \cdot s) = k \\ \overline{p_1^{X \to v \cdot s} t_k(X)^-} & v := \tau(b), v \cdot s \subsetneq X \text{ mit} \\ & i(X) = k \text{ und } m \text{ ist auf } K \\ & \text{sortenwechselnd} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für sortenerhaltende Elemente m verhält sich $\hat{m}$ wie in der Überlegung oben beschrieben. Die Zähler werden also nicht verändert. Für sortenwechselnde Elemente verhält sich $\hat{m}$ wie in der Holonomie-Zerlegung. Hier werden die Zähler zwar möglicherweise verringert, sie waren aber vorher alle größer gleich c_b. Damit können also nach Definition von c_b noch alle weiteren möglichen Sortenwechsel ausgeführt werden. Der neue Pfad wird also von ψ weiter abgebildet, weswegen die Eigenschaften eines überdeckenden Elements tatsächlich erfüllt sind.

Man beachte abschließend noch, das die durchgeführten Modifikationen auf die Gruppen G_i keinen Einfluss haben. Es gilt also weiterhin $G_i \prec M$ für alle $1 \leq i \leq r$. Es gilt damit folgender Satz (der Ähnlichkeiten zum Krohn-Rhodes-Theorem besitzt):

Satz 10. *Sei (Q, M) ein Transformationsmonoid, das die eingangs gegebenen Forderungen erfüllt. Dann gilt für ein l:*

$$(Q, M) \prec C_1 \wr C_2 \wr \ldots C_l,$$

wobei für alle $1 \leq i \leq l$ entweder

- *$C_i = (G, G)$ für eine nicht-triviale einfache Gruppe G oder*
- *$C_i = U_1$ gilt.*

Im ersten Fall gilt außerdem $G \prec M$. Ist M keine Gruppe, so gilt auch $U_1 \prec M$.

Beweis. Es gilt

$$(Q, M) \prec \overline{H}_1^c \wr \overline{H}_2^c \wr \cdots \wr \overline{H}_r^c \wr (\mathbf{K}, M')$$

und $G_i \prec M$. Nach Lemma 16 lassen sich die Gruppenanteile der $\overline{H}_i^c$ abseparieren. Diese können dann wie beim Krohn-Rhodes-Theorem weiter in einfache Gruppen zerlegt werden (siehe dafür wieder [2, S. 40]). Die Konstantenanteile lassen sich nach Lemma 17 in ${A_z}^1$ zerlegen. ${A_z}^1$ kann seinerseits wiederum in U_1 zerlegt werden (siehe Satz 5). Da $(\mathbf{K}, M')$ nach den Forderungen extensiv ist, lässt es sich nach Satz 7 ebenfalls in U_1 zerlegen. Schließlich gilt noch $U_1 \prec M$, falls M keine Gruppe ist, nach Satz 2. □

3.3.2 Monoide mit $\mathcal{R} = \mathcal{H}$

Dieser Unterabschnitt wird zeigen, dass für jedes Monoid M, für das $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ gilt, das Transformationsmonoid (M, M) die Forderungen aus dem vorherigen Unterabschnitt erfüllt. Wähle dazu als Menge der Pfadsorten die Menge der $\mathcal{L}$-Klassen von M. Die Sorte eines Pfades b ist dann die $\mathcal{L}$-Klasse von $\tau(b)$. Seien m und n zwei Element aus der selben $\mathcal{L}$-Klasse. Dann gilt $Mm = Mn$ und für jedes Element $a \in M$ auch $Mma = Mna$ und damit $ma \mathrel{\mathcal{L}} na$. Die Nachfolgesorte unter einem Element a kann also lediglich durch Kenntnis der Ursprungssorte bestimmt werden. Ist a sortenerhaltend für eine $\mathcal{L}$-Klasse L, so gilt für $n \in L$: $n \mathrel{\mathcal{L}} na$ bzw. $M \cdot n = Mn = Mna = M \cdot n \cdot a$. Der Knoten $M \cdot n$ findet sich dabei auf jedem Pfad b zu n, denn angenommen b verläuft nicht über $M \cdot n$. Sei dann $M \cdot m \neq M \cdot n$ der direkte Vorfahr von n auf b. Dann ist nach Konstruktion des Graphen $n \in M \cdot m$ und es gibt $z \in M$ mit $n = zm$. Daher ist $M \cdot n = M \cdot zm \subsetneq M \cdot m$. Da $n \in M \cdot n \subsetneq M \cdot m$ gilt, gibt es keine Inklusionskante von $M \cdot m$ zu n, was einen Widerspruch darstellt. Ist a andererseits sortenwechselnd auf L, so kann die ursprüngliche Sorte durch Rechtsoperation nie wieder erreicht werden. Um dies einzusehen sei b ein Pfad zu einem beliebigen Element m aus L. Dann liegt ma in einer anderen $\mathcal{L}$-Klasse, da a auf L sortenwechselnd ist. Angenommen durch Anwendung der Elemente $c_1, c_2, \dots, c_s$ lässt sich ein Pfad b' zu ma überführen in einen Pfad b'' zu einem Knoten $mac_1c_2 \dots c_s =: mac$ mit $m \mathrel{\mathcal{L}} mac$. Es gilt dann $Mm = Mmac$ und die Operation von ac bildet eine Permutation auf Mm. Dann gibt es ein k (die Ordnung der Permutation), so dass die Operation von $(ac)^k$ die Identität auf Mm ist. Es gilt dann

$$ma \cdot c(ac)^{k-1} = m \qquad \text{und} \qquad m \cdot a = ma$$

und damit $m \mathrel{\mathcal{R}} ma$. Also gilt auch $m \mathrel{\mathcal{L}} ma$, was einen Widerspruch bedeutet. Es lässt sich also eine Sortierung der $\mathcal{L}$-Klassen finden, so dass ein Sortenwechsel nur in eine echt kleinere Klasse möglich ist.

Satz 10 bestätigt damit weitgehend das Ergebnis aus Unterabschnitt 2.3.1.

4 Zerlegung 0-einfacher Halbgruppen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Zerlegung 0-einfacher Halbgruppen. Ziel ist es dabei für das Monoid S^1 zu einer 0-einfachen Halbgruppe S zu zeigen, dass es Divisor eines Kranzprodukts aus Halbgruppen ist, die ihrerseits Divisoren von S^1 sind. Nach Lemma 6 gilt dann zudem $S \prec S^1$. 0-einfache Halbgruppen sind deshalb interessant, weil sie als Bausteine allgemeiner Halbgruppen betrachtet werden können.

Definition (0-einfache Halbgruppe)**.** *Eine Halbgruppe S heißt* 0-einfach*, wenn sie ein Null-Element $0 \in S$ enthält und $\{0\}$ und $S \setminus \{0\}$ ihre beiden einzigen $\mathcal{J}$-Klassen sind.*

Daneben gibt es auch *einfache* Halbgruppen, diese besitzen nur eine $\mathcal{J}$-Klasse. Jede einfache Halbgruppe lässt sich durch Adjunktion einer Null in eine 0-einfache Halbgruppe überführen. Leicht überlegt man sich, dass die ursprüngliche Halbgruppe dann Divisor der Halbgruppe mit Null ist.

Es werden nun die möglichen Fälle eine 0-einfachen Halbgruppe einzeln untersucht. Man verifiziere, dass es sich dabei tatsächlich um alle Möglichkeiten handelt.

4.1 Nicht-reguläre $\mathcal{J}$-Klasse

Sei S eine 0-einfache Halbgruppe und die $\mathcal{J}$-Klasse $S \setminus \{0\}$ nicht regulär[1]. Dann enthält $S \setminus \{0\}$ nur ein Element a. Denn für zwei verschiedene Element Elemente a und b aus $S \setminus \{0\}$, gilt nach Satz 1 $ab = 0$. Außerdem gibt es für sie $x, y \in S^1$ mit $a = xby$ und es gilt $x, y \neq 0$ (sonst wäre $a = 0$). Der Fall $x = y = 1$ ist ausgeschlossen, sei also $x \neq 1$ (der Fall $y \neq 1$ verläuft analog). Damit gilt $x \mathrel{\mathcal{J}} b$ (es gibt keine andere $\mathcal{J}$-Klasse für x) und dann $xb = 0$ und $xby = 0 = a$. Also gilt $a \not\mathrel{\mathcal{J}} b$.

Es ist also $S = \{0, a\}$ und es gilt $st = 0$ für alle $s, t \in S$. Damit gilt

$$S^1 \prec U_1 \wr U_1$$

über die Überlagerung $\varphi : U_1 \times U_1 \to S^1$ mit $(0,0) \mapsto 0$, $(1,0) \mapsto a$ und $(1,1) \mapsto 1$. Ein überdeckendes Element für 0 ist $(0,0)$, eines für 1 ist $(1,1)$ (0 bzw. 1 in der ersten Komponente bezeichne dabei die entsprechende konstante Funktion) und eines für a ist $\hat{a} = (\hat{a}^1, 0)$, wobei $\hat{a}^1 : U_1 \to U_1$ über $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 1$ definiert ist. Das es sich dabei tatsächlich um überdeckende Elemente handelt, ergibt sich durch einfach Rechnung.

[1] Zu beachten ist, dass dieser Fall in der Definition einer 0-einfachen Halbgruppe nach [3] ausgeschlossen ist

4.2 $\mathcal{J}$-Klasse ist Gruppe

Sei S eine 0-einfache Halbgruppe und $S \setminus \{0\}$ eine Gruppe G, so gilt

$$S^1 = S \prec G \times U_1$$

über die Überlagerung $\varphi : G \times U_1 \to S$ mit $(g, 0) \mapsto 0$ und $(g, 1) \mapsto g$. Ein überdeckendes Element für 0 ist dabei $(1, 0)$ und eines für $g \in G$ ist $(g, 1)$.

4.3 Zwei Idempotente

Ist S eine 0-einfache Halbgruppe, die zwei idempotente Elemente in der selben $\mathcal{R}$-Klasse besitzt, so gilt nach Satz 3 $U_2 \prec S^1$. Zerlege S^1 dann beliebig nach dem Krohn-Rhodes-Theorem.

4.4 Reguläre $\mathcal{J}$-Klasse, maximal ein Idempotentes, gruppenfrei

Sei S eine 0-einfache, gruppenfreie Halbgruppe, in der jede $\mathcal{J}$-Klasse regulär ist und jede $\mathcal{R}$-Klasse maximal ein idempotentes Element besitzt. Damit besitzt jede $\mathcal{R}$-Klasse genau ein Idempotentes (vgl. Lemma 4), außerdem besitzt auch jede $\mathcal{L}$-Klasse mindestens ein Idempotentes. Mit L_λ für $0 \leq \lambda \leq l$ sollen die $\mathcal{L}$-Klassen von S bezeichnet werden, L_0 sei dabei die $\mathcal{L}$-Klasse von 0. R_i bezeichne dann die $\mathcal{R}$-Klassen, wobei $0 \leq i \leq r$ und R_0 die $\mathcal{R}$-Klasse von 0 ist, und $H_{i,\lambda}$ bezeichne schließlich die $\mathcal{H}$-Klasse $R_i \cap L_\lambda$ (sofern dies nicht leer ist). Es gelte außerdem $r \geq 2$, ansonsten ist $S \setminus \{0\}$ eine Gruppe. Für $l = 1$ hat S die Struktur von A_r^0. Man überlegt sich dabei leicht, dass $A_r^0 \prec U_1 \times A_r \prec U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1$ und $U_1 \prec S^1$ gilt. Sei im Folgenden also $l \geq 2$.

Da S gruppenfrei ist, enthält jede $\mathcal{H}$-Klasse genau ein Element. Wähle für die Elemente folgende Bezeichnungen: Zunächst bezeichne $e_\lambda^{(j)}$ das j-te Idempotente in L_λ. Die bisher freie Nummerierung der $\mathcal{R}$- und $\mathcal{L}$-Klassen soll nun entsprechend der folgenden $\mathcal{J}$-Klassen-Darstellung von S eingeschränkt werden. Die erste Zeile soll R_1 beschreiben, die zweite R_2 und so weiter. Analog soll die erste Spalte L_1 beschreiben, die zweite L_2 und so weiter.

${}^*e_1^{(1)}$	$s_1^{(1)}$		
${}^*e_1^{(2)}$	$s_1^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$		
${}^*e_1^{(n_1)}$	$s_1^{(n_1)}$		
	${}^*e_2^{(1)}$	$s_2^{(1)}$	
	$\vdots$	$\vdots$	
	${}^*e_2^{(n_2)}$	$s_2^{(n_2)}$	
		$\ddots$	
$s_l^{(1)}$			${}^*e_l^{(1)}$
$\vdots$			$\vdots$
$s_l^{(n_l)}$			${}^*e_l^{(n_l)}$

$$\boxed{{}^*0}$$

Das Element in der selben $\mathcal{R}$-Klasse wir $e_\lambda^{(j)}$, aber in der nächsten $\mathcal{L}$-Klasse sei $s_\lambda^{(j)}$ (in der Darstellung bereits verzeichnet). Nach Satz 1 ist $e_\lambda^{(j)} s_\lambda^{(j)} = s_\lambda^{(j)}$. Nach Lemma 1 ist die Rechtstranslation mit $s_\lambda^{(j)}$ demnach eine $\mathcal{R}$-Klassen erhaltende bijektive Abbildung von L_λ nach $L_{\lambda+1}$ (ggf. modulo l). Zur Vereinfachung der Schreibweisen im folgenden soll eine Vereinbarung gelten: Ist $\lambda \neq 0$, so soll $\lambda + 1$ und $\lambda - 1$ auf den Bereich von 1 bis l normiert werden; insbesondere soll $1 - 1 = l \neq 0$ gelten! Analoges soll auch für $i \neq 0$ gelten. Ebenfalls nach Satz 1 gilt $s_\lambda^{(j)} s_{\lambda'}^{(j')} \neq 0$ genau dann, wenn $\lambda' = \lambda + 1 \pmod{l}$ ist. Damit erzeugen alle $s_\lambda^{(j)}$ zusammen ganz S.

Es gilt nun:

Lemma.

$$S^1 \prec (Q_{l+1}, B_l)^1 \wr {A_r}^1$$

Beweis. Die (surjektive!) Überlagerung ist

$$\begin{aligned} \varphi : Q_{l+1} \times {A_r}^1 &\to_p S^1 \\ (\lambda, \epsilon) &\mapsto 1, \text{ falls } \lambda = 1 \\ (\lambda, \overleftarrow{i}\,) &\mapsto \begin{cases} 0 & \lambda = 0 \\ s & \lambda \neq 0, s \in H_{i,\lambda} \end{cases} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(1, \epsilon)$ ein überdeckendes Element für 1 (wobei 1 die konstante Funktion von ${A_r}^1$ zu $1 \in {B_l}^1$ ist). Ein überdeckendes Element für $s_\lambda^{(j)}$ ist $\hat{s}_\lambda^{(j)} := (\hat{s}^B, \overleftarrow{i}\,)$, wobei R_i die $\mathcal{R}$-Klasse von $s_\lambda^{(j)}$ sei und $\hat{s}^B$ (natürlich weiterhin für verschieden λ und j unterschiedlich und) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \hat{s}^B : {A_r}^1 &\to {B_l}^I \\ \epsilon &\mapsto a_1 a_2 \dots a_{\lambda-1} \\ \overleftarrow{i} &\mapsto a_\lambda . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\varphi((1,\epsilon)\cdot\hat{s}_\lambda^{(j)}) &= \varphi(\lambda,\overleftarrow{i}\,) = s_\lambda^{(j)} = \varphi(1,\epsilon)\cdot s_\lambda^{(j)},\\
\varphi((0,\overleftarrow{k}\,)\cdot\hat{s}_\lambda^{(j)}) &= \varphi(0,\overleftarrow{k}\,) = 0 = \varphi(0,\overleftarrow{k}\,)\cdot s_\lambda^{(j)},\\
\varphi((\lambda,\overleftarrow{k}\,)\cdot\hat{s}_\lambda^{(j)}) &= \varphi(\lambda+1,\overleftarrow{k}\,) = \varphi(\lambda,\overleftarrow{k}\,)\cdot s_\lambda^{(j)} \text{ und}\\
\varphi((\mu,\overleftarrow{k}\,)\cdot\hat{s}_\lambda^{(j)}) &= \varphi(0,\overleftarrow{k}\,) = 0 = \varphi(\mu,\overleftarrow{k}\,)\cdot s_\lambda^{(j)} \text{ für } \mu\neq\lambda.
\end{aligned}$$

□

Schließlich gilt auch noch:

Lemma.

$$(Q_3, B_2)^1 \prec S^1$$

Beweis. Definiere $\varphi : S^1 \to_p Q_3$ über $e := e_1^{(1)} \mapsto 1$, $s := s_1^{(1)} \mapsto 2$ und $0 \mapsto 0$. Ein überdeckendes Element für a ist s, eines für b ist $s_2^{(1)} s_3^{(1)} \ldots s_l^{(1)}$, wie sich durch einfache Rechnung zeigt. □

Damit gilt zusammengefasst:

Satz.

$$S^1 \prec {B_2}^1 \wr {B_2}^1 \wr \cdots \wr {B_2}^1 \wr U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1,$$

wobei ${B_2}^1 \prec S^1$ *und* $U_1 \prec S^1$ *gilt.*

Beweis. Es gilt $S^1 \prec (Q_{l+1}, B_l)^1 \wr {A_r}^1$. Nach Satz 4 gilt $(Q_{l+1}, B_l)^1 \prec (Q_3, B_2)^1 \wr (Q_3, B_2)^1 \wr \cdots \wr (Q_3, B_2)^1$ und nach Lemma 8 gilt $(Q_3, B_2)^1 \prec {B_2}^I = {B_2}^1$. ${A_r}^1 \prec U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1$ gilt nach Satz 5. ${B_2}^1 \prec S^1$ gilt nach vorigem Lemma zusammen mit Lemma 7 und $U_1 \prec S^1$ gilt nach Satz 3. □

4.5 Nicht-gruppenfreie Erweiterung

Sei S wie im letzten Abschnitt, jedoch nicht gruppenfrei. Seien H und H' zwei (möglicherweise gleiche) $\mathcal{H}$-Klassen aus S. Alle Produkte der Form st mit $s \in H$ und $t \in H'$ befindet sich nach Satz 1 in der selben $\mathcal{H}$-Klasse; daher bildet die Menge der $\mathcal{H}$-Klassen von S eine Halbgruppe $S' = \{[s]_\mathcal{H} : s \in S\}$, die zudem die im letzten Abschnitt geforderten Bedingungen erfüllt.

Seien die $\mathcal{L}$-Klassen von S analog wie im letzten Abschnitt als $L_1, L_2, \ldots, L_l$ und $L_0 = \{0\}$ nummeriert, auch die Nummerierung und Benennung der $\mathcal{R}$-Klassen R_i von S und der $\mathcal{H}$-Klassen $H_{i,\lambda}$ soll (analog) übernommen werden. Nach Satz 1 gilt entweder $H_{i,\lambda}H_{j,\mu} = H_{0,0}$ oder $H_{i,\lambda}H_{j,\mu} = H_{i,\mu}$ in S' für alle $1 \leq i, j \leq r$ und $1 \leq \lambda, \mu \leq l$.

Nach Voraussetzung befindet sich in jeder $\mathcal{R}$-Klasse R_i genau eine reguläre $\mathcal{H}$-Klasse, dabei sei $\lambda_G(i)$ die Nummer der $\mathcal{L}$-Klasse, in der diese liegt.

Nach Lemma 3 sind alle (nicht-trivialen) regulären $\mathcal{H}$-Klassen in S isomorph zur selben Gruppe G. $\iota_i : G \to H_{\lambda_G(i),i}$ bezeichne den Isomorphismus von G in die reguläre $\mathcal{H}$-Klasse in R_i (für $1 \leq i \leq r$). $\iota_i(1)$ ist damit das Idempotente in R_i und nach [3, S. 51] ist $\iota_i(1)s = s$ für alle $s \in R_i$.

Es gilt nun:

Lemma.

$$S^1 \prec G \wr S'^1$$

Beweis. Fixiere für alle $1 \leq \lambda \leq l$ ein beliebiges Element s_λ, dass L_λ durch Rechtstranslation $\mathcal{R}$-Klassen-erhaltend in $L_{\lambda+1}$ überführt. Solche Elemente existieren nach Lemma 1. Die Rechtstranslation mit

$$\tilde{s}_\lambda := s_\lambda s_{\lambda+1} \dots s_l s_1 s_2 \dots s_{\lambda-1}$$

ist dann eine $\mathcal{R}$-Klassen-erhaltende Permutation auf L_λ. Es findet sich ein $k_\lambda \geq 1$, so dass $\tilde{s}_\lambda^{k_\lambda}$ die Identität auf L_λ und damit auch auf allen $H_{i,\lambda}$ (mit $1 \leq i \leq r$) ist. Definiere nun:

$$t_i^{\lambda\to} := \begin{cases} s_\lambda s_{\lambda+1} \dots s_{\lambda_G(i)-1} & \lambda < \lambda_G(i) \\ s_\lambda s_{\lambda+1} \dots s_l s_1 s_2 \dots s_{\lambda_G(i)-1} & \lambda > \lambda_G(i) \\ 1 & \lambda = \lambda_G(i) \end{cases}$$

$$t_i^{\to\lambda} := \begin{cases} s_{\lambda_G(i)} s_{\lambda_G(i)+1} \dots s_l s_1 s_2 \dots s_{\lambda-1} \tilde{s}_\lambda^{k_\lambda - 1} & \lambda \leq \lambda_G(i) \\ s_{\lambda_G(i)} s_{\lambda_G(i)+1} \dots s_{\lambda-1} \tilde{s}_\lambda^{k_\lambda-1} & \lambda > \lambda_G(i) \end{cases}$$

Offensichtlich ist jetzt $t_i^{\lambda\to} t_i^{\to\lambda} = \tilde{s}_\lambda^{k_\lambda}$. Definiere:

$$\begin{aligned} \varphi : G \times S'^1 &\to_p S^1 \\ (1,1) &\mapsto 1 \\ (g, H_{i,\lambda}) &\mapsto \iota_i(g) t_i^{\to\lambda} \text{ für } 1 \leq i \leq r, 1 \leq \lambda \leq l \\ (g, H_{0,0}) &\mapsto 0. \end{aligned}$$

φ ist surjektiv und es gilt $\varphi(g, H_{i,\lambda}) \in H_{i,\lambda}$.

Ein überdeckendes Element für 1_{S^1} ist $(1, 1_{S'^1})$ (wobei 1 in der ersten Komponente die konstante Funktion von S'^1 nach 1_G bezeichne), ein überdeckendes Element für $s \in S$ ist $\hat{s} = (\hat{s}^G, [s]_\mathcal{H})$ mit

$$\begin{aligned} \hat{s}^G : S'^1 &\to G \\ 1 &\mapsto \iota_i^{-1}(\iota_i(1) s t_i^{\lambda\to}) \text{ für } s \in H_{i,\lambda} \text{ mit } 1 \leq i \leq r, 1 \leq \lambda \leq l \\ 1 &\mapsto 1 \text{ für } s \in H_{0,0} \\ H_{0,0} &\mapsto 1 \\ H_{i,\lambda} &\mapsto \iota_i^{-1}(\iota_i(1) t_i^{\to\lambda} s t_i^{\mu\to}) \text{ für } s \in H_{j,\mu} \text{ mit } H_{i,\lambda} H_{j,\mu} = H_{i,\mu} \neq H_{0,0} \\ H_{i,\lambda} &\mapsto 1 \text{ für } H_{i,\lambda}[s]_\mathcal{H} = H_{0,0} \end{aligned}$$

Es gilt nun für $H_{j,\mu} \ni s \neq 0$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq \lambda \leq l$:

$$\begin{aligned}
\varphi((1,1)\cdot\hat{0}) &= \varphi((1,1)\cdot(1,H_{0,0})) = \varphi(1,H_{0,0}) \\
&= 0 = \varphi(1,1)\cdot 0 \\
\varphi((g,H_{0,0})\cdot\hat{0}) &= \varphi((g,H_{0,0})\cdot(1,H_{0,0})) = \varphi((g,H_{0,0}) \\
&= 0 = \varphi(g,H_{0,0})\cdot 0 \\
\varphi((g,H_{i,\lambda})\cdot\hat{0}) &= \varphi((g,H_{i,\lambda})\cdot(1,H_{0,0}) = \varphi((g,H_{0,0}) \\
&= 0 = \varphi(g,H_{i,\lambda})\cdot 0 \\
\varphi((1,1)\cdot\hat{s}) &= \varphi((1,1)\cdot(\iota_j^{-1}(\iota_j(1)st_j^{\mu\rightarrow}),[s]_{\mathcal{H}})) \\
&= \varphi(\iota_j^{-1}(\iota_j(1)st_j^{\mu\rightarrow}),H_{j,\mu}) \\
&= \iota_j(1)st_j^{\mu\rightarrow}t_j^{\rightarrow\mu} = \iota_j(1)s \\
&= s = \varphi(1,1)\cdot s \\
\varphi((g,H_{0,0})\cdot\hat{s}) &= \varphi((g,H_{0,0})\cdot(1,[s]_{\mathcal{H}})) = \varphi(g,H_{0,0}) \\
&= 0 = \varphi(g,H_{0,0})\cdot s
\end{aligned}$$

Ist zudem $H_{i,\lambda}[s]_{\mathcal{H}} = H_{0,0}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi((g,H_{i,\lambda})\cdot\hat{s}) &= \varphi((g,H_{i,\lambda})\cdot(\iota_i^{-1}(\iota_i(1)t_i^{\rightarrow\lambda}st_i^{\mu\rightarrow}),[s]_{\mathcal{H}})) \\
&= \varphi(g',H_{0,0}) \\
&= 0 = \varphi(g,H_{i,\lambda})\cdot s
\end{aligned}$$

Ist andererseits $H_{i,\lambda}[s]_{\mathcal{H}} = H_{i,\mu} \neq H_{0,0}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi((g,H_{i,\lambda})\cdot\hat{s}) &= \varphi((g,H_{i,\lambda})\cdot(\iota_i^{-1}(\iota_i(1)t_i^{\rightarrow\lambda}st_i^{\mu\rightarrow}),[s]_{\mathcal{H}})) \\
&= \varphi(g\iota_i^{-1}(\iota_i(1)t_i^{\rightarrow\lambda}st_i^{\mu\rightarrow},H_{i,\mu}) \\
&= \iota_i(g\iota_i^{-1}(\iota_i(1)t_i^{\rightarrow\lambda}st_i^{\mu\rightarrow}))t_i^{\rightarrow\mu} \\
&= \iota_i(g1)t_i^{\rightarrow\lambda}st_i^{\mu\rightarrow}t_i^{\rightarrow\mu} \\
&= \iota_i(g)t_i^{\rightarrow\lambda}s = \varphi(g,H_{i,\lambda})\cdot s
\end{aligned}$$

□

Andererseits gilt auch:

Lemma 18.

$$S'^1 \prec S^1$$

Beweis. Wähle als Überlagerung $\varphi : S^1 \to S'^1$ mit $1 \mapsto 1$ und $s \mapsto [s]_{\mathcal{H}}$. Ein überdeckendes Element für $1_{S'^1}$ ist 1_{S^1} und eines für $H_{i,\lambda}$ ist $s \in H_{i,\lambda}$, wie man leicht einsieht. □

Zusammen ergibt dies:

Satz.

$$S^1 \prec G \wr {B_2}^1 \wr {B_2}^1 \wr \cdots \wr {B_2}^1 \wr U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1,$$

wobei $G \prec S^1$, ${B_2}^1 \prec S^1$ *und* $U_1 \prec S^1$ *gilt, oder*

$$S^1 \prec G \wr U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1,$$

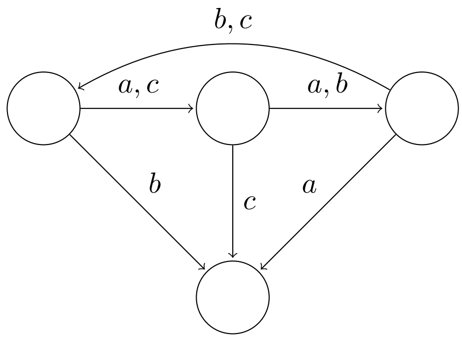
wobei $G \prec S^1$ *und* $U_1 \prec S^1$ *gilt*

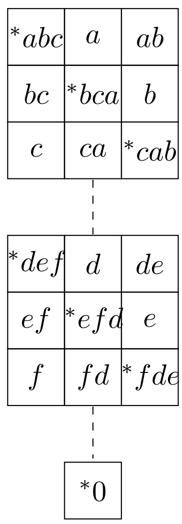
Beweis. Es gilt $S^1 \prec G \wr S'^1$. Entsprechend dem letzten Abschnitt lässt sich S'^1 entweder in ${B_2}^1 \wr {B_2}^1 \wr \cdots \wr {B_2}^1 \wr U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1$ zerlegen und es gilt ${B_2}^1 \prec S'^1$ und $U_1 \prec S'^1$ oder es gilt $S'^1 \prec U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1$ und $U_1 \prec S'^1$. Da $S'^1 \prec S^1$ gilt, gilt also ggf. auch ${B_2}^1 \prec S^1$ und $U_1 \prec S^1$. $G \prec S^1$ gilt durch Wahl eines Isomorphismus von einer beliebigen (nicht-trivialen) $\mathcal{H}$-Klasse nach G als Überlagerung. Die überdeckenden Element finden sich durch die inverse Abbildung zu diesem Isomorphismus. $\square$

Abschließend sei noch angemerkt, dass sich G natürlich auch weiter in einfache Gruppen zerlegen lasst, genau wie beim Krohn-Rhodes-Theorem.

4.6 Übertragung auf komplexere Halbgruppen

Es ist möglich 0-einfache Halbgruppen in U_1, ${B_2}^1$, U_2 und Gruppen zu zerlegen. Leider ist es nicht möglich dieses Ergebnis direkt auf komplexere Halbgruppen zu übertragen, indem man die einzelnen $\mathcal{J}$-Klassen der Halbgruppe als 0-einfache Halbgruppe auffasst und diese zerlegt. Das Problem, das sich bei diesem Ansatz ergibt, ist, dass die Operation der größeren $\mathcal{J}$-Klassen auf den kleineren mitberücksichtigt werden muss. Betrachte als Beispiel dazu folgende Transformationshalbgruppe (Q, S) und die $\mathcal{J}$-Klassen-Darstellung von S. Der Übersichtlichkeit halber setzte dabei $d := aacc$, $e := bbaa$ und $f := ccbb$.





Die untere der beiden nicht-trivialen $\mathcal{J}$-Klassen J_u und die 0 bilden eine 0-einfache Halbgruppe, die Divisor von $(Q_4, B_3)^1 \wr {A_3}^1$ ist. Zieht man die obere $\mathcal{J}$-Klasse J_o jedoch mit in Betracht, ist unklar wie beispielsweise das Verhalten von a auf J_u umgesetzt werden kann. Denn die Rechtstranslation mit a bildet $[def]_\mathcal{L}$ auf $[d]_\mathcal{L}$ und $[d]_\mathcal{L}$ auf $[de]_\mathcal{L}$ ab, während alle Element aus $[de]_\mathcal{L}$ auf 0 abgebildet werden. Im Gegensatz dazu überführt in $(Q_{l+1}, B_l)^1$ jedes a_i genau einen Zustand in einen anderen von 0 verschiedenen.

Möglicherweise kann (Q, S) aber auf eine ganz andere Weise in ein Kranzprodukt aus ${B_2}^1$ und U_1 zerlegt werden. Ist dies jedoch nicht möglich, so liefert (Q, S) einen Hinweis darauf, welche weiteren Bausteine zur Zerlegung allgemeiner Halbgruppen in der Form, dass jeder verwendete Baustein in der Halbgruppe selbst enthalten ist, nötig sind.

5 Zusammenfassung

Nach der grundlegenden Einführung in die Theorie endlicher Halbgruppen und Transformationshalbgruppen stellte das erste Kapitel insbesondere die Halbgruppen U_1, U_2, B_2 und B_n vor. Dabei ergab sich, dass $U_1 \prec M$ für genau die Monoide M gilt, die keine Gruppe sind. Für U_2 ergab sich ein ähnliches Kriterium: Demnach ist U_2 genau dann Divisor eines Monoids M, wenn M eine $\mathcal{R}$-Klasse mit zwei unterschiedlichen Idempotenten besitzt. Weiter wurde gezeigt, dass sich anhand eines bestimmten Musters in der $\mathcal{J}$-Klassen-Darstellung einer Halbgruppe bestimmen lässt, ob B_2 Divisor der Halbgruppe ist. Für B_n wurde gezeigt, dass es Divisor eines direkten Produkts aus n vielen B_2 ist.

Am Anfang des zweiten Kapitels stand die Zerlegung von Transformationshalbgruppen, deren starke Zusammenhangskomponenten trivial sind. Diese extensiven Transformationshalbgruppen (Q, S) ließen sich dabei als $(Q, S) \prec U_1 \wr U_1 \wr \cdots \wr U_1$ zerlegen. Da für $\mathcal{R}$-triviale Halbgruppen S die Transformationshalbgruppe (S^1, S) extensiv ist, liefert diese Zerlegung einen Beweis für die einfache Richtung von Stifflers Theorem. Der Ansatz ließ sich anschließend auf Transformationshalbgruppen (Q, S) mit nicht-trivialen starken Zusammenhangskomponenten erweitern. Dazu wurden Transformationshalbgruppen $\tilde{R}_i$ definiert, die im Wesentlichen die Operation von S auf der i-ten starken Zusammenhangskomponente widerspiegeln. Die Zerlegung ergab sich dann als:

$$(Q, S) \prec \tilde{R}_1^{\,1} \wr \tilde{R}_2^{\,1} \wr \cdots \wr \tilde{R}_r^{\,1}$$

Für den Fall, dass S auf jeder starken Zusammenhangskomponente derart in zwei disjunkte Teilmenge zerfällt, dass die Elemente der einen Menge eine Permutation auf der starken Zusammenhanskomponente vermitteln und die Elemente der anderen Menge von jedem Knoten aus die starke Zusammenhangskomponente verlassen, ließ sich zeigen, dass die $\tilde{R}_i$ ihrerseits Divisor eines direkten Produkts von U_1 und einer Transformationsgruppe sind. Zusammen ergab dies einen der zentralen Sätze dieser Arbeit: Ein Transformationsmonoid (Q, M), für das M wie eben beschrieben auf den starken Zusammenhangskomponenten zerfällt, ist Divisor eines Kranzprodukts aus U_1 und Transformationsgruppen, die ihrerseits Divisor von M sind. Zum Abschluss des Kapitels wurde schließlich gezeigt, dass hierunter insbesondere die Transformationsmonoide (M, M) für Monoide M, in denen für die Greenschen Relationen $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ gilt, fallen. Dies liefert eine analoge Aussage zur einfachen Richtung von Stifflers Theorem für diese Monoide. Allerdings wurde durch ein Gegenbeispiel gezeigt, dass die entsprechende Rückrichtung nicht gilt, d. h. dass es Monoide gibt, die Divisor eine Kranzprodukts aus Transformationsgruppen und U_1 sind, aber für die nicht $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ gilt.

Das dritte Kapitel bestätigte schließlich den zentralen Satz aus dem vorherigen Kapitel durch Betrachtung der Holonomie-Zerlegung einer Transformationshalbgruppe (Q, S), die zunächst kurz vorgestellt wurde. Anschließend wurde auf Transformationshalbgruppen, die um Konstanten ergänzt wurden, eingegangen. Dies erlaubte einzusehen, warum die Holonomie-Zerlegung einen Beweis für das Krohn-Rhodes-Theorem liefert. Neben den normalen Transformationshalbgruppen mit Konstanten wurde ein neuer Gedanke eingeführt: Transformationsgruppen, die um solche Konstanten erweitert werden, dass durch diese nur endlich viele Zustandswechsel möglich sind. Während sich die normalen Konstanten durch ein direktes Produkt aus mehreren U_2 umsetzen ließen, wurde gezeigt, dass für die eingeschränkten Konstanten bereits U_1 ausreicht. Es wurde diskutiert, dass für Transformationsmonoide (Q, M), die bestimmte Forderungen erfüllen, die Holonomie-Zerlegung mit diesen Konstanten auskommt. Konkret wurde gezeigt, dass

$$(Q, M) \prec \overset{c}{\overline{H}}_1 \wr \overset{c}{\overline{H}}_2 \wr \cdots \wr \overset{c}{\overline{H}}_r \wr (\mathbf{K}, M'),$$

gilt, wobei $\overset{c}{\overline{H}}_i$ die normale i-te Holonomie-Transformationshalbgruppe erweitert um Konstanten, die c viele Zustandswechsel ermöglichen, ist und $(\mathbf{K}, M')$ ein Transformationsmonoid von Pfadsorten zu Pfaden im Graph der Holonomie-Zerlegung darstellt. Es wurde auch diskutiert, wie sich die Komponenten des Kranzprodukts weiter in einfache Gruppen und U_1 zerlegen lassen, was eine Variation des Krohn-Rhodes-Theorems lieferte. Abschließend wurde gezeigt, dass die Transformationsmonoide (M, M) zu Monoiden M, die $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ erfüllen, allen Forderungen gerecht werden; dies lieferte die Bestätigung für das Ergebnis aus dem zweiten Kapitel.

Das vierte Kapitel beschäftigte sich schließlich mit der Zerlegung 0-einfacher Halbgruppen. Dort gelang es zu zeigen, dass jede beliebige 0-einfache Halbgruppe Divisor eines Kranzprodukts aus U_1, ${B_2}^1$, U_2 und Gruppen ist, so dass die auftretenden Kranzprodukt-Faktoren selbst Divisoren (des Monoids zu) der 0-einfachen Halbgruppe sind. Zum Abschluss wurde diskutiert, welche Probleme sich bei der Übertragung dieses in gewissem Sinne $\mathcal{J}$-Klassen-lokalen Ansatzes auf komplexere Halbgruppen ergeben. Dies ermöglichte auch einen Ausblick darauf zu geben, ob die Bausteine U_1, ${B_2}^1$, U_2 und Gruppen ausreichend sind, damit jede Halbgruppe S Divisor eines Kranzprodukts aus ihnen ist, so dass die auftretenden Faktoren schon in S vorkommen, oder welche Bausteine potentiell ergänzt werden müssen.

Literatur

[1] Attila Egri-Nagy. „Algebraic hierarchical decomposition of finite state automata: A computational approach“. Diss. University of Hertfordshire, 2005.

[2] S. Eilenberg und B. Tilson. *Automata, languages, and machines*. Pure and Applied Mathematics Bd. 2. Elsevier Science, 1976. ISBN: 9780080873756.

[3] John Mackintosh Howie. *Fundamentals of semigroup theory*. Clarendon Press Oxford, 1995.

[4] Kenneth Krohn und John Rhodes. „Algebraic theory of machines. I. Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 116 (1965), S. 450–464.

[5] Jean-Eric Pin. „Mathematical foundations of automata theory“. In: *Lecture notes* (2012).

[6] Martin P. Seybold. „Die Holonomie-Zerlegung von Automaten“. ger. Diplomarbeit. Holzgartenstr. 16, 70174 Stuttgart: Universität Stuttgart, 2012.

[7] Price Stiffler. „Extension of the fundamental theorem of finite semigroups“. In: *Advances in Mathematics* 11.2 (1973), S. 159–209.

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt zu haben.

(Jan Philipp Wächter)