

Dynamische Korrelationen und nichtnormale Verstärkung in turbulenten Scherströmungen



Zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

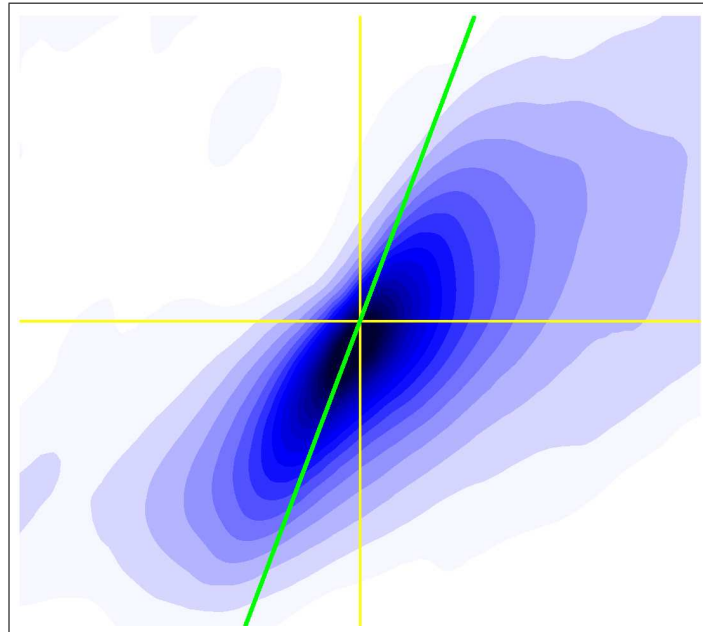
dem Fachbereich Physik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt

von
Arne Jachens
aus der
Freien Hansestadt Bremen

Marburg/Lahn 2004

Vom Fachbereich Physik der Philipps-Universität Marburg
als Dissertation angenommen am: 16.07.2004
Erstgutachter: Prof. Bruno Eckhardt
Zweitgutachter: Prof. Holger Neumann
Tag der mündlichen Prüfung: 22.07.2004

Dynamische Korrelationen und nichtnormale Verstärkung in turbulenten Scherströmungen



“Although in most ways the exact manner in which water moves is difficult to perceive and still more difficult to define, as are also the forces attending such motion, certain general features both of the forces and motions stand prominently forth, as if to invite or to defy theoretical treatment.”

O. Reynolds [1]

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Charakteristische Größen	2
1.3 Übergangsmechanismen	5
1.3.1 Nichtnormale Verstärkung	7
1.3.2 Entstehung von Streifen	8
1.3.3 Zusammenbruch der Strukturen & Regeneration	11
1.3.4 Asymmetrie zeitlicher Korrelationen	12
1.4 Die Taylorsche Hypothese	14
1.4.1 Studien zur Anwendbarkeit der Taylorschen Hypothese	15
1.5 Ziel dieser Arbeit	19
2 Modelle, Simulationen, Messungen	21
2.1 9-Moden-Modell einer turbulenten Scherströmung	21
2.2 Homogene Scherturbulenz mittels DNS	23
2.3 Homogene viskoelastische Scherturbulenz	26
2.3.1 Statistik der Polymerdehnung	29
2.3.2 Turbulente Widerstandsreduktion	30
2.3.3 Abhängigkeit statistischer Größen von der Deborahzahl	31
2.4 Turbulente Rohrströmung	34
2.5 Turbulente Randschicht bei hohen Re	35
2.5.1 Methoden zur Geschwindigkeitsmessung	37
2.5.2 Übersicht der experimentellen Parameter	38
2.5.3 Messungen der Wandnahen Grenzschicht am DNW	40
2.5.4 Messungen der Wandnahen Grenzschicht am HFI	42
3 Korrelationen in Scherströmungen	43
3.1 Zeit-räumliche Korrelationen im 9-Moden-Modell	43
3.1.1 Räumliche Korrelationen	50
3.1.2 Diskussion der Strukturen im 9-Moden-Modell	52
3.2 Zeitlich-räumliche Korrelationen in DNS	54

3.2.1	Autokorrelationen	57
3.2.2	Auswirkungen der Konvektionsgeschwindigkeit	59
3.2.3	Räumliche Korrelationen	63
3.2.4	Neigung der räumlichen Korrelationen	69
3.2.5	Numerische Simulation mit höherer Auflösung	70
3.2.6	Diskussion der Strukturen in der Simulation	71
3.3	Korrelationen in viskoelastischer Scherturbulenz	74
3.3.1	Diskussion der Auswirkungen der Polymere	77
3.4	Korrelationen einer turbulenten Rohrströmung	81
3.4.1	Diskussion der Strukturen aus der Rohrströmung	83
3.5	Korrelationen in turbulenten Randschichten	84
3.5.1	Messungen am DNW	85
3.5.2	Messungen am HFI	88
3.5.3	Räumliche Korrelationen der Windkanalmessungen	90
3.5.4	Diskussion der Windkanalmessungen	90
3.6	Vergleich der untersuchten Systeme	92
3.6.1	Zeitlich-räumliche Korrelationen	92
3.6.2	Räumliche Korrelationen	93
4	Zusammenfassung der Ergebnisse	95

Abbildungsverzeichnis

1.1	Nichtnormale Verstärkung	7
1.2	Mittlerer Fluss einer Scherströmung, in der für Scherströmungen gebräuchlichen Geometrie: Strömungsrichtung x , Wandnormalenrichtung y und Spannweitenrichtung z	8
1.3	Wirbel in einer Scherströmung	9
1.4	Streifenbildung	9
1.5	Illustration von Streifen	10
1.6	Asymmetrie der Kreuzkorrelation zwischen Wirbel und Streifen	13
1.7	Konvektion turbulenter Strukturen	15
2.1	Geometrie der homogenen Scherströmung	24
2.2	Statistische Größen der Simulationen	25
2.3	End-zu-End-Abstand einer Polymerkette	26
2.4	Reibungsreduzierung	30
2.5	Fluktuationen der viskoelastischen Turbulenz	31
2.6	Streckung der Polymere	32
2.7	Visualisierung von Streifen	33
2.8	Geometrie der Rohrströmung	34
2.9	Turbulente Energie der Rohrströmung	35
2.10	Mittlere Geschwindigkeit und Scherung	39
2.11	Bilder vom Windkanal	40
3.1	9 Moden, $C^R(\Delta x)$	44
3.2	9 Moden, $C^T(\Delta t)$	44
3.3	9 Moden, C_{vu}	46
3.4	9 Moden, Ursache der Schiefe	48
3.5	9 Moden, Schiefe	49
3.6	Beiträge der 4 Korrelationen	49
3.7	Autokorrelation der räumlichen Moden	51
3.8	Neigung von C_{vu}	52
3.9	Korrelationen der Amplituden zur Berechnung von C_{uu}	53

3.10	DNS, C_{vu}	54
3.11	DNS, $C_{vu}(\Delta t, y), Q_{vu}(\Delta t, y)$	55
3.12	DNS, Asymmetrie als Funktion des Wandabstandes	56
3.13	DNS, C_{uu}	57
3.14	DNS, C_{vv}	58
3.15	Neigung der zeitlich-räumlichen Korrelation	59
3.16	Kreuzkorrelation in Richtung U und \tilde{U}	60
3.17	C_{vu}, Q_{vu} in Richtung der mittleren Geschwindigkeit	61
3.18	C_{vu}, Q_{vu} in Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit	62
3.19	Neigung der Kreuzkorrelation	63
3.20	Neigung der Autokorrelation	63
3.21	Asymmetrie der Autokorrelation	64
3.22	Wahrscheinlichste Geschwindigkeit u	66
3.23	Wahrscheinlichste Geschwindigkeit v	67
3.24	Mittlere Geschwindigkeitsprofile	68
3.25	Neigungswinkel der räumlichen Korrelationen	69
3.26	Simulation II. $C_{vu}(\Delta t, \Delta x, y)$	70
3.27	Simulation II. $C_{vu}(\Delta t, y), Q_{vu}(\Delta t, y)$	71
3.28	C_{vu} für viskoelastisches Fluid mit $De = 0.4$	74
3.29	$C_{vu}(\Delta t, y), Q_{vu}(\Delta t, y), De = 0.4$	75
3.30	C_{vu} für viskoelastisches Fluid mit $De = 0.8$	76
3.31	$C_{vu}(\Delta t, y), Q_{vu}(\Delta t, y), De = 0.8$	77
3.32	C_{vu} für viskoelastisches Fluid mit $De = 1.6$	78
3.33	$C_{vu}(\Delta t, y), Q_{vu}(\Delta t, y), De = 1.6$	79
3.34	Vergleich des Abfalls des Asymmetriemaßes	80
3.35	Rohrströmung, C_{vu}	81
3.36	C_{vu} und Q_{vu} in der Rohrströmung	82
3.37	Autokorrelationen	85
3.38	Kreuzkorrelationen, $U_\infty = 40\text{m/s}$	86
3.39	Kreuzkorrelationen, $U_\infty = 80\text{m/s}$	87
3.40	Kreuzkorrelationen, $U_\infty = 10\text{m/s}$	88
3.41	Kreuzkorrelationen, $U_\infty = 30\text{m/s}$	89
3.42	Räumliche Autokorrelation in Abhängigkeit vom Wandabstand	90
3.43	Räumliche Kreuzkorrelation in Abhängigkeit vom Wandabstand	91

Tabellenverzeichnis

1.1	Turbulenzgrad der verschiedenen Systeme	16
2.1	Parameter der Simulation	24
2.2	Kenngrößen der Windkanalmessungen	38
2.3	Statistische Größen, DNW, 40m/s	41
2.4	Statistische Größen, DNW, 80m/s	41
2.5	Statistische Größen, HFI, 10m/s	42
2.6	Statistische Größen, HFI, 30m/s	42

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einleitung

Das Strömen von Wasser, das je nach Antrieb ganz unterschiedliche Formen, von einfach geradlinig bis stark verwirbelt und turbulent, aufweisen kann, fasziniert von jeher die Menschen. Obwohl die Bewegungsgleichungen für Fluide seit 1823 bekannt sind und eine vergleichsweise einfache Gestalt haben, sind deren Lösungen in unterschiedlichen Geometrien und die durch sie hervorgerufenen Strukturen nach wie vor ein interessantes Forschungsgebiet, auf dem es noch viel zu entdecken gibt.

Häufig hat man es mit der Strömung von Fluiden in vorgegeben Geometrien (Flussbett, Rohr oder Tragfläche eines Flugzeugs) zu tun. Durch die in Experimenten immer wieder bestätigte Haftung des Fluids an festen Wänden kommt es zwangsläufig zu einer Scherung des Fluids. Den dabei entstehenden Strömungsmustern wird durch die Viskosität des Fluids permanent Energie entzogen — dies führt z.B. zum Luftwiderstand von Fahrzeugen. Die zur Kompensation notwendige Zufuhr von Energie, um den Prozess der fortwährenden Bildung solcher Strukturen aufrecht zu erhalten, kann nur aus der Scherung kommen.

Eine häufig zitierte Vorstellung für diesen Prozess ist die Wechselwirkung von in Strömungsrichtung ausgedehnten Wirbeln mit dem Scherprofil — Schichten unterschiedlich schnell fließenden Fluids werden durchmischt und es entstehen Streifen schnelleren oder langsameren Fluids, die bei der Entstehung von Turbulenz eine wesentliche Rolle spielen (Kap. 1.3.1).

In der vorliegenden Arbeit wird die Kreuzkorrelation von Geschwindigkeitsfluktuationen senkrecht zur begrenzenden Fläche und in Strömungsrichtung als Maß für diese Wechselwirkung diskutiert. Dabei werden die Korrelationen von Scherströmungen in unterschiedlichen Geometrien, bei unterschiedlichen Reynoldszahlen und teilweise unter Zugabe von Polymeren in die Strömung in einfachen Mo-

dellen (Kap. 2.1), direkten numerischen Simulationen (Kap. 2.2, 2.3) und Experimenten (Kap. 2.5) verglichen. Die beobachtete Asymmetrie der Korrelationsfunktion wird mit der Interaktion von Wirbeln und Gebieten erhöhter Strömungsgeschwindigkeit in Zusammenhang gebracht.

1.2 Charakteristische Größen

Die Bewegung von Fluiden wird beschrieben durch die Navier-Stokes [2] Gleichung:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} \quad (1.1)$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht die auf ein Fluidelement¹ wirkende Beschleunigung, auf der rechten Seite, die die Beschleunigung verursachenden Kräfte (Antrieb durch den Druckgradienten und dissipativer Term). Bei der Beschleunigung sind zwei Teile zu unterscheiden: $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ rührt daher, dass die Geschwindigkeit am Ort, wo sich das Fluidelement gerade befindet, zu- oder abnimmt; der andere Term $\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ basiert darauf, dass das Fluidelement an eine Stelle geführt (*advectiert*) wird, wo die Strömungsgeschwindigkeit anders ist (Vgl. z.B. Feynman [3]).

Die Lösungen der Navier-Stokes Gleichung für gegebene Randbedingungen sind ausgesprochen vielfältig, zeigen eine Fülle an Strukturen und sind im Allgemeinen äußerst schwer vorherzusagen.

Sie beschreiben sehr zuverlässig das Verhalten *Newtonscher Fluide* — benannt nach Isaac Newton. Diese sind Fluide mit kleinen Molekulargewichten (Wasser, Gase), bei denen die *Scherspannung* proportional zur *Verzerrungsgeschwindigkeit* ist

$$\tau_{i,j} = 2\eta (\partial_i v_j + \partial_j v_i). \quad (1.2)$$

Die meisten im Alltagsbereich bekannten Flüssigkeiten verhalten sich in diesem Sinne. Abweichend verhält sich beispielsweise Ketchup, dessen nichtproportionales, sprunghaftes Fließverhalten schon zu manchen Flecken am Mittagstisch führte.

Die Eigenschaften solcher viskoelastische Fluide werden im Kapitel 2.3 eingehender beschrieben und ein einfaches Modell für die Wechselwirkung gelöster Polymere mit Fluiden vorgestellt. Dabei sind zur Navier-Stokes Gleichung weitere Terme zu ergänzen.

¹„Fluidelement“ ist eine Umschreibung für ein infinitesimales Fluidvolumen, auf das die Volumenkräfte wirken.

Von Reynolds [1], der 1883 die Strukturbildungen in Rohrströmungen untersuchte, stammt die Beobachtung, dass es zur Charakterisierung eines Systems nicht auf individuelle charakteristische Größen (Länge, Strömungsgeschwindigkeit, Viskosität) ankommt, sondern vielmehr deren dimensionsloses Verhältnis eine gute Kenngröße ist, um zu beschreiben, wie gut Turbulenz in dem System entstehen kann.

Wenn alle Größen der Gleichung 1.1 durch systeminhärente Längen L und Geschwindigkeiten U normiert werden und durch die Dichte geteilt wird, erhält man als neue Gleichung²

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} \quad (1.3)$$

mit dem dimensionslosen Parameter Re , der Reynoldszahl als systemcharakterisierende Größe.

$$Re = \frac{\text{Länge} \times \text{Geschwindigkeit}}{\text{kinematische Viskosität}} \quad (1.4)$$

Im Folgenden sind alle Größen in diesen dimensionslosen Einheiten angegeben. Bei der Lösung der Navier-Stokes Gleichung (Gl. 1.3) ist neben der Haftung des Fluides an den Grenzflächen als weitere Randbedingung die Massenerhaltung in Form der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.5)$$

zu beachten. Für inkompressible Fluide ist $\rho = \text{const}$ und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.6)$$

Gleichung 1.6 ist eine gute Näherung, solange $|\vec{v}|$ vernachlässigbar klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit ist.

Bei Untersuchungen von turbulenten Strömungen ist es üblich, die Geschwindigkeitsfelder in ihren Mittelwert und die Fluktuationen um diesen Mittelwert³ zu zerlegen (*Reynolds decomposition*, s. Pope [4])

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}' := U(y) \vec{e}_x + \vec{u}. \quad (1.7)$$

²Dabei ist hier $p = p/\rho$ der kinematische Druck!

³Für alle in dieser Arbeit betrachteten Systeme ist die Strömungsrichtung durch diesen nicht-verschwindenden Mittelwert definiert. In allen hier untersuchten Systemen hängt dabei die mittlere Geschwindigkeit nur vom Wandabstand y ab.

Diese Zerlegung mit den Fluktuationskomponenten

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

wird auch in den weiteren Kapiteln dieser Arbeit verwendet.

Je nach betrachtetem System sind dabei verschiedene Definitionen der Reynoldszahl gebräuchlich, von denen einige im Rahmen dieser Arbeit gebraucht werden.

Bei der ebenen Couetteströmung⁴ verwendet man beispielsweise den Plattenabstand als L und die Geschwindigkeit der Platten U_0 . Bei einer Rohrströmung sind es der Durchmesser und die mittlere Geschwindigkeit im Rohr. ν ist in jedem Fall die kinematische Viskosität η/ρ .

$$Re = \frac{L U_0}{\nu} \quad (1.9)$$

Die *Taylor-Reynoldszahl* resultiert aus mikroskopischen Größen, bei denen die durch den Antrieb ins System gefütterte Energie dissipiert wird.

$$Re_\lambda = \frac{\langle u^2 \rangle}{\nu \langle (\partial_x u)^2 \rangle^{1/2}} \quad (1.10)$$

$\langle u^2 \rangle$ ist dabei das Mittel der quadrierten Fluktuationen in Strömungsrichtung und $\langle (\partial_x u)^2 \rangle^{1/2}$ ist ein Maß für die mittleren Geschwindigkeitsgradienten in Strömungsrichtung.

Mit der mittleren Scherung S und d der Länge, über die diese Scherung wirkt, läßt dich die *Scherreynoldszahl* definieren

$$Re_S = \frac{S d^2}{\nu} \quad (1.11)$$

In Grenzschichten, nahe einer Wand treten als charakteristische Größen die Windgeschwindigkeit fern der Wand U_∞ und der Wandabstand δ_{99} , bei dem das mittlere turbulente Profil 99 % von U_∞ erreicht hat, auf.

$$Re_{\delta_{99}} = \frac{U_\infty \delta_{99}}{\nu} \quad (1.12)$$

⁴Bei dieser Strömung werden ebene Platten, zwischen denen sich das Fluid befindet, gegeneinander verschoben.

Eine andere Länge in Grenzschichten ist die Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = \frac{1}{U_\infty^2} \int_0^\infty v_x (U_\infty - v_x) dy. \quad (1.13)$$

Dies ist die Dicke des Gebietes, das aus einer reibungsfreien Strömung entfernt werden müsste, um den gleichen Impulsverlust zu erhalten.

$$Re_{\delta_2} = \frac{U_\infty \delta_2}{\nu} \quad (1.14)$$

In Kapitel 2.5 wird neben einigen weiteren grenzschichttypischen Größen die *Wandschubspannung* $\tau_w = \eta \partial_y u|_{y=0}$ eingeführt, aus der sich mit $u_\tau = \sqrt{|\tau_w/\rho|}$ und der halben Grenzschichtdicke $\delta_{1/2}$

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta_{1/2}}{\nu} \quad (1.15)$$

berechnen lässt.

1.3 Übergangsmechanismen

Der Übergang (*transition*) von einfachen, wohlgeordneten, so genannten *kohärenten* Strömungen bei kleinen Reynoldszahlen zu voll entwickelter Turbulenz bei hohen Reynoldszahlen ist typischerweise mit einer Reihe nacheinander entstehender Strömungsmuster verbunden, die mit zunehmender Reynoldszahl immer komplexer und feiner strukturiert werden.

Schmid und Henningson [5] haben die drei wesentlichen Übergangsmechanismen für Strömungen an Grenzflächen zusammengestellt:

1. Übergang durch exponentielle Instabilitäten

Die traditionelle Herangehensweise, um die Stabilität von Strömungen zu untersuchen, ist, die zugrunde liegenden Gleichungen zu linearisieren und deren Eigenwerte zu untersuchen. Die Idee ist, dass die instabilsten Eigenmoden anwachsen und so Strukturen erzeugen. Das Anwachsen einzelner instabiler Moden, kombiniert mit sekundären Instabilitäten, bietet oftmals einen guten Zugang, um die Transition einer Strömung zu verstehen. (Mit sekundärer Instabilität ist gemeint, dass die Strömung nicht um den laminaren Zustand, sondern um einen schon irgendwie strukturierten entwickelt wird.)

Diese Herangehensweise funktioniert insbesondere gut für Strömungen, die

durch thermische oder zentrifugale Kräfte getrieben werden. Bei Strömungen, die durch eine Scherung getrieben werden, funktioniert diese Methode typischerweise nicht. Transition tritt in solchen Systemen bei deutlich kleineren Reynoldszahlen auf, als auf Grund einer Eigenwertanalyse des Gleichungssystems zu erwarten wäre (*subkritische Transition*). Prominente Beispiele solcher Strömungen sind ebene Couette- und ebene Poiseuilleströmung sowie die Poiseuilleströmung durch ein Rohr.

2. Umgehungsübergang (*Bypass Transition*)

Hiermit sind all solche Strukturbildungen gemeint, die nicht im obigen Sinne an das Wachstum spezieller Moden gekoppelt sind. Ausgelöst wird ein solches Wachstum einer Vielzahl von Moden durch die *nichtnormale* Struktur des linearisierten Operators, der das System beschreibt.

Dabei entstehen typischerweise vorübergehend wachsende Strukturen, die in Strömungsrichtung elongiert sind und in vielen Systemen beobachtet wurden (Kap. 1.3.1).

3. Mehrstufiger Prozess

Oftmals kann der Transitionsprozess in mehrere Subprozesse zerlegt werden.

Durch zufällig angeregte Störungen werden schnell wachsende Eigenmoden angeregt (*Rezeptivität*). (Diesen Prozess zu modellieren ist oftmals schwierig, da es detailliertes Wissen erfordert, wie in einem gegebenem System in der Regel zufällige Störungen auf einige schnell wachsende Eigenmoden projiziert werden.)

Diese Störungen wachsen dann an, bis sie eine Größe erreichen, bei der nichtlineare Effekte nicht mehr zu vernachlässigen sind. Diese Verstärkung kann in Form exponentiellen Wachstums von Eigenmoden, dem Wachstum 'optimaler' Störungen oder modenunabhängiger Reaktion auf externe Kräfte erfolgen.

Hat die Störung eine Mindestgröße erreicht, geht der Prozess in eine Sättigung über und bringt die Strömung so in einen neuen, möglicherweise stationären Zustand.

Meistens führt dieser zweite Strömungszustand nicht direkt zur Turbulenz, sondern ist Ausgangsbasis für sekundäre Instabilitäten. Sekundäre Instabilitäten sind also nicht mehr als eine Instabilität einer komplizierteren Strömung. Dieser Prozess vollzieht sich oftmals schneller als das Wachstum der primären Instabilitäten.

Der letzte Schritt ist dann ein Zusammenbrechen (*breakdown*) dieser Strukturen durch Nichtlinearitäten und/oder höherer symmetriebrechender Instabilitäten, die eine wachsende Zahl von Skalen und Frequenzen anregen.

Dieser Zusammenbruch ist typischerweise schneller als alle vorausgehenden Prozesse und schwierig zu untersuchen.

Es sind also viele unterschiedliche Szenarien möglich; ein detailliertes Verständnis des Überganges von laminarer Strömung zu turbulentem Verhalten steht für viele Systeme noch aus.

Ob ein solcher Übergang stattfindet, hängt dabei oftmals nicht nur von der Reynoldszahl, sondern auch von der Stärke der Anfangsamplitude ab (Darbyshire & Mullin [6]). Und die Untersuchungen von Faisst & Eckhardt [7] und Schmiegel & Eckhardt [8] zeigen, dass die Lebensdauer von Störungen als Funktion von Reynoldszahl und Störampplitude fraktale Eigenschaften zu haben scheint.

1.3.1 Nichtnormale Verstärkung

Ein Operator oder die Matrix eines Gleichungssystems wird *normal* genannt, wenn seine Eigenfunktionen orthogonal zueinander sind. Ist dies nicht der Fall, kann eine kleine anfängliche Störung im System anwachsen, obwohl alle Eigenwerte des Systems negativ sind und die Eigenmoden zerfallen: $v = \sum_i v_i e^{\lambda_i t}$ mit $\lambda_i < 0$.

Wenn wie in Abbildung 1.1 Eigenvektoren fast entgegengesetzt sind und eine der Moden schneller zerfällt als eine andere $\lambda_2 \gg \lambda_1$, kann der anfänglich kleine Gesamtzustand des Systems dadurch vorübergehend anwachsen, bevor er zerfällt. Dieser Prozess ist als *nichtnormale Verstärkung* bekannt.



Abbildung 1.1: Nichtnormale Verstärkung

Boberg & Brosa [9] (1988) und Henningson, Reddy & Schmidt [10] (1990) entdeckten, dass die Operatoren zur Poiseuille- und Couetteströmung in diesem Sinne nicht normal sind und Gustavsson [11] und Henningson & Lundbladh [12] zeigten, dass Störungen in solchen Systemen um einige Größenordnungen anwachsen können.

An diesem enormen Anwachsen der Störung sind zwar typischerweise nur eine handvoll der unzählbar vielen Freiheitsgrade eines realen Systems beteiligt, der

Prozess ist aber nicht an einige spezielle Moden gekoppelt.

Unter anderen haben sich Butler & Farrell [13] und Reddy, Trefethen, Trefethen & Driscoll [14] bemüht, die „optimale“ Störung zu finden, die dadurch gekennzeichnet ist, dass sie das größtmögliche Wachstum zeigt, bevor sie zerfällt. Als solche optimale Störung wurden Wirbel in Strömungsrichtung gefunden — insbesondere muss eine Störung eine Abhängigkeit in z -Richtung haben, damit der Prozess der nichtnormalen Verstärkung überhaupt wirksam werden kann (s. Trefethen [14] und Großmann [15]).

1.3.2 Entstehung von Streifen

Ein Beispiel für einen Prozess mit nichtnormaler Verstärkung ist in Scherströmungen zu beobachten. In Abbildung 1.2 ist eine typische Geometrie von Scherströmungen dargestellt. Die *Strömungsrichtung* x ist durch das mittlere turbulente (hier lineare) Strömungsprofil \bar{U} gegeben. Das mittlere Profil hängt dabei von Abstand y von der Grenzfläche (*Wandnormalenrichtung*) ab. Die *Spannweitenrichtung* z ist parallel zur Grenzfläche und senkrecht zur Hauptströmungsrichtung.

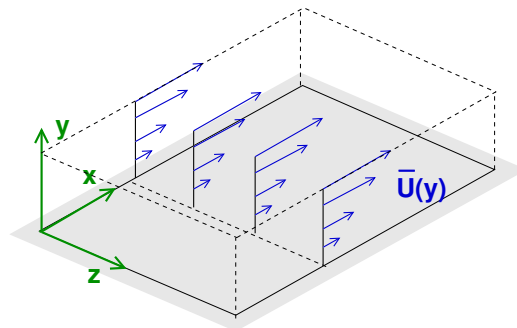


Abbildung 1.2: Mittlerer Fluss einer Scherströmung, in der für Scherströmungen gebräuchlichen Geometrie: Strömungsrichtung x , Wandnormalenrichtung y und Spannweitenrichtung z

Wenn in einer solchen Scherströmung Wirbel auftreten, deren Achse in Strömungsrichtung zeigt, durchmischen diese das mittlere Scherprofil und transportieren auf ihrer einen Seite langsames Fluid von der Grenzfläche ins Volumen hinein und der anderen Seite des Wirbels schnelles Fluid aus der Strömung zur Grenzfläche hin (s. Abb. 1.3).

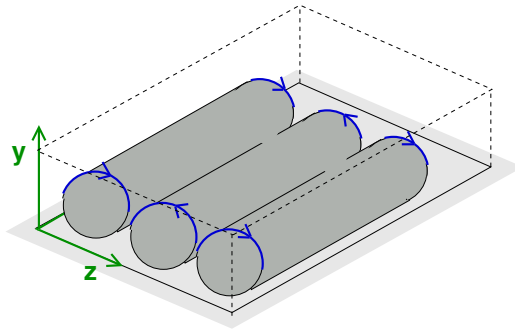


Abbildung 1.3: Wirbel in einer Scherströmung

Auf diese Weise entstehen quasiperiodische Streifen (*Streaks*⁵) in Strömungsrichtung. Dies sind elongierte Fluidbereiche, die sich schneller oder langsamer bewegen als es auf Grund des mittleren Geschwindigkeitsprofils zu erwarten wäre.

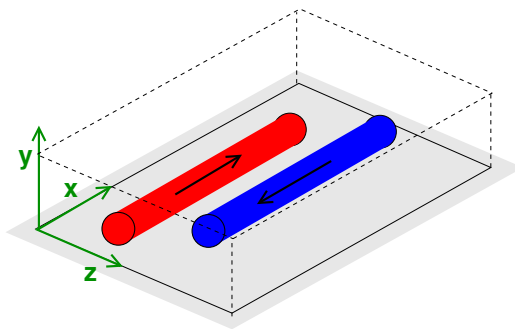


Abbildung 1.4: Streifen, elongierte Bereiche erhöhter oder verringerter Geschwindigkeit in Relation zum mittleren Profil

Die Existenz solcher Streifen wurde zunächst von Corrsin 1956 publiziert. Er beobachtete, wie sich in eine Strömung injizierter Farbstoff in elongierten, langsameren Bereichen der Strömung sammelt. Seitdem haben viele Forscher ihre Aufmerksamkeit dem Entstehen und Zerfallen dieser Streifen gewidmet (Kline, Kim & Reynolds [16]), da diese Strukturen wesentlich zur Entstehung der Turbulenz in Scherströmungen beitragen, indem sie Impuls von der Wand ins Volumen (*lift up*) transportieren (s. Stuart [17]). Nach Messungen von Blackwelder & Kovaszny [18] reichen diese Turbulenzausbrüche (*turbulent bursts*) bis zu $y/\delta_{99} = 0.5$

⁵streak (engl.) heißt Streifen oder Schliere. Im Rahmen dieser Arbeit sind mit „Streifen“ immer die hier beschriebenen Strömungsmuster gemeint.

in den äußeren Bereich des Scherprofils und sorgen so für die *Intermittenz*. Die Angaben zum damit verbundenen Winkel, gemessen gegenüber der Strömungsrichtung variieren — bei Schoppa & Hussain [19] werden Zahlen von 30° bis 40° genannt.

Wie oben beschrieben, entstehen diese Streifen durch Wirbel in Strömungsrichtung, die typischerweise dicht an der begrenzenden Wand, wo die Scherung besonders groß ist, existieren. Kim & Lim [20] haben gezeigt, dass es der Term $v\partial_y u$ der Navier-Stokes Gleichung ist, der die Bildung der Streifen verursacht. Nachdem sie diesen Term aus ihrer Simulation genommen hatten, verschwanden die Streifen in dem System und der Turbulenzgrad sank drastisch.

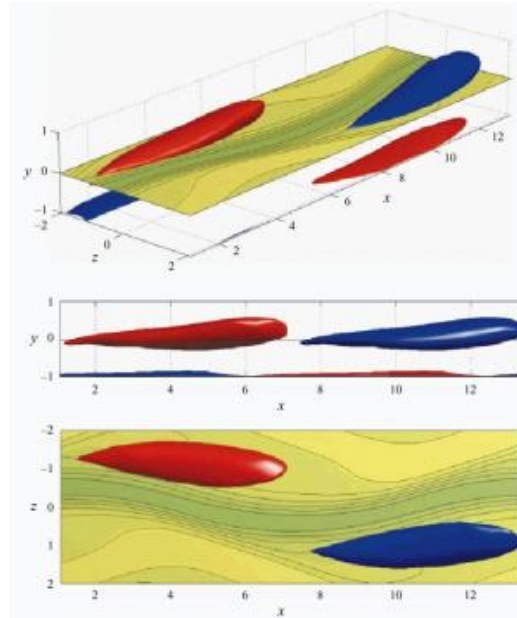


Abbildung 1.5: Illustration von Streifen von Waleffe [21]

Um die zugrunde liegenden Prozesse zu verstehen, wurde der Abstand der Streifen und Wirbel in Spannweitenrichtung untersucht (u.a. Butler & Farrel [22], Robinson [23]), aber es konnte keine systematische Ausdehnung in Spannweitenrichtung gefunden werden; teilweise haben Wirbel und Streifen in z sogar unterschiedliche Wellenlängen und Chernyshenko & Baig [24] beschreiben, dass dieselbe zugrunde liegende Strömung bewirken kann, dass mitadvektierte passive Skalare sich an unterschiedlichen Stellen in Streifen sammeln, je nach Ausgangsverteilung der Skalarkonzentration. Smith & Metzler [25] stellen zusätzlich fest,

dass der Abstand benachbarter Streifen mit zunehmendem Wandabstand wächst.

1.3.3 Zusammenbruch der Strukturen & Regeneration

Da die Streifen nach ihrem Anwachsen recht schnell wieder zerfallen (*break-down*), und andererseits auch die Wirbel in Strömungsrichtung, durch die sie erzeugt wurden, erstmal angeregt werden müssen, bedarf es eines *Regenerationszyklus*⁶, bei dem nach Zerfallen der Streifen neue Wirbel entstehen und so die turbulenten Strukturen aufrecht erhalten werden.

Von Jiménez [26] stammt die Vorstellung, dass die Streifen beim Zusammenbruch eine wellenförmige Abhängigkeit in Strömungsrichtung entwickeln und dabei zwischen den Streifen Regionen großer Vortizität⁶ in Wandnormalenrichtung entstehen.

Diese Wirbel, die senkrecht zur Scherung ausgerichtet sind, werden durch das mittlere Profil in Strömungsrichtung gedreht und bilden so neue Wirbel, aus denen Streifen entstehen können. Kim, Hamilton & Waleffe [27], die den Zyklus von Wirbeln zu Streifen, deren Zusammenbruch und Regeneration neuer Wirbel ausführlich untersucht haben, sprechen im Zusammenhang mit dem nichtlinearen, schnellen Prozess des Zusammenbruchs von „ α -Moden“, wobei α für $2\pi/L_x$ steht und eine generelle Variation in Strömungsrichtung meint.

Kim, Hamilton & Waleffe [27] konnten mit numerischen Simulationen zeigen, dass die Systemgröße eine gewisses Mindestmaß (*minimal flow unit*) haben muss, da sonst keine Turbulenz auftritt. Das System muss in Spannweitenrichtung wenigstens so groß sein, dass zwei Streifen hineinpassen und in Strömungsrichtung lang genug, damit die Streifen eine x -Abhängigkeit entwickeln können. Als minimale Systemgröße für die ebene Couetteströmung fanden sie die Abmessungen $L_x \times L_y \times L_z = 1.75\pi \times 1 \times 1.2\pi$. Ein Vergleich verschiedener Systemabmessungen findet sich bei Jiménez & Pinelli [28]; ein Längenverhältnis von $L_x \times L_y \times L_z = 4\pi \times 1 \times 2\pi$ ist aber auch sehr gebräuchlich (s. Faisst, Moehlis & Eckhardt [29]).

Zur Entstehung von Turbulenz sind aber alle drei beschriebenen Schritte notwendig. Durch zu kleine Wahl seiner Systemgröße konnte Hamilton [27] zeigen, dass dabei ein Teil der Dynamik unterdrückt wird, die jeweils anderen Subprozesse des Regenerationssyklus aber ablaufen können. Jiménez & Pinelli [28] kamen zu dem selben Ergebnis, indem sie gezielt die Streifen oder Wirbel in Strömungsrichtung in ihrer Simulation unterdrückten und den Einfluss auf die Entstehung von Turbulenz studierten. Dabei gaben sie für den Bereich der wandnahen Turbulenz eine

⁶Gemeint sind Wirbel, die senkrecht zur Wand stehen.

Abschätzung von $y^+ < 60$ (gemessen in Wandeinheiten, s. Kap. 2.5).

1.3.4 Asymmetrie zeitlicher Korrelationen

Da bei dem linearen Prozess der Wirbel-Streifen-Wechselwirkung erst die Wirbel bestehen, die dann Streifen entstehen lassen, ist eine zeitliche Asymmetrie bei statistischen Analysen zu erwarten.

B. Eckhardt und R. Pandit [30] linearisierten die Navier-Stokes Gleichung

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) U_0 + (U_0 \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u} \quad (1.16)$$

und zerlegten als Ansatz das Geschwindigkeitsfeld in eine Wirbel-Mode und eine Streifen-Mode

$$\vec{u} = s(t) \vec{u}_s + \omega(t) \vec{u}_\omega. \quad (1.17)$$

Daraus ergaben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & S \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ \omega \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} s(t) &= (s_0 + S\omega_0 t) e^{-\lambda t} \\ \omega(t) &= \omega_0 e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Da in realen Systemen solche zwei Moden nicht isoliert auftreten, addierten sie weißes Rauschen zu den Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & S \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_\omega \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

um den zufälligen Einfluss weiterer Moden zu imitieren und konnten für dieses System dann die Korrelationsfunktionen analytisch berechnen.

Um den Prozess der beschriebenen Wirbel-Streifen-Wechselwirkung für verschiedene Systeme zu untersuchen, werden in dieser Arbeit als Maß für die Strukturen Fluktuationen in Wandnormalenrichtung (als Indikator für Wirbel) und die Fluktuationen in Strömungsrichtung (Streifen) verwendet.

Für zeitliche Korrelationen ist dann eine Verbreiterung der Korrelationsfunktion

$$C'_{vu}(\Delta t) = \langle v(t) u(t + \Delta t) \rangle_t \quad (1.21)$$

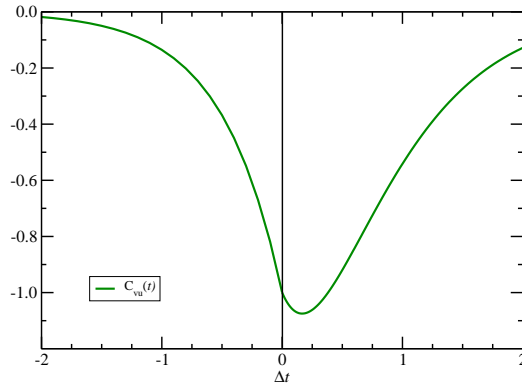


Abbildung 1.6: Asymmetrie der Kreuzkorrelation zwischen Wirbel und Streifen

für positive Zeitversätze Δt zu erwarten (Abb. 1.6).

Die in dieser Arbeit verwendeten Korrelationen sind dabei immer durch die Reynolds-spannung $\langle uv \rangle$ normiert

$$C_{ij}(\Delta t) = \frac{C'_{ij}(\Delta t)}{\langle uv \rangle} \quad (1.22)$$

und entsprechen somit Korrelationen R_{ij} , wie sie oftmals in der Literatur zu finden sind (s. Rotta [31])

$$R_{ij}(\Delta x, \Delta t) = \frac{\langle u'_i(x, t) u'_j(x + \Delta x, t + \Delta t) \rangle}{\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle \langle u_j'^2 \rangle}} \quad (1.23)$$

Dabei kann das Asymmetriemaß [32]

$$Q_{ij}(\Delta t) = \frac{C_{ij}(\Delta t) - C_{ij}(-\Delta t)}{C_{ij}(\Delta t) + C_{ij}(-\Delta t)} \quad (1.24)$$

verwendet werden, um die Asymmetrie der Korrelationsfunktion zu verdeutlichen. Bei der gesuchten Wechselwirkung von Wirblen und Streifen ist $Q > 0$, dies wird im folgenden als *positive Asymmetrie* bezeichnet.

Q ist ein gutes Maß für die Asymmetrie von Kurven, die nicht ihr Vorzeichen ändern. Ist $f(x) \approx f(-x)$ folgt $Q \rightarrow 0$; ist $f(x) \gg f(-x)$ oder $f(x) \ll f(-x)$ folgt $Q \rightarrow \pm 1$. Sobald aber Korrelationen einen Nulldurchgang haben — wie es bei Kreuzkorrelationen durchaus vorkommen kann — kann der Nenner sehr klein und Q somit sehr groß werden.

1.4 Die Taylorsche Hypothese

Selbst mit moderner Technik ist es schwierig, turbulente Felder sowohl räumlich als auch zeitlich hoch aufgelöst zu messen. Bei der so genannten *Particle Imaging Velocimetry* (Kap. 2.5.1) beleuchtet man eine oder mehrere Ebenen des Geschwindigkeitsfeldes mit Hilfe von Lasern und macht Bilder von durch die Strömung advektierten Partikeln. Die dabei anfallenden Datenmengen sind so groß, dass sich solche Momentaufnahmen nicht so schnell hintereinander machen lassen, als dass man ein kontinuierliches Zeitsignal erhielte. Eine andere Methode der Messung von Geschwindigkeiten ist die Verwendung von Hitzdrahtanemometern, die durch die Strömung gekühlt werden und deren Signal sich mit hoher Frequenz auslesen lässt. Abgesehen von den Datenmengen, die auch hierbei innerhalb kürzester Zeit anfallen, stört jede solche Sonde die Strömung, so dass in einem kegelförmigen Bereich hinter ihr keine weitere sinnvolle Geschwindigkeitsmessung möglich ist. Um aus einer solchen Zeitreihe auf räumliche Strukturen zu schließen, wird oft die Taylorsche Hypothese eingesetzt.

Taylor hatte 1938 die Idee, dass man räumliche Korrelationen durch zeitliche approximieren kann.

If the velocity of the air stream which carries the eddies is very much greater than the turbulent velocity, one may assume that the sequence of changes in u at the fixed point are simply due to the passage of an unchanging pattern of turbulent motion over the point, i.e. one may assume that $u = \phi(t) = \phi(x/U)^\dagger$ where x is measured upstream at time $t = 0$ from the fixed point where u is measured. In the limit when $u/U \rightarrow 0$ † is certainly true. Assuming that † is still true when u/U is small but not zero, R_x is defined as $R_x = \frac{\langle \phi(t)\phi(t+x/U) \rangle}{\langle u^2 \rangle}$.

G.I. Taylor [33]

Wenn eine Probe (der Hitzdraht) schnell mit der Geschwindigkeit $\vec{V} := V\vec{e}_x$ durch die Turbulenz “fliegt”, ist er zur Zeit t an der Stelle

$$\vec{X}(t) \equiv \vec{x}_0 + \vec{e}_x V t \quad (1.25)$$

und misst dort die Geschwindigkeit

$$\vec{U}^{(m)}(t) = \vec{U}(\vec{X}(t), t) - \vec{e}_x V. \quad (1.26)$$

Für die aus der Messung von $\vec{U}^{(m)}(t)$ resultierende zeitliche Autokorrelation gilt

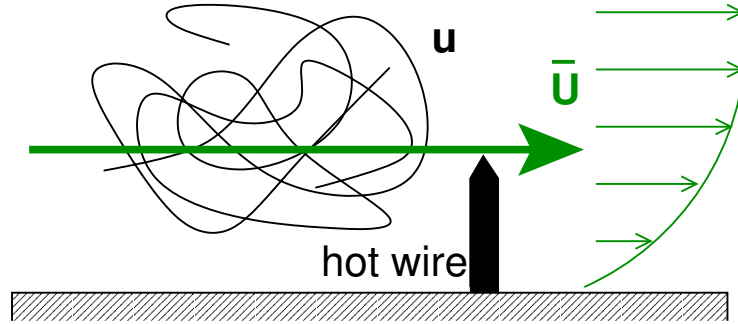


Abbildung 1.7: Konvektion turbulenter Strukturen

nach Pope [4] mit \vec{u} als Fluktuationen um das mittlere Profil $\langle U^{(m)}(t) \rangle$

$$\begin{aligned}
 R_{ij}^{(m)}(\Delta t) &\equiv \langle [U_i^{(m)}(t) - \langle U_i^{(m)}(t) \rangle] [U_j^{(m)}(t + \tau) - \langle U_j^{(m)}(t + \Delta t) \rangle] \rangle \\
 &= \langle u_i(\vec{X}(t), t) u_j(\vec{X}(t + \Delta t), t + \Delta t) \rangle \\
 &= \langle u_i(\vec{X}(t), t) u_j(\vec{X}(t) + \vec{e}_x \Delta x, t + \Delta x/V), \rangle
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

wobei $\Delta x = V \Delta t$ die Strecke ist, die die Probe in der Zeit Δt zurück legt. Wenn die Turbulenz statistisch homogen in der \vec{e}_x -Richtung ist, ergibt sich aus 1.28 im Limes $V \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 R_{ij}^{(m)}(\Delta t) &= \langle u_i(\vec{x}_0 + \vec{e}_x V t, 0) u_j(\vec{x}_0 + \vec{e}_x V t + \vec{e}_x \Delta x, 0) \rangle \\
 &= \langle u_i(\vec{x}_0, 0) u_j(\vec{x}_0 + \vec{e}_x \Delta x, 0) \rangle \\
 &= R_{ij}(\vec{e}_x \Delta x, \vec{x}_0, 0).
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Einfacher und in Experimenten gebräuchlich ist es, mit einer stationären Sonde zu arbeiten, über die die Turbulenz hinwegweht. Sofern die Strömung statistisch stationär ist und die Geschwindigkeitsfluktuationen deutlich kleiner als die mittlere Geschwindigkeit sind $u/\langle \vec{U} \rangle \ll 1$, kann obige Näherung für $\langle \vec{U} \rangle := U \vec{e}_x$ mit $\Delta x = -U \Delta t$ verwendet werden (Vergl. Tennekes & Lumley [34], Hinze [35]).

1.4.1 Studien zur Anwendbarkeit der Taylorschen Hypothese

Das Studium von zeitlich-räumlichen Korrelationen im Hinblick auf die Anwendbarkeit der Taylorschen Hypothese und die Detektion von typischen Konvektionsgeschwindigkeiten kohärenter Strukturen nahe an Grenzflächen hat eine Tradition,

⁸Die Fluktuationen sind in der Mitte des Volumens am größten, aber dort ist das Scherprofil gerade Null. Am Rand hingegen, wo man eine charakteristische Geschwindigkeit hat, gehen die Fluktuationen gegen Null.

	U	$\sqrt{\langle u^2 \rangle}/U$	Re_λ
Simulation I.	1.0	0.1 – 0.22	60 – 90
Simulation II.	1.0	0.33 – 0.45	140 – 200
Windkanal	40.0 m/s	0.008 – 0.038	125 – 590
Windkanal	80.0 m/s	0.13 – 0.81	1156 – 1300

Tabelle 1.1: Turbulenzgrad der verschiedenen Systeme. Für die Anwendbarkeit der Taylorschen Hypothese heißt es, muss $\sqrt{\langle u^2 \rangle}/U < 20\%$ sein. u : Fluktuationen, U : typische Geschwindigkeit – $U = U_{max}$ für die homogene Scherturbulenz⁸ und $U = \langle \vec{v}_x(y) \rangle$ für den Windkanal. Die angegebenen Schwankungsbreiten resultieren aus den Höhenabhängigkeiten der Größen.

die bis in die fünfziger Jahre zu den Messungen von Favre [36], [37] zurückreicht. Dabei wird immer wieder diskutiert, ob bei der Taylorschen Hypothese einfach die mittlere Geschwindigkeit verwendet werden kann (s. Lumley [38]) oder z.B. eine über kurze Zeiten gemittelte lokale Geschwindigkeit benutzt werden sollte.

1958 Favre, Gaviglio & Dumas [36, 37] stellten bei Windkanalmessungen fest, dass die Korrelation zweier zusätzlich in Wandnormalenrichtung versetzter Proben größer wird, wenn die Korrelationen mit einem leichten Zeitversatz berechnet werden. Dies ist ein erstes Indiz, dass die Korrelationen in Wandnähe aufwärts geneigt sind. Die Konvektionsgeschwindigkeiten innerhalb der Grenzschicht sind in ihren Messungen annähernd so groß, aber etwas kleiner als die lokale mittlere Geschwindigkeit. Sie schließen aus ihren Messungen, dass Taylors Hypothese für Wandabstände von $y/\delta_{99} > 3\%$ anwendbar ist.

1972 Blackwelder [18] hat mit in Strömungsrichtung versetzten Hitzdrähten Zeitliche Kreuz- und Autokorrelationen vermessen. Er legte an die Maxima der zeitlichen Korrelationen eine einhüllende Kurve und stellte fest, dass die kohärenten Strukturen nahe der Wand sehr langreichweitig sind und sich in der Grenzschicht ($y/\delta_{99} = 0.45$ und $y/\delta_{99} = 0.97$) langsamer als mit der mittleren Geschwindigkeit zu der Höhe fortpflanzen.

An den Fits durch seine Korrelationsmaxima ist zu erkennen, dass die Kreuzkorrelation R_{vu} bei $y/\delta_{99} = 0.2$ für $\Delta t > 0$ etwas langsamer abfällt als bei $\Delta t < 0$. Dieser Effekt ist im Vergleich zum insgesamt langsamen Abfall der Korrelationen aber eher kurzreichweitig, tritt also nur in der Nähe des Maximums auf.

1977 Graham, Harris & Corrsin [39] messen Autokorrelationen, die um einem Winkel von 13° gegenüber der Strömungsrichtung aufwärts geneigt sind. In

Bezug auf die Maxima der Korrelation $R_{uv}(x, 0, 0 : S \frac{x}{U})$ bei $Re_\lambda = 25 - 30$ beschreiben sie, dass diese „im Wesentlichen in Richtung der mittleren Geschwindigkeit“ liegen.

- 1988 Piomelli, Balint & Wallace [40] untersuchten den Einfluß von Wänden auf die Anwendbarkeit der Taylorschen Hypothese und kamen zu dem Ergebnis, dass innerhalb und oberhalb der Pufferschicht zeitliche und räumliche Ableitungen vertauscht werden können und auch die mittleren quadratischen Fluktuationen gleich sind.
- 1991 Robinson [23] gibt eine Übersicht über die quasikohärenten Strukturen in Grenzschichten.
- Streifen geringer Geschwindigkeit $0 < y^+ < 10$.
 - Ausbrüche (*ejections*) von Fluid geringer Geschwindigkeit ins Volumen.
 - Vorstöße (*sweeps*) von schnellem Fluid zur Wand.
 - Wirbelartige Strukturen unterschiedlicher Formen.
 - Starke Scherschichten im Randbereich $y^+ < 80$.
- 1993 Kim und Hussain [41] waren die ersten, die den wesentlichen Unterschied zwischen Konvektionsgeschwindigkeit, mit der sich die kohärenten Strukturen bewegen, und mittlerer Geschwindigkeit betonten. Die Konvektionsgeschwindigkeit ist annähernd konstant in der viskosen Randschicht und hat ungefähr den Wert der mittleren Geschwindigkeit bei $y^+ = 15$.
- 1996 Jeong, Hussain, Schoppa & Kim [42] veröffentlichten aus ihren Simulationen bei $Re \approx 3300$ berechnete Neigungswinkel der kohärenten Strukturen von 9° in der x, y -Ebene und eine Schiefe von $\pm 4^\circ$ in der x, z -Ebene. Sie malen ein qualitatives, komplexes Bild davon, wie sich die gekrümmten kohärenten Strukturen wechselseitig beeinflussen könnten.
- 1998 Krogstad, Kaspersen & Rimestad [43] haben bei Re_{δ_2} mit Zweipunktkorrelationen die Konvektionsgeschwindigkeiten sehr genau vermessen und stellten erhebliche Variationen von $U_c(y)$ fest. Dabei werden Strukturen, die annähernd so groß wie die Grenzschichtdicke sind, mit annähernd der lokalen mittleren Geschwindigkeit konvektiert. Kleine Strukturen hingegen erfahren deutlich kleine Konvektionsgeschwindigkeiten. Die Konvektionsgeschwindigkeit ist für Ausbrüche deutlich kleiner als für Vorstöße.

- 1999 Auch Jeon, Choi, Yoo & Moin [44] sehen deutlich geneigte zeitlich-räumliche Korrelationen der Wandschubspannung in Simulationsdaten. Die Konvektionsgeschwindigkeit ist für kleine Strukturen deutlich kleiner als für große ($U_c \approx 0.35 - 0.65 U_0$). Sie benutzten die Konvektionsgeschwindigkeiten der Strukturen, die die meiste Energie enthalten und stellten für diese fest, dass Taylors Hypothese erfüllt sei.
- 2000 Kim & Lim [20] zeigten mit Hilfe direkter numerischer Simulationen, dass der nicht-normale Kopplungsterm der Navier-Stokes Gleichung wesentlich für das Entstehen wandnaher Strukturen ist. Sie stellten fest, dass die Entwicklung wandnaher Turbulenz im Wesentlichen auf nichtlinearen Prozessen beruht, deren Antrieb aber auf einem linearen Prozess basiert.
- 2003 Quadrio & Luchini [45] berechneten in einer numerischen Simulation räumlich-zeitliche Korrelationen der Scherspannung und stellten fest, dass die Taylorsche Hypothese erfüllt sei. Sie stellten fest, dass ihre Korrelationen geneigt seien und dass diese Neigung von innen nach außen zunimmt. Sie beobachteten in ihren Rechnungen, dass unterhalb von etwa $y^+ = 15$ die Konvektionsgeschwindigkeiten (für alle drei Komponenten) konstant bleiben, während das mittlere Profil der Haftbedingung an der Wand genügend auf 0 abfällt.

An all diesen Untersuchungen sieht man, dass die Neigung von Korrelationen nahe einer Grenzfläche ein sehr robustes Phänomen ist, das zumindest für Abstände $y^+ < 60$ eine Rolle spielt und sich durch die verminderte Konvektionsgeschwindigkeit auf die Anwendbarkeit der Taylorschen Hypothese auswirkt.

Bei der Liste der obigen Veröffentlichungen ist anzumerken, dass einige der numerischen Simulationen auf der selben Datenbasis basieren. Es wäre wünschenswert, wenn die Befunde durch unabhängige Simulationen bestätigt würden.

1.5 Ziel dieser Arbeit

Ausgehend von der Überlegung, dass sich die lineare Wechselwirkung von Wirbeln in Strömungsrichtung mit Streifen, die einen ganz wesentlichen Anteil an der Entstehung von Turbulenz in Scherströmungen haben, in einer Asymmetrie zeitlicher Korrelationen widerspiegeln sollte, werden in den folgenden Kapiteln Kreuzkorrelationen von Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnormalen- und Strömungsrichtung berechnet und verglichen.

Dabei werden die betrachteten Systeme systematisch komplexer:

- Im 9-Moden-Modell werden mögliche räumlichen Abhängigkeiten analytisch durch die Moden vorgeschrieben, nur die Zeitintegration der Amplituden wird mit numerischen Verfahren gelöst.
- Die direkten Simulationen zur homogenen Scherturbulenz und zur Rohrströmung haben schon eine Vielzahl von Freiheitsgraden und kommen natürlichen Systemen sehr nahe.
- Das komplexeste in dieser Arbeit betrachtete System sind experimentelle Daten einer turbulenten Randschicht, wie sie im Windkanal bei hohen Reynoldszahlen entsteht.

Bei all diesen Systemen wird getestet, ob die nichtnormale Verstärkung in Form einer Asymmetrie der Kreuzkorrelation von Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnormalen- und Strömungsrichtung in Erscheinung tritt.

Eine spannende Frage ist, ob sich die Asymmetrie $Q(\Delta t)$ als Maß für die Streifengenerierung an Grenzflächen eignet und eventuell eine Aussage über die Dicke der Schicht, in der diese Wechselwirkung stattfindet, gemacht werden kann.

Da die Daten aus den Simulationen mit Zeitreihenmessungen aus Windkanälen, bei denen zeitliche Versätze immer mit räumlichen einhergehen, verglichen werden sollen, wird in dieser Arbeit von Anfang an das Augenmerk auf zeitlich-räumliche Korrelationen gerichtet.

Dabei kann die Abhängigkeit der Konvektionsgeschwindigkeit vom Abstand zur Wand untersucht werden und der Einsatz des vergleichsweise einfachen Modells mit nur 9 Moden eröffnet die Option, tiefere Einblicke in die Wechselwirkung der kohärenten Strukturen nahe von Grenzflächen an gewinnen.

Zusätzlich wird untersucht, ob sich die Zugabe von Polymeren auf die Wirbel-Streifen-Interaktion auswirkt und ob die Asymmetrie der Kreuzkorrelationen ein hilfreiches Maß zu deren Quantifizierung sein kann. Die Unterdrückung dieses die Turbulenz antreibenden Mechanismus' könnte eine plausible Erklärung für

die deutliche Reduktion des turbulenten Strömungswiderstandes in viskoelastischen Fluiden sein.

In Kapitel 2 werden die Datenquellen kurz vorgestellt — das 9-Moden-Modell von Moehlis, Faisst & Eckhardt [29], die Simulation homogener Scherturbulenz von Schumacher [46], die Simulation viskoelastischer Fluide von Eckhardt, Kronjäger & Schumacher [47], die Simulation turbulenter Rohrströmungen von Schneider⁹ und schließlich die Windkanalmessungen von Knobloch & Fernholz [48].

In Kapitel 3 werden die Kreuz- und Autokorrelationen der verschiedenen Systeme in der gleichen Abfolge wie in Kapitel 2 diskutiert. Am Ende jedes Abschnitts findet sich eine kurze Diskussion der Korrelationen des jeweiligen Systems. Abschließend werden die Ergebnisse der zeitlich-räumlichen und der räumlich-räumlichen Korrelationen der verschiedenen Systeme verglichen.

In Kapitel 4 werden die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst.

Grafiken dieser Arbeit, die mit (*Film*) gekennzeichnet sind, fungieren in der digitalen Form auf CD als Links zu eingebetteten Filmen, die die Abhängigkeit der Struktur als Funktion des Wandabstandes zeigen.

⁹2004 im Entstehen begriffene Diplomarbeit in der AG Komplexe Systeme, Fachbereich Physik der Philipps-Universität-Marburg.

Kapitel 2

Modelle, Simulationen, Messungen

2.1 9-Moden-Modell einer turbulenten Scherströmung

Da turbulente Strömungen Strukturen auf sehr vielen unterschiedlichen Skalen aufweisen, sind Direkte Numerische Simulationen (DNS) solcher Strömungen typischerweise hoch aufgelöst. Der zugrunde liegende Phasenraum ist so hochdimensional, dass es schwierig ist, wesentliche Prozesse der Dynamik zu erfassen. Bei diesen sind oft nur wenige Freiheitsgrade dominierend, der Rest ist „verklavt“. Deshalb wird nach niedrigdimensionalen Modellen gesucht, die die wesentlichen Eigenschaften einer turbulenten Strömung in groben Zügen widerspiegeln. Eines der besten Modelle für die ebene Couette-Strömung ist das 9-Moden-Modell von Eckhardt, Faisst und Moehlis [29], das auf Arbeiten von Mersmann und Eckhardt [49], sowie Waleffe [50] aufbaut.

Die neun Moden des Modells beinhalten [29]:

1. das Grundprofil

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(\pi y/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

2. eine Modifikation des Grundprofils

$$\vec{u}_9 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(3\pi y/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

3. einen Streifen

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos^2(\pi y/2) \cos(\gamma z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

4. einen Wirbel in Strömungsrichtung

$$\vec{u}_3 = \frac{2}{\sqrt{4\gamma^2 + \pi^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma \cos(\pi y/2) \cos(\gamma z) \\ \pi \sin(\pi y/2) \sin(\gamma z) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

5. Desweiteren beinhaltet es Strömungen in Spannweitenrichtung

$$\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \alpha x \cos^2(\pi y/2) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

6. und

$$\vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \sin \alpha x \sin(\pi y/2) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

wobei \vec{u}_5 aus der Advektion von \vec{u}_4 durch das Grundprofil \vec{u}_1 entsteht.

7. Dann gibt es noch einen Wirbel in Wandnormalenrichtung

$$\vec{u}_6 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3(\alpha^2 + \gamma^2)}} \begin{pmatrix} -\gamma \cos(\alpha x) \cos^2(\pi y/2) \sin(\gamma z) \\ 0 \\ \alpha \sin(\alpha x) \cos^2(\pi y/2) \cos(\gamma z) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

8. der ebenfalls von \vec{u}_1 advektiert wird, woraus \vec{u}_7 resultiert:

$$\vec{u}_7 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \begin{pmatrix} \gamma \sin(\alpha x) \sin(\pi y/2) \sin(\gamma z) \\ 0 \\ \alpha \cos(\alpha x) \sin(\pi y/2) \cos(\gamma z) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

9. Um das Modell zu schließen, so dass ein sich selbst regenerierender Zyklus von Strömungsmustern möglich ist, bedarf es noch einer weiteren Mode, die echt dreidimensional ist.

$$\vec{u}_8 = N_8 \begin{pmatrix} \pi \alpha \sin(\alpha x) \sin(\pi y/2) \sin(\gamma z) \\ 2(\alpha^2 + \gamma^2) \cos(\alpha x) \cos(\pi y/2) \sin(\gamma z) \\ -\pi \gamma \cos(\alpha x) \sin(\pi y/2) \cos(\gamma z) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

mit der Normierungskonstante

$$N_8 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(4\alpha^2 + 4\gamma^2 + \pi^2)}} \quad (2.10)$$

Waleffes Modell entsprechend sind die Moden so normiert, dass

$$\int_0^{2\pi/\alpha} dx \int_{-1}^1 dy \int_0^{2\pi/\gamma} dz (\mathbf{Re} \vec{u})^2 = 2(2\pi/\alpha)(2\pi/\gamma), \quad (2.11)$$

wobei:

$$L_x = 2\pi/\alpha \quad (2.12)$$

$$L_y = \pi/\beta \quad (2.13)$$

$$L_z = 2\pi/\gamma \quad (2.14)$$

$$\alpha = 1/2 \quad (2.15)$$

$$\beta = \pi/2 \quad (2.16)$$

$$\gamma = 1 \quad (2.17)$$

Daraus ergibt sich ein Geschwindigkeitsprofil

$$\vec{v} = \sum_{\beta} a_{\beta}(t) \vec{u}_{\beta}(x, y, z) \quad (2.18)$$

mit zeitabhängigen Amplituden $a_{\beta}(t)$. Durch Einsetzen in die Navier-Stokes Gleichung (Gl. 1.3) und Projektion ergeben sich gewöhnliche Differenzialgleichungen für die $\dot{a}_{\beta}(t)$. Diese sind in der Arbeit von Moehlis, Faisst & Eckhardt [29] aufgeführt.

2.2 Homogene Scherturbulenz

Um die physikalischen Phänomene in homogenen Scherströmungen studieren wird auf ein numerischen Modell von Schumacher & Eckhardt [51], [52] zurückgegriffen. In Strömungs- und Spannweitenrichtung ist das System periodisch fortgesetzt. Um in allen drei Raumrichtungen mit Fouriermoden rechnen zu können und den numerischen Aufwand zu Gunsten großer Auflösungen zu minimieren, werden reibungsfreie (*free-slip*) Randbedingungen gewählt:

$$v = \partial_y u = \partial_y w = 0, \quad \text{bei } y = 0, L_y \quad (2.19)$$

Da bei reibungsfreien Grenzflächen keine Antriebskräfte von Wänden auf das Fluid wirken, wird eine Volumenkraft gewählt, die ein lineares Scherprofil aufrecht hält (siehe auch Referenzen [51], [52] für Details).

$$U(y) = \frac{1}{2} S y \cong \frac{4S}{\pi^2} \sum_{n=0}^5 \frac{\cos((2n+1)y)}{(2n+1)^2} \quad (2.20)$$

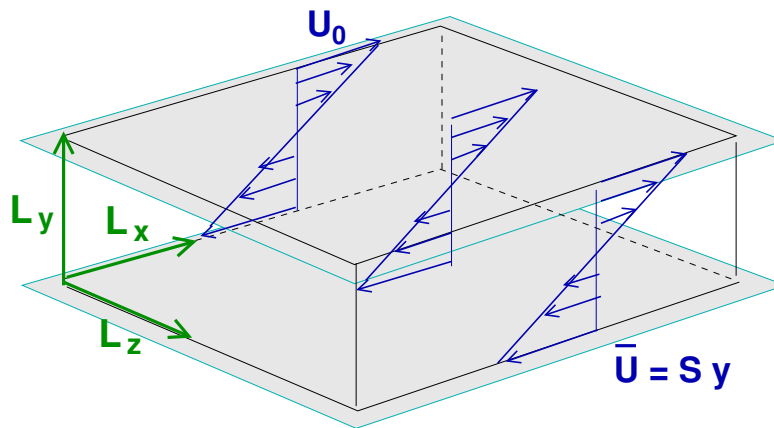


Abbildung 2.1: Geometrie der homogenen Scherströmung

In Abbildung 2.2 ist zu sehen, dass die Fluktuationen in Wandnormalenrichtung und damit auch der Reynoldsche Spannung zum Rand hin auf Null abfallen, während die Fluktuationen parallel zu den Grenzflächen endlich bleiben.

Es wurden zwei Simulationen für newtonsche Fluide mit unterschiedlichen Auflösungen durchgeführt:

	L_x	L_y	L_z	N_x	N_y	N_z	S	ν	Δt	Re_λ
Simulation I.	2π	1	2π	128	65	128	2	10^{-3}	0,2	79
Simulation II.	2π	π	2π	256	129	256	$6/\pi$	1/600	0,15	166

Tabelle 2.1: Parameter der Simulation

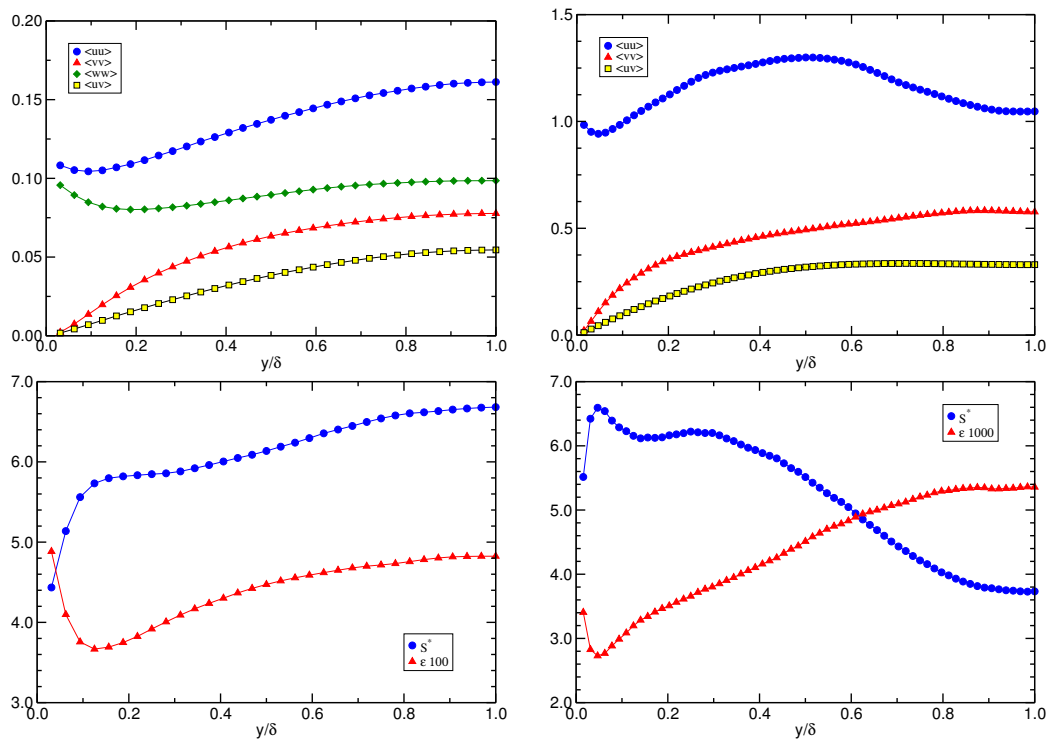


Abbildung 2.2: Statistische Größen der Simulationen im Vergleich, die Wandabstände wurden mit $\delta = 1/2 L_y$ normiert. *oben*: mittlere Geschwindigkeitsfluktuation $\langle uu \rangle$, $\langle vv \rangle$, $\langle ww \rangle$, $\langle uv \rangle$, *unten*: Scherparameter S^* , Energiedissipation ϵ . *links*: Simulation I. ϵ multipliziert mit 100, *rechts*: Simulation II. ϵ multipliziert mit 1000

2.3 Homogene viskoelastische Scherturbulenz

Im Gegensatz zu Newtonschen Fluiden, die isotrop sind und eine dissipative, zum Geschwindigkeitsgradienten proportionale, Reibungskraft haben, geht es in diesem Abschnitt um viskoelastische Fluide. Genaugenommen um stark verdünnte Lösungen von langkettigen, elastischen Polymermolekülen, in einer Newtonschen Flüssigkeit. Solche Fluide haben einige besondere Eigenschaften: Die Viskosität hängt von der Scherung ab — durch Scherung wird das Fluid weniger viskos (*shear thinning*). Dadurch kommt es zum Phänomen der turbulenten Reibungsreduktion (Kap. 2.3.2).

Da Polymere in Scherströmungen gestreckt werden, kommen zum sonst isotropen Druck anisotrope Rückstellkräfte hinzu, die aus dem Polymerspannungstensor resultieren. Die Navier-Stokes Gleichung ist dabei um entsprechende Terme zu erweitern.

Um den Zustand einer einzelnen Polymerkette zu beschreiben, müsste man die Position aller Monomere der Kette und deren Abstände angeben. Insbesondere in einer Strömung, wo durch die Reibung externe Kräfte auf ein solches Polymer wirken, muss dieses keineswegs in einem Gleichgewichtszustand sein.

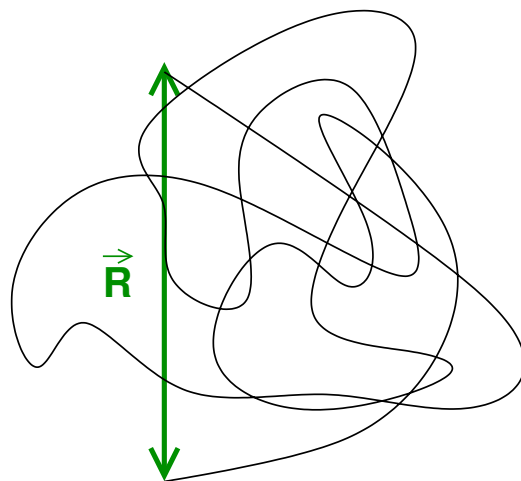


Abbildung 2.3: End-zu-End-Abstand einer Polymerkette

Um für Simulationen ein quantitatives Maß für die Streckung eines Polymers anzugeben, ohne sämtliche inneren Prozesse zu beachten, kann man sich auf den End-zu-End-Abstand beschränken (s. Abb.: 2.3). Die Wurzel dieses End-zu-End-Abstands $R = \sqrt{\langle \vec{R} \cdot \vec{R} \rangle}$ ist ein Maß für die mittlere Streckung der Polymerkette

durch das Fluid.

Eine Verallgemeinerung des End-zu-End-Abstands ist der Konfigurationstensor $C_{ij} = \langle R_i R_j \rangle$. Er ist positiv definit und seine Spur liefert

$$\text{Tr} c_{ij} = \langle R_i R_i \rangle = R^2. \quad (2.21)$$

Mit dieser Vereinfachung kann lässt sich nun die Polymerkette als zwei durch eine Hooksche Feder verbundene Kugeln vorstellen. Befinden sich die Kugeln in einer ruhenden Flüssigkeit, relaxiert die Feder wie ein überdämpfter Oszillator mit einer Zeitkonstanten λ :

$$d_t \vec{R} = -\frac{1}{\lambda} \vec{R} \quad (2.22)$$

Befinden sich die Kugeln hingegen in unterschiedlichen Höhen eines Scherprofils spüren sie die Reibungskraft unterschiedliche schneller Fluidbereiche und werden dadurch auseinander gezogen:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \approx \vec{R} \cdot \nabla \vec{v} \quad (2.23)$$

Kombiniert man beide Bewegungen, erhält man die folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \approx \partial_t \vec{R} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{R} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{R} - \frac{1}{\lambda} \vec{R} \quad (2.24)$$

Dabei wurde die totale Zeitableitung durch die substantielle ersetzt.

Mit diesen Annahmen kann man die Polymerspannungen durch den Konfigurationstensor \hat{c} ausdrücken (Oldroyd-B Modell):

$$\tau_{ij}^p = -\frac{nH}{\rho} (c_{ij} - c_{ij}^{eq}), \quad (2.25)$$

mit der Teilchenkonzentration n , der Hookschen Federkonstante H und der thermischen Gleichgewichtsverteilung $c_{ij}^{eq} \sim \delta_{ij}$.

Normiert man die Größen mit charakteristischen Einheiten

$$\frac{\lambda}{T} \rightarrow \text{De} \quad \frac{T^2}{L^2} \tau \rightarrow \tau \quad (2.26)$$

$$\frac{T}{L^2} \eta \rightarrow \frac{s}{\text{Re}} \quad \frac{c}{\frac{k_B \Theta}{H}} \rightarrow \mathbf{c} \quad (2.27)$$

so erhält man die Bewegungsgleichungen [53, 54]

$$\partial_t u_i + (u_k \partial_k) u_i = \partial_i p + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{kk} u_i + \partial_k \tau_{ik}^p + f_i \quad (2.28)$$

$$\partial_t c_{ij} + (u_{ik} \partial_k) c_{ij} = c_{jk} \partial_k u_j + c_{jk} \partial_k u_i - \frac{1}{\text{De}} (c_{ij} - \delta_{ij}) \quad (2.29)$$

und dem Zusammenhang zwischen Scherspannungs- und Konfigurationstensor

$$\tau_{ij}^p = -\frac{s}{\text{Re De}} (c_{ij} - \delta_{ij}). \quad (2.30)$$

Gleichung 2.30 ist die dimensionslose konstituierende Gleichung des Oldroyd-B Modells.

Analog zur Reynoldszahl kann man die Zeitkonstante in Relation zu einer anderen typischen Zeit der Strömung setzen und erhält so die dimensionslose Deborahzahl

$$De = \frac{\lambda}{T}. \quad (2.31)$$

Bei kleinen De sind Änderungen des Geschwindigkeitsfeldes so langsam, dass die Polymere ausreichend Zeit haben zu relaxieren, wohingegen sie bei großen De durch die Strömung stark gestreckt werden können.

Ergebnisse zur Simulationen dieser Gleichung finden sich bei Eckhardt, Kronjäger & Schumacher [47].

2.3.1 Statistik der Polymerdehnung

Nach Gleichung 2.21 entspricht $\sqrt{\text{Tr}(\hat{c})}$ der mittleren Ausdehnung der Polymere. Nach Balkovsky *et al.* [55] sollen die Schwänze der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion von $\text{Tr}(\hat{c})$ nach einem Potenzgesetz abfallen

$$\tilde{\mathcal{P}}(R) \sim r^{-\alpha-1}, \quad (2.32)$$

solange die dimensionslose Relaxationszeit De der Polymere kleiner als die inverse Scherrate $1/(2\gamma)$ der turbulenten Strömung ist. Der Exponent α hängt von De und γ ab und für Relaxationszeiten in der Nähe des inversen Lyapunovexponenten läßt sich α linear nähern

$$\alpha \sim \frac{1}{De} - 2\gamma. \quad (2.33)$$

Für Deborahzahlen kleiner $De_{krit} = 1/(2\gamma)$ ist der Exponent α positiv und Gleichung 2.32 beschreibt einen algebraischen Zerfall. Dies entspricht einer Situation, in der sich die meisten Polymere in ihrer Gleichgewichtsausdehnung befinden. Bei Werten $De > De_{krit}$ wird α negativ und die Wahrscheinlichkeitsdichte für R ist nicht länger normierbar. Die Polymere werden nicht mehr passiv von der Strömung advektiert, sondern wirken auf das Fluid zurück¹.

Aus den Simulationen ist R^2 direkt durch $\text{Tr}(c)$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von R^2 hängt mit der von R zusammen:

$$\tilde{\mathcal{P}}(R)dR = \mathcal{P}(R^2)dR^2 = 2R\mathcal{P}(R^2)dR. \quad (2.34)$$

Aus einem exponentiellen Zerfall der einen Größe folgt ebenfalls ein solcher für die andere Größe

$$\mathcal{P}(\text{Tr } c) \sim (\text{Tr } c)^\beta \iff \mathcal{P}(R) \sim R^{-\alpha-1} \quad (2.35)$$

mit $\alpha = 2(\beta - 1)$.

¹Die Polymere können Oldroyd-B Modell beliebig gestreckt werden!

2.3.2 Turbulente Widerstandsreduktion

Toms [56] entdeckte 1948, dass die Zugabe kleinster Polymermengen (10-500 ppm) zu einem Fluid zu einer deutlichen Absenkung (bis zu 50%) des Druckgradienten, der erforderlich ist, um das Fluid durch ein Rohr zu pumpen (*drag reduction*), führt. Die unter laminaren Bedingungen gemessene Viskosität wird dabei kaum beeinflusst und kann daher zur Erklärung dieses Effektes nicht herangezogen werden.

Neuere Untersuchungen zu diesem Thema wurden unter anderem von Sreenivasan [57] durchgeführt.

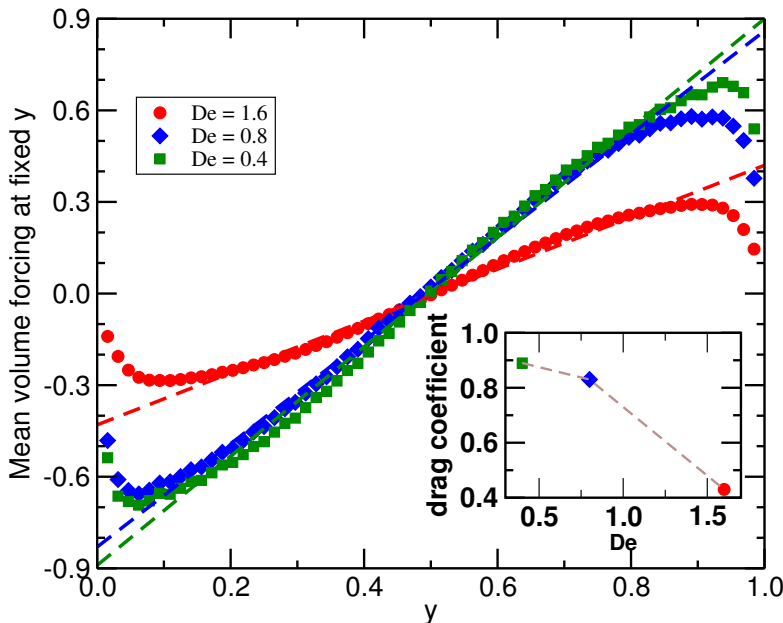


Abbildung 2.4: Reibungsreduzierung bei verschiedenen Deborahzahlen.

Mit dem turbulenten Reibungskoeffizient f kann die Reduktion der Reibung quantifiziert werden. Die mittlere Antriebskraft ergibt sich durch Mittelung $\langle \cdot \rangle$ der Navier-Stokes Gleichung. Dabei wird das turbulente Profil in das mittlere Profil und die Fluktuationen zerlegt $\vec{v} = U\vec{e}_x + \vec{u}$. Durch Umformung des nichtlinearen Terms $\langle ((U\vec{e}_x + \vec{u}) \cdot \nabla)(U\vec{e}_x + \vec{u}) \rangle = (U\partial_x)U + \langle \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) \rangle$ und Einsetzen des homogenen Scherprofils $U = Sy\vec{e}_x$ vereinfacht sich der Ausdruck für die mittlere Volumenkraft zu

$$\langle F_x \rangle = \partial_y \langle u_x u_y \rangle. \quad (2.36)$$

Diese Kraft, normiert durch typische Systemgrößen, ergibt dann den Reibungskoeffizienten

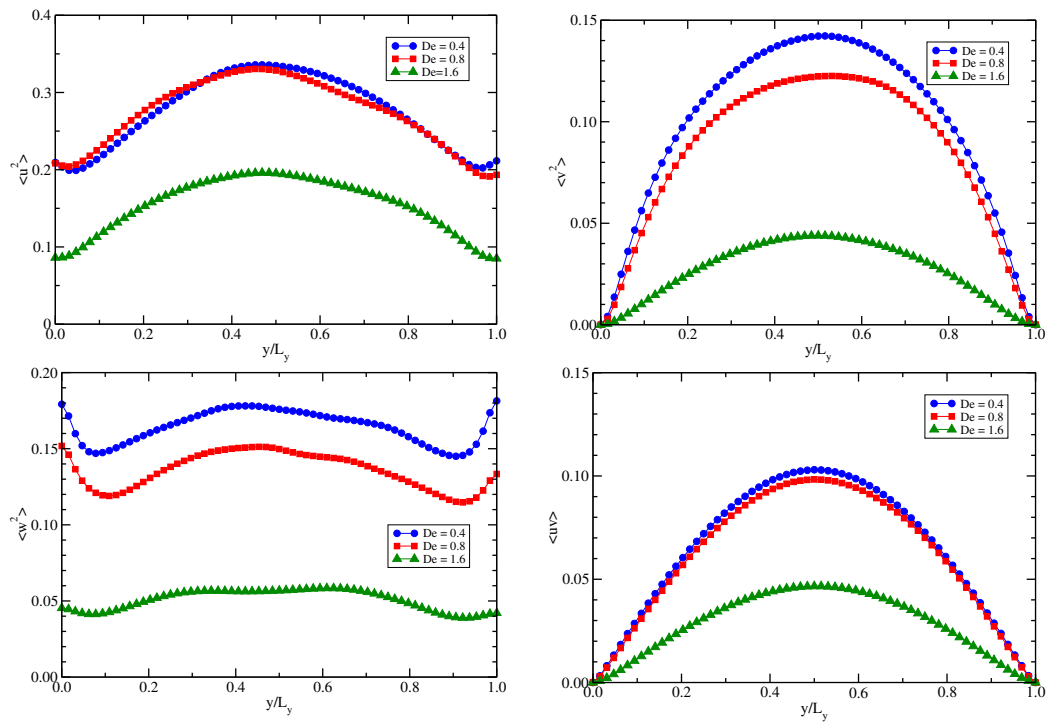


Abbildung 2.5: Mittlere Fluktuationen der Geschwindigkeitskomponenten $\langle u^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\langle w^2 \rangle$, $\langle uv \rangle$ in den drei Simulationen viskoelastischer Turbulenz bei $De = 0.4$, $De = 0.8$, $De = 1.6$

effizient:

$$f = \frac{\langle F \rangle d}{U_0^2} \quad (2.37)$$

2.3.3 Abhängigkeit statistischer Größen von der Deborahzahl

Der Einfluss der Polymere auf die die turbulenten Strukturen des Fluids zeigt sich klar in einer Abnahme der mittleren Fluktuationen (Abb. 2.5).

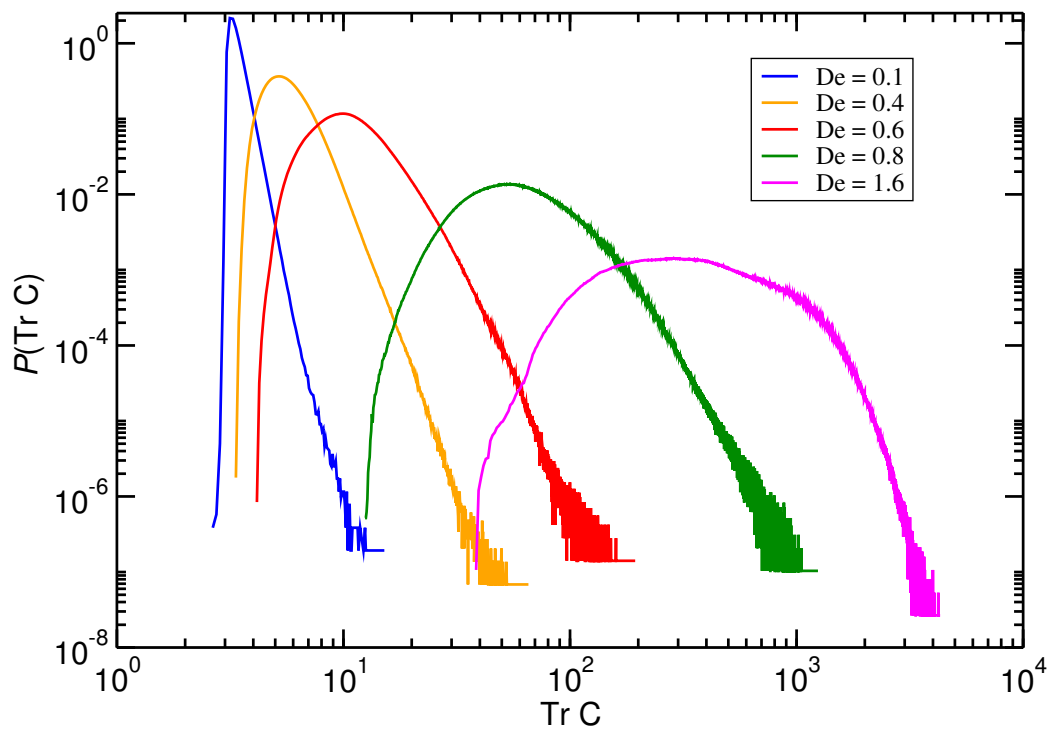


Abbildung 2.6: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Streckung der Polymere in viskoelastischen Scherströmungen bei $De = 0.4$, $De = 0.6$, $De = 0.8$ und $De = 1.6$.

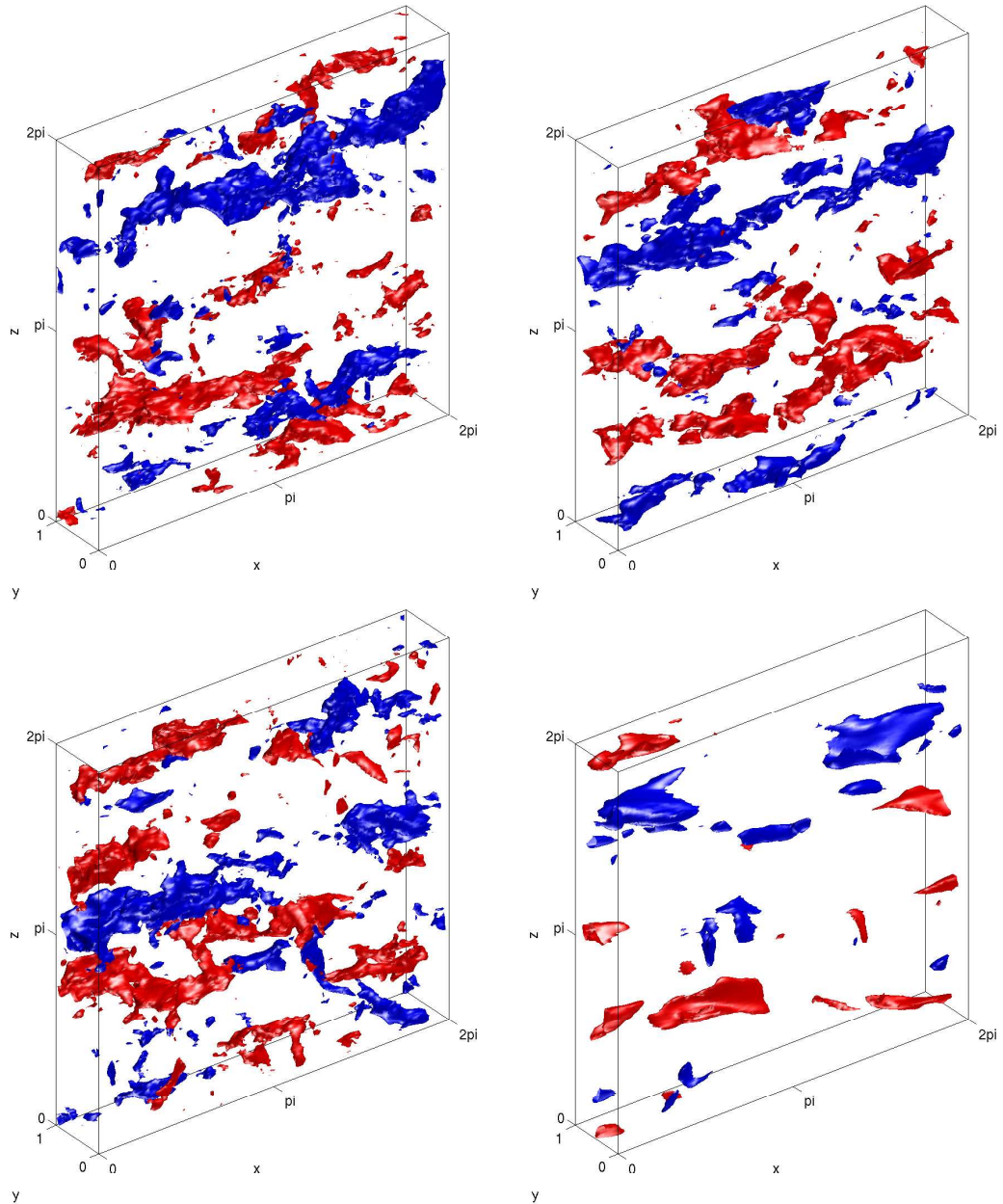


Abbildung 2.7: Isokonturflächen der Fluktuationen in Strömungsrichtung für $u = -1$ und $u = +1$. Das Bild oben links ist aus der Simulation eines Newtonschen Fluids, die Bilder oben rechts und unten entstammen Simulationen viskoelastischer Fluide bei $De = 0.4$, $De = 0.8$ und $De = 1.6$.

2.4 Turbulente Rohrströmung

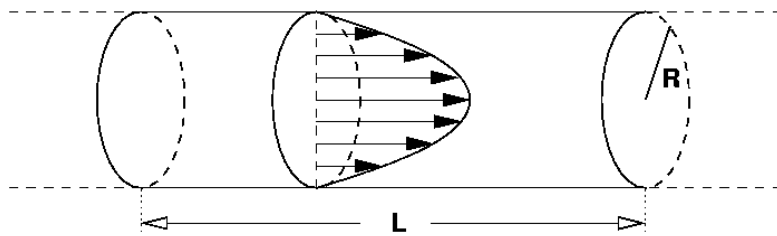


Abbildung 2.8: Geometrie der Rohrströmung.

Zur Simulation² einer turbulenten Rohrströmung verwenden wir ein Pseudospektralverfahren mit Fouriermoden in axialer und azimuthaler Richtung. In radialer Richtung werden Chebyshev-Polynome auf dem Rohrdurchmesser verwendet. Die Zeitintegration erfolgt mit einem Runge-Kutta-Fehlberg Schema. Die verwendete Auflösung beträgt $48 \times 37 \times 45$ in Strömungs-, Wandnormalen³- und Spannweitenrichtung.

Es sind Haftbedingungen $u = v = w = 0|_{y=0}$ für das Fluid an den Wänden implementiert und der Durchfluss wird mit Hilfe einer Volumenkraft konstant gehalten.

Für dieses System wurde die Navier-Stokes Gleichung mit der mittleren Geschwindigkeit des laminaren Profils U und dem Durchmesser d normiert, woraus sich die Reynoldszahl

$$\text{Re} = \frac{U d}{\nu} \quad (2.38)$$

ergibt. Für die hier ausgewertete Simulation wurde $\text{Re} = 3500$ gewählt, woraus sich die Viskosität ergibt. Die Länge des Rohres beträgt 10 Radien $L = 10 R$ (Abb. 2.8).

²Hierbei handelt es sich um eine Fortentwicklung des Programms von Faisst [58] und Jachens durch Schneider im Rahmen seiner Diplomarbeit.

³Betrachtet wird hier nur der Radius; es sind 74 Polynome auf dem Durchmesser.

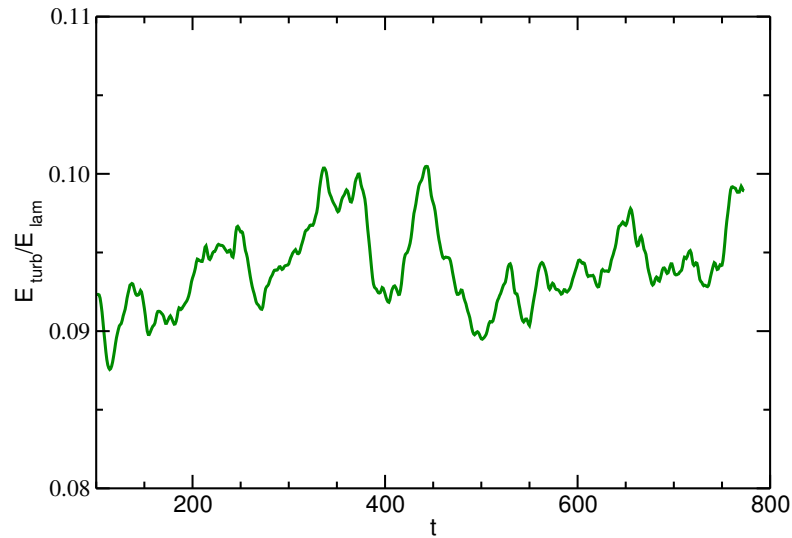


Abbildung 2.9: Turbulente Energie als Indikator für die turbulente Dynamik der Rohrströmung, $Re = 3500$, $\langle U \rangle = \text{const.}$

2.5 Turbulente Randschicht bei hohen Re

In der Grenzschicht über einer festen Wand, bei der angenommen werden darf, dass die gesamte Schubspannung (Zähigkeitsspannung und *Reynolds*-Spannung) konstant ist, gilt (s. Prandtl [59])

$$\tau = \rho \eta \frac{d\langle U \rangle}{dy} - \rho \langle uv \rangle := \tau_w, \quad (2.39)$$

wobei in Richtung der Wand $\langle uv \rangle$ gegen Null geht.

Die mittlere Geschwindigkeit hängt dann nur von y ab und wird vollständig durch τ_w , ρ und ν bestimmt. Aus diesen Größen lässt sich die *Wandschubgeschwindigkeit* (vgl. Rotta [31])

$$u_\tau = \sqrt{\left| \frac{\tau_w}{\rho} \right|} \quad (2.40)$$

und die viskose Längenskala

$$\delta_\nu = \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} \quad (2.41)$$

berechnen. Diese wird in Grenzschichten typischerweise zur Normierung von Längen verwendet

$$y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}. \quad (2.42)$$

(Dieser normierte Abstand kann als eine lokale Reynoldszahl interpretiert werden.)

Der Wandreibungskoeffizient ergibt sich dann aus Normierung der Wandschubspannung mit einer Referenzgeschwindigkeit (vgl. Pope [4]).

$$c_f = \frac{\tau_w}{1/2\rho U_\infty^2} \quad (2.43)$$

Oberhalb einer Grenzfläche stellt sich ein logarithmisches Geschwindigkeitsverteilungsgesetz (nachzulesen bei Schlichting [60]), für das es von Kármán und Prandtl theoretische Modelle gibt.

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{u_\tau y}{\nu} + C \right) \quad (2.44)$$

Die Konstanten κ und C lassen sich dabei nicht theoretisch ableiten, sie müssen experimentell bestimmt werden. Die exakten Werte dieser Konstanten unterliegen einem fortwährendem Diskussionsprozess.

Bei diesen logarithmischen Randgesetzen, die universal für die meisten Randschichten zu sein scheinen, lassen sich drei Bereiche unterscheiden:

- In der viskosen Randschicht ($y^+ < 5$) ist ein steiler Anstieg des mittleren Geschwindigkeitsprofils zu verzeichnen; die Physik wird von den Reibungskräften dominiert.
- In der sich anschließenden Pufferschicht ($5 < y^+ < 50$) entstehen die kohärenten Strukturen, die für die nichtnormale Verstärkung verantwortlich sind.
- Der logarithmische Bereich äußert sich bei einer doppelt logarithmischen Auftragung von $u^+(y^+)$ in einem linearen Anstieg des Geschwindigkeitsprofils.

Dabei sind die angegebenen Grenzen der Schichten nur ungefähre Werte. Die Dicke des Bereiches, in dem die Streifen beobachtet werden, variiert von System zu System im Bereich $y^+ \lesssim 30 - 80$.

2.5.1 Methoden zur Geschwindigkeitsmessung

Um turbulente Geschwindigkeitsfelder zu messen, gibt es verschiedene Methoden:

- **Hitzdrahtmessung**
Eine seit vielen Jahren benutzte und verfeinerte Technik zur Messung von Geschwindigkeitsfeldern basiert auf der Kühlung so genannter Hitzdrähte durch das vorbeistreichenden Fluid. Durch geschickte Anordnung drei solcher, erstaunlich dünnen ($2.5\mu\text{m}$ dick, 0.5mm lang) Drähte (Bruns & Dengel [61]) gelingt es, alle drei Geschwindigkeitskomponenten an einem Ort gleichzeitig zu messen.
Mit dieser Methode lassen sich mit hoher Abtastfrequenz Geschwindigkeitsfluktuationen an einem Ort messen. Der Umfang der dabei entstehenden Daten begrenzt solche Messungen auf einige wenige Punkte, an denen gleichzeitig gemessen werden kann. Außerdem ist es mit dieser Methode nicht (oder nur schlecht) möglich, Korrelationen in Strömungsrichtung zu messen, da die erste Sonde die Strömung stromabwärts beeinflusst.
- *Particle Imaging Velocimetry (PIV)*
Zum Fluid werden Schwebepartikelchen gegeben. Mit einem Laser werden eine oder mehrere Ebenen ausgeleuchtet und Aufnahmen gemacht. Durch Vergleichen der Partikelpositionen zweier direkt aufeinander folgender Aufnahmen lassen sich die Geschwindigkeitskomponenten der Partikel in der Ebene errechnen. Mit diesem Verfahren erreicht man eine sehr gute räumliche Auflösung, aber die dabei anfallenden Datenmengen sind so groß, dass auf diese Weise keine Zeitreihen dicht genug aufgenommen werden können, so dass die Daten für eine zeitliche Korrelation zu gebrauchen wären (s. Kompenhans [62]).
- *Laser Doppler Anemometry (LDA)*
Auch bei dieser Methode werden dem Fluid Schwebeteilchen beigelegt. Mit Lasern werden dann einzelne Punkte im Fluid stereoskopisch beleuchtet und aus der Dopplerverschiebung des von den Schwebepartikeln reflektierten Lichtes lassen sich dann deren Geschwindigkeiten errechnen. Ein wesentlicher Vorteil dieses Verfahrens ist, dass die Messung nicht invasiv ist, das heißt, das Fluid wird durch keine Messsonde gestört. Es lassen sich auf diese Weise aber immer nur einzelne Punkte abtasten lassen.

2.5.2 Übersicht der experimentellen Parameter

Die Werte für die Wandreibungskoeffizienten stammen von Knobloch [63]. Sie wurden mit Hilfe des „halbempirischen Gesetzes für die Wandreibung“ von Fernholz [64, 65] aus dem mittleren turbulenten Profil bestimmt.

$$c_f = \frac{0.32}{[1.77 + \ln(Re_{\delta_2})]^2} \quad (2.45)$$

Aus den Werten für c_f (Tab. 2.2) wurden für die statistische Auswertung der Messungen (Tab. 2.3, 2.4, 2.5, 2.6) nach Gleichung 2.43 die Wandschubspannungen berechnet und diese dann zur Normierung der Wandabstände benutzt.

Die Werte für die Grenzschichtdicken δ_{99} stammen ebenso direkt von Knobloch wie die mittleren Geschwindigkeitsprofile, aus denen mit zentralen Differenzen die Scherungen (Abb. 2.10) berechnet wurden.

Die Energiedissipation nach Rotta [31]

$$\varepsilon = 15 \nu \langle (\partial_x u)^2 \rangle, \quad (2.46)$$

die dimensionslose Scherung

$$S^* = \frac{S \langle u^2 \rangle}{\varepsilon} \quad (2.47)$$

und die Taylor-Reynolds-Zahl

$$Re_\lambda = \frac{\langle u^2 \rangle}{\nu \langle (\partial_x u)^2 \rangle^{1/2}} \quad (2.48)$$

sind dann direkt aus zur Verfügung gestellten Zeitreihen berechnet worden.

	$10 \frac{m}{s}$	$30 \frac{m}{s}$	$40 \frac{m}{s}$	$80 \frac{m}{s}$
f	$20 kHz$	$20 kHz$	$125 kHz$	$125 kHz$
δ_{99}	$63 mm$	$57 mm$	$250 mm$	$240 mm$
Re_{δ_2}	4570	11800	63000	115000
ρ	$1.196 \frac{kg}{m^3}$	$1.192 \frac{kg}{m^3}$	$1.192 \frac{kg}{m^3}$	$1.178 \frac{kg}{m^3}$
c_f	$2.768 \cdot 10^{-3}$	$2.477 \cdot 10^{-3}$	$1.944 \cdot 10^{-3}$	$1.770 \cdot 10^{-3}$
ν	$1.513 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$	$1.518 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$	$1.522 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$	$1.551 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

Tabelle 2.2: Kenngrößen der Windkanalmessungen, f : Frequenz der Messung, δ_{99} : Grenzschichtdicke, Re_{δ_2} : Reynoldszahl, basierend auf der Impulsverlustdicke (Gl. 1.13)

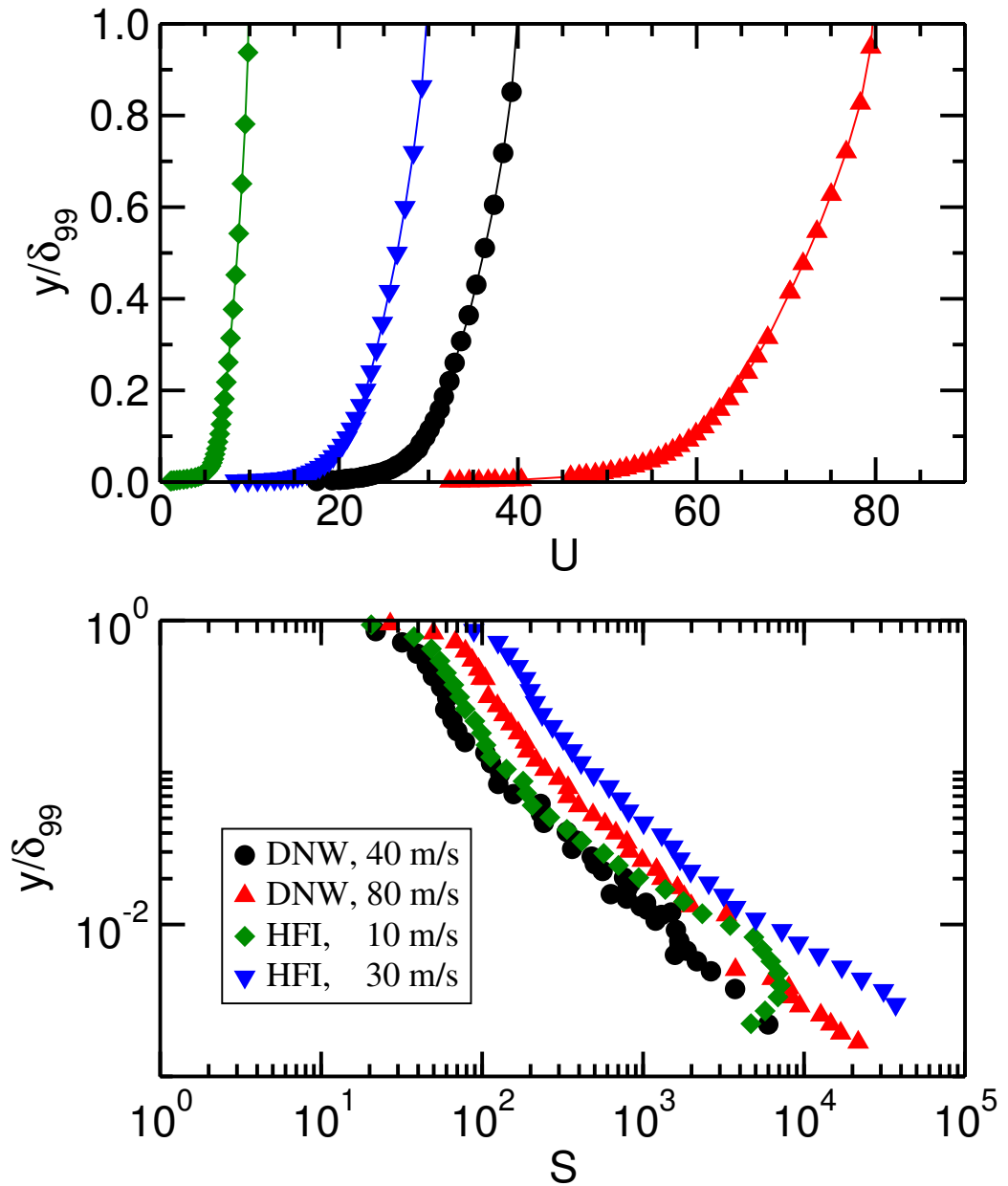


Abbildung 2.10: *oben*: Mittlere Geschwindigkeit, *unten*: Scherung als Funktion des Wandabstandes.

2.5.3 Messungen der Wandnahen Grenzschicht am DNW

Im Rahmen der **interdisziplinären Turbulenzinitiative** (iT_i) wurden von den Gruppen von H-H. Fernholz vom **Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik** (HFI) [48] und W. Schröder von der **Aerodynamischen Institut Aachen** (AIA) der RWTH Aachen Messungen in der “Large Low Speed Facility” (LLF) des **Deutsch-Niederländischen Windkanals** (DNW) durchgeführt.

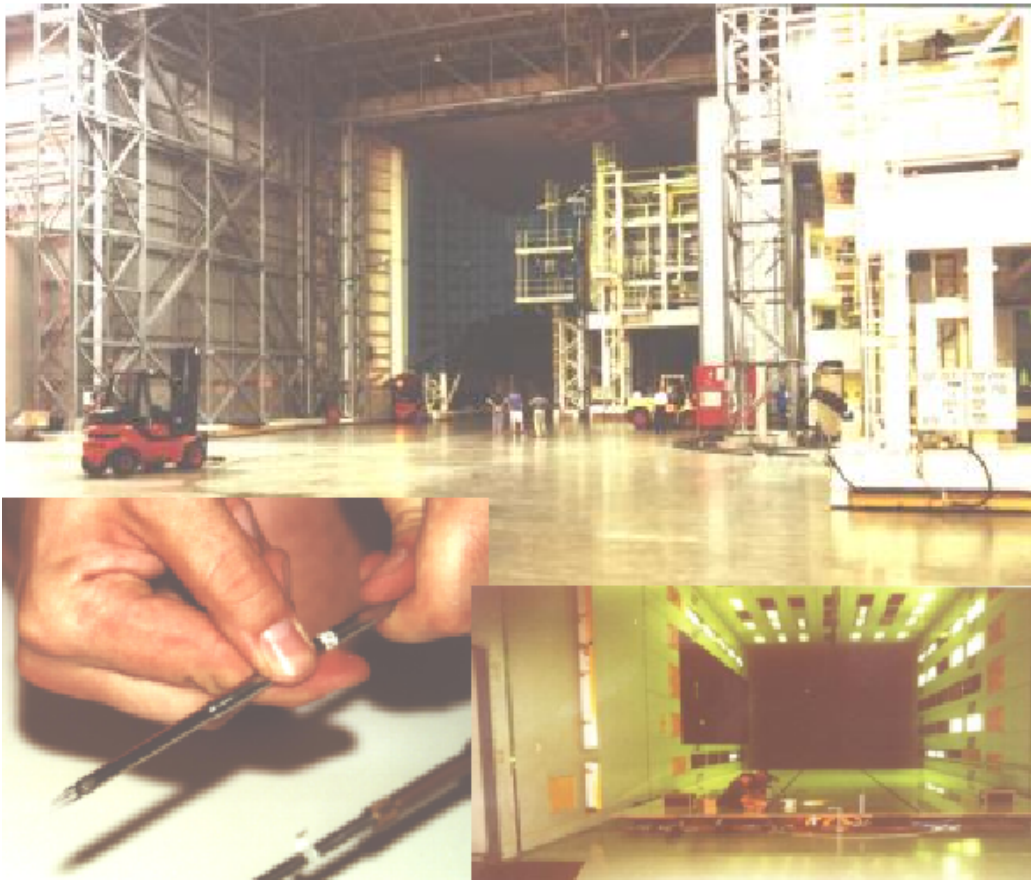


Abbildung 2.11: *oben*: Foto der Experimentierhalle am DNW mit Windtunnel im Hintergrund, *unten links*: Hitzdrähte (Es sind nur die Zinken zu erkennen, die die Hitzdrähte spannen!), *unten rechts*: Blick in den Windtunnel stromaufwärts über die Platte.

Der Messbereich der LLF ist $8 \times 6 \text{ m}^2$ groß, es wurden bei Windgeschwindigkeiten von 40, 60, 80 m/s Hitzdrah- und PIV-Messungen durchgeführt. Das primäre Interesse lag in der Entwicklung der turbulenten Grenzschicht über einer ebenen 15 m langen Platte. Diese Platte war so im Windkanal befestigt, dass die syste-

minhärente Turbulenz an den Wänden aus dem Kanal geleitet wurde und sich von der Vorderkante der Platte ausgehend eine wohldefinierte turbulente Grenzschicht bilden konnte.

Eine zweite Messstation mit Hitzdrähten war an der Seitenwand befestigt, wo die turbulente Grenzschicht der Wand vermessen wurde. Da bei Windgeschwindigkeiten über 60 m/s die Platte zu schwingen begann, musste diese für die Messungen bei 80 m/s demontiert werden. Um die höchsten erreichten Reynoldszahlen in den Vergleich einbeziehen zu können, werden im Folgenden Messungen bei 40 m/s und 80m/s an der Seitenwand verglichen.

y/δ_{99}	y^+	U [m/s]	$\langle uu \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle vv \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle ww \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle uv \rangle$ [m ² /s ²]	ε [m ² /s ³]	S [1/s]	S^*	Re_λ
0.031	624	26.0	10.0	3.3	4.3	-2.1	373.5	362.4	13.2	592
0.098	2016	29.8	8.2	3.2	3.6	-2.1	128.8	129.5	9.0	753
0.216	4424	32.0	6.2	2.8	3.3	-1.6	65.5	65.4	6.2	755
0.338	6924	33.7	5.2	2.6	2.9	-1.5	60.7	60.7	6.8	757
0.605	1240	37.3	3.1	1.7	1.8	-0.9	39.4	39.4	5.3	640
0.996	20409	40.1	0.3	0.4	0.2	-0.1	6.8	9.4	0.5	125

Tabelle 2.3: Statistische Größen aus der Windkanalmessung am DNW, 40m/s.

y/δ_{99}	y^+	U [m/s]	$\langle uu \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle vv \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle ww \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle uv \rangle$ [m ² /s ²]	ε [m ² /s ³]	S [1/s]	S^*	Re_λ
0.02	709	49.3	39.8	9.6	19.1	-6.2	1146.4	1447	50.3	1156
0.11	3953	60.4	28.6	10.1	14.6	-6.0	320.6	242	21.6	1574
0.21	7826	64.6	22.8	10.6	12.9	-6.0	167.2	151	20.7	1739
0.34	12507	69.1	18.2	9.9	11.4	-5.2	123.6	109	16.1	1614
0.62	22753	75.8	9.6	5.8	6.4	-2.7	52.7	78	14.3	1299

Tabelle 2.4: Statistische Größen aus der Windkanalmessung am DNW, 80m/s.

2.5.4 Messungen der Wandnahen Grenzschicht am HFI

Von Knobloch [48] stammen weitere Zeitreihen, gemessen am HFI.

y/δ_{99}	y^+	U [m/s]	$\langle uu \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle vv \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle ww \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle uv \rangle$ [m ² /s ²]	ε [m ² /s ³]	S [1/s]	S^*	Re_λ
0.02	34	4.6	0.95	0.17	0.52	-0.08	39.62	1576	37.80	151
0.11	174	6.6	0.56	0.16	0.29	-0.12	10.60	143	7.52	172
0.31	519	7.9	0.41	0.15	0.23	-0.11	4.67	72	6.41	192
0.94	1549	9.8	0.04	0.03	0.03	-0.01	0.31	20	2.75	75

Tabelle 2.5: Statistische Größen aus der Windkanalmessung am HFI, 10m/s.

y/δ_{99}	y^+	U [m/s]	$\langle uu \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle vv \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle ww \rangle$ [m ² /s ²]	$\langle uv \rangle$ [m ² /s ²]	ε [m ² /s ³]	S [1/s]	S^*	Re_λ
0.02	92	16.1	5.59	1.86	4.14	-0.89	193.3	2460	71.17	402
0.10	397	20.6	4.93	1.39	2.45	-1.00	62.8	524	41.19	623
0.35	1423	24.9	3.16	1.23	1.86	-0.84	25.4	199	24.71	627
1.04	4247	29.9	0.20	0.16	0.14	-0.06	1.3	39	5.85	174

Tabelle 2.6: Statistische Größen aus der Windkanalmessung am HFI, 30m/s.

Kapitel 3

Korrelationen in Scherströmungen

3.1 Zeitlich- Räumliche Korrelationen im 9-Moden-Modell

Die zeitliche Dynamik der neun Amplituden $a_\alpha(t)$ des 9-Moden-Modells werden durch numerische Integration der Bewegungsgleichung bestimmt. Zur Berechnung der Korrelationen aus einer so erhaltenen Trajektorie können die zeitlichen Korrelationen der Amplituden getrennt von den räumlichen Korrelationen der Moden berechnet werden.

$$\begin{aligned} C_{vu}(\Delta t, \Delta x, y) &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^9 a_\alpha(t) v_\alpha(x, y, z) \cdot \sum_{\beta=1}^9 a_\beta(t + \Delta t) u_\beta(x + \Delta x, y, z) \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \langle a_\alpha(t) a_\beta(t + \Delta t) \rangle_t \cdot \langle v_\alpha^\alpha(x, y, z) \cdot u_\beta(x + \Delta x, y) \rangle \\ &=: \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta}^T(\Delta t) C_{\alpha\beta}^R(\Delta x, y) \end{aligned}$$

Zu der Kreuzkorrelation können die Wechselwirkungen der Wandnormalkomponenten der Moden v_3, v_8 mit den Moden $u_1, u_9, u_2, u_6, u_7, u_8$ in Strömungsrichtung beitragen. Die räumlichen Korrelationen lassen sich aus den neun Moden analytisch berechnen; durch die Mittelung über das Volumen tragen aber nur vier der Wechselwirkungen bei:

Bei der Berechnung der 12 möglichen Korrelationen $C^T(\Delta t)$ der Amplituden $a_i(t)$, liefern genau die vier Kombinationen einen Beitrag (Abb. 3.2), die auch zu $C^R(\Delta x)$ beitragen (Abb. 3.1). Die übrigen Kopplungen sind in der Größe der statistischen Fehlerbalken und somit nicht von Null zu unterscheiden.

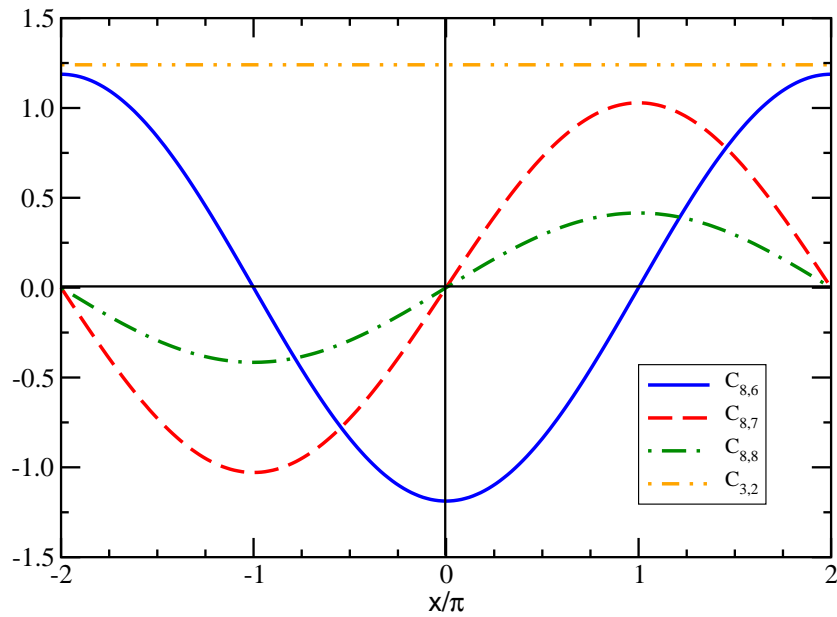


Abbildung 3.1: Die vier nichtverschwindenden räumlichen Korrelationen $\max_y |C_{i,j}^R(\Delta x)|$

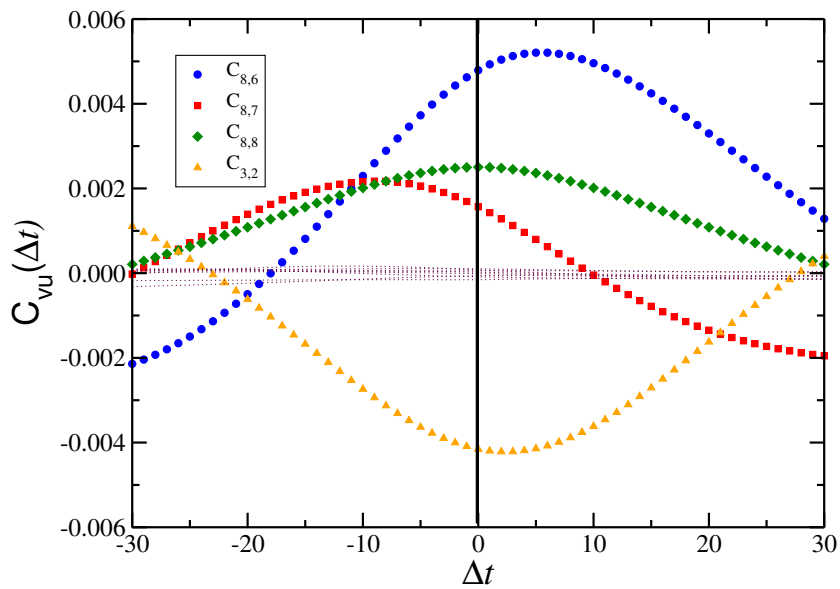


Abbildung 3.2: Die vier nichtverschwindenden zeitlichen Korrelationen. Die verbleibenden neun Korrelationen streuen in der Größe der statistischen Fehler um die Abszisse.

- $C_{3,2}$
Die Korrelation zwischen Vortex und Streak $C_{3,2}^T$ zeigt die erwartete Asymmetrie in Δt . Da diese Moden aber keine Modulation in Strömungsrichtung haben, ist der Beitrag $C_{3,2}^R(\Delta x)$ konstant.

$$C_{3,2}^R(\Delta x, y) = \frac{8}{\sqrt{3(4 + \pi^2)}} \cos^3\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad (3.2)$$

- $C_{8,6}$
 \vec{u}_6 ist der Wirbel in Wandnormalenrichtung. Ihre Komponente u_6 hat die Charakteristik eines Streaks mit Modulation in x -Richtung. Dazu in Phase liegt v_8 , mit den Eigenschaften eines modulierten Vortex. Die zeitliche Korrelation $C_{8,6}^T(\Delta t)$ dieser Moden zeigt ebenfalls die erwartete deutliche Asymmetrie; der räumliche Anteil ist symmetrisch:

$$C_{8,6}^R(\Delta x, y) = -\frac{8}{\sqrt{3(5 + \pi^2)}} \cos\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos^3\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad (3.3)$$

- $C_{8,7}$
Dieser Streak u_6 wird von der mittleren Geschwindigkeit u_1 advektiert $u_1 \partial_x u_6$ und liefert u_7 , die wiederum mit v_8 wechselwirkt. Dieser Beitrag ist der einzige, der sowohl räumlich als auch zeitlich asymmetrisch ist und dadurch die Neigung der Korrelation verursacht. Die Knotenlinie der Struktur ist ebenfalls zu kleinen Δt verschoben.

$$C_{8,7}^R(\Delta x, y) = \frac{4}{\sqrt{5 + \pi^2}} \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad (3.4)$$

- $C_{8,8}$
 \vec{u}_8 ist die einzige dreidimensionale Mode in diesem Modell. Ihre Komponente u_8 hat die gleiche räumliche Abhängigkeit wie u_7 . Daher liefert $C_{8,8}^R(\Delta x)$ wie $C_{8,7}^R(\Delta x)$ einen antisymmetrischen Beitrag in Δx . Da die Mode nur als ganzes angeregt wird, ist $C_{8,8}^T(\Delta t)$ symmetrisch. Der räumliche Anteil ist antisymmetrisch und verursacht die Verschiebung des Minimums der Korrelation in Richtung Δx nahe den Wänden (Abb. 3.4).

$$C_{8,8}^R(\Delta x, y) = \frac{2\pi}{5 + \pi^2} \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad (3.5)$$

Durch Kombination der $C_{\alpha\beta}^R(\Delta x)$ und der $C_{\alpha\beta}^T(\Delta t)$ ergibt sich eine 2-dimensionale Darstellung der Kreuzkorrelation. Die so erhaltene Struktur zeigt eine deutliche

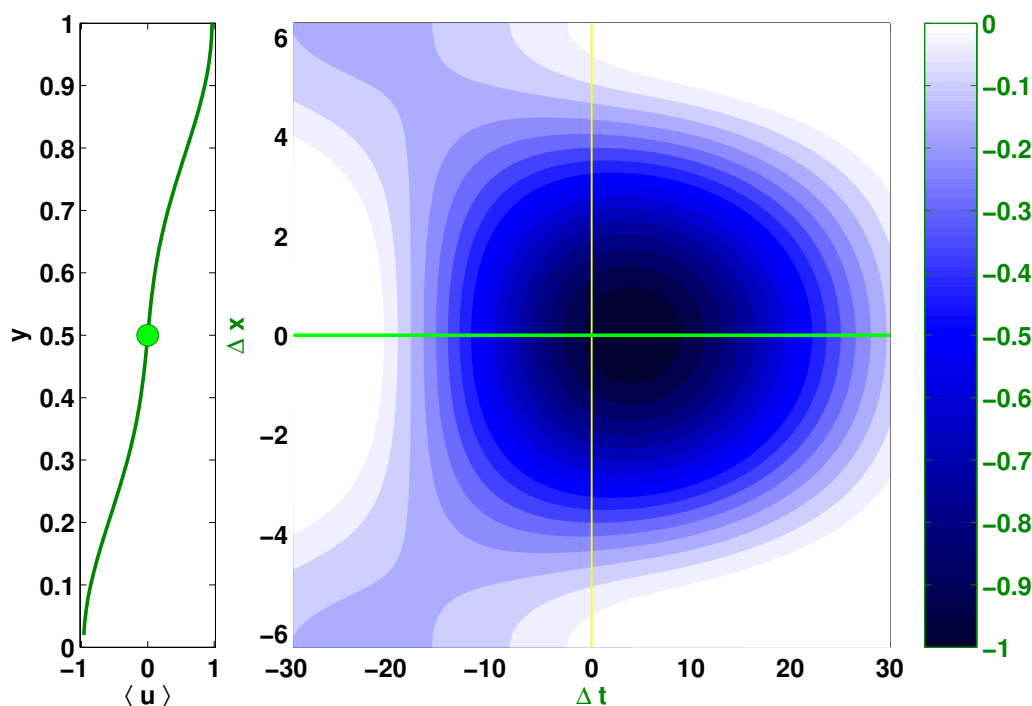


Abbildung 3.3: Aus den vier Beiträgen resultierende Korrelation im turbulenten 9-Moden-Modell für $Re = 180$, abgebildet für $y = 1/2L_y$. In Abhängigkeit der Höhe ändert sich die Struktur. Am unteren Rand hat die Struktur eine negative Neigung, die kleiner als die Geschwindigkeit des mittleren Profils ist s. Abb. 3.5, und das Extremum ist zu $+\Delta x$ verschoben; die Bilder zu den Höhen $y > 1/2 L_y$ ergeben sich durch Spiegelung an der Δt -Achse aus dem Bereich $y < 1/2 L_y$. (Film)

Abhängigkeit von der Höhe y in Wandnormalenrichtung. Bei $y = L_y/2$ zeigt die Kreuzkorrelation $C(\Delta t, \Delta x)$ in zeitlicher Richtung die erwartete Asymmetrie und ist in Strömungsrichtung symmetrisch.

Bei Untersuchung der Kreuzkorrelation als Funktion der Höhe y/L_x , ist eine sich systematisch ändernde Neigung der Struktur zu verzeichnen. Im verwendeten $\Delta t - \Delta x$ -Diagramm entspricht diese Neigung einer Geschwindigkeit. In der Mittelebene ist diese Geschwindigkeit Null und zum Rand hin wird sie kleiner als die mittlere Geschwindigkeit in der entsprechenden Höhe (Abb. 3.5).

Der Neigungswinkel¹ der Kreuzkorrelation basiert auf der Abhängigkeit der vier

¹Die Winkel wurden analog zur Berechnung der Hauptträgheitsachsen eines Körpers bestimmt. Die Korrelation C wurde dabei als Dichte einer zweidimensionalen Scheibe aufgefasst und durch

Kopplungen von y (Abb. 3.6). In der Mitte $y = 1/2 L_y$ überwiegen die Beiträge der Kopplungen von Wirbel- und Streifenmoden ($C_{8,6}$, $C_{3,2}$) deutlich und führen zur Asymmetrie der Korrelation in zeitlicher Richtung. Zum Rand hin ($y < 0.2 L_y$) verschwindet die zeitliche Asymmetrie und die Beiträge $C_{8,7}$, $C_{8,8}$ dominieren die Struktur. Dabei verursacht $C_{8,7}$ durch ihre Antisymmetrie in Δx und Δt die Neigung der Struktur und $C_{8,8}$ macht sich in einer Verschiebung des Minimums zu $\pm \Delta x$ bemerkbar.

Integration über die Fläche der zugehörige Trägheitstensor und dessen Hauptachsen bestimmt. Der aufgetragene Winkel entspricht der Neigung der Hauptträgheitsachse zum kleineren Trägheitsmoment in Relation zur Abszisse. Da die Contourlinien der Korrelationsfunktionen nicht exakt konzentrische Ellipsen sind, und sich die Neigung vom Zentrum nach außen geringfügig zu ändern scheint, hat die Wahl eines C_0 , so dass nur über die Fläche mit $C(\Delta t, \Delta x) > C_0$ integriert wird, einen leichten Einfluss auf den berechneten Winkel. Da bei der Berechnung von Trägheitsmomenten der Abstand vom Ursprung quadratisch eingeht, ist nicht auszuschließen, dass die kleinen Korrelationen bei größeren Abständen den berechneten Winkel etwas mehr beeinflussen als es der visuellen Intuition entspricht.

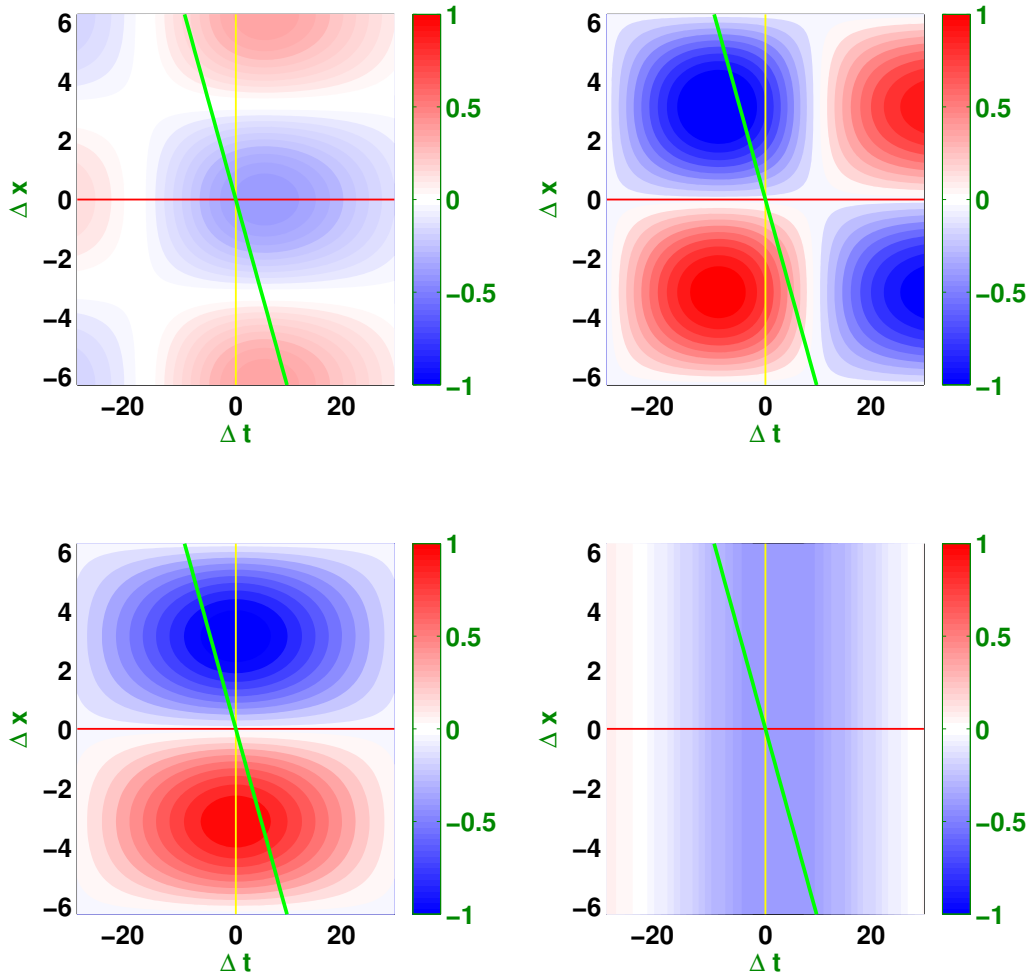


Abbildung 3.4: Die vier Beiträge zur Kreuzkorrelation in Abhängigkeit der Höhe, abgebildet für $y = 0.25 L_y$. *oben:* C_{86} und C_{87} , *unten:* C_{88} und C_{32} . Nahe den Rändern verschwinden die Beiträge C_{86} und C_{32} , in der Mitte des Volumens verschwinden C_{87} und C_{88} , s. Abb. 3.6 (*Film*)

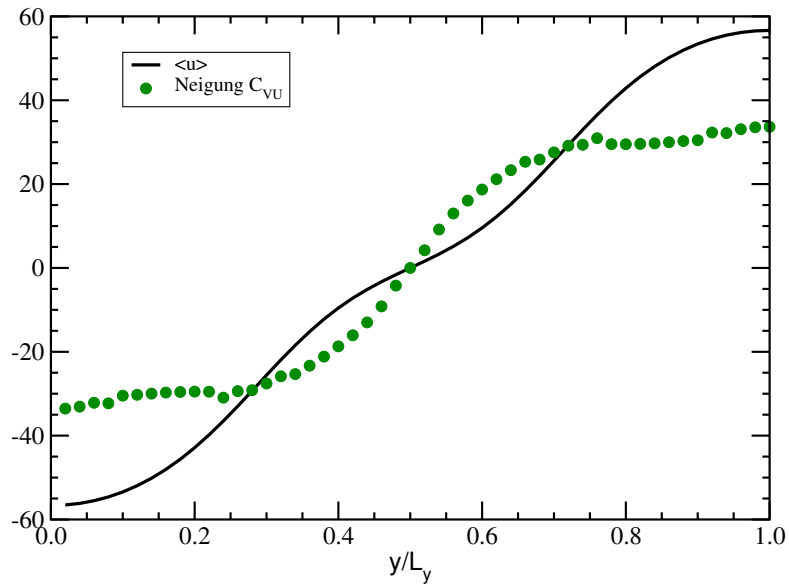


Abbildung 3.5: Neigungswinkel der Kreuzkorrelation als Funktion der Höhe im Vergleich zur mittleren Geschwindigkeit.

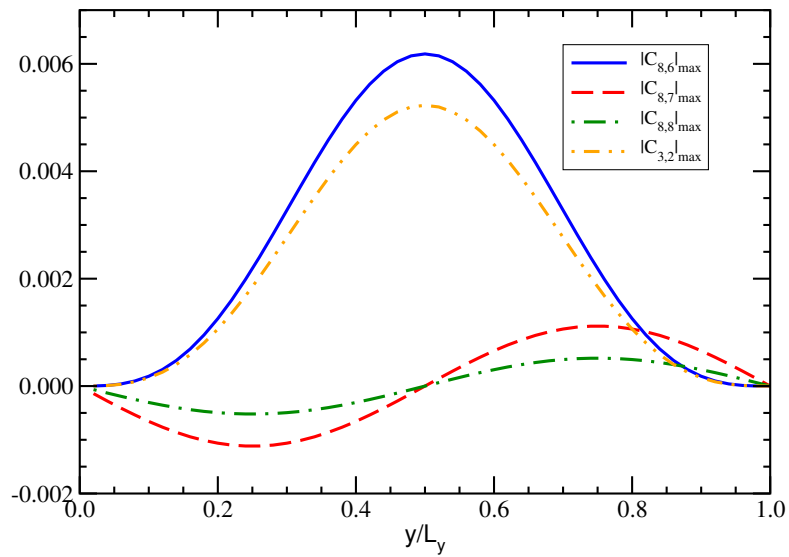


Abbildung 3.6: Die y -Abhängigkeit der vier Beiträge zu $C_{\alpha\beta}^R(\Delta x, y)$. Dabei wurden jeweils die maximalen Amplituden gewählt: $C_{8,6}^R(\Delta x = 0, y)$, $C_{8,7}^R(\Delta x = \pi, y)$, $C_{8,8}^R(\Delta x = \pi, y)$, $C_{3,2}^R(\Delta x = 0, y)$.

3.1.1 Räumliche Korrelationen

Die räumlichen Korrelationen $R(\Delta x, \Delta y)$ lassen sich im 9-Moden-Modell analytisch berechnen. In der numerischen Simulation (Kap. 2.2) und im Windkanal (Kap. 2.5) ist die beobachtete Struktur vom Wandabstand y abhängig. In diesem einfachen Modell sind alle Strukturen räumlich periodisch. Eine Wahl von $y \in [-1, +1]$, außerhalb der Mitte bewirkt eine Verschiebung der periodischen Struktur der Korrelationsfunktion, so dass das Extremum nicht mehr bei $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ liegt; an der Neigung der Struktur ändert sich dadurch nichts. Daher beziehen sich die folgenden Betrachtungen auf einen Aufpunkt in $y = 0$, was äquivalent zu einer Mittelung über alle Höhen y ist.

Aus der Berechnung der räumlichen Korrelation unter Vernachlässigung der zeitabhängigen Amplituden

$$R(\Delta x, \Delta y)_{y=0} = \sum_{\alpha, \beta=1}^9 \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} u_\alpha(x+\Delta x, y+\Delta y, z) \cdot u_\beta(x, y, z), \quad (3.6)$$

ergeben sich sowohl für die Kreuzkorrelation C_{vu} als auch für die Autokorrelation C_{uu} Neigungswinkel, die systematisch von der Wahl der Abmessungen des Systems (L_x, L_y) abhängen (Abb. 3.7). Für diese Winkel gilt

$$\tan \varphi \approx \frac{L_y}{L_x}. \quad (3.7)$$

In diesem Winkel φ spiegelt sich direkt das Verhältnis der räumlichen Ausdehnung der Strukturen in Strömungs- und Wandnormalenrichtung wieder.

Bei der Komposition der räumlichen Korrelationen aus den einzelnen Moden \vec{u}_{alpha} sind noch die Korrelationen der zeitabhängigen Amplituden $C(\Delta t = 0) = \langle a_i(t) a_j(t) \rangle$ zu berücksichtigen. Diese beeinflussen die Gewichte der symmetrischen ($\cos(\Delta x) \cos(\Delta y)$) und asymmetrischen ($\sin(\Delta x) \sin(\Delta y)$) Anteile, wodurch sich die Schiefe der gesamten Korrelationsfunktion ändert.

- Für C_{vu} ergibt sich ein Winkel von ca. 8° .
- Bei der Autokorrelation C_{uu} resultieren aus allen Kopplungen $\langle u_\alpha u_\beta \rangle$ von Moden mit sich selbst $i = j$ symmetrische Anteile. Asymmetrische Beträge können nur Korrelationen verschiedener Moden $i \neq j$ liefern. Diese sind bei $\Delta t = 0$ aber deutlich kleiner als die symmetrischen Anteile (Abb. 3.9), so dass die resultierende Korrelation der Geschwindigkeitsfelder fast symmetrisch ist.

Die Kopplung des Grundprofils mit sich selbst $C_{1,1}(\Delta t = 0) = 0.133$ ist deutlich stärker, aber hier wie in allen anderen Systemen werden nur die

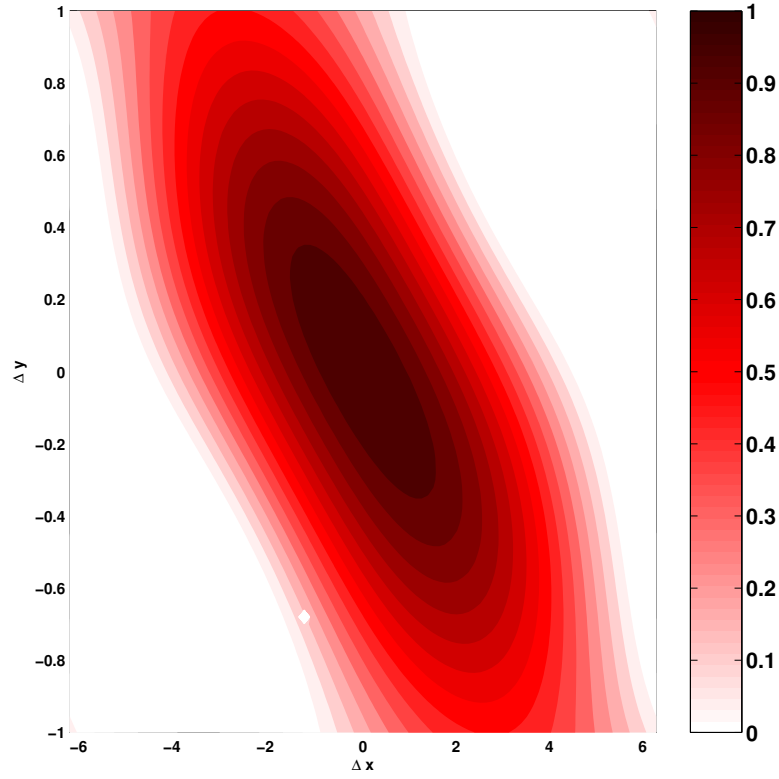


Abbildung 3.7: Autokorrelation der räumlichen Moden $C_{uu}^R(\Delta x, \Delta y)$

Geschwindigkeitsfluktuationen um das Grundprofil betrachtet. Die Wechselwirkungen des Grundprofils mit den übrigen Moden sind durch die Mittelung in x und z analytisch Null.

Moehlis, Faisst und Eckhardt [66] untersuchten die Symmetrie dieses Modells und stellten fest, dass die Gleichungen bei einer Translation um $L_x/2$ invariant sind. Bei dieser Transformation ändern die Amplituden a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 ihr Vorzeichen, während a_1, a_2, a_3, a_9 unverändert bleiben. Auf Grund dieser Symmetrie könnte es vorkommen, dass beide Lösungen zu den zeitlichen Korrelationen $C_{\alpha,\beta}^T(\Delta t) = a_\alpha(t)a_\beta(t + \Delta t)$ beitragen und sich einige Kopplungen durch einen Vorzeichenwechsel gerade kompensieren.

Zu den Korrelationen in Strömungs- und Wandnormalenrichtung tragen aber nur die Kopplungen $\langle a_1 a_1 \rangle, \langle a_2 a_2 \rangle, \langle a_6 a_6 \rangle, \langle a_7 a_7 \rangle, \langle a_8 a_8 \rangle, \langle a_9 a_9 \rangle, \langle a_7 a_8 \rangle, \langle a_6 a_7 \rangle, \langle a_6 a_8 \rangle$ bei, $\langle a_1 a_9 \rangle$ und $\langle a_1 a_2 \rangle$ sind analytisch Null. Es koppeln also nur Moden miteinander, die entweder beide oder beide nicht unter dieser Symmetrietransformation ihr Vorzeichen ändern, so dass ein Einfluss der Symmetrie auf die Asymmetrie der Korrelation ausgeschlossen werden kann.

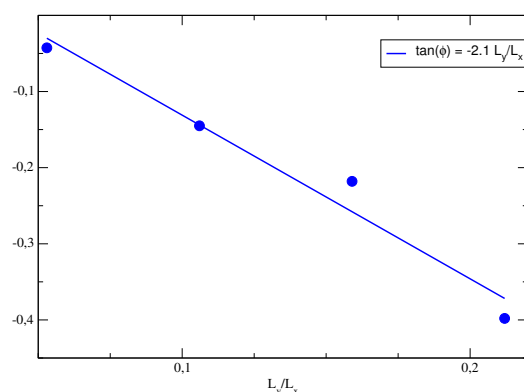


Abbildung 3.8: Neigungswinkel der Kreuzkorrelation C_{vu} in Abhängigkeit der Systemgeometrie.

3.1.2 Diskussion der Strukturen im 9-Moden-Modell

Das 9-Moden-Modell zeigt eine deutliche Asymmetrie der Kreuzkorrelationen von Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnormalen- und Strömungsrichtung. Bei der Analyse der zur Korrelation beitragenden Modenkopplungen (Abb. 3.4) wird deutlich, dass unmodulierte Streifen- und Wirbelmoden allein nicht die in realen Systemen zu beobachtende Struktur von Kreuzkorrelationen erzeugen können. Erst die Überlagerung mit in x -Richtung modulierten Moden führt zu einem Zerfall der Korrelationen in Strömungsrichtung und zeigt in zeitlicher Richtung die durch das transiente Anwachsen von Streifen zu erwartende Verbreiterung der Korrelationen für $\Delta t > 0$. Es zeigt sich, dass ausschließlich die Kopplung von Wirbel- und Streifenmoden zur dieser Asymmetrie führt. Die anderen Beiträge zur Kreuzkorrelation verschwinden in der Mitte, wo die Asymmetrie am ausgeprägtesten ist.

Qualitativ ist zur Wand hin eine Neigung der Struktur zu erkennen (s. Film zu Abb. 3.3), die auf der Wechselwirkung von v_8 mit u_7 beruht und eine Konvektionsgeschwindigkeit der kohärenten Struktur nahelegt, die kleiner als die zu erwartende mittlere lokale Geschwindigkeit ist.

Zusätzlich ist eine Drift des Extremums der Korrelation in Abhängigkeit vom Wandabstand zu erkennen (Abb. 3.3). Zum Rand hin liegt der Punkt maximaler Korrelation in Richtung $\pm\Delta x$ verschoben; in der Mitte, wo bei diesem System die Wechselwirkung von Wirbeln in Strömungsrichtung und Streifen am ausgeprägtesten ist, ist es erwartungsgemäß zu $+\Delta t$ verschoben.

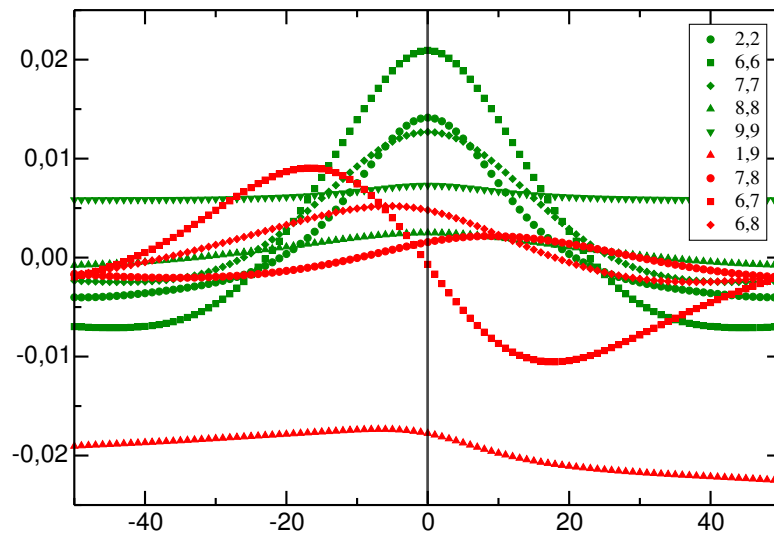


Abbildung 3.9: Vergleich der Korrelationen der zeitabhängigen Amplituden zur Berechnung von C_{uu} . Die symmetrischen Anteile in grün sind bei $\Delta t = 0$ deutlich größer als die asymmetrischen Anteile in rot.

Der Versuch, die Aufwärtsneigung von räumlichen Korrelationen $C_{uu}(\Delta x, \Delta y)$ mit Hilfe der 9 Moden zu erklären war nicht erfolgreich. Zwar lassen sich in diesem Modell die Korrelationen der räumlichen Moden analytisch berechnen, aber die nichttriviale zeitliche Dynamik hat einen entscheidenden Einfluss auf die Amplituden der Korrelationsbeiträge der Moden, so dass ein Verständnis dieser Neigung nicht ohne detailliertes Wissen über die Interaktion der Moden möglich ist. Vielleicht kann die Analyse der stationären Zustände von Moehlis, Faisst & Eckhardt [29] einen Zugang bieten.

Es wurde versucht, den Neigungswinkel der räumlichen Korrelationen mit typische Ausdehnungen der kohärenten Strukturen in Verbindung zu bringen. Dies scheint in dem 9-Moden-Modell vergleichsweise einfach, da je Raumrichtung im Wesentlichen nur eine Wellenlänge (und durch das Quadrat einiger Trigonometrischer Funktionen noch die halbe Wellenlänge) vorhanden ist.

Aber schon die Feststellung, dass Strukturen sehr wohl in x - und y -Richtung eine Länge haben können, ohne deswegen zwangsläufig geneigt zu sein, legt nahe, dass der Neigungswinkel nicht einfach auf das Verhältnis der Wellenlängen zurückgeführt werden kann.

Dennoch zeigt dieses einfache Modell schon klar den Zusammenhang zwischen nichtnormaler Verstärkung und der Asymmetrie der Kreuzkorrelationen.

In den nächsten Abschnitten wird untersucht, ob der Effekt bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden erhalten bleibt.

3.2 Zeitlich-räumliche Korrelationen in DNS

Die diesem Abschnitt zu Grunde liegende Simulation hat ca. 1 Million Freiheitsgrade. Damit ist zu erwarten, dass sie ein reales System sehr viel besser als das 9-Moden-Modell charakterisiert. Im Folgenden wird untersucht, ob auch in diesem System eine deutliche Asymmetrie der Korrelationen von Fluktuationen in Wandnormalen- und Strömungsrichtung zu beobachten ist.

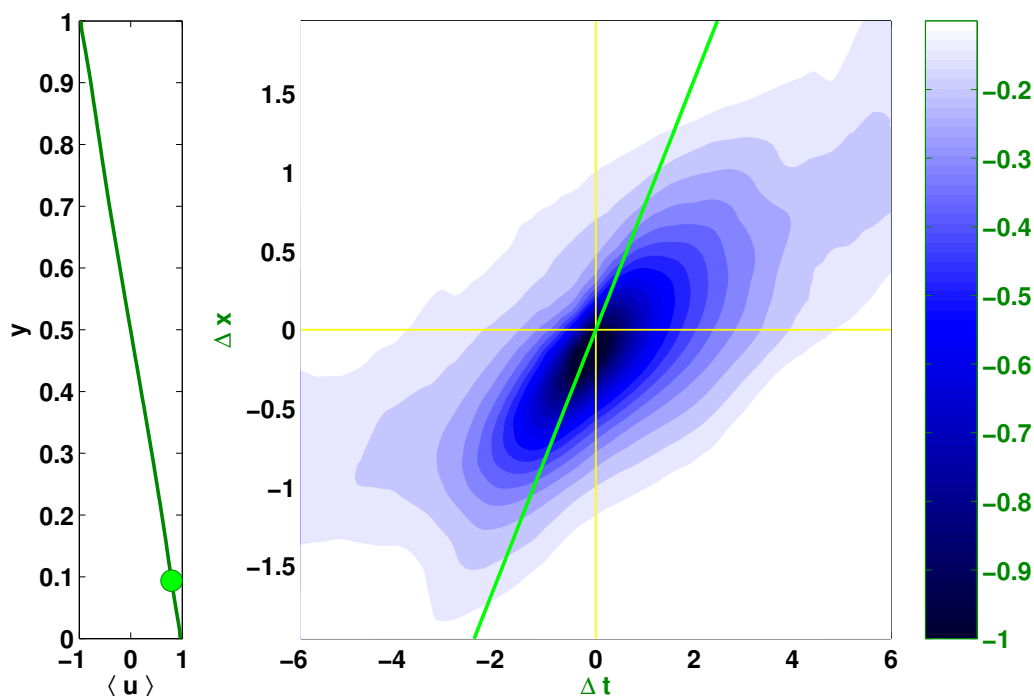


Abbildung 3.10: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, \Delta x)$ in der numerischen Simulation I. (Film)

Für die Daten aus der DNS (Kap. 2.2) werden zunächst wieder die Korrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnormalenrichtung in Relation zu denen in Strömungsrichtung, eine kurze Zeit Δt später, verglichen. Da diese Ergebnisse mit denen aus den Windkanalmessungen (Kap. 3.5) verglichen werden sollen und bei der Messung im Windkanal die Taylorsche Hypothese (Kap. 1.4),

bei der zeitliche Versätze nicht klar von räumlichen zu unterscheiden sind, benutzt wird, sind die Korrelationen C_{vu} hier sowohl als Funktion zeitlicher Abstände Δt als auch für Abstände in Strömungsrichtung Δx dargestellt.

Bei einer Auftragung gegen Δx und Δt entspricht die Richtung $\Delta x/\Delta t$ einer Geschwindigkeit. Die Richtung der mittleren Geschwindigkeit zum jeweiligen Wandabstand ist daher in den folgenden Abbildungen als grüne Linie eingetragen.

In Schnitten entlang der Δt -Achse in Abbildung 3.10 ist eine deutliche Asymmetrie zu erkennen (Abb. 3.11), die deutlich vom Wandabstand y abhängt. Um diese Asymmetrie zu verdeutlichen, ist ebenfalls das Asymmetriemaß Q_{vu} aufgetragen.

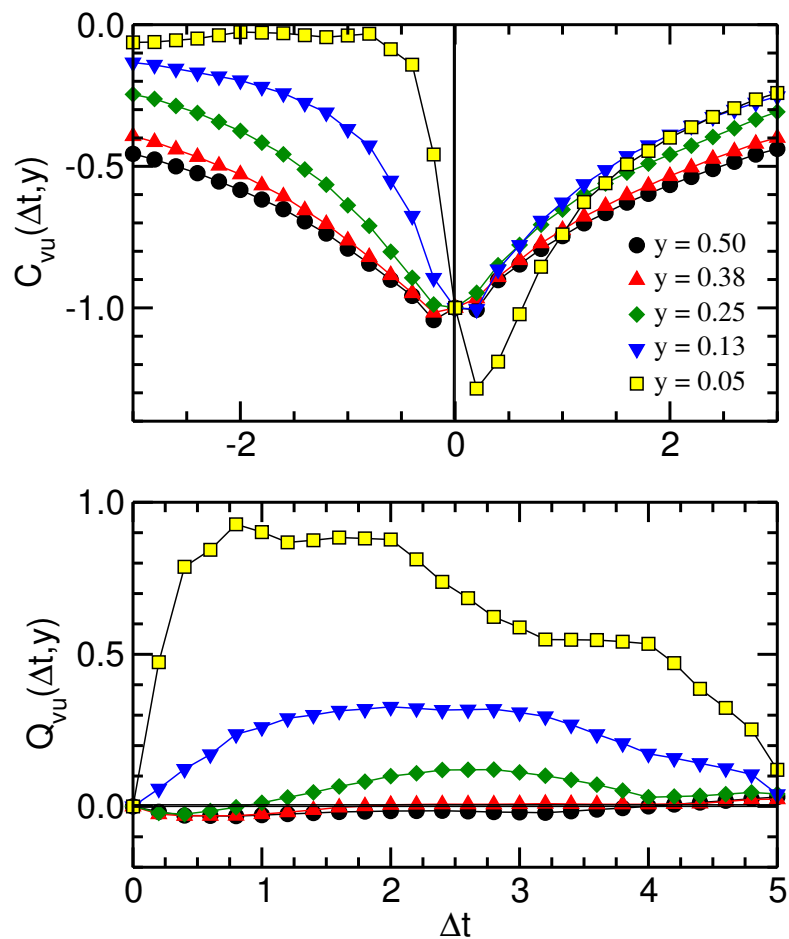


Abbildung 3.11: Schnitt durch Abbildung 3.10 entlang der Δt -Achse für verschiedene Höhen y . *oben*: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, y)$, *unten*: Asymmetriemaß Q .

In Wandnähe zeigt die Kreuzkorrelation eine deutliche, positive Asymmetrie

(gelbe und blaue Kurve in Abb. 3.11), wie sie vom Modell von Eckhardt & Pandit (Kap. 1.3.4) vorhergesagt wird.

Zur Volumenmitte hin fällt die Asymmetrie deutlich ab. Das Minimum verbreitert sich zu leicht negativen Δt und die Korrelationen fallen für $\Delta t < 0$ etwas langsamer als für $\Delta t > 0$ ab, woraus eine minimal negative Asymmetrie resultiert.

In Abbildung 3.12 ist die maximale Asymmetrie aus jeweils den ersten 12 Punkten der Kurven als Funktion des Wandabstandes geplottet. Gemäß der Idee, die Asymmetrie als Maß für die Wechselwirkung von Wirbeln und Streaks zu verwenden, läßt sich aus der Auftragung von $\max|Q|$ die Dicke der Grenzschicht ablesen, in der die Streaks entstehen.

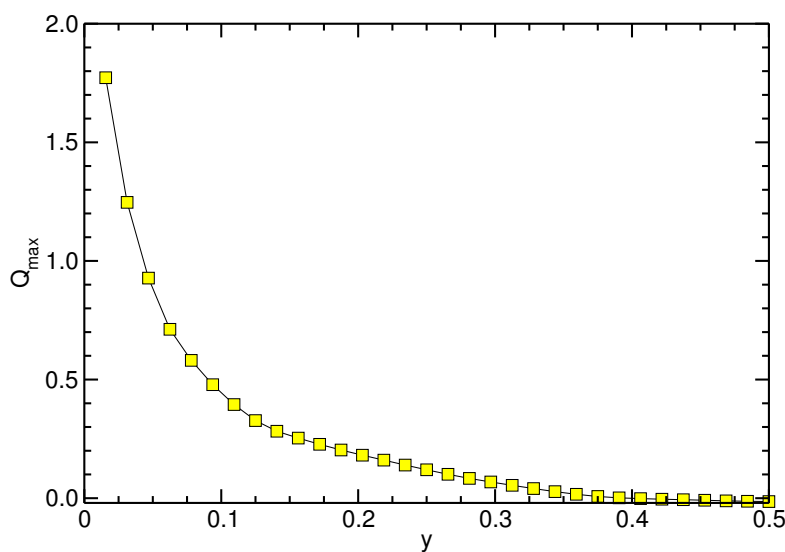


Abbildung 3.12: Maximale Asymmetrie von $C_{vu}(\Delta t)$ in Abhängigkeit vom Wandabstand, dabei verschiebt sich der Punkt maximaler Asymmetrie in Abhängigkeit des Wandabstands zu etwas größeren Zeiten Δt .

3.2.1 Autokorrelationen

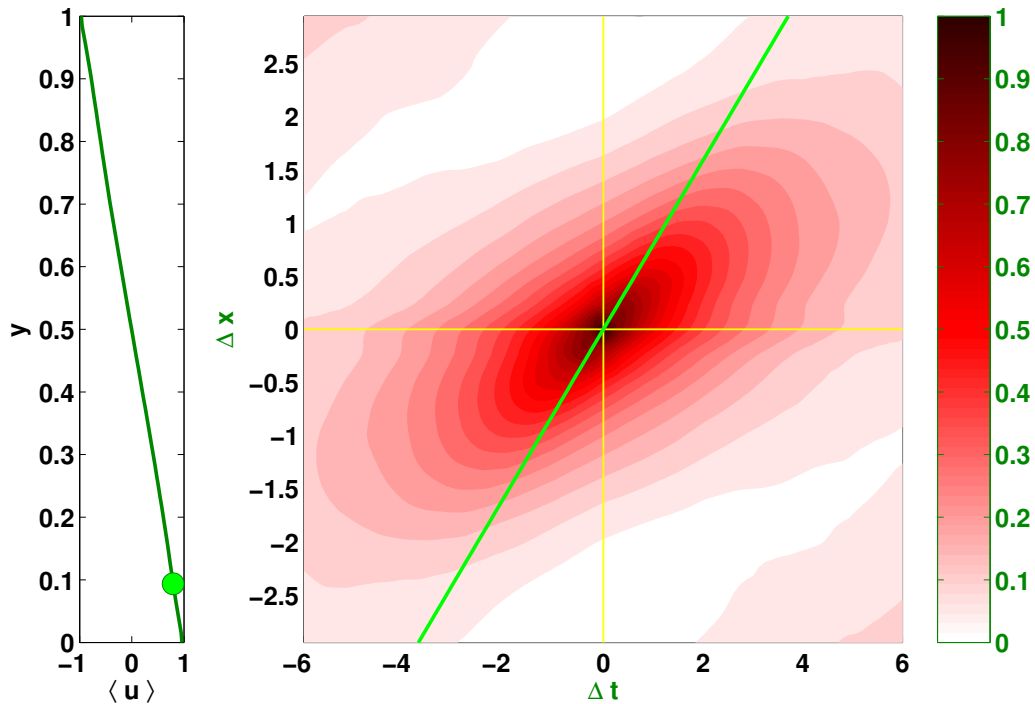


Abbildung 3.13: Autokorrelation $C_{uu}(\Delta t, \Delta x)$ in der numerischen Simulation I. (Film)

Im Gegensatz zur Kreuzkorrelation sollten die Autokorrelationen in Strömungs- und Wandnormalenrichtung symmetrisch sein.

(Für die Korrelation einer Geschwindigkeitskomponente zu zwei willkürlichen Zeitpunkten t_i und t_j mit $\Delta t = t_i - t_j$ gilt offensichtlich $\langle u(t_i)u(t_j) \rangle = \langle u(t_i)u(t_i + \Delta t) \rangle = \langle u(t_j)u(t_j - \Delta t) \rangle = \langle u(t_j)u(t_i) \rangle$.)

Sowohl die Korrelation der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung (s. Abb. 3.13) als auch die Korrelation in Wandnormalenrichtung (s. Abb. 3.14) zeigen keine Asymmetrie.

In den Abbildungen 3.10, 3.13, 3.14 ist zu erkennen, dass die Neigung der Korrelationen systematisch kleiner ist als die mittlere Geschwindigkeit. (Beim Betrachten der jeweiligen Filme² ist zu sehen, wie sich die Struktur in Abhängigkeit

²In der elektronischen Version dieser Arbeit auf der beigefügten CD, startet ein Film beim

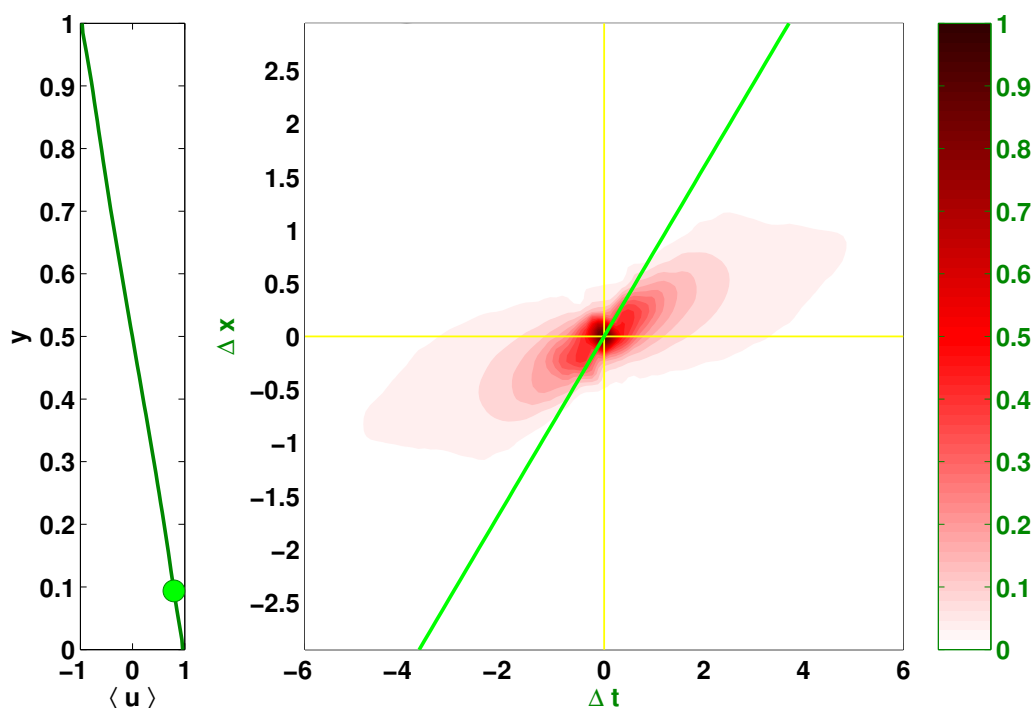


Abbildung 3.14: Autokorrelation $C_{vv}(\Delta t, \Delta x)$ in der numerischen Simulation I. (Film)

der Höhe y mit der Richtung der mittleren Geschwindigkeit dreht.) In Abbildung 3.15 sind die Neigungen³ der Kreuz- und Autokorrelationen in Abhängigkeit vom Wandabstand aufgetragen.

Der einheitliche Neigungswinkel der Korrelationsfunktionen zeigt, dass es in dem

Anklicken der Grafiken

³Die Winkel wurden analog zur Berechnung der Hauptträgheitsachsen eines Körpers bestimmt. Die Korrelation C wurde dabei als Dichte einer zweidimensionalen Scheibe aufgefasst und durch Integration über die Fläche der zugehörige Trägheitstensor und dessen Hauptachsen bestimmt. Der aufgetragene Winkel entspricht der Neigung der Hauptträgheitsachse zum kleineren Trägheitsmoment in Relation zur Abszisse. Da die Konturlinien der Korrelationsfunktionen nicht exakt konzentrische Ellipsen sind, und sich die Neigung vom Zentrum nach außen geringfügig zu ändern scheint, hat die Wahl eines C_0 , so dass nur über die Fläche mit $C(\Delta t, \Delta x) > C_0$ integriert wird, einen leichten Einfluss auf den berechneten Winkel. Da bei der Berechnung von Trägheitsmomenten der Abstand vom Ursprung quadratisch eingeht, ist nicht auszuschließen, dass die kleinen Korrelationen bei größeren Abständen den berechneten Winkel etwas mehr beeinflussen, als es dem visuellen Eindruck entspricht.

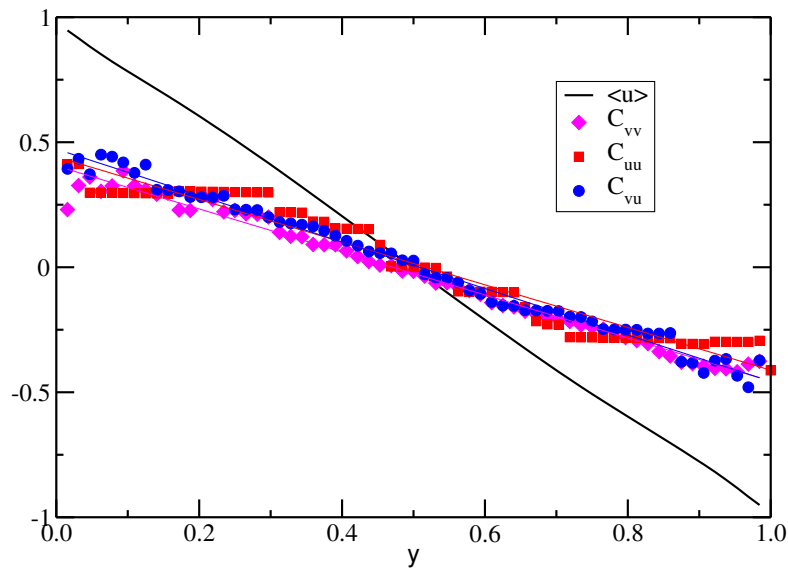


Abbildung 3.15: Neigung der zeitlich-räumlichen Korrelation, *schwarz*: $\langle u \rangle \approx 0.99 - 1.98y$, *blau*: $C_{vu} \approx 0.47 - 0.93y$, *rot*: $C_{uu} \approx 0.44 - 0.85y$, *magenta*: $C_{vv} \approx 0.41 - 0.86y$

System ausgeprägte Strukturen geben muss, die sich langsamer als mit der aus den Daten berechneten mittleren Geschwindigkeit bewegen.

Dies wirft die Frage auf, ob bei Anwendung der Taylorschen Hypothese (Kap. 1.4) mit der mittleren oder einer irgendwie anders aus dem System abgeleiteten Geschwindigkeit gearbeitet werden sollte.

3.2.2 Auswirkungen der Konvektionsgeschwindigkeit auf Korrelationsfunktionen

Da die Kreuzkorrelationen in Wandnähe am meisten Struktur zeigen, ist in Abbildung 3.16 die Struktur der Korrelation in der Höhe $y = 0.05$ bzw. $y^+ = 2.1$ dargestellt. Außerdem sind die Richtungen der mittleren und der Konvektions-Geschwindigkeit eingezeichnet.

Beim Blick auf Abbildung 3.16 stellt sich die Frage, ob zur Betrachtung eines eindimensionalen Schnitts (Abb. 3.11) durch die Struktur eine Richtung besonders sinnvoll oder ausgezeichnet ist.

Hierzu vorab ein paar Erläuterungen zur Datengenerierung und Berechnung der Struktur. Durch die Scherung in der Simulation ergibt sich höhenabhängig eine mittlere Geschwindigkeit (Abb. 3.15). Zur Berechnung der Korrelationen wurden

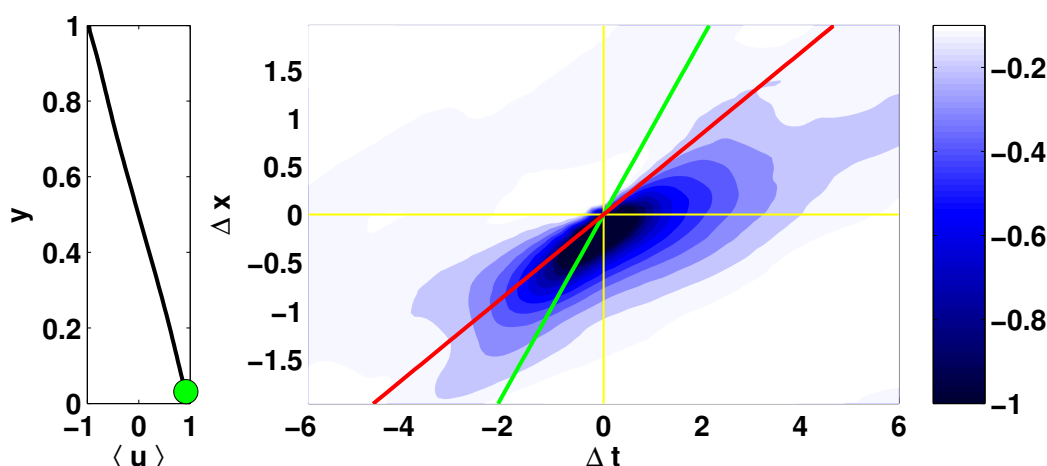


Abbildung 3.16: Kreuzkorrelation nahe der Wand bei $y = 0.05$ bzw. $y^+ = 2.1$, Simulation I. *grüne Linie*: Richtung der mittleren turbulenten Geschwindigkeit, *rote Linie*: Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit.

dann zu jedem Aufpunkt⁴ nach Gleichung 1.7 durch Subtraktion des mittleren turbulenten Profils die Fluktuationen berechnet und diese dann miteinander korreliert. Das bedeutet, in gewisser Weise sind die Strukturen an dem jeweiligen Punkt, an dem die Korrelation berechnet wurde, vorbeigeschwommen. Daher ist es nicht erstaunlich, dass die Korrelation am langreichweitigsten ist, wenn sie mit einem räumlichen Versatz $\Delta x = \tilde{U} \Delta t$ bezüglich der Konvektionsgeschwindigkeit \tilde{U} der kohärenten Strukturen berechnet wird.

Diese Methode entspricht einer Messung der Geschwindigkeit an einem festen Punkt im Windkanal (Kap. 2.5), wo die Strukturen auch an der Messsonde vorbeiziehen. Aus dem Signal wird die mittlere Geschwindigkeit berechnet und dann die Korrelation der Fluktuationen berechnet (Kap. 3.5). Diese mittlere Geschwindigkeit wird bei Anwendung der Taylorschen Hypothese (Kap. 1.4) genutzt, um zeitliche Abstände in räumliche umzurechnen.

Abbildung 3.16 zeigt, dass in diesem System bei einem Turbulenzgrad⁵ von $\sqrt{\langle u^2 \rangle} / U = 32\%$ in Randnähe ein signifikanter Unterschied zwischen der mittleren turbulenten und der Konvektions-Geschwindigkeit besteht. Abbildung 3.17 zeigt die Asymmetrie der Kreuzkorrelation in Richtung der mittleren Geschwindigkeit und in Abbildung 3.18 ist die Asymmetrie in Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit dargestellt.

⁴In den Simulationen wurde anschließend über wandparallele Ebenen (x, z) gemittelt.

⁵berechnet in Randnähe

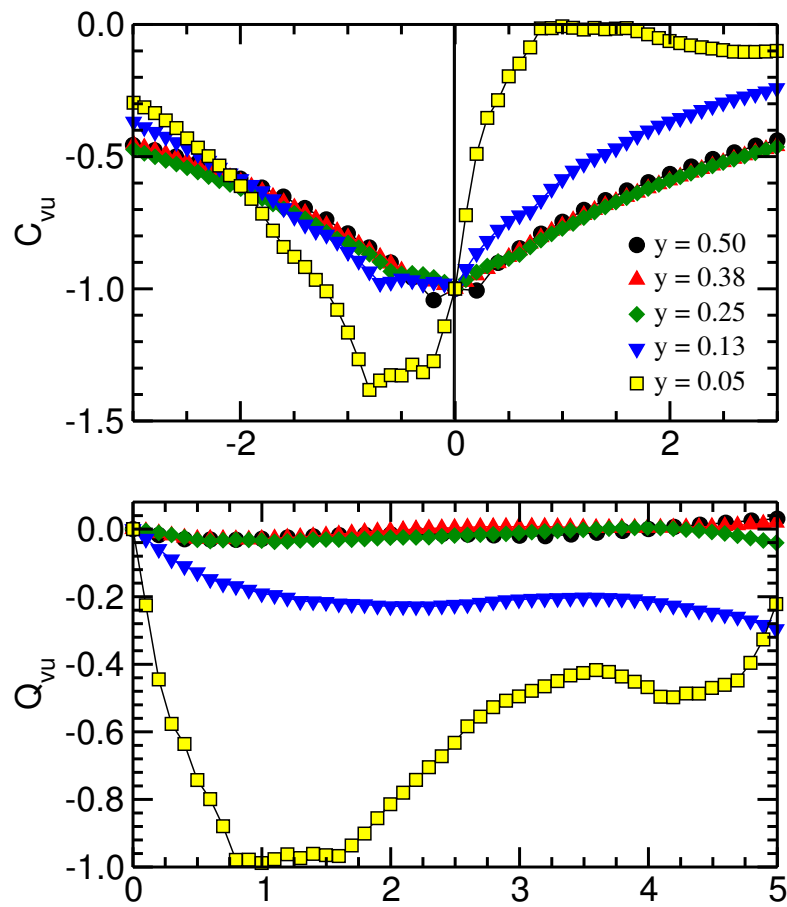


Abbildung 3.17: Korrelationen in Richtung der mittleren Geschwindigkeit, grüne Linie in Abbildung 3.16

Mit Interpretation der Neigung der Korrelationsfunktion als Konvektionsgeschwindigkeit ist auch klar, warum die Korrelationen aller Komponenten die gleiche Neigung aufweisen (Abb. 3.15). Die kohärenten Strukturen werden als Ganzes von der Strömung transportiert. Das betrifft die Wirbel genauso wie die Streifen.

Die Ursache für die verringerte Konvektionsgeschwindigkeit ist wohl in einer sehr effektiven Durchmischung des Scherprofils durch Wirbel in Wandnähe zu suchen. Daher wird in Kapitel 3.2.3 die räumliche Ausdehnung der Strukturen weiter untersucht.

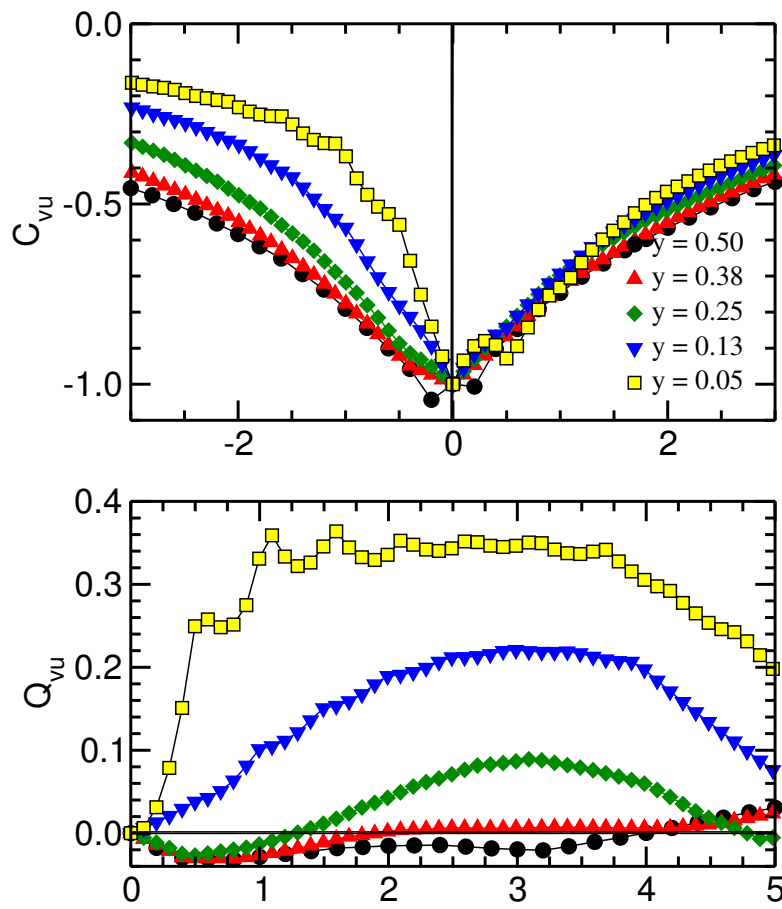


Abbildung 3.18: Korrelationen in Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit, rote Linie in [Abbildung 3.16](#)

3.2.3 Räumliche Korrelationen

Die Ursache für den Neigungswinkel der zeitlichen-räumlich Korrelationen muss in Asymmetrien des Systems — durch den Einfluss der Wände auf die Strömung oder das mittlere Scherprofil — begründet sein.

Die räumliche Ausdehnung der kohärenten Strukturen spiegelt sich im Abfall der Korrelationen in Strömungs- und Wandnormalenrichtung wieder.

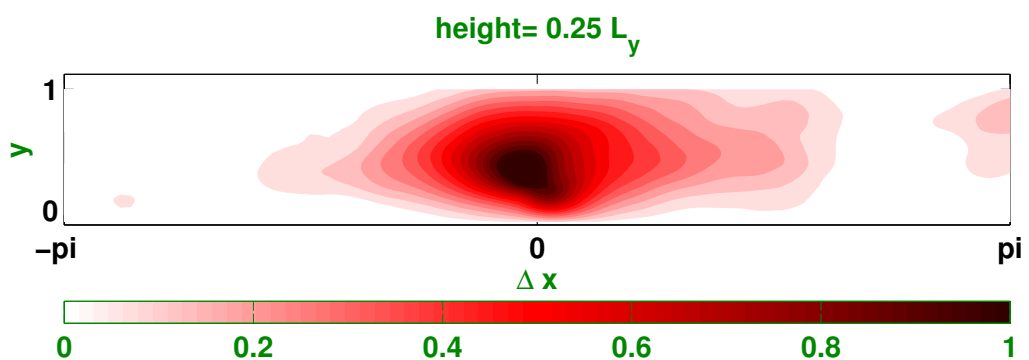


Abbildung 3.19: Neigung der Kreuzkorrelation C_{vu} , Simulation I. (*Film*)

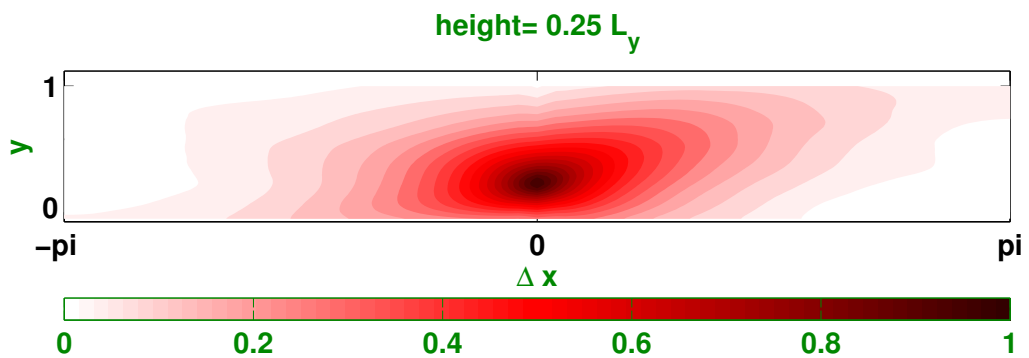


Abbildung 3.20: Neigung der Autokorrelation C_{uu} , Simulation I. (*Film*)

Für den Neigungswinkel der zeitlichen-räumlich Korrelationen kann es zwei Gründe geben, deren Natur jeweils im Einfluss der Wände auf die Strukturen und damit

das Mischen von Schichten des Scherprofils zu suchen ist.

1. Asymmetrische Durchmischung

Durch den Einfluss der Ränder sind die Korrelationen in Wandnormalenrichtung nicht symmetrisch (s. Abb. 3.21). Durch die unterschiedliche Reichweite der kohärenten Strukturen vom Aufpunkt in Richtung zur Wand und zur Mitte des Volumens, wäre es denkbar, dass die Strukturen in ihrem Einflussbereich das Scherprofil durchmischen und so eine im Vergleich zum mittleren Profil kleinere Geschwindigkeit erzeugen.

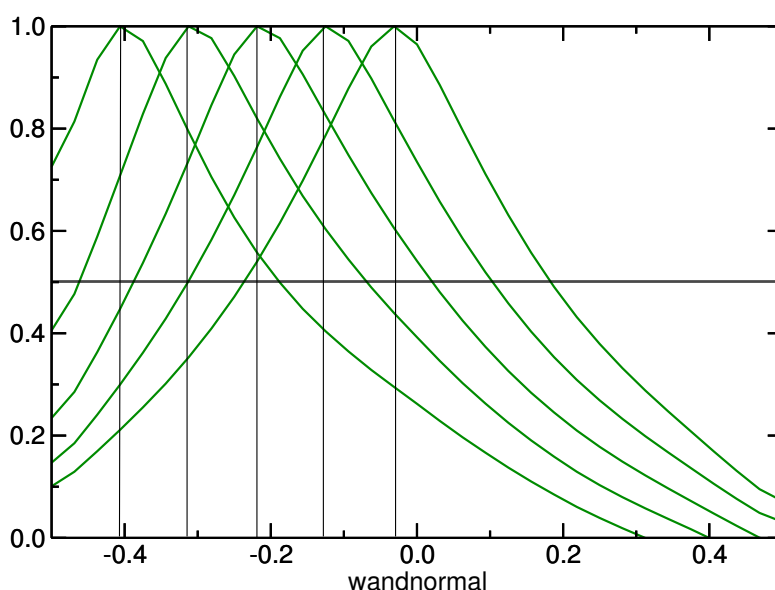


Abbildung 3.21: Die Autokorrelation $C_{uu}(\Delta y, y)$ fällt, je nach Abstand zur Wand, unterschiedlich schnell in Richtung zur Wand und in Richtung zur Volumenmitte ab.

(a) Mit $C_{uu}(y)$ gewichtete Mittelung

Die Geschwindigkeit der kohärenten Strukturen \tilde{U} wird als

$$\tilde{u}(y) = \frac{1}{L_{C_0}} \int_{C > C_0} C_{uu}(y + y') U(y') dy' \quad (3.8)$$

berechnet. Dabei ist L_{C_0} die (asymmetrische) Breite der Korrelationsfunktion, bis sie auf den Wert C_0 abgefallen ist. Die Asymmetrie von $C(y)$ verursacht $\tilde{U} < U$. Da $C(y)$ als Gewicht benutzt wird, tragen weit entfernte Geschwindigkeitsschichten weniger bei als die in der

betrachteten Höhe y ; dies kann den Effekt der Asymmetrie der Korrelationsfunktionen auf die Mittelung der Geschwindigkeiten vermindern. In Abbildung 3.24 sind die resultierenden Kurven für $C_0 = 0.5$ und $C_0 = 0.0$ dargestellt.

(b) **Einfache Mittelung über die Halbwertsbreite von $C_{uu}(y)$**

Die Mittelung der Geschwindigkeit über die Länge, über die die Korrelation $C_{uu}(y)$ auf $1/2$ oder $1/e$ abfällt

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b U(y') dy' & (3.9) \\ \{a, b\} &: C(a) = C(b) = 1/2C(y_0), a \neq b \end{aligned}$$

ist in Abbildung 3.24 als rote Kurve eingezeichnet.

2. Wahrscheinlichste Geschwindigkeit

Auch wenn das mittlere Profil perfekt zur durch den Antrieb vorgegebenen Scherung passt, könnte es sein, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen nicht symmetrisch ist und damit mittlerer und wahrscheinlichster Wert nicht identisch sind. In dem Fall könnte sich in der Neigung der Strukturen die wahrscheinlichste Geschwindigkeit widerspiegeln.

In Abbildung 3.22 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung in Abhängigkeit des Wandabstandes y aufgetragen. Da es nur die Geschwindigkeitsfluktuationen sind — der Mittelwert wurde schon abgezogen — sollte sich eine um Null zentrierte Kurve ergeben. Es ist jedoch ein Trend zu erkennen, so dass der wahrscheinlichste Wert um ca 10% von der mittleren Geschwindigkeit abweicht; dies ist in Abbildung 3.24 als blaue Kurve eingezeichnet. Da die Maxima ein wenig fluktuieren, wurde ergänzend eine Ausgleichsgerade eingezeichnet.

Vergleich der Kurven

- Dass die wahrscheinlichsten Fluktuationen größer als das sich ergebende mittlere Profil und in Richtung der Antriebskraft sind, spiegelt nach Eckhardt & Schumacher [52] die Energieaufnahme der Strömung durch den Antrieb wider. Zur Erklärung der Neigung der Korrelationen ist diese Beobachtung aber nicht geeignet.
- Die Mittelung über die typische Ausdehnung der kohärenten Strukturen nach Gl. 3.8 liefert zwar Geschwindigkeiten, die kleiner als die mittlere

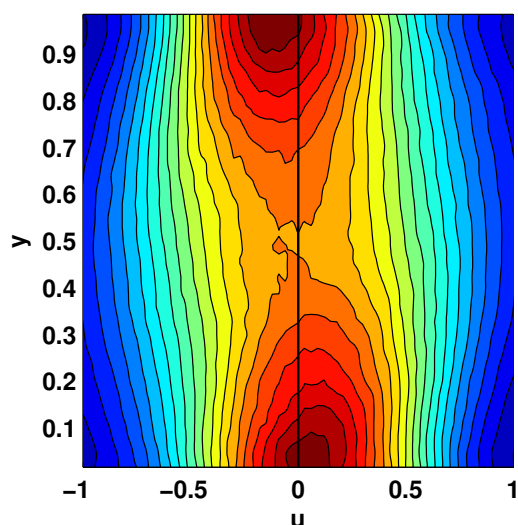


Abbildung 3.22: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung in Abhängigkeit des Wandabstandes.

sind, aber bei Abfall der Korrelation auf ihren halben Wert ist dieser Effekt zu klein. Erst wenn die gesamte Korrelationsbreite beim gewichteten Mittel berücksichtigt wird, wird die ermittelte Geschwindigkeit so klein ($\arctan(\tilde{u}) = 30^\circ$), dass sie die in den Korrelationen beobachtete Neigung ($\varphi \approx 25^\circ$) erklären kann.

- Die Autokorrelation C_{uu} ist quadratisch in u und es ergeben sich sowohl bei der Mittelung über die Halbwertsbreite der Korrelationen als auch bei der durch $C > 1/2C_0$ gewichteten Mittelung für die so erhaltenen Profile (s. Abb. 3.24) Werte am Rand von $\tilde{u} \approx \pm 0.8$.

Da in die Autokorrelation die Geschwindigkeit quadratisch eingeht, ist für sie $C_{uu} \sim \tilde{u}^2 \approx 0.64$ zu erwarten. Dem entspricht ein Winkel von ungefähr 32° , was dem Befund aus Abbildung 3.15 sehr nahe kommt.

Auf jeden Fall scheinen die Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung, die doppelt so groß wie die Fluktuationen der anderen Komponenten sind (Abb. 2.2), wesentlich für die verminderte Konvektionsgeschwindigkeit \tilde{u} verantwortlich zu sein.

Da die kohärenten Strukturen als ganzes mit dieser Geschwindigkeit bewegt werden, müssen auch die übrigen Korrelationen C_{vu} , C_{uv} die gleiche Neigung haben. Dies ist in Abbildung 3.15 zu sehen.

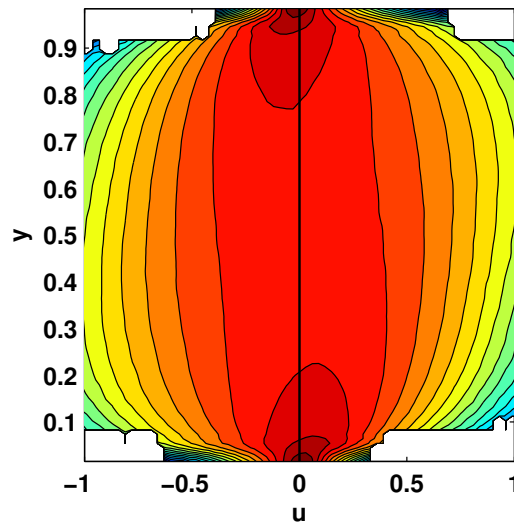


Abbildung 3.23: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnormalenrichtung in Abhängigkeit des Wandabstandes, die Wahrscheinlichkeiten wurden logarithmiert.

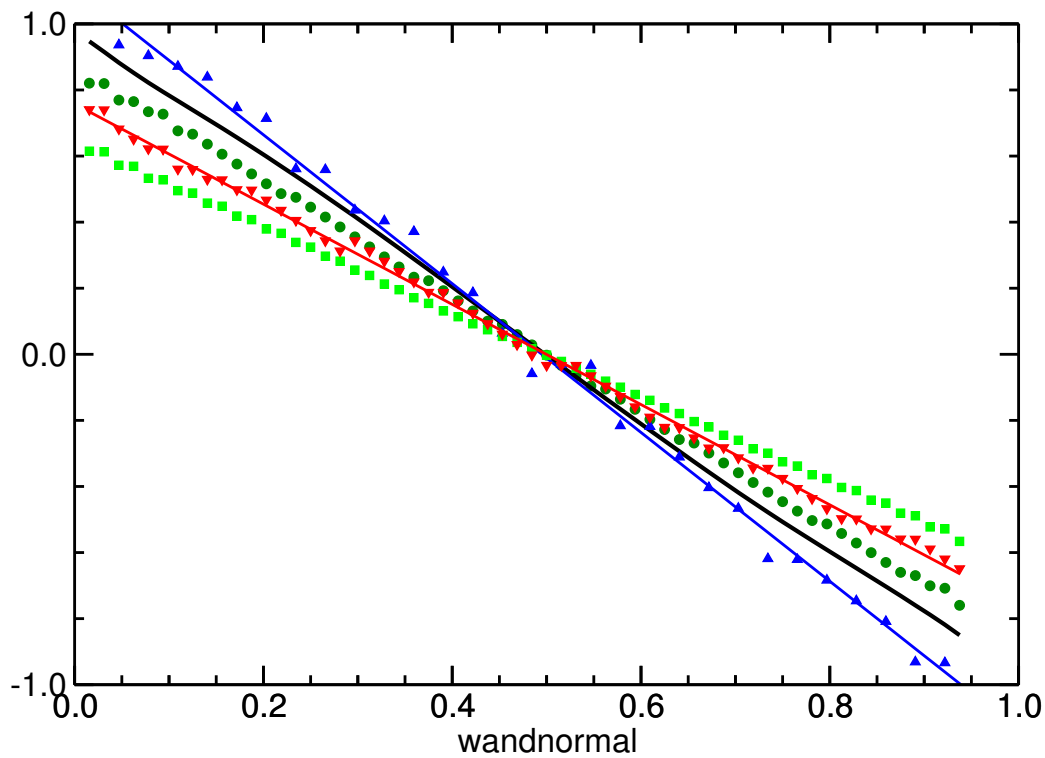


Abbildung 3.24: Mögliche mittlere Geschwindigkeitsprofile. — statistische mittlere Geschwindigkeit $U = \langle v_x \rangle$, ▲ häufigste Geschwindigkeit, ● Mittelung nach Gl. 3.8 mit $C_0 = 0.5$, ■ Mittelung nach Gl. 3.8 mit $C_0 = 0.0$, ▼ Mittelung nach Gl. 3.10

3.2.4 Neigung der räumlichen Korrelationen

In Abbildung 3.20 ist zu beobachten, dass die räumlichen Korrelationen in Strömungsrichtung leicht angestellt sind. Im Mittel ergibt sich ein Winkel von etwa 8° für $C_{uu}(\Delta x, \Delta y)$ (s. Abb. 3.25).

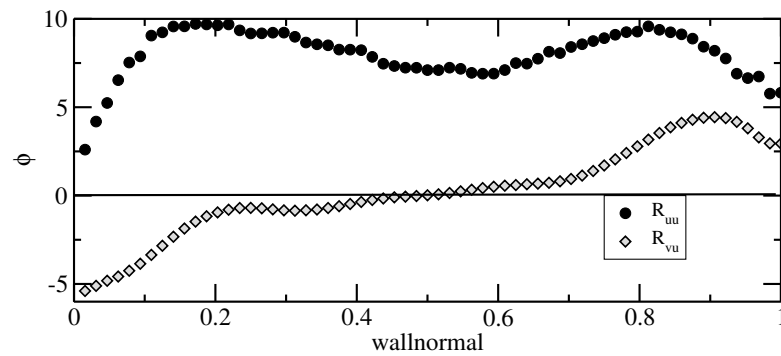


Abbildung 3.25: Neigungswinkel der räumlichen Korrelationen C_{uu} (●) und C_{vu} (◇) als Funktion des Wandabstands.

3.2.5 Numerische Simulation mit höherer Auflösung

Zu Vergleichszwecken wurde eine Simulation II. (Tab. 2.1) mit verdoppelter Auflösung in jeder Raumrichtung durchgeführt. Wie in Abbildung 3.10 ist die Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, \Delta x)$ (Abb. 3.26) deutlich geneigt, wobei die mit der Neigung verbundene Konvektionsgeschwindigkeit kleiner als die mittlere Geschwindigkeit (grüne Linie) ist.

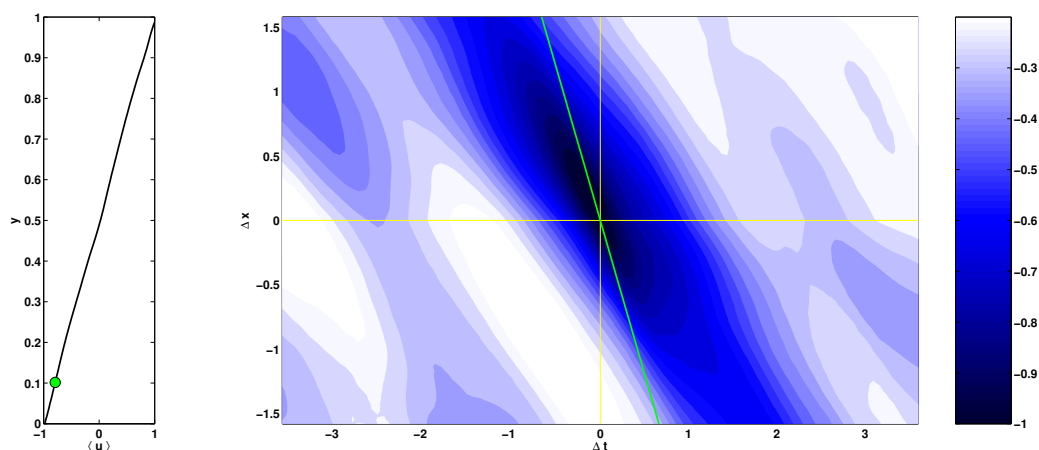


Abbildung 3.26: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, \Delta x)$ aus Simulation II. mit hoher Auflösung.

In Abbildung 3.27 sind wieder die Korrelationen in Richtung der Δt -Achse und deren Asymmetrie dargestellt. Für kurze Korrelationszeiten $\Delta t < 1.5$ gleichen diese Kurven denen aus Abbildung 3.11. Für größere Zeiten zeigt die Korrelation in Randnähe deutlich mehr Strukturen (Abb. 3.26) als die bisher betrachteten. Dies mag einerseits daran liegen, dass die Simulation in Wandnormalenrichtung besser aufgelöst ist und der Plattenabstand größer ist, so dass das Fluid mehr Raum hat, Strukturen zu entwickeln, andererseits ist die Trajektorie dieser Simulation vergleichsweise kurz und die Statistik der Korrelation damit schlecht⁶.

Auch in dieser Simulation ist das Minimum der Kreuzkorrelation leicht in Strömungsrichtung verschoben.

⁶Es ist immer zwischen einer guten räumlichen Auflösung und guter zeitlicher Statistik durch eine lange Zeitreihe abzuwägen.

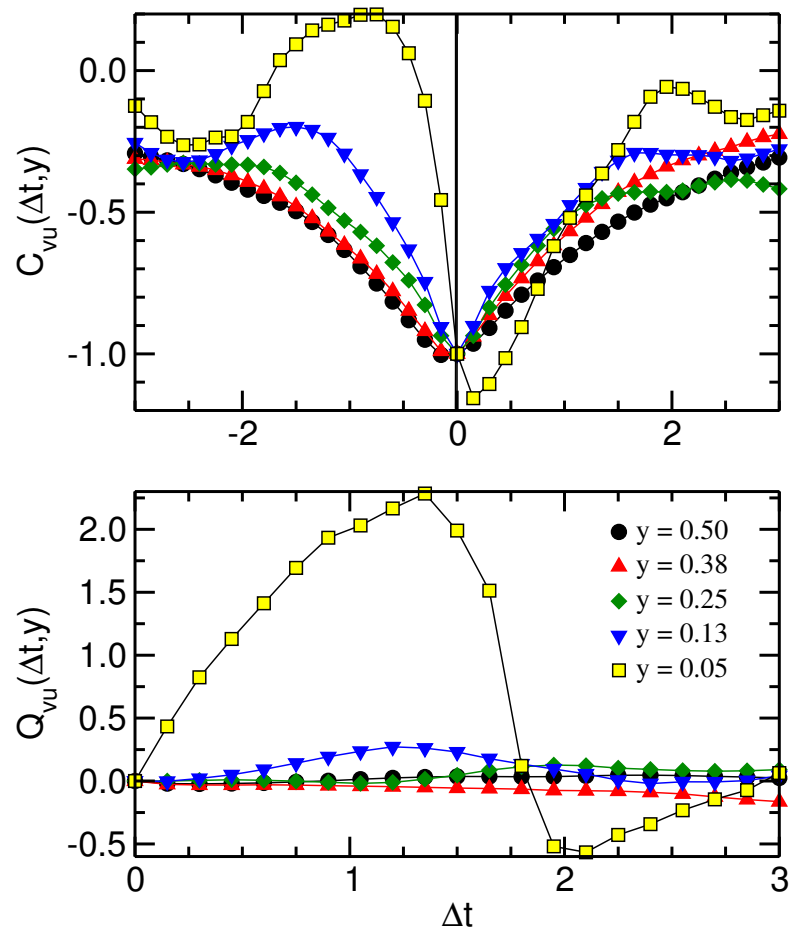


Abbildung 3.27: Simulation II. mit hoher Auflösung. *oben*: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, y)$, *unten*: Asymmetriemaß Q .

3.2.6 Diskussion der Strukturen in der Simulation

Die durchgeführten Simulationen zeigen, dass der Effekt der Asymmetrie von Kreuzkorrelationen durch die nichtnormalen Verstärkung in Wandnähe auch bei Systemen mit realistisch vielen Freiheitsgraden zu beobachten ist.

Aus der Neigung der Korrelationen gegenüber der Zeitachse lässt sich die Konvektionsgeschwindigkeit der kohärenten Strukturen ablesen (Abb. 3.10). Diese ist in diesen Simulationen mit konstanter Scherung überall etwa halb so groß wie die mittlere Geschwindigkeit.

Es zeigt sich, dass die Asymmetrie der Kreuzkorrelation, berechnet in Richtung der Zeitachse und in Richtung Konvektionsgeschwindigkeit zu qualitativ gleicher

Asymmetrie führt. Allerdings ist die Korrelation in Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit breiter, fällt zu beiden Seiten sanft ab und das Asymmetriemaß Q zeigt ein ausgeprägtes Plateau, da der steile Anstieg bei $\Delta t < 0$ nicht durchlaufen wird (weißer Fleck in Abb. 3.26). Zum Studium der Asymmetrie von Kreuzkorrelationen in Scherströmungen wäre es also geschickter, die Struktur in Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit zu vermessen. Da diese Richtung⁷ aber a priori nicht bekannt ist und in Experimenten mit feststehender Sonde zwangsläufig immer in Richtung der Δt -Achse gemessen wird, werden im Rest der Arbeit die Korrelationen auch immer in dieser Richtung verglichen.

In Analogie zu den Wandeinheiten für die Windkanalmessungen lässt sich für die Simulationen eine Länge aus der konstanten Scherung $S = 2$ und der Viskosität $\nu = 10^{-3}$ bestimmen:

$$\delta_\nu = \sqrt{\frac{\nu}{S}} = 0.022 \quad (3.10)$$

Daraus ergeben sich normierte Wandabstände von $y^+ = 0.7$ für den wandnächsten Punkt und $y^+ = 22$ bei halbem Plattenabstand. In der hochaufgelösten Simulation mit $S = 6/\pi$ ergeben sich immerhin Werte von bis zu $y^+ = 53$.

Im Vergleich zu anderen Experimenten und Simulationen (Kap. 1.4.1) ist das eher gering. Eine mehrfach genannte Abschätzung für den Grenzschichtbereich, in dem die Streifen entstehen ist $y^+ < 60$. Würde dies auf die hier präsentierte Simulation zutreffen, sollte der Prozess der nichtnormalen Verstärkung im gesamten Volumen stattfinden. In vielen Arbeiten wird versucht, die Ausdehnung der kohärenten Strukturen mit dem drastischen Anstieg der Scherung zur Grenzfläche hin in Zusammenhang zu bringen, aber ein einheitlicher Zusammenhang ist nicht zu finden. Die Besonderheit der hier durchgeführten Simulation besteht in den reibungsfreien Randbedingungen. Es wird kein Impuls auf die Wände übertragen und die Scherung bleibt bis zum Rand konstant und damit einige Größenordnungen kleiner als zum Beispiel in den Winkanalexperimenten (Kap. 2.5).

Aus dem Abfall der Asymmetrie (Abb. 3.12) ist ersichtlich, dass sich auch in diesem System ein Randbereich entwickelt, in dem die nichtnormale Verstärkung aktiv ist. Hier könnte die Asymmetrie der Kreuzkorrelation tatsächlich als Maß

⁷Bei Betrachtung der Korrelationen in Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit ist auf der Abszisse eine Mischung aus Raum und Zeit $\sqrt{\Delta t^2 + \Delta x^2}$ aufgetragen. Um das Einheitenproblem zu umgehen, könnte zwar die Zeitachse mit einer typischen Geschwindigkeit in Längen umgerechnet werden, aber die mittlere turbulente Geschwindigkeit ist hierzu nicht geeignet, da sie in dem hier betrachteten System in der Mittelebene Null ist und in Scherströmungen über Grenzflächen bei Annäherung an diese gegen Null geht. Einen Ausweg könnte hier eine systeminhärente Geschwindigkeit wie $u_\tau = \sqrt{S\nu}$ sein, wodurch sich die Achsenskalierungen in diesem System um 2 Größenordnungen unterscheiden würden.

dienen, um die Dicke der Schicht, in der die nichtnormale Verstärkung aktiv ist, zu bestimmen.

Der Umstand, dass sich diese Grenzschicht auch in unserer Simulation mit konstanter Scherung und vergleichsweise kleinen Reynoldszahlen⁸ ausbildet, legt den Schluss nahe, dass für die Dicke dieser Grenzschicht weniger systemtypische Größen wie die Reynoldszahl oder die Scherung ausschlaggebend sind, sondern viel eher der begrenzende Einfluss der Ränder auf die Fluktuationen, insbesondere in Wandnormalenrichtung, und damit die Reynoldsche Scherspannung $\langle uv \rangle$ die entscheidende Rolle spielt.

Ob der Prozess der nichtnormalen Verstärkung in der Mitte des Volumens nicht aktiv ist oder nur durch andere Strukturen, die zu dem etwas langsameren Abfall der Kreuzkorrelationen für $\Delta t < 0$ führen, überlagert wird, ist aus den hier durchgeführten Analysen nicht ersichtlich. Die streifenähnlichen Strukturen in Abbildung 2.5 erscheinen sich jedenfalls mehr oder weniger über den gesamten Plattenabstand y zu erstrecken.

⁸Obwohl die Simulationen auf den Höchstleistungsrechnern des Forschungszentrums Jülich durchgeführt wurden, reicht die Rechenkapazität heutiger Computer noch nicht aus, um so kleine Gitterauflösungen zu realisieren, dass so hohe Reynoldszahlen wie in Windkanalexperimenten erreicht werden können.

3.3 Korrelationen in viskoelastischer Scherturbulenz

Da die Bildung von Streifen ein wesentlicher Prozess bei der Entstehung von Turbulenz in Scherströmungen ist und für viskoelastische Fluide eine Reduktion des turbulenten Reibungswiderstands beobachtet wird (Kap. 2.3.2), ist es von Interesse zu untersuchen, wie sich gelöste Polymere auf die Bildung solcher Strukturen und die Dicke einer Randschicht, in der die nichtnormale Verstärkung diese Streifen erzeugt, auswirkt.

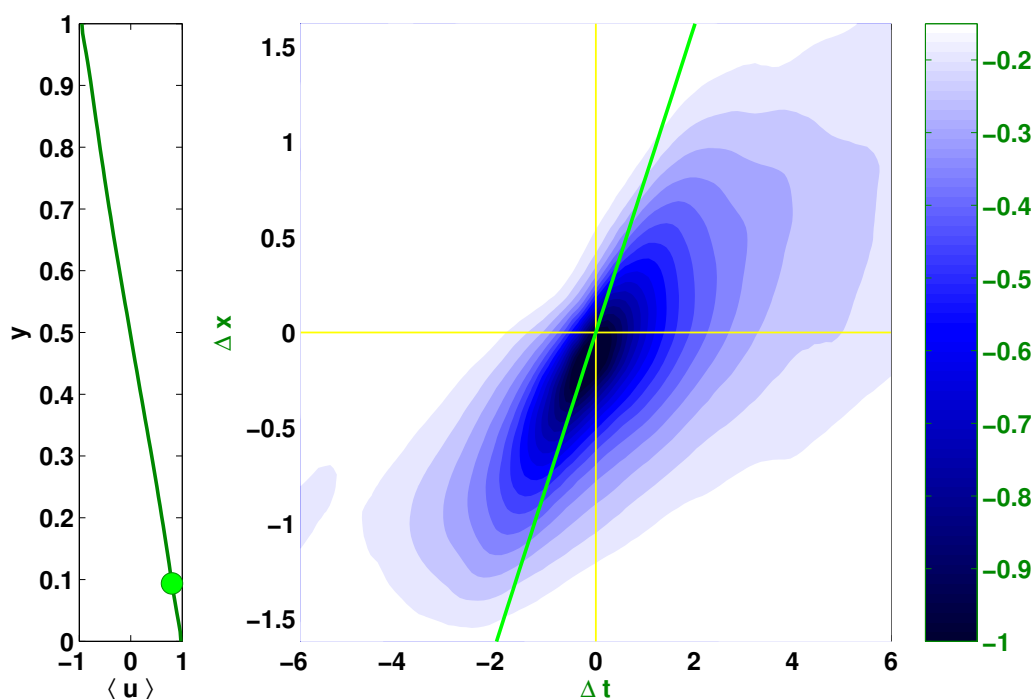


Abbildung 3.28: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, \Delta x)$ in der numerischen Simulation eines viskoelastischen Fluids mit $De = 0.4$, Geometrie wie in Simulation I. (*Film*)¹⁰

Zu diesem Zweck wurden mehrere Simulationen von viskoelastischen Fluiden basierend auf dem Modell Oldroyd B (Kap. 2.3) durchgeführt. Die Geometrie war dabei dieselbe wie in Simulation I. (Tab. 2.1). Es wurde die Newtonsche Viskosität $\nu = 10^{-3}$ vorgegeben und durch eine Volumenkraft die Scherrate $S = 2$ konstant gehalten.

Wie in Abbildung 2.7 zu sehen ist, wirken Polymere, glättend auf die turbulenten

3.3. KORRELATIONEN IN VISKOELASTISCHER SCHERTURBULENZ 75

Strukturen, sobald ihre Relaxationszeit größer ist als eine typische, mit Änderungen des Strömungsfeldes verbundene Zeit (d.h. für $De > 1$).

In Abbildung 2.4 ist für die durchgeführten Simulationen gezeigt, dass bei $De = 0.8$ eine leichte und bei $De = 1.6$ eine deutliche Reduzierung des turbulenten Strömungswiderstandes auftritt.

Die zeitlich-räumlichen Korrelationen zu diesen Simulationen sind in den Abbildungen 3.28, 3.30, 3.32 dargestellt. In den Abbildungen 3.29, 3.31, 3.33 sind dazu jeweils die Schnitte in Richtung der Zeitachse und das jeweilige Asymmetriemaß Q gezeigt.

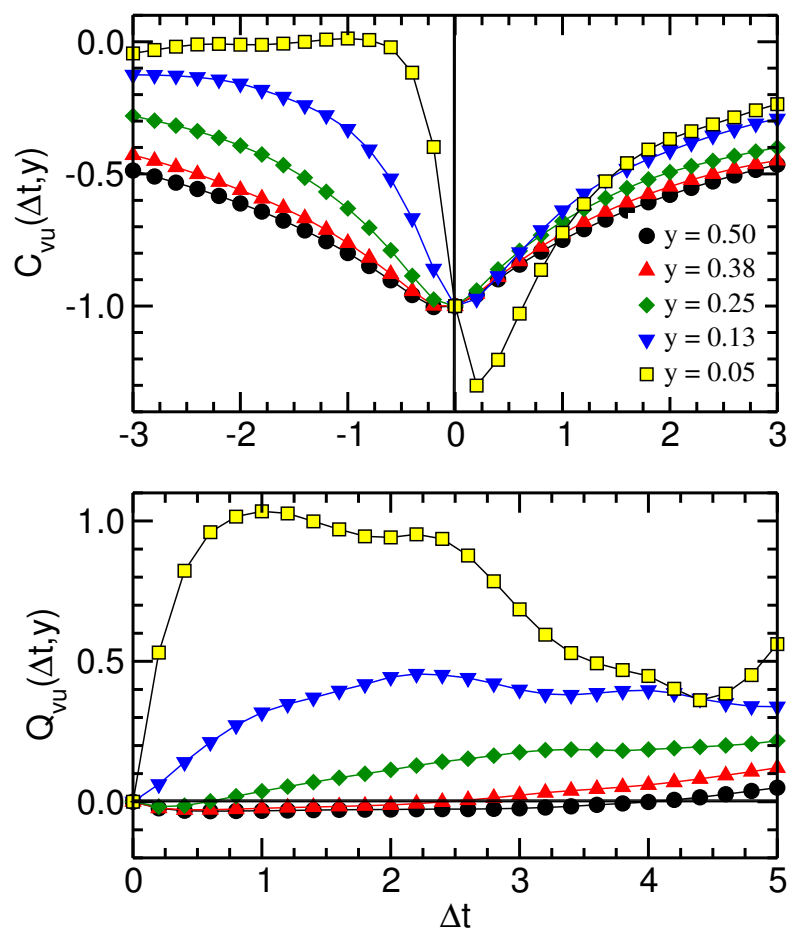


Abbildung 3.29: Scherströmung mit Polymeren bei $De = 0,4$ für verschiedene Höhen y . oben: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, y)$, unten: Asymmetriemaß Q .

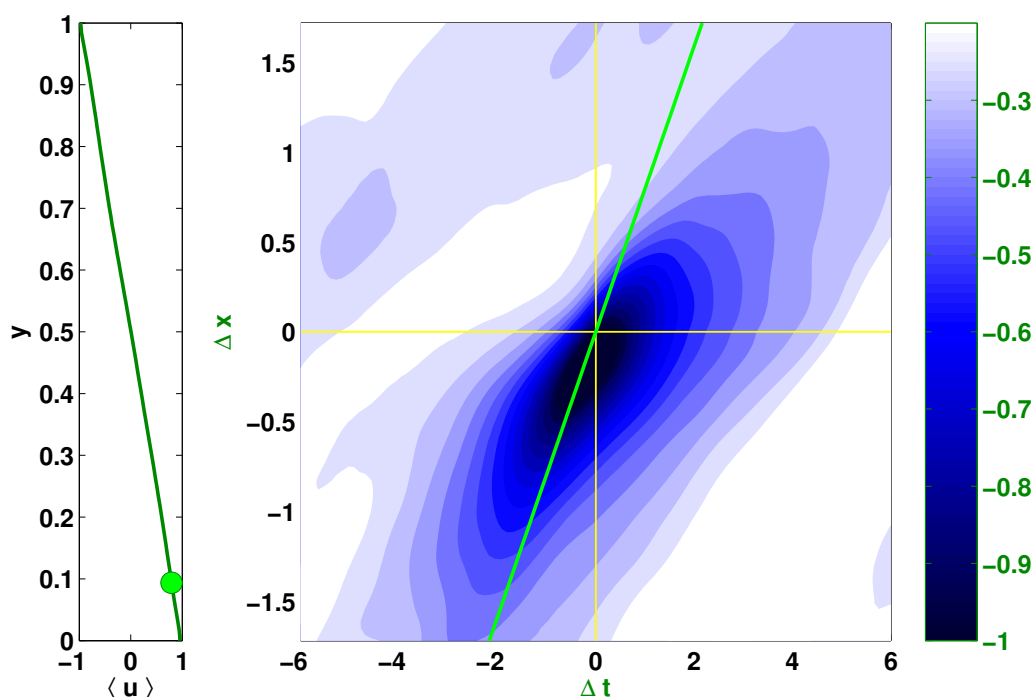


Abbildung 3.30: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, \Delta x)$ in der numerischen Simulation eines viskoelastischen Fluids mit $De = 0.8$, Geometrie wie in Simulation I. (*Film*)¹²

In Abbildung 3.33 sieht es so aus, als wäre die Asymmetrie deutlich kleiner als in Abbildung 3.11 oder 3.29. Dies mag daran liegen, dass bei $De = 1.6$ die Strukturen so ausgedehnt sind (Abb. 2.7), dass für viele Punkte, an denen die Korrelation berechnet wurde, die Strukturen innerhalb der Korrelationszeiten nicht zerfallen. Dies würde erklären, warum die Korrelationen in Abbildung 3.33 nur auf einen endlichen Wert C_0 abfallen.

Durch einen solchen additiven Term durch das Nichtverschwinden der Korrelationen wird das Asymmetriemaß kleiner:

$$\begin{aligned}
 Q_{C_0} &= \frac{(C(\Delta t) - C_0) - (C(-\Delta t) - C_0)}{(C(\Delta t) - C_0) + (C(-\Delta t) - C_0)} & (3.11) \\
 &= \frac{C(\Delta t) - C(-\Delta t)}{C(\Delta t) + C(-\Delta t) - 2C_0} \\
 &< Q
 \end{aligned}$$

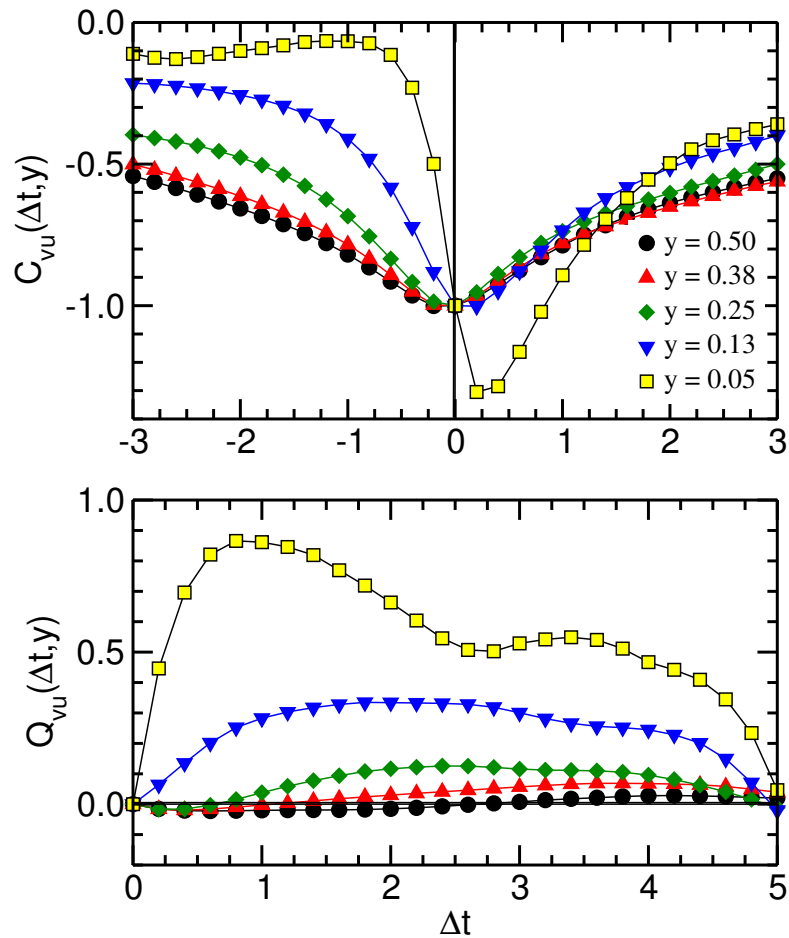


Abbildung 3.31: Scherströmung mit Polymeren bei $De = 0.8$ für verschiedene Höhen y . *oben*: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, y)$, *unten*: Asymmetriemaß Q .

3.3.1 Diskussion der Auswirkungen der Polymere auf die kohärenten Strukturen

Die Kreuzkorrelationen aus den Simulationen bei $De = 0.4$ (Abb. 3.28) und $De = 0.8$ (Abb. 3.30) unterscheiden sich kaum von der Simulation des Newtonschen Fluids (Abb. 3.30). Selbst das Asymmetriemaß ist in Höhe und Breite vergleichbar (Abb. 3.29, 3.31). Lediglich am Minimum der Korrelation bei $De = 0.8$ deutet sich eine leichte Verbreiterung ab.

Obwohl in allen drei Simulationen die Polymere stark gestreckt sind (Abb. 2.6), ist ein deutlicher Effekt auf die Korrelationsfunktion erst bei $De = 0.8$ zu beobachten; in dem Maß wie f (Abb. 2.4) kleiner wird, verbreitert sich das Minimum

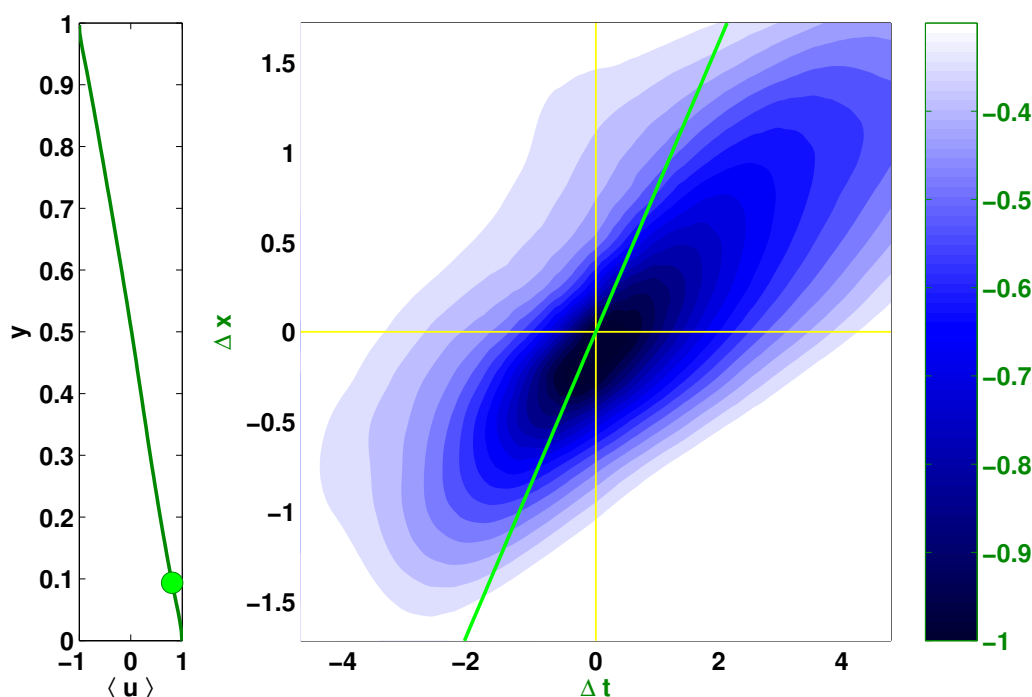


Abbildung 3.32: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, \Delta x)$ in der numerischen Simulation eines viskoelastischen Fluids mit $De = 1.6$, Geometrie wie in Simulation I. (*Film*)¹⁴

von C_{vu} zu $\Delta t > 0$. Die Korrelationen werden insgesamt breiter und fallen nicht mehr ganz auf Null ab.

Um diesen Effekt noch deutlicher zu sehen, wäre es wünschenswert, Simulationen bei noch höheren Deborahzahlen durchzuführen. Simulationen bei $De = 4.0$ und $De = 6.4$ wurden gestartet. Dabei stellte sich aber recht schnell heraus, dass die Länge des periodisch fortgesetzten Systems nicht ausreicht und die Korrelationen nicht abfallen können. Sobald die Streifen geschlossen durch das System laufen, ist die Simulation nicht mehr vertrauenswürdig.

Um zu sehen, ob die Dicke der Randschicht, in der die nichtnormale Verstärkung kohärente Strukturen erzeugt, von den gelösten Polymeren beeinflusst wird, wurde in Abbildung 3.34 der Abfall der Maxima des Asymmetriemaßes als Funktion des Wandabstandes geplottet. Nach einer Skalierung der Kurven auf den Maximalwert beim ersten Punkt nahe der Wand, fallen die Kurven für alle Simulationen viskoelastischer Fluide zusammen. Die Polymere wirken sich also nicht auf

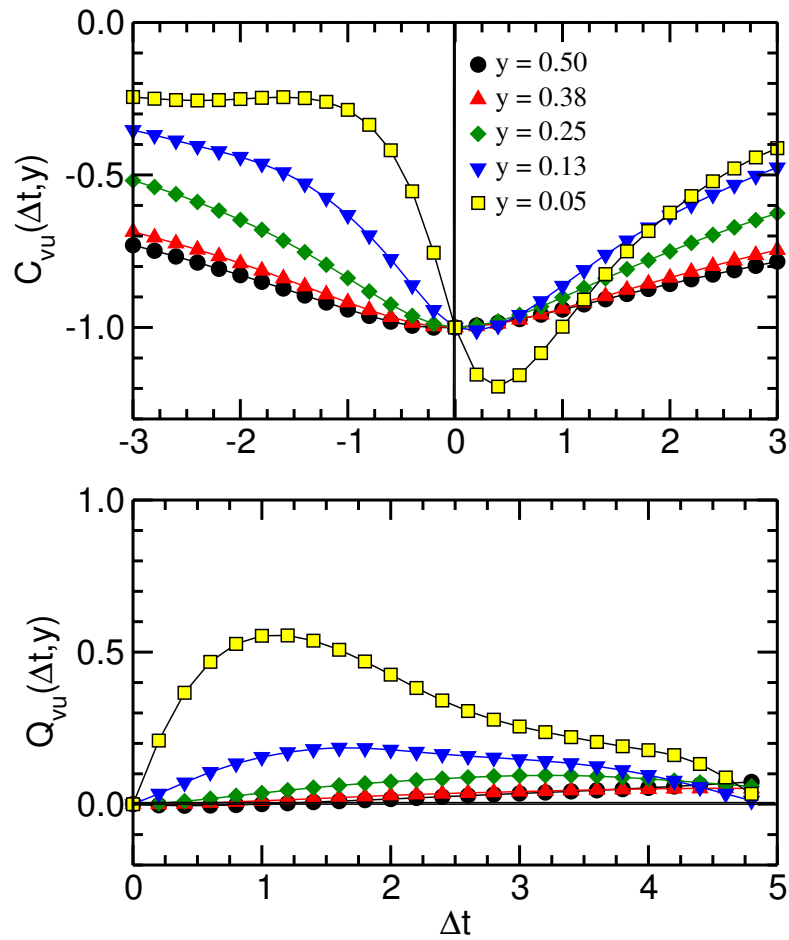


Abbildung 3.33: Scherströmung mit Polymeren bei $De = 1,6$ für verschiedene Höhen y . *oben*: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, y)$, *unten*: Asymmetriemaß Q .

die Reichweite der nichtnormalen Verstärkung ins Volumen hinein aus. Allerdings ist in Abbildung 2.5 zu sehen, dass mit zunehmender Deborahzahl die turbulenten Fluktuationen kleiner werden. Damit wird auch die Reynolds-Spannung $\langle uv \rangle \equiv C_{vu}(\Delta t = 0)$ und die Kreuzkorrelation insgesamt kleiner.

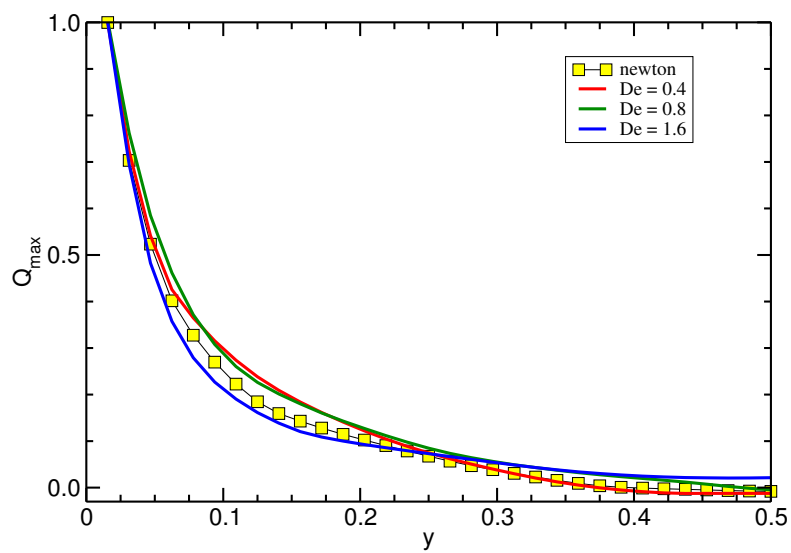


Abbildung 3.34: Vergleich des Abfalls des Asymmetriemaßes als Funktion des Wandabstands, die Kurven wurden jeweils auf den Wert am wandnähesten Punkt normiert.

3.4 Korrelationen einer turbulenten Rohrströmung

Die Rohrströmung unterscheidet sich von den anderen untersuchten Systemen durch die gekrümmte Geometrie. Die von Faisst & Eckhardt [58] gefundenen stationären Lösungen legen aber nahe, dass auch in einer Rohrströmung Wirbel im äußeren Drittel des Radius zu Streifen führen.

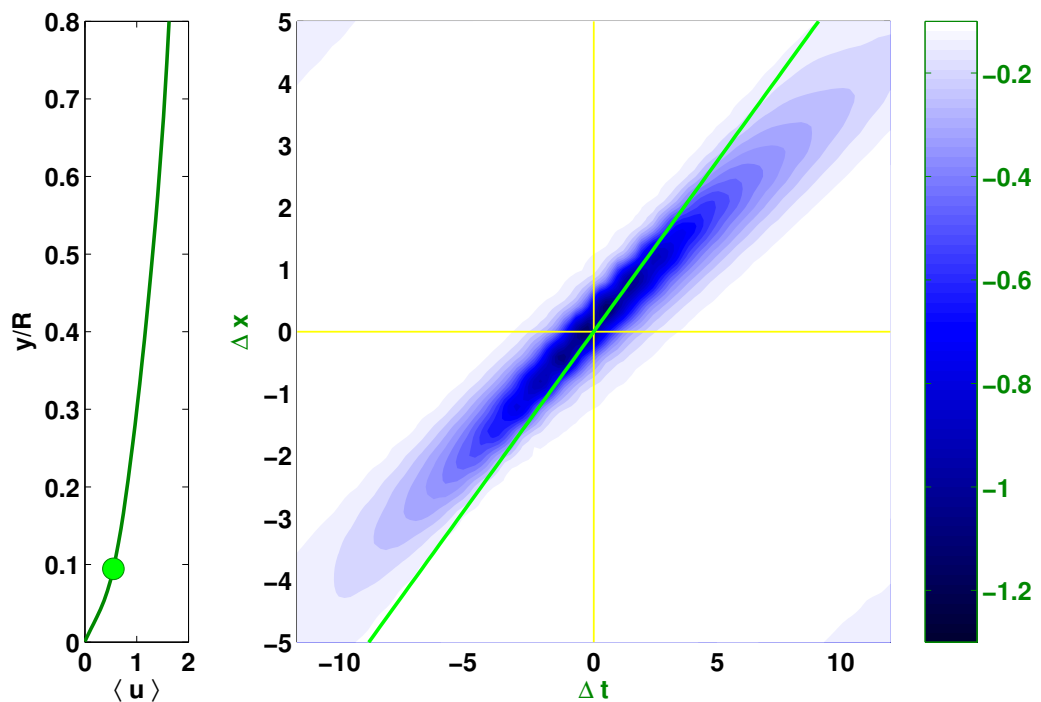


Abbildung 3.35: Kreuzkorrelation $C_{vu}(\Delta t, \Delta x)$ in der numerischen Simulation einer Rohrströmung (*film*)¹⁶

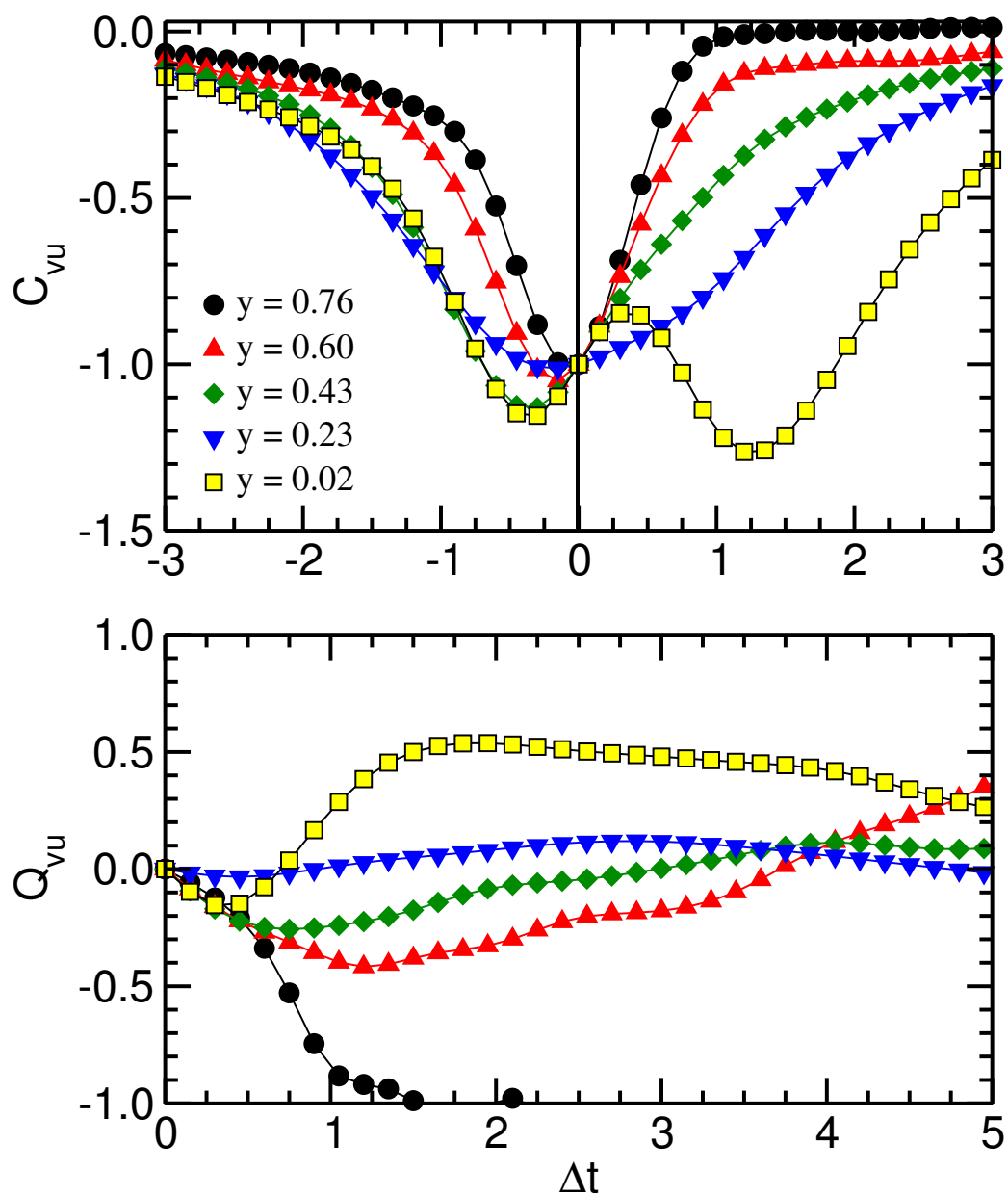


Abbildung 3.36: Kreuzkorrelationen aus der Simulation einer turbulenten Rohrströmung. oben: $C_{vu}(\Delta t)$ unten: $Q_{vu}(\Delta t)$ Die Höhen y sind von der Wand aus gemessen und mit dem Radius normiert.

3.4.1 Diskussion der Strukturen aus der Rohrströmung

Beim Blick auf Abbildung 3.36 fällt zunächst das Doppelminimum der Korrelation nahe der Wand auf. In Abbildung 3.35 ist dieser Effekt bei einer Vergrößerung des inneren Bereiches von $C_{vu}(\Delta t, \Delta x)$ als periodische Struktur mit einer Wellenlänge $\lambda_x \approx 0.4$ zu erkennen. Um eine lange Trajektorie rechnen zu können, um eine gute Statistik zu haben, wurde für diese Simulation eine vergleichsweise kleine Auflösung von nur 48 Punkten in axialer Richtung gewählt. Untersuchungen der Energieverteilung auf die einzelnen Moden von Faisst & Eckhardt [7] haben gezeigt, dass die meiste Energie in den niederfrequenten Moden $k < 1/2k_{max}$ steckt. Hieraus folgt, dass die kürzeste Wellenlänge mit einem signifikanten Beitrag zur Korrelation etwa

$$\frac{L_x}{1/2Nx} = \frac{10}{24} = 0.42 \quad (3.12)$$

ist. Dies kann das Doppelminimum in unmittelbarer Wandnähe als numerisches Artefakt erklären. Es wäre also wünschenswert, eine deutlich höher aufgelöste Simulation zu rechnen, um zu sehen, ob diese Doppelminimumstruktur in Wandnähe verschwindet, oder ob die Ursache dieser Struktur doch in physikalischen Prozessen zu suchen ist.

Für eine Untersuchung der Asymmetrie hingegen reichen die vorliegenden Daten völlig aus.

Davon abgesehen ist die Asymmetrie der Kreuzkorrelation in der Rohrströmung nahe der Wand deutlich positiv, fällt mit zunehmenden Wandabstand ab und wird zur Mitte hin deutlich negativ.

In Abbildung 3.35 fällt zudem auf, wie schmal die Kreuzkorrelation ist und dass ein Schnitt in Δt -Richtung nur einen sehr eingeschränkten Eindruck der Struktur bieten kann.

Eine nähere Untersuchung der Neigung der Korrelation und damit der Konvektionsgeschwindigkeit in der Rohrströmung ergibt, dass diese in der Nähe der Wand größer als die mittlere Geschwindigkeit ist. Bei $y \approx 0.05$ kehrt sich das Verhältnis um und zur Mitte hin ist dann die Konvektionsgeschwindigkeit kleiner als die mittlere Geschwindigkeit. Dass in dieser Simulation die Konvektionsgeschwindigkeit in unmittelbarer Wandnähe größer als das mittlere Profil ist, resultiert aus den Haftrandbedingungen. Hier muss das mittlere Profil am Rand auf Null gehen, während es in den anderen Simulationen mit reibungsfreien Randbedingungen linear bis zum Rand ansteigt. Bei einer Mittelung der Geschwindigkeit über die Dicke der kohärenten Strukturen, analog zu Kapitel 3.2.3, ergibt sich bei Haftrand-

bedingungen zwangsläufig ein endlicher Wert für die Konvektionsgeschwindigkeit nahe der Wand. Dieser Effekt wurde auch von Kim & Hussain [41] beobachtet. Sie stellten in ihrer Simulation fest, dass die Konvektionsgeschwindigkeit in Wandnähe in etwa dem Wert des mittleren Profils bei $y^+ = 15$ entspricht. In unserer Simulation ergibt sich aus dem Anstieg des mittleren Profils an der Wand ein $\tau_w = 1.63 \cdot 10^{-3}$. Damit entspricht die Höhe, in der Konvektions- und mittlere Geschwindigkeit gleich sind etwa $y^+ = 17$.

Der Bereich zur Rohrmitte hin ist eher mit der oberen Hälfte einer Randschicht zu vergleichen, für die Blackwelder & Kovasznay [18] eine geringere Konvektionsgeschwindigkeit messen.

3.5 Korrelationen in turbulenten Randschichten

Das letzte untersuchte System (Messungen turbulenter Randschichten bei hohen Reynoldszahlen) hat mit Abstand die meisten Freiheitsgrade. Von Knobloch [63] wurden Datensätze aus Windkanalmessungen bei vier unterschiedlichen Windgeschwindigkeiten zur Verfügung gestellt.

Da die Geschwindigkeiten mit Hitzdrähten (Kap. 2.5.1) gemessen wurden, stehen nur Zeitreihen zur Verfügung. Auf eine Untersuchung der zeitlich-räumlichen Korrelationen muss verzichtet werden. Aber die zeitlichen Korrelationen $C_{vu}(\Delta t)$ geben einen Eindruck der Asymmetrie der Kreuzkorrelationen und lassen sich mit den rein zeitlichen Korrelationen der Simulationen vergleichen.

3.5.1 Messungen im Deutsch Niederländischen Windkanal (DNW)

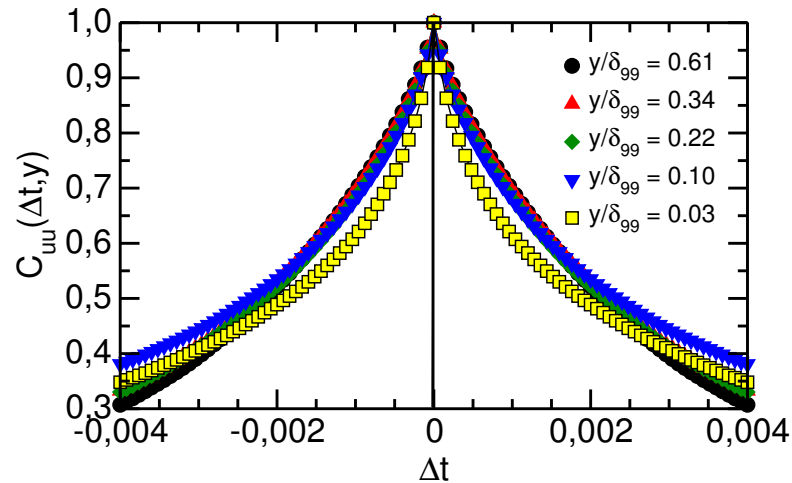


Abbildung 3.37: Autokorrelationen C_{uu} für verschiedene Wandabstände, $U_\infty = 40\text{m/s}$.

Um zu zeigen, dass bei den Messungen keine unerwarteten Effekte auftraten, wird zunächst geprüft, ob die Autokorrelationen symmetrisch sind. Dies ist für alle Messreihen der Fall, in Abbildung 3.37 ist exemplarisch $C_{uu}(\Delta t)$ bei einer Windgeschwindigkeit von $U_{\text{inf}} = 40\text{m/s}$ für verschiedene Höhen dargestellt. Die Wandabstände wurden hier mit δ_{99} (Gl. 1.12) normiert. Auf eine Darstellung der Asymmetrie wurde für die Autokorrelation verzichtet, da hier Q im Rahmen der Messgenauigkeit exakt Null ist.

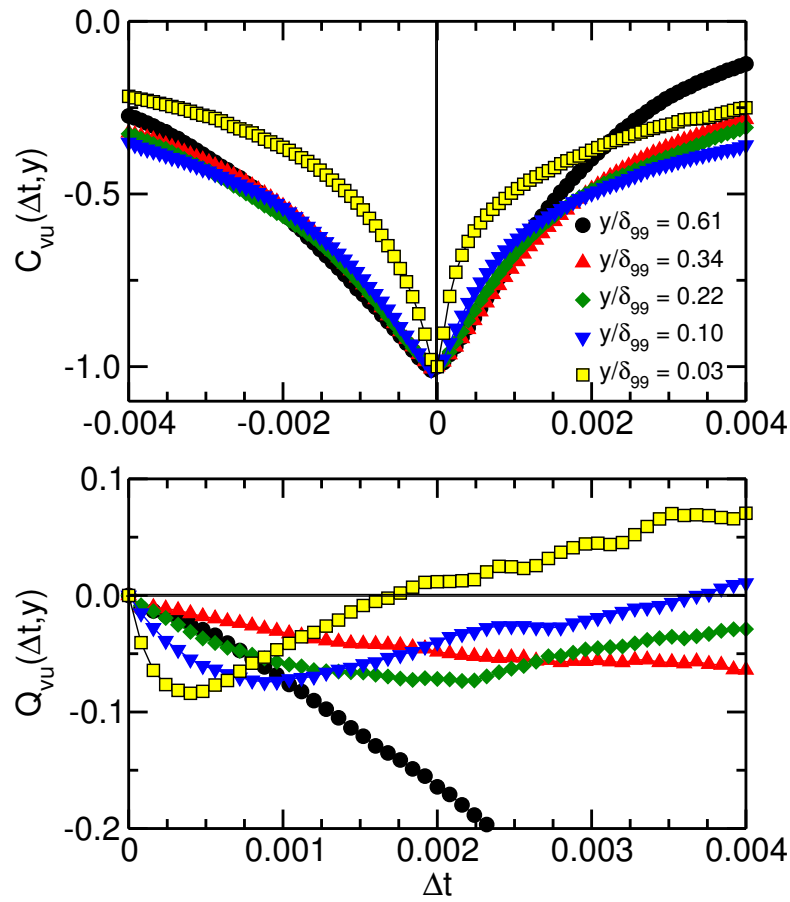


Abbildung 3.38: Kreuzkorrelationen (*oben*) und zugehörige Asymmetrien (*unten*) für verschiedene Wandabstände, $U_\infty = 40\text{m/s}$.

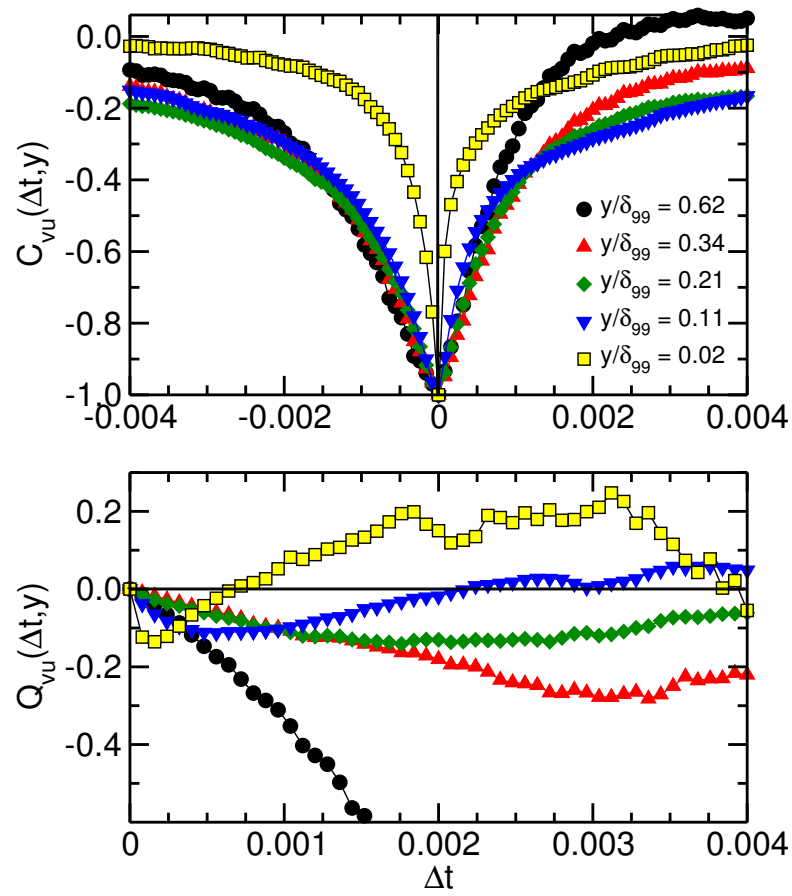


Abbildung 3.39: Kreuzkorrelationen (*oben*) und zugehörige Asymmetrien (*unten*) für verschiedene Wandabstände, $U_\infty = 80\text{m/s}$.

3.5.2 Messungen am HFI

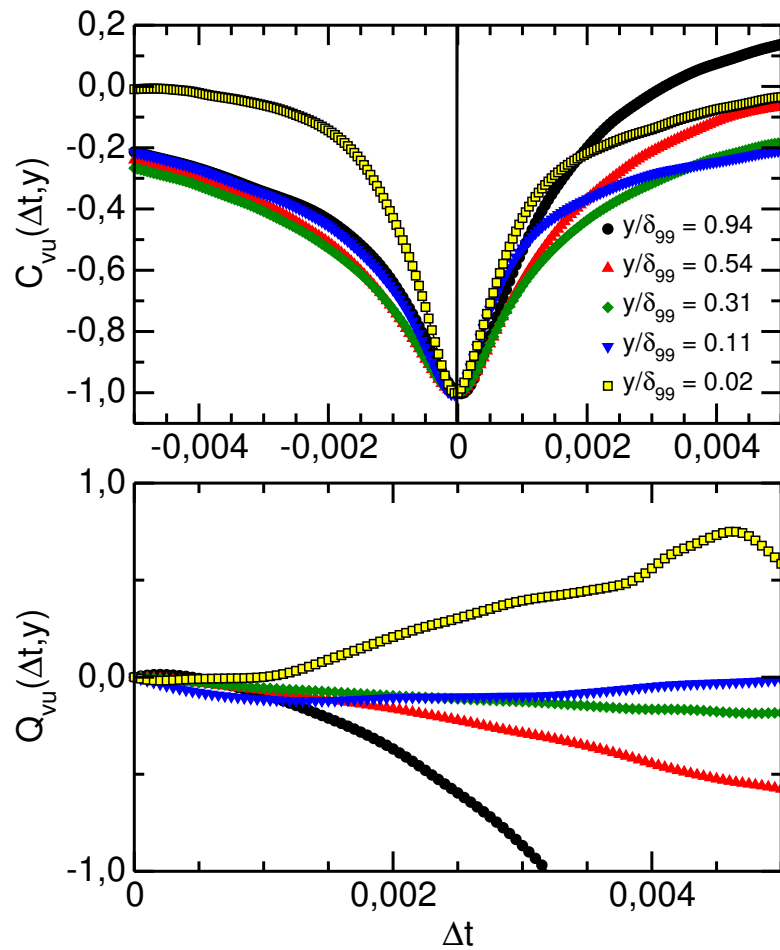


Abbildung 3.40: Kreuzkorrelationen (*oben*) und zugehörige Asymmetrien (*unten*) für verschiedene Wandabstände, $U_\infty = 10\text{m/s}$.

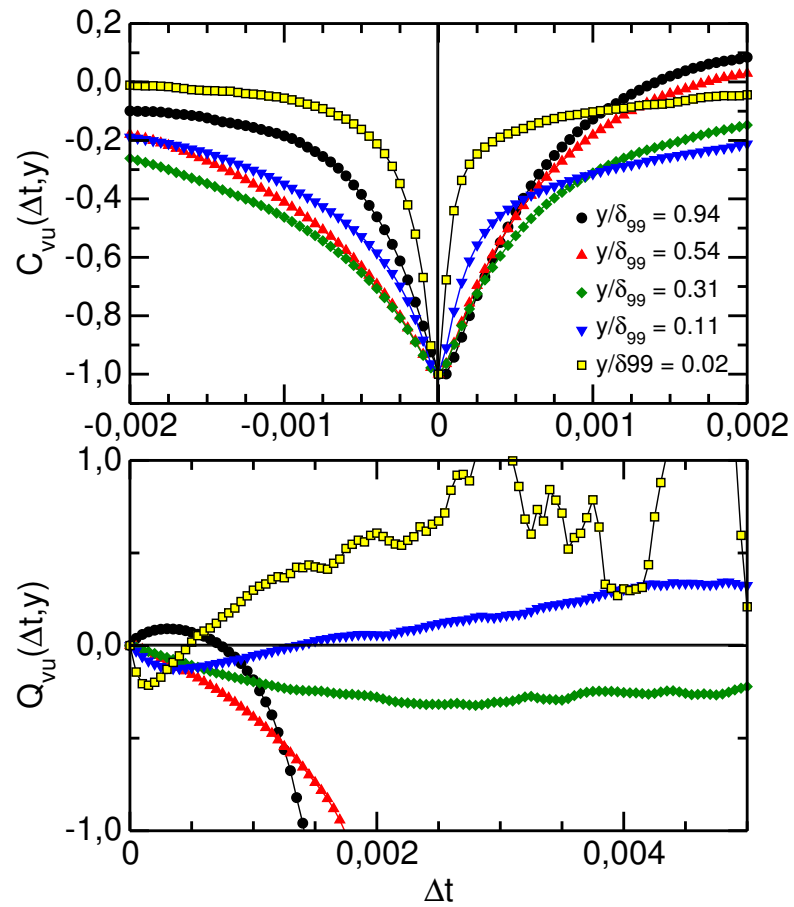


Abbildung 3.41: Kreuzkorrelationen (*oben*) und zugehörige Asymmetrien (*unten*) für verschiedene Wandabstände, $U_\infty = 30\text{m/s}$.

3.5.3 Räumliche Korrelationen der Windkanalmessungen

Zum Vergleich mit den Ergebnissen aus dem 9-Moden-Modell (Kap. 3.1) und den numerischen Simulationen (Kap. 3.2) sind hier von Knobloch [63] berechnete räumliche Korrelationen gezeigt.

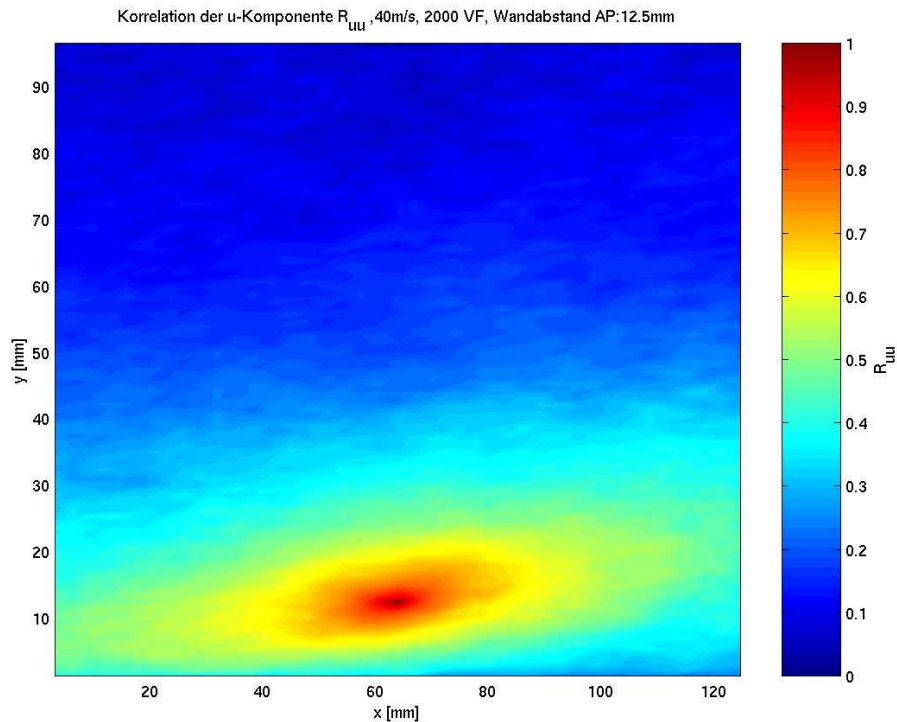


Abbildung 3.42: Räumliche Autokorrelation $R_{uu}(\Delta x, \Delta y)$ in Abhängigkeit vom Wandabstand bei $U_\infty = 40\text{m/s}$ (*Film*)

3.5.4 Diskussion der Windkanalmessungen

Im Vergleich der Kreuzkorrelationen (Abb. 3.38 — 3.41) aus den Windkanalmessungen bei den vier verschiedenen Windgeschwindigkeiten fällt zunächst auf, wie ähnlich sich die Bilder sind. Die am dichtesten an der Wand gelegene Messung (gelb) zeigt bei allen vier Windgeschwindigkeiten eine positive Asymmetrie. Mit zunehmendem Wandabstand wird die Asymmetrie kleiner und wird im äußeren Bereich der Grenzschicht deutlich negativ. Damit verbunden ist eine Verbreiterung

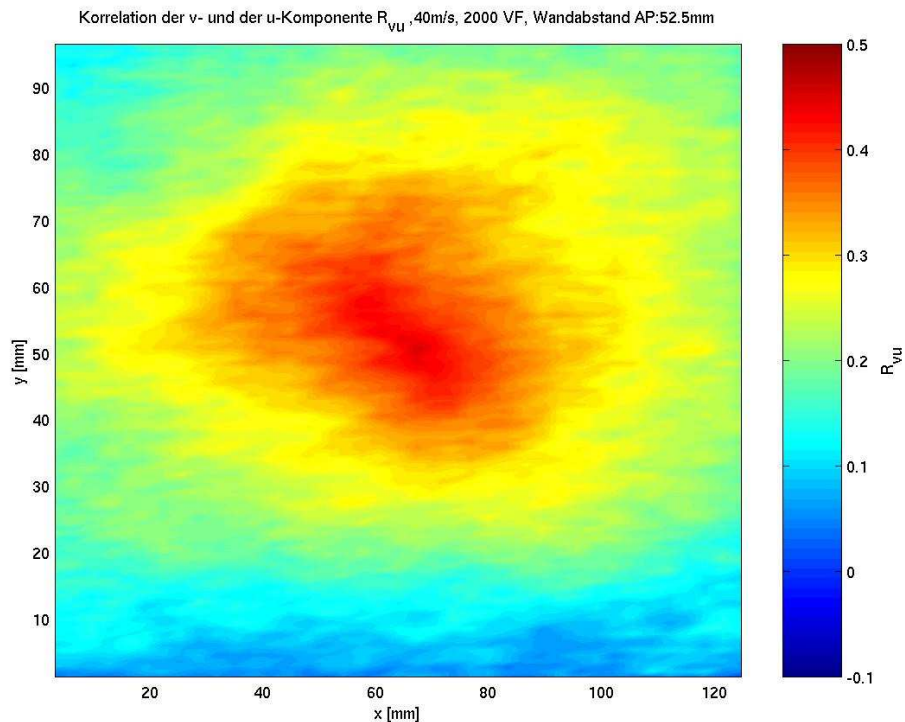


Abbildung 3.43: Räumliche Kreuzkorrelation $R_{vu}(\Delta x, \Delta y)$ in Abhängigkeit vom Wandabstand bei $U_\infty = 40\text{m/s}$ (*Film*)

des Minimums zu $\Delta t < 0$, die sich schon nahe der Wand in dem Unterschwinger des Asymmetriemaßes äußert und mit zunehmenden Wandabstand immer ausgeprägter wird.

Die Kurve bei $y/\delta_{99} = 0.94$ in Abbildung 3.41 weicht von den übrigen insofern ab, als dass sie nicht einfach eine wachsende, negative Asymmetrie hat, sondern für kleine Δt eine positive Asymmetrie zeigt, was einer Verbreiterung des Minimums zu positiven Zeiten entspricht. Es ist nicht auszuschließen, dass dieser Effekt mit der im Vergleich zu den übrigen Messungen höheren Scherung zusammenhängt (s. Abb. 2.10).

Aus dem systematischen Trend der Korrelationen als Funktion des Wandabstandes und der charakteristisch positiven Asymmetrie nahe der Wand ist zu schließen, dass es auch bei sehr viel höheren Reynoldszahlen und Scherraten eine wandnahe Schicht gibt, in der in Strömungsrichtung liegende Wirbel die für Scherströmun-

gen charakteristischen Streifen generieren und den wesentlichen Effekt der nicht-normalen Verstärkung ausmachen.

In den Windkanalmessungen tritt zusätzlich ein anderer Effekt sehr deutlich zu Tage, der sich auch schon in den Simulationen (Abs. 3.2) andeutet. Es scheint in der oberen Hälfte der Grenzschicht Prozesse geben, die dafür sorgen, dass die Kreuzkorrelationen $C_{vu}(\Delta t)$ für $\Delta t < 0$ langsamer zerfallen. Eventuell deuten sich in dieser Asymmetrie die Prozesse an, die für das Schließen des Regenerationszyklus von kohärenten Strukturen in wandnahen Scherströmungen notwendig sind. Leider gibt es hierzu aber noch kein Modell, das Vorhersagen bezüglich des Verhaltens der Kreuzkorrelationen machen könnte.

3.6 Vergleich der untersuchten Systeme

3.6.1 Zeitlich-räumliche Korrelationen

In allen betrachteten Systemen weisen die Korrelationen von Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnormalen- und Strömungsrichtung eine deutliche Asymmetrie auf, die vom Wandabstand abhängt. Beim 9-Moden-Modell (Kap. 3.1) ist diese Asymmetrie in der Mitte am ausgeprägtesten. In den realistischeren Simulationen (Kap. 3.2, 3.3, 3.4) und in den Messungen turbulenter Randschichten (Kap. 3.5) befindet sich der Bereich maximaler Asymmetrie direkt an der Wand. Mit zunehmendem Wandabstand wird diese Asymmetrie kleiner und schließlich für große Abstände sogar negativ.

Dabei ist noch unverstanden, welche physikalischen Prozesse für den langsameren Abfall der Kreuzkorrelation für $\Delta t < 0$ verantwortlich sind. Besonders deutlich zeigt sich dieser Effekt in den Systemen mit Hafttrandbedingungen (turbulente Randschicht und Rohrströmung) im oberen Bereich der Randschicht.

Ein weiteres interessantes Phänomen ist die Verschiebung des Minimums in Strömungsrichtung, das sowohl in der homogenen Scherturbulenz als auch im 9-Moden-Modell bei kleinsten Wandabständen beobachtet werden kann.

Im 9-Moden-Modell ist dieser Effekt direkt an die Wechselwirkung der Komponenten der einzig dreidimensionalen Mode \vec{u}_8 gebunden.

Die Zugabe von Polymeren (Kap. 3.3) in geringen Konzentrationen zu einem Newtonschen Fluid führt zu einem langsameren Abfall der Korrelationen. Mit zunehmender Deborahzahl verschiebt sich das Minimum der Korrelation leicht in Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit. Ein wesentlicher Unterschied zu den Simulationen Newtonscher Fluide ist im untersuchten Parameterbereich nicht zu beobachten.

3.6.2 Räumliche Korrelationen

Die räumlichen Autokorrelationen $C_{uu}(\Delta x, \Delta y)$ sind in den Simulationen homogener Scherturbulenz (Kap. 3.2.4) etwa um 8° und in den Messungen der turbulenten Randschicht um etwa 10° stromaufwärts geneigt. Dieser Effekt wird üblicherweise mit dem Ablösen der kohärenten Strukturen von der Wand in Verbindung gebracht [39].

Der Versuch, diesen Neigungswinkel mit Hilfe des 9-Moden-Modells zu erklären, ist gescheitert. Die räumlichen Anteile von $C_{uu}(\Delta x, \Delta y)$ weisen in dem Modell zwar eine deutliche Neigung auf, aber die Korrelationen der zeitabhängigen Amplituden unterdrücken die antisymmetrischen Anteile, die die Neigung verursachen.

In anschließenden Arbeiten wäre es daher von höchstem Interesse zu untersuchen, welche zusätzliche Mode berücksichtigt werden sollte, um die Neigung dieser Korrelationsfunktion qualitativ richtig wiederzugeben.

Kapitel 4

Zusammenfassung der Ergebnisse

Entsprechend der Hypothese von Eckhardt und Pandit (Kap. 1.3.4) folgt aus der Wechselwirkung von Wirbeln in Strömungsrichtung mit so genannten Streifen eine Asymmetrie der zeitlichen Kreuzkorrelation von Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnormalen- und Strömungsrichtung.

Da die numerischen Simulationen mit den Messungen von turbulenten Randschichten verglichen werden sollten und bei diesen die kohärenten Strukturen durch den Wind über die Messsonde hinwegtransportiert werden, wurde die Analyse der Korrelationen um die Reichweite der Strukturen in Strömungsrichtung erweitert.

In solchen zweidimensionalen Auftragungen der Korrelation lässt sich dann die Konvektionsgeschwindigkeit der Strukturen der Grenzschicht untersuchen und mit der mittleren Geschwindigkeit vergleichen.

Die erwartete Asymmetrie der Kreuzkorrelation konnte in allen untersuchten und in ihren Eigenschaften sehr unterschiedlichen Systemen nachgewiesen werden:

- Im 9 Moden-Modell lässt sich explizit nachvollziehen, wie die Asymmetrie aus der Kopplung von Wirbel- und Streifenmoden resultiert (Kap. 3.1).
- In den Messungen der turbulenten Randschichten (Kap. 3.5) ist eindeutig eine Abnahme der Asymmetrie als Funktion des Wandabstands zu beobachten. Dies deckt sich mit früheren Arbeiten (Kap. 1.4.1), nach denen die Streifen nur im unteren Teil der Randschicht, nahe der Wand existieren.
- Auch in den durchgeführten numerischen Simulationen (Kap. 3.2) bildet sich eindeutig eine solche Region aus, in der die nichtnormale Verstärkung durch Wirbel und Streaks zu einer deutlichen Asymmetrie führt.

In den Simulationen konnte gezeigt werden, dass die Asymmetrie mit zunehmendem Abstand von der reibungsfreien Wand monoton fällt. Aus dem Abfall dieser

Kurve lässt sich die Dicke der Schicht, in der die Streifen entstehen, ablesen — insofern kann die Asymmetrie von Kreuzkorrelationen in Scherströmungen als quantitatives Maß für die Existenz von kohärenten Strukturen herangezogen werden.

Bei Zugabe von Polymeren zu einem Newtonschen Fluid wurde eine Reduktion des turbulenten Reibungswiderstandes beobachtet und bei Erhöhung der Deborahzahl eine Abnahme der Reynolds-Spannung. Die Simulationen (Kapitel 2.3) zeigen, dass sich die Fluktuationen eines viskoelastischen Fluides bei hoher Deborahzahl deutlich ändern.

Durch das Anwachsen der Streifen bei größeren Deborahzahlen, verschiebt sich das Minimum der Kreuzkorrelation in Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit und die Korrelationen fallen etwas langsamer ab. Bei Betrachten der Asymmetrie zeigt sich aber, dass sich die Polymere nicht auf die Dicke der Randschicht, in der die Wirbel-Streifen-Interaktionen auftritt, auswirken.

Der Abfall der Asymmetrie als Funktion des Wandabstandes ist daher kein geeignetes Maß zur Untersuchung der turbulenten Reibungsreduzierung viskoelastischer Fluide. Dies wird daran liegen, dass die Asymmetrie ein normiertes Maß ist, das für absolute Größen des Strömungsfeldes (Fluktuationen, Reynolds-Spannung) nicht sensitiv ist. Die Asymmetrie kann allenfalls eine Aussage über das räumliche und zeitliche Zusammenwirken der Strukturen treffen und daran scheint sich nichts zu ändern. Auf die Wechselwirkungsmechanismen der nichtnormalen Verstärkung scheinen die absoluten Größen keinen Einfluss zu haben.

In bisherigen Untersuchungen der Wechselwirkung von Streifen mit Wirbeln in Strömungsrichtung, die zur Entstehung von Turbulenz in Scherströmungen wesentlich beitragen, ist es nicht gelungen, die Ausdehnung der kohärenten Strukturen auf Systemgrößen wie die Reynoldszahl oder die Wandschubspannung zurückzuführen. Dagegen zeigen unsere Simulationen mit reibungsfreien Randbedingungen, bei denen auch am Rand noch moderate Scherraten und Reynoldszahlen herrschen, auf Grund der schwachen Verletzung der transversalen Homogenität eine ähnliche Höhenabhängigkeit der Asymmetrie wie die Windkanalmessungen. Bemerkenswerter Weise zeigen die Simulationen daher sehr ähnliche Randschichten wie die an dem Windkanal aufgenommenen experimentellen Daten, obwohl die Scherraten um 3 Größenordnungen und die Taylor-Reynoldszahlen um 1–2 Größenordnungen kleiner sind. Die Größe, die sich in unseren Simulationen wie auch in den vermessenen Randschichten zur Grenzfläche hin systematisch ändert, sind die Geschwindigkeitsfluktuationen in Wandnormalenrichtung $\langle v^2 \rangle$.

Es bleibt die Frage, ob die Wahl der Randbedingungen einen Einfluss auf die Dicke der Region hat, in der die kohärenten Strukturen entstehen. Hierzu bietet

es sich an, eine hochaufgelöste Simulation der Rohrströmung (Kap. 3.4) durchzuführen.

Literaturverzeichnis

- [1] O. Reynolds. On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 174:935–982, 1883.
- [2] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mém. Acad. Roy. Sci.*, 6:389–440, 1823.
- [3] R.P. Feynman. Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie. *R. Oldenbourg GmbH, München*, pages 786–821, 1991.
- [4] S.B. Pope. Turbulent Flows. *Cambridge University Press*, 2000.
- [5] D.S. Henningson P.J. Schmid. Stability and Transition. *Springer*, 142:New York, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [6] A.G. Darbyshire and T. Mullin. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe-flow. *J. Fluid Mech.*, 289:83–114, 1995.
- [7] H. Faisst and B. Eckhardt. Sensitive dependence on initial conditions in transition to turbulence in pipe flow. *J. Fluid Mech*, 504:343–352, 2004.
- [8] A. Schmiegel and B. Eckhardt. Fractal stability border in plane couette flow. *Phys. Rev. Lett.*, 79:5250, 1997.
- [9] L. Boberg and U. Brosa. Onset of turbulence in a pipe. *Z. Naturf.*, 43a:697–726, 1988.
- [10] P.J. Schmidt S.C. Reddy and D.S. Henningson. Pseudospectra of the orr-sommerfeld operator. *SIAM J. Appl. Math*, 53:15–47, 1993.
- [11] L.H. Gustavsson. Energy growth of three-dimensional disturbances in plane poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 224:241, 1991.

- [12] A. Lundbach D.S. Henningson and A.V. Johansson. A mechanism for bypass transition from localized disturbances. *J. Fluid Mech.* , 250:169–207, 1993.
- [13] K.M. Butler and B.F. Farrell. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow shear flow. *Phys. Fluids A*, 4:1637–1650, 1992.
- [14] S.C. Reddy L.N. Trefethen, A.E. Trefethen and T.A. Driscoll. Hydrodynamics stability without eigenvalues. *Science* , 261:578–584, 1993.
- [15] S. Grossmann. The onset of shear flow turbulence. *Rev. Mod. Phys.* , 72:603–617, 2000.
- [16] Kline Kim and Reynolds. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech*, 1971.
- [17] J.T. Stuart. The production of intense shear layers by vortex stretching and convection. *NATO AGARD report*, 514:1–29, 1965.
- [18] R.F. Blackwelder and L.S.G. Kovaszny. Time Scales and Correlations in a Turbulent Boundary Layer. *Phys. Fluids*, 14:1545–1554, 1972.
- [19] W. Schoppa and F. Hussain. Coherent structure generation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* , 453:57–108, 2002.
- [20] J. Kim and J. Lim. A linear process in wall-bounded turbulent shear flows. *Phys. Fluids* , 12:1885–1888, 2000.
- [21] F. Waleffe. Exact coherent structures in channel flow. *J. Fluid Mech.*, 435:93–102, 2000.
- [22] K.M. Butler and B.F. Farrell. Optimal perturbations and streak spacing in wall-bounded turbulent shear flow. *Phys. Fluids*, 5:774–777, 1993.
- [23] S. Robinson. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Ann. Rev. Fluid Mech.* , 23:601–639, 1991.
- [24] S.I. Chernyshenko and M.F. Baig. The mechanism of streak formation in near-wall turbulence. to appear in *J. Fluid Mech.*, 2003.
- [25] C.R. Smith and S.P. Metzler. The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 129:27–54, 1983.
- [26] J. Jiménez. On the structure and control of near wall turbulence. *Phys. Fluids*, 6:944–953, 1994.

- [27] J. Kim J.M. Hamilton and F. Waleffe. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* , 287:317–348, 1995.
- [28] J. Jiménez and A. Pinelli. The autonomous cycle of near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 389:335–359, 1999.
- [29] H. Faisst J. Moehlis and B. Eckhardt. A low-dimensional model for shear flows. *New Journal of Physics*, 6, 2004.
- [30] B. Eckhardt and R. Pandit. Noise Correlations in Shear Flows. *Europ. J. Phys. B*, 33:373–378, 2003.
- [31] J.C. Rotta. Turbulente Strömungen. *B.C. Teubner, Stuttgart*, 1972.
- [32] A. Jachens B. Eckhardt and J. Schumacher. Asymmetric time correlations in turbulent shear flows. *IUTAM Symposium on Reynolds Number Scaling in Turbulence*, pages Princeton, NJ, USA, 2002.
- [33] G.I. Taylor. The spectrum of turbulence. *Proc. Roy. Soc. A*, 164:76–490, 1938.
- [34] H. Tennekes and J.L. Lumley. A First Course in Turbulence. *The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London* , 1973.
- [35] J.O. Hinze. Turbulence. *McGraw-Hill*, New York, 1959.
- [36] J.J. Gaviglio A.J. Favre and R.J. Dumas. Space-time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 2:313, 1957.
- [37] J.J. Gaviglio A.J. Favre and R.J. Dumas. Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 3:344, 1958.
- [38] J.L. Lumley. On the interpretation of time spectra measured in high intensity shear flows. *Phys. Fluids*, 8:1056, 1965.
- [39] J.A.H. Graham V.G. Harris and S. Corrsin. Further experimentals in nearly homogeneous turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* , 81:657–687, 1977.
- [40] JL Balint U. Piomelli and M. Wallace. On the validity of Talor’s hypothesis for wall-bounded flows. *Phys. Fluids A*, 1:609–611, 1988.
- [41] J. Kim and F. Hussain. Propagation velocity of perturbations in turbulent channel flow. *Phys. Fluids A* , 5:695, 1993.
- [42] W. Schoppa J. Jeong, F. Hussain and J. Kim. Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 332:185–214, 1997.

- [43] J.H. Kaspersen P.A. Krogstad and S. Rimestad. Convection velocities in a turbulent boundary layer. *Phys. Fluids*, 20:949–957, 1997.
- [44] J.Y. Yoo S. Jeon, H. Choi and P. Moin. Space-time characteristics of wall shear-stress fluctuations in a low-reynolds-number channel flow. *Phys. Fluids*, 10:3084–3094, 1999.
- [45] M. Quadrio and P. Luchini. Integral space-time scales in turbulent wall flows. *Phys. Fluids*, 15:2219–2227, 2003.
- [46] J. Schumacher and B. Eckhardt. On statistically stationary homogeneous shear turbulence. *Europhys. Lett.*, 52:627, 2000.
- [47] J. Schumacher B. Eckhardt, J. Kronjäger. Stretching of polymers in a turbulent environment. *Comp. Phys. Comm.*, 147:538–543, 2002.
- [48] K. Knobloch and H.H. Fernholz. Statistics, Correlations and Scaling in Turbulent Flow. *IUTAM Symposium on Reynolds Number Scaling in Turbulence*, pages Princeton, NJ, USA, 2002.
- [49] B. Eckhardt and A. Mersmann. Transition to turbulence in a shear flow. *Phys. Rev. E*, 60:509, 1999.
- [50] F. Waleffe. On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids*, 9:883–899, 1997.
- [51] J. Schumacher. Derivative moments in stationary homogeneous shear turbulence. *J. Fluid Mech.*, 441:109–118, 2001.
- [52] J. Schumacher and B. Eckhardt. Fluctuations of energy injection rate in a shear flow. *Physica D*, 187:370–376, 2004.
- [53] R.C. Armstrong R.B. Bird and O. Hassager. Dynamics of polymerid liquids. *John Wiley & Sons*, 1, 1987.
- [54] J. Kronjäger. Numerical Studies of Viscoelastic Shear Turbulence. *Diplomarbeit*, 2001.
- [55] A. Fouxon E. Balkovsky and V. Lebedev. Turbulent dynamics of polymer solutions. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4765–4768, 2000.
- [56] B.A. Toms. Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large reynolds numbers. *Proc. Int. Cong. on Rheology*, 2:135–141, 1949.

- [57] S.R. Sreenivasan and C.M. White. The onset of drag reduction by dilute polymer additives, and the maximum drag reduction asymptote. *J. Fluid Mech.* , 409:149–164, 2000.
- [58] H. Faisst and B. Eckhardt. Travelling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 91:224502, 2003.
- [59] K. Oswatitsch und K. Wiegardt L. Prandtl. Führer durch die strömungslehre. *Vieweg & Sohn, Braunschweig* , 1984.
- [60] H. Schlichting. Grenzschicht-Theorie. *Verlag G. Braun* , page Karlsruhe, 1982.
- [61] J.M. Bruns and P. Dengel. A miniature triple hot-wire probe for wall bounded flows. *Exp. in Fluids*, 24:479–488, 1998.
- [62] M. Raffel J. Kompenhans and C.E. Willert. Particle Image Velocimetry - A practical Guide. *Springer*, 1997.
- [63] K. Knobloch. Korrelationen und Skalierung in turbulenten Grenzschichten bei hohen Reynoldszahlen. *HFI*, private Kommunikation, 2004.
- [64] H.-H. Fernholz. Ein halbempirisches Gesetz für die Wandreibung in kompressiblen turbulenten Grenzschichten bei isothermer und adiabater Wand. *Z. Angew. Math. Mech.*, 51:T146–T147, 1971.
- [65] H.-H. Fernholz and P.J. Finley. The incompressible zero-pressure-gradient turbulent boundary layer: an assessment of the data. *Prog. Aerospace Sci.*, 32:245–311, 1996.
- [66] H. Faisst J. Moehlis and B. Eckhardt. Periodic orbits and chaotic sets in a low-dimensional model for shear flows. submitted .

Wissenschaftlicher Werdegang

10/1994 – 09/1996 Studium der Physik an der Universität Bremen

27.08.1996 Vordiplom

10/1996 – 02/2000 Studium der Physik an der Philipps-Universität Marburg

14.02.2000 Diplom

*„Numerische Verfahren zur Simulation der Rohrströmung
in drei Dimensionen“*

seit 08/2000 Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe Komplexe Systeme am Fachbereich Physik der Philipps-Universität Marburg

22.07.2004 Promotion