NUEVAS HERRAMIENTAS EN LA ECONOMIA: TRATAMIENTO DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACION MEDIANTE COMPUTACION SIMBOLICA

ANGEL COBO ORTEGA
Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

RESUMEN: Este artículo trata de mostrar la potencia de las nuevas herramientas de cálculo simbólico a través de un sencillo problema de optimización matemática, abordando dicho problema desde dos puntos de vista: un estudio analítico y un estudio geométrico. Para su desarrollo se ha utilizado el programa *Mathematica*, uno de los más difundidos actualmente de la ya amplia familia de sistemas de cálculo simbólico.

ABSTRACT: This article aims to show the strength of the new symbolic computation tools through an easy mathematical optimization problem, approaching the problem fron two points: analytical and geometrical study. The program "Mathematica", currently one of the most widespread of the large family of simbolic computation systems, has been used.

PALABRAS CLAVE: Symbolic computation, Optimization.

1. INTRODUCCION

La visión que se ha tenido hasta ahora de los computadores ha sido la de máquinas capaces de almacenar gran cantidad de información y de efectuar operaciones más o menos complejas a gran velocidad. En el ámbito de la Economía tienen por tanto una indudable utilidad. Pero a partir de los años 60-70 comenzó a surgir una nueva forma de concebir el uso del ordenador: el trabajo en *modo simbólico* (ver [3]). Hasta entonces el uso del computador como herramienta de cálculo se restringía al análisis y manipulación de gran cantidad de datos numéricos. Pero debe tenerse en cuenta que tanto en la Economía como en la práctica totalidad de las ciencias, el estudio de modelos involucra el manejo de constantes que no necesariamente deben llevar asignado un valor. Los paquetes informáticos de cálculo simbólico permiten realizar este tipo de manipulaciones en las que los datos no son necesariamente numéricos. Las principales características de estos sistemas son:

- Permiten el trabajo tanto con datos numéricos como simbólicos.
- Los cálculos son efectuados de forma exacta o con precisión arbitraria, la única limitación sería la impuesta por la memoria del ordenador utilizado.
- Integran las más diversas herramientas matemáticas, posibilidades gráficas,...
- Permiten un uso interactivo como si de una potente calculadora tradicional se tratase.
- Por otro lado, incorporan lenguajes de programación propios que permiten hacer uso de todos los comandos programados.
- Tienen unas indudables aplicaciones a la docencia, investigación, etc.

Todas estas características, y muchas más, hacen que estas herramientas puedan, y de hecho lo están haciendo, revolucionar la forma de trabajo tradicional en multitud de ramas de la Ciencia.

El presente artículo trata precisamente de poner de manifiesto la importancia y utilidad de uno de estos sistemas. En concreto se ha utilizado el programa *Mathematica*, uno de los más conocidos y utlizados actualmente. Surgió en 1988 pero su desarrollo está siendo continuo; actualmente la versión que se encuentra en el mercado es la 2.2, disponible sobre una gran variedad de plataformas hardware. Su distribuidor es Wolfram Research, Inc. Para más información sobre el programa así como para estudiar en profundidad sus posibilidades véase [1] y [6]. Por supuesto, *Mathematica* no es el único de estos paquetes, en [2] se hace un estudio comparativo de las posibilidades que incorporan algunos de ellos.

Como ejemplo de aplicación se ha elegido la Optimización Matemática, pero las aplicaciones en el campo de la Economía del programa *Mathematica* son innumerables. A ese respecto cabe citar el libro [5] que se dedica expresamente a exponer las posibilidades de *Mathematica* en este campo. El objetivo de la optimización: *la búsqueda de soluciones "óptimas"*, revela su importancia en el mundo moderno. La finalidad de este trabajo no es tanto el resolver un complejo problema de optimización, como el de mostrar la potencia de este tipo de herramientas informáticas.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se plantea el siguiente problema de minimización, que podría interpretarse como el de minimizar los costes de producción en el que intervienen dos factores sujetos a una restrición que obliga a utilizar cierta cantidad de ellos:

$$\begin{cases} min \quad x^2+y^2+2bxy \\ x+y=c \end{cases}$$

Donde x e y son las variables de decisión. Como puede observarse, tanto en la función de costes como en la restricción del problema intervienen constantes indeterminadas. La ventaja de la utilización de un sistema de cálculo simbólico con respecto a otro tipo de herramientas es la posibilidad de abordar este problema sin dar ningún valor de antemano a los parámetros b y c.

Una de las primeras posibilidades de *Mathematica* es la posibilidad de definir funciones:

```
In[1]:=  f[x_,y_,b_]:=x^2+y^2+2*b*x*y;
         g[x_,y_,c_]:=x+y-c;
         L[x_,y_,lambda_,b_,c_]:=f[x,y,b]+lambda*g[x,y,c]
Out[1]=
```

Se define la función de costes del problema y la que determina la restricción al imponer que sea igual a cero. Ambas funciones tienen tres argumentos, dos de ellos son las variables de decisión del problema y el tercero el respectivo parámetro. Además se define la función Lagrangiana del problema.

En la Optimización Matemática desempeñan un papel esencial los conceptos de vector gradiente y matriz Hessiana. Mathematica incorpora el comando D que permite obtener las derivadas de cualquier orden de una función de una o varias variables. Utilizando este comando pueden definirse dos nuevos comandos que calculen el vector gradiente y la matriz Hessiana de una función de varias variables:

```
In[2]:=  Grad[f_,l_]:=Table[D[f,l[[i]]],{i,1,Length[l]}]
         Hessiano[f_,l_]:=Table[  D[f,l[[i]],l[[j]]],
                {i,1,Length[l]},{j,1,Length[l]}]
Out[2]=
```

3. OBTENCION DE POSIBLES SOLUCIONES

Es conocido (ver [4]) que las posibles soluciones del problema, es decir, los puntos estacionarios, son los puntos que anulan al vector gradiente de la función Lagrangiana. Llegado este momento es cuando se puede observar en su verdadera dimensión lo que significa el poder operar simbólicamente con *Mathematica*. El comando Solve permite resolver sistemas de ecuaciones, por lo tanto para encontrar los puntos estacionarios se podría utilizar la orden

```
In[3]:=  Soluciones[b_,c_]=Simplify[
         Solve[Grad[L[x,y,lambda,b,c],{x,y,lambda}]=={0,0,0},
               {x,y,lambda}] ]
Out[3]=

{{lambda -> -((1 + b) c), x -> c/2, y -> c/2}}
```

Obsérvese el formato usual en el que *Mathematica* devuelve las soluciones. En este caso el sistema planteado solamente tenía una solución, pero lógicamente esta solución depende de los parámetros del problema. La forma de distinguir los parámetros es indicando, al utilizar la orden Solve, cuales son las verdaderas variables. El comando Simplify que también se ha utilizado sirve para simplificar al máximo los resultados.

En la orden anterior se ha definido una función que calcula los puntos estacionarios para cualquier valor de b y c, pero si se desea particularizarlo para algunos valores concretos puede hacerse de una forma muy sencilla:

```
In[4]:=  Soluciones[-1,1]
Out[4]=

{{lambda -> 0, x -> 1/2, y -> 1/2}}
```

El valor óptimo podría encontrarse de la siguiente forma:

```
In[5]:=  ValorOptimo[b_,c_]:=f[x,y,b]/.Soluciones[b,c][[1]]
         ValorOptimo[b,c]
Out[5]=
```

$c^2/2 + b\, c^2/2$

De una manera muy sencilla también puede comprobarse la interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange en el sentido de actuar como un sistema de precios, ya que miden la variación que sufre el valor óptimo para pequeñas variaciones en las restricciones. Expresado en un lenguaje matemático esto significa que para problemas de la forma:

$$\begin{cases} min \quad f(x) \\ g_i(x) = b_i \quad i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

si en el punto x^* se alcanza un óptimo, con multiplicadores de Lagrange asociados l_i para i=1,...,m; se cumple:

$$-\lambda_i = \frac{\partial f(x^*)}{\partial b_i}$$

Puede comprobarse esto en el caso planteado de la siguiente manera:

```
In[6]:=
 Simplify[D[ValorOptimo[b,c],c]+lambda/.Soluciones[b,c][[1]]]
Out[6]=
        0
```

4. ESTUDIO DE LAS CONDICIONES SUFICIENTES DE OPTIMALIDAD

Lo realizado hasta ahora ha permitido obtener los puntos estacionarios del problema. De existir solución, ésta debe ser uno de estos puntos, pero no está garantizado que todo punto estacionario sea efectivamente el óptimo búscado. El resultado que da una condición suficiente que permita garantizar la optimalidad es el siguiente teorema:

Teorema: Dado el problema

$$\begin{cases} min \quad f(x) \\ g_i(x) = 0 \quad i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

con $f, g_1, \dots, g_m$ funciones con derivadas parciales continuas hasta el orden 2. Si x^* es un punto estacionario del problema con multiplicadores de Lagrange asociados l_i que verifica la siguiente condición:

Para todo vector $p \neq 0$ tal que $\nabla g(x^*) \circ p = 0$ se cumple:

$$p^T H_x L(x^*, \lambda^*) p > 0$$

donde $H_X L$ es lo que se conoce como Hessiano restringido de la función Lagrangiana y está definido de la siguiente manera:

$$H_x L(x^*,\lambda^*) = Hf(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* Hg_i(x^*)$$

entonces x^* es un mínimo local estricto.

Volviendo al ejemplo planteado, el primer paso para analizar la optimalidad de los puntos estacionarios es construir el Hessiano restringido de la siguiente manera:

```
In[7]:=  H[x_,y_,lambda_,b_,c_]=Hessiano[f[x,y,b],{x,y}]+
           lambda*Hessiano[g[x,y,c],{x,y}]
Out[7]=
         {{2, 2 b}, {2 b, 2}}
```

La forma en la que *Mathematica* considera las matrices es como listas de listas.

Verificando las condiciones del teorema anterior

```
In[8]:=  Solve[{p1,p2}.Grad[g[x,y,c],{x,y}]==0,  {p1,p2}]
Out[8]=
Solve::svars:
  Warning: Equations may not give solutions for all
    "solve" variables.

{{p1 -> -p2}}

In[9]:=  vector=({p1,p2}/.%)[[1]]
Out[9]=
         {-p2,  p2}

In[10]:= Simplify[vector.H[x,y,lambda,b,c].vector]
Out[10]=
         4 (1 - b) p2^2
```


Se puede concluir por tanto que el problema tendrá óptimo para valores del parámetro b menores que 1.

5. ANALISIS GEOMÉTRICO

Otra de las vertientes de *Mathematica* es la de herramienta de tratamiento geométrico. A este respecto tiene definidos gran cantidad de comandos para la representación geométrica tanto bidimensional como tridimensional. En esta sección se utilizan algunos de ellos para realizar un análisis geométrico del problema de optimización planteado.

Algunos comandos de *Mathematica* se encuentran programados en paquetes externos y para poder ser utilizados han de cargarse en memoria previamente. En esta sección se usan algunos de ellos y la forma de cargarlos es:

```
In[11]:= <<Graphics`PlotField`
         <<Graphics`ImplicitPlot`
Out[11]=
```

El primero de estos paquetes permite representar en el plano campos vectoriales y como caso particular el campo que determina el vector gradiente de una función de dos variables. El segundo paquete representa curvas dadas en ecuaciones implícitas. El análisis geométrico se hará dando dos valores a los parámetros, en concreto:

$$b = -2 \qquad c = 1$$

Para el estudio geométrico de un problema de optimización con dos variables de decisión, se comienza por representar las curvas de nivel de la función de costes; es decir, las curvas cuyas ecuaciones implícitas son

$$f(x,y) = k$$

para distintos valores de k. La forma de hacerlo en *Mathematica* es

```
In[12]:= CurvasNivel=ContourPlot[f[x,y,-2],{x,0,1},{y,0,1},
              ContourShading->False,
              Contours->20]
Out[12]=
-ContourGraphics-
```

(por simplificar se omite el gráfico devuelto, aunque al final se puede ver el resultado de combinar todos ellos).

A continuación se puede representar el campo vectorial que determina el gradiente. Debe tenerse en cuenta que el vector gradiente siempre indica la dirección de crecimiento de la función de costes, de manera que para encontrar un punto mínimo se deberá seguir la dirección del gradiente pero en sentido opuesto. De manera muy similar a las curvas de nivel puede representarse el campo de gradientes de la función de costes.

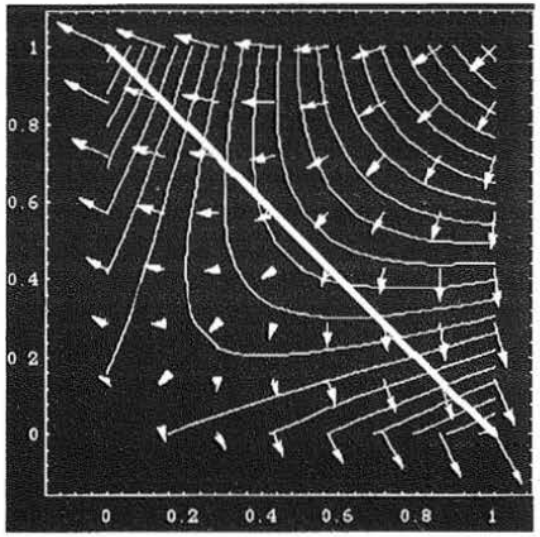
```
In[13]:= Gradientes=PlotGradientField[f[x,y,-2],
         {x,0,1},{y,0,1},PlotPoints->8]
Out[13]=
-Graphics-
```

La restricción impuesta hace que el espacio de soluciones factibles se reduzca a una curva cuya ecuación en implícitas es $g(x,y,c)=0$. La representación de esta curva se consigue de la manera siguiente

```
In[14]:= RegionFactible=ImplicitPlot[g[x,y,1]==0,
              {x,0,1},{y,0,1},
              Ticks->None,Axes->None,
              PlotStyle->{{Thickness[0.01],GrayLevel[0.3]}}]
Out[14]=
-ContourGraphics-
```

Todos los gráficos obtenidos pueden combinarse utilizando el comando Show

```
In[15]:= Show[CurvasNivel,Gradientes,RegionFactible,
              ListPlot[{x,y}/.Soluciones[-2,1],
              PlotStyle->{Thickness[0.03]}]]
Out[15]=
```

-Graphics-

6. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

Desde un punto de vista económico, los problemas con restricciones de igualdad pueden resultar menos realistas que aquellos en los que las restricciones estén dadas por desigualdades; ya que no siempre es conveniente exigir el agotamiento completo de los recursos, sino simplemente una limitación que no debe sobrepasarse.

Un planteamiento más realista del problema considerado podría ser:

$$\begin{cases} min \quad x^2+y^2+2bxy \\ x+y \le c \\ x,y \ge 0 \end{cases}$$

Hacer notar que se han añadido las restricciones de no-negatividad de las variables de decisión. Con este nuevo planteamiento la forma de obtener los puntos estacionarios cambia ligeramente. Puede demostrarse, bajo ciertas hipótesis de regularidad ([4]), que los puntos óptimos de un problema de la forma

$$\begin{cases} \min \ f(x) \\ g_i(x) \le 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

deben verificar el sistema

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,m$$

siendo $l_i \geq 0$, estos valores se conocen como multiplicadores de Kuhn-Tucker y desempeñan el mismo papel que los multiplicadores de Lagrange en los problemas con restricciones de igualdad.

Utilizando de nuevo *Mathematica* para resolver este problema, se debe comenzar por definir las funciones que determinan las nuevas restricciones, así como la nueva función Lagrangiana y a continuación resolver el sistema planteado.

```
In[16]:= g2[x_,y_]=-x;
         g3[x_,y_]=-y;
         L[x_,y_,l1_,l2_,l3_,b_,c_]=f[x,y,b]+l1*g[x,y,c]+
               l2*g2[x,y]+l3*g3[x,y];
Out[16]=

In[17]:= Estacionarios[b_,c_]=Simplify[Solve[
            {Grad[L[x,y,l1,l2,l3,b,c],{x,y}]=={0,0},
             l1*g[x,y,c]==0,l2*g2[x,y]==0,l3*g3[x,y]==0},
         {x,y,l1,l2,l3}]]
Out[17]=

{{l1 -> -((1 + b) c), l2 -> 0, l3 -> 0, x -> c/2,

  y -> c/2}, {l2 -> 0, l3 -> 0, x -> 0, y -> 0,
```



```
l1 -> 0}, {l2 -> 0, y -> 0, l3 -> 0, x -> 0,

l1 -> 0}, {l2 -> 2 (-1 + b) c, l1 -> -2 c, l3 -> 0,

y -> c, x -> 0}, {l3 -> 0, x -> 0, l2 -> 0, y -> 0,

l1 -> 0}, {l3 -> 2 (-1 + b) c, l1 -> -2 c, l2 -> 0,

x -> c, y -> 0}, {x -> 0, y -> 0, l2 -> 0, l3 -> 0,

l1 -> 0}}
```

Obsérvese de nuevo como las soluciones dependen de los parámetros del problema. No obstante, algunas de estas soluciones deben eliminarse, bien porque los multiplicadores asociados son negativos o bien porque no cumplen las restricciones del problema. A continuación se hace esta selección en el caso particular $b=-2$ y $c=1$, mediante un ciclo con el comando For

```
In[18]:= Soluciones=Estacionarios[-2,1]
Out[18]=

{{l1 -> 1, l2 -> 0, l3 -> 0, x -> 1/2, y -> 1/1},

 {l2 -> 0, l3 -> 0, x -> 0, y -> 0, l1 -> 0},

 {l2 -> 0, y -> 0, l3 -> 0, x -> 0, l1 -> 0},

 {l2 -> -6, l1 -> -2, l3 -> 0, y -> 1, x -> 0},

 {l3 -> 0, x -> 0, l2 -> 0, y -> 0, l1 -> 0},

 {l3 -> -6, l1 -> -2, l2 -> 0, x -> 1, y -> 0},
```

```
{x -> 0, y -> 0, l2 -> 0, l3 -> 0, l1 -> 0}}

In[19]:= For[i=1; Factibles={} ,
              i<Length[Soluciones],
              i++,
              regla=Soluciones[[i]];
              c1=g[x,y,1]/.regla;
              c2=g2[x,y]/.regla;
              c3=g3[x,y]/.regla;
              c4=l1/.regla;
              c5=l2/.regla;
              c6=l3/.regla;
              If[c1<=0 && c2<=0 && c3<=0 && c4>=0 && c5>=0
              && c6>=0,
     Factibles=Prepend[Factibles,regla] ] ]
     Factibles

Out[19]=
     {{l3 -> 0, x -> 0, l2 -> 0, y -> 0, l1 -> 0},

     {l2 -> 0, y -> 0, l3 -> 0, x -> 0, l1 -> 0},

     {l2 -> 0, l3 -> 0, x -> 0, y -> 0, l1 -> 0},

     {l1 -> 1, l2 -> 0, l3 -> 0, x -> 1/2, y -> 1/2}}
```

Puede observarse, por tanto, que los únicos posibles óptimos serían los puntos (0,0) y (1/2,1/2).

6.1. ANALISIS GEOMÉTRICO

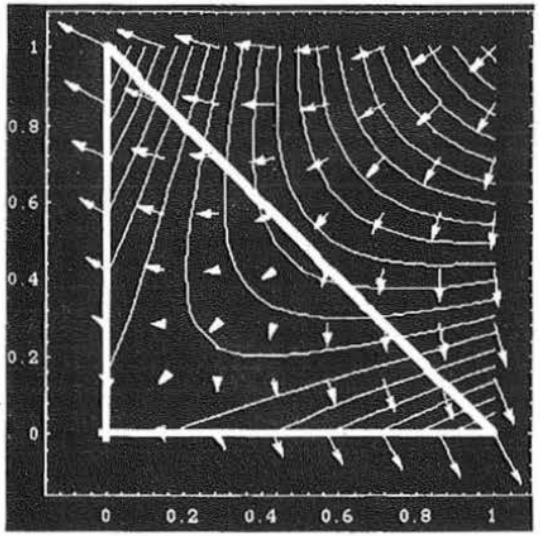
Para distinguir si realmente los puntos obtenidos son óptimos, se puede recurrir a un análisis geométrico. Lo único que cambiará con respecto al problema con restricción de igualdad es el espacio de soluciones factibles. Para representar este espacio puede recurrirse a un nuevo comando gráfico de *Mathematica* como es DensityPlot.

```
In[20]:= RF[x_,y_]=If[(g[x,y,1]<=0)&&(g2[x,y]<=0)
           &&(g3[x,y]<=0), 1,0];
         w[z_]=If[z==1,GrayLevel[0.5],GrayLevel[1]];
         RegionFactible=DensityPlot[RF[x,y],
              {x,0,1},{y,0,1}, Mesh->False,PlotPoints->50,
              ColorFunction->w]
Out[20]=
-DensityGraphics-
```

y combiando de nuevo todos los gráficos se obtendría

```
In[21]:= Frontera=ImplicitPlot[{g[x,y,1]==0,g2[x,y]==0,
                      g3[x,y]==0},
                         {x,-0.01,1},{y,-0.01,1},
            Ticks->None,Axes->None,
            PlotStyle->{{Thickness[0.015],GrayLevel[0.3]}}]
         PuntosEstacionarios=ListPlot[{x,y}/.Factibles,
            PlotStyle->{Thickness[0.04]}]
         Show[RegionFactible,Frontera,CurvasNivel,
            Gradientes,PuntosEstacionarios]

Out[21]=
```



-Graphics-

A la vista del gráfico obtenido, puede concluirse que de nuevo el valor mínimo se obtendría sobre el punto (1/2,1/2).

7. CONCLUSIONES

Lo que se ha pretendido con este trabajo es mostrar algunas de las posibilidades del programa *Mathematica* a través de un ejemplo muy sencillo de Optimización, esperando que sirva de punto de partida para quienes deseen profundizar en el campo de la Computación Simbólica o simplemente usar este tipo de herramientas para facilitar su trabajo cotidiano.

8. BIBLIOGRAFIA

[1] E. CASTILLO, A. IGLESIAS, J.M. GUTIÉRREZ, E, ALVAREZ Y A. COBO. *"Mathematica"*. Ed. Paraninfo, 1993.

[2] D. HARPER, C. WOOFF Y D. HODGKINSON. *"A Guide to Computer Algebra Systems"*. John Wiley & Sons, 1991.

[3] J.A. VAN HULZEN Y J. CALMET. *"Computer Algebra Systems"*. Computing, Suppl. 4, 221-243 (1982).

[4] MICHAEL D. INTRILIGATOR. *"Optimización matemática y teoría económica"*. Prentice-Hall International, 1973.

[5] HAL R. VARIAN (Editor). *"Economic and Financial Modeling with Mathematica"*. Springer-Verlag, 1993.

[6] STEPHEN WOLFRAM. *"Mathematica. A system for doing Mathematics by Computer"*. Addison-Wesley, 1991.

[7] WOLFRAM RESEARCH. *"Guide to Standard Mathematica Packages"*. Technical Report, 1993.