

# ESTIMADOR COMPETITIVO DE BAJO COSTE COMPUTACIONAL PARA DECONVOLUCIÓN DISPERSA

Javier Vía Rodríguez, David J.P. Blanco, Ignacio Santamaría y Carlos Pantaleón Prieto  
Departamento de Ingeniería de Comunicaciones  
Universidad de Cantabria  
e-mail: jvia@gtas.dicom.unican.es

**Abstract**— This paper presents an efficient algorithm for computing the *maximum a posteriori* (MAP) estimate of a Bernoulli-Gaussian sequence distorted by a linear filter and corrupted by noise. The computational effort for the MAP estimator increases exponentially with the number of samples and is generally unfeasible. The approach used by Kormylo and Mendel in their pioneering work on the *Single Most-Likely Replacement* algorithm (SMLR) has been the sub-optimal reference to evaluate the efficiency of this new estimation method in computational effort and detection probability. This algorithm reduces drastically the SMLR computational load and allows real-time processing, because only few samples of the observation data are required by employing a windowing strategy. An extensive Monte Carlo analysis, using synthetic data, has been performed to compare the behaviour of the proposed estimators.

## I. INTRODUCCIÓN

La estimación de señales dispersas a partir de registros de datos filtrados linealmente y contaminados por ruido [1] resulta de gran utilidad en aplicaciones de procesamiento de fenómenos naturales [2], tales como la sismología [3], los ultrasonidos médicos, ecografías, radar, sonar, procesamiento de voz, restauración de imágenes astronómicas, o la evaluación ultrasonica no destructiva de materiales.

Este tipo de fenómenos proporcionan unas señales dispersas con un alto grado de solapamiento. La consecuencia más significativa es que la detección sólo se puede llevar a cabo empleando información *a priori* sobre la señal a estimar. Los métodos lineales, tales como el filtro de Wiener o el filtro adaptado, no resultan apropiados. Algunas de las técnicas utilizadas para resolver el problema incluyen la extracción de picos uno a uno, los métodos Bayesianos, Viterbi, deconvolución  $L_p$ , o el algoritmo SMLR.

En este trabajo la señal dispersa se modela como una secuencia Bernoulli-Gaussiana, el ruido es aditivo blanco Gaussiano (AWGN), se suponen conocidos tanto el filtro como los parámetros estadísticos del problema, y se plantea la reconstrucción de la señal a partir del estimador MAP.

Esta perspectiva ofrece muy buenos resultados en este tipo de problemas, sin embargo, su alto coste computacional obliga a trabajar con algoritmos subóptimos. De los algoritmos desarrollados con esta finalidad, el SMLR [1] es el más extendido. En este artículo se analiza el comportamiento del mismo y se plantea como el referente subóptimo de estimación.

El algoritmo propuesto se basa en el inventariado del registro de datos y la comparación [4], dentro de cada ventana, de todas las posibles secuencias de Bernoulli. Este método aprovecha la ventaja que supone la utilización de un filtro de longitud finita para procesar el registro de observaciones en fragmentos cuya longitud permita abordar el problema de forma análoga a la solución óptima. Al igual que en el caso óptimo, el objetivo es seleccionar la hipótesis más verosímil de entre todas las posibles, en este caso limitando el número de comparaciones y desplazando la ventana de estimación hasta completar el registro. Por una parte, este método permite procesar la información en tiempo real, puesto que no es necesario contar con todo el registro para iniciar la estima; y por otra, la carga computacional se reduce drásticamente superando en rendimiento al referente SMLR.

La longitud de la ventana es un parámetro decisivo tanto para fijar la fiabilidad del método, como para acotar el tiempo de ejecución. Si bien el método converge al óptimo conforme el tamaño de la ventana aumenta, el esfuerzo computacional crece exponencialmente, por lo que se hace necesario establecer un compromiso entre el tiempo disponible para efectuar la deconvolución y la degradación frente a la solución óptima.

En la Sección II se presenta el modelo matemático y la notación empleada; en la III se obtiene el estimador óptimo siguiendo el criterio MAP; la Sección IV analiza el estimador SMLR y en la V se propone el algoritmo competitivo de baja carga computacional para la estimación de señales dispersas. Finalmente, la Sección VI analiza el rendimiento de los distintos estimadores, presentándose las conclusiones alcanzadas y las líneas futuras de trabajo en la Sección VII.

## II. MODELO DE SEÑAL

El modelo convolucional en tiempo discreto es

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] + e[n], \quad (1)$$

donde  $z[n]$  son las observaciones,  $h[n]$  la forma de onda transmitida o modelo adoptado para el canal,  $x[n]$  una entrada desconocida, y  $e[n]$  representa el ruido blanco y Gaussiano (AWGN), de media cero y varianza  $v_e$  presente en las medidas. Se considera una señal de entrada blanca con distribución

Bernouilli-Gaussiana

$$x[n] = r[n]q[n], \quad (2)$$

donde  $r[n]$  es una secuencia blanca y Gaussiana, de media cero y varianza  $v_r$ , y  $q[n]$  es una secuencia de Bernouilli con probabilidad  $\lambda$

$$\Pr\{q[n]\} = \begin{cases} 1 - \lambda, & q[n] = 0; \\ \lambda, & q[n] = 1. \end{cases} \quad (3)$$

En base a los parámetros  $v_e$ ,  $v_r$  y  $\lambda$  se define la relación señal a ruido (SNR) como

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{\lambda v_r}{v_e}. \quad (4)$$

La expresión matricial de la ecuación (1), para vectores de  $N$  muestras es

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{r} + \mathbf{e}, \quad (5)$$

siendo

$$\mathbf{z} = [z[0], z[1], \dots, z[N-1]]^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{e} = [e[0], e[1], \dots, e[N-1]]^T, \quad (7)$$

$$\mathbf{r} = [r[0], r[1], \dots, r[N-1]]^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{q} = [q[0], q[1], \dots, q[N-1]]^T, \quad (9)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & \dots & h[0] \end{bmatrix}, \quad (10)$$

y

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q[0] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q[1] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & q[N-1] \end{bmatrix}. \quad (11)$$

### III. ESTIMADOR MAP

El proceso de deconvolución consistirá en estimar la secuencia  $x[n]$  a partir de  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{H}$ . De acuerdo con [1], en primer lugar se realizará la detección de la secuencia  $\mathbf{q}$  y posteriormente se estimará el vector  $\mathbf{r}$ , así

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{q}} \Pr(\mathbf{q}|\mathbf{z}, \mathbf{H}), \quad (12)$$

donde  $\Pr(\mathbf{q}|\mathbf{z}, \mathbf{H})$  hace referencia a la probabilidad de  $\mathbf{q}$  condicionada al suceso  $\mathbf{z}$  y al conocimiento de la matriz  $\mathbf{H}$ . El detector MAP, por tanto, buscará la secuencia  $\mathbf{q}$  que maximice dicha probabilidad. Aplicando el teorema de Bayes se llega a

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{q}} \{f(\mathbf{z}|\mathbf{q}, \mathbf{H})\Pr(\mathbf{q})\}, \quad (13)$$

y teniendo en cuenta que una vez fijado  $\mathbf{q}$ , el vector  $\mathbf{z}$  es Gaussiano, se obtiene

$$f(\mathbf{z}|\mathbf{q}, \mathbf{H}) = (2\pi)^{-N/2} |\boldsymbol{\Omega}|^{-1/2} \exp\{-\mathbf{z}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{z} / 2\}, \quad (14)$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}$  es la matriz de covarianza del vector  $\mathbf{z}$  condicionada a  $\mathbf{q}$

$$\boldsymbol{\Omega} = E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T|\mathbf{q}\} = v_r \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T + v_e \mathbf{I}, \quad (15)$$

siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad de  $N \times N$ .

La probabilidad a priori de la secuencia  $\mathbf{q}$  se puede escribir como

$$\Pr(\mathbf{q}) = \lambda^{m(\mathbf{q})} (1 - \lambda)^{N - m(\mathbf{q})}, \quad (16)$$

siendo

$$m(\mathbf{q}) = \sum_{k=0}^{N-1} q[k], \quad (17)$$

por lo que tras multiplicar y tomar logaritmos se llega a la función de log-verosimilitud a maximizar

$$\ln[f(\mathbf{q}, \mathbf{z}|\mathbf{H})] = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{\mathbf{z}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{z}}{2} - \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Omega}| + m(\mathbf{q}) \ln(\lambda) + [N - m(\mathbf{q})] \ln(1 - \lambda). \quad (18)$$

Una vez obtenido un determinado vector  $\mathbf{q}$ , la estima del vector  $\mathbf{r}$  óptimo siguiendo el criterio MAP se reduce a un problema lineal [5], cuya solución es

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{MAP}}^{\mathbf{q}} = v_r (v_e \mathbf{I} + v_r \mathbf{Q}\mathbf{H}^T \mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{H}^T \mathbf{z}. \quad (19)$$

Sin embargo, la detección del vector  $\mathbf{q}$  que maximiza (18) requiere la exploración de los  $2^N$  posibles valores de  $\mathbf{q}$ . El alto coste computacional que esta búsqueda implica hace que la aplicación del detector óptimo sobre secuencias de datos reales resulte imposible, debiendo recurrir a detectores subóptimos.

### IV. ESTIMADOR SMLR

El estimador SMLR [1] es el algoritmo subóptimo más comúnmente utilizado en la deconvolución de señales dispersas. Este algoritmo requiere una secuencia de Bernouilli de referencia, y consta de las siguientes etapas:

- 1) **Inicialización:** Se fija  $k = 1$  y se parte de la secuencia de referencia  $\hat{\mathbf{q}}_0$ .
- 2) **Evaluación:** Se calcula la diferencia de log-verosimilitud entre la secuencia actual  $\hat{\mathbf{q}}_{k-1}$  y los  $N$  vectores  $\mathbf{q}_k$  que difieren en una única componente (distancia de Hamming igual a 1) de dicha secuencia. En [5] se muestra cómo se puede calcular esta diferencia sin tener que recurrir a (18).
- 3) **Decisión:** Se toma como  $\hat{\mathbf{q}}_k$  el vector que proporcione un valor más alto de log-verosimilitud.
- 4) **Iteración:** Si  $\hat{\mathbf{q}}_k \neq \hat{\mathbf{q}}_{k-1}$  se fija  $k = k + 1$  y se vuelve a la segunda etapa del algoritmo.
- 5) **Estimación:** Finalmente se utiliza la secuencia detectada para obtener  $\hat{\mathbf{r}}$  aplicando (19).

El algoritmo SMLR reduce el número de secuencias a comparar desde las  $2^N$  del algoritmo óptimo hasta aproximadamente  $KN$ , donde  $K$  es el número de iteraciones necesarias para alcanzar el máximo local que da lugar a la finalización del algoritmo. Dicho número de iteraciones depende del método escogido para hallar la secuencia de referencia y de la SNR con que se trabaje.

## V. ESTIMADOR COMPETITIVO

El estimador propuesto trata de aprovechar la ventaja que supone la utilización de filtros de longitud finita  $M$ . Para ello procesa el vector de observaciones mediante ventanas de longitud  $L$ , definiendo el registro de observaciones enventanado,

$$\mathbf{z}_v = [z[k], z[k+1], \dots, z[k+L-1]]^T, \quad (20)$$

y trabajando con los vectores  $\mathbf{q}_v$  y  $\mathbf{r}_v$  de longitud  $L$ . La estimación se lleva a cabo mediante el siguiente algoritmo:

- 1) **Inicialización:** Se inicializa el parámetro  $k$  de desplazamiento de la ventana al valor  $k = 0$ .
- 2) **Enventanado:** Se forma el vector enventanado de observaciones  $\mathbf{z}_v$  a partir de las  $L$  observaciones correspondientes.
- 3) **Evaluación:** Se evalúa (18) para  $\mathbf{z}_v$  con los  $2^L$  posibles valores del vector  $\mathbf{q}_v$ .
- 4) **Decisión:** Se fija el vector  $\hat{\mathbf{q}}_v$  que maximiza la log-verosimilitud y se calcula  $\hat{\mathbf{r}}_v$  mediante (19).
- 5) **Estima:** Se fijan las componentes  $\hat{q}[k] = \hat{q}_v[0]$  y  $\hat{r}[k] = \hat{\mathbf{r}}_v[0]$ .
- 6) **Modificación:** Se modifica el vector de observaciones para tener en cuenta las decisiones ya tomadas

$$z[k+l] = z[k+l] - \hat{q}[k]\hat{r}[k]h[l], \quad (21)$$

con  $l = 0, 1, \dots, M-1$ .

- 7) **Iteración:** Se fija  $k = k+1$  y se vuelve al segundo paso del algoritmo hasta llegar al final del registro de datos.

Dado que se va a trabajar con filtros conocidos de longitud  $M$ , el algoritmo propuesto supone que las  $M-1$  últimas observaciones se deben al efecto del filtrado y, en consecuencia, fija a cero las  $M-1$  últimas componentes del vector  $\hat{\mathbf{q}}$ . Esto implica que, a medida que la ventana comienza a considerar las  $M-1$  observaciones finales, el número de posibles valores del vector  $\mathbf{q}_v$  se reduce a  $2^{P-k}$ , con  $P = N - M + 1$ .

En la estima de los  $P$  valores desconocidos del vector  $\mathbf{q}$ , el algoritmo propuesto requerirá aproximadamente  $P2^L$  comparaciones, lo cual supone una mejora frente a las  $2^P$  del estimador óptimo. Asimismo, al trabajar con vectores de longitud  $L$ , se consigue reemplazar la inversión de matrices de  $N \times N$  por la de matrices de orden  $L \times L$ , las cuales se repiten en cada iteración del algoritmo, por lo que bastará con calcularlas una sola vez y almacenarlas en memoria. El resultado es una gran reducción en el coste computacional con respecto a los estimadores óptimo y SMLR.

## VI. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Las simulaciones realizadas pueden dividirse en dos grupos. En todas ellas se ha trabajado con  $\lambda = 0.15$  y se ha obtenido la secuencia de referencia, empleada por el estimador SMLR, mediante el filtrado inverso del vector de observaciones y la detección muestra a muestra.

El primer conjunto de simulaciones se encarga de evaluar el comportamiento de los estimadores subóptimos respecto al estimador óptimo, para lo cual se hace necesario trabajar con registros de datos muy cortos. En concreto se han empleado los parámetros  $N = 15$  y  $M = 8$ , teniendo el filtro la siguiente respuesta al impulso:

$$\mathbf{h} = [0.6752, -0.5236, 0.3119, -0.0958, -0.0825, 0.1989, -0.2474, 0.2364]. \quad (22)$$

La Figura 1 muestra las probabilidades de error en la detección de la secuencia de Bernoulli para los distintos métodos, pudiendo observarse que los algoritmos subóptimos ofrecen resultados muy cercanos a los del detector óptimo. Este mismo resultado queda recogido en la Tabla I, la cual compara el estimador propuesto con el óptimo en términos de degradación en SNR.

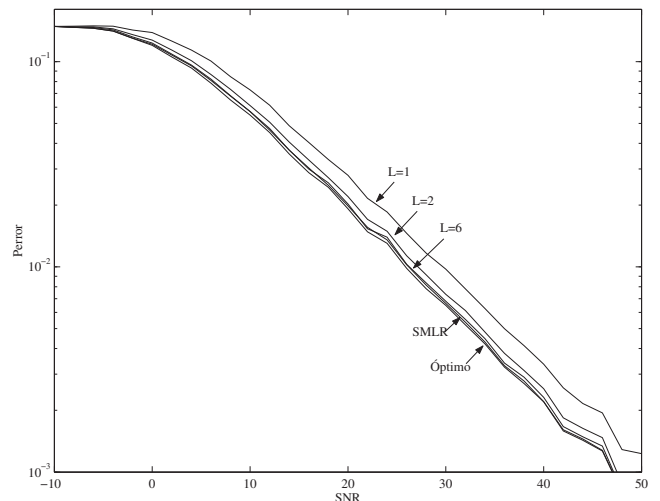


Fig. 1. Probabilidad de error de detección de los métodos óptimo, SMLR y competitivo con  $N = 15$ ,  $M = 8$  y  $\lambda = 0.15$ .

TABLE I  
TIEMPO MEDIO DE EJECUCIÓN DE LOS ALGORITMOS PARA SECUENCIAS DE LONGITUD  $N = 15$

Método	Tiempo de ejecución	Velocidad relativa	Degradación en SNR
Óptimo	246,39 ms	1	0,0 dB
$L = 6$	48,82 ms	5	0,5 dB
$L = 4$	15,66 ms	16	0,7 dB
$L = 2$	5,79 ms	43	1,3 dB
$L = 1$	3,52 ms	70	3,6 dB

En las simulaciones con señales análogas a las reales se han empleado secuencias de  $N = 300$  observaciones y un filtro ARMA de orden cuatro (limitado a sus  $M = 50$  primeras muestras) definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
 y[n] = & -0.76286x[n] + 1.5884x[n-1] - 0.82356x[n-2] \\
 & + 0.000222419x[n-3] + 2.2633y[n-1] \\
 & - 1.7734y[n-2] + 0.49803y[n-3] \\
 & - 0.045546y[n-4].
 \end{aligned} \tag{23}$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 2, donde se puede apreciar que el algoritmo propuesto ofrece unos resultados muy cercanos a los del SMLR. La Figura 3 muestra el resultado del proceso de deconvolución, en ella se han marcado mediante barras los valores reales de la secuencia Bernoulli-Gaussiana, círculos para los valores obtenidos con el estimador SMLR y aspás para los calculados con el estimador propuesto utilizando una longitud de ventana  $L = 6$ .

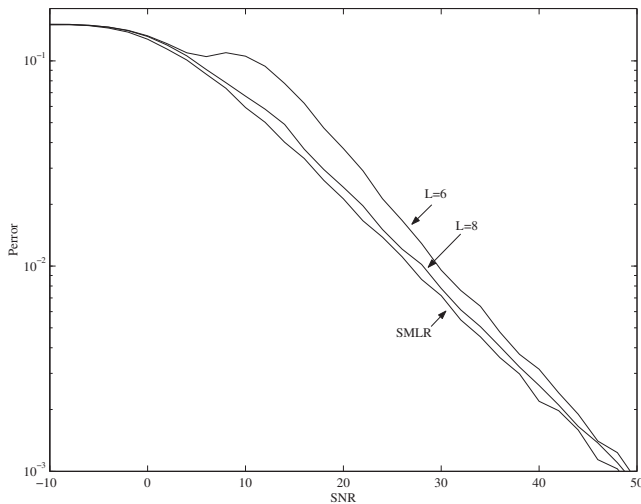


Fig. 2. Probabilidad de error de detección de los métodos SMLR y competitivo con  $N = 300$ ,  $M = 50$  y  $\lambda = 0.15$ .

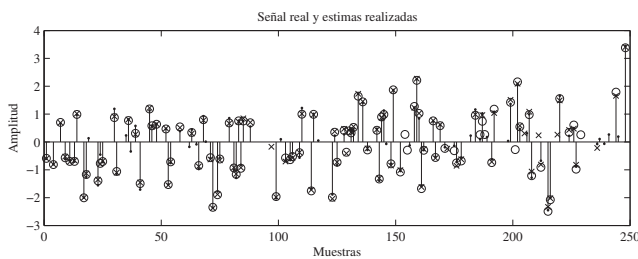


Fig. 3. Estimaciones con  $\text{SNR} = 30\text{dB}$ . Las barras indican las amplitudes reales, los círculos la estimación SMLR y las aspás la estimación competitiva.

Finalmente, las simulaciones con  $N = 300$  y  $M = 50$  han permitido comparar el algoritmo competitivo con el estimador

SMLR en términos de coste computacional, los resultados de dicha comparación quedan recogidos en la Tabla II, la cual refleja la necesidad de alcanzar un compromiso entre la degradación en SNR del estimador y su coste computacional a través del parámetro  $L$ .

TABLE II  
TIEMPO MEDIO DE EJECUCIÓN DE LOS ALGORITMOS PARA SECUENCIAS DE LONGITUD  $N = 300$

Método	Tiempo de ejecución	Velocidad relativa	Degradación en SNR
SMLR	75,00 s	1	0,0 dB
$L = 8$	2,35 s	32	1,1 dB
$L = 6$	0,80 s	94	3,4 dB

## VII. CONCLUSIONES

El método de estimación presentado es un método secuencial que converge hacia el estimador óptimo a medida que se aumenta la longitud de la ventana. Su principal ventaja radica en el reducido coste computacional respecto al estimador SMLR, ofreciendo unos resultados muy similares a los de éste. Por otra parte, el algoritmo competitivo puede comenzar a trabajar sin disponer de la totalidad del registro de observaciones, por lo que permite el procesamiento de señales en tiempo real.

Entre las líneas futuras de investigación se puede citar la utilización de algoritmos subóptimos en cada ventana con el objetivo de ampliar la longitud de ésta sin aumentar excesivamente el coste computacional; asimismo se desarrollarán métodos que permitan realizar estimaciones fiables de la respuesta del canal y de los diversos parámetros involucrados en el problema planteado ( $\lambda$ ,  $v_r$  y  $v_e$ ) que, en este estudio, se han asumido conocidos.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado a través del proyecto TIC2001-0751-C04-03 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

## REFERENCIAS

- [1] J. Kormylo and J.M. Mendel, "Maximum-Likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes", *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. IT-28, pp. 482-488, 1982.
- [2] Kjetil F. Kaareen, "Evaluation and Applications of the Iterated Window Maximization Method for Sparse Deconvolution", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, no. 3, March 1998.
- [3] J. M. Mendel, *Optimal Seismic Deconvolution: An Estimation-Based Approach*. New York: Academic, 1983.
- [4] D. Luengo, C. Pantaleón, I. Santamaría, L. Vielva and J. Ibáñez, "Multiple Composite Hypothesis Testing: A Competitive Approach" aceptado para publicación en *J. VLSI*, 2003.
- [5] J.M. Mendel, "Maximum-Likelihood Deconvolution", Springer Verlag, New York, 1990.
- [6] Kjetil F. Kaareen, "Deconvolution of Sparse Spike Trains by Iterated Window Maximization", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 5, pp. 1173-1183, May 1997.