

# **Polytopale Konstruktionen in der Algebra**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

dem

Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität  
Marburg

vorgelegt von

**Daniel Soll**

aus Lahnau

Marburg, April 2006

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg  
als Dissertation am 30.6.2006 angenommen.

Erstgutachter Prof. Dr. Volkmar Welker

Zweitgutachter Prof. Dr. Michael Joswig

Tag der mündlichen Prüfung am 10.7.2006



# Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Zusammenfassung	5
Kapitel 2. Grundlagen	9
§1. Geordnete Mengen	9
§2. Mengen im $\mathbb{R}^n$	10
§3. Abstrakte Komplexe	12
§4. Kommutative Algebra	18
Kapitel 3. Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten $k$ -Triangulierungen	21
§1. Der Komplex der verallgemeinerten $k$ -Triangulierungen	21
§2. Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten $k$ -Triangulierungen $\mathcal{D}_n^k$	23
§3. Reinheit und Dimension von $\mathcal{D}_n^k$	23
§4. Der Stanley-Reisner-Ring von $\mathcal{D}_n^k$	29
§5. Das Zyклоeder $\mathcal{D}_n^1$ als Graphkomplex $\mathcal{R}_n$	36
§6. Polytopalität von $\mathcal{D}_n^{n-2}$	50
§7. Topologie von $\mathcal{D}_n^k$	53
§8. Multiplizität des Komplexes der Typ-B verallgemeinerten $k$ -Triangulierungen	56
§9. Zur Färbbarkeit von $\mathcal{D}_n^k$	66
Kapitel 4. Das Determinantenideal	69
§1. Unimodalität	69
§2. Determinantenideal	70
§3. Gröbner-Basen	71
§4. Hauptresultate	72
§5. Konstruktion der Termordnung	75
§6. Der Determinantenkomplex einer $(m \times n)$ -Matrix	81

Kapitel 5. Polytopale Auflösungen	85
§1. Einführung	85
§2. Zelluläre Auflösungen	87
§3. Polytopale Auflösungen des Stanley-Reisner Ideals simplizialer Polytope	90
Anhang A.	101
§1. Dank	101
§2. Lebenslauf	102
§3. Versicherung	102
Literaturverzeichnis	103

# Zusammenfassung

mathematik [2R]

laß dich hängen  
laß dich gehen  
keinen sprechen  
keinen sehen  
ohne leine  
ohne ziel  
dieses wenig  
das ist viel

einmal kein glück  
einmal glück  
es ist alles mathematik

gib alles  
nur kein geiz  
sich verschwenden  
jederzeit  
das bringt spannung  
und sinn  
eine frage  
der energien

rauf und runter  
vor-zurück  
es ist alles mathematik

rechne richtig  
rechne mit  
es ist alles mathematik

Die zentralen Objekte dieser Arbeit sind einerseits Ideale in einem Polynomring mehrerer Veränderlicher und andererseits simpliziale Komplexe. Klassische Invarianten der Ideale sind die minimalen freien Auflösungen, deren Betti-Zahlen, ihre Hilbert-Reihe und die Krull-Dimension, die der simplizialen Komplexe sind der  $f$ - bzw. der  $h$ -Vektor sowie die Dimension. Aus der Theorie der Stanley-Reisner-Ringe sind eine Vielzahl von Zusammenhängen zwischen den Invarianten monomialer Ideale und simplizialer Komplexe bekannt [Sta1]. Diese Arbeit liefert neue Ansätze für Zusammenhänge zwischen Invarianten von Gorenstein-Idealen und simplizialen Komplexen.

Kapitel 2 gibt einen kleinen Überblick über die für diese Arbeit relevanten Definitionen und Aussagen der Polytoptheorie sowie der kommutativen Algebra.

Zunächst unabhängig von Anwendungen in der kommutativen Algebra wird in Kapitel 3 der simpliziale Komplex der symmetrischen verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen untersucht. Der Begriff der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierung wurde von Jonsson [Jo3] eingeführt und

bezeichnet die von [DKM] zuerst untersuchten maximalen Mengen von Diagonalen (also Verbindungslinien zwischen den Ecken) eines  $n$ -Ecks, innerhalb derer sich höchstens  $k$  Diagonalen paarweise im Innern des  $n$ -Ecks schneiden. In [DKM],[Na] und [Jo3] wurde jeweils gezeigt, dass verallgemeinerte  $k$ -Triangulierungen für feste Parameter  $n, k$  stets die gleiche Anzahl von Diagonalen enthalten. In [Jo1] bzw. [Jo3] wird zusätzlich deren Anzahl bestimmt. Setzt man  $k = 1$ , so erhält man den Komplex der gewöhnlichen Triangulierungen des  $n$ -Ecks. Die Untersuchung dieses Komplexes hat eine lange Geschichte: Schon Euler stellte 1751 in einem Brief an Goldbach die Frage nach der Anzahl solcher Triangulierungen und ermittelte später auch die korrekte Lösung, von der er bemerkte [Dr]:

„Die Induktion, die ich gebraucht, war ziemlich mühsam.“

Die Frage der polytopalen Realisierbarkeit des entsprechenden simplizialen Komplexes wurde 1984 von Perles [Pe] aufgeworfen und unabhängig von Haiman [Ha] und Lee [Le] positiv beantwortet. Das Dual dieses Polytops ist als Assoziaeder in die Polytoptheorie eingegangen und kann neben dem Permutaeder als klassisches Beispiel für eine elegante kombinatorische Beschreibung des nicht trivialen Seitenverbandes eines Polytopes gelten. Simion [Si] führte 2001 das Typ-B Assoziaeder ein, ein Polytop, dessen Ecken als die unter  $180^\circ$ -Drehungen invarianten Triangulierungen des  $2n$ -Ecks beschrieben werden können. Die Facetten bestehen bei dieser Betrachtung aber nicht aus einzelnen Diagonalen, sondern aus Paaren von durch  $180^\circ$ -Drehungen ineinander überführbarer Diagonalen. Das Präfix Typ-B erklärt sich im Rahmen der Theorie der

Cluster-Algebren: Der Komplex der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen ist für  $k = 1$  der Cluster-Komplex einer Cluster-Algebra vom Typ  $A_n$ , während der Komplex der symmetrischen verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen für  $k = 1$  der Cluster-Komplex einer Cluster-Algebra vom Typ  $B_n$  ist. Weitere Details hierzu finden sich in [FR].

Ein erstes Ergebnis in Kapitel 3 ist die alternative kombinatorische Beschreibung des Verbandes der symmetrischen verallgemeinerten 1-Triangulierungen als Komplex gerichteter Graphen. Dadurch gelingt insbesondere die Abzählung der Facetten einer Einschränkung des Duals dieses Polytopes auf eine gewisse Eckenmenge, die in Kapitel 4 von Bedeutung ist. Das Hauptaugenmerk liegt aber in der Untersuchung der im Sinne von Jonsson verallgemeinerten Typ-B  $k$ -Triangulierungen. Wir beweisen, dass die Anzahl der Diagonalenpaare in jeder solchen Triangulierung konstant ist und berechnen diese. Des Weiteren bestimmen wir die Homologiegruppen des entsprechenden simplizialen Komplexes in Charakteristik 2 und zeigen, dass er eine 2-Homologiesphäre ist. Es folgt dann eine Untersuchung seines Stanley-Reisner-Rings. Hierbei bringen wir die Nichtseiten des Komplexes in Zusammenhang mit gewissen Submatrizen, deren Bedeutung sich wiederum in Kapitel 4 erschließt. Wir untersuchen den Komplex der verallgemeinerten Typ-B  $k$ -Triangulierungen des  $2n$ -Ecks weiterhin auf seine Färbbarkeit und Polytopalität: In den Fällen, in denen  $k = n - 2$  ist, zeigen wir, dass er sich als Randkomplex des zyklischen Polytops realisieren lässt. Dieses Ergebnis liefert dann sofort eine Formel für die Anzahl der verallgemeinerten Typ-B  $(n - 2)$ -Triangulierungen des  $2n$ -Ecks. Dies ist das

einzigste uns bekannte Ergebnis, das über die Fälle, in denen  $k = 1$  gilt bzw. die trivialen Fälle mit  $k = n - 1$  hinausgeht. Diese Resultate fassen wir zu einer vermuteten Formel für beliebiges  $k$  zusammen, für die wir eine Vielzahl von Darstellungsmöglichkeiten gefunden haben, unter anderem als Determinante einer Matrix aus Binomialkoeffizienten. Wir nutzen einerseits die Ergebnisse aus der kommutativen Algebra aus Kapitel 4 um zu zeigen, dass diese Formel eine untere Schranke für die Anzahl der verallgemeinerten Typ-B  $k$ -Triangulierungen liefert und andererseits die homologischen Ergebnisse, um eine obere Schranke zu ermitteln. Wir zeigen weiterhin, dass der Quotient aus unterer und oberer Schranke für  $(n - k) \rightarrow \infty$  konvergiert.

Das Determinantenideal zu den Parametern  $n$  und  $k$  ist das Ideal im Polynomring von  $n^2$  Unbekannten, das von den Polynomen erzeugt wird, die als  $(k + 1)$ -Minoren der Matrix, deren Einträge die Unbekannten sind, entstehen. Parallel zur Vorgehensweise in [JW], wo analoge und weiter reichende Ergebnisse für das Pfaffsche Ideal bewiesen werden, bestimmen wir in Kapitel 4 eine Termordnung, so dass das entsprechende Initialideal in besonderen Fällen als Stanley-Reisner-Ring eines simplizialen Komplexes aufgefasst werden kann. Dieser lässt sich in den Join eines Simplexes mit einer simplizialen 2-Homologiesphäre zerlegen. Die 2-Homologiesphäre ist dabei genau der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen aus Kapitel 3. Die Idee, Initialideale monomialer Ideale als Stanley-Reisner Ideale simplizialer Komplexe aufzufassen, wurde bereits in [BC] verfolgt und auch auf das Determinantenideal angewandt. Der betreffende

simpliziale Komplex ist dort allerdings keine Sphäre. Die Ergebnisse zur Polytopalität und Multiplizität aus Kapitel 3 führen dann unmittelbar zu dem Ergebnis, dass der  $h$ -Vektor des Determinantenideals in den entsprechenden Fällen nicht nur unimodal ist, sondern die Bedingungen des  $g$ -Theorems der Polytoptheorie erfüllt. Ersteres war in einer allgemeineren Form von Stanley vermutet worden. Die Vermutung über die Anzahl der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen aus Kapitel 3 erweist sich in diesem Zusammenhang als äquivalent zu der Vermutung, dass die  $(k + 1)$ -Minoren der Matrix der Unbekannten eine Gröbner-Basis bezüglich der eingeführten Termordnung bilden. Der Beweis einer der beiden Vermutungen ist der noch fehlende Schritt zur Verallgemeinerung der oben angegebenen Resultate über die Spezialfälle hinaus.

Das abschließende Kapitel 5 hat experimentellen Charakter. Wir untersuchen dort, inwiefern sich die polytopale Struktur des Randkomplexes eines simplizialen Polytopes auf eine freie Auflösung seines Stanley-Reisner-Ideals überträgt. Dies knüpft an eine Idee in [BS] an, wo für ein gegebenes monomiales Ideal ein regulärer Zellkomplex konstruiert wird, der eine freie Auflösung dieses Ideals trägt. Wir sind der Frage nachgegangen, ob für diesen Zellkomplex im Falle eines Stanley-Reisner Ideals eines simplizialen Polytopes wiederum ein Polytop gewählt werden kann. Die Idee ist die Anwendung sogenannter Gale-Diagramme, mit deren Hilfe wir in der Lage sind, für gewisse Stanley-Reisner Ideale simplizialer Polytope ein Polytop zu konstruieren, das eine freie Auflösung trägt. In dem Fall, in dem das Ausgangspolytop von Dimension

$d$  ist und  $d + 3$  Ecken hat, liefert die vorgeschlagene Konstruktion ein  $m$ -Eck, das sogar die minimale freie Auflösung des Ideals trägt. Dies ist ein bereits bekanntes Resultat aus [BS]. Falls umgekehrt das Ausgangspolytop ein  $m$ -Eck ist, berechnen wir, seine Existenz vorausgesetzt, den  $f$ -Vektor des die minimale Auflösung tragenden Polytopes.

# Grundlagen

Elementare Notationen, grundlegende Definitionen und die kombinatorischen sowie algebraischen Grundlagen der vorliegenden Arbeit werden hier eingeführt. Wir orientieren uns in unserer Darstellung an den Büchern [Hib],[Sta1],[Zi] und [Mun]. In der ganzen Arbeit bezeichnet  $[n]$  die Menge  $\{1, \dots, n\}$ . Ist  $X$  eine endliche Menge, so ist  $2^X$  die Menge aller ihrer Teilmengen. Mit  $\mathbb{K}$  meinen wir stets einen beliebigen Körper mit unendlich vielen Elementen.

## 1. Geordnete Mengen

Eine Menge  $X$  gemeinsam mit einer Relation  $\prec$  heißt PARTIELL GEORDNET, falls die Relation folgende drei Eigenschaften erfüllt:

- (1) REFLEXIVITÄT, d.h. für alle  $x \in X$  gilt  $x \prec x$ .
- (2) TRANSITIVITÄT, d.h. für alle  $x, y, z \in X$  impliziert  $x \prec y \prec z$  die Aussage  $x \prec z$ .
- (3) ANTISYMMETRIE, d.h. für alle  $x, y \in X$  folgt aus  $x \prec y$  und  $y \prec x$ , dass  $x = y$ .

Ist eine Teilmenge  $S$  einer geordneten Menge  $X$  TOTAL GEORDNET, gilt also für je zwei Elemente  $x, y \in S$  entweder  $x \prec y$  oder  $y \prec x$ , so wird sie auch KETTE genannt. Die LÄNGE einer Kette ist die Anzahl ihrer Elemente vermindert um eins. Eine Menge  $[x \prec y] := \{z \in X \mid x \prec z \prec y\}$  heißt ORDNUNGSINTERVALL. Eine geordnete Menge ist BESCHRÄNKT, falls sie ein eindeutiges minimales Element, das wir mit  $\hat{0}$  bezeichnen, und ein eindeutiges maximales Element  $\hat{1}$  enthält. Sie heißt GRADUIERT, falls sie beschränkt ist und jede maximale Kette von gleicher Länge ist. In diesem Fall ist die RANGFUNKTION die Abbildung, die jedem Element aus  $x \in X$  die Länge einer maximalen Kette im Ordnungsintervall  $[\hat{0}, x] := \{y \in X \mid \hat{0} \prec y \prec x\}$  zuordnet. Ein VERBAND ist eine partiell geordnete, beschränkte Menge  $V$ , für die gilt, dass zu je zwei Elementen  $x, y \in X$  eindeutige maximale untere und minimale obere Schranken existieren.

ORDNUNGSERHALTENDE ABBILDUNGEN, also Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  zwischen partiell geordneten Mengen, für die  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  gilt, sind die den partiell geordneten Mengen in natürlicher Weise zugehörigen Abbildungen. Zwei partiell geordnete Mengen werden isomorph genannt, wenn zwischen ihnen eine bijektive, ordnungserhaltene Abbildung existiert, deren Umkehrabbildung ebenfalls ordnungserhaltend ist.

## 2. Mengen im $\mathbb{R}^n$

Den Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  versehen wir mit der üblichen Topologie, wie sie zum Beispiel von der euklidischen Metrik erzeugt wird. Unter den kanonischen Basisvektoren des  $\mathbb{R}^n$  verstehen wir die Vektoren  $e_i, i = 1, \dots, n$  mit  $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{ite Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$ . Ein affiner Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ist eine Menge der Form

$$U + v := \{u + v \mid u \in U\},$$

wobei  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $U$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  ist. Die DIMENSION des affinen Unterraumes ist die Dimension von  $U$ . Eine HYPEREBENE im  $\mathbb{R}^n$  ist ein affiner Unterraum der Dimension  $n - 1$ . Für jede Hyperebene  $\mathcal{H}$  des  $\mathbb{R}^n$  existieren  $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = b\}.$$

Zu einer solchen Hyperebene sei

$$\mathcal{H}^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b\}.$$

der (positive) HALBRAUM.

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt KONVEX, falls für  $x, y \in M$  auch die Verbindungslinie  $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$  in  $M$  enthalten ist. Die leere Menge ist damit konvex. Zu einer Teilmenge  $N \subset \mathbb{R}^n$  sei

$$\text{conv}(N) := \bigcap_{M \supset N, M \text{ konvex}} M$$

die KONVEXE HÜLLE, das heißt die kleinste konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , die  $N$  enthält.

Unter der  $p$ -dimensionalen SPHÄRE  $S^p$  verstehen wir die Menge aller Vektoren der Länge 1 in  $\mathbb{R}^p$ .

**2.1. Topologie im  $\mathbb{R}^n$ .** Im folgenden Abschnitt seien  $X, Y$  zwei Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt HOMÖOMORPHISMUS, falls sie stetig und bijektiv ist und ihre Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Zwei Teilmengen heißen HOMÖOMORPH ( $X \cong Y$ ), falls zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Zwei Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  werden HOMOTOP genannt, falls eine dritte Abbildung  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  existiert, so dass  $h(x, 0) = f(x)$  und  $h(x, 1) = g(x)$  für alle  $x \in X$  gilt. Die

Abbildung  $h$  ist eine HOMOTOPIE. Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist eine HOMOTOPIEÄQUIVALENZ, wenn es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $f \circ g$  homotop zu  $\text{id}_Y$  und  $g \circ f$  homotop zu  $\text{id}_X$  sind. Die Mengen  $X, Y$  sind in diesem Fall HOMOTOPIEÄQUIVALENT.

**2.2. Polytope.** Ein POLYTOP ist die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge bzw. äquivalent der Schnitt von endlich vielen Halbräumen, falls dieser beschränkt ist. Diese nicht triviale Behauptung ist Gegenstand des HAUPTSATZES DER POLYTOPTHEORIE ([Zi], Th.1.1). Die DIMENSION EINES POLYTOPES  $\dim(P)$  ist die kleinstmögliche Dimension eines affinen Unterraumes, der  $P$  enthält.

Zu einem Polytop  $P \subset \mathbb{R}^n$ , für das gilt, dass der Ursprung im Inneren des Polytopes liegt, definiert man das so genannte POLARE POLYTOP

$$\mathring{P} := \{c \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n c_i x_i \leq 1 \text{ für alle } x \in P\}.$$

Eine Teilmenge  $F$  eines Polytopes  $P$  heißt SEITE des Polytopes, falls eine Hyperebene  $\mathcal{H}$  existiert, so dass  $F = P \cap \mathcal{H}$  und  $P \subset \mathcal{H}^+$  gilt. Ein  $d$ -dimensionales Polytop heißt NACHBARSCHAFTLICH, falls für alle  $r \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  jede  $r$ -elementige Teilmenge der Eckenmenge eine Seite bildet.

Man beweist leicht, dass jede Seite eines Polytopes selbst ein Polytop mit kleinerer oder gleicher Dimension ist. Jedes Polytop ist Seite von sich selbst. Falls wir diesen Fall ausschließen möchten, sprechen wir von den ECHTEN SEITEN des Polytopes. Ein Polytop hat nur endlich viele Seiten. Seiten der Dimension 0 werden ECKEN, echte Seiten maximaler Dimension FACETTEN genannt. Die Seiten eines Polytopes ergeben bezüglich der Teilmengenrelation einen Verband, den so genannten SEITENVERBAND des Polytopes. Bezüglich der Obermengenrelation ergeben die Seiten des Polytopes den Seitenverband des polaren Polytopes. Da die Verbände dual zueinander sind, spricht man in kombinatorischen Zusammenhängen auch von dem DUALEN POLYTOP, wenn man ein Polytop meint, dessen Seitenverband dem des polaren Polytopes entspricht.

**Theorem 2.1. [Zi]**

- (1) *Der Seitenverband eines Polytopes  $P$  ist ein graduierter Verband der Länge  $\dim(P) + 1$ .*
- (2) *Jedes Ordnungsintervall  $[G, H]$  innerhalb des Verbandes ist isomorph zum Seitenverband eines Polytopes der Dimension  $\dim(H) - \dim(G) - 1$ .*
- (3) *Jedes Intervall der Länge 2 hat genau 4 Elemente und ist isomorph zum Verband  $(2^{\{x,y\}}, \subset)$ .*
- (4) *Kehrt man die Enthaltensrelation um, so erhält man einen neuen Verband, der isomorph zum Seitenverband des polaren Polytopes ist.*

Auch wenn Theorem 2.1 einige einschränkende Eigenschaften von POLYTOPALEN VERBÄNDEN, also Verbänden, die isomorph zu Seitenverbänden von Polytopen sind, aufdeckt, so ist doch eine vollständige Charakterisierung im Sinne einer kompletten Auflistung notwendiger und hinreichender Bedingungen an einen Verband, um polytopal zu sein, eines der großen ungelösten Probleme der Polytoptheorie. Diese Charakteristika können nicht lokaler Natur sein, in dem Sinne dass Eigenschaften von Unterverbänden hinreichend für Polytopalität wären: Sturmfels gibt eine Familie von nicht polytopalen Verbänden an, deren jeder Unterverband zu einem polytopalen Verband fortgesetzt werden kann [Sturm].

**2.3. Geometrische Komplexe.** Ein GEOMETRISCHER SIMPLEX der DIMENSION  $d$  im  $\mathbb{R}^n$  ist ein Polytop mit  $d + 1$  Ecken. Ein GEOMETRISCHER SIMPLIZIALER KOMPLEX oder kurz GEOMETRISCHER KOMPLEX ist eine endliche Menge von geometrischen Simplizes  $\mathcal{K} = \{\Delta_i\}$ , so dass

- (1) der Schnitt von je zwei geometrischen Simplizes wieder ein geometrischer Simplex ist und in  $\mathcal{K}$  liegt und
- (2) jede Seite eines  $\Delta_i$  ebenfalls Element von  $\mathcal{K}$  ist.

Die Menge  $\mathcal{K}$  ergibt gemeinsam mit der Inklusion eine partiell geordnete Menge, die Simplizes in  $\mathcal{K}$  werden auch SEITE genannt. Maximale Seiten in  $\mathcal{K}$  heißen FACETTEN, Simplizes der Dimension 0 werden ECKEN genannt. Die DIMENSION von  $\mathcal{K}$  entspricht der Dimension einer Seite von maximaler Dimension in  $\mathcal{K}$ . Ein geometrischer Komplex  $\mathcal{K}$  ist eine SIMPLIZIALE TRIANGULIERUNG eines geometrischen Komplexes  $\mathcal{K}'$ , falls für alle  $\sigma \in \mathcal{K}'$  eine Familie  $\{\tau_\alpha\} \subset \mathcal{K}$  von Simplizes existiert, so dass  $\bigcup \tau_\alpha = \sigma$ .

Ein Polytop heißt SIMPLIZIAL, falls seine echten Seiten einen simplizialen Komplex bilden oder äquivalent alle Facetten des Polytopes Simplizes sind. Ein Polytop, dessen duales Polytop simplizial ist, heißt EINFACHES POLYTOP.

### 3. Abstrakte Komplexe

Ein (ABSTRAKTER) SIMPLIZIALER KOMPLEX  $K$  MIT ECKENMENGE  $[n]$  ist ein Mengensystem  $K \subset 2^{[n]}$  so dass für  $\sigma \in K$  und  $\tau \subset \sigma$  auch stets  $\tau \in K$  gilt. Im Folgenden benutzen wir das Wort Komplex sowohl für geometrische also auch für abstrakte simpliziale Komplexe, wenn aus dem Kontext die gemeinte Variante hervorgeht. Die Elemente  $\sigma \in K$  heißen SEITEN oder SIMPLIZES, ihre DIMENSION ist die Anzahl der Elemente von  $\sigma$  vermindert um eins. Eine NICHTSEITE eines Komplexes ist eine Teilmenge der Eckenmenge, die nicht Element des Komplexes ist. Der Komplex  $K$  bildet gemeinsam mit der Inklusion eine partiell geordnete Menge. Maximale Seiten in  $K$  heißen FACETTEN. Ein Komplex heißt REIN, falls alle Facetten von der selben Dimension sind. Zwei abstrakte simpliziale Komplexe sind ISOMORPH, falls sie als partiell geordnete Mengen isomorph sind. Die DIMENSION entspricht der Dimension einer Seite von maximaler Dimension in  $K$ . Das  $p$ -SKELETT  $K^{(p)}$  eines Komplexes  $K$  ist der Komplex, der aus allen Seiten von

$K$  besteht, deren Dimension kleiner oder gleich  $p$  ist. Der von einer Seite  $\sigma$  induzierte Unterkomplex, das heißt der Komplex  $2^\sigma$ , wird auch mit  $\bar{\sigma}$  bezeichnet.

Zu simplizialen Komplexen  $K_1, K_2$  und einer Seite  $\sigma \in K_1$  ist

$$\text{link}_{K_1}(\sigma) := \{\tau \in K_1 \mid \tau \cup \sigma \in K_1, \tau \cap \sigma = \emptyset\}$$

der LINK BEZÜGLICH  $\sigma$  und

$$K_1 \star K_2 := \{\tau_1 \cup \tau_2 \mid \tau_i \in K_i\}$$

der JOIN der beiden Komplexe. Beide Mengen sind wiederum simpliziale Komplexe. Jedem abstrakten Simplex  $\sigma \subset [n]$  kann der geometrische Simplex  $|\sigma| := \text{conv}(\{e_i \mid i \in \sigma\})$  als seine GEOMETRISCHE REALISIERUNG zugeordnet werden. Die geometrische Realisierung eines abstrakten Komplexes erhält man durch

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|.$$

Die geometrische Realisierung eines abstrakten Komplexes ist ein geometrischer Komplex. Ein Komplex mit Facetten  $F_1, \dots, F_t$  ist SCHÄLBAR, falls (gegebenenfalls nach Ummummerierung) für jedes  $2 \leq i \leq t$  der Schnitt

$$\bar{F}_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} \bar{F}_j$$

ein reiner Komplex der Dimension  $\dim F_i - 1$  ist. Dabei bezeichnen wir mit  $\bar{F}$  den von der Facette  $F$  INDUZIERTEN KOMPLEX, der aus  $F$  und allen ihren Teilmengen besteht.

**Theorem 3.1. Bruggesser, Mani** *Randkomplexe simplizialer Polytope sind schälbar.*

### 3.1. Invarianten.

3.1.1. *Simpliziale Homologie.* Eine PERMUTATION  $\pi \in S_n$  von  $[n]$ , also eine bijektive Abbildung von  $[n]$  auf sich selbst, heißt GERADE, falls sie durch Verkettung von einer geraden Anzahl von Transpositionen  $(i, j)$  entsteht. Sei im folgenden  $\Sigma$  ein simplizialer Komplex und  $\{v_1, \dots, v_{p+1}\} = \sigma \in \Sigma$  eine  $p$ -dimensionale Seite von  $\Sigma$ . Wir bezeichnen zwei Permutationen  $\pi, \pi'$  der Indexmenge von  $\sigma$  als ÄQUIVALENT, falls eine gerade Permutation  $\tau$  existiert, so dass  $\pi \circ \tau = \pi'$ . Die beiden Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation nennen wir ORIENTIERUNG von  $\sigma$ . Falls  $p > 0$  existieren zwei Orientierungen, für Ecken nur eine. Ein ORIENTIERTER SIMPLEX, den wir auch mit  $\sigma$  bezeichnen, ist ein Simplex gemeinsam mit einer Orientierung. Mit  $[v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p+1)}]$  bezeichnen wir den orientierten Simplex  $\sigma$  mit der Orientierung, in der  $\pi$  liegt. Für einen orientierten  $p$ -Simplex  $\sigma$  mit  $p > 0$  meinen wir mit  $-\sigma$  den orientierten Simplex mit der anderen Orientierung. Ist  $p = 0$ , so gibt es nur eine Äquivalenzklasse und es gilt  $-\sigma = \sigma$ . Eine  $p$ -KETTE für  $p \geq 0$  des simplizialen Komplexes  $\Sigma$  ist eine Abbildung  $c$  von der Menge der orientierten  $p$ -Simplizes in  $\Sigma$  in die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , so dass  $c(\sigma) = -c(-\sigma)$ . Durch  $c \oplus c'(\sigma) := c(\sigma) + c'(\sigma)$  wird die Menge der orientierten  $p$ -Ketten von  $\Sigma$  zu einer abelschen Gruppe  $(\mathcal{C}_p(\Sigma), \oplus)$ . Die zu einem orientierten Simplex  $\sigma$  gehörende ELEMENTARE  $p$ -KETTE ist die  $p$ -Kette  $c$ , für die  $c(\sigma) = 1, c(-\sigma) = -1, c(\sigma') = 0$  für alle  $\sigma' \notin \{\sigma, -\sigma\}$

gilt. In den folgenden Ausführungen unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen Elementarketten und den zugehörigen Simplexes. Die RANDOPERATOREN für  $p \geq 0$

$$\begin{aligned} \partial_p : \mathcal{C}_p(\Sigma) &\longrightarrow \mathcal{C}_{p-1}(\Sigma) \\ [v_1, \dots, v_{p+1}] &\mapsto \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i [v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+1}] \end{aligned}$$

sind Gruppenhomomorphismen und müssen nur auf den Elementarketten definiert werden, da diese eine Basis der  $p$ -Ketten bilden. Dabei entsteht  $[v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$  aus  $[v_1, \dots, v_p]$  durch Streichen von  $v_i$ . Für  $p = 0$  definiert man  $\partial_0 : \mathcal{C}_0 \longrightarrow 0$ . Da  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$  für alle  $p \geq 0$  gilt, liegt das Bild  $B_p(\Sigma)$  von  $\partial_p$  im Kern  $Z_{p-1}(\Sigma)$  von  $\partial_{p-1}$ . Man kann daher für  $p \geq 0$  als Quotient dieser beiden abelschen Gruppen

$$H_p(\Sigma) := Z_p(\Sigma)/B_p(\Sigma)$$

als die  $p$ -te HOMOLOGIEGRUPPE definieren, die manchmal auch  $p$ -TE REDUZIERTER HOMOLOGIEGRUPPE genannt und mit  $\tilde{H}_p(\Sigma)$  bezeichnet wird, was von einer anderen Betrachtung des Falles  $p = 0$  abhängt: Man spricht von den reduzierten Homologiegruppen, falls man

$$\tilde{H}_0 := \ker \epsilon / B_1(\Sigma)$$

definiert, wobei  $\epsilon : C_0(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\epsilon(v) \mapsto 1$ . Es gilt dann  $H_0(\Sigma) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(\Sigma)$ . Die REDUZIERTEN BETTI-ZAHLEN  $\beta_i(\Sigma)$  sind die Ränge der freien Anteile der  $i$ -ten reduzierten Homologiegruppe.

**3.1.2. Homologie mit abelschen Koeffizienten.** Die  $p$ -Ketten müssen nicht zwangsläufig nach  $\mathbb{Z}$  abbilden: Man erhält einen erweiterten Homologiebegriff, falls man eine beliebige abelsche Gruppe  $G$  als Wertebereich zulässt. Mit einer sonst identischen Konstruktion entstehen die abelschen Gruppen  $(\mathcal{C}_p(\Sigma, G), \oplus)$ . Die zu einem orientierten Simplex  $\sigma$  und Gruppenelement  $g \in G$  gehörende ELEMENTARE  $p$ -KETTE ist die  $p$ -Kette  $c$ , für die  $c(\sigma) = g$ ,  $c(-\sigma) = -g$ ,  $c(\sigma') = 0$  für alle  $\sigma' \notin \{\sigma, -\sigma\}$  gilt. Die RANDOPERATOREN werden durch

$$\partial_p(g\sigma) = g(\partial_p \sigma)$$

definiert. Die Homologiegruppen und reduzierten Homologiegruppen mit abelschen Koeffizienten  $H_i(\Sigma, G)$  entstehen durch analoge Konstruktion.

Die besondere Bedeutung der Homologiegruppen liegt in der Tatsache begründet, dass diese invariant unter Homöomorphismen sind, d.h. dass für simpliziale Komplexe, deren geometrische Realisierungen homöomorph sind, die Homologiegruppen übereinstimmen. Homologiegruppen geben in speziellen Fällen auch Auskunft über Eigenschaften des  $h$ - und  $f$ -Vektors, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

**3.1.3.  $f$ - und  $h$ -Vektoren.** Sei im folgenden  $K$  ein  $(d-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex. Sei für  $-1 \leq i \leq d-1$  die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Seiten von  $K$  mit  $f_i$  bezeichnet. Die Zahl  $f_{d-1}$  ist die MULTIPLIZITÄT des Komplexes. Das Tupel

$$f(K) = (f_{-1}, \dots, f_{d-1})$$

ist dann der  $f$ -VEKTOR des Komplexes  $K$  und  $f(t) := \sum_{i=0}^d f_{i-1} t^{d-i}$  das  $f$ -POLYNOM. Die gleiche Information über den Komplex enthält der  $h$ -VEKTOR

$$h(K) = (h_0, \dots, h_d)$$

den man über das  $h$ -POLYNOM

$$h(t) = \sum_{i=0}^d h_i t^{d-i}$$

durch

$$(1) \quad h(x) := f(x-1) \text{ definiert.}$$

**Lemma 3.2.** Sei  $\Delta$  ein  $(d-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex mit  $f$ -Polynom  $f(t)$  und  $h$ -Polynom  $h(t)$ . Dann gilt für die Multiplizität

$$f_{d-1} = f(0) = h(1) = \sum_{i=0}^d h_i.$$

Grund für diese redundante Definition ist die größere Eleganz, in der einige der folgenden Theoreme formuliert werden können. Der  $h$ -Vektor eines Multikomplexes  $\Gamma$  ist durch  $h_i := \{u \in \Gamma \mid \deg u = i\}$  gegeben und die EULER-CHARAKTERISTIK  $\chi(K)$  eines  $(d-1)$  dimensionalen simplizialen Komplexes  $K$  wird durch

$$\chi(K) - 1 := \sum_{i=-1}^{d-1} (-1)^i f_i(K) = \sum_{i=-1}^{d-1} (-1)^i \beta_i(K)$$

definiert.

Eine natürliche Frage ist die nach der Charakterisierung derjenigen Tupel, die als  $f$ -Vektoren simplizialer Komplexe bzw. gewisser Klassen simplizialer Komplexe auftreten können. Wir geben einen kurzen Überblick über bekannte Resultate. Zunächst definieren wir die relevanten Klassen simplizialer Komplexe.

Ein  $d$ -dimensionaler simplizialer Komplex  $K$  heißt

- EULER'SCH, falls für jede Seite  $\sigma \in K$

$$\chi(\text{link}_\sigma(K)) = 1 + (-1)^{\dim \text{link}_\sigma(K)}.$$

- COHEN-MACAULAY KOMPLEX über dem (evtl. endlichen) Körper  $\mathbb{K}$ , falls für alle Seiten  $\sigma \in \Delta$  und alle  $i < \dim(\text{link}_\Delta(\sigma))$  gilt, dass  $\tilde{H}_i(\text{link}_\Delta(\sigma), \mathbb{K}) = 0$ .
- GORENSTEIN\*, falls er Euler'sch und Cohen-Macaulay ist.
- mod  $p$ -HOMOLOGIESPHÄRE falls
  - die Homologiegruppen bezüglich  $\mathbb{Z}_p$  mit denen einer Sphäre übereinstimmen, d.h.  $H_i(\Delta, \mathbb{Z}_p) \cong H_i(S^d, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } i < d \\ \mathbb{Z}_p & \text{falls } i = d \end{cases}$  für alle  $i$  und
  - für alle Seiten  $\sigma \in \Delta$  gilt  $H_i(\text{link}_\Delta(\sigma)) \cong H_i(S^{\dim \text{link}_\Delta(\sigma)}, \mathbb{Z}_p)$ .

- Homologie-Mannigfaltigkeit, falls für alle  $p \in |K|$  und alle  $i < \dim K$  gilt:

$$H_i(X, X - p) = 0 \text{ und } H_{\dim K}(|K|, |K| - p) = \mathbb{Z},$$

wobei  $H_i(|K|, |K| - p)$  die  $i$ -te relative singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  ist, auf die wir hier nicht näher eingehen und uns mit der Bemerkung begnügen, dass eine  $p$ -Homologiesphäre eine Homologie-Mannigfaltigkeit ist.

**Bemerkung 3.3.** In [Br] wird unter einer Homologiesphäre ein Komplex verstanden, der nur die erste der beiden Eigenschaften erfüllt.

Offensichtlich sind mod  $p$ -Homologiesphären Cohen-Macaulay und Gorenstein\* Komplexe über  $\mathbb{Z}_p$ .

Das folgende Theorem wurde unabhängig voneinander von Kruskal, Katona und Schützenberger bewiesen und ist als KRUSKAL-KATONA-THEOREM bekannt.

**Lemma 3.4.** (und Definition) Zu zwei natürlichen Zahlen  $l, i > 0$  existieren eindeutige Zahlen  $n_i > n_{i-1} > \dots > n_j \geq j \geq 1$  so dass

$$l = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{n_j}{j}.$$

Wir definieren

$$l^{(i)} := \binom{n_i}{i+1} + \binom{n_{i-1}}{i} + \dots + \binom{n_j}{j+1}$$

und

$$l^{<i>} := \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \dots + \binom{n_j+1}{j+1}.$$

**Theorem 3.5. Schützenberger, Kruskal, Katona** Ein Tupel  $(f_0, \dots, f_d)$  ist genau dann der  $f$ -Vektor eines  $d$ -dimensionalen simplizialen Komplexes, wenn

$$0 < f_{i+1} \leq f_i^{(i+1)}$$

für alle  $0 \leq i \leq d-1$ .

Ein ähnliches Resultat hat Stanley zur Charakterisierung schälbarer simplizialer Komplexe bewiesen.

**Theorem 3.6. Stanley** Ein Tupel  $(h_0, \dots, h_d)$  ist genau dann der  $h$ -Vektor eines  $(d-1)$ -dimensionalen, schälbaren simplizialen Komplexes, wenn

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ 0 &\leq h_{i+1} \leq h_i^{<i>}, i \geq 1. \end{aligned}$$

Eine Charakterisierung von  $f$ -Vektoren reiner simplizialer Komplexe ist bislang nicht bekannt, wohl aber einige notwendige Bedingungen:

**Theorem 3.7. Hibi** Der  $f$ -Vektor eines reinen  $d$ -dimensionalen simplizialen Komplexes erfüllt

$$(1) f_i \leq f_{(d-1)-i} \text{ für alle } 0 \leq i \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor.$$

$$(2) f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}.$$

**Theorem 3.8. Stanley** Ein Tupel  $(h_0, \dots, h_d)$  ist genau dann der  $h$ -Vektor eines Cohen-Macaulay Komplexes, wenn

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ 0 &\leq h_{i+1} \leq h_i^{<i>}, i \geq 1. \end{aligned}$$

**Theorem 3.9. Dehn-Sommerville Gleichungen** Für den  $h$ -Vektor eines simplizialen Komplexes, dessen geometrische Realisierung homöomorph zur Sphäre  $S^{d-1}$  ist und allgemeiner für  $h$ -Vektoren von Euler'schen Komplexen gilt

$$h_i = h_{d-i} \text{ für } 0 \leq i \leq d.$$

**Theorem 3.10. Björner [Bj1]** Der  $f$ -Vektor  $(f_{-1}, \dots, f_d)$  eines reinen simplizialen Komplexes, der die Dehn-Sommerville Gleichungen erfüllt, ist PARTIELL UNIMODAL:

$$(1) f_0 < f_1 < \dots < f_{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor - 1} \leq f_{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}.$$

$$(2) f_{\lfloor \frac{3d}{4} \rfloor} > \dots > f_{d-1} > f_d.$$

Das berühmte UPPER-BOUND-THEOREM liefert eine obere Schranke für den  $f$ -Vektor nicht nur für Polytope, sondern auch für simpliziale Komplexe, deren geometrische Realisierung homöomorph zu einer Sphäre ist:

**Theorem 3.11. Upper-Bound-Theorem für Sphären, Stanley** Der  $f$ -Vektor eines  $(d-1)$ -dimensionalen simplizialen Komplexes  $\Delta$  mit  $n$  Ecken für den  $|\Delta| \cong S^{d-1}$  gilt, ist komponentenweise kleiner oder gleich dem  $f$ -Vektor des zyklischen Polytopes  $C_d(n)$ .

Dabei ist das ZYKLISCHE POLYTOP  $C_d(n)$  die konvexe Hülle  $n$  verschiedener Punkte auf der  $d$ -dimensionalen MOMENTKURVE

$$M_d := \{(1, t, t^2, \dots, t^d), t \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Definition ist sinnvoll, da der Seitenverband der konvexen Hülle nicht von der Wahl der Punkte auf der Kurve abhängt.

Eine Erweiterung des Upper-Bound-Theorems für Sphären, das so genannte STRONG UPPER BOUND THEOREM (SUBT) wurde zunächst von Kalai für Randkomplexe simplizialer Polytope und ihre volldimensionalen Unterkomplexe bewiesen und anschließend von Novik [No1],[No2] wie folgt verallgemeinert:

**Theorem 3.12. SUBT, Novik** Sei  $K$  ein  $2k$ -dimensionaler Gorenstein\*-Komplex, so dass  $f_{2k}(K) \geq f_{2k}(C_{2k+1}(n))$ . Dann gilt

$$f_i(K) \geq f_i(C_{2k+1}(n)) \text{ für alle } 0 \leq i \leq 2k-1.$$

Für eine  $(2k-1)$ -dimensionale Homologie-Mannigfaltigkeit  $\Sigma$  mit  $n$  Ecken gilt

$$f_i(\Sigma) \leq f_i(C_{2k}(n)) \text{ für alle } 0 \leq i \leq 2k-1.$$

Das  $g$ -THEOREM liefert eine vollständige Charakterisierung des  $h$ -Vektors für diejenigen Sphären, die sich als Randkomplex eines Polytopes realisieren lassen. Der Name stammt von der ursprünglichen Schreibweise McMullens  $g_i = h_i - h_{i-1}$ . Zur Formulierung des  $g$ -Theorems benötigen wir noch eine Verallgemeinerung eines abstrakten Komplexes in dem Sinne, dass Ecken mit einer gewissen Multiplizität ausgestattet werden. Ein MULTIKOMPLEX  $\Gamma$  auf der Eckenmenge  $[n]$  ist eine Menge von Monomen  $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ , so dass für alle  $u \in \Gamma$  und alle Monome  $v$  gilt, dass aus  $v$  teilt  $u$  schon  $v \in \Gamma$  folgt. Die  $i$ -te Komponente des  $f$ -VEKTORS EINES MULTIKOMPLEXES ist durch die Anzahl der Monome vom Grad  $i$  in  $\Gamma$  definiert.

**Theorem 3.13.  $g$ -Theorem, Billera, Lee, McMullen, Stanley** Für ein Tupel  $h = (h_0, h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Es existiert ein simpliziales Polytop, dessen  $h$ -Vektor mit  $h$  übereinstimmt.
- (2)  $h_0 = 1$  und  $h$  erfüllt die Dehn-Sommerville Gleichungen (Satz 3.9) und  $(h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \dots, h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} - h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1})$  ist der  $f$ -Vektor eines Multikomplexes.

Aus dem Beweis von Theorem 3.13, in dem der  $h$ -Vektor eines simplizialen Polytopes in Verbindung zu den Betti-Zahlen einer gewissen torischen Varietät gebracht werden (siehe [Sta2]), folgt

**Korollar 3.14. Generalized lower bound theorem** Der  $h$ -Vektor eines simplizialen Polytopes ist UNIMODAL (und symmetrisch), d.h. es gilt

$$h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \geq h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1} \geq \dots \geq h_d.$$

## 4. Kommutative Algebra

**4.1. Graduierte Algebren.** Wir setzen voraus, dass der Leser mit den Begriffen VEKTORRAUM, BASIS und DIMENSION eines Vektorraumes bereits vertraut ist. Sind  $U, W \subset V$  Untervektorräume, so schreiben wir für ihr gemeinsames Erzeugnis  $U \oplus W$ , wenn ihr Schnitt nur aus dem 0-Vektor besteht. Ein Vektorraum  $A$  über  $\mathbb{K}$  heißt KOMMUTATIVE  $\mathbb{K}$ -ALGEBRA, falls auf  $A$  eine Multiplikation definiert ist, die für alle  $x, y, z \in A$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  die folgenden Gleichungen erfüllt:

- (1)  $xy = yx$
- (2)  $x(yz) = (xy)z$
- (3)  $x(y + z) = xy + xz$
- (4)  $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$
- (5)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ .

Eine kommutative  $\mathbb{K}$ -Algebra ist eine GRADUIERTE  $\mathbb{K}$ -Algebra, falls eine Vektorraum-Zerlegung

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$$

existiert, so dass  $A_0 = \mathbb{K}$  und für alle  $i, j \geq 0$  gilt, dass falls  $x \in A_i, y \in A_j$  folgt, dass  $xy \in A_{i+j}$ . Ein Element  $0 \neq x \in A_n$  heißt **HOMOGEN VOM GRAD  $n$**  und wir schreiben in diesem Fall  $\deg x = n$ . Eine graduierte  $\mathbb{K}$ -Algebra ist **ENDLICH ERZEUGT**, falls es eine endliche Anzahl von homogenen Elementen  $y_1, \dots, y_m$  gibt (ein so genanntes **ERZUEGENDENSYSTEM**), so dass  $A$  von der Menge

$$\{y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} \mid 0 \leq a_i \in \mathbb{Z}\}$$

linear aufgespannt wird. Eine graduierte Algebra  $B = \bigoplus_{i \geq 0} B_i$  ist eine **UNTERALGEBRA**, falls  $B_i \subset A_i$  für alle  $i \geq 0$ .

Ein zentrales Beispiel für eine graduierte kommutative  $\mathbb{K}$ -Algebra ist der Polynomring  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  mit der üblichen Graduierung der Polynome.

Ein **GRADUIERTES IDEAL**  $I$  einer graduierten  $\mathbb{K}$ -Algebra ist ein Unterraum von  $A$  so dass eine Zerlegung  $I = \bigoplus_{j \geq 0} I_j$  existiert mit  $I_j \subset A_j$  und  $A_i I_j \subset I_{i+j}$ . Für homogene Elemente  $z_1, \dots, z_m \in A$  sei

$$(z_1, \dots, z_m) := \left\{ \sum_{i=1}^m x_i z_i \mid x_i \in A \right\}$$

das von den  $z_i$  erzeugte Ideal. Es ist auf kanonische Weise ein graduiertes Ideal.

**Theorem 4.1. Hilberts Basis-Theorem** Jedes graduierte Ideal einer endlich erzeugten, graduierten  $\mathbb{K}$ -Algebra wird von einer endlichen Anzahl homogener Elemente erzeugt.

Für ein graduiertes Ideal  $I = \bigoplus_{j \geq 0} I_j$  in der graduierten  $\mathbb{K}$ -Algebra  $A = \bigoplus_{j \geq 0} A_j$  ist

$$A/I = \bigoplus_{j \geq 0} A_j/I_j$$

ein Vektorraum, in dem die von  $A$  vererbte Multiplikation unabhängig vom Repräsentanten der Klasse ist. Dadurch wird  $A/I$  wiederum zu einer graduierten Algebra, der so genannten **QUOTIENTEN-ALGEBRA**, die endlich erzeugt ist, falls  $A$  endlich erzeugt ist.

Für eine graduierte  $\mathbb{K}$ -Algebra  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  sei

$$H(A, n) := \dim_{\mathbb{K}} A_n$$

die Dimension des Unterraumes  $A_n$ . Die Funktion  $H(A, n)$  heißt **HILBERTFUNKTION**. Falls  $A$  endlich erzeugt ist nimmt sie nur endliche Werte an. Die **HILBERREIHE**

$$F(A, t) := \sum_{n \geq 0} H(A, n) t^n$$

ist die erzeugende Funktion der Hilbertfunktion. Falls sich die Hilbertreihe als rationale Funktion schreiben lässt, so nennen wir die Folge der Koeffizienten des Zählerpolynoms den **h-VEKTOR** der graduierten  $\mathbb{K}$ -Algebra. Die **MULTIPLIZITÄT** der graduierten  $\mathbb{K}$ -Algebra definieren wir in diesem Fall als Summe dieser Koeffizienten.

**4.2. Der Stanley-Reisner-Ring.** Die entscheidende Brücke zwischen kommutativer Algebra und der Theorie simplizialer Komplexe ist der so genannte STANLEY-REISNER-RING simplizialer Komplexe, den man wie folgt definiert: Sei  $\Delta$  ein abstrakter Komplex auf der Eckenmenge  $[n]$ . Man ordnet jeder Ecke  $i \in [n]$  eine Unbekannte  $x_i$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  zu und betrachtet das STANLEY-REISNER IDEAL

$$I_\Delta = \left( \prod_{i \in N} x_i \mid N \text{ minimale Nichtseite von } \Delta \right).$$

Der Stanley-Reisner-Ring ist dann die graduierte  $\mathbb{K}$ -Algebra  $\mathbb{K}(\Delta) := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I_\Delta$ . Im folgenden identifizieren wir die Monome in  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  mit ihren Bildern unter der Standard-Projektion auf den Stanley-Reisner-Ring. Man macht sich klar, dass die Menge alle Monome  $\{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}\}$  für die  $\sum a_i = n$  gilt und  $\{i \mid a_i > 0\} \in \Delta$  ist, eine Basis des Vektorraumes  $\mathcal{A}_n/(I_\Delta)_n$  bilden und erhält:

**Satz 4.2.** Die Hilbertfunktion des Stanley-Reisner-Rings  $k[\Delta]$  eines simplizialen Komplexes  $\Delta$  ist durch

$$H(k[\Delta], n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0, \\ \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{n-1}{i} & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

gegeben.

Mit der Definition in Gleichung (1) in Abschnitt 3.1.3 erhält man unmittelbar eine elegante Form der Hilbertreihe eines Stanley-Reisner-Rings:

**Satz 4.3.** Die Hilbertreihe eines Stanley-Reisner-Rings eines  $d$ -dimensionalen simplizialen Komplexes  $\Delta$  mit  $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_{d+1})$  ist

$$F(k[\Delta], t) = \frac{h_0 + h_1 t + \dots + h_{d+1} t^{d+1}}{(1-t)^{d+1}}.$$

Dabei entspricht  $(d+1)$  der KRULL-DIMENSION von  $k[\Delta]$  und ist die maximale Anzahl algebraisch unabhängiger, homogener Elemente von Grad 1.

# Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten $k$ -Triangulierungen

Die Untersuchung des simplizialen Komplexes  $\mathcal{D}_n^k$  der symmetrischen verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen eines  $2n$ -Ecks ist Gegenstand des folgenden Kapitels. Wir beweisen seine Reinheit, berechnen seine Dimension sowie die Homologie in Charakteristik 2 und geben eine Beschreibung seines Stanley-Reisner-Rings. In diesem Zusammenhang geben wir auch eine 'sparsamere' kombinatorische Beschreibung von  $\mathcal{D}_n^1$  als Familie von gewissen gerichteten Graphen auf  $n$  Knoten, so genannten Raufuß-Graphen an. Wir untersuchen den Komplex  $\mathcal{D}_n^k$  weiterhin auf seine Färbbarkeit und Polytopalität: In speziellen Fällen lässt sich  $\mathcal{D}_n^k$  als Randkomplex simplizialer Polytope realisieren: Im Fall  $k = n - 1$  ist es der Simplex, im Fall  $k = n - 2$  das zyklische Polytop und im Fall  $k = 1$  das Zyклоeder. In diesen Fällen ist die Multiplizität von  $\mathcal{D}_n^k$  bekannt. Das Kapitel endet mit einer Vermutung für eine allgemeine Formel für die Multiplizität.

## 1. Der Komplex der verallgemeinerten $k$ -Triangulierungen

Während uns (außer im Fall  $k = 1$ , siehe z.B. [Si]) keine Arbeiten über den Komplex  $\mathcal{D}_n^k$  bekannt sind, war der Komplex  $\Delta_{n,k}$  der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen des  $n$ -Ecks ohne Symmetriebeschränkungen schon Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, siehe z.B. [DKM],[Jo1],[Jo2],[Jo3],[Na]. Man kann  $\Delta_{n,k}$  als eine Verallgemeinerung des Duals des Assoziaeders auffassen, da  $\Delta_{n,1}$  isomorph zum Randkomplex dieses Polytopes ist. Wir orientieren uns an den Definitionen und Notationen in [Jo1].

Für  $n \geq 3$  betrachten wir zunächst das  $n$ -ECK als konvexe Hülle z.B. der  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$  in  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , die im Uhrzeigersinn von 0 bis  $(n-1)$  nummeriert

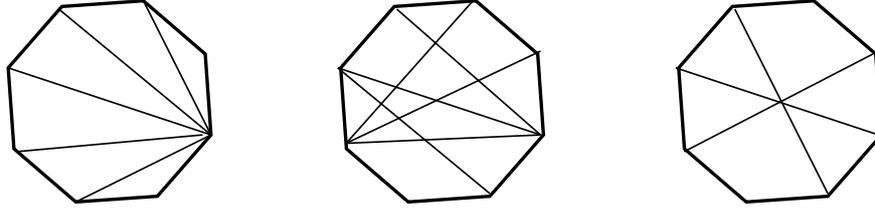


Abbildung 1. Beispiele für Facetten von  $\Delta_{8,k}$  für  $k = 1, 2, 3$ .

seien. Eine DIAGONALE IM  $n$ -ECK zwischen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Einheitswurzel ist die Punktmenge  $\partial_{i,j} := \{\lambda\xi_i + (1-\lambda)\xi_j \mid \lambda \in (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ , die wir mit der Menge  $\{i,j\}$  identifizieren und abkürzend durch  $ij$  notieren. Sei  $\Omega_n$  die Menge der Diagonalen im  $n$ -Eck, d.h.  $\Omega_n = \{ij \subset [n], i \neq j\}$ . Unter einer  $k+1$  Kreuzung  $\mathcal{K}$  verstehen wir eine  $(k+1)$ -elementige Menge von Diagonalen, so dass für je zwei Diagonalen  $i_1j_1, i_2j_2 \in \mathcal{K}$  gilt, dass  $\partial_{i_1,j_1} \cap \partial_{i_2,j_2} \neq \emptyset$  bzw. äquivalent  $i_1 < i_2$  und  $j_1 < j_2$  oder  $i_2 < i_1$  und  $j_2 < j_1$ . Diagonalen  $ij$  mit  $n-k \leq |j-i| \leq k$  können in keiner  $(k+1)$ -Kreuzung enthalten sein. Daher sei für  $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k+1$  die Menge  $\Omega_{n,k}$  als Menge aller Diagonalen  $ij$  mit  $0 \leq i < j \leq n-1$  und  $k+1 \leq j-i \leq n-k-1$  definiert. Dies sei die Eckenmenge des KOMPLEXES DER VERALLGEMEINERTEN  $k$ -TRIANGULIERUNGEN. Dieser ist der simpliziale Komplex  $\Delta_{n,k}$  der Diagonalenkonfigurationen, die keine  $(k+1)$ -Kreuzung enthalten. Im folgenden sei  $\Delta_{n,k}$  stets durch das  $n$ -Eck mit Eckennummerierung  $0, \dots, n-1$  und  $\Delta_{n-1,k}$  durch das  $(n-1)$ -Eck mit Eckennummerierung  $1, \dots, n-1$  definiert. Abbildung 1 zeigt 3 Beispiele für Facetten der Komplexe  $\Delta_{8,k}$  für  $k = 1, 2, 3$ .

Die folgenden Theoreme geben den aktuellen Wissensstand über den Komplex der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen wieder:

**Theorem 1.1.** [Jo1][DKM][Na] *Der Komplex der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen ist ein reiner,  $(k(n-2k-1)-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex.*

Für den Beweis siehe Abschnitt 3.

**Theorem 1.2.** [Jo3] *Die Anzahl der Facetten  $M_{n,k}$  des Komplexes der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen berechnet sich durch*

$$\det \begin{pmatrix} C_{n-2} & C_{n-3} & \cdots & C_{n-k} & C_{n-k-1} \\ C_{n-3} & C_{n-4} & \cdots & C_{n-k-1} & C_{n-k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-k-1} & C_{n-k-2} & \cdots & C_{n-2k+1} & C_{n-2k} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n-2k-1} \frac{i+j+2k}{i+j} = M_{n-1,k} \cdot \prod_{r=1}^{2k} \frac{2(n-2k-1)+r}{n-2k-1+r}.$$

Eine kurze Erläuterung der Beweisidee findet sich in Abschnitt 8. In [JW] gelang mit Mitteln der kommutativen Algebra sogar die Bestimmung des  $h$ -Vektors des Komplexes der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen.

**Theorem 1.3.** [Jo1] *Der Komplex der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen ist für  $2k+1 \leq n \leq 2k+3$  und für  $k=1$  polytopal. Für  $k=1$  ist er der Randkomplex des Assoziaeders,*

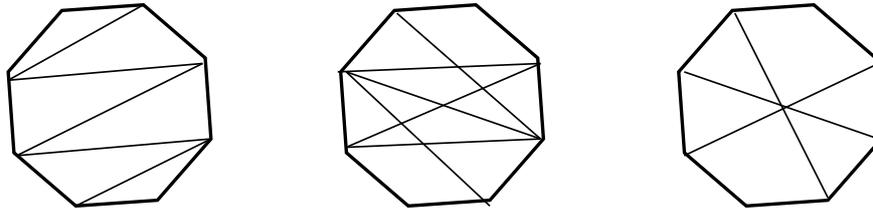


Abbildung 2. Beispiele für Facetten von  $\mathcal{D}_4^k$  für  $k = 1, 2, 3$ .

für  $n = 2k + 1$  ist er die  $(-1)$ -Sphäre, für  $n = 2k + 2$  ist er der Randkomplex des  $k$ -Simplex und für  $n = 2k + 3$  der Randkomplex eines zyklischen Polytopes.

**Theorem 1.4.** [Jo2] Der Komplex der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen ist eine schälbbare (sogar eckenzerlegbare) Sphäre.

**Vermutung 1.5.** [Jo1] Der Komplex der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen ist für alle  $n \geq 2k + 1$  polytopal.

## 2. Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten $k$ -Triangulierungen $\mathcal{D}_n^k$

Zur Diagonalen  $i, j \in \Omega_{2n}$  sei  $\bar{ij} := (i+n) \bmod 2n (j+n) \bmod 2n$  die am Mittelpunkt des  $2n$ -Ecks gespiegelte bzw. um  $180^\circ$  gedrehte Diagonale. Für eine Menge  $M$  von Diagonalen sei  $\bar{M}$  die Menge der gespiegelten Diagonalen. Eine Facette  $F$  von  $\Delta_{2n,k}$  nennen wir symmetrisch, wenn  $\bar{F} = F$  gilt, eine entsprechende Diagonale  $d$  mit  $\bar{d} = d$  nennen wir DURCHMESSER. Schließlich sei  $F_{n,k} := \{\{d, \bar{d}\} \mid d \in \Omega_{2n,k}\}$  die Menge der Diagonalen im  $2n$ -Eck, die in  $(k+1)$ -Kreuzungen enthalten sein können, wobei Paare zueinander symmetrischer Diagonalen als ein Element betrachtet werden. Mit  $F_n$  bezeichnen wir die Menge aller Paare zueinander symmetrischer Diagonalen, also  $F_n := \{\{d, \bar{d}\} \mid d \in \Omega_{2n}\}$ .

Der KOMPLEX DER TYP-B VERALLGEMEINERTEN  $k$ -TRIANGULIERUNGEN  $\mathcal{D}_k^n$  ist der simpliziale Komplex auf der Eckenmenge  $F_{n,k}$ , der aus den Teilmengen von  $F_{n,k}$  besteht, die, als Teilmengen von  $\Omega_{2n,k}$  betrachtet, keine  $(k+1)$ -Kreuzung enthalten. Als Hilfsmittel zur Übertragung der bekannten Resultate über den Komplex der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen auf den Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen benötigen wir weiterhin den Komplex des von den symmetrischen Facetten von  $\Delta_{2n,k}$  erzeugten Komplexes  $\Delta_{2n,k}^{\text{symm}}$ .

Wie bereits oben erwähnt hat der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen in der Literatur bisher nur im Fall  $k = 1$  Beachtung gefunden: Rodica Simion hat im Jahr 2000 gezeigt, dass  $\mathcal{D}_n^1$  der Randkomplex eines simplizialen Polytopes ist, das sie mit TYP-B ASSOZIAEDER bezeichnete und an anderer Stelle auch ZYKLOEDER genannt wird. Mit diesem Spezialfall befassen wir uns in Abschnitt 5.

## 3. Reinheit und Dimension von $\mathcal{D}_n^k$

Die Reinheit und Dimension des Komplexes der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen beweisen wir mit einem ähnlichen Ansatz wie er in [Jo1] verfolgt wird. Wir geben

zunächst die entscheidenden Überlegungen aus [Jo1] wieder, bevor wir diesen Ansatz auf den symmetrischen Fall übertragen.

Eine subtile Beobachtung von Jonsson ist die Tatsache, dass für bestimmte Mengen  $B, B_1$  von Diagonalen im  $n$ - bzw.  $(n-1)$ -Eck gilt:

$$(2) \quad \text{link}_{\Delta_{n,k}} B \cap \Omega_{n,k} \cong \text{link}_{\Delta_{n-1,k}} B_1 \cap \Omega_{n-1,k}.$$

Die Definition der Mengen  $B, B_1$  wird erheblich erleichtert, falls man zusätzlich zu den Diagonalen in  $\Omega_{n,k}$  noch die Menge  $\Gamma_{n,k} := \{ij \mid (j-i) = k \pmod n\}$  betrachtet.

**Lemma 3.1.** [Jo1] *Zu jeder Facette  $F$  in  $\Delta_{n,k}$  existiert eine eindeutige Menge*

$$B := B_1 \cup B_0$$

mit

$$B_1 := \{1b_1, 2b_2, \dots, kb_k\}$$

und

$$B_0 := \{0b_1, 1b_2, \dots, k-1b_k\},$$

so dass

$$k+1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n-1 \text{ und } B \subset F \cup \Gamma_{n,k}.$$

Außerdem gilt dann mit

$$Z_B := \{ij \mid b_i < j < b_{i+1}, i = 0, \dots, k\}$$

$$K_B := \{pq \mid k+1 \leq p < b_1, b_k < q \leq n-1\}$$

$$Z_B \cap F = \emptyset$$

$$K_B \cap F = \emptyset.$$

Bei der Definition des Isomorphismus in (2) betrachtet [Jo1] eine Zerlegung der Eckenmenge wie folgt:

**Lemma 3.2.** [Jo1] *Seien  $B_0, B_1, K_B, Z_B$  wie in Lemma 3.1, mit*

$$S_0 := \{(i-1)j \mid i \in [1, k], b_i < j \leq n-k-2+i\}$$

$$S'_0 := \{ij \mid i \in [1, k], b_i < j \leq n-k-2+i\}$$

$$S_1 := \{ij \mid 1 \leq i \leq k, i+k+1 \leq j < b_i\}$$

$$S_2 := \{ij \mid k+1 \leq i, j \leq n-1\} \cap \Omega_{n,k} \setminus K_B$$

erhält man disjunkte Zerlegungen

$$\Omega_{n,k} = B \cup Z_B \cup K_B \cup S_0 \cup S_1 \cup S_2$$

$$\Omega_{n-1,k} = B_1 \cup K_B \cup S'_0 \cup S_1 \cup S_2.$$

Für die Eckenmenge  $T_{n,k}$  von  $\text{link}_{\Delta_{n,k}}((B \cap \Omega_{n,k}))$  gilt:

$$T_{n,k} = (S_0 \cup S_1 \cup S_2)$$

und für die Eckenmenge  $T_{n-1,k}$  von  $\text{link}_{\Delta_{n-1,k}}(B_1 \cap \Omega_{n-1,k})$ :

$$T_{n-1,k} = (S'_0 \cup S_1 \cup S_2).$$

**Lemma 3.3.** [Jo1] *Die Abbildung*

$$\varphi_B : S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup B \longrightarrow S'_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup B_1$$

$$ij \mapsto \begin{cases} (i+1)j \text{ falls } ij \in B_0 \cup S_0 \\ ij \text{ falls } ij \in B_1 \cup S_1 \cup S_2 \end{cases}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\text{link}_{\Delta_{n,k}} B \cap \Omega_{n,k} \cong \text{link}_{\Delta_{n-1,k}} B_1 \cap \Omega_{n-1,k}.$$

Mit den genannten Resultaten beweist [Jo1] den folgenden Satz, der zuerst in [DKM] bewiesen wurde:

**Satz 3.4.** [Jo1] [DKM] *Für  $k \geq 1$  und  $n \geq 2k + 2$  ist  $\Delta_{n,k}$  ein reiner simplizialer Komplex der Dimension  $k(n - 2k - 1) - 1$ .*

Wir beweisen die Reinheit und eine Formel für die Dimension des Komplexes der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen  $\mathcal{D}_k^n$ , indem wir durch Induktion über  $n$  zeigen, dass jede seiner Facetten genau  $k$  Diagonalen mit der Eigenschaft  $d = \bar{d}$  enthält. Zu diesem Zweck konstruieren wir eine Zerlegung der Eckenmenge der relevanten links von  $\Delta_{2n,k}^{\text{symm}}$  wie folgt:

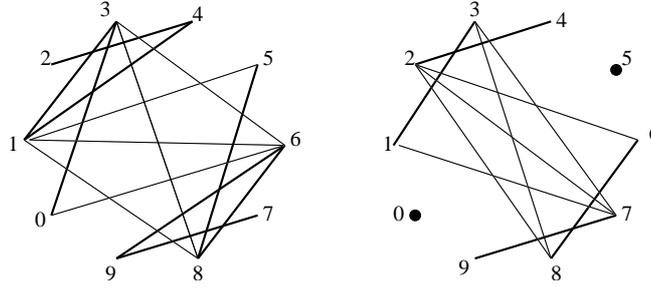
**Definition 3.5.** *Seien  $b_0 = k + 1 \leq b_1 < \dots < b_k \leq 2n - 1$ ,  $b_{k+1} := 2n$  und wie in Lemma 3.1 seien*

$$\begin{aligned} \Omega_{2n,k} &:= \{0 \leq i < j \leq 2n - 1 \mid k + 1 \leq j - i \leq 2n - k - 1\}, \\ B_0 &:= \{(i - 1)b_i \mid i = 1, \dots, k\}, \\ B_1 &:= \{ib_i \mid i = 1, \dots, k\} \\ B &:= B_0 \cup B_1 \\ S_0 &:= \{(i - 1)j \mid b_i < j \leq 2n - k - 1 + i\} \\ S_1 &:= \{ij \mid k + i + 1 \leq j < b_i, i = 1, \dots, k\} \\ K_B &:= \{ij \mid k + 1 \leq i < b_1 \text{ und } b_k < j \leq 2n - 1\} \\ K_{\mathcal{B}} &:= \begin{cases} K_B & \text{falls } b_k \neq n + 1 \\ K_B \setminus \{ij \mid j = n + 2\} & \text{falls } b_k = n + 1 \end{cases} \\ S_2 &:= (\{ij \mid k + 1 \leq i, j \leq 2n - 1\} \cap \Omega_{2n,k}) \setminus K_B \\ Z_B &:= \{ij \mid b_i < j < b_{i+1}, i = 0, \dots, k\} \end{aligned}$$

**Lemma 3.6.** *Für die Eckenmenge  $T_{2n,k}^{\text{symm}}$  von  $\Sigma_{2n,k}^{\text{symm}} := \text{link}_{\Delta_{2n,k}^{\text{symm}}}((B \cup \bar{B}) \cap \Omega_{2n,k})$  gilt:*

$$T_{2n,k}^{\text{symm}} = (S_0 \cup S_1 \cup S_2) \cap (\bar{S}_0 \cup \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2).$$

*Beweis.* Nach Lemma 3.2 enthält eine Facette aus  $\text{link}_{\Delta_{2n,k}}(B \cap \Omega_{2n,k})$  nur Diagonalen aus  $S_0 \cup S_1 \cup S_2$ , weshalb wegen Rotationssymmetrie Facetten aus  $\text{link}_{\Delta_{2n,k}}(\bar{B} \cap \Omega_{2n,k})$  nur Diagonalen aus  $\bar{S}_0 \cup \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$  enthalten. Elemente von  $\Sigma_{2n,k}^{\text{symm}}$  liegen in beiden Komplexen, woraus die Behauptung folgt.  $\square$



**Abbildung 3.** Beispiel für die Wirkung von  $\varphi$  auf eine Facette von  $\Delta_{5,2}^{\text{symm}}$ , Elemente aus  $B \cup \bar{B}$  sind fett.

**Definition 3.7.** Sei

$$\tilde{\Omega}_{2n-2,k} := \{1 \leq i < j \leq 2n-1 \mid i, j \neq n, k+1 \leq j-i \leq 2n-k-1\},$$

die Eckenmenge von  $\Delta_{2n-2,k}^{\text{symm}}$  bezogen auf das  $(2n-2)$ -Eck mit Nummerierung der Ecken  $1, \dots, n-1, n+1, \dots, 2n-1$ .

Wir definieren die Wirkung der Abbildung  $\varphi : T_{2n,k}^{\text{symm}} \cup B \cup \bar{B} \rightarrow \tilde{\Omega}_{2n-2,k}$  auf die Diagonale  $ij$  durch die folgende Tabelle, wobei jede Zelle für den Fall steht, dass die Diagonale  $ij$  mit  $i < j$  im Schnitt der Mengen in der jeweiligen Zeile und Spalte liegt.

	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$B_0$	$B_1$
$\bar{S}_0$	$(i+1)(j+1)$	$i(j+1)$	$i(j+1)$	$(i+1)(j+1)$	$i(j+1)$
$\bar{S}_1$	$(i+1)j$	$ij$	$ij$	$(i+1)j$	$ij$
$\bar{S}_2$	$(i+1)j$	$ij$	$ij$	$(i+1)j$	$ij$
$\bar{B}_0$	$(i+1)(j+1)$	$i(j+1)$	$i(j+1)$	$(i+1)(j+1)$	$(\emptyset)$
$\bar{B}_1$	$(i+1)j$	$ij$	$ij$	$(\emptyset)$	$ij$

Sei  $\mathcal{B} := \varphi(B)$  und  $\mathcal{T}_{2n-2,k}^{\text{symm}}$  die Eckenmenge von  $\tilde{\Sigma}_{2n-2,k} := \text{link}_{\Delta_{2n-2,k}^{\text{symm}}} ((B \cup \bar{B}) \cap \tilde{\Omega}_{2n-2,k})$ .

**Bemerkung 3.8.** Die Abbildung  $\varphi$  ist trotz der Lücken in der Tabelle in Definition 3.7 wohldefiniert, denn  $B_0 \cap \bar{B}_1 = \emptyset$ : Sei  $(i-1)b_i \in B_0 \cap \bar{B}_1$ , dann existiert ein  $j \leq k$  so dass  $b_i = n+j$  und  $\bar{b}_j = i-1$ , also  $b_j = n+i-1$ . Dann folgt aber, dass  $b_i \leq b_j$  genau dann gilt, wenn  $j \leq i$ , was ein Widerspruch zur Nummerierung der  $b_l$  ist.

**Lemma 3.9.** Für die Eckenmenge  $\mathcal{T}_{2n-2,k}^{\text{symm}}$  von  $\tilde{\Sigma}_{2n-2,k} := \text{link}_{\Delta_{2n-2,k}^{\text{symm}}} ((B \cup \bar{B}) \cap \tilde{\Omega}_{2n-2,k})$  gilt:

$$\mathcal{T}_{2n-2,k}^{\text{symm}} = \tilde{\Omega}_{2n-2,2} \setminus (\mathcal{K}_{\mathcal{B}} \cup \mathcal{B} \cup \overline{\mathcal{K}_{\mathcal{B}} \cup \mathcal{B}}).$$

*Beweis.* Die Menge  $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$  enthält genau die Diagonalen, die gemeinsam mit  $\mathcal{B}$  eine  $(k+1)$ -Kreuzung ergeben, woraus die Behauptung über  $\mathcal{T}_{2n-2,k}^{\text{symm}}$  folgt.  $\square$

**Lemma 3.10.** Für die Abbildung  $\varphi$  gilt:

- (1) Sie erhält die Rotationssymmetrie, d.h.  $\varphi(\bar{e}) = \overline{\varphi(e)}$ .
- (2) Die Bilder der Mengen  $B_0$  und  $B_1$  unter  $\varphi$  stimmen überein.

- (3) Jeder Durchmesser in  $\mathcal{T}_{2n-2,k}^{\text{symm}} \cup \mathcal{B} \cup \bar{\mathcal{B}}$  ist Bild eines Durchmessers in  $\mathcal{T}_{2n,k}^{\text{symm}} \cup \mathcal{B} \cup \bar{\mathcal{B}}$ .
- (4) Sei  $F$  eine Facette in  $\Delta_{2n,k}^{\text{symm}}$ . Jeder Durchmesser in  $\varphi(F)$  ist Bild eines Durchmessers in  $F$ .
- (5) Enthält eine Teilmenge  $\sigma \subset \mathcal{T}_{2n-2,k}^{\text{symm}} \cup \mathcal{B} \cup \bar{\mathcal{B}}$  keine  $(k+1)$ -Kreuzung, so gilt dies auch für  $\varphi(\sigma)$ .
- (6) Enthält eine Teilmenge  $\sigma \subset \mathcal{T}_{2n,k}^{\text{symm}} \cup \mathcal{B} \cup \bar{\mathcal{B}}$  keine  $(k+1)$ -Kreuzung, so gilt dies auch für  $\varphi^{-1}(\sigma)$ .

*Beweis.*

- (1) Klar aus der Symmetrie der Tabelle in der Definition von  $\varphi$ .
- (2) Wir zeigen:

$$ib_{i+1} \in B_0 \cap (\bar{B}_0 \cup \bar{S}_0) \Leftrightarrow (i+1)b_{i+1} \in B_1 \cap (\bar{B}_0 \cup \bar{S}_0) = B_1 \cap \bar{S}_0$$

und damit

$$\varphi(ib_{i+1}) = (i+1)(b_{i+1} + 1) \Leftrightarrow \varphi(i+1b_{i+1}) = (i+1)(b_{i+1} + 1)$$

$$\text{und } \varphi(ib_{i+1}) = \varphi((i+1)b_{i+1}) = (i+1)b_{i+1} \text{ sonst.}$$

Wir haben bereits in Bemerkung 3.8 gezeigt, dass  $B_0 \cap \bar{B}_1 = \bar{B}_0 \cap B_1 = \emptyset$ .

Sei  $ib_{i+1} \in B_0 \cap (\bar{B}_0 \cup \bar{S}_0)$ , dann ist

$$n \leq b_{i+1} \leq n+k-1 \text{ und } i+1 > i \geq (b_{b_{i+1}-n+1} + n) \bmod 2n,$$

somit folgt

$$(i+1)b_{i+1} \in B_1 \cap (\bar{B}_0 \cup \bar{S}_0).$$

Ist umgekehrt  $(i+1)b_{i+1} \in B_1 \cap \bar{S}_0$ , so gilt

$$i+1 > (b_{b_{i+1}-n+1} + n) \bmod 2n, \text{ also } i \geq (b_{b_{i+1}-n+1} + n) \bmod 2n$$

und damit  $ib_{i+1} \in B_0 \cap (\bar{B}_0 \cup \bar{S}_0)$ .

- (3) Sei zunächst  $i(i+n) \in \mathcal{T}_{2n-2,2}$  mit  $i \notin [1, k]$ . Dann ist  $i(i+n) \in S_2 \cap \bar{S}_2$  und somit ist  $\varphi(i(i+n)) = (i, i+n)$ .

Sei nun  $i \in [1, k]$ . Falls  $b_i < n+i-1$  ist  $(i-1)(n+i-1) \in S_0 \cap \bar{S}_0$ . Somit ist  $\varphi((i-1)(i-1+n)) = (i(i+n))$ . Falls  $b_i = n+i-1$  und damit  $(i-1)(n+i-1) \in B_0 \cap \bar{B}_0$ , ist  $\varphi((i-1)(n+i-1)) = i(i+n)$ .

Falls  $b_i = n+i$ , dann ist  $ib_i \in B_1 \cap \bar{B}_1$ . Somit ist  $\varphi(i(n+i)) = i(i+n)$ .

Falls  $b_i > n+i$ , dann ist  $i(n+i) \in S_1 \cap \bar{S}_1$ . Somit ist  $\varphi(i(i+n)) = i(i+n)$ .

- (4) Seien  $F$  eine Facette in  $\Delta_{2n,k}^{\text{symm}}$  und  $d = i(i+n)$  ein Durchmesser in  $\varphi(F)$ . Falls  $\varphi(e) = d$  für ein  $e$ , das kein Durchmesser ist, dann gilt auch  $\varphi(\bar{e}) = d$ . Die Diagonalen  $e, \bar{e}$  sind dann von der Form  $e = (i-1)(i+n), \bar{e} = i(i+n-1)$ . Nun kreuzt aber jede Diagonale im  $2n$ -Eck, mit Ausnahme des Durchmessers  $d' := (i-1)(n+i-1)$ , die sich mit  $d$  kreuzt, auch mindestens eine der Diagonalen  $e, \bar{e}$ . Da sich  $d, d'$  nicht mit  $e, \bar{e}$  kreuzen, ist entweder  $d$  oder  $d'$  in  $F$  enthalten.

Wir zeigen, dass einer der beiden Durchmesser  $d, d'$  tatsächlich von  $\varphi$  auf  $d$  abgebildet wird und in  $F$  vorhanden ist. Für die Diagonale  $e$  gilt nach Definition von  $\varphi$ , dass  $e \in S_0 \cup B_0 \setminus (\bar{S}_0 \cup \bar{B}_0)$ .

Falls  $e \in B_0$ , so gilt  $i - 1 \in [0, k - 1]$  und  $n + i = b_i$ . Dann ist  $d \in B_1 \cap \bar{B}_1$  und somit ist sichergestellt, dass  $d \in F$  und  $\varphi(d) = d$  gilt.

Falls  $e \in S_0$ , so gilt  $i - 1 \in [0, k - 1]$  und  $b_i < n + i$ . Da  $\bar{e} \notin S_0 \cup B_0$ , muss  $n + i - 1 < b_{i+1}$  gelten. Daraus folgt, dass  $\bar{e} \in Z_B$  und somit  $\bar{e} \notin F$ , sobald  $b_i < n + i - 1$  gelten würde. Also ist  $b_i = n + i - 1$ , folglich  $d' \in B_0 \cap \bar{B}_0$  und damit  $d' \in F$  und  $\varphi(d') = d$ .

- (5) Sei  $\sigma \subset \mathcal{T}_{2n-2,k}^{\text{symm}} \cup B \cup \bar{B}$  eine maximale Teilmenge ohne  $(k + 1)$ -Kreuzung, und wir nehmen an, dass  $\tau = \varphi(\sigma)$  eine  $(k + 1)$ -Kreuzung  $E$  enthält. Wir wählen die Kreuzung  $E$  so, dass sie eine maximale Zahl von Elementen aus  $\mathcal{B} \cup \bar{\mathcal{B}}$  enthält.

Da  $\varphi(B_0) = \varphi(B_1)$  gilt, ist  $\varphi(\sigma \setminus B_0) = \varphi(\sigma)$ . Es müssen folglich zwei sich nicht kreuzende Diagonalen  $ix, jy \in \sigma \setminus B_0$  existieren, so dass  $\varphi(ix, jy) \subset E$ . Dann muss aber ohne Einschränkung  $i = j \leq k - 1$  gelten und  $ix \in S_0$  sowie  $iy \notin S_0$ . Das heißt  $x > b_{i+1}$  und  $y \leq b_i$ . Sicher ist  $\varphi(ix) \notin \mathcal{B}$ .

Wir definieren die Mengen  $E', E''$  durch

$$E' := (E \setminus \varphi(ix)) \cup (i + 1)b_{i+1}$$

$$E'' := (E \setminus \varphi(ix)) \cup (i + 1)(b_{i+1} + 1).$$

Beide Mengen sind  $(k + 1)$ -Kreuzungen, falls  $x > b_{i+1} + 1$  gilt. Mindestens eine der beiden Kreuzungen enthält ein weiteres Element aus  $\mathcal{B}$ , dass nicht in  $E$  enthalten ist, was ein Widerspruch bedeutet.

Falls  $x = b_{i+1} + 1$  ist  $E'$  eine neue  $(k + 1)$ -Kreuzung. In diesem Fall darf also  $(i + 1)b_{i+1}$  nicht aus  $\mathcal{B}$  sein.

Die Menge  $E''$  ist nur dann eine neue  $(k + 1)$ -Kreuzung, wenn  $\varphi(ix) = (i + 1)(x + 1)$ , denn sonst ist  $E'' = E$ .

Die bisherige Argumentation führt also genau dann nicht zum Widerspruch, wenn

- (a)  $(i + 1)b_{i+1} \notin \mathcal{B}$
- (b)  $\varphi(ix) = (i + 1)x$
- (c)  $x = b_{i+1} + 1$ .

Aus (a) folgt, dass  $ib_{i+1} \in B_0 \cap (\bar{B}_0 \cup \bar{S}_0)$ , aus (b) und (c), dass  $ix \in S_0 \setminus (\bar{B}_0 \cup \bar{S}_0)$ .

Das heißt, dass  $n \leq b_{i+1} \leq n + k - 1$ ,  $i \geq b_{b_{i+1}-n}$  und  $b_{i+1} + 1 > n + k - 1$ . Also ist  $b_{i+1} = n + k - 1$  und damit  $i \geq b_{k-1} \geq k + 1$ , was ebenfalls einen Widerspruch ergibt.

- (6) Wir zeigen, dass sich zwei sich kreuzende Diagonalen auch nach der Anwendung von  $\varphi$  kreuzen. Damit folgt, dass falls eine Teilmenge  $\sigma \subset \mathcal{T}_{2n-2,k}^{\text{symm}} \cup B \cup \bar{B}$  keine  $(k + 1)$ -Kreuzung enthält und  $\varphi^{-1}(\sigma)$  enthielte eine  $(k + 1)$ -Kreuzung, dies im Widerspruch zur Voraussetzung auch für  $\varphi(\varphi^{-1}(\sigma)) = \sigma$  gelten würde.

Angenommen also, dass sich  $ix$  und  $jy$  kreuzen, nicht aber ihr Bild unter  $\varphi$ , so gilt ohne Einschränkung  $j = i + 1$ ,  $ix \in S_0 \cup B_0$ ,  $(i + 1)y \in B_1 \cup S_1 \cup S_2$ ,  $y > x$ .

Daraus folgt, dass  $x \geq b_{i+1}$  und im Fall  $(i+1)y \in B_1 \cup S_1$ , dass  $y \leq b_{i+1}$ , was  $y > x$  widerspricht.

Falls  $(i+1)y \in S_2$  gelten würde, so wäre  $i+1 = k$  und aus  $y > x \geq b_k$  folgt  $(i+1)y \in K_B \not\subset S_2$ .

□

**Satz 3.11.** Für  $n \geq k+1$  enthält jede Facette in  $\Delta_{2n,k}^{\text{symm}}$  genau  $k$  Durchmesser.

*Beweis.* Da  $\Omega_{2k+2,k}$  nur aus Durchmessern besteht und nach Satz 3.4  $\dim \Delta_{2k+2,k} = k-1$  gilt, ist der Induktionsanfang klar. Sei  $F$  eine Facette in  $\Delta_{2n,k}^{\text{symm}}$ . Dann enthält  $\varphi(F) \cup \mathcal{B} \cup \bar{\mathcal{B}}$  nach Lemma 3.10 keine  $(k+1)$ -Kreuzung, ist also Seite von  $\Delta_{2n-2,k}^{\text{symm}}$ . Die Seite  $\varphi(F)$  enthält bereits eine maximale Anzahl von Durchmessern, denn könnte man einen Durchmesser  $d$  zu  $\varphi(F)$  hinzufügen, ohne zugleich eine  $(k+1)$ -Kreuzung zu erzeugen, so enthielte auch  $\varphi^{-1}(\varphi(F) \cup \{d\}) \supset F \cup \varphi^{-1}(d)$  keine  $(k+1)$ -Kreuzung. Dies ist ein Widerspruch, da  $F$  eine Facette ist ( $\varphi^{-1}(d)$  existiert nach Lemma 3.10). Nach Induktionsvoraussetzung enthält  $\varphi(F)$  genau  $k$  Durchmesser. Da nach Lemma 3.10 jeder dieser Durchmesser Bild eines Durchmessers in  $F$  ist, kann  $F$  nicht weniger Durchmesser enthalten. Sicherlich kann  $F$  auch nicht mehr Durchmesser enthalten, da sich alle Durchmesser paarweise kreuzen.

□

**Korollar 3.12.** Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen  $\mathcal{D}_n^k$  ist ein reiner,  $k(n-k) - 1$ -dimensionaler Komplex.

*Beweis.* Jede Ecke von  $\mathcal{D}_n^k$  besteht entweder aus einem Durchmesser oder aus einem Paar mittelpunktsymmetrischer Diagonalen im  $2n$ -Eck. Somit berechnet sich seine Dimension zu

$$d = \frac{\dim \Delta_{2n,k}^{\text{symm}} + 1 - k}{2} + k - 1 = \frac{k(2n - 2k - 1) + 1 - k}{2} + k - 1 = k(n - k) - 1.$$

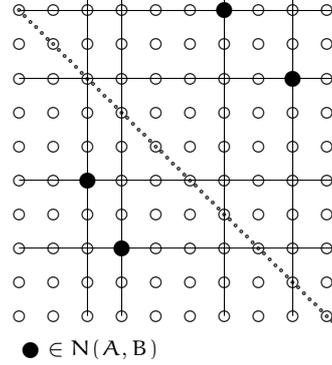
□

**Korollar 3.13.** Für  $(n-k) = 2$  gilt: Falls  $\mathcal{D}_n^k$  isomorph zu dem Randkomplex eines simplizialen Polytopes  $P$  ist, so ist  $P$  ein nachbarschaftschaftliches Polytop.

#### 4. Der Stanley-Reisner-Ring von $\mathcal{D}_n^k$

Wir setzen im folgenden  $k \bmod k = k$ . Seien  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}$  Unbestimmte über dem Körper  $\mathbb{K}$ . In diesem Abschnitt zeigen wir, wie die Nichtseiten des Komplexes der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen in Bijektion zu den Submatrizen der Matrix  $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  gesetzt werden können: Zu  $\emptyset \neq A, B \subset [n]$ ,  $\#A = \#B = (k+1) < n$  sei  $M(A, B) := (x_{ij})_{i \in A, j \in B}$  die von  $A, B$  erzeugte SUBMATRIX. Zu dieser Submatrix  $M(A, B)$  sei für  $(k+1) > 1$

$$(3) \quad N(A, B) := \{(a_{(i+1) \bmod (k+1)}, b_i), i = 1, \dots, (k+1)\}$$



**Abbildung 4.**  $N(A, B)$  für  $n = 10$ ,  $r = 4$ ,  $A = \{1, 3, 6, 8\}$ ,  $B = \{3, 4, 7, 9\}$

wobei  $(k + 1) \geq l \geq 0$  so gewählt ist, dass

$$(4) \quad a_{i+1} > b_i \text{ für alle } i = 1, \dots, (k + 1) - l \text{ und}$$

$$(5) \quad a_{j+l-1} \leq b_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, (k + 1) - l + 1\} \text{ oder } l = 0.$$

Für  $k = 0$  setzen wir  $N(A, B) = \{(a_1, b_1)\}$ .

Anschaulich besteht  $N(A, B)$  aus der längsten Nebendiagonalen von  $M(A, B)$ , die sich unterhalb der Hauptdiagonalen befindet und der Hauptdiagonalen der Restmatrix. Beispielsweise ist für  $n = 10$ ,  $r = 4$ ,  $A = \{1, 3, 6, 8\}$ ,  $B = \{3, 4, 7, 9\}$  die Menge  $N(A, B) = \{(6, 3), (8, 4), (1, 7), (3, 9)\}$ , siehe Abbildung 4.

**Satz 4.1.** *Das Stanley-Reisner Ideal von  $\mathcal{D}_n^k$  wird von den Monomen*

$$m_{A,B} = \prod_{(i,j) \in N(A,B)} x_{i,j}$$

mit  $\sharp A = \sharp B = (k + 1)$  erzeugt.

*Beweis.* Die folgenden Lemmata liefern eine Bijektion  $\Psi$  zwischen  $F_n$  und  $[n] \times [n]$ , so dass  $(k + 1)$ -Kreuzungen in  $F_n$ , also die minimalen Nichtseiten von  $\mathcal{D}_n^k$ , auf Mengen vom Typ  $N(A, B)$  abgebildet werden und umgekehrt. Der Komplex  $\mathcal{D}_n^k$  kann deshalb ebenso gut auf der Eckenmenge  $\Psi(F_{n,k}) = [n] \times [n] \setminus \{(i, j) \mid j = (i + l) \bmod n \text{ für ein } l < k\}$  als derjenige Komplex definiert werden, dessen minimale Nichtseiten genau die Mengen vom Typ  $N(A, B)$  sind.  $\square$

**Lemma 4.2.** *Sei  $V = [n] \times [n]$ . Die Abbildungen*

$$\Psi : F_n \rightarrow V, \{\{a_1 < b_1\}, \{a_2 < b_2\}\} \mapsto \begin{cases} ((a_i + 1) \bmod n, b_i \bmod n) & \text{falls } b_i - a_i \leq n \\ ((b_i + 1) \bmod n, a_i \bmod n) & \text{falls } b_i - a_i > n, \end{cases}$$

$$\Phi : V \rightarrow F_n, (a, b) \mapsto \begin{cases} \{\{(a - 1) \bmod 2n, b\}, \{a - 1 + n, b + n\}\} & \text{falls } a \leq b \\ \{\{a - 1 + n, b\}, \{a - 1, b + n\}\} & \text{falls } a > b \end{cases}$$

sind (wohldefinierte) Bijektionen und invers zueinander. Außerdem gilt

$$\Psi(F_{n,k}) = [n] \times [n] \setminus \{(i, j) \mid j = (i + l) \bmod n \text{ für ein } l < k\}.$$

*Beweis.* Die Funktion  $\Phi$  ist wohldefiniert: Sei  $\{d_1, d_2\} \in F_n$  mit  $d_i = \{a_i < b_i\}$  und  $|b_1 - a_1| \leq n$  und  $|b_2 - a_2| > n$ , dann ist  $b_2 = a_1 + n$  und  $a_2 = b_1 + n$  und somit  $(b_2 + 1) \bmod n = (a_1 + 1) \bmod n$  und  $a_2 \bmod n = b_1 \bmod n$ .

Wir zeigen zuerst, dass  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_V$ :

Sei  $v = (a, b)$  mit  $a, b \in [n]$  und  $a \leq b$ . Dann ist  $(a-1)+n < b+n$  und  $b+n-(a-1+n) \leq n$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi((a, b)) &= \Psi(\{(a-1) \bmod 2n, b\}, \{a-1+n, b+n\}) \\ &= ((a-1+n+1) \bmod n, b \bmod n) \\ &= (a, b). \end{aligned}$$

Ist  $b < a$ , so ist  $\Psi \circ \Phi((a, b)) = \Psi(\{a-1+n, b\}, \{a-1, b+n\})$ .

Falls  $a-1+n-b > n$  gilt

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi((a, b)) &= ((a-1+n+1) \bmod n, b) \\ &= (a, b). \end{aligned}$$

Falls  $a-1+n-b = n$  gilt

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi((a, b)) &= ((b+1) \bmod n, a-1+n \bmod n) \\ &= (a, b). \end{aligned}$$

Weiterhin ist  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{F_n}$ :

Sei  $\{d, \bar{d}\} = v \in F_n$ , dann können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $d = \{x < y\}$  mit  $y - x \leq n$ . Also ist  $\Psi(v) = ((x+1) \bmod n, y \bmod n)$ .

Wir unterscheiden

**Fall 1:**  $(x+1) \bmod n \leq y \bmod n$

Hier ist

$$\Phi \circ \Psi(v) = \{((x+1) \bmod n - 1) \bmod 2n, y \bmod n\}, \{(x+1) \bmod n - 1 + n, y \bmod n + n\}.$$

Falls  $y \leq n$  so ist auch  $x+1 \in [n]$  und  $\{((x+1) \bmod n - 1) \bmod 2n, y \bmod n\} = \{x, y\}$ , folglich  $\Phi \circ \Psi(v) = v$ .

Falls  $y > n$  ist  $n \leq x < y-1$  und daher  $\{(x+1) \bmod n - 1 + n \bmod 2n, y \bmod n + n\} = \{x, y\}$ , folglich  $\Phi \circ \Psi(v) = v$ .

**Fall 2:**  $(x+1) \bmod n > y \bmod n$

Hier ist  $y > n$  und  $x+1 \leq n$ , also gilt

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(v) &= \{(x+1) \bmod n - 1 + n, y \bmod n\}, \{(x+1) \bmod n - 1, y \bmod n + n\}, \\ &\text{und } \{(x+1) \bmod n - 1, y \bmod n + n\} = \{x, y\}, \text{ folglich } \Phi \circ \Psi(v) = v. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage sieht man wie folgt:

Sei  $\{d, \bar{d}\} \in F_n \setminus F_{n,k}$  und ohne Einschränkung sei  $d = \{x < y\}$  mit  $y - x \leq k$ . Dann ist  $\Psi(\{x, y\}) = ((x+1) \bmod n, y \bmod n) =: (a, b)$  und es gibt ein  $l < k$  so dass  $y = x + 1 + l$ . Also ist  $b = (a + 1 + l) \bmod n = ((a + 1) \bmod n + l) \bmod n = a + l \bmod n$ .

Falls umgekehrt  $(i, j) \in [n] \times [n]$  gilt und es ein  $l < k$  gibt, so dass  $(i + l) \bmod n = j$ , dann ist  $\Phi(i, j) = \{(i-1) \bmod 2n, j\}, \{i-1+n < j+n\}$  falls  $i < j$ . Dann ist  $j+n-(i-1+n) = i+l-i+1 = l+1 \leq k$  und damit  $\Psi(i, j) \in F_n \setminus F_{n,k}$ . Falls  $i > j$  ist  $\Phi(i, j) = \{(i-1+n, j), \{i-1, j+n\}\}$  und  $i+l-n = j$ . Also ist  $j+n-(i-1) = i+l-i+1 = l+1 \leq k$  und damit ebenfalls  $\Psi(i, j) \in F_n \setminus F_{n,k}$ .  $\square$

**Lemma 4.3.** Seien  $A, B \subset [n]$  mit  $\#A = \#B = r$  und  $N(A, B)$  wie oben definiert. Dann enthält  $\Phi(N(A, B))$  eine  $r$ -Kreuzung.

*Beweis.* Sei  $A = \{a_1 < \dots < a_r\}$  und  $B = \{b_1 < \dots < b_r\}$ . Dann gibt es ein  $r \geq l \geq 0$  so dass  $N(A, B) = \{(a_{(i+l) \bmod r}, b_i), i = 1, \dots, r\}$  mit

$$(6) \quad a_{i+l} > b_i \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, r-l\} \text{ und}$$

$$(7) \quad a_{j+l-1} \leq b_j \quad \text{für ein } j \in \{1, \dots, r-l+1\} \text{ oder } l = 0.$$

Sei zunächst  $l \neq 0$ . Wegen (6) und da  $b_i > a_{i+l-r}$  für  $i = r-l+1, \dots, r$  ist

$$\Phi(N(A, B)) = \left\{ \begin{array}{ll} \{a_{i+l} - 1, b_i + n\}, \{a_{i+l} - 1 + n, b_i\} & \text{für } i = 1, \dots, r-l \\ \{a_{i+l-r} - 1 + n, b_i + n\}, \{(a_{i+l-r} - 1) \bmod 2n, b_i\} & \text{für } i = r-l+1, \dots, r \end{array} \right\}$$

Sei  $j$  so dass (7) erfüllt ist. Dann ist

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{array}{ll} \{a_{i+l} - 1 + n, b_i\} & \text{für } i = 1, \dots, j-1 \\ \{a_{i+l} - 1, b_i + n\} & \text{für } i = j, \dots, r-l \\ \{a_{i+l-r} - 1 + n, b_i + n\} & \text{für } i = r-l+1, \dots, r \end{array} \right\} \subset \Phi(N(A, B))$$

eine  $r$ -Kreuzung, da

$$\begin{aligned} \min\{a_{i+l} - 1 + n, b_i\} &= b_i & \text{für } i = 1, \dots, j-1 \\ \min\{a_{i+l} - 1, b_i + n\} &= a_{i+l} - 1 & \text{für } i = j, \dots, r-l \\ \min\{a_{i+l-r} - 1 + n, b_i + n\} &= a_{i+l-r} - 1 + n & \text{für } i = r-l+1, \dots, r \end{aligned}$$

und

$$b_1 < \dots < b_{j-1} < a_{j+l} - 1 < \dots < a_r - 1 < a_1 - 1 + n < \dots < a_l - 1 + n \\ a_{l+1} - 1 + n < \dots < a_{l+j-1} - 1 + n < b_j + n < \dots < b_{r-l} + n < \dots < b_r + n$$

außerdem ist  $a_1 - 1 + n < a_{l+1} - 1 + n$  bzw. im Fall  $l = r$  ist  $a_r - 1 + n < b_1 + n$ .

Falls  $l = 0$ , so ist

$$\Phi(N(A, B)) = \{(a_i - 1, b_i + n), \{a_i - 1 + n, b_i\} \text{ für } i = 1, \dots, r\}$$

und

$$\mathcal{F} = \{(a_i - 1 + n, b_i) \text{ für } i = 1, \dots, r\}$$

eine  $r$ -Kreuzung, denn

$$\min\{a_i - 1 + n, b_i\} = b_i \text{ für } i = 1, \dots, r$$

und

$$b_1 < \dots < b_r, a_1 - 1 + n < \dots < a_r - 1 + n$$

außerdem ist  $b_r < a_1 - 1 + n$ , denn  $b_r < a_r \leq n$ .

$\square$

**Lemma 4.4.** Sei  $K := \{\{d_1, \bar{d}_1\}, \dots, \{d_r, \bar{d}_r\}\} \subset F_n$  eine (rotationssymmetrische) Konfiguration von Diagonalen im  $2n$ -Eck, die eine  $r$ -Kreuzung enthält. Dann ist  $\Psi(K) = N(A, B)$  für Teilmengen  $A, B \subset [n]$  mit  $\#A = \#B = r$ .

Für den Beweis von Lemma 4.4 benötigen wir noch das folgende Lemma:

**Lemma 4.5.** Sei

$$P := \{d \in \Omega_{2n} : \min d \in \{1, \dots, n-1\}, \max d \in \{n+1, \dots, 2n-1\}\},$$

dann gilt:

- (1)  $d \in P$  genau dann wenn  $\Psi(\{d, \bar{d}\}) = (a, b)$  mit  $a > b$ ,
- (2) Für  $d, d' \in \Omega_{2n}$  mit  $\max d, \max d' > n$  und  $\min d < \min d' < \max d < \max d'$  seien  $(a, b) := \Psi(\{d, d+n\})$ ,  $(a', b') := \Psi(\{d', d'+n\})$ . Dann gilt  
 $b < b'$  und  $(a > a')$  genau dann wenn  $d \in P, d' \notin P$ .

*Beweis.* Die erste Aussage gilt, denn falls  $\max d - \min d \leq n$  ist  $\Psi(\{d, \bar{d}\}) = ((\min d + 1) \bmod n, \max d \bmod n)$  und  $(\min d + 1) \bmod n > \max d \bmod n$  ist äquivalent zu  $\min d \in \{1, \dots, n-1\}, \max d \in \{n+1, \dots, 2n-1\}$ . Falls  $\max d - \min d > n$  ist  $\Psi(\{d, d+n\}) = ((\max d + 1) \bmod n, \min d \bmod n)$  und  $(\max d + 1) \bmod n > \min d \bmod n$  ist äquivalent zu  $\min d \in \{1, \dots, n-1\}, \max d \in \{n+1, \dots, 2n-1\}$ .

Für die zweite Aussage unterscheiden wir die folgenden Fälle:

- (1) Falls  $\max d - \min d \leq n, \max d' - \min d' \leq n$  ist

$$\begin{aligned} b &= \max d - n, & a &= (\min d + 1) \bmod n \\ b' &= \max d' - n, & a' &= (\min d' + 1) \bmod n \end{aligned}$$

und somit

$$b < b' \text{ und } (a > a' \Leftrightarrow \min d' \geq n, \min d < n \Leftrightarrow d \in P, d' \notin P).$$

- (2) Falls  $\max d - \min d \leq n, \max d' - \min d' > n$  ist  $\min d < \min d' < n$ , also  $d \in P$  und

$$\begin{aligned} b &= \max d - n, & a &= \min d + 1 \\ b' &= \min d', & a' &= (\max d' + 1) \bmod n \end{aligned}$$

und da  $b' - b = \min d' - \max d + n > \min d - \max d + n > 0$  gilt  $b < b'$ . Weiterhin

$$d' \notin P \Rightarrow \max d' = 2n \Rightarrow a = \min d + 1, a' = 1 \Rightarrow a > a'$$

Falls  $d' \in P$  so ist  $a' = \max d' + 1 - n > \min d' \geq \min d + 1 = a$ .

- (3) Falls  $\max d - \min d > n, \max d' - \min d' \leq n$  ist  $\min d < n$ , also  $d \in P$  und

$$\begin{aligned} b &= \min d, & a &= \max d + 1 - n \\ b' &= \max d' - n, & a' &= (\min d' + 1) \bmod n. \end{aligned}$$

Dann ist  $b' - b = \max d' - n - \min d > \max d - \min d - n > 0$  und

$d' \notin P \Rightarrow \min d' \geq n$  oder  $\max d' = 2n$ , aber falls  $\max d' = 2n$  folgt wegen  $\max d' - \min d' \leq n$  ebenfalls  $\min d' \geq n$ . Dann gilt  $a' - a = \min d' + 1 - n - (\max d + 1 - n) = \min d' - \max d < 0$  und

$d' \in P \Rightarrow \min d' < n \Rightarrow a' - a = \min d' + 1 - (\max d + 1 - n) > \min d' + 1 - (\max d' + 1 - n) = n - (\max d' - \min d') > 0$ .

(4) Falls  $\max d - \min d > n$ ,  $\max d' - \min d' > n$  sind  $\min d$ ,  $\min d' < n$  und somit  $d \in P$  und  $d' \in P \Leftrightarrow \max d' < 2n$ .

$$\begin{aligned} b &= \min d, & a &= \max d + 1 - n \\ b' &= \min d', & a' &= (\max d' + 1) \bmod n \end{aligned}$$

Also ist  $b' > b$  und  $d' \notin P \Rightarrow a' = \max d' + 1 - n > \max d + 1 - n$  sowie  $d' \in P \Rightarrow a' = 1 < \max d + 1 - n = a$ .

□

*Beweis von Lemma 4.4*

Sei nun  $\mathcal{F} := \{d_1, \dots, d_r\} \subset K$  eine  $r$ -Kreuzung, die so nummeriert sei, dass

$$\min d_1 < \dots < \min d_r < \max d_1 < \dots < \max d_r$$

und von der wir ohne Einschränkung annehmen können, dass  $\max d_1 > n$ . Denn falls  $\max d_1 \leq n$  so ist  $\min d_i < n$  für alle  $i = 1, \dots, r$  und somit auch  $(\min d_i + n) \bmod 2n > n$ , weshalb dann für die um  $180^\circ$  gedrehte Kreuzung gilt, dass das kleinste Maximum größer  $n$  ist. Setzt man  $l := r - \#\mathcal{P} \cap \mathcal{F}$  ist  $d_i \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 1 \leq i \leq r - l$ , denn  $d_i \in \mathcal{P}, d_j \notin \mathcal{P} \Rightarrow i < j$ . Deshalb folgen aus den Aussagen 1 und 2 in Lemma 4.5 für  $(a_i, b_i) := \Psi(\{d_i, \bar{d}_i\})$  unmittelbar die folgenden Aussagen (i) und (ii):

(i):  $a_{r+1-l} < a_{r+2-l} < \dots < a_r < a_1 < \dots < a_{r-l}$

(ii):  $a_i > b_i$  für alle  $i = 1, \dots, r - l$

(iii):  $a_{(j-1) \bmod n} \leq b_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, r - l + 1\}$  oder  $l = 0$ .

Um (iii) zu zeigen, nehmen wir an, dass für  $l > 0$  und alle  $j = 1, \dots, r - l + 1$  gelte  $a_{(j-1) \bmod r} > b_j > b_{j-1}$ , d.h. also  $a_1 > b_1, \dots, a_{r-l} > b_{r-l}$  und  $a_r > b_r$ , was wegen Aussage 1 aus Lemma 4.5 bedeutet, dass  $\#\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = r - l + 1 > r - l = \#\mathcal{P} \cap \mathcal{F}$  und somit einen Widerspruch ergibt.

Damit ist die Behauptung gezeigt, denn für

$$\pi \in \mathcal{S}_r, \pi(i) := \begin{cases} r + i - l & \text{für } i \in \{1, \dots, l\} \\ i - l & \text{für } i \in \{l + 1, \dots, r\} \end{cases}$$

gilt dann mit  $A := \{a_i\}$ ,  $B := \{b_i\}$ :

(1)  $b_1 < \dots < b_r$

(2)  $a_{\pi(1)} < \dots < a_{\pi(r)}$

(3)  $a_{\pi(i+l)} > b_i$  für alle  $i = 1, \dots, r - l$

(4)  $a_{\pi(j+l-1)} \leq b_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, r-l+1\}$  oder  $l = 0$ ,

und somit  $\Psi(K) = N(A, B)$ . □

Eine symmetrische Triangulierung des  $2n$ -Eckes bleibt bei zyklischer Neu-Nummerierung des  $2n$ -Eckes frei von  $(k+1)$ -Kreuzungen. Diese Eigenschaft überträgt sich wie folgt auf die Nichtseiten  $N(A, B)$ :

Wir definieren für  $i, j \in [n]$ ,  $A \subset [n]$ :

$$\begin{aligned} (i, j) + (1, 1) &= ((i+1) \bmod n, (j+1) \bmod n) \\ A+1 &:= \{(x+1) \bmod n \mid x \in A\} \end{aligned}$$

**Lemma 4.6.** Für Teilmengen  $A, B \subset [n]$ ,  $\#A = \#B = r$  gilt:

$$N(A, B) + (1, 1) = N(A+1, B+1).$$

*Beweis.* Seien  $A' := A+1$ ,  $B' := B+1$  und  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $N(A, B) = \{a_{i+k}, b_i \mid i = 1, \dots, r\}$ , das heißt es gilt

$$\begin{aligned} a_{i+k} &> b_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, r-k \\ a_{j+k-1} &\leq b_j \quad \text{für ein } j \in \{1, \dots, r-k+1\} \end{aligned}$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

**1.:**  $a_r, b_r < n$

Hier ist

$$\begin{aligned} A' &= \{a'_1, \dots, a'_r\} = \{a_1 + 1, \dots, a_r + 1\}, \\ B' &= \{b'_1, \dots, b'_r\} = \{b_1 + 1, \dots, b_r + 1\}, \end{aligned}$$

weshalb

$$\begin{aligned} a'_{i+k} &= a_{i+k} + 1 > b_i + 1 = b'_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, r-k \\ a'_{j+k-1} &= a_{j+k-1} + 1 \leq b_j + 1 = b'_j \quad \text{für ein } j \in \{1, \dots, r-k+1\}. \end{aligned}$$

**2.:**  $a_r = n, b_r < n$

Hier ist

$$\begin{aligned} A' &= \{1, a'_2, \dots, a'_r\} = \{a_r + 1, a_1 + 1, \dots, a_{r-1} + 1\}, \\ B' &= \{b'_1, \dots, b'_r\} = \{b_1 + 1, \dots, b_r + 1\}, \end{aligned}$$

weshalb

$$\begin{aligned} a'_{i+k+1} &= a_{i+k} + 1 > b_i + 1 = b'_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, r-k-1 \\ a'_{j+k} &= a_{j+k-1} + 1 \leq b_j + 1 = b'_j \quad \text{für ein } j \in \{1, \dots, r-k\}. \end{aligned}$$

falls  $j+k \neq 1$ , bzw.

$$a'_1 = a_r + 1 = 1 \leq b_j + 1 = b'_j \quad \text{für ein } j \in \{1, \dots, r-k\}.$$

falls  $j+k = 1$ .

**3.:**  $a_r < n, b_r = n$

Hier ist  $k > 0$ , da  $a_r \leq b_r$ . Es gilt:

$$A' = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_r\} = \{a_1 + 1, \dots, a_r + 1\},$$

$$B' = \{1, b_2, \dots, b'_r\} = \{b_r + 1, b_1 + 1, \dots, b_{r-1} + 1\},$$

weshalb

$$a'_{i+k-1} = a_{i+k-1} + 1 > b_{i-1} + 1 = b'_i \text{ für alle } i = 2, \dots, r - k$$

$$\text{und } a'_k = a_k + 1 > b'_1 = 1$$

$$a'_{j+k-2} = a_{j+k-2} + 1 \leq b_{j-1} + 1 = b'_j \text{ für ein } j \in \{2, \dots, r - k\}.$$

**4.:**  $a_r, b_r = n$

Hier ist ebenfalls  $k > 0$  da  $n = a_r \leq b_r = n$ . Es gilt:

$$A' = \{1, a'_2, \dots, a'_r\} = \{a_r + 1, a_1, \dots, a_{r-1} + 1\},$$

$$B' = \{1, b_2, \dots, b'_r\} = \{b_r + 1, b_1 + 1, \dots, b_{r-1} + 1\},$$

weshalb

$$a'_{i+k} = a_{i+k-1} + 1 > b_{i-1} + 1 = b'_i \text{ für alle } i = 2, \dots, r - k,$$

$$a'_{k+1} = a_{k+1} + 1 > 1 = b'_1 = b_r + 1 \text{ und}$$

$$a'_{j+k-1} = a_{j+k-2} + 1 \leq b_{j-1} + 1 = b'_j \text{ für ein } j \in \{2, \dots, r - k\}.$$

□

**Korollar 4.7.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i, r \in [n]$  gilt, dass

$$\sigma \in \mathcal{D}_k^n \text{ genau wenn } \sigma + r \cdot (1, 1) \in \mathcal{D}_k^n,$$

insbesondere ist

$$\text{link}_{i, (i+1) \bmod n} \mathcal{D}_n^1 \cong \text{link}_{1,2} \mathcal{D}_n^1.$$

*Beweis.* Unmittelbar aus Lemma 4.6. □

## 5. Das Zykloeder $\mathcal{D}_n^1$ als Graphkomplex $\mathcal{R}_n$

In diesem Abschnitt entwickeln wir für den Komplex der Typ-B Triangulierungen des  $2n$ -Ecks und somit für den Randkomplex des Zykloeders eine alternative kombinatorische Beschreibung als Graphkomplex. Wir erhalten durch diese neue Sichtweise eine Reihe von Ergebnissen aus [Si], insbesondere eine explizite Bestimmung der Multiplizität und der Dimension sowie die Reinheit von  $\mathcal{D}_n^1$ . Wir zeigen außerdem, dass  $\mathcal{D}_n^1$  eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Als neues Ergebnis erhalten wir einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten des Lucaspolynoms  $b_j^n$  und den zentralen Binomialkoeffizienten  $\binom{2n}{n}$ . Außerdem gelingt uns mit dieser Sichtweise die Bestimmung der Multiplizität eines Unterkomplexes der Typ-B Triangulierungen, der in Abschnitt 6 aus Kapitel 4 eine Rolle spielen wird.

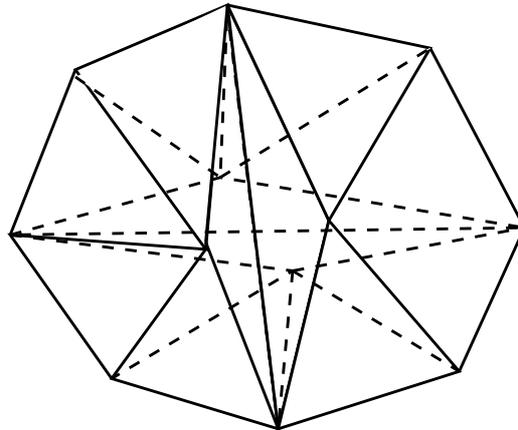


Abbildung 5. Realisierung von  $\mathcal{D}_4^1$

**Theorem 5.1.** [Si] Der simpliziale Komplex  $\mathcal{D}_n^1$  ist als Randkomplex eines  $(n - 1)$ -dimensionalen simplizialen Polytopes, des so genannten ZYKLOEDERS bzw. TYP-B ASSOZIAEDERS realisierbar (siehe Abbildung 5). Der  $f$ -Vektor berechnet sich durch

$$f_{i-1}(\mathcal{D}_n^1) = \binom{n-1}{i} \binom{n}{i}, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

und der  $h$ -Vektor durch

$$h_i(\Delta_n^1) = \binom{n-1}{i}^2, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Die polytopale Realisierbarkeit von  $\mathcal{D}_n^1$  wird in [Si] durch die Definition einer Folge von so genannten Stern-Unterteilungen bewiesen. Bei diesem Verfahren wird ausgehend vom  $(n - 1)$ -dimensionalen Simplex nacheinander ein Punkt im Inneren ausgewählter Seiten in konvexe Lage verschoben. Dieses Verfahren gewährleistet in jedem Schritt die Polytopalität, hat aber den Nachteil, dass keine kombinatorisch motivierten Eckenkoordinaten oder facettenunterstützende Ungleichungssysteme zur Verfügung gestellt werden. Abbildung 5 zeigt eine Realisierung von  $\mathcal{D}_4^1$ .

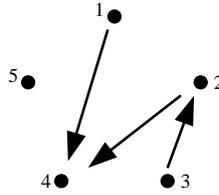
Ein kombinatorisch motiviertes Ungleichungssystem findet sich bei [St]: Ein ZYKLISCHES SUBINTERVALL von  $[n]$  ist eine Teilmenge vom Typ  $\{i, (i + 1) \bmod n, \dots, (i + k) \bmod n\}$  für  $i, k \in [n]$ . Wir bezeichnen mit  $PC(n)$  die Menge aller echten zyklischen Subintervalle von  $[n]$  geordnet durch Inklusion und die Abbildung  $c$  sei durch  $c : PC(n) \rightarrow \mathbb{R}, I \mapsto 3^{\#I}$  gegeben.

**Theorem 5.2.** [St] Man erhält durch

$$W_n := \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n t_k = c([1, n]), \sum_{k \in I} t_k \geq c(I), I \in PC(n) \right\}$$

eine Realisierung des  $(n - 1)$ -dimensionalen Zyκλοeders.

Eine alternative kombinatorische Beschreibung ergibt sich nach [St] wie folgt:



**Abbildung 6.**  $(2, 4)$  liegt links von  $(1, 4)$  im Uhrzeigersinn,  $(3, 2)$  liegt links von  $(1, 4)$

Sei  $BC(n)$  die Menge der ZYKLISCHEN KLAMMERUNGEN  $n$  unabhängiger Variablen. Das heißt ein Element aus  $BC(n)$  entspricht einer zyklischen Permutation  $\pi \in C_n$  gemeinsam mit einer zulässigen Klammerung der Variablen  $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$ . Falls  $b'$  eine Klammerung von  $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(s)}$  ist und  $b''$  eine Klammerung von  $x_{\pi(s+1)} \cdots x_{\pi(n)}$ , so werden die Elemente  $b'b''$  und  $b''b'$  in  $BC(n)$  miteinander identifiziert. Die zyklischen Klammerungen werden durch die Relation

$b \prec b'$  genau dann wenn  $b'$  aus  $b$  durch Weglassen von Klammerpaaren entsteht

zu einer partiell geordneten Menge.

**Satz 5.3.** ([St])  $(BC(n), \prec)$  ist isomorph zum dualen Seitenverband des  $n - 1$ -dimensionalen Zyклоeders.

**5.1. Raufuß-Graphen.** Im folgenden verstehen wir unter einem GERICHTETEN GRAPHEN  $G$  eine Teilmenge von  $[n] \times [n]$ . Dabei ist  $[n]$  die ECKENMENGE und  $[n] \times [n]$  die KANTENMENGE. Folglich nennen wir ein Tupel  $(i, j) \in G$  (gerichtete) KANTE von  $G$ , dabei ist  $i$  der KOPF und  $j$  der SCHWANZ (engl. HEAD und TAIL) der Kante. Allgemein nennen wir  $i \in [n]$  Kopf in  $G$ , wenn eine Kante in  $G$  existiert, so dass  $i$  Kopf dieser Kante ist, ebenso sagen wir, dass  $j \in [n]$  Schwanz in  $G$  ist, wenn  $j$  Schwanz einer Kante in  $G$  ist. Gilt  $i = j$ , so ist die Kante  $(i, j)$  eine SCHLEIFE.

Ein GRAPH-KOMPLEX ist in diesem Kontext ein simplizialer Komplex, dessen Eckenmenge aus der Menge der Kanten  $[n] \times [n]$  besteht.

Zu  $i, j \in [n]$  definieren wir eine Ordnung auf den zyklischen Intervallen wie folgt:

$$(8) \quad [i, j] := \{i \prec (i+1) \bmod n \prec (i+2) \bmod n \prec \cdots \prec j\}.$$

Wir sagen, die Kante  $(k, l) \in [n] \times [n]$  liege Links von  $(i, j)$  falls  $k, l \in [i, j]$ , und  $(k, l)$  liege IM UHRZEIGERSINN LINKS VON  $(i, j)$ , falls  $(k, l)$  links von  $(i, j)$  und  $k \prec l$  (siehe Abbildung 6). Ein Paar von Kanten  $(i, j), (k, l)$  nennen wir ÜBERKREUZUNG, falls  $i, j, k, l$  paarweise verschiedene Elemente aus  $[n]$  sind und  $\#\{k, l\} \cap [i, j] = 1$ .

Einen gerichteten Graphen  $G$  auf  $n \geq 2$  Ecken nennen wir RAUFUSS-GRAPHEN, falls

**R0:**  $G$  keine Schleifen hat und

**R1:** Kein Kopf in  $G$  zugleich auch Schwanz ist und

**R2:**  $G$  keine Überkreuzungen enthält und

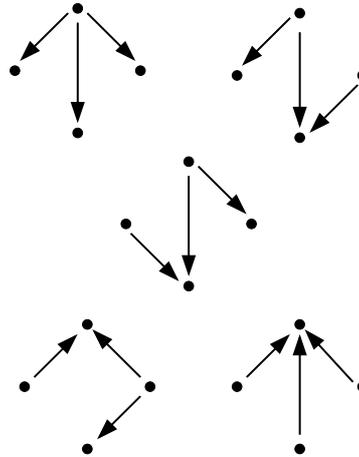


Abbildung 7. Bis auf Rotation alle Raufuß-Graphen auf 4 Knoten

**R3:** Links von jeder Kante jede Kante im Uhrzeigersinn gerichtet ist.

**Bemerkung 5.4.** Die Eigenschaft, ein Raufuß-Graph zu sein, bleibt bei der Wegnahme von Kanten erhalten. Diese Monotonie-Eigenschaft macht die Menge aller Raufuß-Graphen zu einem Simplicialen Komplex, dessen Eckenmenge aus den Kanten  $[n] \times [n] \setminus \{(i, i) \mid i \in [n]\}$  besteht und den wir mit  $\mathcal{R}_n$  bezeichnen.

Abbildung 7 zeigt bis auf Rotation alle Raufuß-Graphen auf 4 Knoten.

**Satz 5.5.** Der Komplex  $\mathcal{D}_n^1$  ist isomorph zum Komplex der Raufuß-Graphen auf  $n$  Ecken  $\mathcal{R}_n$ .

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 4.1 und mit Hilfe von Lemma 4.2 identifizieren wir die Eckenmenge von  $\mathcal{D}_n^1$  mit  $[n] \times [n] \setminus \{(i, i) \mid i \in [n]\}$ . Auf diese Weise fassen wir die Seiten von  $\mathcal{D}_n^1$  als gerichtete Graphen auf. Wir zeigen zuerst, dass ein gerichteter Graph  $G$ , der kein Raufuß-Graph ist, keine Seite von  $\mathcal{D}_n^1$  ist. Wegen Lemma 4.2 enthält kein  $G \in \mathcal{D}_n^1$  Schleifen. Sei  $G$  ein gerichteter Graph, der eine der Bedingungen **R1...R3** verletzt. Dann gibt es ein Kantenpaar in  $G$ , das eine dieser Bedingungen verletzt. Wegen der 'Rotationsinvarianz' in Korollar 4.7 und in **R1...R3** können wir unsere Betrachtungen auf Kanten  $(1, j), (k, l)$  beschränken.

Mit Verweis auf Abbildung 8 stellen wir zunächst fest, dass mit  $A := \{1, k\}, B := \{j, l\}$  genau dann  $\{x_{1,j}, x_{k,l}\} = N(A, B)$  gilt, wenn

$$(9) \quad (l < j \text{ und } k > l) \quad \text{oder}$$

$$(10) \quad (l > j \text{ und } 1 < k \leq j).$$

Wir betrachten die folgenden Fälle:

**Die Kanten verletzen R1:** Dann gilt entweder  $j = k$  oder  $l = 1$ . Im Fall  $j = k$  ist für  $k > l$  (9) erfüllt und für  $k < l$  gilt (10). Im Fall  $l = 1$  ist (9) erfüllt.

$$\begin{pmatrix} \ddots & \dots & \dots & (1, j) & \cdot & \dots & \cdot \\ \star & \ddots & \dots & \cdot & \star & \star & \star \\ \star & \star & \ddots & \vdots & \star & (10) & \star \\ \star & (9) & \star & \ddots & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \vdots & \ddots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot \\ \star & \star & \star & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots \end{pmatrix}$$

Abbildung 8. Die Menge der  $(k, l)$ , so dass  $\{(1, j), (k, l)\} = N(A, B)$ .

**Die Kanten verletzen R2:** Dann sind  $1, j, k, l$  paarweise verschieden und es gilt aus Symmetriegründen ohne Einschränkung  $\#\{k, l\} \cap [1, j] = 1$ . Das heißt, entweder gilt  $1 < k < j < l$  und somit (10) oder  $1 < l < j < k$  und somit (9).

**Die Kanten verletzen R3:** Falls  $(1, j)$  links von  $(k, l)$  ist oder  $(k, l)$  links von  $(1, j)$ , so gilt  $1 < l < k < j$ , also (9).

In allen genannten Fällen gilt, dass  $G$  eine (minimale) Nichtseite  $N(A, B)$  von  $\mathcal{D}_n^1$  enthält, falls  $G$  kein Raufuß-Graph ist.

Sei umgekehrt  $G$  ein Graph, der eine Nichtseite  $N(A, B)$  für Teilmengen  $A, B \subset [n]$ ,  $\#A = \#B = 2$  enthält. Wiederum können wir wegen der Rotationsinvarianz annehmen, dass  $G$  ein Kantenpaar  $(1, j), (k, l)$  enthält, das (9) oder (10) erfüllt.

**Das Kantenpaar erfüllt (9):** Es gilt also  $k > l$ . Für  $l = 1$  ist **R1** nicht gegeben, für  $l > 1$  betrachten wir die Fälle

- (1)  $l < j = k$ . Wiederum ist **R1** nicht erfüllt.
- (2)  $1 < l < j < k$ . Hier ist **R2** nicht gegeben.
- (3)  $1 < l < k < j$ . Hier gilt **R3** nicht.

**Das Kantenpaar erfüllt (10):** Es gilt also  $l > j \geq k$ . Wir betrachten die Fälle

- (1)  $j = k < l$ , was **R1** nicht erfüllt.
- (2)  $k < j < l$ , was **R2** widerspricht.

In allen Fällen ist  $G$  also kein Raufuß-Graph. □

Mit Hilfe des folgenden Lemmas zeigen wir in Satz 5.7, dass  $\mathcal{R}_n$  den Komplex  $\mathcal{R}_{n-1}$  als Link enthält.

**Lemma 5.6.** *Jeder maximale Raufuß-Graph enthält eine Kante vom Typ  $(i, (i+1) \bmod n)$  und höchstens eine Kante vom Typ  $((i+1) \bmod n, i)$ .*

*Beweis.* Angenommen ein maximaler Raufuß-Graph  $G$  enthalte kein Element  $(i, (i+1) \bmod n)$ . Dann gibt es eine Kante  $(k, l)$  in  $G$  so dass  $|k-l| > 1$  und  $|k-l| \geq |m-n|$  für alle Kanten  $(m, n) \in G$ . Das bedeutet, dass keine Kante links von  $(k, l)$  verläuft, somit

$l-1$  kein Kopf ist. Dann kann aber die Kante  $(k, (l-1) \bmod n)$  zu  $G$  hinzugefügt werden, ohne dass **R1**...**R3** verletzt würden, denn  $(k, l-1)$  ist links von  $(k, l)$  und kann somit keine Überkreuzung verursachen und falls sie gegen den Uhrzeigersinn links von einer Kante verlaufen würde, so täte dies auch  $(k, l)$ . Daraus folgt, dass  $G \subset G \cup \{(k, l-1)\}$ , ein Widerspruch zur Maximalität. Die zweite Aussage folgt aus der Tatsache, dass je zwei Elemente aus der Menge  $\{(i+1) \bmod n, i \mid i \in [n]\}$  links gegen den Uhrzeigersinn voneinander verlaufen.  $\square$

**Satz 5.7.** Für  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2) \cong \mathcal{R}_{n-1}.$$

*Beweis.* Wir definieren die Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi : [n-1] &\rightarrow [n] \\ i &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \\ i+1 & \text{falls } i > 1, \end{cases} \\ \psi' : [n-1] &\rightarrow [n] \\ i &\mapsto i+1, \\ \phi : [n] &\rightarrow [n-1] \\ i &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1, 2 \\ i-1 & \text{falls } i > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(i) &= i \text{ für alle } i \in [n-1], \\ \phi \circ \psi'(i) &= i \text{ für alle } i \in [n-1], \\ \psi \circ \phi(i) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1, 2 \\ i & \text{falls } i > 2, \end{cases} \\ \psi' \circ \phi(i) &= \begin{cases} 2 & \text{falls } i = 1, 2 \\ i & \text{falls } i > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Seien  $\text{contr}_{12} : \text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2) \rightarrow \mathcal{R}_{n-1}$

$$\sigma \mapsto \{(\phi(i), \phi(j)) \mid (i, j) \in \sigma \setminus \{(1, 1)\}\},$$

und  $\text{ext}_{12} : \mathcal{R}_{n-1} \rightarrow \text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2)$

$$\tau \mapsto \begin{cases} \{(\psi(i), \psi(j)) \mid (i, j) \in \tau\} & \text{falls 1 Kopf in } \tau \\ \{(\psi'(i), \psi'(j)) \mid (i, j) \in \tau\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung  $\text{contr}_{12}$  ist wohldefiniert: Sei  $\sigma \in \text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2)$  und  $\hat{\sigma} := \text{contr}_{12} \sigma$ . Da  $\phi$  injektiv bis auf  $i \in \{1, 2\}$  ist, enthält  $\hat{\sigma}$  keine Schleifen. Eine Menge  $\{i, j, k, l\}$  paarweise verschiedener Indizes wird von  $\phi$  genau dann nicht auf sich selbst abgebildet, wenn  $\#\{\phi(i), \phi(j), \phi(k), \phi(l)\} < 4$ . Da Überkreuzungen in Definition 8 für paarweise verschiedene Indizes definiert wurden, erfüllt  $\hat{\sigma}$  die Bedingung **R2**. Für  $k, l \in [i, j]$  gilt

$k \succ l \Leftrightarrow \phi(k) \succ \phi(l)$ , somit kann  $\hat{\sigma}$  nicht **R3** verletzen. Die Bedingung **R1** ist nur dann nicht erfüllt, wenn in  $\sigma$  eine Kante  $(1, j)$ ,  $j \neq 2$  existiert und die Ecke 2 zugleich ein Schwanz ist, d.h. eine Kante  $(k, 2) \in \sigma$  existiert. Dies kann aber nicht sein, da sich für  $k > j$  die Kanten überschneiden würden und für  $k \leq j$  die Kante  $(k, 2)$  links von  $(1, j)$  gegen den Uhrzeigersinn verlaufen würde.

Die Abbildung  $\text{ext}_{12}$  ist wohldefiniert: Sei  $\tau \in \mathcal{R}^{n-1}$ , 1 kein Kopf in  $\tau$  und  $\hat{\tau} := \text{ext}_{12} \tau \cup \{(1, 2)\}$ . Dann erfüllt wegen der Rotationsinvarianz  $\tau + (1, 1)$  die Bedingungen **R1**...**R3** auch in  $\mathcal{R}_n$ . Da 1 kein Kopf in  $\tau$  war, ist 2 kein Kopf in  $\hat{\tau}$ , also ist **R1** in  $\hat{\tau}$  erfüllt. Es ist klar, dass  $(1, 2)$  im Graph  $\hat{\tau}$  keine Überkreuzung bilden kann. Da der gesamte Graph  $\hat{\tau}$  rechts von  $(1, 2)$  liegt, kann **R3** nur dann nicht erfüllt sein, wenn eine Kante  $(k, l) \in \hat{\tau}$  existiert, so dass  $(1, 2)$  links von  $(k, l)$  verläuft. Dann sind aber  $1, 2 \in [k, l]$ , also ist  $k > l$ . Das hat zur Folge, dass  $1 \succ 2$  in  $[k, l]$  und somit  $(1, 2)$  im Uhrzeigersinn gerichtet ist. Insgesamt ist also  $\hat{\tau} \in \mathcal{R}_n$  und damit auch  $\text{ext}_{12} \tau \in \text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2)$ .

Sei nun  $\tau \in \mathcal{R}_{n-1}$  so dass 1 ein Kopf in  $\tau$ . Wir wollen zeigen, dass  $\hat{\tau} := \text{ext}_{12} \tau \cup \{1, 2\} \in \mathcal{R}_n$ . Wir definieren  $\tilde{\tau} := \{(k, l) \in \tau : k, l > 1\} \in \mathcal{R}_{n-1}$ .

Wegen der Rotationsinvarianz ist  $\hat{\tau} \setminus \{(1, j) : j \in [n]\} = \tilde{\tau} + (1, 1) \in \mathcal{R}_n$ . Es bleiben also nur Kantenpaare  $(1, j), (k, l) \in \text{ext}_{12} \tau \cup \{(1, 2)\}$  zu untersuchen mit  $(k, l) \in \tilde{\tau} + (1, 1)$ .

**R1:** Da  $\tilde{\tau} + (1, 1)$  nicht die Ecken 1, 2 enthält folgt sofort, dass 1 nicht Schwanz und 2 nicht Kopf in  $\hat{\tau}$  sein kann. Sei  $(1, j) \in \hat{\tau}$  mit  $j > 2$ . Dann ist  $(1, j-1) \in \tau$ , somit ist  $j-1$  kein Kopf in  $\tau$ , also  $j$  kein Kopf in  $\hat{\tau}$ .

**R2:** Die Kantenmenge  $\{(1, x) \in \hat{\tau}, x \in [n]\}$  enthält trivialerweise keine Überkreuzung. Angenommen  $(1, x)$  kreuzte sich mit  $(k, l)$  in  $\hat{\tau}$  mit  $x \neq 2$ . Dann würden sich auch  $(1, x-1), (k-1, l-1)$  in  $\tau$  kreuzen. Die Kante  $(1, 2)$  schließlich ist nie in einer Überkreuzung enthalten.

**R3:** Eine Kante  $(1, j)$  verlaufe links von  $(k, l)$  in  $\hat{\tau}$ , das heißt es ist  $1 \in [k, l]$ , also  $k > l \geq j$  und somit  $1 \succ j$  in  $[k, l]$  im Fall  $k, l \geq j$ . Deshalb ist  $(1, j)$  im Uhrzeigersinn links von  $(k, l)$ . Falls  $k, l \leq j$  ist  $j > 2$ . Angenommen, hier würde  $(1, j)$  gegen den Uhrzeigersinn verlaufen, dann täte dies auch  $(1, j-1)$  links von  $(k-1, l-1)$  in  $\tau$ , was nicht sein kann. Falls eine Kante  $(k, l)$  links von  $(1, j)$  gegen den Uhrzeigersinn gerichtet wäre, so würde  $j > 2$  gelten und  $k > l$ . Damit würde aber  $(k-1, l-1)$  links von  $(1, j-1)$  in  $\tau$  gegen den Uhrzeigersinn verlaufen, was nicht sein kann.

Wir zeigen noch, dass  $\text{contr}_{12} \circ \text{ext}_{12} = \text{id}_{\mathcal{R}_{n-1}}$  und  $\text{ext}_{12} \circ \text{contr}_{12} = \text{id}_{\text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2)}$ .

Sei  $\tau \in \mathcal{R}_{n-1}$ ,  $\sigma \in \text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2)$  und  $\tilde{\psi}$  lese man entweder nur als  $\psi$  oder nur als  $\psi'$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{contr}_{12} \circ \text{ext}_{12}(\tau) &= \text{contr}_{12} \left( \{ \tilde{\psi}(i), \tilde{\psi}(j) \mid (i, j) \in \tau \} \right) \\ &= \{ (\phi(\tilde{\psi}(i)), \phi(\tilde{\psi}(j))) \mid (i, j) \in \tau \} \\ &= \tau \\ \text{ext}_{12} \circ \text{contr}_{12}(\sigma) &= \text{ext}_{12}(\{ (\phi(i), \phi(j)) \mid (i, j) \in \sigma \}) \\ \text{falls 1 Kopf ist} & \\ &= \{ \psi(\phi(i)), \psi(\phi(j)) \mid (i, j) \in \sigma \} \\ \text{da } (k, 2) \notin \text{ext}_{12}(\sigma) \text{ f\"ur alle } k > 2 &= \sigma|_{i>2} \cup \{ (1, k) \in \sigma \mid k > 2 \} \\ &= \sigma. \\ \text{falls 1 kein Kopf ist} & \\ &= \{ \psi'(\phi(i)), \psi'(\phi(j)) \mid (i, j) \in \sigma \} \\ &= \sigma|_{i>2} \\ &= \sigma. \end{aligned}$$

Da offensichtlich  $\text{ext}_{12}, \text{contr}_{12}$  Inklusionen erhalten, gilt die Behauptung. □

**Korollar 5.8.** *Der Komplex  $\mathcal{R}_n$  ist f\"ur alle  $n \geq 2$  ein reiner,  $(n - 2)$ -dimensionaler simplizialer Komplex und eine Pseudomannigfaltigkeit.*

*Beweis.* Der Komplex  $\mathcal{R}_2 = \{\emptyset, (1, 2), (2, 1)\}$  ist ein 0-dimensionaler, reiner Komplex und eine Pseudomannigfaltigkeit. F\"ur  $n > 2$  k\"onnen wir wegen Lemma 5.6 und Korollar 4.7 ohne Einschr\"ankung eine Facette  $F \in \mathcal{R}_n$  betrachten mit  $(1, 2) \in F$ . Also ist  $F \setminus \{(1, 2)\} \in \text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2)$ . Nach Satz 5.7 ist  $F \setminus \{(1, 2)\}$  isomorph zu einer Facette in  $\mathcal{R}_{(n-1)}^1$  und enth\"alt nach Induktionsvoraussetzung  $(n - 2)$  Elemente, woraus die erste Behauptung folgt.

Sei  $R$  eine maximale echte Seite einer Facette  $F$ . Wieder d\"urfen wir annehmen, dass  $(1, 2) \in R$ . Falls  $(1, 2) \in R$  gilt, ist  $R \setminus \{1, 2\} \in \text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2)$  und eine maximale echte Seite der Facette  $F \setminus \{(1, 2)\}$  in  $\text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2) \cong \mathcal{R}_{n-1}$ . Also existiert nach Induktionsvoraussetzung genau eine weitere Facette  $\tilde{G} \in \text{link}_{\mathcal{R}_n}(1, 2)$ , die  $R \setminus \{(1, 2)\}$  enth\"alt. Damit folgt, dass  $F, G := \tilde{G} \cup \{(1, 2)\}$  die einzigen Facetten sind, die  $R$  enthalten.

Falls wir nicht annehmen k\"onnen, dass  $(1, 2) \in R$  gilt, so ist auch  $(i, (i + 1) \bmod n) \notin R$  f\"ur alle  $i \in [n]$ . Da aus dem ersten Teil folgt, dass  $R$  genau  $n - 2$  Elemente enth\"alt und nach Lemma 5.6 h\"ochstens ein Element aus der Menge  $\{((i + 1) \bmod n, i) \mid i \in [n]\}$  enthalten kann, muss es eine Kante  $(k, l) \in R$  geben, f\"ur die  $|(k - l) \bmod n| > 1$  gilt. Ohne Einschr\"ankung nehmen wir an, es sei die Kante  $(1, j)$ ,  $j \neq 2, n$ . Wir betrachten die induzierten Subgraphen  $R_1$  auf  $[j]$  und  $R_2$  auf  $\{1, j, j + 1, \dots, n\}$ . Da nur eine Kante zu  $R$  in  $\mathcal{R}_n$  hinzugef\"ugt werden kann, ist genau eine der beiden Seiten  $R_1$  oder  $R_2$  isomorph zu einer Facette in  $\mathcal{R}_j^1$  bzw.  $\mathcal{R}_{n-j+2}^1$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es f\"ur die andere Seite genau 2 M\"oglichkeiten, diese zu einer Facette zu erg\"anzen. Also ist  $R$  in genau zwei Facetten enthalten und  $\mathcal{R}_n$  eine Pseudomannigfaltigkeit. □

Aus der iterierten Anwendung von Satz 5.7 und Lemma 5.6 folgt sofort

**Korollar 5.9.** Sei  $A \subset [n]$  und  $\hat{A} := \{(i, (i+1) \bmod n) \mid i \in A\}$ . Dann gilt

$$\text{link}_{\mathcal{R}_n}(\hat{A}) \cong \begin{cases} \mathcal{R}_{n-\#A}^1 & \text{falls } \{p, (p+1) \bmod n\} \notin A \text{ für alle } p \in [n] \\ \{\emptyset\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir möchten Korollar 5.9 zur Ermittlung einer Rekursionsformel für die Multiplizität von  $\mathcal{D}_n^1$  bzw.  $\mathcal{R}_n$  verwenden. Die Anzahl der Facetten von  $\text{link}_{\mathcal{R}_n}(\hat{A})$  hängt offenbar nur von der Mächtigkeit von  $\hat{A}$  und der Tatsache, ob  $A$  zwei zyklisch aufeinanderfolgende Zahlen  $p, (p+1) \bmod n$  enthält, ab. Von Interesse ist also zunächst die Bestimmung der Anzahl solcher Mengen, die wir im folgenden Satz vornehmen.

**Satz 5.10.** Seien

$$b_j^n := \#\{A \subset [n] \mid \#A = j, (p, (p+1) \bmod n) \notin A \text{ für alle } p \in [n]\}.$$

Dann gilt:

- (1)  $b_j^n = 0$  für alle  $j \geq \frac{n}{2}$ .
- (2)  $b_0^n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (3)  $b_j^n = b_j^{n-1} + b_{j-1}^{n-2}$  für alle  $n > 1$ .
- (4)  $b_j^n = \binom{n-j}{j} + \binom{n-j-1}{j-1}$  für alle  $0 \leq 2j \leq n$ .

*Beweis.* Die Zahlen  $b_n^j$  mit den Eigenschaften (1) bis (4) sind die Koeffizienten des Lucaspolynoms **[Bro]** und Folge Nr. A034807 in der ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES **[SI]**, dort findet sich auch der Hinweis, dass  $b_n^j$  für  $j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  die Anzahl der  $j$ -matchings in einem  $n$ -Eck angibt. Dabei ist ein  $j$ -matching im  $n$ -Eck eine  $j$ -elementige Menge paarweiser disjunkter 2-elementiger Mengen vom Typ  $\{(i_1, (i_1+1) \bmod n)\}$ . Die Abbildung

$$\{\{(i_1, (i_1+1) \bmod n)\}, \dots, \{(i_j, (i_j+1) \bmod n)\}\} \mapsto \{i_1, \dots, i_j\}$$

liefert offensichtlich eine Bijektion zwischen den  $j$ -matchings und den  $j$ -elementigen Teilmengen von  $[n]$ , die keine zwei zyklisch aufeinander folgenden Zahlen  $p, (p+1) \bmod n$  enthalten.  $\square$

**Satz 5.11.** Für die Anzahl  $T(n, 1)$  der Facetten von  $\mathcal{D}_n^1$  bzw.  $\mathcal{R}_n$  gilt:

$$(11) \quad T(n, 1) = \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{l+1} b_l^n \cdot T(n-l, 1)$$

mit  $T(2, 1) = 2, T(3, 1) = 6, T(4, 1) = 20$ .

*Beweis.* Sei  $A_i$  die Menge der Facetten in  $\mathcal{R}_n$ , die die Kante  $(i, i+1)$  enthalten. Für eine Indexmenge  $\{i_1, \dots, i_l\} \subset [n]$  ist dann  $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}|$  die Anzahl der Facetten, die die Kanten  $(i_j, i_j+1)$  für  $j = 1, \dots, l$  enthalten. Diese stehen in eins- zu-eins-Beziehung zu den Facetten von  $\text{link}_{\mathcal{R}_n}(\{(i_j, i_j+1), j = 1, \dots, l\})$ . Nach Lemma 5.9 hängt diese Zahl nur

von  $l$  ab und ist  $T(n-l, 1)$  falls  $\{i_j, j = 1, \dots, l\}$  zu den in Satz 5.10 gezählten Mengen gehört und 0 sonst. Unter Verwendung der SIEBFORMEL (siehe z.B. [Ai]) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{\{i_1, \dots, i_l\} \subset [n]} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}| \\ &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} b_l^n \cdot T(n-l, 1) \\ &= \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{l+1} b_l^n \cdot T(n-l, 1). \end{aligned}$$

□

Wir lösen diese Rekursionsgleichung (11) in Korollar 5.17. Dazu bringen wir zunächst die Facetten von  $\mathcal{R}_n$  in Zusammenhang mit gewissen Vektoren, deren Abzählung leichter fällt. Wir benötigen folgendes Lemma:

**Lemma 5.12.** *Jeder Knoten in einem maximalen Raufuß-Graphen ist entweder Kopf oder Schwanz.*

*Beweis.* Wir zeigen ohne Einschränkung, dass  $n$  Kopf oder Schwanz sein muss. Angenommen, es gäbe einen Raufuß-Graphen  $G$ , in der  $n$  weder Kopf noch Schwanz ist. Dann dürfte dort die Kante  $(n, 1)$  nicht hinzugefügt werden. Da  $(n, 1)$  in keiner Kreuzung enthalten ist und falls  $(n, 1)$  links von einer Kante verläuft, dann nur im Uhrzeigersinn, ist das einzige mögliche Hindernis in  $G$ , dass 1 Kopf oder  $n$  Schwanz ist. Da wir letzteres ausgeschlossen hatten, muss eine Kante  $(1, j) \in G$  existieren, wir wählen  $j$  maximal. Dann kann aber  $(n, j)$  hinzugefügt werden, denn falls es eine Kante in  $G$  gäbe, die  $(n, j)$  kreuzte, so kreuzte sie sich auch mit  $(1, j)$  und falls es eine Kante gäbe, so dass  $(n, j)$  links von dieser gegen den Uhrzeigersinn verlief, so täte dies auch  $(1, j)$ . □

Maximale Raufuß-Graphen sind eindeutig durch die Festlegung, welche Knoten mit welcher Vielfachheit Schwänze sind, festgelegt. Eine analoge Aussage gilt auch für Köpfe:

**Definition 5.13.** *Zu einer Facette  $F \in \mathcal{R}_n$  sei  $v^F \in \mathbb{N}^{n-1}$  mit*

$$v_i^F = \#\{k \leq n \mid (i+1, k) \in F\}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

**Satz 5.14.** *Für alle  $n \geq 2$ ,  $v \in \mathbb{N}^{n-1}$  mit  $|v| = \sum v_i \leq n-1$  existiert eine eindeutige Facette  $F \in \mathcal{R}_n$  so dass  $v = v^F$ . Umgekehrt gilt für alle Facetten  $F$  von  $\mathcal{R}_n$ , dass  $|v^F| \leq n-1$ .*

*Beweis.* Da die Dimension von  $\mathcal{R}_n$  nach Satz 5.8  $n-2$  ist, enthält eine Facette höchstens  $n-1$  Elemente, weshalb  $|v^F| \leq n-1$  gilt.

Wir beweisen die Existenz und Eindeutigkeit per Induktion über  $n$ . Für  $n = 2$  ist  $v^{\{(1,2)\}} = (0)$ ,  $v^{\{(2,1)\}} = (1)$ .

Zur Eindeutigkeit: Sei  $F$  Facette von  $\mathcal{R}_n$  mit  $(1, 2) \in F$  und  $G \in \mathcal{R}_n$  eine beliebige andere Facette.

**1. Fall:**  $(1, 2) \in G$  Dann ist

$$v_j^{\text{contr}_{1,2} F} = v_{j+1}^F \text{ für alle } j = 1, \dots, n-2$$

und

$$v_j^{\text{contr}_{1,2} G} = v_{j+1}^G \text{ für alle } j = 1, \dots, n-2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $v^{\text{contr}_{1,2} F} \neq v^{\text{contr}_{1,2} G}$  und somit auch

$$v^F = v^{\text{ext}_{12} \text{contr}_{12} F \cup (1,2)} = (0, v^{\text{contr}_{12} F}) \neq (0, v^{\text{contr}_{12} G}) = v^G.$$

**2. Fall:**  $(1, 2) \notin G$

Wir nehmen an, dass  $v^F = v^G$ . Da 2 in  $F$  ein Schwanz ist, ist  $v_1^F = 0$  und somit auch  $v_1^G = 0$ , also ist 2 ein Schwanz in  $G$ . Sei also  $(k, 2) \in G$ . Der Knoten 1 ist dann aber kein Kopf in  $G$ , da  $(1, l)$  links von  $(k, 2)$  ist und gegen den Uhrzeigersinn, falls  $l \neq 2$ . Da  $F$  und  $G$  insgesamt  $n-1$  Kanten enthalten, muss  $|v^G| = n-1$  gelten, denn alle Kanten in  $G$  haben einen von 1 verschiedenen Kopf. Andererseits muss aber  $(n-1) > |v^F|$  gelten, da höchstens  $n-2$  Kanten in  $F$  existieren können, dessen Kopf von 1 verschieden ist.

Zur Existenz:

$$\text{Zu } v \in \mathbb{N}^{n-1} \text{ sei } \tilde{v}_j := \begin{cases} (n-1) - |v| & \text{für } j = 1 \\ v_{j-1} & \text{für } j = 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Wegen Korollar 4.7 ist klar, dass falls  $v = v^F$  für eine Facette  $F$  von  $\mathcal{R}_n$  gilt, auch  $\tilde{v} = v^{F+(1,1)}$ .

Es ist also keine Einschränkung, die Existenz einer Facette für einen Vektor zu zeigen mit  $v_1 = 0$  und  $|v| < n-1$ , sonst wende die  $\sim$ -Operation auf  $v$  an, bis diese Voraussetzung erfüllt ist.

Wir betrachten den Vektor

$$v'_j = v_{j+1} \text{ für } j = 1, \dots, n-2.$$

Da  $v' \in \mathbb{N}^{n-2}$  und  $|v'| = |v| \leq n-2$  existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Facette  $\hat{F} \in \mathcal{R}_1^{n-1}$  mit  $v^{\hat{F}} = v'$ . Sei  $F := \text{ext}_{1,2} \hat{F} \cup (1, 2)$ . Nach Satz 5.7 ist  $\text{ext}_{1,2} \hat{F}$  eine Facette in  $\text{link}_{12} \mathcal{R}_1^n$  und  $F$  somit eine Facette in  $\mathcal{R}_n$ . Da Köpfe in  $\hat{F}$ , die verschieden von 1 sind, in  $F$  um eins erhöht werden und 2 ein Schwanz in  $F$  ist, gilt:

$$v_j^F = \begin{cases} v'_j & \text{für } j \geq 2 \\ 0 & \text{für } j = 1 \end{cases}$$

also ist  $v^F = v$ .

□

**Definition 5.15.** Zu einer Facette  $F \in \mathcal{R}_n$  sei  $w^F \in \mathbb{N}^{n-1}$  mit

$$w_i^F = \#\{k \leq n \mid (k, i+1) \in F\}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

**Satz 5.16.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w \in \mathbb{N}^{n-1}$  mit  $|w| := \sum w_i \leq n - 1$  existiert eine eindeutige Facette  $F \in \mathcal{R}_n$  so dass  $w = w^F$ . Umgekehrt gilt für alle Facetten  $F$  von  $\mathcal{R}_n$ , dass  $|w^F| \leq n - 1$ .

*Beweis.* Da die Dimension von  $\mathcal{R}_n$  nach Satz 5.8  $n - 2$  ist, enthält eine Facette höchstens  $n - 1$  Elemente, weshalb  $|w^F| \leq n - 1$  gilt.

Wir beweisen die Existenz und Eindeutigkeit per Induktion über  $n$ . Für  $n = 2$  ist  $w^{\{(1,2)\}} = (1)$ ,  $w^{\{(2,1)\}} = (0)$ .

Zur Eindeutigkeit: Sei  $F$  Facette von  $\mathcal{R}_n$  mit  $(1, 2) \in F$  und  $G \in \mathcal{R}_n$  eine beliebige andere Facette.

**1. Fall:**  $(1, 2) \in G$  Dann ist

$$w_j^{\text{contr}_{1,2} F} = w_{j+1}^F \text{ für alle } j = 1, \dots, n - 2$$

und

$$w_j^{\text{contr}_{1,2} G} = w_{j+1}^G \text{ für alle } j = 1, \dots, n - 2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $w^{\text{contr}_{1,2} F} \neq w^{\text{contr}_{1,2} G}$  und somit auch

$$w^F = w^{\text{ext}_{12} \text{contr}_{12} F \cup (1,2)} = (w_1^F, w^{\text{contr}_{12} F}) \neq (w_1^G, w^{\text{contr}_{12} G}) = w^G.$$

**2. Fall:**  $(1, 2) \notin G$

Wir nehmen an, dass  $w^F = w^G$ . Da  $(1, 2) \in F$ , ist  $w_1^F > 0$ , also auch  $w_1^G > 0$ . Somit ist 2 ein Schwanz in  $G$ . Sei also  $(k, 2) \in G$ . Der Knoten 1 ist dann aber kein Kopf in  $G$ , da  $(1, l)$  links von  $(k, 2)$  ist und gegen den Uhrzeigersinn, falls  $l \neq 2$ . Nach Lemma 5.12 ist 1 dann ein Schwanz in  $G$ . Da  $G$  genau  $(n - 1)$  Kanten enthält und Kanten, deren Schwanz 1 ist, keinen Beitrag zu  $w^G$  leisten, gilt  $|w^G| < n - 1$ . Andererseits ist 1 ein Kopf in  $F$ , somit sind alle Schwänze in  $F$  verschieden von 1, weshalb  $|w^F| = n - 1$  gilt, ein Widerspruch.

Zur Existenz:

Wir können, mit ähnlichen Argumenten wie oben, ohne Einschränkung annehmen, dass  $w_1 \neq 0$  und  $|w| = n - 1$ . Sei  $w'$  der Vektor mit  $w'_j = w_{j+1}$  für  $j = 1, \dots, n - 2$ . Da  $|w'| \leq n - 2$  existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Facette  $\hat{F}$  von  $\mathcal{D}_{n-1}^1$  mit  $w^{\hat{F}} = w'$ . Sei  $F := \text{ext}_{12} \hat{F} \cup (1, 2)$ , dann ist  $w^F = (n - 1 - |w'|, w') = w$ .  $\square$

**Korollar 5.17.** Die Anzahl der Facetten von  $\mathcal{R}_n$  ist

$$T(n, 1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}^2 = \binom{2n-2}{n-1}.$$

*Beweis.* Die Anzahl der GEORDNETEN  $r$ -PARTITIONEN VON  $m$ , also die Anzahl der Ausdrücke

$$a_1 + \dots + a_r = m$$

mit  $0 < a_i \in \mathbb{N}$  ist  $\binom{m-1}{r-1}$ , siehe z.B. [Ai]. Zu einem Vektor  $v \in \mathbb{N}^{n-1}$  sei  $\text{supp}(v) := \{i \mid v_i \neq 0\}$ . Wir fassen nun jeden solchen Vektor mit  $r = \#\text{supp}(v)$  als geordnete  $r$ -Partition von  $|v|$  auf und erhalten:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{v \in \mathbb{N}^{n-1}, |v| \leq n-1} 1 \\
&= \sum_{A \subset [n-1]} \sum_{v \in \mathbb{N}^{n-1}, |v| \leq n-1, \text{supp } v = A} 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{A \subset [n-1], \#A=i} \sum_{v \in \mathbb{N}^{n-1}, |v| \leq n-1, \text{supp } v = A} 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{A \subset [n-1], \#A=i} \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{v \in \mathbb{N}^{n-1}, |v|=j, \text{supp } v = A} 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{A \subset [n-1], \#A=i} \sum_{j=i}^{n-1} \binom{j-1}{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{j=i}^{n-1} \binom{j-1}{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}^2 \\
&= \binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Wir erhalten mit Satz 5.11 einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten des Lucaspolynoms  $b_j^n$  und den zentralen Binomialkoeffizienten  $\binom{2n}{n}$ :

**Korollar 5.18.** *Es gilt*

$$(12) \quad \binom{2n-2}{n-1} = \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{l+1} b_l^n \cdot \binom{2(n-l-1)}{n-l-1}.$$

**5.2. Raufuß-Graphen und zyklische Klammerungen.** Nachdem wir im vorherigen Abschnitt bewiesen haben, dass Raufuß-Graphen genau die Graphen sind, die keine Nichtseite des Zyклоeders enthalten, möchten wir in diesem Abschnitt noch eine direkte Bijektion zwischen den Seiten des Zyклоeders, die wie oben erwähnt durch zyklische Klammerungen  $b \in BC(n)$  beschrieben werden können, und der Menge der Raufuß-Graphen definieren.

**Lemma 5.19.** *Jede Facette  $F \in \mathcal{R}_n$  enthält genau eine Kante vom Typ  $(i, (i-1) \bmod n)$ .*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage mit Induktion über  $n$ . Da  $\mathcal{R}_2 = \{\emptyset, (1, 2), (2, 1)\}$  ist die Aussage für  $n = 2$  wahr. Für  $n > 2$  betrachten wir ohne Einschränkung eine Facette aus  $\text{link}_{12} \mathcal{R}_n$ . Nach Satz 5.7 ist  $\text{contr}_{12} F = \{(1, k-1), (i-1, j-1) \mid (1, k), (m, n) \in F, k \neq$

$2, m \neq 1\}$  eine Facette in  $\mathcal{R}_{n-1}$  und enthält nach Induktionsvoraussetzung ein Element  $(j, (j-1) \bmod n-1)$ , also enthält  $F$  die Kante  $(j+1, j)$  falls  $j \neq 1$  und die Kante  $(1, n-1)$  falls  $j = 1$ . Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 5.6.  $\square$

**Satz 5.20.** *Die Menge  $BC(n)$  und die Menge der Raufuß-Graphen sind als partiell geordnete Mengen isomorph.*

*Beweis.* Zu  $b \in BC(n)$  und einem zusammengehörigen Klammerpaar nennen wir die erste Variable rechts von der öffnenden Klammer und die erste Variable links von der schließenden Klammer IN  $b$  GEPAART. Wir definieren zu  $b \in BC(n)$  die Menge

$$\sigma^b := \{(i, j) \mid x_i, x_j \text{ sind in } b \text{ gepaart}\}.$$

Die Menge  $\sigma^b$  ist ein Raufuß-Graph: **R1** entspricht der Unzulässigkeit einer Klammerung nur einer Variabler, **R2** entspricht der Lesart einer Klammerung, der letzten öffnenden Klammer die erste schließende Klammer zuzuordnen und **R3** ist erfüllt, da sich ein  $(k, l) \in \sigma^b$  links von einem  $(i, j) \in \sigma^b$  genau dann befindet, falls die entsprechende Klammerung von  $x_k, x_l$  in die Klammerung von  $x_i, x_j$  geschachtelt ist. Das bedeutet, dass für die zu  $b$  gehörende zyklische Permutation  $\pi$  gilt:

$$\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(l) < \pi^{-1}(j),$$

und somit  $(k, l)$  im Uhrzeigersinn relativ zu  $(i, j)$  orientiert ist.

Umgekehrt fügen wir zu  $\sigma \in \mathcal{R}_n$  links der Variablen  $x_i$  in das Wort  $x_1 \cdots x_n$  eine öffnende Klammer und rechts der Variablen  $x_j$  eine schließende Klammer ein, falls  $(i, j) \in \sigma$  gilt. Wir bezeichnen das Wort gemeinsam mit allen Klammerpaaren als  $\overline{x_1 \cdots x_n}^\sigma$ .

Nach Lemma 5.19 enthält  $\sigma$  entweder eine Kante vom Typ  $((i+1) \bmod n, i)$  oder eine Kante von diesem Typ kann zu  $\sigma$  hinzugefügt werden. Da alle Kanten aus  $\sigma$  dann links von  $((i+1) \bmod n, i)$  liegen, müssen sie im Uhrzeigersinn verlaufen, d.h. für alle  $(k, l) \in \sigma$  gilt:  $k \prec l$  in  $[(i+1) \bmod n, i]$ . Das bedeutet, dass für die Permutation  $\pi(j) = (j+i+1) \bmod n$  gilt:

$$\pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(l) \text{ für alle Kanten } (k, l) \in \sigma.$$

Also gilt, dass in dem permutierten Wort

$$b^\sigma := \overline{x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}}^\sigma$$

die öffnenden Klammern stets links von den schließenden Klammern stehen. Da  $\sigma$  keine Überkreuzungen enthält, paaren die Klammerpaare die Variablen  $(x_i, x_j)$  mit  $(i, j) \in \sigma$ . Einzelne Elemente werden nicht von Klammern umschlossen, da in  $\sigma$  kein Kopf auch Schwanz sein kann, deshalb ist die Klammerung zulässig.

Offensichtlich gilt

$$b^{(\sigma^b)} = b \text{ und } \sigma^{(b^\sigma)} = \sigma,$$

außerdem

$$b' \prec b \text{ genau wenn } \sigma^b \subset \sigma^{b'}.$$

$\square$

## 6. Polytopalität von $\mathcal{D}_n^{n-2}$

Vermutung 1.5 gibt Anlass zu der analogen Vermutung für den Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen:

**Vermutung 6.1.** *Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen ist für alle  $n \geq k + 1$  als Randkomplex eines simplizialen Polytopes  $P$  realisierbar.*

In Spezialfällen können wir die Vermutung beweisen:

**Satz 6.2.** *Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen ist für  $n = k + 1$  und  $n = 1$  als Randkomplex eines (simplizialen) Polytopes  $P$  realisierbar. Für  $n = k + 1$  ist  $P$  der  $k$ -Simplex und für  $n = 1$  das Zyклоeder.*

*Beweis.* Für  $n = k + 1$  besteht  $\Omega_{n,k}$  nur aus Durchmessern, die sich selbstverständlich paarweise kreuzen. Daraus ergibt sich sofort, dass  $\mathcal{D}_n^k$  isomorph zum Randkomplex des  $k$ -dimensionalen Simplex ist. Wie bereits erwähnt ist  $\mathcal{D}_n^1$  isomorph zum Rand des Typ-B Associaeders oder Zyκλοeders, siehe dazu [Si] und Abschnitt 5.  $\square$

Wir zeigen nun, dass die Vermutung auch für  $n = k + 2$  wahr ist. Das so genannte GALE'S EVENNESS-KRITERIUM liefert eine vollständige Beschreibung des Seitenverbandes zyklischer Polytope. Für gerade Dimensionen ergibt sich eine noch handhabbarere Formulierung:

**Definition 6.3.** *Sei  $C_n$  der ZYKELGRAPH, d.h. der Graph auf der Knotenmenge  $[n]$  mit Kanten  $E := \{\{i, i + 1\}, i = 1, \dots, n - 1\} \cup \{1, n\}$ . Für eine Teilmenge  $\sigma \subset [n]$  sei  $C_n(\sigma)$  der induzierte Subgraph, d.h. der Graph, der aus den Knoten  $\sigma$  besteht und nur Kanten  $e \in E$  enthält mit  $e \subset \sigma$ .*

**Theorem 6.4. Gale [Gr]** *Unter der Identifizierung jeder Ecke  $x_i = (i, i^2, i^3, \dots, i^d) \in \mathbb{R}^d$  des  $d$ -dimensionalen zyklischen Polytopes mit dem Knoten  $i$  von  $C_n$  gilt für gerades  $d$  und  $n > d$ : Genau dann ist  $\sigma \subset [n]$  eine Seite im Randkomplex von  $\mathcal{C}_d(n)$  wenn*

$$|\sigma| + \omega(\sigma) \leq d$$

*gilt, wobei  $\omega(\sigma)$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $C_n(\sigma)$  mit ungerader Knotenzahl zählt.*

**Lemma 6.5.** *Die minimalen Nichtseiten von  $\mathcal{C}_{2n-4}(2n)$  sind (unter der Identifizierung aus Theorem 6.4) die  $(n - 1)$ -Teilmengen  $\eta \subset [2n]$ , für die  $C_{2n}(\eta)$  aus  $(n - 1)$  Zusammenhangskomponenten besteht.*

*Beweis.* Zunächst ist klar, dass für Teilmengen  $\sigma \subset [n]$  mit  $|\sigma| \leq n - 2$  der induzierte Graph  $C_{2n}(\sigma)$  höchstens  $n - 2$  Zusammenhangskomponenten mit ungerader Knotenzahl haben kann, so dass in diesem Fall  $|\sigma| + \omega(\sigma) \leq 2n - 4 = d$  gilt. Nach Theorem 6.4 ist  $\sigma$  eine Seite von  $\mathcal{C}_{2n-4}(2n)$ . Falls  $|\sigma| = n - 1$  gilt und mindestens zwei Elemente  $i, j \in \sigma$  eine Zusammenhangskomponente in  $C_{2n}$  bilden, dann ist  $\omega(\sigma) \leq n - 3$  und  $\sigma$  damit eine Seite.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & 2 & 1 \\ 11 & * & * & * & * & 12 \\ 10 & 9 & * & * & * & * \\ * & 8 & 7 & * & * & * \\ * & * & 6 & 5 & * & * \\ * & * & * & 4 & 3 & * \end{pmatrix}$$

Abbildung 9. Nummerierung der Ecken von  $\mathcal{D}_4^6$ .

Offensichtlich ist jede Teilmenge  $\eta$  mit  $|\eta| = n - 1$  und für die  $C_{2n}(\eta)$  aus  $n - 1$  Zusammenhangskomponenten besteht eine (minimale) Nichtseite, denn  $|\eta| + \omega(\eta) = 2n - 2 > d$ . Betrachten wir irgend eine andere Nichtseite  $\tau$ . Nach obiger Argumentation muss  $|\tau| \geq n$  gelten. Besteht  $C_{2n}(\tau)$  nur aus einelementigen Zusammenhangskomponenten oder der vollen Menge  $[2n]$ , so ist unmittelbar klar, dass für jedes  $v \in \tau$  die Menge  $\tau \setminus v$  ebenfalls eine Nichtseite ist. Hat  $C_{2n}(\tau)$  eine Zusammenhangskomponente  $Z$  mit Knotenzahl  $|Z|$  größer als eins und besteht nicht aus allen Knoten, so findet sich in  $Z$  ein Knoten  $v$ , so dass  $C_{2n}(Z \setminus v)$  entweder einelementig ist oder aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht, von denen eine einelementig und die andere von der selben Parität wie  $|Z|$  ist. In beiden Fällen gilt  $\omega(\tau \setminus v) = \omega(\tau) + 1$ , so dass auch  $\tau \setminus v$  eine Nichtseite ist.  $\square$

**Satz 6.6.** Sei  $n \geq 3$ . Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $n - 2$ -Triangulierungen  $\mathcal{D}_n^{n-2}$  ist isomorph zum Randkomplex des zyklischen Polytopes  $\mathcal{C}_{2n-4}(2n)$ .

*Beweis.* Wir betrachten, wie im Beweis von Satz 4.1, die Nichtseiten  $N(A, B)$  von  $\mathcal{D}_n^n$  auf der Eckenmenge  $[n] \times [n] \setminus \{(i, j) \mid j = (i + l) \bmod n \text{ für ein } l < n - 2\}$ . Bettet man die Eckenmenge in die Matrix  $(i, j)_{1 \leq i, j \leq n}$  ein, so befinden sich für  $k = n - 2$  in jeder Zeile und jeder Spalte genau 2 Einträge, die Ecken von  $\mathcal{D}_n^{n-2}$  entsprechen. Wir betrachten nun eine beliebige Nummerierung

$$\varphi : [n] \times [n] \setminus \{(i, j) \mid j = (i + l) \bmod n \text{ für ein } l < n - 2\} \longrightarrow [2n]$$

der Eckenmenge mit der Eigenschaft, dass sich für jedes  $i$  die Ecken mit Nummern  $i - 1, i + 1 \pmod{2n}$  mit der Ecke mit Nummer  $i$  in der selben Zeile oder Spalte befinden (siehe Abbildung 9).

Wir wollen nun zeigen, dass unter jeder Nummerierung der Ecken mit dieser Eigenschaft die Nichtseiten  $N(A, B)$  mit  $A, B \subset [n]$  und  $|A| = |B| = n - 1$  den Nichtseiten von  $\mathcal{C}_{2n-4}(2n)$  entsprechen. Letztere sind nach Lemma 6.5 die  $(n - 1)$ -elementigen Teilmengen der Knotenmenge von  $C_{2n}$ , deren induzierter Subgraph aus  $n - 1$  Zusammenhangskomponenten besteht.

Offensichtlich enthält für alle  $A, B \subset [2n]$  mit  $|A| = |B| = n - 1$  die Menge  $N(A, B)$  genau  $n - 1$  Elemente und in jeder Zeile und jeder Spalte der Matrix  $[n] \times [n]$  befindet sich höchstens ein Element aus  $N(A, B)$ . Deshalb besteht der Subgraph  $C_{2n}(\varphi(N(A, B)))$  aus  $(n - 1)$  Zusammenhangskomponenten, da er keine benachbarten Knoten enthält.

Ist umgekehrt  $\tau$  eine  $(n - 1)$ -elementige Knotenmenge, so dass der induzierte Subgraph aus  $(n - 1)$  Zusammenhangskomponenten besteht, dann stehen die Elemente aus  $\varphi^{-1}(\tau)$

in  $(n - 1)$  unterschiedlichen Zeilen bzw. Spalten. Sei  $A = [n] \setminus i_0 =: \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  die Menge der Zeilenindizes und  $B = [n] \setminus j_0 =: \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$  die Menge der Spaltenindizes.

Da je zwei der  $(n - 1)$  Elemente sowohl in  $\varphi^{-1}(\tau)$  als auch in  $N(A, B)$  in verschiedenen Zeilen und Spalten stehen und sich in jeder Zeile und Spalte der Matrix  $[n] \times [n]$  nur 2 Ecken von  $\mathcal{D}_n^{n-2}$  befinden, stimmen beide Mengen überein, falls ihr Schnitt nicht leer ist.

Die Menge  $\varphi^{-1}(\tau)$  enthält für  $i_0 \neq (j_0 + 2) \bmod n$  die Ecke  $((j_0 + 2) \bmod n, (j_0 + 1) \bmod n)$  als einzige verbleibende Ecke aus  $[n] \times [n]$  in Zeile  $(j_0 + 2) \bmod n$ . Falls  $i_0 = (j_0 + 2) \bmod n$ , so ist  $((j_0 + 1) \bmod n, (j_0 - 1) \bmod n)$  die einzige verbleibende Ecke in Zeile  $(j_0 + 1) \bmod n$  und somit in  $\varphi^{-1}(\tau)$ .

- Nur wenn  $i_0 = 1$  und  $j_0 = n$  ist  $a_i = i + 1 > i = b_i$  für alle  $i = 1, \dots, n - 1$  und damit

$$N(A, B) = \{(a_i, b_i), i = 1, \dots, n - 1\}.$$

Also ist  $((j_0 + 2) \bmod n, (j_0 + 1) \bmod n) = (2, 1) = (a_1, b_1) \in N(A, B) \cap \varphi^{-1}(\tau)$ .

- Nur wenn  $j_0 \leq i_0 - 2$  ist  $a_{j+1} \leq b_j$  für ein  $j \in \{j_0, \dots, i_0 - 2\} \subset \{1, \dots, n - 2\}$ . Es gilt stets  $a_{i+2} \geq i + 2 > i + 1 \geq b_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n - 3\}$ . Also ist genau für  $j_0 \leq i_0 - 2$  die Menge

$$N(A, B) = \{(a_{(i+2) \bmod (n-1)}, b_i), i = 1, \dots, n - 1\}.$$

Sei zunächst  $j_0 < i_0 - 2$ , dann ist  $a_{j_0+2} = j_0 + 2$  und  $b_{j_0} = j_0 + 1$ , also ist

$$(j_0 + 2, j_0 + 1) \in N(A, B) \cap \varphi^{-1}(\tau).$$

Ist  $j_0 = i_0 - 2$ , so ist  $a_{j_0+1} = j_0 + 1$  und  $b_{j_0-1} = j_0 - 1$ , also ist

$$(j_0 + 1, j_0 - 1) \in N(A, B) \cap \varphi^{-1}(\tau).$$

- In den verbleibenden Fällen, in denen  $j_0 > i_0 - 2$  und  $(i_0, j_0) \neq (1, n)$  ist, ist also

$$N(A, B) = \{(a_{(i+1) \bmod (n-1)}, b_i), i = 1, \dots, n - 1\}.$$

Im Fall  $j_0 < n - 1$  (und damit  $i_0 \neq (j_0 + 2) \bmod n$ ) ist

$$(j_0 + 2, j_0 + 1) = (a_{j_0+1}, b_{j_0}) \in N(A, B) \cap \varphi^{-1}(\tau).$$

Falls  $j_0 = n - 1$ , und  $i_0 \neq (j_0 + 2) \bmod n = 1$  ist

$$(1, n) = (a_1, b_{n-1}) \in N(A, B) \cap \varphi^{-1}(\tau).$$

Falls  $j_0 = n$ , und  $i_0 \neq (j_0 + 2) \bmod n = 2$  ist

$$(2, 1) = (a_2, b_1) \in N(A, B) \cap \varphi^{-1}(\tau).$$

Falls  $j_0 = n - 1$ , und  $i_0 = (j_0 + 2) \bmod n = 1$  ist

$$(n, n - 2) = (a_{n-1}, b_{n-2}) \in N(A, B) \cap \varphi^{-1}(\tau).$$

Falls  $j_0 = n$ , und  $i_0 = (j_0 + 2) \bmod n = 2$  ist

$$(1, n - 1) = (a_1, b_{n-1}) \in N(A, B) \cap \varphi^{-1}(\tau).$$

□

## 7. Topologie von $\mathcal{D}_n^k$

Wir untersuchen die Homologiegruppen des Komplexes der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen. Aus der vermuteten Polytopalität ergibt sich unmittelbar die Vermutung, dass eine geometrische Realisierung von  $\mathcal{D}_n^k$  eine Homologie-Sphäre ist.

Wir beweisen diese Vermutung für Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_2$  einerseits durch Rückgriff auf ein analoges Resultat in [Jo1] für den Komplex der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen  $\Delta_{n,k}$  und andererseits unter Verwendung eines Satzes aus [Br] über gewisse Fixpunkt-Komplexe unter Gruppenoperationen. Man sagt, eine Gruppe  $(G, \cdot)$  mit neutralem Element  $e \in G$  OPERIERE durch  $\star$  auf einer Menge  $M$ , falls  $\star$  eine GRUPPENOPERATION, also eine Abbildung  $\star : G \times M \longrightarrow M$  mit folgenden beiden Eigenschaften ist:

- $e \star m = m$  für alle  $m \in M$
- $(g \cdot g') \star m = g \star (g' \star m)$ .

Für einen simplizialen Komplex  $\Sigma$  und eine endliche Gruppe  $G$  sagen wir, bei  $\Sigma$  handele es sich um einen simplizialen  $G$ -Komplex, falls  $G$  auf der Eckenmenge von  $\Sigma$  simplizial operiert, das heißt, dass  $g \star \sigma := \{g \star v \mid v \in \sigma\} \in \Sigma$  für alle  $\sigma \in \Sigma$  gilt. Ein simplizialer  $G$ -Komplex mit der Eigenschaft, dass für jede Untergruppe  $U \subset G$  und Elemente  $g_0, \dots, g_n \in U$  gilt, dass falls  $\{v_0, \dots, v_n\}$  und  $\{g_0 v_0, \dots, g_n v_n\}$  beide Simplizes in  $\Sigma$  sind, ein Element  $g$  aus  $U$  existiert, so dass  $g(v_i) = g_i(v_i)$  für alle  $0 \leq i \leq n$ , ist ein REGULÄRER  $G$ -Komplex.

**Satz 7.1.** [Br] Falls  $\Delta$  ein simplizialer  $G$ -Komplex ist und für alle  $g \in G$ ,  $\sigma \in \Delta$  gilt, dass  $g(v) = v$  für alle Ecken  $v \in \sigma \cap g(\sigma)$ , dann ist die Baryzentrische Unterteilung  $\text{sd}(\Delta)$  ein regulärer  $G$ -Komplex.

Der FIX-KOMPLEX  $\Sigma^G$  ist der simpliziale Komplex, der aus denjenigen Simplizes  $\sigma \in \Sigma$  besteht, für die  $g \star v = v$  für alle  $g \in G$  und  $v \in \sigma$  gilt. Im Falle von Homologiesphären gibt der folgende Satz Auskunft über die Homologie des Fix-Komplexes.

**Satz 7.2.** [Br] Sei  $G$  eine Gruppe von Primzahlordnung  $p$ . Falls  $\Delta$  ein  $d$ -dimensionaler regulärer simplizialer  $G$ -Komplex für den  $H_i(\Delta, \mathbb{Z}_p) \cong H_i(S^d, \mathbb{Z}_p)$  gilt, dann gibt es ein  $\ell \leq d$  so dass  $H_i(\Delta^G, \mathbb{Z}_p) \cong H_i(S^\ell, \mathbb{Z}_p)$ .

In [Br] wird ein simplizialer Komplex, der die Voraussetzungen von Satz 7.2 erfüllt, im Gegensatz zu unserer Definition als Homologiesphäre bezeichnet.

**Satz 7.3.** [Jo1] Der Komplex  $\Delta_{n,k}$  ist für alle  $n \geq k$  eine schälbbare Pseudomannigfaltigkeit und damit eine  $\text{mod } p$ -Homologiesphäre für alle Primzahlen  $p$ .

**Satz 7.4.** Der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen ist eine  $\text{mod } 2$ -Homologiesphäre, d.h.

$$H(\mathcal{D}_n^k, \mathbb{Z}_2) \cong H(S^{k(n-k)-1}, \mathbb{Z}_2)$$

und für jede Seite  $\sigma \in \mathcal{D}_n^k$  gilt

$$H(\text{link}_{\mathcal{D}_n^k}(\sigma), \mathbb{Z}_2) \cong H(S^{k(n-k)-1-\dim \sigma-1}, \mathbb{Z}_2)$$

Insbesondere ist  $\mathcal{D}_n^k$  ein Gorenstein<sup>\*</sup> Komplex und erfüllt die Voraussetzungen aus Satz 3.12. Eine Konsequenz hieraus ist die Reinheit von  $\mathcal{D}_n^k$ , die Dimensionsaussage folgern wir aber aus Satz 3.4.

*Beweis.* Wir konstruieren eine reguläre Unterteilung  $\mathbb{T}_{2n,k}$  des Komplexes  $\Delta_{2n,k}$ , auf dem die Gruppe  $\mathbb{Z}_2$  simplizial operiert, so dass  $\mathcal{D}_n^k$  isomorph zum Fix-Komplex  $\mathbb{T}_{2n,k}^{\mathbb{Z}_2}$  ist. Die Aussage folgt dann aus Satz 7.2 und Korollar 3.12.

Abbildung 10 zeigt  $\Delta_{6,1}$  und die Konstruktion von  $\mathbb{T}_{6,1}$ . Die dick eingezeichneten Seiten sind die des Fixkomplexes und entsprechen den Seiten von  $\mathcal{D}_3^1$ .

Wir betrachten die geometrische Realisierung von  $\Delta_{2n,k}$ . Sei  $\Omega = |\Delta_{2n,k}^{(0)}|$  die Realisierung der Eckenmenge und

$$\Omega' := \Omega \cup \left\{ \frac{1}{2}(d + \bar{d}) \mid d \in \Omega, d \neq \bar{d} \right\} =: \Omega \cup \mathcal{R}$$

sei die Eckenmenge der zu konstruierenden Unterteilung  $\mathbb{T}_{2n,k}$ . Zu jedem geometrischen Simplex  $\sigma \in |\Delta_{2n,k}|$  definieren wir eine Familie von Simplizes  $\{\sigma_\varepsilon \mid \varepsilon \in \{0, 1\}^l\}$ . Dazu sei  $\sigma^{\text{symm}} := \{d \in \Omega \mid d \in \sigma \text{ und } \bar{d} \in \sigma, d \neq \bar{d}\}$  der symmetrische Anteil von  $\sigma$  ohne Berücksichtigung der Durchmesser und  $2l := \#\sigma^{\text{symm}}$ . Wir wählen mit fester Nummerierung eine  $l$ -elementige Menge  $D_\sigma := \{d_1, \dots, d_l\}$  aus  $\sigma^{\text{symm}}$  so aus, dass  $d_i \neq \bar{d}_j$  für alle  $1 \leq i < j \leq l$ . Für ein  $d_i$  und  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^l$  sei dann

$$d_i^{\varepsilon_i} := \begin{cases} d_i & \text{falls } \varepsilon_i = 1 \\ \bar{d}_i & \text{falls } \varepsilon_i = 0 \end{cases}$$

und  $D_\sigma^\varepsilon := \{d_i^{\varepsilon_i}, i = 1, \dots, l\}$ . Schließlich definieren wir zu  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^l$  den geometrischen Simplex

$$\sigma_\varepsilon := \text{conv} \left( (\sigma^{(0)} \setminus \sigma^{\text{symm}}) \cup \left\{ \frac{1}{2}(d + \bar{d}) \mid d \in D_\sigma \right\} \cup D_\sigma^\varepsilon \right).$$

Mit  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  bezeichnen wir den von  $\sigma_\varepsilon$  erzeugten geometrischen Komplex, also den geometrischen Simplex mit allen seinen Seiten. Die geometrische Simplexmenge

$$|\mathbb{T}_{2n,k}| := \{\tau \in \hat{\sigma}_\varepsilon \mid \sigma \in |\Delta_{2n,k}|, \varepsilon \in \{0, 1\}^l\}$$

ist wegen

$$\sigma_\varepsilon \cap \tau_\vartheta = \text{conv} \left( (\sigma^{(0)} \cap \tau^{(0)} \setminus (\sigma \cap \tau)^{\text{symm}}) \cup \left\{ \frac{1}{2}(d + \bar{d}) \mid d \in D_{\sigma \cap \tau} \right\} \cup D_{\sigma \cap \tau}^\gamma \right) = (\sigma \cap \tau)_\gamma$$

für ein geeignetes  $\gamma \in \mathbb{Z}_2^l$  ein geometrischer simplizialer Komplex. Da  $\text{conv}(\{D_\sigma^\varepsilon \mid \varepsilon \in \{0, 1\}^l\}) = \text{conv}(\sigma^{\text{symm}})$ , gilt  $\bigcup_{\varepsilon \in \{0, 1\}^l} \sigma_\varepsilon = \sigma$  für alle  $\sigma \in \Delta_{2n,k}$ . Also ist  $\mathbb{T}_{2n,k}$  eine Unterteilung von  $\Delta_{2n,k}$  und mit Satz 7.3 eine mod 2-Homologie-Sphäre.

Die Gruppenoperation  $(\mathbb{Z}_2, \star)$  auf  $\Omega'$  mit  $1 \star d \mapsto d, 0 \star d \mapsto \bar{d}$  operiert wegen  $0 \star \sigma_\varepsilon = \sigma_{\varepsilon + (1, \dots, 1)}$  simplizial auf  $\mathbb{T}_{2n,k}$ .

Genau die Elemente

$$F_\Omega := \left\{ \frac{1}{2}(d + \bar{d}) \mid d \in \Omega \right\} \cup \{d \in \Omega \mid d = \bar{d}\}$$

sind die Fixpunkte der Gruppenoperation.

Da

$$\#\{d, \bar{d}\} \cap \sigma_\varepsilon \leq 1 \text{ für alle } d \in \Omega$$

erhält man, dass

$$(13) \quad g(v) = v \text{ für alle } v \in g(\sigma) \cap \sigma \text{ und für alle } \sigma \in T_{2n,k} \text{ gilt.}$$

Durch geeignete baryzentrische Unterteilungen machen wir  $T_{2n,k}$  zu einem regulären  $\mathbb{Z}_2$ -Komplex:

In einem ersten Schritt ersetzen wir alle  $\sigma \in T_{2n,k}$ , deren Eckenmenge vollständig in  $\Omega$  enthalten ist, durch ihre baryzentrische Unterteilungen. Simplizes  $\tau \in T_{2n,k}$ , deren Eckenmenge vollständig in  $\mathcal{R}$  enthalten ist, bleiben unverändert. Die erhaltene Simplexmenge, die kein simplizialer Komplex ist, nennen wir  $\hat{T}_{2n,k}$ .

Im zweiten Schritt betrachten wir die maximalen Seiten  $\delta$  von  $T_{2n,k}$ , deren Eckenmenge Elemente aus  $\mathcal{R}$  und Elemente aus  $\Omega$  enthält. Diese ersetzen wir durch

$$\bigcup \sigma \star \tau = \bigcup \text{conv}(\sigma \cup \tau)$$

wobei die Vereinigung über alle Paare von Simplizes  $\sigma, \tau \in \hat{T}_{2n,k}$  genommen wird, so dass die Eckenmenge von  $\sigma$  kein Element von  $\mathcal{R}$  enthält, die Eckenmenge von  $\tau$  Teilmenge von  $\mathcal{R}$  ist und  $\sigma, \tau$  in  $\delta$  enthalten sind. In diesem Schritt werden keine neuen Ecken eingeführt.

Zum Nachweis der Regularität seien  $\sigma := \{v_0, \dots, v_n\}$  und  $\tau := \{v_{j_1}, \dots, v_{j_l}\} \cup \{\bar{v}_{j_{l+1}}, \dots, \bar{v}_{j_n}\}$  (Eckenmengen von) Simplizes der Unterteilung von  $T_{2n,k}$ . Falls  $\tau \neq \sigma$ , also mindestens ein  $v_{j_i}$  existiert, so dass  $v_{j_i} \neq \bar{v}_{j_i}$ , müssen wir zeigen, dass  $\tau = \bar{\sigma}$  gilt.

Die Simplizes  $(\sigma \setminus \mathcal{R}), (\tau \setminus \mathcal{R})$  sind Elemente der baryzentrischen Unterteilung eines Komplexes, in dem (13) gilt, also ist nach Satz 7.1

$$\overline{(\sigma \setminus \mathcal{R})} = (\tau \setminus \mathcal{R})$$

und damit auch  $\bar{\sigma} = \tau$ .

Die Facetten von  $\mathcal{D}_n^k$  sind die symmetrischen  $k$ -Triangulierungen des  $2n$ -Ecks, in denen symmetrische Diagonalen identifiziert werden. Offensichtlich induziert

$$\phi : \{d, \bar{d}\} \mapsto \frac{1}{2}(d + \bar{d})$$

einen Isomorphismus zwischen  $\mathcal{D}_n^k$  und dem Fixkomplex  $T_{2n,k}^{\mathbb{Z}_2}$ . Damit folgt

$$H_i(\mathcal{D}_n^k, \mathbb{Z}_2) \cong H_i(S^{k(n-k)-1}, \mathbb{Z}_2)$$

mit Satz 7.2.

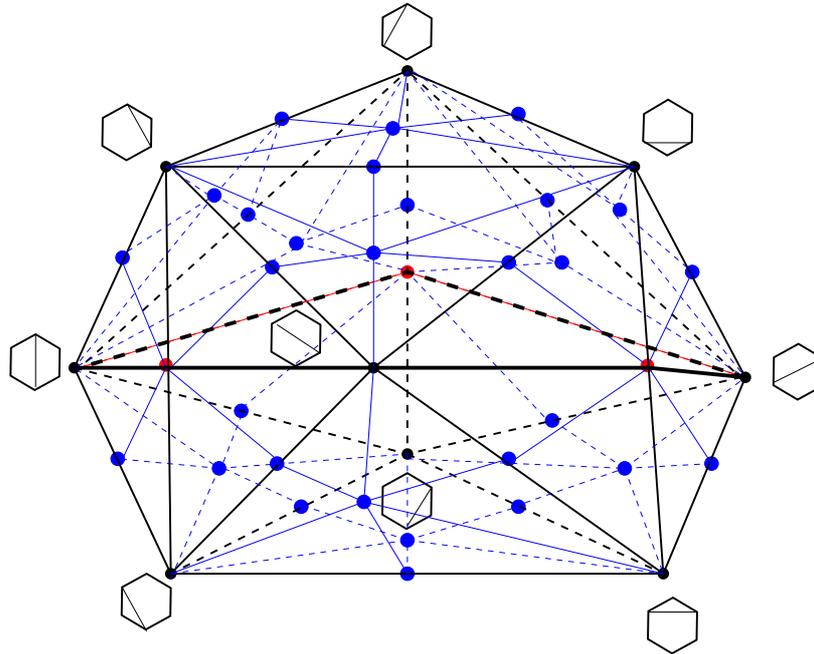


Abbildung 10. Konstruktion aus dem Beweis von Satz 7.4

Sei  $\tau$  nun eine Seite von  $\mathcal{D}_n^k$ . Da  $\mathcal{D}_n^k$  rein von Dimension  $k(n-k) - 1$  ist, gilt  $\dim \text{link}_{\mathcal{D}_n^k}(\tau) = k(n-k) - 1 - \dim \tau - 1$ .

Der oben verwendete Isomorphismus liefert ebenfalls

$$\text{link}_{\mathcal{D}_n^k}(\tau) \cong \text{link}_{T_{2n,k}^{\mathbb{Z}_2}}(\phi(\tau))$$

und da  $T_{2n,k}^{\mathbb{Z}_2}$  eine mod 2-Homologiesphäre ist, folgt die Behauptung.

□

## 8. Multiplizität des Komplexes der Typ-B verallgemeinerten $k$ -Triangulierungen

Besonders unter dem Gesichtspunkt von Lemma 4.3 in Kapitel 4 ist die Multiplizität  $T(n, k)$ , also die Anzahl der Facetten von  $\mathcal{D}_n^k$  von großem Interesse.

Da  $\mathcal{D}_n^k$  für  $n = k+1$  der Rand des  $k$ -Simplex ist, gilt  $T(k+1, k) = k+1$ . In Satz 5.17 haben wir  $T(n, 1) = \binom{2n-2}{n-1}$  bewiesen. Für  $n = k+2$  benutzt man die wohlbekanntete Formel für den  $h$ -Vektor des zyklischen Polytopes:

**Korollar 8.1.** Für den  $h$ -Vektor von  $\mathcal{D}_n^{n-2}$  gilt:

$$h_l(\mathcal{D}_n^{n-2}) = h_{2n-4-l}(\mathcal{D}_n^{n-2}) = \binom{3+l}{l}, \quad l \leq n-2,$$

	2	3	4	5	6	7	
1	2	6	20	70	252	924	...
2		3	20	175	1764	19404	...
3			4	50	980	24696	...
4				5	105	4116	...

**Tabelle 1.** Multiplizität von  $\mathcal{D}_n^k$  ( $k < n$ )

insbesondere ist die Anzahl der Facetten von  $\mathcal{D}_n^{n-2}$

$$\begin{aligned} T(n, n-2) &= \frac{n^2(n^2-1)}{12} \\ &= \prod_{i=0}^1 \frac{(n+i)!i!}{(i+n-2)!(2+i)!} \end{aligned}$$

*Beweis.* Durch Aufsummieren des h-Vektors (siehe Lemma 3.2) und Induktion. □

Wir haben in Tabelle 1 die von uns unter Verwendung eines Computers errechneten Werte für kleine  $n$  und  $k$  zusammengestellt. Die folgenden, äquivalenten Vermutungen fassen die Beobachtungen zusammen.

**Vermutung 8.2.** Die Multiplizität  $T(n, k)$  von  $\mathcal{D}_n^k$  ist durch eine Verschiebung der Folge A103905 aus [SI] und damit durch eine der folgenden äquivalenten Formeln gegeben:

$$(14) \quad T(n, k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!(j+2(n-k))!}{(j+n-k)!^2}$$

$$(15) \quad T(n, k) = \prod_{h=1}^{n-k} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n-k} \frac{h+i+j-1}{h+i+j-2}$$

$$(16) \quad T(n, k) = \frac{V(2n-k-1)V(k-1)V(n-k-1)^2}{V(2n-2k-1)V(n-1)^2}$$

wobei  $V(n)$  die  $n$ -te superfaktorielle Zahl ist, also

$$V(n) = \prod_{i=1}^n i!$$

**Vermutung 8.3.** Die Multiplizität  $T(n, k)$  von  $\mathcal{D}_n^k$  stimmt mit der Multiplizität des Determinantenideals überein und berechnet sich daher (siehe [HT] oder [BC]) durch

$$(17) \quad T(n, k) = \det \left[ \binom{2n-i-j}{n-i} \right]_{i,j=1,\dots,k}$$

$$(18) \quad T(n, k) = \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{(n+i)!i!}{(i+k)!(n-k+i)!}$$

$$(19) \quad T(n, k) = \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{\binom{n+i}{k}}{\binom{k+i}{k}}$$

1	1	1
1 1	1 1	1 1
1 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">2</span> 1	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">2</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">1</span>	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">2</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">1</span> 0
1 3 3 1	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">3</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">3</span> 1	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">3</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">3</span> 1
1 4 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">6</span> 4 1	1 4 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">6</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">4</span> 1	1 4 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">6</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">4</span> 1
1 5 10 10 5 1	1 5 10 10 5 1	1 5 10 10 5 1
1 6 15 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">20</span> 15 6 1	1 6 15 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">20</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">15</span> 6 1	1 6 15 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">20</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">15</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">6</span> 1
1 7 21 35 35 21 7 1	1 7 21 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">35</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">35</span> 21 7 1	1 7 21 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">35</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">35</span> 21 7 1
1 8 28 56 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">70</span> 56 28 8 1	1 8 28 56 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">70</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">56</span> 28 8 1	1 8 28 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">56</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">70</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">56</span> 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	1 9 36 84 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">126</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">126</span> 84 36 9 1	1 9 36 84 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">126</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">126</span> 84 36 9 1
		1 9 36 84 <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">126</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">126</span> 84 36 9 1
		<span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">210</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">252</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">210</span>

**Abbildung 11.** Die Binomialdeterminanten aus Vermutung 8.4 für  $T(n, k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

**Vermutung 8.4.** Die Multiplizität  $T(n, k)$  von  $\mathcal{D}_n^k$  ist

$$(20) \quad T(n, k) = \det \left[ \binom{2(n-k)}{n-k+i-j} \right]_{i,j=1,\dots,k}$$

$$(21) \quad = \prod_{i=1}^{n-k} \frac{(k+i)^i (n+i)^{n-k-i}}{i^i (n-k+i)^{n-k-i}}$$

$$(22) \quad = \begin{pmatrix} 2(n-k), & \dots, & 2(n-k) + k - 1 \\ (n-k), & \dots, & (n-1) \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} a_1, & \dots, & a_k \\ b_1, & \dots, & b_k \end{pmatrix}$$

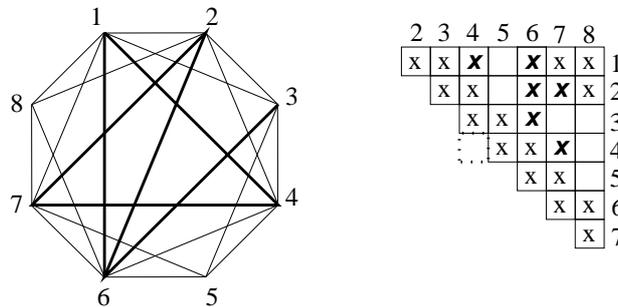
die BINOMIALDETERMINANTE

$$\det \left( \binom{a_i}{b_i} \right)_{1 \leq i, j \leq k}$$

(siehe [GV]) bezeichnet. Siehe auch Abbildung 11.

**Bemerkung 8.5.** Die Formeln in den Gleichungen (14),(15),(16) stimmen laut [SI] überein. Die Formeln in Gleichung (20),(21) sind nach [An] äquivalent zur Gleichung (22). Gleichung (21) entspricht nach [BSt] den Gleichungen (14),(15),(16). Da Gleichung (18) und Gleichung (16) identisch sind, folgt also die Äquivalenz der drei Vermutungen.

**Bemerkung 8.6.** Die Zahlen  $T(n, k)$  sind in der enumerativen Kombinatorik keine Unbekannten: Sie zählen die Anzahl  $N(n-k, k, n-k)$  von RHOMBUS-TILINGS eines Hexagons mit Seitenlängen  $(n-k, k, n-k, n-k, k, n-k)$  (siehe zum Beispiel [Fi]) und damit auch die Anzahl  $N(n-k, k, n-k)$  der EBENEN PARTITIONEN mit höchstens  $(n-k)$  Spalten und höchstens  $(n-k)$  Zeilen und größtem Eintrag kleiner gleich  $k$ , ebenso Würfelstapel die in eine  $((n-k) \times (n-k) \times k)$ -Box passen. Die Binomialdeterminante (22) zählt nach [GV] die Anzahl sich nicht überschneidender  $k$ -Tupel von Pfaden  $(p_1, \dots, p_k)$ , wobei  $p_i$  ein Gitterpfad in  $\mathbb{Z}^2$  mit Schritten  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  von  $(2(n-k)+i-1, 0)$  nach  $(n-k+i-1, n-k+i-1)$  ist.



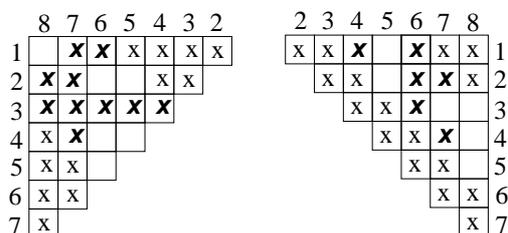
**Abbildung 12.** Eine 2-Triangulierung des 8-Ecks und die entsprechende 3-Diagonalenfreie Teilmenge des Polyominos. Nicht fette Einträge im Polynomio bzw. Diagonalen können in keiner 3-Kreuzung bzw. 3-Diagonale enthalten sein. Die Einträge  $(4, 1)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(7, 4)$  bilden keine 3-Diagonale im Polynomio, da das gestrichelte Feld kein Feld des Polyominos ist.

**8.1. Multiplizität und Dyck-Pfade.** Auf eine besondere Klasse von Objekten, die von  $T(n, k)$  gezählt werden, möchten wir im folgenden näher eingehen, da deren unsymmetrische Variante eine Anzahl hat, die der Multiplizität des Komplexes der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen entspricht.

Ein DYCK-PFAD  $P$  mit  $2n$  Schritten ist ein Pfad von  $(x, 0)$  nach  $(2n + x, 0)$  mit Schritten  $(1, 1)$  (Aufwärts-Schritt) und  $(-1, 1)$  (Abwärts-Schritt), der nie unterhalb der  $x$ -Achse verläuft. Wir fassen einen Pfad als Teilmenge von  $\mathbb{Z}^2$  auf. Ein  $k$ -Tupel von Dyckpfaden  $(P_1, \dots, P_k)$  schneidet sich nicht, wenn keine zwei Pfade den selben Punkt durchlaufen. Ein Dyck-Pfad ist symmetrisch bezüglich der Achse  $\{(2n, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$ , falls  $(x, y) \in P$  genau wenn  $(4n - x, y) \in P$ .

In [Jo3] wird die Multiplizität des Komplexes der verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen wie folgt ermittelt (wir verzichten auf die exakten Definitionen und verweisen auf die entsprechenden Abbildungen): Jeder Diagonale  $ij$  im  $n$ -Eck entspricht ein Feld in einem so genannten POLYNOMIO, wie es in Abbildung 12 rechts zu sehen ist.

Einer  $k$ -Kreuzung entspricht im Polynomio einer  $k$ -DIAGONALEN, dies ist eine Menge von  $k$  Feldern im Polynomio, bei denen sich jedes Feld entweder strikt links und strikt oberhalb oder strikt rechts und strikt unterhalb eines jeden anderen Feldes dieser Menge befindet und das kleinste Rechteck, das diese Menge umfasst, vollständig in dem Polynomio enthalten ist (siehe das gestrichelte Feld Abbildung 12). Die Bestimmung der Multiplizität entspricht also der Bestimmung der Anzahl der inklusions-maximalen Feldermengen, die keine  $k$ -Diagonalen enthalten. Das Hauptresultat in [Jo3] besagt, dass die Anzahl der inklusions-maximalen Feldermengen, die keine  $k$ -Diagonalen enthalten, für eine gewisse Klasse von Polyominos, so genannter Stack-Polyominos, nur von deren Inhalt abhängt. Der Inhalt eines Polyominos ist durch den Vektor definiert, dessen Einträge aus den der Größe nach geordneten Felderzahlen je Spalte bestehen. (Der Beweis in [Jo3] erfolgt über Induktion und liefert keine Bijektion.) Als Spezialfall dieses Hauptresultates erhält man, dass die Anzahl der  $k$ -diagonalfreien maximalen Feldermengen in den beiden Polyominos in Abbildung 13 übereinstimmen, denn ihrer



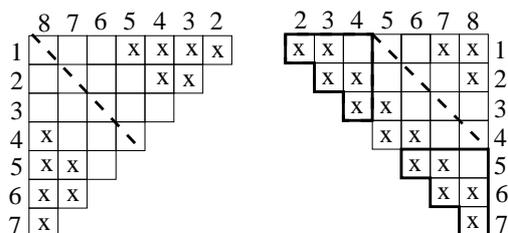
**Abbildung 13.** Die Anzahl maximaler  $k$ -diagonalfreier Mengen stimmt nach [Jo3] in beiden Polyominos überein.

beider Inhalt ist  $(7, 6, 5, \dots, 1)$ . Im linken der beiden Polyominos entspricht eine solche  $k$ -diagonalfreie maximale Feldermenge aber genau einem  $k$ -Tupel von Dyck-Pfaden, deren Anzahl in [HT] bestimmt wurde und mit der Determinante aus Satz 1.2 übereinstimmt.

Wir vermuten, dass eine analoge Aussage auch für die Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen gilt: In die Polyominos aus Abbildung 13 übersetzt bedeutet dies, diejenigen maximalen  $k$ -diagonalfreien Mengen im rechten Polynomio zu betrachten, deren Felder symmetrisch zu der gestrichelten Achse liegen bzw. deren Felder sich deckungsgleich auf den beiden fett eingezeichneten Polynomioteilen befinden, siehe Abbildung 14. Die Vermutung liegt nahe, dass sich diese Symmetrie auf die Symmetrie der Dyck-Pfade überträgt, wie sie oben definiert wurde, die Symmetrieachse ist in Abbildung 14 links eingetragen. Notwendige Bedingung hierfür wäre bei der Gültigkeit der Vermutungen 8.2,8.3,8.4, dass die Anzahl der symmetrischen Dyck-Pfade mit  $T(n, k)$  übereinstimmt. Das ist die Aussage des folgenden Satzes:

**Satz 8.7.** [FS] Die  $k$ -Tupel sich nicht berührender Dyck-Pfade  $(P_1, \dots, P_k)$ , so dass für alle  $1 \leq i \leq k$  gilt:

- (1)  $P_i$  ist ein Dyck-Pfad von  $(2i - 2, 0)$  nach  $(4(n - 1) - 2i + 2, 0)$  und
- (2)  $P_i$  ist symmetrisch bezüglich der Achse  $\{(2(n - 1), y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$



**Abbildung 14.** Die Vermutung besagt, dass die Anzahl maximaler  $k$ -diagonalfreier Mengen, die auf der rechten Seite symmetrisch zur gestrichelten Achse liegen bzw. sich deckungsgleich auf den fett eingerahmten Randstücken des Polyominos befinden, mit der Anzahl der bezüglich der links eingezeichneten Achse symmetrischen  $k$ -Tupeln von Dyck-pfaden übereinstimmt.

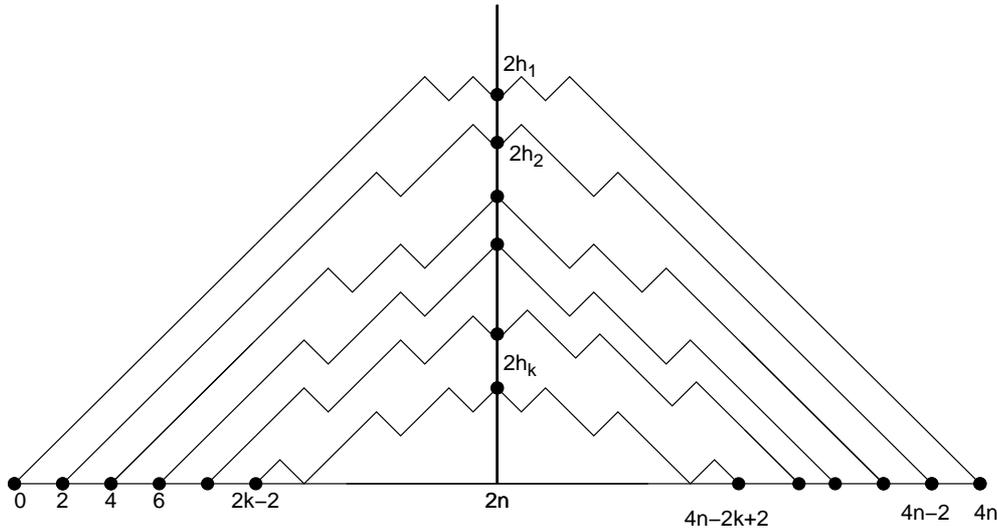


Abbildung 15. k symmetrische Pfade aus Satz 8.7

(siehe Abbildung 15) werden durch

$$(23) \quad \sum_{\{0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_k \leq n\}} \det (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$$

$$(24) \quad \text{mit } p_{ij} = \binom{2n - 2i}{n - i + h_j} - \binom{2n - 2i}{n - i - h_j - 1}$$

gezählt. Ihre Anzahl stimmt daher mit  $T(n + 1, k)$  aus einer der Gleichungen in den Vermutungen 8.2 bis 8.4 überein.

*Beweis.* Zur Vereinfachung betrachten wir ein k-Tupel von sich nicht schneidenden Dyck-Pfaden  $(P_1, \dots, P_k)$  so dass für alle  $1 \leq i \leq k$  gilt:

- (1)  $P_i$  ist ein Dyck-Pfad von  $(2i - 2, 0)$  nach  $(4n - 2i + 2, 0)$  und
- (2)  $P_i$  ist symmetrisch bezüglich der Achse  $\{(2n, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$

Wir zeigen zunächst die Summenformel: Sei  $2h_i$  die y-Koordinate des Punktes, in dem sich Pfad  $i$  mit der Symmetrieachse  $\{(2n, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$  schneidet. Die Anzahl aller Pfade mit Schritten  $(1, 1)$  und  $(-1, 1)$  von  $A_i = (2i - 2, 0)$  nach  $E_j = (2n, 2h_j)$  ist

$$\binom{2n - (2i - 2)}{\frac{2n + 2h_j - (2i - 2)}{2}},$$

denn mit  $d$  als Anzahl der Schritte  $(-1, 1)$  und  $u$  als die Zahl der Schritte  $(1, 1)$  ergibt sich  $u + d = 2n$  und  $u - d = 2h_j$ , woraus  $u = (2n + 2h_j - (2i - 2))/2$  folgt. Die Anzahl der Hoch-Schritte liegt somit fest und diese können beliebig aus den  $2n - (2i - 2)$  Schritten, die insgesamt zu gehen sind, gewählt werden. Um die Zahl der Dyck-Pfade von  $A_i$  nach  $E_j$  zu bestimmen wendet man das so genannte Spiegelungsprinzip von André [**And**] an: Verläuft ein Pfad  $P$  von  $A_i$  nach  $E_j$  unterhalb der  $x$  Achse, so betrachtet man den Pfad-Punkt  $p = (x, -1)$  mit maximalem  $x$ . Den weiteren Verlauf dieses Pfades spiegelt man

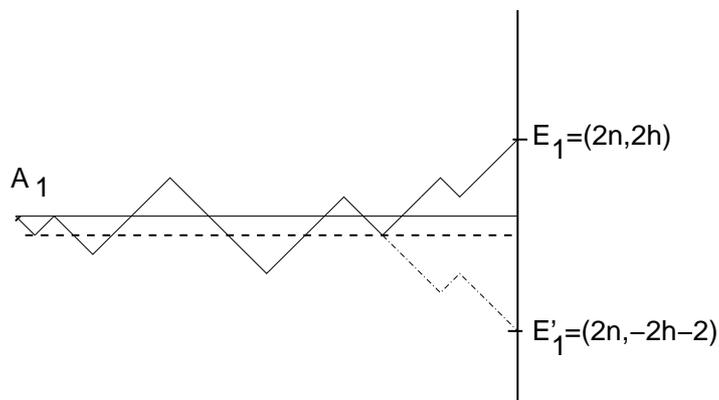


Abbildung 16. Spiegelungsprinzip von Désiré André

an der Achse  $\{(h, -1), h \in \mathbb{R}\}$  und erhält so einen Pfad von  $A_i$  nach  $E'_j = (2n, -2h_j - 2)$  (siehe Abbildung 16).

Eine analoge Argumentation wie oben ergibt für die Anzahl der Pfade von  $A_i$  nach  $E'_j$  die Formel

$$\binom{2n - 2i + 2}{\frac{2n - 2i - 2h_j}{2}}.$$

Also ist die Zahl der Dyck-Pfade von  $A_i$  nach  $E_j$  gleich

$$p(i, j) := \binom{2n - 2i + 2}{\frac{2n - 2i + 2 + 2h_j}{2}} - \binom{2n - 2i + 2}{\frac{2n - 2i - 2h_j}{2}}.$$

Die übrigen Argumente stammen von Gessel-Viennot [GV]:

Wir betrachten (bei festen  $h_1, \dots, h_k$ ) zu JEDEM  $k$  Tupel symmetrischer Dyck-Pfade von  $A_1, \dots, A_k$  nach  $E_1, \dots, E_k$  die  $k$ -Permutation  $\sigma$ , so dass  $T = (p_1, \dots, p_k)$  gilt, wobei  $p_i$  ein Pfad von  $A_i$  nach  $E_{\sigma(i)}$  ist. Wir schreiben für die Menge aller solcher Tupel

$$\{T : A_1, \dots, A_k \rightarrow E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(k)}\}.$$

Offensichtlich sind wir an der Anzahl derjenigen Tupel interessiert, für die  $\sigma = \text{id}$  gilt und die kein Paar sich kreuzender Pfade enthalten.

Wir definieren nun eine Injektion zwischen Pfadtupeln  $\Psi$ , so dass

$$(25) \quad \text{sign}(\sigma(\Psi(T))) = -\text{sign}(\sigma(T))$$

für alle Tupel  $T$  mit Kreuzungspunkt gilt.

Enthält ein Tupel  $T = (p_1, \dots, p_k)$  mindestens ein solches Paar sich kreuzender Dyck-Pfade, so wählen wir denjenigen Kreuzungspunkt, der am weitesten links und am weitesten unten liegt. Dieser sei durch das Pfad-Paar  $p_a, p_b$  entstanden, wobei ( $a < b$ ) das lexikographisch kleinste Tupel mit der Eigenschaft ist, dass die betreffenden Pfade sich an diesem Punkt kreuzen. Der Pfad  $p_a$  verlaufe von  $A_i$  nach  $E_j$  und  $p_b$  von  $A_k$  nach  $E_l$ . Dieses Tupel bilden wir mit  $\Psi$  auf das Tupel ab, das aus  $T$  entsteht, indem man  $p_a$  durch  $p'_a$  und  $p_b$  durch  $p'_b$  ersetzt. Der Pfad  $p'_a$  führt von  $A_i$  bis zum Kreuzungspunkt entlang von  $p_a$  und ab dem Kreuzungspunkt entlang von  $p_b$  bis zu  $E_l$ , der Pfad  $p'_b$  führt von

$A_k$  bis zum Kreuzungspunkt entlang von  $p_b$  und ab dem Kreuzungspunkt entlang von  $p_a$  bis zu  $E_j$ . Die Abbildung lässt  $T$  unverändert, wenn  $T$  keinen Kreuzungspunkt enthält.

Offensichtlich gilt  $\Psi(\Psi(T)) = T$  und die Permutationen  $\sigma(T), \sigma(\Psi(T))$  unterscheiden sich um eine Transposition, weshalb (25) gilt.

Daraus ergibt sich für die fragliche Anzahl  $\mathcal{N}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \sum_{\{0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_k \leq n\}} \sum_{\pi \in S_k} \sum_{T: A_1, \dots, A_k \rightarrow E_{\pi(1)}, \dots, E_{\pi(k)}} \text{sign}(\pi) \\ &= \sum_{\{0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_k \leq n\}} \sum_{\pi \in S_k} \text{sign}(\pi) \prod_{i=1, \dots, k} p(i, \pi(i)) \\ &= \sum_{\{0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_k \leq n\}} \sum_{\pi \in S_k} \text{sign}(\pi) \prod_{i=1, \dots, k} \binom{2n - 2i + 2}{\frac{2n - 2i + 2 + 2h_{\pi(i)}}{2}} - \binom{2n - 2i + 2}{\frac{2n - 2i - 2h_{\pi(i)}}{2}} \\ &= \sum_{\{0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_k \leq n\}} \det((p(i, j))_{1 \leq i, j \leq k}). \end{aligned}$$

Um die Übereinstimmung mit  $T(n + 1, k)$  aus einer der Gleichungen in den Vermutungen 8.2 bis 8.4 zu zeigen, füllen wir die Zwischenräume in einem  $k$ -Tupel von symmetrischen Pfaden mit Einheits-Rhomben und erhalten eine Rhombus-Parkettierung der oberen Hälfte eines Hexagons mit Seitenlängen  $(2k, 2n - 2k + 2, 2n - 2k + 2)$  (siehe Abbildung 17). Diese spiegeln wir an der waagrechten Achse. Das Resultat ist eine SYMMETRISCHE, SELBSTKOMPLEMENTÄRE RHOMBUS-PARKETTIERUNG eines Hexagons mit Seitenlängen  $(k, 2n - 2k + 2, 2n - 2k + 2)$ . Diese werden nach [Pr] durch die Anzahl der (allgemeinen) Rhombus-Parkettierungen eines Hexagons mit Seitenlängen  $(k, n - k + 1, n - k + 1)$  gezählt. Mit Bemerkung 8.6 folgt die Behauptung.  $\square$

Wir zeigen in Kapitel 4, Korollar 4.7:

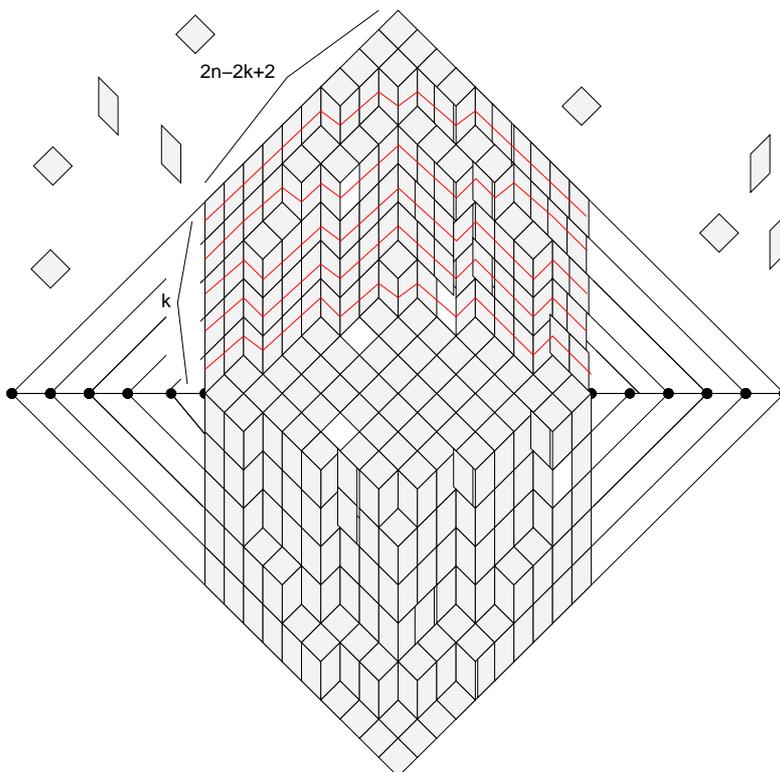
**Korollar 8.8.** *Für alle  $n \geq k + 1$  gilt für die Anzahl der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen, dass jeder Term in den Vermutungen 8.2, 8.3, 8.4 eine untere Schranke ist.*

Das Upper-Bound Theorem in der Erweiterung von Novik (siehe Satz 3.12 in Kapitel 2) liefert gemeinsam mit Satz 7.4 die folgende obere Schranke:

**Korollar 8.9.** *Für alle  $n \geq k + 1$  gilt für die Anzahl der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen, dass die Anzahl der Facetten des  $k(n - k)$  dimensionalen zyklischen Polytops mit  $n(n - k)$  Ecken*

$$O(n, k) = \begin{cases} 2 \cdot \binom{(n-k)^2 + \frac{k(n-k)-1}{2}}{(n-k)^2} & \text{falls } k(n-k) \text{ ungerade,} \\ 2 \cdot \binom{(n-k)^2 + \frac{k(n-k)}{2}}{(n-k)^2} + \binom{(n-k)^2 - 1 + \frac{k(n-k)}{2}}{(n-k)^2 - 1} & \text{falls } k(n-k) \text{ gerade,} \end{cases}$$

eine obere Schranke ist.



**Abbildung 17.** symmetrische, selbstkomplementäre Rhombus-Parkettierung

*Beweis.* Es ist  $f_0(\mathcal{D}_n^k) = n(n-k)$  und  $\dim \mathcal{D}_n^k = k(n-k) - 1$ . Für das zyklische Polytop der Dimension  $D$  mit  $N$  Ecken ist

$$h_i(\mathcal{C}_D(N)) = \binom{N-D-1+i}{i} \text{ für } 0 \leq i \leq \lfloor \frac{D}{2} \rfloor$$

(siehe z.B. [Zi]), also gilt für die Multiplizität bei geradem  $D = k(n-k)$  wegen der Dehn-Sommerville Gleichungen  $h_i = h_{D-i}$ ,  $i = 1, \dots, D$ :

$$\begin{aligned} f_{D-1}(\mathcal{C}_D(N)) &= \sum_{i=0}^D h_i(\mathcal{C}_D(N)) \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{D}{2}-1} \binom{N-D-1+i}{i} + \binom{N-D-1+\frac{D}{2}}{\frac{D}{2}} \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{k(n-k)/2} \binom{n(n-k) - k(n-k) - 1 + i}{i} + \binom{(n-k)^2 - 1 + k(n-k)/2}{k(n-k)/2} \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{k(n-k)/2} \binom{(n-k)^2 - 1 + i}{i} + \binom{(n-k)^2 - 1 + k(n-k)/2}{k(n-k)/2} \\ &= 2 \cdot \binom{(n-k)^2 + k(n-k)/2}{k(n-k)/2} + \binom{(n-k)^2 - 1 + k(n-k)/2}{k(n-k)/2} \\ &= 2 \cdot \binom{(n-k)^2 + k(n-k)/2}{(n-k)^2} + \binom{(n-k)^2 - 1 + k(n-k)/2}{(n-k)^2 - 1}, \end{aligned}$$

und bei ungeradem  $D = k(n - k)$ :

$$\begin{aligned}
 f_{D-1}(\mathcal{C}_D(N)) &= \sum_{i=0}^D h_i(\mathcal{C}_D(N)) \\
 &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{D-1}{2}} \binom{N-D-1+i}{i} \\
 &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{(k(n-k)-1)/2} \binom{n(n-k) - k(n-k) - 1 + i}{i} \\
 &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{(k(n-k)-1)/2} \binom{(n-k)^2 - 1 + i}{i} \\
 &= 2 \cdot \binom{(n-k)^2 + (k(n-k) - 1)/2}{(k(n-k) - 1)/2} \\
 &= 2 \cdot \binom{(n-k)^2 + (k(n-k) - 1)/2}{(n-k)^2},
 \end{aligned}$$

□

**Korollar 8.10.** *Bei fester Differenz  $l := (n - k)$  gilt für die obere Schranke  $O(n, k)$  und die untere Schranke  $T(n, k)$ : Es gibt ein  $M = M(l) \in \mathbb{Q}$  so dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(k+l, k)}{O(k+l, k)} = M.$$

*Beweis.* Die Funktion  $p_l(k) := \binom{k+l}{k}$  ist ein Polynom vom Grad  $l$  in  $k$  mit führendem Koeffizienten  $\frac{1}{l!}$ , woraus folgt, dass

$$T(k+l, k) = \prod_{i=0}^{l-1} \frac{\binom{k+l+i}{k}}{\binom{k+i}{k}} = \prod_{i=0}^{l-1} \frac{p_{l+i}(k)}{p_i(k)} =: \frac{2! \cdot 3! \cdots (l-1)!}{l!(l+1)! \cdots (2l-1)!} \cdot \frac{P(k)}{Q(k)}$$

eine rationale Funktion in  $k$  ist, wobei  $P, Q$  normierte Polynome sind und  $\deg P = l^2 + \frac{(l-1)l}{2}$  sowie  $\deg Q = \frac{(l-1)l}{2}$  gilt.

Analog ist

$$\begin{aligned}
 O(k+l, k) &= 2 \cdot \binom{l^2 + kl/2}{kl/2} + \binom{l^2 - 1 + kl/2}{kl/2} \\
 &= 2 \cdot p_{l^2}(kl/2) + p_{l^2-1}(kl/2) \\
 &= 2 \cdot \frac{(l/2)^{l^2}}{l^2!} R_g(k)
 \end{aligned}$$

falls  $kl$  gerade und bei  $kl$  ungerade

$$\begin{aligned}
 O(k+l, k) &= 2 \cdot \binom{l^2 + (kl-1)/2}{(kl-1)/2} \\
 &= 2 \cdot p_{l^2}((kl-1)/2) \\
 &= 2 \cdot \frac{(l/2)^{l^2}}{l^2!} R_u(k)
 \end{aligned}$$

wobei  $R_{u,g}$  geeignete normierte Polynome vom Grad  $l^2$  sind.

Daraus folgt, dass

$$\frac{T(k+l, k)}{O(k+l, k)} = \frac{2! \cdot 3! \cdots (l-1)! l^2!}{2 \cdot l! (l+1)! \cdots (2l-1)! (l/2)^{l^2}} \cdot \frac{P(k)}{P'(k)}$$

wobei  $P' = R_u \cdot Q$  bzw.  $P' = R_g \cdot Q$  ebenso wie  $P$  ein normiertes Polynom vom Grad  $l^2 + \frac{(l-1)l}{2}$  ist, weshalb

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(k+l, k)}{O(k+l, k)} = \frac{2! \cdot 3! \cdots (l-1)! \cdot l^2!}{2 \cdot l! \cdot (l+1)! \cdots (2l-1)! \cdot (l/2)^{l^2}} \text{ gilt.}$$

□

### 9. Zur Färbarkeit von $\mathcal{D}_n^k$

Lassen sich die Diagonalen-Paare im  $2n$ -Eck, die die Eckenmenge von  $\mathcal{D}_n^k$  bilden, so in  $k$  Klassen zerlegen, dass die entsprechenden Einschränkungen von Simplizes  $\sigma \in \mathcal{D}_n^k$  auf die jeweiligen Eckenklassen als Seiten in  $\mathcal{D}_n^1$  aufgefasst werden können? Können zumindest die maximalen Seiten von  $\mathcal{D}_n^k$  in Seiten von  $\mathcal{D}_n^1$  zerlegt werden? Mit anderen Worten: Besteht jede symmetrische verallgemeinerte  $k$ -Triangulierung aus einer Überlagerung von 1-Triangulierungen? Eine positive Antwort würde einen entscheidenden Hinweis auf eine Bijektion zu der Menge der Tupel sich nicht kreuzender Pfade liefern, für die ja per definitionem eine solche Zerlegung existiert. Leider ist dies aber nicht der Fall:

Eine  $r$ -FÄRBUNG von  $\mathcal{D}_n^k$  sei eine Abbildung  $f$  von der Eckenmenge  $F_{n,k}$  in die Menge der 'Farben'  $\{1, \dots, r\}$ . Zu einer Färbung  $f$  definieren wir  $\mathcal{D}_n^{k,f}$ , den GEFÄRBTEN KOMPLEX DER TYP-B VERALLGEMEINERTEN  $k$ -TRIANGULIERUNGEN auf der Eckenmenge  $F_{n,k} \times \{1, \dots, r\}$ , durch  $\sigma := \{(e_1, f(e_1)), \dots, (e_l, f(e_l))\} \in \mathcal{D}_n^{k,f}$  nur falls  $\{e_1, \dots, e_l\} \in \mathcal{D}_n^k$  und falls  $e_i, e_j$  eine 2-Kreuzung bilden, so gilt  $f(e_i) \neq f(e_j)$ .

Wir sagen,  $\mathcal{D}_n^k$  sei  $r$ -FÄRBBAR, falls eine  $r$ -Färbung  $f$  existiert, so dass die Projektion

$$P : \mathcal{D}_n^{k,f} \rightarrow \mathcal{D}_n^k, (e, f(e)) \mapsto e$$

surjektiv ist.

Trivialer Weise ist  $\mathcal{D}_n^1$  1-färbbar und da alle  $k$ -Kreuzungen Simplizes in  $\mathcal{D}_n^k$  sind, ist  $\mathcal{D}_n^k$  sicherlich nicht  $(k-1)$ -färbbar für  $k > 1$ .

**Satz 9.1.** Für  $k \geq 2$  und  $n > 2k$  ist  $\mathcal{D}_n^k$  nicht  $k$ -färbbar.

*Beweis.* Sei  $k \geq 3$  und  $n > 2k$ . Dann gilt  $A := \{1, 2, \dots, k, k+2\}$ ,  $B = \{1, k+1, k+2, \dots, 2k\} \subset [n]$ . Wie in dem Beweis von Satz 4.1 fassen wir  $\mathcal{D}_n^k$  als simplizialen Komplex auf der Eckenmenge  $[n] \times [n] \setminus \{(i, j) \mid j = (i+1) \bmod n \text{ für ein } l < k\}$  auf, eingebettet in die Matrix  $(i, j)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Zu der Submatrix  $M(A, B)$  ist dann

$$N(A, B) = \{(a_{(i+k-1) \bmod k+1}, b_i), i = 1, \dots, k+1\},$$

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \star & + & \cdot \\ + & \circ & \circ & \star & \cdot \\ \cdot & \cdot & \circ & \circ & \cdot \\ \star & \cdot & + & \circ & \circ \\ \circ & \cdot & \cdot & \cdot & \circ \end{pmatrix}$$

**Abbildung 18.**  $\sigma = \star$ ,  $N(A, B) = +$ ,  $F_{n,k} \hat{=} \cdot$  im Fall  $n = 5, k = 2$

die zugehörige Nichtseite, denn

$$\begin{aligned} a_{i+(k-1)} &> b_i \text{ für } i = 1, 2 \text{ da} \\ a_k = k > 1 = b_1 & \quad , \quad a_{k+1} = k + 2 > k + 1 = b_2 \text{ und} \\ a_{j+k-2} &\leq b_j \text{ für ein } j \in \{1, 2, 3\} \text{ nämlich} \\ a_{k+1} = k + 2 &\leq k + 2 = b_3. \end{aligned}$$

(siehe die Definition der Nichtseiten auf Seite 29).

Der Simplex

$$\sigma := \{(a_{(i+k) \bmod k+1}, b_i), i = 1, \dots, k + 1\} = \{(k + 2, 1), (1, k + 1), \dots, (k, k + k)\} \subset M(A, B)$$

ist deshalb keine Nichtseite von  $\mathcal{D}_n^k$  und eine Teilmenge der Eckenmenge von  $\mathcal{D}_n^k$ .

Andererseits gilt für zwei beliebige Elemente  $(a_{(i+k) \bmod k+1}, b_i), (a_{(j+k) \bmod k+1}, b_j)$  aus  $\sigma$ , dass  $N(\{(a_{(i+k) \bmod k+1}, a_{(j+k) \bmod k+1}\}, \{b_i, b_j\}) = \{((a_i + k) \bmod k + 1, b_i), ((a_j + k) \bmod k + 1, b_j)\}$ , was nach Lemma 4.3 bedeutet, dass die entsprechenden Diagonalen in  $\mathcal{D}_n^1$  eine 2-Kreuzung bilden. Um im Bild der Projektion zu liegen, muss jedes Element aus  $\sigma$  eine andere Farbe erhalten, was nicht möglich ist, da  $\#\sigma = k + 1$ .  $\square$



# Das Determinantenideal

## 1. Unimodalität

Eine endliche Zahlenfolge  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  ist UNIMODAL, falls ein  $0 \leq i \leq n$  existiert, so dass

$$a_0 \leq a_1 \leq a_i \geq a_{i+1} \geq \dots \geq a_n.$$

Sie ist LOGARITHMISCH KONKAV, falls für alle  $1 \leq i \leq n-1$  die Ungleichung

$$a_i^2 \geq a_{i-1} \cdot a_{i+1}$$

gilt. Die Zahlenfolge ist SYMMETRISCH, falls  $a_i = a_{n-1-i}$  für alle  $0 \leq i \leq n$  gilt. Man sieht leicht, dass positive logarithmisch konkave Zahlenfolgen unimodal sind.

Unimodalität, Symmetrie und logarithmische Konvexität sind Eigenschaften zahlreicher Zahlenfolgen, die ihren natürlichen Ursprung in der Algebra, Geometrie und Kombinatorik haben. Für einen Überblick über die Vielfalt der unterschiedlichen Zahlenfolgen und die verschiedenen Beweismethoden siehe den Artikel von Stanley [Sta2]. Bemerkenswerter Weise sind die Koeffizienten des  $f$ -Polynoms eines simplizialen Polytopes nicht unimodal. Dies war zunächst in den späten 1950er Jahren von Motzkin und Welsh vermutet worden, wurde aber von Björner durch Konstruktion eines 24-dimensionalen simplizialen Polytopes mit  $2.6 \times 10^{11}$  Ecken widerlegt. (Siehe aber Theorem 3.10 in Kapitel 2 für eine schwächere Aussage.) In der erwähnten Arbeit von Stanley findet sich die folgende Vermutung:

**Vermutung 1.1.** *Die Koeffizienten des Zählerpolynoms der Hilbertreihe eines (standard-graduierten) Cohen-Macaulay Ringes sind logarithmisch konkav.*

Im Allgemeinen ist das nicht richtig. Eine detailliertere Diskussion über plausible Abschwächungen und neuere Entwicklungen findet sich bei [Br].

Herzog und Conca vermuten, dass die Koeffizienten des Zählerpolynoms von Ladder-Determinantenidealen (deren Quotientenringe Cohen-Macaulay sind) logarithmisch

konkav sind. Siehe dazu [Ru], wo die entsprechende Vermutung für 2-Minoren bewiesen wird.

Bezugnehmend auf diese Vermutung formulieren wir die folgende Vermutung für das im folgenden Abschnitt einzuführende Determinantenideal:

**Vermutung 1.2.** *Die Koeffizienten des Zählerpolynoms der Hilbertreihe des Determinantenideals  $I_k^n$  erfüllen die Eigenschaften des g-Theorems (3.13 in Kapitel 2) für alle  $k < n$ . Insbesondere bilden diese eine symmetrische, positive, unimodale Zahlenfolge.*

und beweisen diese für die Fälle  $k = n - 1$ ,  $n - 2$  und  $k = 1$ .

## 2. Determinantenideal

Das DETERMINANTENIDEAL  $I_k^n$  ist wie folgt definiert: Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $x_{11}, \dots, x_{nn}$  Unbestimmte über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Wir definieren den Polynomring  $S := \mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]$  und betrachten die Unbestimmten als Einträge in der Matrix  $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Zu  $k \leq n - 1$  sei  $I_k^n$  das Ideal, das von den  $(k + 1)$ -Minoren von  $X$  erzeugt wird. Ein  $(k + 1)$ -MINOR ist die Determinante einer  $(k + 1) \times (k + 1)$  Untermatrix. So ist zum Beispiel

$$I_3^2 = (x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33}).$$

Da  $I_k^n$  von homogenen Elementen erzeugt wird, ist  $S/I_k^n$  eine graduierte Algebra  $S/I_k^n = \bigoplus_{l \geq 0} A_l$ .

Das Determinantenideal ist ein wichtiges Objekt der kommutativen Algebra, das zahlreiche Anknüpfungspunkte zur Invariantentheorie, Darstellungstheorie und Kombinatorik bietet. Es wurde in einer Vielzahl von Veröffentlichungen untersucht. Für einen Überblick siehe [BV]. Wir untersuchen die Hilbertreihe

$$H_n^k(t) = \sum_{l \geq 0} H(A, l)t^l = \frac{p_n^k(t)}{q(t)}$$

der Algebra  $S/I_k^n = \bigoplus_{l \geq 0} A_l$ , wobei wie üblich  $H(A, l) = \dim A_l$  ist.

**2.1. Das Resultat von Bruns und Conca.** Bruns und Conca haben bereits eine kombinatorische Formulierung von  $H_n^k(t)$  geliefert, die wir hier wiedergeben:

Seien  $\mathcal{A} := \{(1, n), (2, n), \dots, (k, n)\}$ ,  $\mathcal{B} := \{(n, 1), (n, 2), \dots, (n, k)\}$  Punktmenge auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^n$ . Sei  $\text{Paths}(\mathcal{A}, \mathcal{B})_m$  die Anzahl der Familien von sich nicht überschneidenden Pfaden von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  mit genau  $m$  Rechtsdrehungen. Wir definieren weiterhin

$$\text{Paths}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, t) := \sum_m \text{Paths}(\mathcal{A}, \mathcal{B})_m t^m.$$

**Theorem 2.1.** [BC]

$$(26) \quad H_n^k(t) = \frac{\text{Paths}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, t)}{(1-t)^d},$$

wobei  $d = (2n - k)k$  die Krull-Dimension des Determinantenideals ist und

$$\text{Paths}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, t) = \det \left( \sum_l \binom{n-i}{l} \binom{n-j}{l} t^l \right)_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Wir skizzieren kurz den Beweis von Theorem 2.1. In [BC] wird von folgendem Satz Gebrauch gemacht, der unter anderem auf sehr elegante Art von Sturmfels bewiesen wurde:

**Theorem 2.2. [Sturm2]** *Die  $(k + 1)$ -Minoren bilden eine Gröbner-Basis für alle Termordnungen, für die das Leitmonom eines Minors aus dem Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen besteht.*

**Korollar 2.3.** *Das Leittermideal des Determinantenideals bezüglich einer Termordnung, für die das Leitmonom eines Minors aus dem Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen besteht, wird von den Produkten der Elemente der Hauptdiagonalen erzeugt.*

**Korollar 2.4.** *Das Stanley-Reisner Ideal des simplizialen Komplexes  $\mathcal{P}_n^k$ , dessen Eckenmenge die Unbestimmten von  $X$  bilden und dessen minimale Nichtseiten die Hauptdiagonalen der  $(k + 1)$ -Minoren sind, stimmt mit dem Leittermideal des Determinantenideals überein. Insbesondere sind die Hilbertreihen identisch.*

Die entscheidende Beobachtung in [BC] ist nun die Tatsache, dass die Facetten von  $\mathcal{P}_n^k$  als  $k$ -Tupel sich paarweise nicht schneidender Pfade von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  interpretiert werden können. [BC] zeigen weiterhin, dass das  $h$ -Polynom von  $\mathcal{P}_n^k$  mit  $\text{Paths}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, t)$  übereinstimmt.

### 3. Gröbner-Basen

Wir geben zunächst eine sehr kurze Einführung in die Theorie der Gröbner-Basen, wie sie z.B. in [AL] zu finden ist. Für ein MONOM  $x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$  im Polynomring  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  schreiben wir kurz  $x^\beta$ . Eine TERMORDNUNG ist eine totale Ordnung auf der Menge  $\mathbb{T}^n := \{x^\beta \mid \beta \in \mathbb{N}^n\}$  der Monome mit den Eigenschaften

- (1)  $1 < x^\beta$  für alle  $x^\beta \in \mathbb{T}^n$ ,  $x^\beta \neq 1$  und
- (2) Aus  $x^\alpha < x^\beta$  folgt  $x^\alpha x^\gamma < x^\beta x^\gamma$  für alle  $x^\gamma \in \mathbb{T}^n$ .

Ist eine totale Ordnung auf den Unbestimmten festgelegt, so liefert beispielsweise die GRADUIERTE, UMGEKEHRT LEXIKOGRAPHISCHE ORDNUNG eine Termordnung:

Für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$  gilt dann:

$$x^\alpha < x^\beta \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i \\ \text{oder} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{ und für das maximale } i \text{ mit } \alpha_i \neq \beta_i \text{ gilt: } \alpha_i > \beta_i. \end{cases}$$

Für ein Polynom  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  mit  $f = a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \dots + a_r x^{\alpha_r} \neq 0$  seien die Monome so nummeriert, dass  $x^{\alpha_1} \prec x^{\alpha_2} \dots \prec x^{\alpha_r}$  gilt. Dann definieren wir das LEITMONOM  $\text{lm}$  und den LEITTERM  $\text{lt}$  von  $f$  wie folgt:

$$\begin{aligned}\text{lm}(f) &:= x^{\alpha_1} \\ \text{lt}(f) &:= a_1x^{\alpha_1}.\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass

$$(27) \quad \text{lm}(fg) = \text{lm}(f)\text{lm}(g).$$

Eine Teilmenge  $G = \{g_1, \dots, g_t, g_i \neq 0, i = 1, \dots, t\}$  eines Ideals  $I$  in  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  heißt GRÖBNER-BASIS, falls für alle  $0 \neq f \in I$  ein  $g_i \in G$  existiert, so dass  $\text{lm}(g_i)$  das Monom  $\text{lm}(f)$  teilt.

**Theorem 3.1. [AL]** Sei für eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  das LEITTERMIDEAL  $\text{Lt}(M) := (\text{lt}(m) \mid m \in M)$  so ist  $G \subset I$  eine Gröbner-Basis des Ideals  $I$  genau dann wenn  $\text{Lt}(G) = \text{Lt}(I)$ .

Die Ringe  $\mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/I$  und  $\mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/\text{Lt}(I)$  sind eng verwandt:

**Proposition 3.2. [BC]**

- (1)  $\mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/I$  und  $\mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/\text{Lt}(I)$  haben die selbe Krull-Dimension.
- (2) Falls  $\mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/\text{Lt}(I)$  Cohen-Macaulay ist, dann ist es auch  $\mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/I$ .
- (3)  $\mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/I$  und  $\mathbb{K}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/\text{Lt}(I)$  haben identische Hilbertfunktionen und somit auch identische Multiplizitäten.

## 4. Hauptresultate

**Satz 4.1.** Für  $k = 1, k = n - 1$  und  $k = n - 2$  existiert für das Determinantenideal  $I_n^k$  eine Termordnung  $<$  und ein simplizialer Komplex  $\mathbb{D}_n^k$ , so dass das Stanley-Reisner Ideal  $I_{\mathbb{D}_n^k}$  mit dem Leittermideal  $\text{Lt}_{<}(I_n^k)$  übereinstimmt. Es gilt

$$\mathbb{D}_n^k = K_n^k \star \mathcal{D}_n^k,$$

dabei ist  $K_n^k$  der  $(k \cdot n - 1)$ -Simplex und  $\mathcal{D}_n^k$  der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen, der sich in diesen Fällen als der Rand eines simplizialen Polytopes realisieren lässt. Für  $k = 1$  ist dieses Polytop das Zyklodeker, für  $k = n - 1$  der Simplex und für  $k = n - 2$  das zyklische Polytop.

**Bemerkung 4.2.** Aus dem Beweis des Satzes folgt, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

- (1) Für ein  $k$  mit  $1 \leq k \leq n - 2$  existiert für das Determinantenideal  $I_n^k$  eine Termordnung  $<$  und ein simplizialer Komplex  $\mathbb{D}_n^k$ , so dass das Stanley-Reisner Ideal  $I_{\mathbb{D}_n^k}$  mit dem Leitterideal  $\text{Lt}_{<}(I_n^k)$  übereinstimmt. Es gilt

$$\mathbb{D}_n^k = K_n^k \star \mathcal{D}_n^k,$$

dabei ist  $K_n^k$  der  $(k \cdot n - 1)$ -Simplex und  $\mathcal{D}_n^k$  der Komplex der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen

- (2) Bezüglich der in (1) genannten Termordnung bilden die  $(k + 1)$ -Minoren eine Gröbner-Basis des Determinantenideals.
- (3) Die Anzahl der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen berechnet sich durch die in den Vermutungen 8.2, 8.3 und 8.4 in Kapitel 3 definierte Funktion  $T(n, k)$ .

Für den Beweis benötigen wir die folgenden Lemmas:

**Lemma 4.3.** [JW] Sei  $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  der Polynomring in  $n$  Variablen und  $I \subset J$  seien Ideale in  $S$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Krull-Dimensionen von  $S/I$  und  $S/J$  stimmen überein.
- (2) Die Multiplizitäten von  $S/I$  und  $S/J$  stimmen überein.
- (3)  $I$  ist das Stanley-Reisner Ideal  $I_\Delta$  eines reinen simplizialen Komplexes  $\Delta$  auf der Eckenmenge  $[n]$ .

Dann gilt  $I = J$ .

**Lemma 4.4.** [BC] Sei  $\Delta$  ein simplizialer Komplex und  $\mathbb{K}(\Delta)$  der Stanley-Reisner-Ring. Dann ist die Krull-Dimension von  $\mathbb{K}(\Delta) = \dim \Delta + 1$  und die Multiplizität von  $\mathbb{K}(\Delta)$  entspricht der Anzahl der Seiten maximaler Dimension von  $\Delta$ .

*Beweis* des Satzes. In Abschnitt 5 dieses Kapitels definieren wir eine Termordnung  $<$ , von der wir in Satz 5.7 zeigen, dass die Leitterme der Erzeuger des Determinantenideals  $I_n^k$  mit den Erzeugern des Stanley-Reisner Ideals des Komplexes der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen  $I_{\mathbb{D}_n^k}$  übereinstimmen. Daraus folgt, dass  $I_{\mathbb{D}_n^k} \subset \text{Lt}_{<}(I_n^k)$  und mit  $\mathbb{D}_n^k = K_n^k \star \mathcal{D}_n^k$ , wobei  $K_n^k$  der  $k \cdot n - 1$ -Simplex ist, gilt dann ebenso

$$I_{\mathbb{D}_n^k} \subset \text{Lt}_{<}(I_n^k).$$

Die Reinheit von  $\mathbb{D}_n^k$  folgt aus der Reinheit von  $\mathcal{D}_n^k$ , die wir in Satz 3.12 in Kapitel 3 bewiesen haben, wo wir ebenfalls  $\dim \mathcal{D}_n^k = k(n - k) - 1$  gezeigt haben. Somit ist  $\dim \mathbb{D}_n^k = k(n - k) - 1 + kn = 2kn - k^2 - 1$ . Damit ist die Krull-Dimension von  $I_{\mathbb{D}_n^k}$  nach Lemma 4.4 gleich  $2kn - k^2$  und sie stimmt nach Satz 2.1 mit der Krull-Dimension von  $I_n^k$  überein.

Die Multiplizität  $T(n, k)$  von  $\mathcal{D}_n^k$  haben wir in Abschnitt 8 in Kapitel 3 in den Fällen  $k = 1$ ,  $k = n - 1$  und  $k = n - 2$  berechnet. Sie stimmt mit der Multiplizität von  $I_n^k$  und

damit nach Proposition 3.2 auch mit der Multiplizität von  $Lt_{<}(I_n^k)$  überein, siehe dazu die Bemerkung 8.5 und Vermutung 8.3 in Kapitel 3.

Die Behauptung folgt schließlich aus Lemma 4.3. □

**Korollar 4.5.** *Für  $k = 1, k = n - 1$  und  $k = n - 2$  ist der  $h$ -Vektor des Determinantenideals symmetrisch und unimodal. Insbesondere erfüllt er die Bedingungen des  $g$ -Theorems (Theorem 3.13 in Kapitel 2).*

*Beweis.* Sind  $\Delta_1, \Delta_2$  simpliziale Komplexe mit  $h$ -Polynomen  $h_1, h_2$ , so gilt für das  $h$ -Polynom des Joins

$$h(\Delta_1 \star \Delta_2, t) = h_1(t) \cdot h_2(t).$$

Das  $h$ -Polynom des Simplex ist konstant 1. Die Hilbertreihe von  $I_{\mathbb{D}_n^k}$  stimmt nach Theorem 4.1 zunächst mit der Hilbertreihe von  $Lt_{<}(I_n^k)$  in den fraglichen Fällen  $k = 1, k = n - 1$  und  $k = n - 2$  überein. Nach Proposition 3.2 ist sie auch mit der Hilbertreihe von  $I_n^k$  identisch. Da  $\mathbb{D}_n^k = K_n^k \star \mathcal{D}_n^k$ , sind auch die Zählerpolynome der Hilbertreihen von  $I_{\mathbb{D}_n^k}$  und  $I_n^k$  gleich. In den Fällen  $k = 1, k = n - 1$  und  $k = n - 2$  ist nach Abschnitt 6 in Kapitel 3  $\mathcal{D}_n^k$  der Rand eines simplizialen Polytopes, so dass das  $g$ -Theorem (Theorem 3.13 in Kapitel 2) angewandt werden kann. □

**Korollar 4.6.** *Für  $k = 1, k = n - 1$  und  $k = n - 2$  und die in Abschnitt 5 definierte Termordnung  $<$  sind die  $(k + 1)$ -Minoren eine Gröbner-Basis von  $I_n^k$ .*

*Beweis.* Das folgt aus der Tatsache, dass in diesen Fällen  $I_{\mathcal{D}_n^k} = Lt_{<}(I_n^k)$  gilt und die Leitertme der Minoren  $I_{\mathcal{D}_n^k}$  erzeugen. □

**Korollar 4.7.** *Für alle  $n \geq k + 1$  gilt für die Anzahl  $T(n, k)$  der Typ-B verallgemeinerten  $k$ -Triangulierungen, dass*

$$T(n, k) \geq \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!(j + 2(n - k))!}{(j + n - k)!^2}$$

oder jeder andere Term in den Vermutungen 8.2, 8.3, 8.4 aus Kapitel 3 eine untere Schranke ist.

*Beweis.* Da  $I_{\mathbb{D}_n^k} \subset Lt_{<}(I_n^k) \subset I_n^k$  folgt die Behauptung aus dem folgenden allgemeinen Lemma. □

**Lemma 4.8.** *Sei  $\Delta$  ein simplizialer Komplex über der Eckenmenge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  und  $J$  ein monomiales Ideal in  $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Falls das Stanley-Reisner Ideal  $I_\Delta$  in  $J$  enthalten ist und deren Krull-Dimensionen übereinstimmen, so gilt für die Multiplizitäten*

$$e(S/I_\Delta) \geq e(S/J).$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 19 & 28 & 37 & 46 & 55 & 64 & 73 & 82 & 91 \\ 100 & 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 \\ 90 & 99 & 8 & 17 & 26 & 35 & 44 & 53 & 62 & 71 \\ 80 & 89 & 98 & 7 & 16 & 25 & 34 & 43 & 52 & 61 \\ 70 & 79 & 88 & 97 & 6 & 15 & 24 & 33 & 42 & 51 \\ 60 & 69 & 78 & 87 & 96 & 5 & 14 & 23 & 32 & 41 \\ 50 & 59 & 68 & 77 & 86 & 95 & 4 & 13 & 22 & 31 \\ 40 & 49 & 58 & 67 & 76 & 85 & 94 & 3 & 12 & 21 \\ 30 & 39 & 48 & 57 & 66 & 75 & 84 & 93 & 2 & 11 \\ 20 & 29 & 38 & 47 & 56 & 65 & 74 & 83 & 92 & 1 \end{pmatrix}$$
Abbildung 1. Die Funktion  $\varphi$  für  $n = 10$ 

*Beweis.* Wir betrachten die Polarisierung  $J^{\text{pol}}$  von  $J$ , das heißt jede Potenz  $x_i^{\alpha_i}$ , die in einem Erzeuger von  $J$  vorkommt, ersetzen wir durch weitere Variablen  $x_i^1, \dots, x_i^{\alpha_i}$ . Das Ideal  $J^{\text{pol}}$  sei das Erzeugnis dieser veränderten Erzeuger in einem Ring  $S'$ , den wir nach Umbenennung der Variablen mit  $k[x_1, \dots, x_{n+m}]$  bezeichnen können. Das Ideal  $J^{\text{pol}}$  ist quadratfrei nach Definition und damit existiert ein simplizialer Komplex  $\Gamma$ , so dass für das Stanley-Reisner Ideal  $I_\Gamma$  gilt:  $J^{\text{pol}} = I_\Gamma$ . Jetzt betrachten wir das Erzeugnis von  $I_\Delta$  in  $S'$ , es entspricht einem quadratfreien Ideal  $I'$ , das als Stanley-Reisner Ideal des Komplexes  $\Delta \star 2^{\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}}$  aufgefasst werden kann. (Mit  $2^{\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}}$  bezeichnen wir den Simplex mit Eckenmenge  $\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}$ ). Insgesamt erhalten wir also für die beiden Stanley-Reisner Ideale:

$$I_{\Delta \star 2^{\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}}} \subset I_\Gamma.$$

Also gilt für die korrespondierenden simplizialen Komplexe

$$\Gamma \subset \Delta \star 2^{\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}} \text{ und } \dim \Gamma = \dim \Delta \star 2^{\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}}.$$

Insbesondere ist also die Anzahl der Seiten maximaler Dimension von  $\Gamma$  kleiner oder gleich der Anzahl der Seiten maximaler Dimension von  $\Delta \star 2^{\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}}$ , also auch der Anzahl der maximal-dimensionalen Seiten von  $\Delta$ . Daraus folgt mit Lemma 4.4 die Behauptung. □

## 5. Konstruktion der Termordnung

**Definition 5.1.** Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi : [n] \times [n] &\rightarrow \mathbb{N} \\ (i, j) &\mapsto [(2-i) \cdot n + (j-1) \cdot (n-1) - 1 \bmod n^2] + 1, \end{aligned}$$

und eine Ordnung auf den Unbestimmten durch

$$x_{ij} < x_{kl} \Leftrightarrow \varphi(i, j) < \varphi(k, l).$$

Wir notieren zwei wichtige Eigenschaften:

Seien  $\Delta^- := \{x_{ij} \mid i > j\}$  und  $\Delta^+ := \{x_{ij} \mid i \leq j\}$ . Wir sagen, die Unbestimmte  $x_{ij}$  liegt RECHTS OBERHALB von  $x_{kl}$ , falls  $i \leq k$  und  $j \geq l$  ist. Das VON  $x_{ij}$  UND  $x_{kl}$  AUFGESPANNTE RECHTECK sei in diesem Fall die Menge

$$R := \{x_{qr} : i \leq q \leq k, l \leq r \leq j\}.$$

**E1:** Falls  $a, b \in \Delta^\pm$  und  $b$  rechts oberhalb von  $a$ , dann ist auch das Rechteck mit rechter oberer Ecke  $b$  und linker unterer Ecke  $a$  vollständig in  $\Delta^\pm$  enthalten. Das Element  $b$  ist das maximale Element des Rechtecks.

**E2:** Falls  $x \in \Delta^-$  und  $y \in \Delta^+$  und  $x$  in der selben Zeile oder Spalte wie  $y$  liegt, so gilt  $x > y$ .

Im folgenden setzen wir  $r \bmod r = r$ . Analog zu der Definition aus Abschnitt 4 in Kapitel 3 definieren wir zu dem Minor  $M(A, B)$  für  $r > 1$ :

$$N(A, B) := \{x_{a_{(i+k) \bmod r}, b_i}, i = 1, \dots, r\},$$

wobei  $r \geq k \geq 0$  so gewählt ist, dass

$$(28) \quad a_{i+k} > b_i \text{ für alle } i = 1, \dots, r - k \text{ und}$$

$$(29) \quad a_{j+k-1} \leq b_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, r - k + 1\} \text{ oder } k = 0.$$

Für  $r = 1$  setzen wir  $N(A, B) = M(A, B)$ .

Wir notieren jedes Monom  $t = \prod_{(i,j) \in [n]^2} x_{ij}^{\gamma_{ij}} \in S$  als

$$\mathbf{x}^\beta := \prod_{l=0}^{n^2-1} x_{\varphi^{-1}(n^2-1)}^{\beta_{l+1}},$$

wobei  $\beta \in \mathbb{N}^{n^2}$ . Beispielsweise schreiben wir für  $x_{nn}^2 \cdot x_{21}^3 = \mathbf{x}^{(3,0,\dots,2)}$ .

Wir wählen im folgenden die graduierte, umgekehrt lexikographische Ordnung als Termordnung.

Seien im folgenden  $A, B \subset [n] = \{1, \dots, n\}$  mit  $\#A = \#B = r$ ,  $A = \{a_1 < \dots < a_r\}$ ,  $B = \{b_1 < \dots < b_r\}$  und  $M(A, B) := (x_{ij})_{i \in A, j \in B}$ .

Für die Monome  $t_1 = \mathbf{x}^\alpha$ ,  $t_2 = \mathbf{x}^\beta$  der Determinante  $\det(M(A, B))$  gilt  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^{n^2}$  und  $\sum \alpha_i = \sum \beta_i = r$ , also

$$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \text{es gibt ein } p < n^2 \text{ so dass } \alpha_i = \beta_i \text{ für alle } i > p \text{ und } \alpha_p = 1, \beta_p = 0.$$

**Lemma 5.2.** Falls die Unbestimmte  $x_{a_1, b_k}$  das Leitmonom von  $\det(M(A, B))$  teilt, so gilt

$$\text{lm}(\det M(A \setminus \{a_1\}, B \setminus \{b_1\})) \cdot x_{a_1, b_k} = \text{lm}(\det(M(A, B))).$$

*Beweis.* Wir entwickeln  $\det(M(A, B))$  nach der  $k$ -ten Spalte und erhalten

$$(30) \quad \det(M(A, B)) = \sum_{i=1}^r (-1)^{k+i} \cdot x_{a_i, b_k} \cdot \det(M(A \setminus \{a_i\}, B \setminus \{b_k\})).$$

Es gilt

$$\operatorname{lm}(\det(M(A, B))) = \operatorname{lm}(x_{a_1, b_k} \det(M(A \setminus \{a_1\}, B \setminus \{b_k\})),$$

denn  $x_{a_1, b_k} \det(M(A \setminus \{a_1\}, B \setminus \{b_k\}))$  ist als einziger Summand in Gleichung (30) Vielfaches von  $x_{a_1, b_k}$ . Aus Gleichung (27) folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.3.** Für Teilmengen  $A, B \subset [n]$ ,  $\#A = \#B = r$  gilt

$$(31) \quad \operatorname{lm}(\det M(A, B)) = \prod_{x \in N(A, B)} x.$$

Für den Beweis von Satz 5.3 benötigen wir die folgenden Lemmata.

**Lemma 5.4.** Sei  $x_{a_i b_j} \in N(A, B)$ . Dann gilt

$$N(A', B') \subset N(A, B),$$

wobei  $A' = A \setminus \{a_i\}$ ,  $B' = B \setminus \{b_j\}$ .

*Beweis.* Sei  $x_{a_{(m+k) \bmod r}, b_m} \in N(A, B)$ , das heißt, dass

$$\begin{aligned} a_{i+k} &> b_i, \text{ für alle } i = 1, \dots, r-k \text{ und} \\ a_{j+k-1} &\leq b_j, \text{ für ein } j \in \{1, \dots, r-k+1\}. \end{aligned}$$

Seien  $A' := A \setminus \{a_{m+k}\} = \{a'_1 < \dots < a'_{r-1}\}$ ,  $B' := B \setminus \{b_m\} = \{b'_1 < \dots < b'_{r-1}\}$ . Wir zeigen, dass

$$N(A', B') = N(A, B) \setminus \{x_{a_{(m+k) \bmod r}, b_m}\}.$$

(1) Fall:  $m \leq r-k$

In diesem Fall ist  $\{x_{a'_{i+k}, b'_i} \mid i = 1, \dots, r\} = N(A, B) \setminus \{x_{a_{i+m}, b_m}\}$ , woraus sofort folgt, dass

$$(32) \quad a'_{i+k} > b'_i, \text{ für alle } i = 1, \dots, r-k-1.$$

Wir zeigen, dass  $k$  in dieser Aussage nicht reduziert werden kann und erhalten so

$$N(A', B') = \{x_{a'_{i+k}, b'_i} \mid i = 1, \dots, r\}.$$

Dies gilt sicherlich für  $k = 0$ , da  $k$  in der Definition von  $N(A, B)$  nicht negativ werden darf. Sonst unterscheiden wir:

(a) den Fall  $m < j-1$ :

Hier ist  $b'_{j-1} = b_j \geq a_{j+k-1} = a'_{j-1+k-1}$ , somit ist  $k$  minimal in Gl. 32.

(b) den Fall  $m = j-1$ :

Es werden  $b_m = b_{j-1}$  und  $a_{m+k} = a_{j+k-1}$  gestrichen, also ist  $b'_{j-1} = b_j$  und  $a'_{j+k-2} = a_{j+k-2}$ . Da  $b_j \geq a_{j+k-1}$  gilt ebenso  $b_j \geq a_{j+k-2}$  und somit  $b'_{j-1} \geq a'_{j-1+k-1}$ . Also ist  $k$  auch in diesem Fall minimal in Gl. 32.

(c) den Fall  $m = j$ :

Hier gilt, dass  $b'_j = b_{j+1}$  und  $a_{j+k-1} = a'_{j+k-1}$ . Da  $b_j \geq a_{j+k-1}$  gilt ebenso  $b_{j+1} \geq a_{j+k-1}$  und somit  $b'_j \geq a'_{j+k-1}$ . Wiederum ist also  $k$  minimal in Gl. 32.

(d) den Fall  $r - k \geq m > j$ :

Dann ist  $b'_j = b_j \geq a_{j+k-1} = a'_{j+k-1}$ , somit  $k$  minimal in Gl. 32.

(2) Fall:  $r \geq m > r - k$ :

Es wird die Zeile  $a_{(m+k) \bmod r}$  gestrichen. Da  $(m+k) \bmod r < i+k$  für  $i = 1, \dots, r$  ist hier  $b'_i = b_i$ ,  $i = 1, \dots, r-k$  und  $a'_{i+k} = a_{i+k+1}$ ,  $i = 1, \dots, r-k-1$ , also gilt

$$\begin{aligned} a'_{i+k-1} = a_{i+k} &> b_i = b'_i, \text{ für alle } i = 1, \dots, r-k-1 \\ a'_{j+k-2} = a_{j+k-1} &\leq b_j = b'_j, \text{ für ein } j \in \{1, \dots, r-k+1\}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$N(A', B') = \{x_{a'_{i+k-1}, b'_i} \mid i = 1, \dots, r-k-1\} = N(A, B) \setminus \{x_{a_{m+k}, b_m}\}.$$

□

**Lemma 5.5.** *Das Leitmonom von  $\det(M(A, B))$  wird von einer Unbestimmten aus  $N(A, B)$  geteilt.*

*Beweis.* Sei  $x_{a_{(i+k) \bmod r}, b_i} := \min N(A, B)$ .

**Fall 1:**  $a_{(i+k) \bmod r} > b_i$  und  $k = 0$ .

Nach der Definition von  $N(A, B)$  ist  $i+k \leq r$ . In diesem Fall ist  $x_{a_{(i+k) \bmod r}, b_i} \in \Delta^-$  und rechts oberhalb von  $x_{a_r, b_1}$ . Wegen **E1** ist

$$V := \{x_{a_l, b_m} \text{ mit } l \geq i \text{ und } m \leq i\} \subset \Delta^-$$

und es gilt  $v \leq x_{a_{(i+k) \bmod r}, b_i}$  für alle  $v \in V$  (siehe Abbildung 2). Angenommen  $\det(M(A, B))$  hätte einen Term  $t$ , der größer als das Produkt der Elemente aus  $N(A, B)$  wäre und kein Element aus  $N(A, B)$  als Faktor enthält. Dieser Term  $t$  dürfte somit keinen Faktor aus  $V$  enthalten.

Falls  $i = 1$  ist, führt dies sofort zum Widerspruch, da  $t$  dann keinen Faktor aus der ersten Spalte von  $M(A, B)$  hat. Für  $i > 1$  ist dies aber ebenfalls nicht möglich, da  $t$  in jeder Zeile und jeder Spalte von  $M(A, B)$  einen Faktor haben muss. Das bedeutet, dass er  $i$  Faktoren aus  $W := \{x_{a_l, b_m} \text{ mit } l < i+k = i \text{ und } m \leq i\}$  enthält. Da  $W$  aus  $i$  Spalten und  $i-1$  Zeilen besteht, existiert eine Zeile von  $M(A, B)$ , die zwei Faktoren von  $t$  enthält, ein Widerspruch!

**Fall 2:**  $a_{(i+k) \bmod r} > b_i$  und  $k > 0$ .

Nach der Definition von  $N(A, B)$  ist  $i+k \leq r$ . Sei wie im ersten Fall

$$V := \{x_{a_l, b_m} \text{ mit } l \geq i+k \text{ und } m \leq i\}.$$

Es gilt wiederum wegen **E1**:  $v \leq x_{a_{(i+k) \bmod r}, b_i}$  für alle  $v \in V$ . Da  $k > 0$  existiert ein  $j \leq r-k+1$  mit  $a_{j+k-1} \leq b_j$ , also  $x_{a_{j+k-1}, b_j} \in \Delta^+$  (siehe Abbildung 3).

Wir unterscheiden noch mal die Fälle

$$\begin{pmatrix} w_{1,1} & \cdots & w_{1,i} & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{i-1,1} & \cdots & w_{i-1,i} & \star & \cdots & \star \\ v & \cdots & x_{a_i,b_i} & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v & \cdots & v & \star & \cdots & \star \end{pmatrix}$$

Abbildung 2. Fall 1

(a):  $j \leq i$ 

Hier ist  $x_{a_1,b_i}$  rechts oberhalb von  $x_{a_{j+k-1},b_j}$  und somit auch Element von  $\Delta^+$ , weshalb wegen **E1** das Rechteck

$$V' := \{x_{a_l,b_m} \text{ mit } l \leq j+k-1 \text{ und } m \leq i\}$$

in  $\Delta^+$  enthalten ist. Wegen **E2** ist  $x_{a_1,b_i} < x_{a_{(i+k) \bmod r},b_i}$ . Aus **E1** folgt wiederum, dass  $v' \leq x_{a_1,b_i} < x_{a_{(i+k) \bmod r},b_i}$  für alle  $v' \in V'$ .

Angenommen  $\det(M(A, B))$  hätte ein Monom  $t$ , das größer als das Produkt der Elemente aus  $N(A, B)$  wäre und kein Element aus  $N(A, B)$  als Faktor enthält. Dieser dürfte somit keinen Faktor aus  $V \cup V'$  enthalten. Die Menge  $V \cup V'$  enthält  $i - j + 1$  Spalten von  $M(A, B)$  innerhalb welcher alle bis auf  $i + k - (j + k - 1) - 1 = i - j$  Zeilen überdeckt werden. Das bedeutet, dass  $t$  zwei Faktoren in einer Zeile hätte, oder im Fall  $i = j$  keinen Faktor in einer Spalte hätte, ein Widerspruch!

(b):  $j > i$ 

Hier ist  $x_{a_{i+k},b_m}$  rechts oberhalb von  $x_{a_{j+k-1},b_j}$  und somit auch Element von  $\Delta^+$ , weshalb wegen **E1** das Rechteck

$$V' := \{x_{a_l,b_m} \text{ mit } i+k \leq l \leq j+k-1 \text{ und } m \geq j\}$$

in  $\Delta^+$  enthalten ist. Wegen **E2** ist  $x_{a_{i+k},b_r} < x_{a_{i+k},b_i}$ . Aus **E1** folgt wiederum, dass  $v' \leq x_{a_{(i+k) \bmod r},b_i}$  für alle  $v' \in V'$ .

Angenommen  $\det(M(A, B))$  hätte einen Term  $t$ , der größer als das Produkt der Elemente aus  $N(A, B)$  wäre und kein Element aus  $N(A, B)$  als Faktor enthält. Dieser dürfte somit keinen Faktor aus  $V \cup V'$  enthalten. Die Menge  $V \cup V'$  enthält  $j + k - 1 - (i + k) + 1 = j - i$  Zeilen von  $M(A, B)$  innerhalb

$$\begin{pmatrix} \star & v' & v' & \star & \star & \star \\ \star & v' & v' & \star & \star & \star \\ \star & x_{a_{j+k-1},b_j} & v' & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ v & v & x_{a_{i+k},b_i} & \star & \star & \star \\ v & v & v & \star & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ v & x_{a_{i+k},b_i} & \star & \star & v' & v' \\ v & v & \star & \star & v' & v' \\ v & v & \star & \star & x_{a_{j+k-1},b_j} & v' \end{pmatrix}$$

Abbildung 3. Fälle 2a/2b

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & v & v & v & x_{a_{i+k}, b_i} & \star \\ \star & v & v & v & v & \star \\ \star & x_{a_{j+k-1}, b_j} & v & v & v & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Abbildung 4. Fall 3

welcher alle bis auf  $j - i - 1$  Spalten überdeckt werden. Das bedeutet, dass  $t$  zwei Faktoren in einer Spalte hätte, ein Widerspruch!

**Fall 3:**  $a_{(i+k) \bmod r} > b_i$  und  $r \geq k > 0$ .

In diesem Fall gilt nach der Definition von  $N(A, B)$ , dass  $i + k > r$  und es existiert ein  $j \leq r - k + 1$  so dass  $a_{j+k-1} < b_j$ . Somit liegen  $x_{a_{j+k-1}, b_j}$ ,  $x_{a_{i+k}, b_i}$  in  $\Delta^+$  und  $x_{a_{i+k}, b_i}$  ist rechts oberhalb von  $x_{a_{j+k-1}, b_j}$ . Deshalb gilt für das umschlossene Rechteck

$$V := \{x_{a_l, b_m} \text{ mit } j + k - 1 \geq l \geq (i + k) \bmod r \text{ und } j \leq m \leq i\},$$

dass  $v \leq x_{a_{(i+k) \bmod r}, b_i}$  für alle  $v \in V$  (siehe Abbildung 4).

Angenommen  $\det(M(A, B))$  hätte einen Term  $t$ , der größer als das Produkt der Elemente aus  $N(A, B)$  wäre und kein Element aus  $N(A, B)$  als Faktor enthält. Dieser dürfte somit keinen Faktor aus  $V$  enthalten. Für  $i > j$  erstreckt sich die Menge  $V$  über  $j + k - 1 - (i + k) \bmod r + 1 = j + k - (i + k - r) = r - i + j$  Zeilen von  $M(A, B)$  und überdeckt innerhalb dieser  $i - j + 1$  Spalten, das sind alle Spalten bis auf  $r - (i - j + 1) = r - i + j - 1$ . Für  $i = j$  besteht  $V$  aus der kompletten  $i$ -ten Spalte von  $M(A, B)$ . Das bedeutet, dass  $t$  zwei Faktoren bzw. keinen Faktor in einer Spalte hätte, ein Widerspruch!

□

*Beweis des Satzes 5.3.* Für  $r = 1$  gibt es nichts zu zeigen. Für  $r > 1$  enthält der Leitterm von  $\det M(A, B)$  einen Faktor  $x_{a_i, b_j} \in N(A, B)$  nach Lemma 5.5. Aus Lemma 5.2 folgt, dass

$$\text{lm}(\det M(A, B)) = x_{a_i, b_j} \cdot \text{lm}(\det M(A', B')),$$

wobei  $A' = A \setminus \{a_i\}$ ,  $B' = B \setminus \{b_j\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 5.4 ist

$$\text{lm}(\det M(A', B')) = \prod_{x \in N(A', B')} x = \prod_{x \in N(A, B) \setminus \{x_{a_i, b_j}\}} x,$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

**Definition 5.6.** Zu  $r, n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq r \leq n$  definieren wir den simplizialen Komplex

$$\mathbb{D}_r^n := \{\sigma \subset \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{n, n-1}, x_{nn}\} \mid N(A, B) \not\subset \sigma \text{ für alle } A, B \subset [n] \text{ mit } \#A = \#B = r\}$$

und den Simplex

$$K_r := \{\sigma \subset \{x_{ij} : (j - i) \bmod n \leq (r - 2)\}\}.$$

**Proposition 5.7.** *Der Komplex  $\mathbb{D}_r^n$  ist ein Kegel über  $K_r$  und es gilt*

$$\mathbb{D}_r^n = K_r \star \mathcal{D}_{r-1}^n,$$

wobei  $\mathcal{D}_{r-1}^n$  der Komplex der verallgemeinerten Typ-B  $(r - 1)$ -Triangulierungen ist.

*Beweis.* Zunächst ist klar, dass

$$k < x \text{ für alle } k \in K_r, x \in M(A, B) \setminus K_r,$$

denn  $k < x$  für alle  $k \in K_r, x \in X$ . Da in jeder Spalte und in jeder Zeile von  $X$  genau  $r - 1$  Elemente aus  $K_r$  liegen, liegen in jeder Zeile und Spalte von  $M(A, B)$  höchstens  $r - 1$  Elemente. Es existiert also mindestens ein Term  $t = \prod_{i=1}^r x_{a_{\pi(i)}, b_i}$ , der keinen Faktor in  $K_r$  hat und somit in der Termordnung größer ist als jeder Term der Determinante von  $M(A, B)$ , der einen Faktor aus  $K_r$  enthält. Da  $N(A, B)$  nach Satz 5.3 die Menge der Faktoren des Leiterters von  $\det M(A, B)$  ist, gilt  $N(A, B) \cap K_r = \emptyset$  für alle Teilmengen  $A, B \subset [n]$  mit  $r$  Elementen. Also gilt  $\sigma \in \mathbb{D}_r^n \Leftrightarrow \sigma \cup K_r \in \mathbb{D}_r^n$ . Aus der Übereinstimmung der Nichtseiten und der Eckenmengen der beiden Komplexe  $\mathbb{D}_r^n$  und  $\mathcal{D}_{r-1}^n$  nach Identifizierung  $x_{ij} = (i, j)$  und Anwendung der Bijektion in Satz 4.1 in Kapitel 3 folgt der Rest der Behauptung.  $\square$

## 6. Der Determinantenkomplex einer $(m \times n)$ -Matrix

Wir schließen dieses Kapitel mit einigen Überlegungen zu der folgenden, allgemeineren Problemstellung ab, in der die Matrix der Unbekannten nicht mehr quadratisch sein muss:

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $x_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  Unbestimmte über dem Körper  $k$ . Sei  $S := \mathbb{K}[x_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$  und  $X = (x_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  die Matrix der Unbestimmten. Zu  $(k + 1) \leq \min(m, n)$  sei  $I_k^{m,n}$  das DETERMINANTENIDEAL, das heißt  $I_k^{m,n}$  werde von den Determinanten der  $(k + 1) \times (k + 1)$ -Minoren von  $X$  erzeugt.

Wir betrachten auf der Menge der Unbestimmten  $x_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  die von der in Definition 5.1 eingeführten Ordnung der Menge der Unbestimmten  $\tilde{X} = \{x_{ij} : 1 \leq i, j \leq \max m, n\}$  induzierte Termordnung. Zu  $k, n, m \in \mathbb{N}, (k + 1) \leq \min m, n$  sei

$$\mathbb{D}_k^{m,n} := \{\sigma \subset \tilde{X} : N(A, B) \not\subset \sigma \text{ für alle } A \subset [m], B \subset [n] \text{ mit } \#A = \#B = k + 1\}$$

und

$$K_{k+1}^{m,n} := \{\sigma \subset \{x_{ij} : (j - i) \bmod n \leq (k - 1), i \leq m, j \leq n\}\}.$$

Die Eckenmenge von  $\mathbb{D}_{k+1}^{m,n}$  identifizieren wir im folgenden mit  $[m] \times [n]$ .

Der Komplex  $\mathbb{D}_k^{m,n}$  ist der Komplex  $\mathbb{D}_k^{\max m, n}$  eingeschränkt auf die Eckenmenge  $[m] \times [n]$ . Insbesondere gilt

$$\mathbb{D}_k^{m,n} = K_k^{m,n} \star \mathcal{D}_k^{m,n}$$

wobei  $\mathcal{D}_k^{m,n}$  der Komplex  $\mathcal{D}_k^{\max m, n}$  eingeschränkt auf die Eckenmenge  $[m] \times [n]$  ist.

Im Fall  $k = 1$  können wir eine zu Satz 4.1 analoge Aussage beweisen:

**Satz 6.1.** *Zu dem Determinantenideal  $I_1^{m,n}$  existiert eine Termordnung  $\prec$  so dass*

$$I_{\mathbb{D}_1}^{m,n} = \text{Lt}_{\prec} I_1^{m,n}.$$

*Es gilt*

$$\mathbb{D}_1^{m,n} = K_1^{\min(m,n)} \star \mathcal{D}_1^{m,n},$$

*dabei ist  $K_1^{\min(m,n)}$  der  $(\min(m,n) - 1)$ -Simplex und  $\mathcal{D}_1^{m,n}$  ein reiner, volldimensionaler Unterkomplex des Randes des ZYKLOEDERS  $\mathcal{D}_1^{\max(m,n)}$ .*

Wir vermuten, dass ein analoges Resultat auch für Determinantenideale  $I_k^{m,n}$  für alle  $m, n, k$  mit  $\min(m, n) \geq k \geq 2$  gilt.

*Beweis.* Wir zeigen in Satz 6.2, dass  $\mathcal{D}_1^{m,n}$  für alle  $2 \leq n, m$  ein reiner, volldimensionaler Unterkomplex des  $\max(m, n) - 1$ -dimensionalen Zykloeders ist und berechnen in Satz 6.5 die Anzahl seiner Facetten. Diese stimmt nach [BC] mit der Multiplizität des Determinantenideals überein. Die Behauptung folgt dann mit Lemma 4.3.  $\square$

**Satz 6.2.** *Der Komplex  $\mathcal{D}_1^{m,n}$  ist für alle  $2 \leq n, m$  ein reiner, volldimensionaler Unterkomplex des  $\max(m, n) - 1$ -dimensionalen Zykloeders.*

Wir beweisen den Satz mit den folgenden beiden Lemmas.

**Lemma 6.3.** *Sei  $m < n$ . Jede Facette von  $\mathcal{D}_1^{m,n}$  ist eine Facette von  $\mathcal{D}_1^{\max(m,n)}$ .*

*Beweis.* Wir nutzen die Beschreibung des Seitenverbandes von  $\mathcal{D}_1^n$  als Verband der zyklischen Klammerungen  $BC(n)$ : Falls  $m < n$  und  $\tau \in \mathcal{D}_1^{m,n}$ , dann entspricht  $\tau$  nach Satz 5.20 einer (im Allgemeinen nicht eindeutigen) zyklischen Permutation  $\sigma \in S(n)$  und Klammerpaaren, so dass vor den Variablen  $x_{m+1}, \dots, x_n$  keine öffnende Klammer steht. Angenommen,  $\sigma(1) \in \{m+1, \dots, n\}$ , d.h. die zyklische Klammerung hätte die Form

$$x_k \cdots x_n x_1 \cdots x_{\sigma(n)}, \quad k \geq m+1.$$

Dann befindet sich in  $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_n$  auch keine schließende Klammer, d.h.  $\tau = bb'$ , wobei  $b$  die leere Klammerung der Variablen  $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_n$  ist und  $b'$  eine Klammerung der Variablen  $x_1 \cdots x_{\sigma(1)-1}$ . Diese wird in  $BC(n)$  mit  $\tau' = b'b$  identifiziert, was bedeutet, dass die zu  $\tau'$  gehörende Permutation die Identität ist. Insgesamt können wir also ohne Einschränkung annehmen, dass  $\sigma(1) < m+1$  gilt. Sei also  $\tau$  eine Klammerung der Variablen

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(j)} x_{m+1} \cdots x_n x_1 \cdots x_{\sigma(1)-1}$$

(wobei im Falle  $\sigma = \text{id}$  die Variable  $x_0$  nicht zu lesen ist).

Wir beweisen die Aussage nun per Induktion über  $N$ , der Anzahl der Variablen in  $\{x_{m+1} \cdots x_n\}$ , rechts von denen in  $\tau$  keine schließende Klammer steht.

Falls  $N = 0$  gilt, d.h. falls rechts von allen Variablen  $\{x_{m+1} \cdots x_n\}$  eine schließende Klammer in  $\tau$  steht, so kann in  $\tau$  kein Klammerpaar mit öffnender Klammer links der Variablen  $\{x_{m+1} \cdots x_n\}$  ergänzt werden. Da  $\tau$  ebenfalls als Seite in  $\mathcal{D}_1^n$  betrachtet werden kann, gibt es eine Facette  $F \in \mathcal{D}_1^n$  mit  $\dim F = n - 2$ . Diese Facette ist ebenfalls in  $\mathcal{D}_1^{m,n}$ ,

da sie kein Klammerpaar mit öffnender Klammer links der Variablen  $\{x_{m+1} \cdots x_n\}$  enthalten kann.

Sei  $N > 0$  und sei  $j$  minimal, so dass in  $\tau$  unmittelbar rechts von  $x_{m+j}$  keine schließende Klammer ist. Falls irgendwo rechts von  $x_{m+j}$  eine schließende Klammer steht, wähle die erste von  $x_{m+j}$  aus gesehene. Sei  $x_k$  die Variable unmittelbar rechts von der zugehörigen öffnenden Klammer. Dann lässt sich zu  $\tau$  das Klammerpaar  $(x_k \cdots x_{m+j})$  hinzufügen. Falls rechts von  $x_{m+j}$  keine schließende Klammer steht, lässt sich zu  $\tau$  das Klammerpaar  $(x_m x_{m+j})$  hinzufügen.

In beiden Fällen liegt nach Induktionsvoraussetzung der erweiterte Klammersausdruck  $\tau'$  in einer Facette von  $\mathcal{D}_1^n$ , die auch Facette von  $\mathcal{D}_1^{m,n}$  ist und somit auch  $\tau$ .

□

**Lemma 6.4.** Sei  $m < n$ . Jede Facette von  $\mathcal{D}_1^{n,m}$  ist eine Facette von  $\mathcal{D}_1^{\max\{m,n\}}$ .

*Beweis.* Falls  $m < n$  und  $\tau \in \mathcal{D}_1^{n,m}$ , dann entspricht  $\tau$  nach Satz 5.20 einer (im Allgemeinen nicht eindeutigen) zyklischen Permutation  $\sigma \in S(n)$  und Klammerpaaren, so dass rechts der Variablen  $x_{m+1}, \dots, x_n$  keine schließende Klammer steht.

Angenommen,  $\sigma(n) \in \{m+1, \dots, n\}$ , d.h. die zyklische Klammerung hätte die Form

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{m+1} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Dann befindet sich in  $x_{m+1} \cdots x_{\sigma(n)}$  auch keine öffnende Klammer, d.h.  $\tau = b'b$ , wobei  $b$  die leere Klammerung der Variablen  $x_{m+1} \cdots x_{\sigma(n)}$  ist und  $b'$  eine Klammerung der Variablen  $x_{\sigma(1)} \cdots x_m$ . Diese wird in  $BC(n)$  mit  $\tau' = bb'$  identifiziert, was bedeutet, dass für die zu  $\tau'$  gehörende Permutation  $\sigma'$  gilt:  $\sigma'(n) = m$ . Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass  $\sigma(n) < m+1$  ist. Sei also  $\tau$  eine Klammerung der Variablen

$$x_{\sigma(1)} \cdots x_1 \cdots x_{m+1} \cdots x_n x_1 \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Wir beweisen die Aussage nun per Induktion über  $N$ , der Anzahl der Variablen in  $\{x_{m+1} \cdots x_n\}$ , links von denen in  $\tau$  keine öffnende Klammer steht.

Falls  $N = 0$  gilt, d.h. falls links von allen Variablen  $\{x_{m+1} \cdots x_n\}$  eine öffnende Klammer in  $\tau$  steht, so kann in  $\tau$  kein Klammerpaar mit schließender Klammer rechts der Variablen  $\{x_{m+1} \cdots x_n\}$  ergänzt werden. Da  $\tau$  ebenfalls als Seite in  $\mathcal{D}_n^1$  betrachtet werden kann, gibt es eine Facette  $F \in \mathcal{D}_1^n$  mit  $\dim F = n - 2$  und diese Facette ist ebenfalls in  $\mathcal{D}_1^{m,n}$ , da sie kein Klammerpaar mit schließender Klammer rechts der Variablen  $\{x_{m+1} \cdots x_n\}$  enthalten kann.

Sei  $N > 0$  und sei  $j$  maximal, so dass in  $\tau$  unmittelbar links von  $x_{m+j}$  keine öffnende Klammer ist. Falls irgendwo rechts von  $x_{m+j}$  eine öffnende Klammer steht, wähle die erste von links aus gesehene. Sei  $x_k$  die Variable unmittelbar links von der zugehörigen schließenden Klammer. Dann lässt sich zu  $\tau$  das Klammerpaar  $(x_{m+j} \cdots x_k)$  hinzufügen. Falls rechts von  $x_{m+j}$  keine öffnende Klammer steht, lässt sich zu  $\tau$  das Klammerpaar  $(x_{m+j} x_m)$  hinzufügen.

In beiden Fällen liegt nach Induktionsvoraussetzung der erweiterte Klammersausdruck  $\tau'$  in einer Facette von  $\mathcal{D}_1^n$ , die auch Facette von  $\mathcal{D}_1^{m,n}$  ist und somit auch  $\tau$ .  $\square$

**Korollar 6.5.** Für alle  $2 \leq n, m$  gilt für die Multiplizität von  $\mathcal{D}_1^{m,n}$

$$a_{m,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \binom{m-1}{i} = \binom{n+m-2}{m-1} = \binom{n+m-2}{n-1} = a_{n,m}.$$

Sie entspricht nach [BC] der Multiplizität des Determinantenideals einer  $(m \times n)$ -Matrix.

*Beweis.* Die Anzahl der geordneten  $r$ -Partitionen von  $N$  ist  $\binom{N-1}{r-1}$  (siehe z.B. [Ai]). Die Facetten von  $\mathcal{D}_1^{m,n}$  stehen

- (1) für  $m < n$  nach Satz 5.14 aus Kapitel 3 in eins zu eins Beziehung zu Vektoren  $v \in \mathbb{N}^{n-1}$  mit  $\#\text{supp}(v) := \{i | v_i \neq 0\} \subset \{1, \dots, m-1\}$  und  $|v| \leq n-1$ .
- (2) für  $n < m$  nach Satz 5.16 aus Kapitel 3 in eins zu eins Beziehung zu Vektoren  $w \in \mathbb{N}^{m-1}$  mit  $\text{supp}(w) := \{i | w_i \neq 0\} \subset \{1, \dots, n-1\}$  und  $|w| \leq m-1$ .

Diese fassen wir jeweils als geordnete Partitionen auf und erhalten

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= \sum_{v \in \mathbb{N}^{n-1}, |v| \leq n-1, \text{supp } v \subset \{1, \dots, m-1\}} 1 \\ &= \sum_{A \subset [m-1]} \sum_{v \in \mathbb{N}^{n-1}, |v| \leq n-1, \text{supp } v = A} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{A \subset [m-1], \#A=i} \sum_{v \in \mathbb{N}^{n-1}, |v| \leq n-1, \text{supp } v = A} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{A \subset [m-1], \#A=i} \sum_{j=i}^{n-1} \sum_{v \in \mathbb{N}^{n-1}, |v|=j, \text{supp } v = A} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{A \subset [m-1], \#A=i} \sum_{j=i}^{n-1} \binom{j-1}{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} \sum_{j=i}^{n-1} \binom{j-1}{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} \binom{n-1}{i} \\ &= \binom{n+m-2}{n-1}. \end{aligned}$$

$\square$

# Polytopale Auflösungen

In diesem Kapitel wollen wir einen Zusammenhang zwischen zwei Konzepten herstellen, deren Motivation in der Analyse von Abhängigkeiten zu sehen ist. Es sind dies einerseits die freien Auflösungen, deren Fokus auf den algebraischen Abhängigkeiten zwischen Erzeugern eines Ideals liegt und andererseits Gale-Diagramme, die Aufschluss über die affinen Abhängigkeiten zwischen den Ecken eines Polytopes geben. Wir entwickeln, nach einer kurzen Einführung in die relevanten Definitionen, ein Konstruktionsverfahren für ein Polytop, das in Spezialfällen die Auflösungen von Stanley-Reisner Idealen simplizialer Polytope trägt. Polytopale Auflösungen eines monomialen Ideals  $M$  sind zelluläre Kettenkomplexe geeigneter Polytope, die nach Identifizierung der Eckenmenge mit den Erzeugern von  $M$  eine freie Auflösung des Ideals ergeben. Sie sind ein Spezialfall der in [BS] definierten zellulären Auflösungen.

## 1. Einführung

Sei im folgenden  $R$  ein Ring mit 1. Ein MODUL  $M$  über dem Ring  $R$  ist bekanntlich eine abelsche Gruppe mit einer Multiplikationsabbildung  $R \times M \rightarrow M$ ,  $(r, m) \mapsto rm$  mit den folgenden Eigenschaften für  $r, s \in R$ ,  $m, n \in M$ :

- $r(sm) = (rs)m$
- $r(m + n) = rm + rn$
- $(r + s)m = rm + sm$
- $1m = m$

Ein Element  $r \in R$  heißt  $M$ -REGULÄR, falls  $r$  in  $M$  kein Nullteiler ist, d.h. dass kein  $m \in M$  existiert mit  $m \neq 0$  und  $rm = 0$ . Eine Folge  $r_1, \dots, r_l$  ist  $M$ -regulär, falls  $r_1$  ein  $M$ -reguläres Element ist,  $r_2$  ein  $M/r_1M$ -reguläres Element u.s.w. Die TIEFE  $\text{depth}(M)$  eines Moduls ist die maximale Länge einer regulären  $M$ -Sequenz.

Ein MODULHOMOMORPHISMUS ist ein Homomorphismus abelscher Gruppen, der diese Multiplikationsabbildung respektiert. Ein Modul, für den der Ring  $R$  sogar ein Körper ist, ist ein VEKTORRAUM. Ein entscheidender Unterschied zwischen Moduln und Vektorräumen zeigt sich bereits bei der Lösung von homogenen linearen Gleichungssystemen: In Vektorräumen sind die Lösungsmengen wiederum Vektorräume, weshalb in allen Fällen eine Menge von linear unabhängigen Erzeugern (Basis) existiert. Diese Eigenschaft gilt nicht für Moduln, wie das folgende Beispiel aus [Ei] zeigt: Sei  $R = \mathbb{K}[a, b, c]$  der Polynomring über dem Körper  $\mathbb{K}$  in den drei Unbestimmten  $a, b, c$ . Er ist trivialerweise ein Modul über sich selbst. Die lineare Gleichung

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$$

wird z.B. von folgenden Elementen aus  $R^3$  gelöst:  $v_1 = (0, -c, b), v_2 = (c, 0, -a), v_3 = (-b, a, 0)$ . Die  $v_i$  sind ein minimales Erzeugendensystem der Lösungsmenge und außerdem linear abhängig über  $R$  in dem Sinne, dass  $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$  gilt. Man erhält also im Gegensatz zur Theorie der Vektorräume ein linear abhängiges minimales Erzeugendensystem. Diese linearen Abhängigkeiten der Erzeuger der Lösungsmenge und damit die Lösungsmenge des neuen homogenen linearen Gleichungssystems der zweiten Stufe

$$X_1v_1 + X_2v_2 + X_3v_3 = 0$$

sind von natürlichem Interesse, das sich induktiv fortsetzt. Fasst man, wie in der linearen Algebra üblich, ein Gleichungssystem mit  $n_0$  Gleichungen und  $n_1$  Unbekannten als Kern eines Homomorphismus  $\varphi_1 : R^{n_1} \rightarrow R^{n_0}$  auf und interessiert sich für die Abhängigkeiten zwischen  $n_2$  Erzeugern des Kerns, so erhält man durch die Abbildung  $\varphi_2$ , die die kanonischen Basiselemente bijektiv auf die Erzeuger abbildet, einen Homomorphismus, der dem Gleichungssystem der zweiten Stufe entspricht und es gilt  $\text{Bild } \varphi_2 = \text{Ker } \varphi_1$ . Diese Konstruktion kann man unendlich oft fortsetzen.

Dies ist ein Zugang zu dem Begriff des MODULKOMPLEXES: Ein Modulkomplex ist eine Folge von Moduln  $(F_i)_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  und Modulhomomorphismen  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  so dass  $\varphi_{i+1} : F_{i+1} \rightarrow F_i$  und  $\varphi_i \circ \varphi_{i+1} = 0$  gilt. Man notiert einen Modulkomplex  $\mathcal{F}$  auch wie folgt:

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \rightarrow \cdots$$

Die HOMOLOGIE an der Stelle  $i$  ist als Quotientenmodul

$$H_i \mathcal{F} := \text{Ker } \varphi_i / \text{Bild } \varphi_{i+1}$$

definiert. Ausgehend von der oben beschriebenen Motivation betrachten wir eine besondere Klasse von Modulkomplexen, so genannte AUFLÖSUNGEN eines Moduls  $M$ . Das sind Modulkomplexe von der Form

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

mit der Eigenschaft, dass die  $i$ -te Homologie für alle  $i \geq 1$  verschwindet und  $H_0(\mathcal{F}) := F_0 / \text{Bild } \varphi_1 = M$  gilt. Wir sprechen von einer FREIEN AUFLÖSUNG von  $M$ , falls die  $F_i$  FREIE MODULN, d.h. Moduln von der Form  $R^{n_i}$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$  sind. Im folgenden behandeln wir nur den Fall, in dem der Ring  $R$  mit dem Polynomring  $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  übereinstimmt und

das aufzulösende Modul ein monomiales Ideal in  $S$  ist. Hier besitzt der Ring  $S$  eine Zerlegung in eine direkte Summe von abelschen Gruppen  $S = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S_k$ , wobei  $S_k$  aus Polynomen vom Grad  $k$  (d.h. Exponentensumme  $k$ ) besteht und es gilt  $S_k S_l \subset S_{k+l}$ , der Ring  $S$  ist somit GRADUIERT. Ebenso ist ein Ideal  $I = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I_k$  in  $S$  in eine direkte Summe abelscher Gruppen zu zerlegen und es gilt  $S_k I_l \subset I_{k+l}$ . Man spricht in einem solchen Fall von einem GRADUIERTEN MODUL. Man kann bei der Graduierung auch zum MULTIGRAD übergehen, d.h. man betrachtet zu  $\nu \in \mathbb{N}^n$  das von  $x^\nu$  erzeugte Ideal  $I_\nu$  und erhält dann analog  $S = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}^n} S_\nu$  und  $I = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}^n} I_\nu$ . Eine Auflösung heißt GRADUIERT, wenn alle Moduln dieselbe Graduierung besitzen und die  $\varphi_i$  homogen sind, d.h. den Grad nicht verändern.

**Satz 1.1. Hilbert-Syzygy-Theorem** Jedes Modul über  $S$  hat eine graduierte, freie Auflösung, deren Länge  $n$  nicht überschreitet.

Da  $S$  nur ein maximales homogenes Ideal  $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$  hat, ist  $S$  ein LOKALER Ring und man kann die MINIMALITÄT einer Auflösung definieren. Eine Auflösung ist minimal, falls für alle  $i$  gilt:  $\text{Bild } \varphi_i \subset \mathfrak{m} F_{i-1}$ . Eine minimale Auflösung eines Moduls ist bis auf Isomorphie eindeutig, weshalb man auch von DER minimalen Auflösung spricht. Man zeigt (siehe z.B. [Ei]), dass die minimale Auflösung immer existiert und die Ränge der Moduln  $F_i$  in einer solchen minimiert sind.

## 2. Zelluläre Auflösungen

In [BS] wird eine spezielle Klasse von Auflösungen von Moduln definiert, nämlich solche, für die ein regulärer CW-Komplex  $X$  existiert, so dass der zelluläre Komplex von  $X$  mit der Auflösung übereinstimmt. Wir definieren zunächst den Begriff des CW-Komplexes nach [Mun] und den regulären Zell-Komplex sowie den zellulären Komplex, wie er sich bei [BS] findet:

**2.1. Zelluläre Homologie.** Eine Teilmenge  $c$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt ZELLE der Dimension  $m$ , falls sie homöomorph zu  $B^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq 1\}$  ist und sie heißt OFFENE ZELLE, falls sie homöomorph zum Inneren von  $B^m$  ist. Sind  $c'$  und  $c$  Zellen, so dass  $c' \subset c$  und  $\dim c' = \dim c - i$ , so sagen wir, dass  $c'$  eine Zelle von Codimension  $i$  in  $c$  ist. Ein CW-KOMPLEX besteht aus einer Teilmenge  $X$  des  $\mathbb{R}^n$  und einer Familie von offenen Zellen  $c_\alpha$ , deren Vereinigung  $X$  ergibt, so dass gilt:

- $X$  ist ein Hausdorff-Raum.
- Für jede der offenen Zellen  $c_\alpha$  existiert eine Abbildung  $f_\alpha : B^m \rightarrow X$  die das Innere von  $B^m$  homöomorph auf  $c_\alpha$  und den Rand von  $B^m$  in eine endliche Vereinigung von offenen Zellen kleinerer Dimension als  $m$  abbildet.
- Eine Menge  $A$  ist abgeschlossen in  $X$ , falls für alle  $\alpha$  der Schnitt  $A \cap \bar{c}_\alpha$  abgeschlossen in  $\bar{c}_\alpha$  ist.

Falls die  $f_\alpha$  alle Homöomorphismen sind und für alle Zellen  $c_\alpha$  gilt, dass  $\bar{c}_\alpha - c_\alpha$  eine endliche Vereinigung von Zellen  $c_{\alpha'}$  ist, so ist der CW-Komplex  $X$  ein REGULÄRER ZELLKOMPLEX. Die Zellen der Dimension 0 heißen ECKEN des CW-Komplexes. Klassische Beispiele für reguläre Zellkomplexe ist der Komplex der Seiten eines Polytopes. Ist  $V$  die Eckenmenge eines regulären Zellkomplexes und  $\mathcal{C}$  die Menge aller Paare von Zellen, so existiert eine INZIDENZFUNKTION  $\varepsilon : \mathcal{C} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  so dass gilt:

- $\varepsilon(c, c') = 0$  außer  $c'$  ist eine Zelle von Codimension 1 in  $c$ .
- $\varepsilon(\{j\}, \emptyset) = 1$  für alle  $j \in V$ .
- Für jede Zelle  $c$  und jede Zelle  $c'$  der Codimension 2 in  $c$  gilt für die beiden (eindeutigen) Codimension 1 Zellen  $c_1, c_2$  in  $c$ , die  $c'$  enthalten, dass

$$\varepsilon(c, c_1)\varepsilon(c_1, c') + \varepsilon(c, c_2)\varepsilon(c_2, c') = 0.$$

Mittels der Inzidenzfunktion und dem durch die Dimension graduierten Modul

$$\tilde{C}(X, \mathbb{K}) = \bigoplus_{c \in X} \mathbb{K}c$$

erhält man das Differenzial

$$\delta c = \sum_{c' \in X} \varepsilon(c, c')c',$$

das den so genannten AUGMENTIERTEN ORIENTIERTEN KETTENKOMPLEX definiert. Die  $i$ -te REDUZIERTE ZELLULÄRE HOMOLOGIEGRUPPE  $\tilde{H}_i(X, \mathbb{K})$  von  $X$  ist die  $i$ -te Homologiegruppe des augmentierten orientierten Kettenkomplexes. Man erhält die ZELLULÄREN HOMOLOGIEGRUPPEN, indem man zu dem ORIENTIERTEN ZELLKOMPLEX  $C(X, \mathbb{K}) = \bigoplus_{\emptyset \neq c \in X} \mathbb{K}c$ , der den Beitrag der leeren Seite vernachlässigt, übergeht.

**2.2. Graduierung eines Zellkomplexes.** Für  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  sei  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  ein MONOM vom MULTIGRAD  $\alpha$ . Für zwei Multigrade  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  sei  $\alpha \preceq \beta$  genau wenn  $\alpha_i \leq \beta_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$  ist. Wir definieren den JOIN  $\alpha \vee \beta := \gamma$  durch  $\gamma_j := \max\{\alpha_j, \beta_j\}$ . Sei  $M$  ein MONOMIALES IDEAL, das heißt ein Ideal im Polynomring, das von Monomen erzeugt wird. Zu  $M$  sei

$$\min(M) := \{x^\alpha \in M \mid x^\alpha/x^i \notin M \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

die Menge der MINIMALEN MONOME in  $M$ . Wir nennen  $M$  CO-ARTINISCH, falls  $M$  von seinen minimalen Monomen erzeugt wird. Die folgende Theorie funktioniert für alle co-Artinischen Ideale, für die die Menge der minimalen Erzeuger eventuell unendlich sein kann. Wir betrachten aber im folgenden Stanley-Reisner Ideale endlicher simplizialer Komplexe, die stets endlich erzeugt sind.

Ein regulärer Zellkomplex  $X$ , dessen Eckenmenge gleichmächtig zur Menge der Erzeuger  $\{m_i \mid i \in I\}$  des Monoms  $M$  ist, kann wie folgt graduiert werden. Zunächst graduiert man jede Ecke beliebig, aber injektiv mit einem der Erzeuger von  $M$ . Dann wird jede

nichtleere Zelle  $c$  mit ihrer Eckenmenge, also der Menge  $I_c$  der 0-dimensionalen Zellen, die in  $c$  enthalten sind, identifiziert. Wir definieren

$$m_c := \text{kgV}\{m_i \mid i \in I_c\}.$$

Das bedeutet, dass der Multigrad  $\alpha_c$  von  $m_c$  der JOIN der  $\bigvee_{j \in c} \alpha_j$  ist. Wir sprechen dann auch von dem MULTIGRAD der Zelle  $c$ .

Auf diese Weise erhält man den von  $M$  graduierten zelluläre Komplex  $F_X$ :

$$\bigoplus_{c \in X, c \neq \emptyset} S c$$

mit Differentialabbildung

$$\partial c := \sum_{c' \in X, c' \neq \emptyset} \varepsilon(c, c') \frac{m_c}{m_{c'}} c',$$

dessen homologische Grade durch die Dimension gegeben seien.

Bayer und Sturmfels haben untersucht, unter welchen Bedingungen der zelluläre Komplex  $F_X$  eine freie Auflösung von  $M$  und wann diese minimal ist [BS]. Dazu definieren sie zum Multigrad  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  den Komplex  $X_{\preceq \alpha}$  als den Unterkomplex von  $X$ , dessen Eckenmenge aus genau den Ecken besteht, für deren Multigrad  $\beta$  gilt, dass  $\beta \preceq \alpha$ . Der Komplex  $X_{\prec \alpha}$  entsteht aus  $X_{\preceq \alpha}$  durch Wegnehmen der Zellen vom Grad  $\alpha$ .

**Satz 2.1.** [BS] *Der Komplex  $F_X$  ist eine freie Auflösung von  $M$  genau dann, wenn  $X_{\preceq \beta}$  azyklisch für alle Multigrade  $\beta \in \mathbb{N}^n$  ist, das heißt dass  $\tilde{H}_i(X_{\preceq \beta}, \mathbb{K}) = 0$  für alle  $i$  gilt. Diese Auflösung ist minimal genau wenn je zwei Zellen  $c' \subset c$  von  $X$  stets verschiedene Grade  $\alpha_c \neq \alpha_{c'}$  haben.*

In diesen Fällen wird  $F_X$  als (minimale) ZELLULÄRE AUFLÖSUNG des monomialen Ideals  $M$  bezeichnet. Ist der zelluläre Komplex  $X$  sogar ein Polytop, so sprechen wir von einer POLYTOPALEN AUFLÖSUNG.

Alle monomialen Ideale besitzen eine zelluläre und sogar polytopale Auflösung, die so genannte TAYLORAUFLÖSUNG, in der die Rolle des zellulären Komplexes durch den Simplex  $\Delta$  aller Teilmengen der Erzeugermenge übernommen wird. Hier ist für jeden Multigrad  $\beta \in \mathbb{N}^n$  der Komplex  $\Delta_{\preceq \beta}$  wiederum ein Simplex, der azyklisch ist. Damit sind die Bedingungen von Satz 2.1 erfüllt. Die Taylorauflösung ist aber weit davon entfernt, minimal zu sein.

**2.3. Hochster- und Auslander-Buchsbaum Formel.** Ist ein monomiales Ideal QUADRATFREI, ist also für jeden seiner Erzeuger  $x^\alpha$  keine Komponente des Multigrades größer als 1, so lässt es sich nach Abschnitt 4.2 in Kapitel 2 als Stanley-Reisner Ideal eines simplizialen Komplexes auffassen. In diesem Falle sind die Ränge  $\beta_i$  der freien Moduln in der minimalen Auflösung durch die so genannte Hochster-Formel zu berechnen und die Länge der minimalen Auflösung eines Stanley-Reisner Ideals ergibt sich aus der AUSLANDER-BUCHSBAUM-FORMEL, siehe z.B. [Ei]:

**Satz 2.2.** Für die Länge  $\text{pd}(\Delta)$  der minimalen Auflösung des Stanley-Reisner Ideals eines simplizialen Komplexes  $\Delta$  auf  $n$  Ecken gilt:

$$\text{pd}(\Delta) = n - \text{depth}(k[\Delta]).$$

Ist der simpliziale Komplex  $\Delta$  schälbar, so ist  $k[\Delta]$  Cohen-Macaulay, es gilt also  $\text{depth}(k[\Delta]) = \dim(k[\Delta]) = \dim \Delta + 1$  und wir erhalten:

**Korollar 2.3.** Für die Länge  $\text{pd}(\Delta)$  der minimalen Auflösung des Stanley-Reisner Ideals eines schälbaren  $d$ -dimensionalen simplizialen Komplexes  $\Delta$  auf  $n$  Ecken gilt:

$$\text{pd}(\Delta) = n - d - 1.$$

Üblicherweise wird die Hochster-Formel mit Hilfe des Tor-Funktors formuliert, den wir uns hier ersparen, indem wir auf die Argumentation in [EV] zurückgreifen.

Zu einem simplizialen Komplex  $\Delta$  mit Eckenmenge  $[n]$  sei für  $V \subset [n]$  der Komplex  $\Delta|_V$  derjenige auf der Eckenmenge  $V$ , der aus den Seiten von  $\Delta$  besteht, die vollständig in  $V$  liegen.

**Satz 2.4. Hochster-Formel** [EV] Die Ränge  $\beta_i$  der minimalen Auflösung des Stanley-Reisner Ideals eines simplizialen Komplexes  $\Delta$ :

$$0 \rightarrow A^{\beta_n} \rightarrow \dots \rightarrow A^{\beta_1} \rightarrow A \rightarrow k[\Delta] \rightarrow 0$$

berechnen sich durch

$$\beta_i = \sum_{V \subset [n]} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{|V|-i-1}(\Delta|_V, \mathbb{K}).$$

**Korollar 2.5.** Besitzt das Stanley-Reisner Ideal  $I_{\Delta}$  eine polytopale minimale Auflösung durch das Polytop  $P$ , so gilt für den  $f$ -Vektor des Polytopes

$$f_i = \sum_{V \subset [n]} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{|V|-i-1}(\Delta|_V, \mathbb{K}).$$

### 3. Polytopale Auflösungen des Stanley-Reisner Ideals simplizialer Polytope

**3.1. Gale-Diagramme.** Der folgenden kurzen Einführung in Gale-Diagramme liegt das Lehrbuch [MS] zugrunde. Gale-Diagramme gehen auf David Gale zurück (siehe auch Satz 6.4 in Kapitel 3). Sie sind ein ausgezeichnetes Hilfsmittel z.B. zur Untersuchung kombinatorischer Eigenschaften von Polytopen mit wenigen Ecken.

Für ein Polytop  $P$  sei  $V = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  die Menge seiner Ecken, so dass die  $x_i$  den  $\mathbb{R}^d$  affin aufspannen. Die Menge der AFFINEN DEPENDENZEN von  $V$  definieren wir als

$$\mathcal{D}(V) := \{\lambda \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0\}.$$

Wir betrachten die Matrix  $B$  mit Spalten  $v_i := \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Da die Ecken des Polytopes  $P$  den  $\mathbb{R}^d$  affin aufspannen liegt insbesondere  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  im Bild der Matrix, also ist deren Rang  $d + 1$ . Die affinen Abhängigkeiten  $\mathcal{D}(V)$  sind als Kern der Matrix  $B$  ein Vektorraum der Dimension  $n - d - 1$ . Sei  $b_1, \dots, b_{n-d-1} \in \mathbb{R}^n$  eine Basis von  $\mathcal{D}(V)$  und sei  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(n-d-1) \times n}$  die Matrix, deren Zeilen aus den  $b_j$  bestehen. Die Spalten  $\bar{V} := \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  von  $\mathcal{B}$  sind die GALE-TRANSFORMIERTEN Ecken von  $P$ . Die hier beschriebene Transformation ist natürlich nicht eindeutig, sie hängt von der Wahl der Basisvektoren ab. Für eine Teilmenge  $Z$  der Eckenmenge von  $P$  sei  $\bar{Z}$  stets die Menge der Gale-transformierten Elemente aus  $Z$ , wobei die gewählte Basis beliebig ist. Eine solche Teilmenge  $Z$  heißt COSEITE des Polytopes, falls  $V \setminus Z$  die Eckenmenge einer Seite von  $P$  ist. Der folgende Satz verdeutlicht die Bedeutung der Galetransformation für die Kombinatorik eines Polytops.

**Satz 3.1. Eigenschaften der Galetransformation [MS]** Sei  $V$  die Eckenmenge eines Polytopes  $P$  und  $\bar{V}$  die Menge ihrer Gale-transformierten Ecken.

- Eine Menge  $Z \subset V$  ist genau dann Coseite von  $P$ , wenn  $0 \in \text{relint conv } \bar{Z}$ .
- Jeder offene Halbraum  $\mathcal{H}$ , auf dessen Rand  $0$  liegt, enthält mindestens 2 Elemente aus  $\bar{V}$ .
- Das Polytop  $P$  ist simplizial genau wenn für jede Hyperebene  $E$  mit  $0 \in E$  gilt:

$$0 \notin \text{conv}(\bar{V} \cap E).$$

Zwei endliche Teilmengen  $\bar{V}, \bar{V}'$  im  $\mathbb{R}^{n-d-1}$  gleicher Mächtigkeit, die den Nullvektor im Inneren ihrer konvexen Hülle enthalten, heißen GALE-ISOMORPH, falls zwischen ihnen eine Bijektion  $\psi : X \rightarrow X'$  existiert, so dass

$$0 \in \text{relint conv}(\bar{X}) \text{ genau wenn } 0 \in \text{relint conv}(\psi(\bar{X})).$$

Jede zu einer Galetransformation der Eckenmenge eines Polytopes  $P$  Gale-isomorphe Punktmenge wird als GALE-DIAGRAMM bezeichnet.

Offensichtlich hat man bei der Wahl eines Gale-Diagrammes eine Reihe von Freiheitsgraden: Ist  $\bar{V} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  das Gale-Diagramm eines Polytopes  $P$ , so ist es auch  $\bar{V}' = \{\mu_1 \bar{x}_1, \dots, \mu_n \bar{x}_n\}$ . Satz 3.1 gilt natürlich analog auch für Gale-Diagramme. Ein STANDARD-GALEDIAGRAMM definiert man daher als Gale-Diagramm, dessen Elemente die Länge 1 oder Null haben. Im Falle simplizialer Polytope ist ein Standard-Galediagramm eine Teilmenge der Sphäre  $S^{(n-d-2)} \subset \mathbb{R}^{n-d-1}$ .

Aufschluss über die kombinatorische Struktur der konvexen Hülle einer Galetransformation liefert der folgende Satz:

**Satz 3.2.** Sei  $P$  ein  $d$ -dimensionales Polytop mit  $n$  Ecken  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ , so dass  $\sum_i x_i = 0$  gilt. Falls  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \subset \mathbb{R}^{n-d-1}$  die (paarweise verschiedenen) Gale-transformierten Ecken von  $P$  sind und diese den  $\mathbb{R}^{n-d-1}$  affin aufspannen, dann sind die Ecken von  $P$  eine Gale-Transformation von  $\text{conv}(\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\})$ .

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{d \times n}$  im folgenden die Matrix mit Spalten  $x_1, \dots, x_n$  und mit  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{(n-d-1) \times n}$  die Matrix mit Spalten  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ . Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \cdot \mathcal{G}^t &= 0 \\ \mathcal{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

und damit auch

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \cdot \mathcal{X}^t &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{X}^t &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Spalten der Matrix  $\mathcal{X}^t$  im  $n - (n - d - 1) - 1 = d$ -dimensionalen Raum der affinen Abhängigkeiten von  $\mathcal{G}$  liegen. Da  $\mathcal{X}^t$  nach Voraussetzung den Rang  $d$  hat, bilden die Spalten sogar eine Basis. Daraus folgt, dass die Spalten von  $\mathcal{X}$ , also die Ecken von  $P$  eine Gale-Transformation von  $\text{conv}(\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\})$  sind.  $\square$

**Korollar 3.3.** Sei  $f \subset [n]$ . Die Menge  $\text{conv}\{\bar{x}_i, i \in f\}$  ist genau dann eine Seite der konvexen Hülle einer Gale-Transformation des Polytopes  $P$  mit Eckenmenge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  wenn  $0$  im relativen Inneren von  $\text{conv}(X \setminus \{x_i, i \in f\})$  liegt.

**3.2.  $d$ -Polytope mit  $d + 3$  Ecken.** Wie im vorherigen Abschnitt erläutert ist ein Gale-Diagramm eines simplizialen  $d$ -dimensionalen Polytopes mit Ecken  $\{x_1, \dots, x_{d+3}\}$  eine Teilmenge der  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ . Da die Gale-transformierten  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{d+3}$  im Allgemeinen nicht paarweise verschieden sein müssen, muss die MULTIPLIZITÄT jedes  $\bar{x}_i$ , also die Anzahl der  $j$  für die  $\bar{x}_j = \bar{x}_i$  gilt, berücksichtigt werden. Die restlichen Freiheitsgrade eines solchen Gale-Diagrammes verdeutlicht man sich z.B. durch zusätzliche Betrachtungen der Hyperebenen, also Geraden,  $l_i$ , die durch  $\bar{x}_i$  und die Null verlaufen. Nach Satz 3.1 befinden sich für simpliziale Polytope in jedem der Halbräume  $l_i^\pm$  mindestens 2 Elemente und keine 2 verschiedenen Punkte  $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$  befinden sich auf der selben Geraden. Ein Element  $\bar{x}_i$  kann auf einen Punkt  $\bar{x}_j$  verschoben werden (so dass sich die Multiplizität um eins erhöht), falls beide nicht in verschiedenen Halbräumen einer Geraden  $l_k$  liegen. Ist eine Erhöhung der Multiplizitäten auf diese Weise nicht mehr möglich und sind alle Elemente des Gale-Diagrammes äquidistant auf der  $S^1$  angeordnet, so spricht man von dem STANDARDISIERTEN, ZUSAMMENGEZOGENEN GALE-DIAGRAMM. Auf diese Weise erhält man den folgenden Satz:

**Satz 3.4.** [MS] Ein simpliziales Polytop der Dimension  $d$  mit  $d + 3$  Ecken hat ein standardisiertes Gale-Diagramm, aus der in Abbildung 1 angedeuteten Familie von Gale-Diagrammen. Insbesondere ist dessen konvexe Hülle ein  $m$ -Eck, wobei  $m$  eine ungerade Zahl größer als 1 ist.

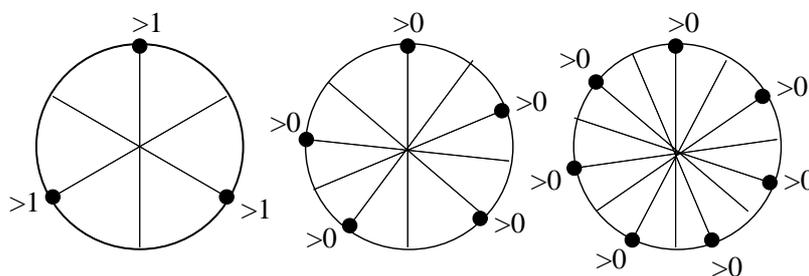


Abbildung 1. Gale-Diagramme von  $d$ -dimensionalen simplicialen Polytopen mit  $d + 3$  Ecken.

Einen ersten nicht trivialen Zusammenhang zwischen Galetransformationen und polytopalen Auflösungen liefert der folgende Satz:

**Satz 3.5.** *Sei  $P$  ein simpliciales,  $d$ -dimensionales Polytop mit  $d + 3$  Ecken. Das standardisierte, zusammengezogene Gale-Diagramm von  $P$  ist ein  $m$ -Eck, dessen zugehöriger zellulärer Komplex eine minimale polytopale Auflöser des Stanley-Reisner Ideals  $I_P$  liefert.*

*Beweis.* Sei  $V = \{v_1, \dots, v_{d+3}\}$  die Eckenmenge von  $P$ ,  $E := \{e_1, \dots, e_m\}$  das standardisierte, zusammengezogene Gale-Diagramm von  $P$  und  $G := \text{conv}(\{e_1, \dots, e_m\})$ . Nach Satz 3.4 ist  $G \subset S^1 \subset \mathbb{R}^2$  ein  $m$ -Eck, wobei  $m = 2k + 1$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Die  $e_j$  seien im Uhrzeigersinn nummeriert. Wir ordnen jedem  $e_j \in E$  die Menge

$$I(e_j) := \{i : \bar{v}_i = e_j\}$$

zu, also die Menge derjenigen Ecken von  $P$ , die mittels einer geeigneten Gale-Transformation auf  $e_j$  abgebildet werden. Die Mengen  $I(e_j)$  sind nie leer und bilden eine Partition von  $V$ .

Zusätzlich erhält jedes  $e_j$  die Label-Menge  $\varphi_j := \bigcup_{i=1}^k I(e_{(j-i) \bmod m})$  und den entsprechenden Multigrad  $\alpha_j \in \mathbb{N}^{d+3}$  mit

$$\alpha_j(i) = 1 \text{ falls } i \in \varphi_j \text{ und } \alpha_j(i) = 0 \text{ sonst.}$$

Wir halten zunächst fest, dass eine Teilmenge  $\sigma \subset \mathbb{R}^d$  genau dann eine minimale Nichtseite der geometrischen Realisierung von  $P$  ist, wenn ein  $j$  existiert so dass  $\sigma = \text{conv} \{v_i : i \in \varphi_j\}$ .

Dies gilt, da nach Satz 3.1 für  $F \subset V$  die konvexe Hülle  $\text{conv}(F)$  genau dann Seite von  $P$  ist, wenn  $0 \in \text{relint} \text{conv}(E \setminus \bar{F})$ . Da die  $e_i$  äquidistant auf  $S^1$  angeordnet sind, sind die maximalen Teilmengen  $N \subset E$  mit  $0 \notin \text{relint} \text{conv} N$  genau die Mengen  $\{e_i : i \in I, I \text{ Intervall der Länge } (k + 1) \text{ in } \mathbb{Z}_m\}$ . Deren Komplemente sind genau die Gale-transformierten minimalen Nichtseiten von  $P$ :

$$N^c = \{e_i : i \in I, I \text{ Intervall der Länge } k \text{ in } \mathbb{Z}_m\}.$$

Wir identifizieren jede Seite  $f \subset G$  mit ihrer Eckenmenge  $f \subset E$  und ordnen ihr den Grad  $\alpha_f := \bigvee_{e_j \in f} \alpha_j$  zu. Insbesondere bekommt jede Ecke von  $G$  genau einen Erzeuger des Stanley-Reisner Ideals  $I_P$  zugeordnet.

Da  $G$  ein  $m$ -Eck ist und für alle Seiten  $f$  von  $G$  gilt, dass  $\alpha_f \preceq (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^{d+3}$ , ist  $G_{\preceq b}$  azyklisch für alle  $b \succeq (1, \dots, 1)$ .

Sei  $v_i \in V$ , dann existiert ein eindeutiges  $p \in [m]$  so dass  $i \in I(e_p)$  und wir erhalten, dass  $i$  genau dann in  $\alpha_{\{e_j\}}$  enthalten ist, wenn  $i$  Element von  $\varphi_j$  ist. Das gilt genau dann, wenn ein  $l_0$  mit  $1 \leq l_0 \leq k$  existiert, so dass  $p = (j - l_0) \bmod m$ , was gleichbedeutend ist mit

$$j \in \{p, p+1, \dots, p+k\}_{\bmod m}.$$

Sei  $b \in \mathbb{N}^{d+3}$  mit  $b \prec (1, \dots, 1)$ , dann geht der Komplex  $G_{\preceq b}$  aus  $G$  durch Löschung einer Vereinigung von Eckenmengen vom Typ

$$\{e_i : i \in I, I \text{ Intervall der Länge } k \text{ in } \mathbb{Z}^n\}$$

hervor. Eine solche Vereinigung ist eine Menge vom Typ  $\{e_i : i \in I, I \text{ Intervall in } \mathbb{Z}_m\}$ , somit wird beim Übergang von  $G$  nach  $G_{\preceq b}$  stets genau eine Zusammenhangskomponente des Randkomplexes (und die maximale Seite) entfernt, so dass  $X_{\prec b}$  selbst wiederum nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht oder der leere Komplex ist. In jedem Fall ist  $G_{\preceq b}$  azyklisch. Mit Satz 2.1 folgt, dass der zu  $G$  gehörige zelluläre Komplex  $F_G$  eine freie Auflösung von  $I_P$  ist.

Für die Minimalität von  $F_G$  ist nach Satz 2.1 nachzuweisen, dass  $\alpha_f \neq \alpha_{f'}$  für je zwei Seiten  $f, f'$  mit  $f' \subset f \subset G$ .

Falls  $f = \{e_1, \dots, e_m\}$  die maximale Seite von  $G$  ist, so ist  $\alpha_f = (1, \dots, 1)$ , da jede Ecke  $v_i \in V$  in mindestens einer minimalen Nichtseite von  $P$  enthalten ist. (Ecken, die in keiner Nichtseite enthalten sind, sind so genannte Kegelpunkte. Ein  $d$ -Polytop mit  $d+3$  Ecken und Kegelpunkt ist ein Kegel über einem  $d-1$  Polytop  $P'$  mit  $d+2$  Ecken, das Seite von  $P$  ist, aber zu viele Ecken hat, um ein Simplex zu sein.)

Andererseits gibt es für jede 1-dimensionale Seite  $f' = \{e_i, e_{i+1}\}$  mindestens ein  $v_j \in V$  mit

$$v_j \notin \varphi(e_i) \cup \varphi(e_{i+1}) = \bigcup_{i=1}^{k+1} I(e_{(j-i) \bmod m}),$$

denn  $k+1 < 2k+1$  und somit fehlt ein  $I(e_1)$  in der Vereinigung. Da die  $I(e_l)$  nicht leer sind und eine Partition der Eckenmenge bilden, gilt die Behauptung. Falls  $f = \{e_j, e_{j+1}\}$  und ohne Einschränkung  $\alpha_f = \alpha_{e_j} \vee \alpha_{e_{j+1}} = \alpha_{\{e_j\}}$ , dann gilt  $\alpha_{\{e_{j+1}\}} \prec \alpha_{\{e_j\}}$ . Das bedeutet, dass  $\varphi_{j+1} \subset \varphi_j$ , also insbesondere  $I(e_{(k+1-i) \bmod m}) \subset \bigcup_{i=1}^k I(e_{(j-1) \bmod m})$ , ein Widerspruch zur Partionierungseigenschaft.  $\square$

**Bemerkung 3.6.** Da Stanley-Reisner Ideale simplicialer Polytope mit  $d+3$  Ecken Gorenstein-Ideale von Höhe 3 sind, folgt auch aus [BH], dass die minimale Auflösung stets von einem  $m$ -Eck unterstützt wird.

**3.3. Allgemeine simpliziale Polytope.** Wir möchten die Idee des vorherigen Abschnitts auf die Konstruktion eines Polytopes, das die Auflösung von  $I_P$  für ein simpliziales Polytop mit beliebiger Eckenzahl trägt, übertragen. Seien  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$  die Gale-transformierten Ecken von  $P$ , deren konvexe Hülle wir mit  $G$  bezeichnen. Zu jeder Nichtseite  $N$  des Polytops  $P$  sei  $x_N$  das Baryzentrum von  $\text{conv} \{\bar{v}_i \mid v_i \in N\}$ . Jedes  $x_N$  erhält als Multigrad  $\alpha^N \in \{0, 1\}^n$  mit  $\alpha_i = 1$  genau wenn  $v_i \in N$  gilt. Wir bezeichnen mit  $\Sigma$  die konvexe Hülle der  $x_N$ .

**Vermutung 3.7.** *Die vorgeschlagene Konstruktion liefert für alle simplizialen Polytope  $P$  ein Polytop  $\Sigma$ , das die freie Auflösung des Stanley-Reisner-Ideals  $I_P$  trägt, falls die  $x_N$  in konvexer Lage sind.*

Nach Satz 2.1 wäre für den Beweis dieser Vermutung zu zeigen, dass  $\Sigma_{\leq \beta}$  azyklisch für alle  $\beta \preceq (1, \dots, 1)$  ist. Wir zeigen im folgenden, dass dies zumindest immer dann der Fall ist, wenn  $\beta$  so gewählt wird, dass

$$0 \in \text{relint conv} \{v_i : \beta_i = 0\}$$

gilt. Dies ist nach Satz 3.2 äquivalent dazu, dass  $\text{conv} \{\bar{v}_i \mid \beta_i = 1\}$  eine Seite von  $G$  ist. Also existiert eine Hyperebene  $H$ , so dass  $\{\bar{v}_i \mid \beta_i = 1\} \subset H$  und  $G \subset H^+$  gilt. Da Hyper Ebenen konvex sind, folgt  $x_N \in H$  falls  $N \subset \{v_i \mid \beta_i = 1\}$ . Nach Konstruktion ist  $G \subset \Sigma$  und somit  $G \subset H^+$ . Es bleiben noch die  $x_N$  zu untersuchen, für die  $N \not\subset \{v_i \mid \beta_i = 1\}$ . Sei  $v_j \in N$  mit  $\beta_j = 0$ . Dann ist  $\bar{v}_j \in H^+ \setminus H$ . Mit  $H =: \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^t \cdot h = r\}$  gilt dann also  $\bar{v}_j^t \cdot h > r$  und damit auch  $x_N^t \cdot h = \frac{1}{\#N} \sum_{i \in N} \bar{v}_i^t \cdot h > r$ , da alle restlichen Summanden größer oder gleich  $r$  sind. Insgesamt folgt also, dass  $\text{conv} \{x_N \mid N \subset \beta\}$  eine Seite von  $\Sigma$  ist und somit  $\Sigma_{\preceq \beta}$  azyklisch.

**Bemerkung 3.8.** *Man kommt durch die vorgeschlagene Konstruktion bei  $d$ -dimensionalen Polytopen mit  $d + 3$  Ecken zu dem selben Resultat wie die Konstruktion in Satz 3.5, da die Baryzentren der  $x_N$  in konvexer Lage sind.*

**3.4. Zur Auflösung des Stanley-Reisner Ideals eines  $n$ -Eckes.** Für eine natürliche Zahl  $n$  sei  $E_n$  das reguläre  $n$ -Eck, dessen Eckenmenge wir mit  $[n]$  identifizieren und in dessen Zentrum der Ursprung liegt. Wir möchten das Stanley-Reisner Ideal  $I_{E_n}$  auf seine polytopale Auflösbarkeit hin untersuchen.

**Satz 3.9.** *Die Ränge  $\beta_{i,n}$  der minimalen Auflösung des Stanley-Reisner Ideals des  $n$ -Eckes  $E_n$*

$$0 \rightarrow S^{\beta_{n-3,n}} \rightarrow \dots \rightarrow S^{\beta_{1,n}} \rightarrow S \rightarrow k[E_n] \rightarrow 0$$

berechnen sich durch

$$\beta_{i,n} = n \binom{n-2}{i} - \binom{n}{i+1}.$$

Wird die minimale Auflösung von einem Polytop  $P_n$  unterstützt, so gilt für den  $f$ -Vektor

$$f_i(P_n) = \beta_{i+1,n} \text{ für } 0 \leq i \leq n-4 \text{ und } f_{-1}(P_n) = f_{n-3}(P_n) = 1.$$

**Bemerkung 3.10.** *Die Länge  $n - d - 1 = n - 3$  der freien Auflösung ergibt sich aus der Auslander-Buchsbaum Formel und der Schälbarkeit des  $n$ -Eckes, siehe Korollar 2.3.*

**Bemerkung 3.11.** Da  $f_i(P_n) = \beta_{i+1,n} = \beta_{n-3-i,n} = f_{n-4-i}(P_n)$  gilt, hätte das die minimale Auflösung unterstützende Polytop  $P_n$  einen symmetrischen  $f$ -Vektor und es kann vermutet werden, dass  $P_n$  selbstdual ist. Für  $P_5$  und  $P_6$  ist dies der Fall.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir die folgenden Lemmas.

**Lemma 3.12.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n : 2^{[n]} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $W \mapsto \dim H_0(G_n|_W, \mathbb{K})$  und

$$\gamma_{i,n} := \sum_{W \in 2^{[n]}, \#W=i} f_n(W).$$

Dann gilt

- (1)  $\gamma_{0,n} = \gamma_{n,n} = 1$  für alle  $n \geq 1$ .
- (2)  $\gamma_{1,n} = \gamma_{n-1,n} = n$  für alle  $n \geq 1$ .
- (3)  $\gamma_{2,n} = (n-2)n$  für alle  $n \geq 3$ .
- (4) Für  $4 \leq i < n-1$ :

$$\gamma_{i,n} = \gamma_{i-1,n-1} + \binom{n-2}{i-1} + \gamma_{i,n-1}.$$

*Beweis.* (1) und (2) sind klar, für (3) unterscheidet man die Fälle, in denen  $W$  zwei nebeneinander liegende Ecken des  $n$ -Ecks enthält und  $f_n(W) = 1$  ist oder alle anderen Fälle, in denen  $f_n(W) = 2$  gilt. Daraus ergibt sich  $\gamma_{2,n} = n + 2 \cdot \left(\binom{n}{2} - n\right) = n(n-2)$ . Für die Rekursionsgleichung für  $\gamma_{i,n}$  bestimmen wir zunächst eine Rekursionsgleichung für  $f_n(W)$ , der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $G_n|_W$ :

Sei  $W \subset [n]$  und  $\check{W} := W \setminus n$ .

1. Fall  $W \cap \{n-1, 1\} = \emptyset$  und  $n \in W$ . Hier gilt  $f_n(W) = f_{n-1}(\check{W}) + 1$ , da  $\{n\}$  eine Zusammenhangskomponente bildet.
2. Fall  $W \cap \{n-1, 1\} = \emptyset$  und  $n \notin W$ . Hier gilt  $f_n(W) = f_{n-1}(\check{W})$ .
3. Fall  $\#W \cap \{n-1, 1\} = 1$  und  $n \in W$ . Hier gilt für alle  $W$  mit  $\#W \geq 2$ :  $f_n(W) = f_{n-1}(\check{W})$ .
4. Fall  $\#W \cap \{n-1, 1\} = 1$  und  $n \notin W$ . Hier gilt für alle  $W$  mit  $\#W \geq 1$ :  $f_n(W) = f_{n-1}(W)$ .
5. Fall  $\#W \cap \{n-1, 1\} = 2$  und  $n \in W$ . Hier gilt für alle  $W$  mit  $\#W \geq 3$ :  $f_n(W) = f_{n-1}(\check{W})$ .
6. Fall  $\#W \cap \{n-1, 1\} = 2$  und  $n \notin W$  und  $W \neq [n-1]$ . Hier gilt für alle  $W$  mit  $\#W \geq 2$ :  $f_n(W) = f_{n-1}(W) + 1$ .
7. Fall  $W = [n-1]$ . Hier ist  $f_n(W) = f_{n-1}(W) = 1$ .

Damit ergibt sich für  $\gamma_{i,n}$  mit  $4 \leq i < n-1$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{i,n} &= \sum_{\#W=i, W \subset [n]} f_n(W) \\
 &= \sum_{j=1}^7 \sum_{\text{Fall } j} f_n(W) \\
 &= \sum_{\text{Fall 1}} f_{n-1}(\check{W}) + \binom{n-3}{i-1} + \sum_{\text{Fall 2}} f_{n-1}(W) \\
 &\quad + \sum_{\text{Fall 3}} f_{n-1}(\check{W}) + \sum_{\text{Fall 4}} f_{n-1}(W) + \sum_{\text{Fall 5}} f_{n-1}(\check{W}) + \binom{n-3}{i-2} + \sum_{\text{Fall 6}} f_{n-1}(W) \\
 &= \sum_{\text{Fälle 1,3,5}} f_{n-1}(\check{W}) + \binom{n-2}{i-1} + \sum_{\text{Fälle 2,4,6}} f_{n-1}(W) \\
 &= \sum_{\#W=i-1} f_{n-1}(W) + \binom{n-2}{i-1} + \sum_{\#W=i} f_{n-1}(W) \\
 &= \gamma_{i-1,n-1} + \binom{n-2}{i-1} + \gamma_{i,n-1}.
 \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.13.** Für alle  $1 \leq i \leq n-2$  gilt

$$(33) \quad \gamma_{i,n} = n \binom{n-2}{i-1}$$

$$(34) \quad \beta_{i,n} = \gamma_{i+1,n} - \binom{n}{i+1}.$$

*Beweis.* Der Induktionsanfang ergibt sich aus (2) in Lemma 3.12, der Induktionsschritt wir folgt:

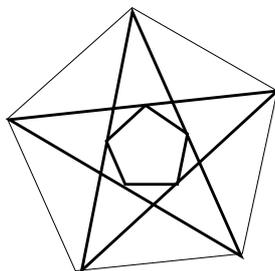
$$\begin{aligned}
 \gamma_{i,n} &= \gamma_{i-1,n-1} + \binom{n-2}{i-1} + \gamma_{i,n-1} \\
 &\stackrel{\text{IV}}{=} (n-1) \binom{n-3}{i-2} + \binom{n-2}{i-1} + (n-1) \binom{n-3}{i-1} \\
 &= (n-1) \binom{n-2}{i-1} + \binom{n-2}{i-1} \\
 &= n \binom{n-2}{i-1}.
 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\beta_{i,n} = \sum_{\#W=i+1} (f_n(W) - 1) = \gamma_{i+1,n} - \binom{n}{i+1}.$$

□

*Beweis* des Satzes. Nach Korollar 2.5 und Satz 2.4 gilt: Besitzt das Stanley-Reisner Ideal  $I_{E_n}$  eine polytopale minimale Auflösung durch das Polytop  $P_n$ , so gilt für dessen  $f$ -Vektor



**Abbildung 2.** Gale-Diagramm des 5-Ecks und das Polytop  $\text{conv } x_N$ .

und für die Ränge der minimalen Auflösung:

$$f_i(P_n) = \beta_{i,n} = \sum_{V \subset [n]} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{|V|-i-1}(G_n|_V, \mathbb{K}).$$

Da  $G_n$  ein 2-dimensionales Polytop und damit zusammenziehbar ist, ist  $\dim \tilde{H}_k(G_n|_V, \mathbb{K}) = 0$  für alle  $k \geq 1$ . Für  $k = 0$  folgt die Behauptung aus Lemma 3.13.  $\square$

Wir führen nun die Konstruktion aus Abschnitt 3.3 für das  $n$ -Eck durch. Seien  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$  die Gale-transformierten Ecken des  $n$ -Ecks, deren konvexe Hülle wir mit  $G_n$  bezeichnen. Die konvexe Hülle der Menge aller Ecken des  $n$ -Ecks, die nicht in einer Nichtseite  $N = \{i, j\}, i \neq (j \pm 1)_{\text{mod } n}$  enthalten sind, enthält für  $n \geq 3$  die Null in ihrem Inneren. Daraus folgt mit Satz 3.2, dass  $\bar{v}_i, \bar{v}_j$  eine 1-Seite in  $G_n$  bilden, damit liegen die  $x_N$  in konvexer Lage.

Für  $n = 5$  ist  $G_5$  ein 5-Eck und die vorgeschlagene Konstruktion ergibt wiederum ein 5-Eck (siehe Abbildung 2). Nach Satz 3.5 ist dies schon das Polytop, das die minimale Auflösung des Stanley-Reisner Ideals des 5-Ecks unterstützt.

Für das 6-Eck erhält man das in Abbildung 3 grau eingezeichnete Polytop: Man überzeugt sich leicht, dass für das 6-Eck ein Gale-Diagramm durch ein Dreiecksprisma mit 0 im Zentrum und mit Dreiecksgrundflächen  $\bar{v}_1, \bar{v}_3, \bar{v}_5$  und  $\bar{v}_2, \bar{v}_4, \bar{v}_6$  gegeben ist. Die neun Nichtseiten des 6-Ecks lassen sich dann mit den 1-Seiten des Gale-Diagrammes identifizieren.

Wie man leicht überprüft trägt es tatsächlich eine Auflösung, diese ist aber nicht minimal: Die Seite  $\text{conv}(x_{2,4}, x_{4,6})$  hat den Multigrad  $\alpha = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$ , ebenso wie die Seite  $\text{conv}(x_{2,4}, x_{4,6}, x_{2,6})$ . Man minimiert die Auflösung z.B. durch Verschiebung der Punkte  $x_{1,4} \rightarrow \bar{v}_1$  und  $x_{3,6} \rightarrow \bar{v}_6$ , siehe Abbildung 4.

Auch falls gemäß der Vermutung 3.7 die vorgeschlagene Konstruktion eine freie Auflösung von  $I_{E_n}$ ,  $n \geq 7$  trägt, ist diese aber in jedem Fall nicht minimal: Für  $n = 7$  überlegt man sich das anhand von Abbildung 5 wie folgt: Da die  $0 \in \mathbb{R}^2$  im Inneren der konvexen Hülle der Ecken 1, 4, 7 des 7-Ecks liegt, also 1, 4, 7 minimale Coseite von  $G_7$  ist, ist 2, 3, 5, 6 Facette von  $G_7$ . Diese Facette enthält dann nach Konstruktion genau die zu den entsprechenden Nichtseiten des 7-Ecks gehörenden Ecken  $x_{2,5}, x_{2,6}, x_{3,5}, x_{3,6}$ . Da  $G_7$  die konvexe Hülle der  $x_N$  enthält, bilden diese Ecken eine Facette dieser konvexen

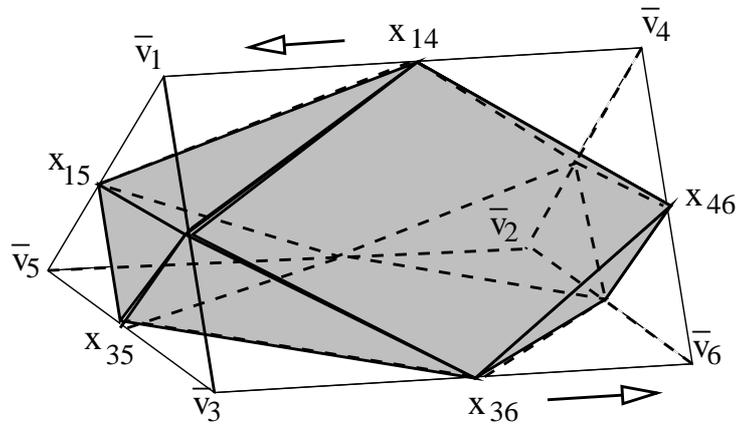


Abbildung 3. Gale-Diagramm des 5-Ecks und das Polytop  $\text{conv } x_N$ .

Hülle. Diese Facette ist dreidimensional, mithin ein Tetraeder, der die Seite  $x_{2,5}, x_{2,6}, x_{3,5}$  enthält. Diese erhält nach Konstruktion dasselbe Label wie die Facette, so dass das Minimalitätskriterium aus Satz 2.1 verletzt ist. Ein analoges Argument liefert, dass  $\text{conv } x_N$  für kein  $n$ -Eck,  $n \geq 6$  eine minimale Auflösung trägt.

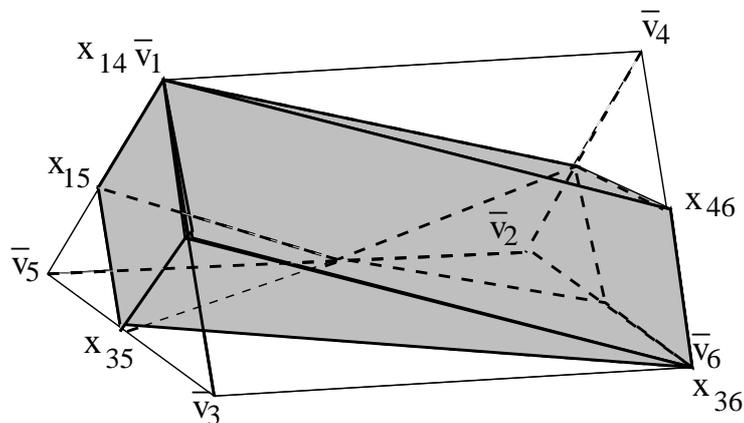
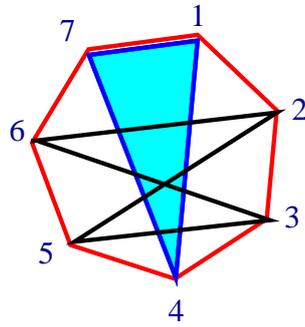


Abbildung 4. Polytop, das die minimale freie Auflösung des Stanley-Reisner-Rings des 6-Ecks trägt.



**Abbildung 5.**  $\text{conv } x_N$  liefert auch für das 7-Eck keine minimale Auflösung

## **1. Dank**

Ein herzlicher Dank zunächst an Volkmar Welker, dem ich die interessanten Fragestellungen dieser Arbeit ebenso zu verdanken habe wie zahlreiche Diskussionen und Hilfestellungen in einer sehr angenehmen Atmosphäre. Durch seine großzügige Unterstützung hatte ich die Gelegenheit, an zahlreichen Konferenzen und Workshops im In- und Ausland teilzunehmen und viele Protagonisten der zeitgenössischen Diskreten Mathematik kennen zu lernen. Eine bessere Betreuung kann ich mir nicht vorstellen! Außerdem möchte ich meinem früheren Bürokollegen Jakob Jonsson danken, dessen Faszination an der Mathematik und dessen beeindruckende Resultate ich sehr bewundere. Durch seine Hilfe konnte ich die Arbeit in Stockholm einen entscheidenden Schritt weiterbringen. Vielen Dank auch an Ilse Fischer, die mir gezeigt hat, wie man symmetrische Pfade zählt und dabei gut gelaunt bleibt. Die Zeit in Wien hat mir sehr gut gefallen. Danken möchte ich ebenfalls Anke Raufuß, der die Raufuß-Graphen neben ihrem Namen auch die Idee des Uhrzeigersinns zu verdanken haben. Danke auch an Claudia Zehnpfund für ihre zahlreichen Korrekturen und an alle, die mir durch ihre Anwesenheit die Zeit auf den Lahnbergen so angenehm gemacht haben, insbesondere an Jan Brähler, Raphael Bürger, Martin Ehler, Thomas Graeff, Vladimir Grujic, Dennis Leucht und die vielen Michaels. Herzlich danke ich auch meinen Eltern Anne und Bernhard, die mein Studium immer großzügig unterstützt haben. Und weil sie hier noch fehlt danke ich meiner Schwester Sophie für ihre Existenz. Sie hat die Liebe zur Mathematik während des Entstehens dieser Arbeit auf eine sehr überraschende Weise entdeckt... Zum Schluss ein dickes Dankeschön an meine Psychologin und liebe Frau Stephanie Mehl, ohne deren willensstarke Beharrlichkeit beim Wecken diese Dissertation nie beendet worden wäre.

## **2. Lebenslauf**

Am 11.04.1974 wurde ich von Anne Soll (geb. Hönig) geboren. Mein Vater ist Bernhard Soll. Nach dem Besuch der Grundschule Atzbach und der integrierten Gesamtschule Lahntalschule Atzbach erwarb ich im Sommer 1993 an der Goetheschule in Wetzlar die Hochschulreife. Im Anschluss absolvierte ich meinen Zivildienst an der Friedrich-Fröbel Schule für Praktisch Bildbare, die sich ebenfalls in Wetzlar befindet. Im April 1995 begann ich mein Studium an der Philipps-Universität in Marburg, zunächst im Fach Physik. Im Oktober des selben Jahres wechselte ich auf die Fächer Psychologie und Mathematik. Mein Vordiplom in Mathematik erwarb ich im Sommer 1997, das in Psychologie im Sommer 2001. Im Sommer 2002 beendete ich mein Mathematikstudium mit dem Diplom. Das folgende Semester verbrachte ich als Stipendiat der Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH) in Zürich und absolvierte dort am Institut für theoretische Informatik den Predoc-Kurs. Im Frühjahr 2003 kehrte ich an die Philipps-Universität zurück, bei der ich seither als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik und Informatik tätig bin.

## **3. Versicherung**

Ich habe die vorgelegte Dissertation selbst verfasst und mich dabei keiner anderen als der von mir ausdrücklich bezeichneten Quellen und Hilfen bedient. Die Dissertation in der vorliegenden oder einer ähnlichen Form habe ich noch nicht zu Prüfungszwecken eingereicht.

Marburg, April 2006

Daniel Soll

# Literaturverzeichnis

- [2R] Mathematik, Musik: I. Humpe, T. Eckart, Text: I. Humpe, 2Raumwohnung in: In Wirklich, Album 2002.
- [Ai] M. Aigner, Kombinatorik, 1975, *Springer-Verlag*.
- [AL] W. Adams, P. Loustau, An Introduction to Gröbner Bases, 1994, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 3, *American Mathematical Society*.
- [An] O. D. Anderson, Some more patterns from Pascal's triangle, *Fibonacci Q.*, **16**, (1978), 296-301.
- [And] D. André, Note: Calcul des probabilités. Solution directe du problème résolu par M. Bertrand, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, **105**, 436-437 (1887).
- [Br] G. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, 1972, *Academic Press*, New York and London.
- [Bro] A. Brousseau, Fibonacci and Related Number Theoretic Tables, Fibonacci Association, San Jose, CA, 1972, p. 148.
- [BV] W. Bruns, U. Vetter, Determinantal rings, *Lect. Note Math.*, **1327**, Springer 1988.
- [Bj1] A. Björner, Partial unimodality for f-vectors of simplicial polytopes and spheres, *Contemporary Mathematics*, **178**, 45-54, Amer. Math. Soc., Providence, 1994
- [BSt] A. Björner and R. Stanley, A Combinatorial Miscellany in New directions in mathematics, *Cambridge Univ. Press*, Preprint 1999
- [BS] D. Bayer, B. Sturmfels, Cellular resolutions of monomial modules, *J. reine angew. Math.*, **502**, (1998), 123-140.
- [BC] W. Bruns, A. Conca, Gröbner Bases and Determinantal Ideals, Preprint 2003
- [BH] W. Bruns, J. Herzog, On multigraded resolutions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **118**, (1995), 245-257.
- [Dr] H. Drrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover, New York, 1965
- [DKM] A. Dress, J. Koolen und V. Moulton, On line arrangements in the hyperbolic plane, *European Journal of Combinatorics*, **23**, (2002), 549-557.
- [Ei] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, 1995, *Springer*, New York.
- [EV] J. Eagon, V. Reiner, Resolutions of Staley-Reisner rings and Alexander duality, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **130**, (1998), 265-275.
- [Fi] I. Fischer, Enumeration of rhombus tilings of a hexagon which contain a fixed rhombus in the centre, *J. Combin. Theory Ser. A*, **96**, (2001), 31-88.
- [FR] S. Fomin, N. Reading, Root systems and generalized associahedra,  
<http://arxiv.org/abs/math.CO/0505518>

- [FS] I. Fischer, D. Soll, persönliche Kommunikation in: Zaroni und Zaroni, Gelateria, Wien, *Lugeck 7, 1. Bezirk*, **365**, 7-24.
- [Gr] B. Grünbaum, Convex Polytopes, 1967, *Interscience Publishers*.
- [GKP] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics, 1994, *Addison-Wesley*.
- [GV] I. Gessel, G. Viennot, Binomial Determinants, Paths and Hook Length Formulae, *Advances in Mathematics*, **58**(1985), 300-321.
- [Ha] M. Haiman, Constructing the associahedron, MIT, 1984.  
(<http://math.berkeley.edu/~mhaiman/ftp/assoc/manuscript.pdf>)
- [He] H. Henri, On the flatness of galaxies halos, Preprint 2001.
- [Hib] T. Hibi, Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes, 1992, *Carslaw Publishers*.
- [HT] J. Herzog, N. V. Trung, Gröbner Bases and Multiplicity of Determinantal and Pfaffian Ideals, *Advances in Mathematics*, **96**, (1992), 1-37.
- [Jo1] J. Jonsson, Generalized Triangulations of a Convex Polygon, preprint.
- [Jo2] J. Jonsson et al., A shelling of the complex  $\Delta_{n,k}$  of  $k$ -compatible line arrangements, preprint 2004.
- [Jo3] J. Jonsson, Generalized Triangulations and Diagonal-Free Subsets of Stack Polyominoes, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **112**, (2005), 117-142.
- [JW] J. Jonsson, V. Welker, A spherical initial ideal for pfaffians, preprint 2005
- [Le] C. Lee, The associahedron and triangulations of the  $n$ -gon, *European J. Combin.*, **10**, (1989), 551-560.
- [Ma] M. Markel, Simplex, Associahedron, and Cyclohedron, *Contemp. Math.*, **227**, (1999), 235-265.
- [Mun] J. R. Munkres, Elements of Algebraic Topology, 1984, *Perseus Books*.
- [MS] P. McMullen, G. Shephard, Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture, 1971, *Cambridge University Press*.
- [Na] T. Nakamigawa, A generalization of diagonal flips in a convex polygon, *Theor. Comp. Sci.*, **235**, (2000), Vol. 2, 271-282.
- [No1] I. Novik, Remarks on the Upper Bound Theorem, *J. Combin. Theory Ser. A*, **104**, (2003), 201-206.
- [No2] I. Novik, Upper Bound Theorems for Homology Manifolds, *Israel Journal of Mathematics*, **108**, (1998), 45-82.
- [Pe] M. Perles, List of Problems, Conference on Convexity, Oberwolfach, Deutschland, (1984).
- [Pr] R. Proctor, Shifted plane partitions of trapezoidal shape, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **29**, (1983), 553-559.
- [Ru] M. Rubey, The  $h$ -vector of a Ladder Determinantal Ring Cogenerated by  $2 \times 2$ -Minors is Log-concave, Preprint on the occasion of the 2nd birthday of Miriam Rubey.
- [RW] V. Reiner, V. Welker, On the Charney-Davis and Neggers-Stanley Conjectures, Preprint (2002).
- [Sl] N. J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, (2005),  
<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [Si] R. Simion, A type-B associahedron, *Adv. Appl. Math.* **30**, (2003), 2-25.
- [St] J. D. Stasheff, From operads to 'physically' inspired theories in: J.-L. Loday: Operads: proceedings of Renaissance conferences, (1997), Providence, RI, **202**, 53-81.
- [Sta1] R. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra 2nd edition, 1996, *Birkhäuser*.
- [Sta2] R. Stanley, Log-Concave And Unimodal Sequences in: Graph-Theory and its Applications: East and West *Annals New York Academy of Sciences*, **576**, (1989), 500-535.
- [Sturm] B. Sturmfels, Boundary Complexes of Convex Polytopes Cannot be Characterized Locally, *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, **35** (1987), 314-326.
- [Sturm2] B. Sturmfels, Gröbner bases and Stanley-decompositions of determinantal rings, *Math. Z.*, **205** (1990), 137-144.
- [Zi] G.M.Ziegler, Lectures on Polytopes, 1995, *Springer-Verlag*.