

## AJUSTE DE LA CURVA DE FRACTURA DE HORMIGÓN COMO FUNCIÓN DE DENSIDAD PERTENECIENTE A LA FAMILIA GENERALIZADA DE EXTREMOS

L. Castañón-Jano<sup>1</sup>, A. Fernández-Canteli<sup>2</sup>, H. Cifuentes<sup>3</sup>, M. Muñiz-Calvente<sup>2</sup>, E. Castillo<sup>4</sup>

<sup>1</sup>GITECO. Dpto. de Transportes, Tecnología de Proyectos y Procesos, Univ. de Cantabria, 39005 Santander

<sup>2</sup>Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación, EPI Gijón, Univ. de Oviedo, 33203 Gijón

<sup>3</sup>Grupo de Estructuras, E.T.S. de Ingeniería, Univ. de Sevilla, 41092 Sevilla

<sup>4</sup>Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, Univ. de Cantabria, 39005 Santander

\*E-mail: [afc@uniovi.es](mailto:afc@uniovi.es)

### RESUMEN

En este trabajo, la curva de fractura  $P-\delta$ , registrada durante el proceso de fractura del hormigón en ensayos de flexión a tres puntos, se identifica con un fenómeno estadístico que se describe adecuadamente mediante una función de densidad de la familia de distribuciones generalizadas de valores extremos (DGVE), que demuestra ser de Fréchet de máximos, como caso particular entre las distribuciones de cola pesada. Dado que la función analítica propuesta ajusta todo el registro del ensayo, cabe esperar que permita estimar el trabajo de fractura no medido, correspondiente a la cola asintótica superior de la curva experimental de fractura  $P-\delta$ , con mayor precisión, fiabilidad y sencillez que otros modelos reconocidos. El parámetro general de escala,  $\Omega$ , identificado como el área bajo la curva de fractura y los tres parámetros de la función de densidad de Fréchet, se estiman por optimización del ajuste al registro de la curva  $P-\delta$  del ensayo mediante un programa de Matlab específico. La idoneidad del modelo se confirma mediante su aplicación al ajuste de datos experimentales de un extenso programa de ensayos y su comparación con los resultados obtenidos con otros modelos reconocidos.

**PALABRAS CLAVE:** Curva de fractura, distribución de Fréchet, energía de fractura no medida

### ABSTRACT

In this work, the load-displacement curve  $P-\delta$ , recorded during the fracture process of concrete under 3-PB tests is identified as a statistical phenomenon, which is adequately described as a density function of the generalized extreme value distributions (GEVD) which proves to be maximal Fréchet, as a particular case of heavy tail distributions. Since the proposed analytical function fits throughout the test record, one expects that the non-measured fracture work, corresponding to the upper asymptotic tail of the fracture curve  $P-\delta$ , will be estimated with higher accurateness, reliability and easier than using other models currently recognized. The general scale parameter  $\Omega$ , identified as the area under the fracture curve, and the three parameters of the Fréchet density function are estimated by optimizing the fitting of recorded data to the experimental  $P-\delta$  curve using a specific Matlab program. The suitability of the model is confirmed after being applied to fit an extensive program of experimental data and the results being compared with those provided by other recognized models.

**KEYWORDS:** Fracture curve, Fréchet density function, Non-measured fracture energy

### 1. INTRODUCCIÓN

La estimación fiable de la energía total de fractura disipada durante el proceso de rotura del hormigón, identificada como el área bajo la curva de fractura  $P-\delta$  (o en su caso,  $P-CMOD$ ), exige un ajuste preciso de los datos de ensayo registrados, no solo en la zona pre- y postpico de la curva de fractura, sino en su cola superior asintótica, [1-5]. Debido a las limitaciones del ensayo, el registro del desplazamiento (o  $CMOD$ ) se interrumpe prematuramente antes de la rotura completa de la probeta. El área bajo esta cola marginal inaccesible, asociada a la fase terminal del proceso de fractura, representa una contribución a la energía total de fractura

no despreciable, ya que aunque los valores de la carga tienden a cero, los desplazamientos asociados alcanzan valores muy altos. Este trabajo de fractura no medido se considera como la causa principal de la dependencia de tamaño observada en la energía específica de fractura cuando el ensayo 3-PB se realiza con el método de trabajo de fractura según RILEM [6].

En el cálculo de la energía total de fractura, se emplean dos pasos diferentes complementarios. En el primero, se determina directamente el área bajo los datos registrados durante el ensayo, sin necesidad de un ajuste analítico. En el segundo, se proponen extrapolaciones de tipo exponencial o hiperbólico para predecir la cola superior asintótica [3-5]. En cualquier caso, la evaluación de la energía de fractura no es trivial. En

primer lugar, en la zona postpico aparecen irregularidades y saltos en la carga, debido a las roturas sucesivas del árido, que impiden un ajuste suave de la carga. Por otro lado, la precisión en la estimación de la energía marginal está afectada por la elección del punto inicial que se toma para la extrapolación, debido a la limitada zona disponible de la cola superior asintótica de la curva de fractura en la que se apoya la extrapolación [1]. A ello se une la dudosa adecuación de la solución analítica propuesta, exponencial o hiperbólica, que añade incertidumbre a la estimación de la energía marginal.

En este trabajo, se presenta una propuesta alternativa del ajuste que permite alcanzar una solución analítica, global y robusta de la curva de fractura, basada en consideraciones estadísticas sobre el fenómeno de fractura del hormigón, que se evidencia como un proceso continuado aleatorio de roturas locales, con tendencia asintótica. Ello sugiere un ajuste completo, pre- y postpico basado en la identificación la curva de fractura como función de densidad de una distribución generalizada de valores extremos (DGVE) de máximos. De este modo, la cola superior asintótica resulta integrada en el ajuste global, sin pérdida de continuidad con el resto de la curva.

## 2. AJUSTE ESTADÍSTICO DE LA CURVA DE FRACTURA

Los materiales cuasifrágiles, como el hormigón en masa, presentan un proceso continuado de rotura local, que progresa simultáneamente en el conjunto del volumen, en forma de microfisuración, que se va extendiendo hasta la fractura aceptada convencionalmente. En el ensayo 3-PB, bajo control de desplazamiento, este proceso sugiere la existencia de una cierta ley estadística subyacente relacionada con el avance de la microfisuración, capaz de ajustar la curva carga-desplazamiento (o carga-CMOD) de fractura, según una ley de máximos referida a las uniones más fuertes, que van cediendo en su integridad durante el proceso de fallo de acuerdo con una ley asintótica, lo que justifica una distribución de cola pesada. De esta forma, se suavizan las posibles discontinuidades o inconsistencias en el registro de datos durante el ensayo, como por ejemplo, los saltos debido a la rotura de áridos.

Para garantizar un valor independiente del tamaño de la energía específica de fractura en hormigones evitando una posible corrección, se utiliza un dispositivo “ad-hoc” para compensar el peso propio, lo que implica la finalización prematura del ensayo. El punto clave consiste en cómo estimar el trabajo residual de fractura más allá del límite del ensayo mediante extrapolación de la curva de fractura. Generalmente, se aplican funciones exponenciales o hiperbólicas para la extrapolación de la cola superior de la curva de [1,3-5], un procedimiento

no plenamente satisfactorio puesto que el ajuste se basa en los resultados registrados en una zona de la caída postpico de la curva de fractura arbitrariamente seleccionada. El punto de transición entre este ajuste por extrapolación y la parte inicial de la curva  $P-\delta$  es discrecional, mientras que el resto de datos registrados de la curva  $P-\delta$  no se incluyen en este proceso de ajuste.

Como alternativa, cabe suponer que la curva  $P-\delta$  en el hormigón, en conjunto, representa un proceso de carácter estadístico que reproduce adecuadamente la ley de las sucesivas roturas aleatorias, que se van produciendo en un alto número de unidades del material constituidas por la pasta de cemento y el árido, mediante una distribución generalizada de valores extremos (DGVE) [7]. De este modo se consigue un ajuste, no solo de la cola superior, sino de toda la curva  $P-\delta$ . El parecido entre la función de densidad (fdd) de estas distribuciones, que presenta una cola superior asintótica, y la curva de energía de fractura que surge de los ensayos, permite sustentar la hipótesis de tal soporte probabilístico inherente al proceso de fractura. Debido a la existencia de un límite inferior definido y una tendencia asintótica del límite superior, la distribución tiene que ser necesariamente de Weibull de mínimos o de Fréchet de máximos, pero la referencia a los valores máximos del desplazamiento (o, en su caso, del CMOD) determina la obligada pertenencia a una distribución de máximos y, por lo tanto de Fréchet, como única solución posible. Esta representa un caso particular de distribuciones de cola pesada, caracterizadas por una tendencia asintótica más lenta que la distribución exponencial. El valor de los parámetros estimados para la (DGVE) que optimizan el ajuste, confirman en todos los casos analizados que efectivamente se trata de distribuciones de Fréchet de máximos.

El modelo propuesto presenta las siguientes ventajas:

- Se reconoce un carácter estadístico al proceso de fractura, como distribución de valores extremos, en particular, de la función de densidad triparamétrica de Fréchet, que describe la relación entre desplazamiento y las fuerzas locales necesarias para superar la cohesión en la zona de proceso.

- La expresión analítica de la cola asintótica de la función  $P-\delta$  no es de tipo exponencial, sino que demuestra ser el producto de una función exponencial (que tiende a la unidad), por una función potencial (que tiende a cero), ver Fig. 1. Sin embargo, es la integral de esa función de densidad triparamétrica de Fréchet, es decir la función de distribución, la que resulta ser una ley exponencial representando, a una cierta escala, el trabajo de fractura que se va consumiendo durante el ensayo, siendo el factor de escala precisamente la energía total de fractura.

- La identificación del proceso a una distribución estadística permite disfrutar de las ventajas en las características del análisis del fenómeno, así como en la

interpretación física de los parámetros y de la dispersión de los resultados.

- La fiabilidad del ajuste se incrementa, máxime en la extrapolación de la cola superior no accesible, debido a que en el ajuste se incluye todo el registro del ensayo.

- La definición analítica supone un filtrado del registro que garantiza continuidad de la curva de fractura al filtrar o suavizar los posibles saltos debido a las roturas de árido, pudiendo suplir, incluso, faltas locales del registro.

### 3 AJUSTE DE LA CURVA DE FRACTURA SEGÚN EL MODELO DE FRÉCHET.

El ajuste de los datos experimentales a una curva de fractura GEV se consigue mediante la aplicación de los siguientes pasos:

#### Paso 1. Obtención y filtrado de la curva de fractura a partir del ensayo de flexión en 3 puntos.

Se registra toda la curva de fractura del hormigón  $P-\delta$  a lo largo del proceso de fractura, desde el comienzo del ensayo hasta el fallo. En ocasiones es necesario realizar un filtrado de registros anómalos que pueden aparecer como consecuencia de la fractura de los agregados, que se traducen en subidas y bajadas bruscas del registro, especialmente en la zona postpico.

#### Paso 2. Compensación de los pesos asignados a los datos de la curva de fractura $P-\delta$

Generalmente, los valores experimentales en el registro del desplazamiento (o CMOD) y de la fuerza aplicada se obtienen fijando, al inicio del ensayo, la cantidad de datos por unidad de tiempo requeridos. Esto reduce la cantidad de datos registrados en los instantes posteriores al pico máximo de carga, donde se produce una caída brusca de la carga en un periodo muy corto de tiempo.

En consecuencia, el ajuste de la curva de fractura que se obtiene puede resultar no satisfactorio, particularmente en la zona de la cola superior, lo que impide alcanzar una correcta estimación de ambas energías de fractura, medida y no medida.

Una forma de evitar este efecto indeseable sobre el ajuste, consiste en reconstruir los vectores de datos de manera que estos sigan una distribución regular igualmente espaciada en el eje de abscisas, en este caso  $\Delta\delta=0.001$  mm. De esta manera se equilibra el peso de los datos en el ajuste, reduciendo sustancialmente la densidad de los datos en la zona prepico y postpico cercana al máximo, mientras se enfatiza el peso de la zona post-pico y de la cola superior, caracterizadas por su menor pendiente.

#### Paso 3. Identificación de la curva experimental de fractura como función de densidad (fdd) escalada

A continuación, se identifica la curva de fractura con

una función de densidad perteneciente a la familia de la distribución generalizada de valores extremos (DGVE). La consideración abierta de esta función de densidad, sin juzgar a priori su posible correspondencia a la distribución de Fréchet (como caso particular de la función DGVE) garantiza una mayor objetividad en el procedimiento.

La función  $P(\delta)$  final se expresa como:

$$P(\delta) = \Omega \cdot f_{GEVD}(\delta; \lambda, \gamma, \kappa), \quad (1)$$

en la que  $f_{GEVD}(\lambda, \gamma, \kappa)$  es la DGVE caracterizada por los parámetros de localización  $\lambda$ , de escala  $\gamma$  y de forma  $\kappa$ , siendo, (ver [7]),

$$f_{GEVD}(\delta; \lambda, \gamma, \kappa) = \exp \left[ - \left( 1 - \kappa \left( \frac{\delta - \lambda}{\gamma} \right) \right)^{1/\kappa} \right] \cdot \left( 1 - \kappa \frac{\delta - \lambda}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\kappa} - 1} \cdot \frac{1}{\gamma}, \quad (2)$$

donde  $\delta \leq \lambda + \frac{\gamma}{\kappa}$ , if  $\kappa > 0$ , o  $\delta \geq \lambda + \frac{\gamma}{\kappa}$ , if  $\kappa < 0$ ,

$\Omega$  es un factor de conversión denominado “parámetro de escala del trabajo de fractura”, que tiene unidades de trabajo y que al ser multiplicado por la función DGVE (de área unidad, por definición de función de densidad) proporciona el trabajo de fractura bajo la curva  $P-\delta$ .

#### Paso 4. Estimación inicial de los parámetros DGVE.

Con el objetivo de acelerar la convergencia en el proceso de ajuste, se procede a una estimación del valor  $\Omega$ , como área medida bajo la curva  $P-\delta$  hasta el final del ensayo. A su vez, en la estimación de los parámetros  $\lambda$ ,  $\gamma$ , and  $\kappa$  se aplica el método de los percentiles [7].

#### Paso 5. Estimación final de los parámetros DGVE.

Los parámetros  $\lambda, \delta, \kappa$  y  $\Omega$  se determinan mediante la optimización del ajuste de la función  $P(\delta) = \Omega \cdot f_{GEVD}(\delta; \lambda, \gamma, \kappa)$  a los datos experimentales a la curva, empleando el método de mínimos cuadrados.

#### Paso 6. Cálculo del trabajo de fractura

El trabajo total de fractura no puede ser medido directamente como el área bajo el registro del ensayo, debido a la limitación establecida en el desplazamiento, quedando una parte del trabajo sin determinar, denominado trabajo no medido,  $W_{F.NM}$ . Sin embargo, la aplicación del modelo propuesto permite obtener directamente el trabajo total de fractura,  $W_{F.T}$ , como el valor de la integral desde  $-\infty$  a  $+\infty$  del producto del parámetro de escala del trabajo de fractura  $\Omega$ , por la función de densidad  $f_{DGVE}(\delta; \lambda, \gamma, \kappa)$ , cuya integral, por definición, es igual a la unidad, con lo cual:

$$W_{F.T} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\delta) d\delta = \int_{\lambda}^{\infty} \Omega \cdot f_{GEVD}(\delta; \lambda, \gamma, \kappa) d\delta =$$

$$\Omega \cdot \int_{\lambda}^{\infty} f_{DGVE}(\delta; \lambda, \gamma, \kappa) d\delta = \Omega. \quad (3)$$

El trabajo de fractura no medido se puede calcular directamente a partir de la expresión analítica de la función de densidad de la DGVE como la integral entre el valor límite del desplazamiento grabado en el ensayo,  $\delta_{lim}$ , hasta  $+\infty$ , es decir:

$$W_{F.NM} = \int_{\delta_{lim}}^{+\infty} \Omega \cdot f_{GEVD}(\delta; \lambda, \gamma, \kappa) d\delta. \quad (4)$$

De este modo, se pueden comparar los valores de la energía de fractura estimados aplicando el modelo propuesto, con los deducidos mediante otros métodos reconocidos en la actualidad, basados en la extrapolación de la zona postpico [1,3-5].

**Paso 7. Identificación del tipo de función de la DGVE a partir del parámetro de forma  $\kappa$**

El signo negativo del parámetro  $\kappa$  que se obtiene, sin excepción, en todos las evaluaciones analizadas, certifica la pertenencia de la curva generalizada a la familia de distribuciones de Fréchet de máximos de tres parámetros, tal y como se había anticipado en el apartado 2, permitiendo un ajuste óptimo de la curva independientemente del tipo de hormigón y su resistencia.

La función de densidad de Fréchet, dada por la ecuación:

$$f_{Frechet}(\delta; \lambda, \gamma, \beta) = \frac{\beta}{\gamma} \left[ \frac{\gamma}{\delta - \lambda} \right]^{\beta+1} \exp \left[ - \left( \frac{\gamma}{\delta - \lambda} \right)^{\beta} \right]; \quad x > \lambda, \quad (5)$$

que cumple la condición de ser un caso particular de distribución de cola pesada.

La transformación de los parámetros de la DGVE en los correspondientes a la distribución de Fréchet se realiza según las siguientes expresiones:

$$\lambda = \lambda^* + \frac{\gamma^*}{\kappa^*}; \quad \gamma = -\frac{\gamma^*}{\kappa^*}; \quad \beta = -\frac{1}{\kappa^*}, \quad (6)$$

en las que los valores de los parámetros con asterisco corresponden a la DGVE. Las expresiones (3) y (4), relativas a la ley  $P-\delta$ , siguen siendo válidas, con la única particularidad de estar ahora referidas a la función de densidad de Fréchet:

$$P(\delta) = \Omega \cdot f_{Frechet}(\delta; \lambda, \gamma, \kappa). \quad (7)$$

La expresión (5) evidencia, tal como se menciona en el apartado 2, que una extrapolación de la curva de fractura posterior al desplazamiento límite del ensayo debería realizarse como producto de una función exponencial creciente, con límite unidad, por una función potencial decreciente, una propuesta poco

evidente “a priori”, ver Fig.1.

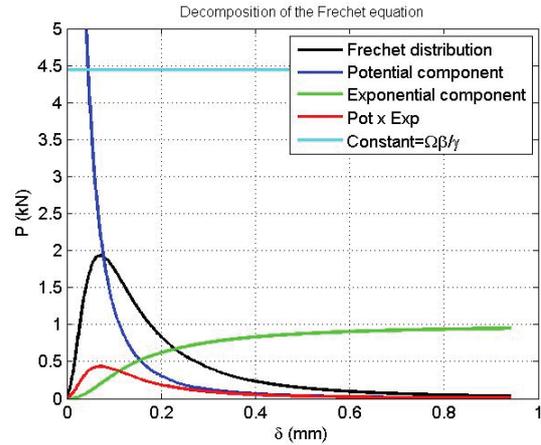


Fig. 1: Descomposición de la ecuación de ajuste procedente de la expresión (6).

**4. PROGRAMA EXPERIMENTAL**

Se presentan aquí los resultados de un extenso programa experimental realizado con seis tipos distintos de hormigones autocompactantes (HAC), designados de M1 a M6, con diferentes fracciones volumétricas de árido grueso, relación pasta-sólido y relación agua-cemento, que representan una amplia gama de resistencias entre 34 y 105 MPa. Los detalles sobre la composición de las distintas mezclas de hormigón, propiedades mecánicas y preparación se recogen en [8]. En la tabla 1 se muestran los resultados medios y el coeficiente de variación obtenidos para las propiedades mecánicas de los distintos tipos de hormigones analizados.

Tabla 1.- Resultados de las propiedades mecánicas de los HAC.

Horm.	Propiedades mecánicas		
	$f_c$ (MPa)	$f_{st}$ (MPa)	$E_c$ (GPa)
M1	34.4±2%	3.2 ±3%	30.7 ±1%
M2	42.2 ±2%	3.3 ±1%	33.9 ±7%
M3	51.4 ±2%	4.0 ±9%	35.1 ±6%
M4	79.4 ±5%	4.9 ±5%	36.9 ±4%
M5	96.8 ±4%	5.3 ±5%	42.3 ±1%
M6	105.2 ±3%	5.4 ±7%	46.0 ±2%

Para medir la energía de fractura, se llevaron a cabo ensayos de flexión a tres puntos (3-PBT) de acuerdo con el método RILEM de trabajo de fractura [6]. Para cada tipo de HAC se fabricaron cuatro probetas entalladas con una profundidad de entalla de 50 mm (relación  $a/W=0,50$ ) y 3 mm de espesor (ver Fig. 2). El desplazamiento de la apertura de la boca de la entalla (CMOD) se empleó como señal de control recursivo y simultáneamente se midió la flecha en el punto de carga por medio de un transductor de desplazamiento lineal variable (LVDT) montado sobre un marco rígido para evitar efectos torsionales parásitos en la medida del desplazamiento vertical. Los ensayos se realizaron en una máquina de ensayos de 50 kN de capacidad máxima.

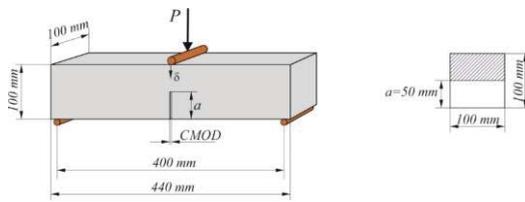


Fig. 2: Representación esquemática de la configuración del ensayo de 3-PBT.

A partir de los resultados de los registros se estiman los tres parámetros de la función de densidad de Fréchet y el factor de escala  $\Omega$  del modelo, de los que se deducen el trabajo y la energía total de fractura, así como la energía residual, no medida. Ello permite una comparación de estos valores con los correspondientes al método propuesto por Elices et al. [3-5]. Con ello, queda plenamente demostrada la aplicabilidad del modelo de Fréchet en el ajuste de las curvas de fractura.

**4.1. Determinación de la energía de fractura independiente del tamaño según el método propuesto por Elices et al.**

La energía de fractura de los hormigones se determinó mediante el método de trabajo de fractura de RILEM [6] con las correcciones propuestas por Guinea, Planas y Elices [3-5]. Mientras que el procedimiento original RILEM proporciona valores dependientes del tamaño para la energía específica de fractura del hormigón, los estudios de Guinea et al. [3-5] demostraron que ello es debido a la presencia de varias fuentes de disipación de energía en el procedimiento de ensayo, entre las que cabe destacar la energía específica de fractura no medida del hormigón, debida al truncamiento de la cola de la curva carga-desplazamiento ( $P-\delta$ ). También se pueden utilizar otros procedimientos para determinar el valor de la energía específica de fractura como el método del efecto de borde de Hu y Wittmann [9], o su versión simplificada de Abdalla y Karihaloo [10], validada por Karihaloo et al [11]. Para estimar este trabajo de fractura no medido, una vez finalizado el ensayo ( $W_{F,NM}$ ) para cargas muy bajas, es necesario

modelizar el comportamiento de la viga cuando la fisura cohesiva se aproxima a la superficie libre de la probeta [1]. En los materiales cohesivos, como el hormigón, la última fase del ensayo 3-PB se puede modelizar según el modelo cinemático como sólido rígido de Peterson [12].

De acuerdo con las relaciones dadas por el modelo de sólido rígido, la energía de fractura no medida para el ensayo 3-PB se estima según la expresión [1]:

$$W_{F,NM} = \frac{A}{\delta_u} \tag{8}$$

en la que A es el coeficiente experimental de ajuste de la cola de la curva  $P-\delta$  (también conocido como constante de la cola lejana) y  $\delta_u$  es la flecha última registrada en la probeta al final del ensayo.

Una vez determinada la energía no medida, la energía de fractura independiente del tamaño se estima de acuerdo con la expresión:

$$G_F = \frac{W_{F,M} + W_{F,NM}}{A_{lig}} = \frac{\int_0^{\delta_u} P d\delta}{B(D-a)} \tag{9}$$

donde  $A_{lig}$  es el área del ligamento a fracturar en el ensayo [1].

Como se puede observar, la cola de la curva  $P-\delta$  se ajusta entre los dos puntos finales,  $\delta_0$  y  $\delta_u$  para obtener el coeficiente, ver Fig.3.

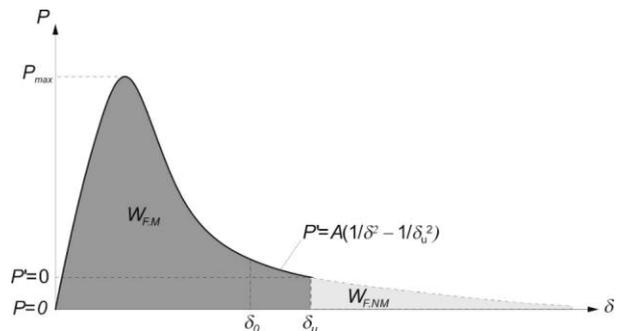


Fig. 3. Curva  $P-\delta$  en el ensayo 3-PBT con el trabajo de fractura medido ( $W_{F,M}$ ) y el no medido ( $W_{F,NM}$ ).

Como demuestran Lee y López [1], el trabajo de fractura no medido que se obtiene es sensible al valor de la constante de la cola lejana, que depende de los valores de los puntos finales  $\delta_0$  y  $\delta_u$  considerados en el ajuste. En dicha publicación se observa que una selección adecuada de los puntos finales del ensayo debe tener también en cuenta el tamaño máximo de árido con el fin de obtener un valor consistente de la energía de fractura del hormigón, independiente del tamaño.

Elices et al. [3-5] establecen como criterio general,

tomar  $\delta_0$  como el valor del desplazamiento vertical correspondiente al 5% de la carga máxima ( $P_{max}$ ) y  $\delta_u$  como la flecha última registrada en la probeta al final del ensayo.

La Tabla 2, muestra los resultados del trabajo total de fractura para los diferentes tipos de HAC considerando la corrección del ajuste de la cola de la curva  $P-\delta$ . Es importante destacar que se han supuesto diferentes valores de  $\delta_0$  para analizar la influencia del punto inicial considerado en el ajuste y por tanto sobre el trabajo no medido de fractura. De este modo, en el análisis se consideraron tres valores diferentes de  $\delta_0$  correspondientes a 7.5%, 5% y 2.5% de la carga máxima, respectivamente.  $\Delta W_{F,NM-5\%}$  representa la variación estimada del trabajo de fractura no medido relativa a la carga recomendada del 5% de la carga punta.

Como se comprueba se producen variaciones

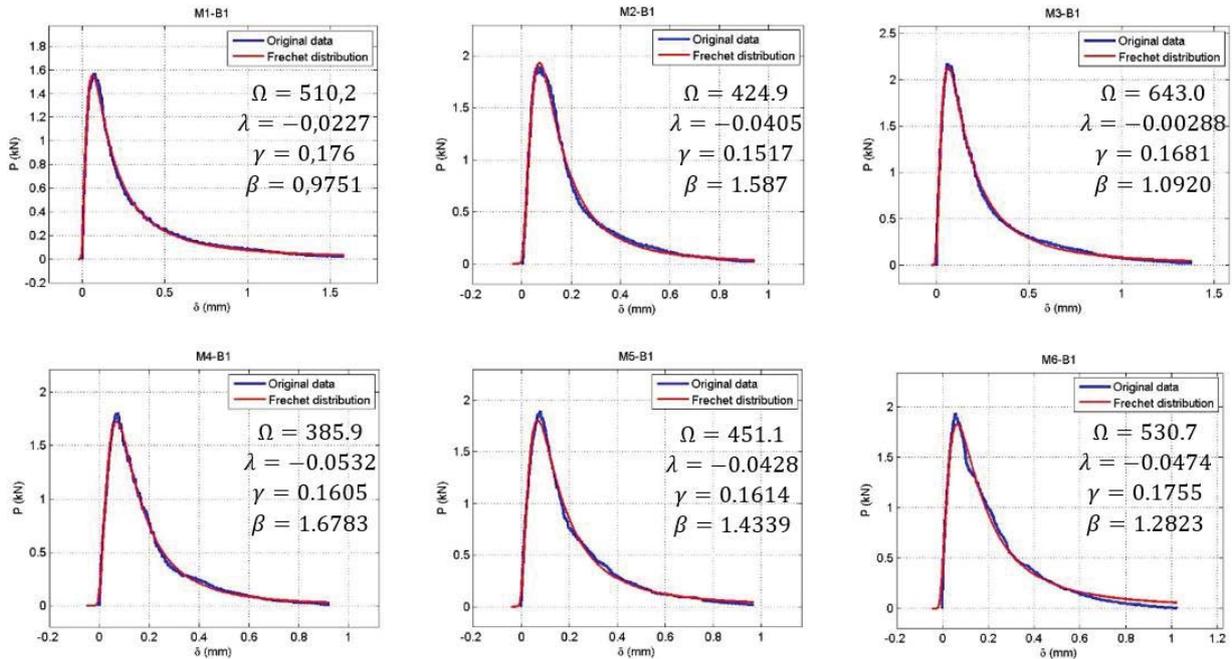


Fig. 4: Ejemplo de curvas de fractura experimental y ajuste mediante la función de densidad de Fréchet para los 6 tipos de hormigón estudiados. Las unidades de los parámetros son:  $\Omega$  [mJ],  $\lambda$  [mm] y  $\beta$  es adimensional.

Con el fin de facilitar una comparación completa entre los resultados obtenidos con el modelo de Fréchet y el método propuesto por Elices et al [3-5], en la Tabla 2, se facilitan los resultados tanto de la energía parcial de fractura que resulta bajo el área del registro del ensayo como los correspondientes al trabajo de fractura no medido y al trabajo de fractura total.

### 5. DISCUSIÓN

Los valores del trabajo de fractura  $W_{F,M}$  que resultan bajo la curva de fractura hasta el límite del ensayo, obtenidos por evaluación directa del registro y mediante la función de densidad de Fréchet, son concordantes. Por el contrario, en el trabajo de fractura no medido, o

relativamente altas según la elección de  $\delta_0$  en algunos casos.

### 4.2. Ajuste de las curva de fractura según funciones de densidad de Fréchet.

Las curvas de fractura obtenidas en el programa experimental se ajustaron según el modelo de DGVE con ayuda del programa de Matlab preparado al efecto (ver [8]). En la Fig. 4 se recoge una muestra representativa de las curvas de fractura registradas y ajustadas con el modelo de Fréchet.

La calidad del ajuste se considera altamente satisfactorio, con alguna rara excepción. Obsérvese que el modelo propuesto de Fréchet proporciona directamente el trabajo total de fractura como valor del parámetro  $\Omega$ .

residual, se observan diferencias no despreciables entre el modelo de Fréchet aplicado y el propuesto por Elices et al. [3-5]. En el primero, los resultados no dependen de la elección del desplazamiento límite, dado que se consigue un ajuste de la curva completo desde su inicio, por lo que se presume su mayor fiabilidad. Los parámetros de Fréchet obtenidos en la evaluación de resultados mantienen una razonable homogeneidad. Se observan valores bajos negativos del parámetro de localización, que se interpretan como la fase inicial de transmisión de la carga de la máquina de ensayos a la probeta, indicando que aquella no es tan simple e inmediata como simplistamente se supone, sino que exige un proceso inicial antes de que se produzca la rama ascendente de la curva de fractura. En cualquier

caso, la incidencia en el trabajo de fractura de esta etapa es despreciable.

Tabla 2.- Resultados de la energía de fractura para las probetas B1 de cada tipo de hormigón, obtenidas mediante el método de Elices et al. [3-5] y mediante el modelo propuesto por ajuste de una función de densidad de Fréchet.

Mix	Sample	MÉTODO DE ELICES ET AL			MÉTODO F.D.D. FRÉCHET		
		$\delta_0$ (% Pmax)	$W_{F,M}$ (mJ)	$W_{F,NM}$ (mJ)	$W_{F,T} =$ $W_{F,M} + W_{F,NM}$ (mJ)	$W_{F,M}$ (mJ)	$W_{F,NM}$ (mJ)
M1	B1	7.5	456	61	454.4	55.8	510.2
		5		68			
		2.5		36			
M2	B1	7.5	406	53	403.5	21.4	424.9
		5		50			
		2.5		47			
M3	B1	7.5	584	61	583.0	60.0	643.0
		5		68			
		2.5		36			
M4	B1	7.5	368	54	367.6	18.2	385.9
		5		54			
		2.5		61			
M5	B1	7.5	418	61	419.9	31.3	451.1
		5		65			
		2.5		64			
M6	B1	7.5	467	73	481	49.7	530.7
		5		72			
		2.5		72			

## 6. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se derivan de este trabajo son las siguientes:

- Se confirma que el proceso de fractura del hormigón en masa representa un fenómeno de naturaleza estadística identificable como daño micromecánico que se corresponde con una función de densidad de Fréchet de máximos, como caso particular de distribuciones de cola pesada.
- El modelo de Fréchet se aplica a los registros de ensayos 3-PB de un programa experimental que comprende una amplia variedad de hormigones con resultados altamente satisfactorios en el ajuste de toda la curva P- $\delta$ . Ello demuestra que se trata de una propuesta robusta para el cálculo de la energía de fractura de hormigones, con independencia de su composición.
- El ajuste del trabajo de fractura extrapolado, no medido durante el ensayo, se supone más fiable que el obtenido mediante otros métodos tradicionales de amplia difusión.
- Se ha desarrollado un programa Matlab para la estimación automática de los parámetros del modelo de Fréchet, de los que algunos tienen significación física, a partir de los cuales se obtiene la energía de fractura medida y la energía de fractura no medida.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo obtenido a través del Proyecto de investigación BIA2013-48352-P del Ministerio Español de Economía y Competitividad, así como del Proyecto SV-PA-11-012 y el apoyo obtenido por las Ayudas Predoctorales del Programa Severo Ochoa recibidas por el Gobierno Regional del Principado de Asturias.

## REFERENCIAS

- [1] Cifuentes H., Alcalde M., Medina F. Measuring the size-independent fracture energy of concrete. *Strain*, 49, 54–59, 2013.
- [2] Lee J., Lopez M. M. An experimental study on fracture energy of plain concrete. *Int. J. Concr. Struct. Mater.*, 8, 129–139, 2014.
- [3] Guinea G. V., Planas J., Elices M. Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 1 - Influence of experimental procedures. *Mater. Struct.*, 25, 212–218, 1992.
- [4] Planas J., Elices M., Guinea G. V. Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 2 - Influence of bulk energy dissipation. *Mater. Struct.*, 25, 305–312, 1992.

- [5] Elices M., Guinea G. V., Planas J. Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 3 - Influence of cutting the P-d tail, *Mater. Struct.*, 25, 327–334, 1992.
- [6] RILEM, TCM-85: Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. *Mater. Struct.*, 18, 287–290, 1985.
- [7] Castillo E., Hadi A.S., Balakrishnan N., Sarabia J.M. *Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science*. Wiley Series. Hoboken, N.J., 2004.
- [8] Fernández-Canteli A., Castañón-Jano L., Cifuentes H., Muñiz Calvente M., Castillo E.. Fitting the fracture curve of concrete as a density distribution function pertaining to the generalized extreme value family. Submitted to *Materials and Structures*, 2017.
- [9] Hu X.Z., Wittmann F.H., Fracture energy and fracture process zone. *Mater. Struct.*, 25, 319–326, 1992.
- [10] H.M. Abdalla, B.L. Karihaloo, Determination of size-independent specific fracture energy of concrete from three-point bend and wedge splitting tests. *Mag. Concr. Res.*, 55, 133–141, 2003.
- [11] B.L. Karihaloo, H.M. Abdalla, T. Imjai, A simple method for determining the true specific fracture energy of concrete, *Mag. Concr. Res.* 55, 471–481, 2003.