

EXPRESIONES CERRADAS DE CAPACIDAD DE SISTEMAS MIMO 2X2 EN CANALES ARBITRARIOS

Jesús Pérez, Jesús Ibáñez, Luis Vielva, Ignacio Santamaría
Departamento de Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Cantabria
e-mail: jperez@gtas.dicom.unican.es

Abstract— Recent works have shown the potential performance MIMO systems based on dual-polarized antennas at transmitter and receiver. These works assume Rayleigh or Ricean channel models. In this paper we provide closed-form expressions of the ergodic capacity for arbitrary channels, being the Rayleigh and Ricean two particular cases. These expressions are function of the specific physical characteristics of the propagation environment and antennas, therefore they directly connect the ergodic capacity with the physical characteristics of the MIMO channel.

I. INTRODUCCIÓN

Para explotar los beneficios potenciales de los sistemas MIMO (multiple-input multiple-output) convencionales, las antenas deben estar suficientemente separadas para garantizar baja correlación entre las señales recibidas. Pero en entornos pico- y micro-celulares el espacio disponible para las antenas suele ser limitado. Una alternativa simple y compacta consiste en utilizar una antena con polarización dual en el transmisor y el receptor. De esta forma se consigue un sistema MIMO 2x2 utilizando las polarizaciones ortogonales de las antenas. Trabajos recientes han mostrado las prestaciones potenciales de esta configuración en canales Rayleigh y Rice [1], [2], [3]. El objetivo de este trabajo es obtener expresiones de la capacidad ergódica de estos sistemas en canales arbitrarios.

En la sección II se presenta un modelado general del canal MIMO que incluye, como casos particulares, los canales Rayleigh y Rice. En la sección III se deducen expresiones cerradas aproximadas de la capacidad ergódica en función de las características específicas del canal MIMO. Finalmente, la sección IV presenta resultados de capacidad para diferentes tipos de canales

II. MODELADO DEL CANAL MIMO

El canal se supone plano en toda la banda frecuencial y estacionario durante el tiempo de transmisión de una trama. Bajo estas condiciones el equivalente banda-base de la matriz del canal MIMO puede expresarse como

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

donde los elementos de la diagonal de H corresponden a la transmisión y recepción con la misma polarización, mientras que los elementos de la anti-diagonal corresponden a transmisión y recepción utilizando polarizaciones diferentes.

Cada elemento de la matriz H se modela como la superposición de un conjunto de componentes multi-camino:

$$h_{ij} = \sum_{n=1}^N V_n^{ij} \exp(j\phi_n), \quad V_n^{ij} = \vec{E}_n^j \cdot \vec{a}_n^i, \quad (2)$$

donde N es el número de ondas que llegan a la antena receptora, \vec{E}_n^j es el campo eléctrico a la entrada de la antena receptora debido a la onda n -ésima cuando la antena transmisora transmite con la polarización j , \vec{a}_n^i es el vector de polarización [4] de la antena receptora, en la dirección de propagación de la onda n -ésima, cuando la antena recibe con la polarización i . Por tanto, los términos V_n^{ij} son valores complejos que dependen directamente de los diagramas de radiación y características de polarización de las antenas, y de las características físicas del canal a través de las reflexiones, difracciones y scattering de las ondas en el entorno de propagación. En la práctica, los términos V_n^{ij} pueden obtenerse directamente de medidas o a partir de herramientas deterministas de propagación [5], [6], [7], [8], [9]. De acuerdo con [10], [11], las fases de las componentes multi-camino ϕ_n se modelan como variables aleatorias uniformes e incorreladas, cada una de ellas asociada a cada una de las N ondas que llegan al receptor. De esta forma es posible modelar cualquier tipo de canal con propagación multi-camino en función de los términos V_n^{ij} , siendo los canales Rayleigh o Rice dos casos particulares. Por ejemplo, el canal se comporta como Rayleigh cuando el número de ondas que llegan al receptor (N) es grande y la amplitud máxima de los términos V_n^{ij} es mucho menor que la suma de las amplitudes [10]. Otras características del canal MIMO como la correlación potencial entre los términos, el cruce entre las polarizaciones introducido por el entorno de propagación, las pérdidas de propagación, etc., están determinadas implícitamente por los términos V_n^{ij} y se pueden calcular a partir de ellos.

A. Normalización del canal

El modelo de propagación predice tanto los desvanecimientos a gran escala como a pequeña escala. En general, la capacidad será mayor en localizaciones del receptor con mayor potencia promedio recibida. Con el fin de analizar sólo los efectos de los desvanecimientos a pequeña escala, el

canal es normalizado eliminando las pérdidas de propagación promedio. Así, para cada realización del canal, la matriz normalizada será

$$H_{\text{norm}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha = E \left[\frac{\|H\|_F^2}{4} \right] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^N |V_n^{ij}|^2 \quad (3)$$

donde α representa las pérdidas de propagación promedio, $\|H\|_F^2$ es el cuadrado de la norma Frobenius de las realizaciones de la matriz del canal y $E[\cdot]$ es el operador esperanza matemática. Es importante tener en cuenta que las pérdidas de propagación promedio se obtienen directamente, y de forma determinista, a partir de los coeficientes V_n^{ij} . Después de la normalización, la potencia promedio recibida, para cada canal de polarización, será igual a la potencia total transmitida.

B. Coeficientes de correlación

La matriz de correlación del canal MIMO también se puede obtener directamente a partir de los coeficientes multi-camino:

$$R = E \begin{bmatrix} h_{11}h_{11}^* & h_{12}h_{11}^* & h_{21}h_{11}^* & h_{22}h_{11}^* \\ h_{11}h_{12}^* & h_{12}h_{12}^* & h_{21}h_{12}^* & h_{22}h_{12}^* \\ h_{11}h_{21}^* & h_{12}h_{21}^* & h_{21}h_{21}^* & h_{22}h_{21}^* \\ h_{11}h_{22}^* & h_{12}h_{22}^* & h_{21}h_{22}^* & h_{22}h_{22}^* \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} V_{11}V_{11}^* & V_{12}V_{11}^* & V_{21}V_{11}^* & V_{22}V_{11}^* \\ V_{11}V_{12}^* & V_{12}V_{12}^* & V_{21}V_{12}^* & V_{22}V_{12}^* \\ V_{11}V_{21}^* & V_{12}V_{21}^* & V_{21}V_{21}^* & V_{22}V_{21}^* \\ V_{11}V_{22}^* & V_{12}V_{22}^* & V_{21}V_{22}^* & V_{22}V_{22}^* \end{bmatrix} \quad (4)$$

Muchas veces la correlación entre las señales en los brazos de polarización de la antena recibida no depende de la polarización transmitida y viceversa. Bajo esta suposición las características de correlación del canal MIMO se describen mediante las matrices de correlación de transmisión y recepción:

$$R_t = \begin{bmatrix} V_{11}V_{11}^* & V_{12}V_{11}^* \\ V_{11}V_{12}^* & V_{12}V_{12}^* \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} V_{21}V_{21}^* & V_{22}V_{21}^* \\ V_{21}V_{22}^* & V_{22}V_{22}^* \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$R_r = \begin{bmatrix} V_{11}V_{11}^* & V_{21}V_{11}^* \\ V_{11}V_{21}^* & V_{21}V_{21}^* \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} V_{12}V_{12}^* & V_{22}V_{12}^* \\ V_{12}V_{22}^* & V_{22}V_{22}^* \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde los elementos de la anti-diagonal de R_t y R_r son los coeficientes de correlación de transmisión y recepción, respectivamente.

III. CAPACIDAD ERGÓDICA

Se considera que el canal es conocido en el receptor pero no en el transmisor. También se supone que las señales transmitidas por las dos polarizaciones de la antena transmisora son independientes y con la misma potencia. Entonces, para una realización dada del canal, la capacidad (en bps/Hz) viene dada por

$$C = \log_2 \det \left(I_2 + \frac{\rho}{2} Q \right), \quad Q = HH^H; \quad (7)$$

donde I_2 es la matriz identidad 2×2 , ρ es la relación señal-a-ruido promedio en los brazos de polarización de la

antena receptora, H es la realización de la matriz del canal y el superíndice $(\cdot)^H$ representa el operador hermítico. Esta expresión supone que el canal está normalizado, como se indica en la sección anterior.

La capacidad ergódica será el promedio de la capacidad obtenida para todas las realizaciones del canal: $E[C]$. Para obtener una expresión analítica de la capacidad ergódica, se expande la expresión de la capacidad de (7) en serie de Taylor en torno al valor esperado del determinante

$$C = \log_2 E[D] + \log_2(e) \frac{D - E[D]}{E[D]} + \frac{\log_2(e)}{2} \frac{(D - E[D])^2}{(E[D])^2} + \dots \quad (8)$$

donde

$$D = \det \left(I_2 + \frac{\rho}{2} Q \right). \quad (9)$$

Aplicando el operador esperanza matemática a (8), la capacidad ergódica vendrá dada por

$$E[C] = \log_2 E[D] - \frac{\log_2(e)}{2} \frac{E[D^2] - (E[D])^2}{(E[D])^2} + \dots \quad (10)$$

A partir de (9) los dos primeros momentos de D pueden expresarse como función de los términos de la matriz Q

$$E[D] = 1 + \frac{\rho}{2} E[q_{11} + q_{22}] + \frac{\rho^2}{4} E[q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}], \quad (11)$$

$$E[D^2] = 1 + \rho E[q_{11} + q_{22}] \\ + \frac{\rho^2}{4} E[q_{11}^2 + q_{22}^2 + 4q_{11}q_{22} - 2q_{12}q_{21}] \\ + \frac{\rho^3}{4} E[q_{11}^2q_{22} + q_{11}q_{22}^2 - q_{12}q_{21}(q_{11} + q_{22})] \\ + \frac{\rho^4}{16} E[q_{11}^2q_{22}^2 + q_{12}^2q_{21}^2 - 2q_{12}q_{21}q_{11}q_{22}], \quad (12)$$

donde q_{ij} son los términos de Q . Teniendo en cuenta que las fases ϕ_n son incorreladas, el valor esperado de las potencias de los términos q_{ij} se pueden obtener analíticamente como función de los términos V_n^{ij} . Esto se muestra en el apéndice. Por tanto, (10) proporciona expresiones cerradas de la capacidad ergódica en función de los coeficientes V_n^{ij} , es decir, en función del canal MIMO específico. Además, teniendo en cuenta la desigualdad de Jensen [12], el primer término de (10) constituye una cota superior de la capacidad ergódica:

$$E[C] \leq \log_2 E[D]. \quad (13)$$

Es importante señalar que tanto (10) como (13) son expresiones generales, en el sentido que estiman la capacidad ergódica para cualquier canal MIMO.

IV. RESULTADOS

El método propuesto en la sección anterior es aplicable a cualquier canal definido por sus coeficientes V_n^{ij} . Por ejemplo, la figura 1 muestra las curvas de capacidad ergódica en función de la SNR para un canal MIMO Rayleigh balanceado e incorrelado. El canal fue modelado con $N = 20$ ondas con términos V_n^{ij} incorrelados y de igual amplitud. En la figura 1

se muestran las curvas obtenidas con las expresiones analíticas de (10) y (13) y la curva obtenida empíricamente mediante simulación de MonteCarlo. Esta última curva coincide con las curvas propias de canales Rayleigh [2].

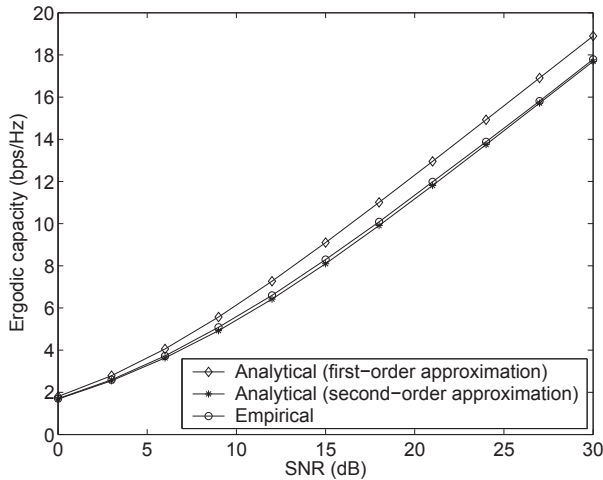


Fig. 1. Capacidad ergódica de un canal Rayleigh balanceado e incorrelado en función de la SNR.

La figura 2 muestra la capacidad ergódica para el caso de un canal MIMO Rice incorrelado y balanceado modelado con $N = 20$ ondas. La figura muestra las predicciones analíticas obtenidas con (10) y (13) y la predicción empírica (simulación de MonteCarlo) en función del factor de Rice. Esta última curva coincide con las publicadas para canales Rice [2].

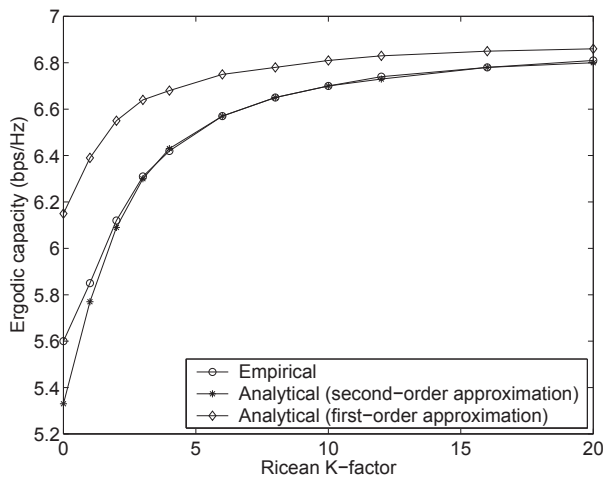


Fig. 2. Capacidad ergódica de un canal Rice balanceado e incorrelado en función del factor de Rice.

Finalmente, la figura 3 muestra la capacidad ergódica para un canal de 6 ondas cuyos términos V_n^{ij} se indican en la tabla 1. En todos los casos los valores proporcionados por la expresión analítica de segundo orden se ajustan muy bien a los valores de capacidad. Cuando la varianza de D no es muy grande, la aproximación de primer orden también constituye una aproximación ajustada.

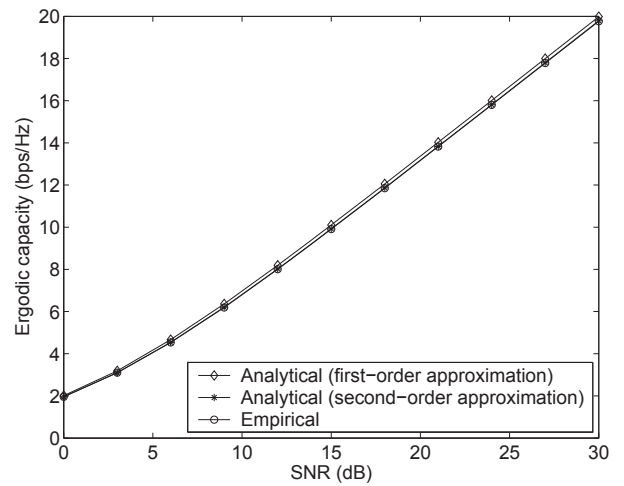


Fig. 3. Capacidad ergódica de un canal Rice balanceado e incorrelado en función del factor de Rice.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado expresiones cerradas para estimar la capacidad ergódica de sistemas MIMO basados en el uso de antenas con polarización dual. La primera expresión es una cota superior de primer orden para la capacidad ergódica. La segunda expresión es una aproximación de segundo orden muy ajustada a los valores de capacidad en cualquier canal. Las expresiones son aplicables a cualquier tipo de canal MIMO del que se conozcan sus componentes multicamino, siendo los canales Rayleigh y Rice dos casos particulares. Las expresiones de capacidad son función de las características físicas específicas del entorno de propagación y de las antenas. Estas expresiones pueden ser muy útiles para estudiar la influencia de características específicas de las antenas, ó del entorno de propagación, en la capacidad ergódica de estos sistemas.

APÉNDICE

Partiendo de (7) y (2), la matriz Q puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp[j(\phi_n - \phi_m)] \begin{bmatrix} p_{nm}^{11} & p_{nm}^{12} \\ p_{nm}^{21} & p_{nm}^{22} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} p_{nm}^{11} &= V_n^{11}(V_m^{11})^* + V_n^{21}(V_m^{21})^*, \\ p_{nm}^{12} &= V_n^{12}(V_m^{11})^* + V_n^{22}(V_m^{21})^*, \\ p_{nm}^{21} &= V_n^{11}(V_m^{12})^* + V_n^{21}(V_m^{22})^*, \\ p_{nm}^{22} &= V_n^{12}(V_m^{12})^* + V_n^{22}(V_m^{22})^*. \end{aligned}$$

Los ϕ_k son fases aleatorias uniformes e incorreladas con lo que,

$$E[\exp[j(\phi_{n_1} + \dots + \phi_{n_L}) - j(\phi_{m_1} + \dots + \phi_{m_L})]] = \chi_{n_1, \dots, n_L}^{m_1, \dots, m_L}$$

donde $\chi_{n_1, \dots, n_L}^{m_1, \dots, m_L}$ es una función indicador que vale 1 cuando la secuencia (m_1, \dots, m_L) es una permutación de la secuencia (n_1, \dots, n_L) , y vale cero en otros casos.

Por tanto,

$$E[q_{ij}] = \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^N p_{nm}^{ij} E[\exp[j(\phi_n - \phi_m)]] = \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^N p_{nm}^{ij} \chi_n^m$$

$$E[q_{ij}q_{ks}] = \sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ m_1, m_2=1}}^N p_{n_1 m_1}^{ij} p_{n_2 m_2}^{ks} \chi_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}$$

$$E[q_{ij}q_{ks}q_{lr}] = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3=1 \\ m_1, m_2, m_3=1}}^N p_{n_1 m_1}^{ij} p_{n_2 m_2}^{ks} p_{n_3 m_3}^{lr} \chi_{n_1, n_2, n_3}^{m_1, m_2, m_3}$$

$$E[q_{ij}q_{ks}q_{lr}q_{tu}] = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_4=1 \\ m_1, \dots, m_4=1}}^N p_{n_1 m_1}^{ij} p_{n_2 m_2}^{ks} p_{n_3 m_3}^{lr} p_{n_4 m_4}^{tu} \chi_{n_1, \dots}^{m_1, \dots}$$

Estos valores esperados son usados para calcular los momentos de D en las ecuaciones (11) y (12).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Ciencia y Tecnología bajo el proyecto TIC2001-0751-C04-03.

REFERENCES

- [1] R. U. Nabar, H. Bölcskei, V. Erceg, D. Gesbert, and A. J. Paulraj, "Performance of multiantenna signaling techniques in the presence of polarization diversity," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, pp. 2553–2562, October 2002.
- [2] A. Paulraj, R. Nabar, and D. Gore, *Introduction to Space-Time Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2003.
- [3] H. Bölcskei, R. U. Nabar, V. Erceg, D. Gesbert, and A. J. Paulraj, "Performance of spatial multiplexing in the presence of polarization diversity," in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 4, Salt Lake City, UT, May 2001, pp. 2437–2440.
- [4] C. A. Balanis, *Antenna Theory. Analysis and Design*. John Wiley and Sons, 1997.
- [5] M. F. Cátedra and J. Pérez, *Cell Planning for Wireless Communications*. Norwood, MA: Artech House, 1999.
- [6] S. Y. Tan and H. S. Tan, "A microcellular communications propagation model based on the uniform theory of diffraction and multiple image theory," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, pp. 1317–1326, October 1996.
- [7] V. Erceg, S. J. Fortune, J. Ling, A. J. Rustako, and R. A. Valenzuela, "Comparison of computer-based propagation prediction tool with experimental data collected in urban microcellular environments," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 15, pp. 677–684, May 1997.
- [8] S. C. Kim, B. J. Guarino, T. M. W. III, V. Erceg, S. J. Fortune, L. W. T. R. A. Valenzuela, J. Ling, and J. D. Moore, "Radio propagation measurements and prediction using three-dimensional ray tracing in urban environments at 908 mhz and 1.9 ghz," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 48, pp. 931–946, May 1999.
- [9] G. E. Athanasiadou, A. R. Nix, and J. P. McGeehan, "A microcellular ray-tracing propagation model and evaluation of its narrow-band and wide-band predictions," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 18, pp. 322–335, March 2000.
- [10] G. D. Durgin, *Space-Time Wireless Channels*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 2003.
- [11] H. Zhu, J. Takada, K. Araki, and T. Kobayashi, "A random-phase-assisted ray-tracing code for wireless channel modeling," *Applied Computational Electromagnetic Society Journal*, vol. 16, pp. 69–78, March 2001.
- [12] J. L. W. V. Jensen, "Om konvekse funktioner og uligheder mellem middelværdier," *Nyt Tidsskr. Math. B*, vol. 16, pp. 49–68, 1905.