UNIVERSIDAD DE SANTANDER

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE

CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

TESIS DOCTORAL

ESTRUCTURACION MATEMATICA DE SISTEMAS

EL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO Y EL ANALISIS DE SU LOCALIZACION ESPACIAL

Presentada por: MIGUEL A. PESQUERA GONZALEZ

Dirigida por: ENRIQUE CASTILLO RON

santander, noviembre, 1.979

El planteamiento metodológico de este trabajo se fundamenta en la aceptación de la Teoría General de Sistemas (T.G.S) como un nuevo paradigma (en el sentido de Kuhn).

Con esta metodología general se define el concepto de sistema dotándole de una estructura matemática, para lo que se definen conceptos tales como: conjunto básico, atributo, función sobre el conjunto básico, función de nivel, subsistema, estado de un sistema, etc.,

Estos conceptos se aplican al caso del sistema de escolares de Educación General Básica (E.G.B) a nivel urbano, así como al sistema de partículas, correspondientes a una mezcla de gases, contenidas en una vasija cerrada.

Siguiendo en el marco metodológico de la T.G.S. se plantea un isomorfismo entre el sistema de escolares y el sistema de partículas, aplicándose conceptos tales como el de entropía, desarrollado en los sistemas termodinámicos, al sistema de escolares.

Por último y en la linea del isomorfismo planteado se realiza un análisis de la localización espacial de los escolares de una ciudad, aplicándose al caso concreto de Santander, para lo que se desarrollan distintos modelos basados en funciones de probabilidad multinomiales, y se introducen conceptos tales como: localización espacial libre de la población escolar, y la medida de libertad de elección de una localización espacial por medio de normas matriciales.

A G R A D E C I M I E N T O

En estas lineas quisiera dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a las personas que han hecho posi-- ble la realización de la Tesis.

En primer lugar al Profesor Enrique Castillo Ron de quien partió la idea de esta Tesis, y con cuya dirección,- trabajo y ánimo ha hecho posible la terminación de la misma.

Al Profesor Rafaél Izquierdo de Bartolomé que me ha aconsejado y ayudado en el desarrollo de la metodología a- seguir, así como a la Cátedra de Transportes de esta Escue- la que ha puesto todos sus medios a mi disposición, y en - la cual sigo formándome.

Al Profesor Juan Ramón Ruiz Tolosa que ha comentado y revisado los planteamientos algebráicos que se desarro-- llan.

Finalmente a la Dirección de la E.T.S. de Ingenie-- ros de Caminos, Canales y Puertos de Santander, así como - al Director y personal del Centro de Cálculo de la Univer- sidad de Santander que han puesto a mi disposición todos - los medios a su alcance.

I N D I C E

Pág.

RESUMEN.. I

AGRADECIMIENTO................................... IV

INDICE... VI

LISTA DE TABLAS.................................. XVI

LISTA DE FIGURAS................................. XIX

CAPITULO I. CONCEPTOS METODOLOGICOS PREVIOS.... 1

1.1. EL CONCEPTO DE PARADIGMA........... 3

1.1.1. Concepto de paradigma previo a- Kuhn........................... 3

1.1.2. El paradigma en la metodología- de la ciencia según Kuhn....... 4

1.2. PRECEDENTES A LA TEORIA GENERAL DE- SISTEMAS(T.G.S)................... 7

1.2.1. El Tractatus-logico-philosophicus de Wittgenstein............ 7

1.2.2. Isomorfismo planteado en el -- Tractatus...................... 9

1.2.3. Homologías entre la física teórica y la filosofía del lenguaje............................ 10

1.3. LA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS Y LAS CIENCIAS SOCIALES.................. 13

1.3.1. Los orígenes de la T.G.S....... 13

1.3.2. La T.G.S. como paradigma de las ciencias sociales.............. 14

1.3.2.1. Crisis en las ciencias so-- ciales.................... 14

1.3.2.2. Aspectos en favor de la -- adopción de la T.G.S. en - las ciencias sociales como- un nuevo paradigma........ 15

	Pág.
1.4. PLANTEAMIENTOS Y PROBLEMAS METODOLOGICOS: SU EVOLUCION............	18
1.4.1. La ciencia y el método científico.........................	18
1.4.1.1. Concepto de ciencia, clasificación y evolución científica..................	18
1.4.1.2. El método y su evolución..	22
1.4.2. Elementos en el proceso científico actual.................	28
1.4.3. La perspectiva científica actual: aproximación entre las ciencias humanas y naturales..	31
1.4.4. Estructuralismo y teoría de sistemas.....................	34
1.4.5. El problema de la agregación: del comportamiento individual al colectivo................	37
CAPITULO II. LA NOCION DE SISTEMA DENTRO DE LA T.G.S. Y LOS CONCEPTOS MATEMATICOS PREVIOS PARA EL ANALISIS DE UN SISTEMA.....................	41
2.1. ASPECTOS DE LA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS (T.G.S).................	43
2.1.1. El concepto de la Teoría Genenal de Sistemas..............	43
2.1.2. Aspectos básicos en el análisis de sistemas..............	45
2.1.3. Tipología de sistemas.........	48
2.1.4. La formulación de isomorfismo en la T.G.S..................	50
2.2. CONCEPTOS ALGEBRAICOS.............	53

Pág.

2.2.1. Noción de conjunto............. 53

2.2.2. Relaciones...................... 54

2.2.2.1. Producto cartesiano de con-- juntos...................... 54

2.2.2.2. Relaciones binarias......... 55

2.2.2.3. Relaciones de equivalencia.. 57

2.2.2.4. Relaciones de orden......... 59

2.2.3. Aplicaciones.................... 64

2.2.3.1. Aplicación. Dominio y reco-- rrido. Imágenes directas y - recíprocas.................. 64

2.2.3.2. Aplicaciones sobreyectivas,- inyectivas y biyectivas. --- Transformaciones........... 65

2.3. ISOMORFISMO........................... 68

2.3.1. Introducción.................... 68

2.3.2. Ley de composición interna...... 68

2.3.3. Leyes internas asociadas a una - misma ley interna.............. 73

2.3.3.1. Ley interna definida sobre - $\mathcal{P}$(A) deducida de una ley internadefinida sobre A....... 73

2.3.3.2. Parte estable. Ley inducida. 74

2.3.3.3. Transporte de una ley interna por biyección............ 75

2.3.4. Leyes externas.................. 75

2.3.5. Estructura...................... 77

2.3.6. Homomorfismo e isomorfismo...... 78

2.3.6.1. Homomorfismo de (A,T) en (A',T') 78

2.3.6.2. Isomorfismo de (A,T) sobre - (A',T')..................... 82

Pág.

CAPITULO III. ESTRUCTURA MATEMATICA DE LOS SISTEMAS............................ 84

3.1. CONCEPTO DE SISTEMA.................. 86

3.1.1. El sistema como estructura matemática........................... 86

3.1.1.1. Función de atributo inducida por una función sobre el conjunto básico................ 89

3.1.2. Sistema. Subsistema. Entorno de un sistema...................... 90

3.1.3. Jerarquía de sistemas........... 92

3.1.4. Estado, estructura y comportamiento de un sistema................ 94

3.2.5. Isomorfismo entre sistemas....... 95

3.2. EL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO........................ 98

3.2.1. Conjunto básico y de atributo.... 98

3.2.2. Conjunto de funciones sobre el conjunto básico y de funciones de nivel.......................... 111

3.2.3. Resumen de los componentes del sistema de escolares............ 116

3.2.4. Jerarquización. Subsistemas...... 120

3.2.5. Entorno del sistema.............. 123

CAPITULO IV. MODELIZACION DE LOS SISTEMAS: LOS MODELOS DE LOS SISTEMAS URBANOS....... 124

4.1. LA MODELIZACION DE LOS SISTEMAS...... 126

4.1.1. El nivel jerárquico de los modelos en el análisis científico.... 126

4.1.2. Los modelos y sus clases......... 129

Pág.

4.1.3. Reglas para el diseño de los mode-los.............................. 137

4.2. EL MODELO URBANO DE DISTRIBUCION DE WILSON.................................. 141

4.3. EL MODELO URBANO DE ECHENIQUE.......... 146

4.3.1. Los niveles de desagregación del -- sistema urbano..................... 146

4.3.1.1. Primer nivel de desagregación - y sus relaciones............... 146

4.3.1.2. Segundo nivel de desagregación- y sus relaciones............... 148

4.3.1.3. Tercer nivel de desagregación y sus relaciones.................. 149

4.3.2. Modelos que representan las relaciones entre distintos elementos del - tercer nivel de sesagregación...... 150

4.3.2.1. Modelo de actividades localizadas o de Lowry................ 150

4.3.2.2. Modelo de localización de actividades o de Garin-Lowry....... 152

4.3.2.3. Modelo de stocks y actividades- o de Echenique................. 152

4.3.3. El sistema de escolares de E.G.B. a nivel urbano dentro de un nivel superior de desagregación........... 161

CAPITULO V. EL ANALISIS DE LA LOCALIZACION ESPACIAL DE ESCOLARES Y SU ISOMORFISMO CON UN SISTEMA TERMODINAMICO.............. 163

5.0. INTRODUCCION.......................... 165

5.1. LOCALIZACION ESPACIAL DEL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO....... 166

5.1.1. Localizacion de la población escolar............................... 166

Pág.

5.1.2. Funciones de probabilidad asociada a distintos tipos de localizaciones espaciales de escolares....... 168

5.1.2.1. Localización espacial libre en una zona....................... 168

5.1.2.2. Localización espacial libre en el nucleo urbano.............. 169

5.1.2.3. Localización espacial condicionada en el nucleo urbano...... 170

5.1.2.4. Localización espacial condicionada con restricción de coste, en el nucleo urbano........... 171

5.1.3. Localización espacial más probable en el nucleo urbano.............. 172

5.1.3.1. Localización espacial libre más probable.................. 172

5.1.3.2. Localización espacial condicionada más probable............ 173

5.1.3.3. Localización espacial condicionada con restricción de coste más probable................. 175

5.1.3.4. Localización espacial con el único criterio de minimizar su coste........................ 179

5.1.3.5. Medida de la libertad de elección de una localización espacial........................ 180

5.1.4. Estimación de parámetros......... 181

5.1.4.1. Estimación de los parámetros en las distribuciones multinomiales......................... 181

5.1.4.2. Estimación de los parámetros en las distribuciones multinomiales con una muestra incompleta........................ 182

	Pág.
5.2. EL SISTEMA TERMODINAMICO Y LA MECANICA ESTADISTICA CUANTICA..................	184
5.2.0. Introducción......................	184
5.2.1. Conceptos termodinámicos previos..	186
5.2.1.1. Niveles de energía............	186
5.2.1.2. Microestados, Macroestados y - Conjuntos....................	187
5.2.1.3. Macroestado más probable......	190
5.2.1.4. Mezclas de sustancias independientes......................	191
5.2.1.5. Entropía......................	193
5.2.2. Los componentes del sistema de partículas de una vasija cerrada.....	194
5.2.3. La mecánica estadística cuántica - como método de localización de partículas entre niveles de energía..	198
5.2.3.1. El método de la mecánica estadística cuántica..............	198
5.2.3.2. Modelos estadísticos de los -- sistemas formados por partículas independientes...........	201
5.2.3.2.1. Estadística de Maxwell-Boltzmann(MB)................	201
5.2.3.2.2. Estadística de Bose-Einstein(BE)................	203
5.2.3.2.3. Estadística de Fermi-Dirac (FD).....................	204
5.2.3.3. Determinación del macroestado-más probable.................	206
5.2.3.3.1. Macroestado mas probable - para las distintas estadísticas....................	206
5.2.3.3.2. Macroestado más probable - de una mezcla de gases independientes.............	210

Pág.

5.3. ISOMORFISMO ENTRE EL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO Y EL SISTEMA DE PARTICULAS DE UNA VASIJA CERRADA.................................. 213

5.3.1. Planteamiento del isomorfismo..... 213

5.4. EL CONCEPTO DE ENTROPIA APLICADO AL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO................................ 222

CAPITULO VI. EL ANALISIS DE LA LOCALIZACION ESPACIAL DE ESCOLARES DE E.G.B. APLICADO A LA CIUDAD DE SANTANDER............ 225

6.0. INTRODUCCION.......................... 227

6.1. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL LIBRE........................ 229

6.2. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL CONDICIONADA 245

6.2.1. Hipótesis 1...................... 245

6.2.2. Hipótesis 2...................... 250

6.3. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL CONDICIONADA CON RESTRICCION DE COSTE............................. 266

6.3.1. Hipótesis 1...................... 266

6.3.2. Hipótesis 2...................... 269

6.3.3. El modelo de Wilson.............. 284

6.4. ANALISIS COMPARATIVO.................. 287

Pág.

CONCLUSIONES.................................... 300

APENDICE 1: REFERENCIAS.......................... 305

APENDICE 2: BIBLIOGRAFIA......................... 314

ANEJO PROGRAMACION............................... 320

L I S T A D E T A B L A S

Pág.

Tabla 3.1. Correspondencia entre zonificación adoptada y división administrativa........ 101

Tabla 3.2. Relación de centros de enseñanza de --- E.G.B................................. 103

Tabla 3.3. Tipo de centros atendiendo a su administración y localización................ 112

Tabla 3.4. Alumnos residentes por zonas.......... 114

Tabla 3.5. Alumnos matriculados por centros....... 115

Tabla 3.6. Flujos entre zonas de residencia y centros escolares......................... 117

Tabla 3.7. Distancias entre zonas y centros (en -- Kms.)................................. 118

Tabla 5.1. Ejemplo de probabilidades asociadas a - los macroestados....................... 191

Tabla 6.1. Loc. esp. condicionada hipótesis 1..... 247

Tabla 6.2. Comparación entre escolares residentes- por zona y escolares matriculados en -- centros de la zona.................... 249

Tabla 6.3. Loc. esp. condicionada con restr. coste hipótesis 1........................... 268

Tabla 6.4. Loc. esp. según el modelo de Wilson.... 286

Tabla 6.5. Diferencia entre loc. esp. libre y DC1. 288

Tabla 6.6. Idem y DC2............................ 289

Tabla 6.7. Idem y DCRC1.......................... 290

Tabla 6.8. Idem y DCRC2.......................... 291

Tabla 6.9. Idem y DWILSON........................ 292

Tabla 6.10.Norma matricial de la libertad de ele-- cción por modelos e hipótesis.......... 293

Pág.

Tabla 6.11. Norma matricial D por modelos e hipótesis.................................. 293
Tabla 6.12. Norma matricial conjunta.............. 294
Tabla 6.13. Diferencia entre los modelos DC1 y --- DCRC1................................ 295
Tabla 6.14. Idem DC1 y DWILSON.................... 298
Tabla 6.15. Idem DC2 y DWILSON.................... 299

L I S T A   D E   F I G U R A S

Pág.

Fig. 1.1. Los principales componentes de información, controles metodológicos y transformaciones de información del proceso científico............................ 28

Fig. 1.2. Clasificación de los principales componentes, controles y transformaciones del proceso científico de acuerdo con algunos términos convencionales........ 30

Fig. 3.1. Distribución zonal...................... 100

Fig. 3.2. Localización de centros escolares...... 107

Fig. 3.3. Centros escolares según tipo de Admón.. 108

Fig. 4.1. Nivel jerárquico de los modelos en el análisis científico.................... 126

Fig. 4.2. Sistema de clasificación de modelos en 3 categorías.......................... 134

Fig. 4.3. Niveles de desagregación del sistema urbano.................................. 147

Fig. 4.4. Relaciones en el primer nivel de desagregación............................. 148

Fig. 4.5. Relaciones en el segundo nivel de desagregación............................. 149

Fig. 4.6. Estructura del modelo de actividades localizadas de Lowry.................. 150

Fig. 4.7. Estructura del modelo de Garin-Lowry... 153

Fig. 4.8. Estructura del modelo de stocks y actividades............................... 154

Fig. 5.1. Croquis de zonas de residencia de la población escolar y de centros escolares. 167

Fig. 5.2. Un sistema termodinámico............... 185

Pág.

Fig. 5.3. Ejemplo de microestados................ 190

Fig. 5.4. Los componentes del sistema de partículas de gases contenidos en una vasija cerrada................................ 199

Fig. 5.5. Microestados MB 202

Fig. 5.6. Microestados BE........................ 204

Fig. 5.7. Microestados FD........................ 205

Fig. 5.8. Aplicaciones biunívocas entre los sistemas de escolares y de partículas........ 215

Fig. 6.1. Loc. esp. libre. Distribución zona 1... 231

Fig. 6.2. Idem, zona 2........................... 232

Fig. 6.3. Idem, zona 3........................... 233

Fig. 6.4. Idem, zona 4........................... 234

Fig. 6.5. Idem, zona 5........................... 235

Fig. 6.6. Idem, zona 6........................... 236

Fig. 6.7. Idem, zona 7........................... 237

Fig. 6.8. Idem, zona 8........................... 238

Fig. 6.9. Idem, zona 9........................... 239

Fig. 6.10. Idem, zona 10......................... 240

Fig. 6.11. Idem, zona 11......................... 241

Fig. 6.12. Idem, zona 12......................... 242

Fig. 6.13. Idem, zona 13......................... 243

Fig. 6.14. Idem, zona 14......................... 244

Fig. 6.15. Loc. esp. condicionada Hipótesis 2. Distibución zona 1........................ 252

Fig. 6.16. Idem, zona 2.......................... 253

Fig. 6.17. Idem, zona 3.......................... 254

Pág.

Fig. 6.18. Idem, zona 4........................ 255

Fig. 6.19. Idem, zona 5........................ 256

Fig. 6.20. Idem, zona 6........................ 257

Fig. 6.21. Idem, zona 7........................ 258

Fig. 6.22. Idem, zona 8........................ 259

Fig. 6.23. Idem, zona 9........................ 260

Fig. 6.24. Idem, zona 10....................... 261

Fig. 6.25. Idem, zona 11....................... 262

Fig. 6.26. Idem, zona 12....................... 263

Fig. 6.27. Idem, zona 13....................... 264

Fig. 6.28. Idem, zona 14....................... 265

Fig. 6.29. Loc. esp. condicionada con restr. de - coste hipótesis 2. Distribución zona 1 270

Fig. 6.30. Idem, zona 2........................ 271

Fig. 6.31. Idem, zona 3........................ 272

Fig. 6.32. Idem, zona 4........................ 273

Fig. 6.33. Idem, zona 5........................ 274

Fig. 6.34. Idem, zona 6........................ 275

Fig. 6.35. Idem, zona 7........................ 276

Fig. 6.36. Idem, zona 8........................ 277

Fig. 6.37. Idem, zona 9........................ 278

Fig. 6.38. Idem, zona 10....................... 279

Fig. 6.39. Idem, zona 11....................... 280

Fig. 6.40. Idem, zona 12....................... 281

Fig. 6.41. Idem, zona 13....................... 282

Fig. 6.42. Idem, zona 14....................... 283

Pág.

Fig. 1. Anejo. Programa DL...................... 324

Fig. 2. Anejo. Programa DC...................... 325

Fig. 3. Anejo. Programa AJUSTEI................. 327

Fig. 4. Anejo. Programa DCRC.................... 328

Fig. 5. Anejo. Programa DWILSON................. 330

Fig. 6. Anejo. Programa PSAN.................... 332

CAPITULO I

CONCEPTOS METODOLOGICOS PREVIOS

1. CONCEPTOS METODOLOGICOS PREVIOS

1.1. EL CONCEPTO DE PARADIGMA

1.2. PRECEDENTES A LA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS (T.G.S.)

1.3. LA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS Y LAS CIENCIAS SOCIALES

1.4. PLANTEAMIENTOS Y PROBLEMAS METODOLOGICOS: SU EVOLUCION

1.1.- EL CONCEPTO DE PARADIGMA

Dentro de este apartado se explica de manera somera el concepto de paradigma, necesario para la comprensión de este primer capítulo, y de la idea que ha guiado el desarrollo metodológico que se presenta en la Tesis.

1.1.1.- Concepto de paradigma previo a Kuhn.

Si bien el concepto de paradigma que hoy se considera se debe a Kuhn, se pueden encontar precedentes del término "paradigma" en los escritos de Lichtenberg (10). Lichtenberg emplea la noción de "paradeigmata" para relacionar las pautas formales del análisis gramatical de la linguística con las pautas formales del análisis teórico de la física. Así como en la gramática se vincula la declinación de los nombres y la conjugación de los verbos con ciertas formas generales y estandardizadas (paradigmas), así mismo se explican los fenómenos de la física vinculando los sucesos y procesos físicos con ciertas formas o pautas estandard y autoexplicativas.

Esta noción de paradigmas, mediante las cuales nuestro pensamiento puede ser guiado ya de una manera fructífera, ya equivocada, ocupa un lugar central en exposiciones de "gramática lógica" de Wittgenstein,* así como de otros-filósofos del lenguaje y filósofos de la ciencia; si bien el uso que se hizo del término "paradigma" por estos autores previos a Kuhn es distinto de este, como se verá a continuación.

1.1.2.- El paradigma en la metodología de la ciencia según Kuhn.

La introdución del concepto de paradigma en la metodología de la ciencia fue debida a Kuhn (1962) en su libro " La estructura de las revoluciones científicas". Kuhn considera el paradigma como un cuerpo de creencias, valores y técnicas compartidos por los miembros de una comunidad dada de tal manera que sirve para la solución de los enigmas que se presentan en la ciencia. Para otros autores posteriores como Chadwick(3) identifican el paradigma como una pauta teórica, una manera de considerar el mundo real a la luz de alguna teoría determinada, y Chorley y Hagget (4) como forma estable de la actividad científica.

En el sentido de Kuhn, pueden considerarse los paradigmas como metamodelos o modelos a gran escala, normalmente no formulados específicamente, y referidos a las formas de investigación en las ciencias.

---

* Sobre este autor se hablará con mayor detenimiento en el apartado siguiente del presente capítulo.

La importancia de los paradigmas reside según Kuhn(9) es su capacidad para establecer leyes: que nos puedan explicar la realidad del mundo (y de la ciencia); y que permitan concentrarnos en los problemas específicos que estas leyes- junto con el conocimiento del momento, puedan plantear. Los paradigmas son, por tendencia natural, extraordinariamente- restrictivos, enfocando su interés sobre un margen muy limitado de problemas.

Kuhn ha explicado el proceso de sustitución de un paradigma por otro en la consecución de las revoluciones científicas. En un momento dado del estado de la ciencia, un paradigma deja de ser válido para enfrentarse a las nuevas teorías y sus conceptos e instrumentos fallan para resolver los nuevos problemas; la crisis se produce, todas las bases científicas anteriores se cuestionan y el paradigma se rechaza.

Añade tambien Kuhn (9):

"La transición de un paradigma a otro nuevo del que - pueda surgir una nueva tradición de ciencia normal está lejos de ser un proceso de acumulación al que se llegue por -- medio de una articulación o ampliación del antiguo paradigma (....). Cuando la transición es completa, la profesión habrá modificado su visión del campo, sus métodos y sus metas".

Este manifiesto se aplica, hoy en dia, en las cien--- cias sociales.

Este concepto se aplica en la idea central de la tesis al utilizar (como se podrá ver en el desarrollo de los capítulos siguientes) como paradigma metodológico la operacionalidad de Teoría General de Sistema (T.G.S.).

1.2.- PRECEDENTES A LA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS (T.G.S.)

Dentro de este apartado se trata de ver como los conceptos que posteriormente serán la clave para el desarrollo de la T.G.S. (que se verán con más profundidad a lo largo de la Tesis) ya habian sido expuestos con claridad por Wittgenstein, dentro de la filisofía del lenguaje, y mas concretamente en su famoso "Tractatus-logico-philosophicus". Tambien se analiza como el método de Wittgenstein es homólogo al que Boltzmann desarrolla en la mecanica estadística dentro de la física teoríca.

1.2.1.- El Tractatus-logico-philosophicus de Wittgenstein.

La preocupación central de Wittgenstein es el lenguaje, planteando en el Tractatus con extrema claridad la existencia de una correspondencia isomorfa entre el lenguaje, y la realidad descrita y representada mediante el lenguaje.

Según Wittgenstein el mundo es la totalidad de los hechos atómicos y no de las cosas, ya que un hecho atómico para él está formado justamente por "cosas" o "entidades". Estas "cosas" o "entidades" son innombrables (mediante nombres, pronombres personales, adjetivos demostrativos, etc.) de ese modo, hay por lo pronto una relacion de las cosas con las palabras. Como una combinación de "cosas" es un hecho atómico, una combinación de palabras, es una proposición atómica.

Las proposiciones atómicas "representan" hechos atómicos en el sentido de que las primeras son representación, "cuadro" o "pintura" de los segundos; las proposiciones atómicas y los hechos atómicos son isomórfos; el lenguaje se convierte así, en un mapa, o especie de mapa, de la realidad Las proposiciones atómicas que no representan hechos atómicos carecen de significación. En cuanto a las combinaciones de proposiciones atómicas, constituyen las llamadas "funciones de verdad".

Wittgenstein, por tanto, constituye modelos pero dotados de una estructura lógica, a lo cual hace hincapié --- cuando dice: (15) "Todo modelo es al mismo tiempo un modelo lógico. (por otro lado, no todo modelo es, por ejemplo, un modelo espacial)", tambien subraya el hecho de que sus modelos son construidos, cuando dice: "Hacemos modelos de hechos para nosotros mismos" y que un modelo es "puesto frente a la realidad como una medida". Ciertamente pretende que "el mundo podría ser descrito completamente mediante proposiciones completamente generales, y por ello sin usar ninguna suerte de nombres o de otros signos denominativos. Y a fin de llegar a uno de los lenguajes ordinarios uno precisaria sólo introducir nombres, etc. diciendo después de"(x)", "y este X es A" y así sucesivamente "(15) . Este punto implica que sería posible crear un "armazón lógico" es decir, un sistema a priori capaz de modelar al mundo entero, y capaz, por tanto de proveer la estructura lógica de toda descripción--

(1). Mediante la introdución de nombres en este sistema general podriamos, en consecuencia, aplicarlo a la realidad. El resultado sería el "lenguaje ordinario".

1.2.2.- Isomorfismo planteado en el Tractatus.

Wittgenstein, como ya se ha indicado, propone con claridad en su obra que el lenguaje describe aquello de que se trata y que la relación entre lenguaje y realidad es algo - inmediatamente dado, pues es objeto de observación y no de formulación. En otros términos, y según se expresa en el -- Tractatus: "lo que puede ser mostrado no puede ser enunciado".

En la teoria modélica del lenguaje de Wittgenstein - dos cosas son esenciales: una teoria de la correspondencia- de la verdad y el supuesto de que existe un "isomorfismo" - suficiente entre lenguaje y realidad, de modo que permita - (y revalide) todo nuestro uso descriptivo del lenguaje (1).

Wittgenstein considera que por medio de su obra universaliza el lenguaje a la realidad de tal manera que se hace aplicable a todo discurso; y que, de este modo, había podido llevar a cabo la verdadera "bildliche Darstellung der- Welt" (representación del mundo), la cual, en virtud de sus caracteriscas isomórficas, distaba mucho de ser una mera -- descripción metafórica.

1.2.3.- Homologías entre la física teoríca y la filosofia del lenguaje.

A través del desarrollo científico de los últimos - tiempos, se ha hecho cada vez mas patente que las formulas- matématicas pueden proporcionar un encuadre desde el que poder tratar con todos los problemas de la física y, de esta- manera, poder conferir a la realidad física una estructura - lógica. Así a Hertz le había preocupado por explicar como la teoría clásica de la dinámica newtoniana puede constituir, a la vez, un sistema matematico de axiomas y deduciones y -- describir el mundo real de la naturaleza,en oposición a todos los mundos lógicamente concebibles.

Boltzman, hombre que fundó la "mecánica estadistica", la cual se halla en la base no sólo de la termodinámica del siglo XX, sino también de la actitud que actualmente se tiene de la física teóríca, adopta la explicación que Hertz -- diera de la mecánica como definición de sistemas de "secuencias posibles de acontecimientos observados", e hizo de ello el punto de partida de un método general de análisis teórico de la física como tal.

Lo llevó a cabo considerando cada una de las propiedades independientes de un sistema físico como determinante de una coordenada separada de un sistema multidimensional-- de coordenadas geométricas. Todas las localizaciones posi-- bles de cada uno de los diferentes conjuntos de un sistema-ma físico eran, por ejemplo, ordenadas según tres "ejes de referencia" espaciales; por ejemplo, todos los valores de - temperatura se encontraban en un cuarto eje, todos los valores de presión en un quinto eje, etc,. El total de los "puntos" teóricos resultantes en el sistema multidimensional de coordenadas proporcionaba una representación del "conjunto- de estados posibles" del sistema físico en cuestión; y se - podría obtener la definición de no importa que estado físico actual especificando el punto particular de este "espacio multidimensional" cuyas coordenadas están en correspondencia con los valores actuales de todas las variables. El problema general de la mecánica estadística consistía, pues,- en descubrir las relaciones matemáticas que rigen las frecuencias con las que -según los diferentes supuestos y condiciones- los estados actuales de un sistema físico se distribuirán entre sus estados posibles, y de esta manera, en computar las probabilidades relativas de hallar el sistema de- una manera efectiva en un estado físico más bien que en otro.

El método de Boltzman, y su importancia, no han hecho mas- que crecer, habiendo sido adoptados enteramente en las exposiciones clásicas de la moderna teória cuántica; y de manera particular el método que empleó para especificar el estado- físico de un sistema, con referencias a un espacio multidimensional cuyas coordenadas representan todas las variables independientes de aquél, ha sido adoptado enteramente en las exposiciones clásicas de la moderna teória cuántica.

La noción de "espacios de posibilidades teóricas" -- que desempeña un papel clave en el método de análisis de -- Boltzman , puede quedar resumida de una manera concisa en - las palabras del Tractatus-logico-philosophicus de Wittgenstein de la siguiente manera:

"Los hechos que se dan en un espacio lógico son el - mundo; el mundo se divide en hechos; cada uno de los items- puede ser el caso o no en tanto que todo lo demás sigue -- siendo el mismo.....Construimos para nosotros mismos representaciones (Bilder) de hechos. Un Bild describe la realidad representando una posibilidad de existencia o de inexistencia de estados de asuntos. Un Bild representa una situación posible en un espacio lógico. En geometría, al igual - que en lógica, un lugar es una posibilidad: algo puede existir en él" (15).

Se puede observar que existen homologías entre el -- método que empleó Boltzman para tratar los "estados de asuntos" actuales de la física como estadisticamente distribuidos dentro del conjunto total de "estados de asuntos" posibles definidos dentro de un particular espacio multidimensional, y el método Wittgenstteiniano de las "tablas de la verdad", en el que la verdad o falsedad de las proporciones moleculares" correspondiente a las diferentes combinaciones -- complejas de hechos, es tratada como una función de la verdad o falsedad independiente de las proposiciones elementales - correspondientes o estados de asuntos implicados.

1.3.- LA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS Y LAS CIENCIAS SOCIALES

1.3.1.- Los origenes de la T.G.S.

Si bien no hay un acuerdo general, parece admitirse- que el nucleo originario de lo que después pasaría a llamarse teoría general de sistemas lo desarrolló Ludwig von Bertalanffy quien, en los años de 1920 a 1930 abogaba por una concepción organicista, no mecanicista, en la biología, señalando la importancia de considerar al organismo como un "todo" o "sistema" y viendo el principal objetivo de la biologia - en el descubrimiento de los principios de la organización - de los diversos niveles (2).

Por otro lado, Bertalanffy explica el desarrollo de - la teoría a partir de la coincidencia en el tiempo de tres - lineas fundamentales de investigación en tres zonas distin-- tas, aunque relacionadas: La Cibernética, de Wiener (1948); la Teoría de la Información, de Shannon y Weaner(1949); y la Teoría de los juegos, de Neumann y Morgenstern (1947)(2).

En realidad es dificil dar cuenta con exacitud de los orígenes de la visión de sistemas; parece mas oportuno decir como el propio Bertalanffy señala, que aquel origen es como- "las ideas que flotan en el aire" o, en todo caso, que estaban flotando en los años de 1920 a 1930, probablemente como consecuencia del punto de vista dominante con anterioridad- en las ciencias (el mecanismo) y como reacción contra él (6).

Sea como quiera en lo relativo a los antecedentes - históricos, lo que parece interesante es el lazo innegable entre las ciencias naturales y exactas (biología, ingeniería, cibernética, etc) y la T.G.S. Este lazo se ha desarrollado, convirtiéndose en una relación de dependencia completa en la que se pretende aplicar a las ciencias sociales los métodos y conceptos de los naturales.

1.3.2.- La T.G.S. como paradigma de las ciencias sociales.

1.3.2.1. Crisis en las ciencias sociales.

Parece hoy frecuente afirmar que las ciencias sociales están en situación de crisis. Entendiendo por crisis - aquí, como en medicina, como aquel momento en el proceso - de la enfermedad en el que la cuestión es decidir si el organismo será o no capaz de sobreponerse a la enfermedad. - El momento actual es uno de ellos, existiendo, incluso, pesimistas, que vaticinan la solución negativa de la crisis produciendose la mutación de las ciencias sociales en tecnologias (6).

Para algunos autores, la crisis es general y afecta a todas las dimensiones posibles de las ciencias sociales, quienes no serán capaces de superarla si no es a través de un cambio de la importancia que se concede a la concepción teórica básica (7).

Sin embargo, como ha demostrado Kuhn, el hecho de -- que las ciencias sociales se encuentren en la situación de- crisis- osea, en una situación caracterizada por una multiplicidad de escuelas competitivas, cada una de las cuales - propone soluciones completamente diferentes- lejos de ser - un mal, es un signo claro de salud, puesto que implica la - búsqueda de un campo común nuevo, un campo preparadigmatico, en la que ya se han de formular el paradigma futuro, que dirigirá a la ciencia en su investigación. Se puede admitir - que esta ha sido la situación en todas las ciencias sociales en los últimos años (6). Los paradigmas anteriores se - muestran inadecuados para resolver una cantidad creciente - de problemas y la comunidad científica considera la posibilidad de adoptar uno nuevo. Así lo expresa Kuhn (9) diciendo que, hubiera sido ya imposible romper con el paradigma - legal-formal anterior si no hubiera habido otro distinto en proceso de preparación. Este nuevo paradigma, que se viene- desarrollando a lo largo de los últimos años es, la teoría- general de sistemas, que aparece hoy como una concepción -- del mundo que pretende alcanzar una redefinición de todas - las ciencias sociales.

1.3.2.2.- Aspectos en favor de la adopción de la T.G.S. en- las ciencias sociales como un nuevo paradigma.

La Teoría de sistemas pretende presentarse hoy, sin-lugar a dudas, como una alternativa viable frente a otras-teorías generales, cuya aplicación en las ciencias socia--les no ha resultado muy útil (6) . Bertalanffy se muestra-categórico en este sentido, diciendo: La teoría de sistema es "la reorientación del pensamiento y de la concepción --del mundo, productos de la introdución del "sistema" como-paradigma analítico, mecanicista, unilateral y causal de-la ciencia física" (2).

El rasgo sobre el que se edifica una posibilidad de-una teoría de sistemas viene dado por la importante fun---ción que cumplen las similitudes observables en todo tipo --de sistemas, similitudes incorporadas, a la teoría de sistemas bajo el nombre de isomorfismos.

Tambien merece destacarse, que si la pretensión de -la teoría de sistemas de constituir un paradigma nuevo para las ciencias sociales se basará únicamente en su carácter complejo y en su intento de reflejar realidades complejas, ello no resultaría suficiente. Además de configurarse-como un cuerpo de conocimiento muy complejo, la teoría de -sistemas tambien pretende ser capaz de ofrecer explicaciones satisfactorias para algunos problemas, hasta ahora no -resueltos, en las ciencias sociales.

La teoría de sistemas sostiene que es capaz de dar -cuenta de las acciones subjetivas significativas de un modo científico y de ofrecer una representación exacta de la interrelaciones entre las estructuras reales y las conceptua les (6).

Las criticas mas frecuentes en la teoría de sistemas se refieren a su capacidad para resolver problemas concretos, cuestionando, con ello, su caracter paradigmatico.

La teoría de sistemas no pretende reemplazar a la metodología científica tradicional (en lo relativo a los criterios de validación científica, comprobación de hipótesis y lenguaje comunicativo neutro) sino, mas bien, integrar esta metodología en el contexto de una interpretación mas general, esto es, de una concepción (6). No es preciso que el paradigma dé respuesta satisfactoria a todos los problemas que se planteén. Será suficiente si redefine el campo científico, orienta la investigación y permite el ejercicio práctico de la ciencia como una "actividad de resolver rompecabezas".

La teoría general de sistemas puede, en efecto, convertirse en el paradigma de las ciencias sociales entendidas como un quehacer disciplinar académico.

1.4.- PLANTEAMIENTOS Y PROBLEMAS METODOLOGICOS: SU EVOLUCION

Dentro de este apartado se trata de recordar primeramente, el concepto de ciencia, su clasificación y evolución científica, así como la evolución del método científico, para pasar a exponer de forma sintética los elementos del proceso científico actual. Todos estos pasos previos nos servirán para poder analizar como dentro de la perspectivas científica actual hay una tendencia válida de aproximación entre las llamadas ciencias humanas y las ciencias naturales, que se utilizará como idea básica en el planteamiento metodológico que se desarrolla en la Tesis.

1.4.1.- La ciencia y el método científico.

1.4.1.1.- Concepto de ciencia, clasificación y evolución científica.

Por ciencia se entiende un sistema de proposiciones formuladas de acuerdo con determinados principios lógicos que sometidas a métodos de control se consideran correctas o bien fundadas. Su objetivo, por lo tanto, consiste en formular proposiciones y enunciar uniformidades de alcance general.

Además de ser un cuerpo de conocimiento, la ciencia es un modo de conocer el mundo. Cabe caracterizarla, pues, en función de un proceso de investigación, de una búsqueda-de la verdad, y es posible caracterizarla también como la estructura o cuerpo formado por la acumulación de las verdades fundadas, o presuntas verdades, que tal búsqueda haya originado.

En cuanto a su clasificación, existen en la actualidad un acuerdo bastante generalizado en dividir a las ciencias en dos grandes grupos, atendiendo a la naturaleza de sus objetos, métodos y criterios de verdad, en: formales y fácticos.

. Ciencias formales.

En las ciencias formales, los objetos de éstas son ideales, siendo su método la deducción y su criterio de verdad la consistencia o no contradicción de sus enunciados. Todos sus enunciados son analíticos, lo que significa que se deducen de postulados o teoremas.

. Ciencias fácticas.

Los objetos de estas ciencias son materiales, su método es la observación y la experimentación (y, en segundo término, también la deducción) y su criterio de verdad es la verificación. Los enunciados son predominantemente sintéticos aunque hay también enunciados analíticos.

Desde el punto de vista de la investigación científica se suele dividir a las ciencias en: empíricas y no empíricas.

- <u>Ciencias empíricas</u>.

Se caracterizan por:explorar, describir, explicar y formular predicciones sobre los hechos del mundo que nos - rodea; sus proposiciones deben ser confrontadas con los he chos y sólo son válidas si son verificadas en la experiencia. Se clasifican a su vez, en ciencias naturales, y cien cias sociales. Las primeras incluyen a la física, la quimi ca, la biología, etc., y las segundas comprenden a la socio logía, la ciencia política, la economía, la histório, etc.

- <u>Ciencias no empíricas</u>.

Estas ciencias vienen caracterizadas por probar sus proposiciones sin recurrir a la experiencia, entre las cua les figuran: la lógica y la matemática.

Relacionando las dos clasificaciones expuestas, se- observa que las que se han denominado ciencias fácticas -- forman parte de las ciencias empíricas.

Esta dicotomía de las ciencias, unida al convencio- nalismo que toda clasificación entraña, da lugar a que se- presenten problemas al intentar situar las denominadas --- ciencias de la cultura y mas concretamente las "ciencias - humanas". En la medida en que cumplan las exigencias de la teoría de las ciencias positivas, se incluirán en una u -- otra clase, si bien la tendencia predominante consiste enincluirlas en el grupo de las ciencias fácticas.

La investigación científica, en el campo de las ciencias empíricas y en especial en las fácticas, comienza con la observación y en el caso de ser posible (en las ciencias naturales) con la experimentación. De la observación sistemática surge una prehipótesis, es decir una conjetura; con esta y otras se elabora una hipótesis. La siguiente fase comienza con la deducción de enunciados predictivos que deben ser confirmados mediante la observación y la experimentación. Posteriormente tanto se haya confirmado o refutado la proposición es necesario proceder a variar las condiciones iniciales antes de recomenzar el ciclo.

El proceso científico se configura así como un proceso dialéctico en el que las hipótesis y teorías propuestas para explicar la realidad se avanzan para su contrastación por los hechos, se mantienen provisionalmente si resultan firmadas por la evidencia empírica y se descartan, modificandolas o sustituyendolas por otras hipótesis y teorías, si la contrastación empírica les resulta adversa.

La máxima aspiración científica es alcanzar las leyes que rigen los fenómenos; si bien, esta esperanza encierra una paradoja: las leyes científicas valen, en realidad con respecto al pasado, ya que nuevos hechos pueden modificarlas o, incluso, invalidarlas.

Para Kuhn(9) la historia de la ciencia se caracteriza por presentar largos períodos de validez permanente de la "ciencia normal" (actividad de resolución de problemas en el contexto de una estructura teoríca aceptada) interrunpidas en ocasiones por saltos discontinuos desde un "paradigma" predominante a otro sin ninguna relación con el anterior.

Según Kuhn el avance científico se hace en base a "revoluciones científicas" entendidas estas como profundas rupturas en el desarrollo de la ciencia y, en particular, como la aparición de notables deficultades en el proceso de comunicación entre científicos durante los periodos de "crisis revolucionarias". La ruptura con la "ciencia normal" está precedida de una proliferación de teorías y de la aparición de controversias metodológicas.

1.4.1.2.- El método y su evolución.

La culminación de la actividad científica es la formulación de teorías, que constituyen el nivel máximo de abstracción a partir de la formulación de los enunciados iniciales. Una teoría es un sistema de leyes científicas, un entramado lógico de relaciones invariantes que, a la vez, generaliza y explica sistemáticamente las formulaciones.

El camino o procedimiento que se sigue para establecer el conjunto de proposiciones que forma la ciencia, constituye el método. El método de cada disciplina es consecuencia del estado de la teoría del conocimiento y de las teorías metodológicas cuyas bases fundamentales son las mismas para todo el ser humano.

La construcción de una teoría científica puede realizarse de dos maneras(*).

1.- Partiendo de observaciones.

2.- Axiomáticamente.

En el primer caso, la construcción empieza con la formulación de enunciados; en el segundo, se expresan directamente los postulados. La teoría científica elaborada por el primer procedimiento se denomina inductivo-deductiva; Los sistemas construidos de acuerdo al segundo, se llaman teorías deductivas. Este último es el método ideal para las ciencias formales, siendo en las ciencias fácticas y empíricas (y también en las ciencias humanas) mas frecuente el primer procedimiento.

A continuación en un breve análisis se examinará como ha evolucionado el método a lo largo de las principales escuelas filosofícas, a partir del Renacimiento.

(*) Sobre este punto se hablará con mayor detalle en el siguiente apartado.

a) Racionalismo.

Para el racionalismo todo conocimiento verdadero tiene su origen en la razón y está basado en el principio de que la fuente del conocimiento científico descansa únicamente en principios en los cuales no puede dudar. Para Descartes es posible llegar a un completo conocimiento del mundo y de los fenómenos por un razonamiento exclusivamente deductivo. Este es el que adoptan las ciencias formales tal como se han definido cuando se ha hecho la primera clasificación de las ciencias. Todos sus enunciados son analíticos, es decir, que se deducen de postulados o teoremas, y la consistencia o no contracción de los mismos constituye el criterio de verdad de estas ciencias. La dificultad de encontrar un método satisfactorio que asegurase la evidencia de aquellos principios, llevó a Leibnitz al establecimiento de un solo principio simple (el de contradicción) del que haría derivar la ciencia perfecta. Sin embargo, el problema de la ciencia experimental, que trata del mundo real, permanece todavia sin solución por parte del racionalismo.

b) Empirismo.

Para el empirismo, al contrario que para el racionalismo, la fuente del conocimiento científico radica en la observación directa a través de los sentidos, es decir en la experiencia. Usa el método inductivo acudiendo, en primer lugar, al estudio de los hechos por medio de la observación y la experimentación. Por la experimentación se repite el fenómeno en el momento deseado y - se le provoca en las circustancias que interesa, lo -- que permite profundizar en el mismo. Algunas ciencias, como las sociales, tienen que limitarse al empleo de - la observación lo que equivale a realizar, por abstracción, una experimentación mental. Del estudio de los- casos particulares se pasa al establecimiento de leyes generales. Esta generalización tan simple propugnada - por Locke ha sido debatida posteriormente por sus sucesores, Berkley y Hume, quienes afirmaron que la ciencia no puede definir ningún principio general sobre el mundo real partiendo de la sola sensación, a lo sumo,- lo que puede hacer es asegurar unas posibilidades para el futuro, basadas en las cosas observadas.

c) El criticismo.

El criticismo de Kant intenta vencer las dificultades de los sistemas anteriores afirmando que tanto la razón o entendimiento como la sensación eran necesarios para llegar a resultados completos de la ciencia. Sólo puede haber conocimiento científico cuando la mente ordena y organiza lo que a través de los sentidos - recibe. La organización de los datos procedentes de --

los sentidos se lleva a cabo por un conjunto de reglas del entendimiento obtenidas racionalmente. Kant buscó los supuestos previos necesarios que deben admitirse para dirigir toda investigación científica; admitió las leyes del espacio (geometría), del tiempo (cinemática) y de la causalidad (mecánica) y partió del estado en que se encontraban estas ciencias en ese momento. El descubrimiento posterior de las geometrías no euclideas y de las mecánicas no newtonianas puso de manifiesto la debilidad de estos supuestos.

d) El pragmatismo.

Aunque introducido por Pierce en 1878 y recogido y extendido por James, a partir de 1907, puede afirmarse que existen rasgos pragmatistas en muchos filósofos tanto antiguos como modernos, desde Protágoras hasta Bergson. El principio fundamental, tal como lo expone James, establece que "para lograr una perfecta claridad en nuestros conocimientos de un objeto, necesitamos sólo considerar qué efectos concebibles, de orden práctico puede implicar el objeto, qué sensaciones podemos esperar de él y qué reacciones habremos de preparar". Intenta ser más bien un método, en lugar de una doctrina filosófica y trata de interpretar cada noción, trazando sus respectivas consecuencias prácticas. Un significado que no sea práctico carece de sentido y to da especulación abstracta que no haga referencia al - hombre es abandonada.No existe nada absolutamente nue vo en el método pragmatista, dice James. Socrates fué uno de sus adeptos. Aristóteles lo usó metódicamen te. Locke, Berkley y Hume, con su ayuda, hicieron im portantes aportaciones a la verdad. Pero en general - lo utilizaron fragmentariamente, no fueron más que -- sus precursores. Puede afirmarse que no se ha genera- lizado hasta nuestro tiempo.

El método pragmático exige la utilización con- junta del método inductivo y del deductivo, requiere- tanto una labor de síntesis como de análisis. Ha su - puesto la conciliación del conflicto tradicional de - ambos métodos, la conjunción de lo abstracto y lo con creto. Cuatro son las fases que componen el método -- pragmático: la observación de los hechos (via inducti va-síntesis); invención de la idea y establecimiento- de la hipótesis; aplicación de esta última y deducción de las consecuencias (vias deductiva-análisis); y -- afrontación de los resultados y verificación de la - hipótesis. De este proceso pueden inducirse nuevas su gerencias, suceptibles igualmente de posterior compro bación. Es por tanto, un proceso iterativo.

1.4.2.- Elementos en el proceso científico actual.

El proceso científico puede describirse de una manera que incluya cinco componentes de información principales que se trasforman unos en otros bajo el control de seis conjuntos principales de métodos (14), de la manera general que muestra la figura 1.1 (*)

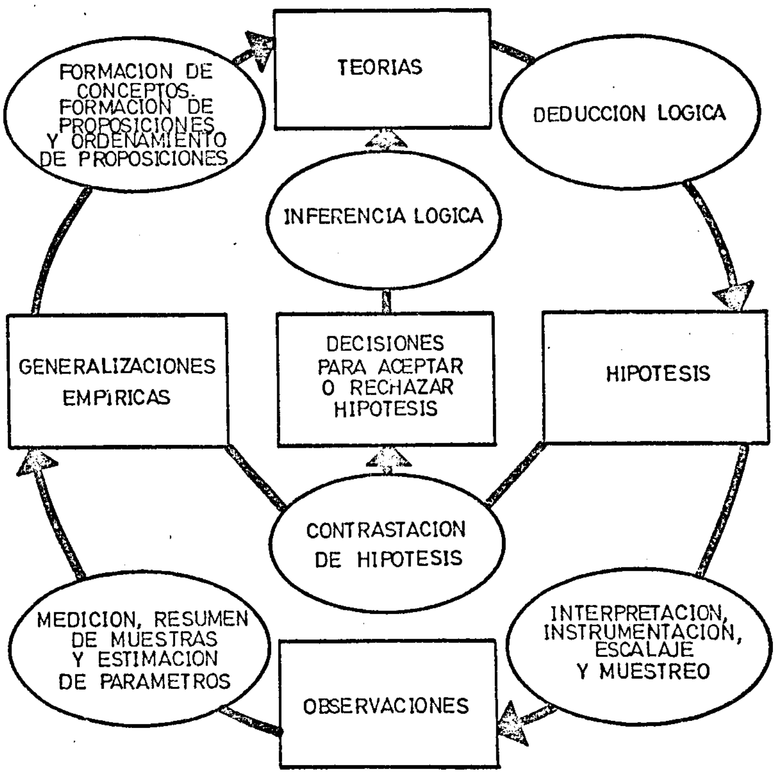

Figura 1.1. Los principales componentes de informacion, controles metodológicos y transformaciones de informacion del proceso científico.

(*) Los componentes de información se representan en rectangulos; los controles metodológicos en óvalos y las transformaciones de información por flechas.

Las observaciones individuales son unidades de información altamente específicas y esencialmente únicas cuya síntesis denotada por generalizaciones empíricas se realiza por medio de mediciones, resumen de muestras y estimación de parámetros. Las generalizaciones empíricas, a su vez son unidades de información que pueden sintetizarse en una teoría vía de formación de conceptos, formación de proposiciones y ordenamiento de proposiciones. Una teoría, el tipo mas general de información, es transformable en nuevas hipótesis a través del método de la deducción lógica. Una hipótesis empírica es una unidad de información que llega a transformarse en nuevas observaciones via de interpretación de la hipótesis en observables, la instrumentación, el escalaje y el muestreo. Estas nuevas observaciones se pueden transformar en nuevas generalizaciones empíricas (de nuevo las mediciones, el resumen de muestras y la estimación de parámetros), y las hipótesis que ocasionaron su construcción pueden entonces ser contrastadas en cuanto a su conformidad con ellas. Tales comprobaciones pueden dar como resultado un nuevo resultado informacional, o sea: una decisión para aceptar o rechazar la verdad de la hipótesis contrastada. Finalmente, se infiere que esta última da lugar a la confirmación, modificación o al rechazo de la teoría.

En la figura 1.2., se muestra repetida la figura1.1., pero dividida por dos lineas: una divide en mitad izquierda y derecha, y la otra mitad superior e inferior. La mitad izquierda representa lo que parece que se quiere decir con construcción inductiva de teorías a partir de, y con la comprensión de, observaciones; mientras que la mitad derecha representa lo que parece que se quiere decir con aplicación deductiva de una teoría a las observaciones y con el conocimiento de observaciones.

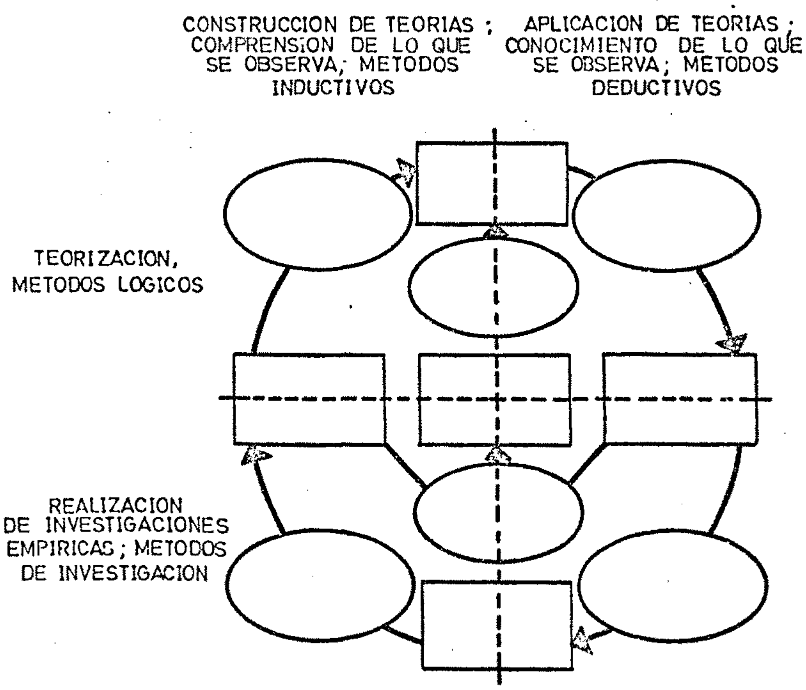

Figura 1.2. Clasificación de los principales componentes, controles y transformaciones del proceso científicos de acuerdo con algunos términos convencionales.

De modo parecido, la mitad superior representa aquello a lo que normalmente se hace referencia al ha blar de teorización, por medio del uso de la lógica inductiva y deductiva como método; mientras que la mitad inferior representa lo que generalmente se quier decir al hablar de hacer investigación empírica, con la ayuda de los que se han llamado "métodos de investigación".

Se hace notar, sin embargo, que, en la figura 1.2., todos los cinco componentes de información, y dos de los grupos de control metodológico, se encuentran en posiciones marginales. La marginalidad de los componentes de información se pretende que signifique su capacidad para transformarse uno en otro, bajo los controles indicados, y para interpretar por tanto, al menos un papel doble en el proceso científico.

1.4.3.- La perspectiva científica actual: aproximación entre las ciencias humanas y naturales.

Desde que a mediados del siglo XVII las ciencias físicas y naturales expermentaron un proceso de rápida expansión en el que no pudieron seguirlas el resto de las disciplinas del conocimiento, el desfase entre unas y otras ha constituido un motivo permanente de desasosiego para humanistas y filósofos, quienes han debatido incesantemente acerca de las peculiaridades y diferencias de las ciencias humanas y las naturales, tratando de establecer un estatuto bien definido para las primeras. El positivismo, el naturalismo, el historícismo, son algunas de las vias a tra vés de las cuales se ha intentado resolver el problema, - que, sin embargo, permanece aún en suspenso (5).

A pesar de todo, las ciencias naturales y las humanas se han acercado más en este tiempo, como consecuencia del debate planteado. Así por ejemplo, la ciencia económica, fuertemente influenciada por los planteamientos epistemológicos de S. Mill, y la geográfica, afectada por su coincidencia parcial de objeto con las naturales; han llevado la aplicación del método científico tan lejos como - sus particulares circustancias les han permitido, tratando de mantener el contacto con las perspestivas científicas dominantes en cada momento (11).

Por otro lado, la utilización de nuevos conceptos- como la noción de estructura en linguistica y en la interpretación de la fenomenologia social y económica,ha provocado una dinámica metodológica en las ciencias humanas que las conduce hacia una coincidencia de planteamientos con- las ciencias naturales. En efecto, el uso del concepto de estructura en linguistica y paralelamente en bioquimíca,- ha llevado a linguistas y biólogos, a partir del descubrimiento del código genético, a plantearse juntos el posi-- ble innatismo de las estructuras de la lengua y otros problemas comunes(12). Igualmente, el paralelismo conceptual de las nociones de estructuras en transformaciones y de - sistema, originaria aquélla de las ciencias humanas y ésta de la física y la biología, ha propiciado la unifica--

ción de criterios.

En otros aspectos existe aproximación entre las ciencias humanas y naturales. Así, si lo que ha alejado a unas y otras es un problema de complejidad de objeto este hecho tiende a estar superado, ya que la física (prototipo de las ciencias de objeto sencillo) comienza a ocuparse de partículas elementales, las cuales forman sistemas cuya complejidad tiene poco que envidiar a la de algunos sistemas sociales. Para su estudio resultan ineficaces los procedimientos analíticos tradicionales de la ciencia, puesto que el mundo de tales partículas no reune ya las condiciones de aditividad e interacción débil que facilitaban la aplicación de aquellos procedimientos.

Resulta por tanto, que la crisis planteada a las ciencias sociales, también ha afectado a la física y a otras ciencias de la naturaleza. Estas crisis, como ya se ha comentado anteriormente, suscitan la aparición de nuevas teorías, esquemas conceptuales o paradigmas que pugnan por reemplazar a los preexistentes, compitiendo por resolver los problemas ante los cuales se manifestaban impotentes y planteando, a su vez, nuevos problemas.

La T.G.S. constituye actualmente una posible alternativa epistemológica, y el análisis de sistemas su correspondiente metodológica, a tener en cuenta ante la crisis generalizada de la ciencia actual.

1.4.4.- Estructuralismo y teoría de sistemas.

La noción de estructura fue formalizada inicialmente a partir de las investigaciones linguísticas de Saussurre - quien designó con ella la integración de las unidades lin-- guísticas en un todo de componentes solidarios, ninguno de- los cuales encuentra significación fuera de la posición que ocupa en el conjunto. Con este contenido, el concepto de es tructura ha sido empleado tanto en linguística como en -- otras ciencias humanas, pero la necesidad de introducir for mulaciones mas precisas del mismo para ajustarlo a los diver sos ámbitos disciplinarios, ha dado lugar a una notable va- riedad de interpretaciones, de las que derivan otras tantas formas de estructuralismo, cada una de las cuales entiende- de modo distinto, la articulación de los elementos en la es tructura, el caracter invariante o mutante de ésta, sus as- pectos funcionales, su exteriorización, etc.

El amplio debate académico suscitado en los años se- senta en torno al estructuralismo, ha contribuido a esclare cer las diversas concepciones del mismo, que pueden sinteti zarse en las tres opciones siguientes(8).

1ª) Concepción de la estructura como "un conglomera- do de elementos que entran en combinación sin ser modela-- dos por alguna estructura preexistente dentro de la totali dad"-mera suma de partes-

2ª) La estructura"es considerada como algo que emerge, que tiene una existencia independiente de sus partes, mientras que domina también el carácter de las partes que contiene".

3ª) "Las relaciones entre los elementos dentro de la estructura son consideradas como expresiones de ciertas leyes de trasformación por medio de las cuales la totalidad misma llega a verse transformada".

De hecho, la oposición principal entre los diversos estructuralismos se halla en la consideración de las estructuras como "sistema de transformaciones" o bien como " formas estáticas" intemporales (7). Esta última acepción ha sido sostenida tanto en el campo de la linguística (Saussure, Jakobson), como en la antropología (Lévi-Strauss, Radcliffe-Brown), o incluso en la crítica cultural (Barthes).

El "estructuralismo" como enfoque análitico está hoy profundamente enraizado en cualquier rama de la ciencia, y tanto se ha usado el término estructura que no se está lejos de convertirlo en una especie de comodín para-tomando de nuevo la expresión de Goethe- cubrir verdaderos vacios de pensamientos.

Las ideas de conjunto, de relaciones entre partes, de autorregulación a través de transformaciones en los que inciden las contradicciones en presencia, éstas podriamos decir que son las notas caracteristicas comunes que hoy pueden --

apreciarse en las corrientes estructuralistas.

El concepto de estructuras en transformacion es frecuentemente asimilado, explicita o implicitamente, con el de sistema, sin embargo, los propios linguístas se han esforzado en distinguirlos destacando el carácter englobante del sistema respecto a la estructura, hablando de la "estructura del sistema". El primer término designaría en esta expresión cada una de las diversas configuraciones especificas posibles de los elementos integrantes de un sistema, constituidos por las combinaciones relevantes formadas entre ellos de entre la totalidad de las combinaciones posibles dentro del sistema. Estructura y sistema son, pues, notaciones complementarias, pero mientras el análisis de la primera se propone revelar lo que cada combinatorio tiene de específico, el del segundo pretende poner de manifiesto lo que las diversas combinatorias tienen en común.-

La Teoría General de Sistemas afronta, a través del análisis estructural la búsqueda de una lógica general del comportamiento de los contenidos de las diversas ciencias procediendo mediante la ligazón de la lógica particular del contenido de cada una de ellas a través de la lógica sin contenido de las matemáticas.

Esta búsqueda de relaciones comunes en los "fenómenos de organización" subsisten a pesar del avance teóricamente inexorable de la entropia, ha permítido formulaciones preci sas del concepto de sistema como la que lo considera "un conjunto de elementos cibernéticamente ligados en estructuras negeentrópicas sucesivas".

1.4.5.- El problema de la agregación: del comportamiento individual al colectivo.

El problema de la agregación es, en principio, un problema puramente lógico. Se trata de determinar en el análisis que se aborda en la tesis el comportamiento de un determinado grupo de escolares sobre la base del conocimiento del comportamiento de esos escolares a nivél individual. Como primera explicación quizá sea útil proponer un ejemplo que pertenece al campo de la física para así poder analizar la pura estructura lógica de los problemas de agregación que como se verá, son generales a todos las ciencias que han de operar sobre la doble base de unidades individuales y unidades colectivas o, simplemente, conjuntos de unidades individuales.

Como es sabido, en un sistema termodinámico cerrado la temperatura del mismo está positivamente correlacionada con la velocidad media a la que se mueven las partículas que lo componen. A mayor temperatura mayor velocidad media de movimiento de las partículas del sistema y, recíprocamente la menor temperatura aparece acompañada de un desplazamiento medio más lento de dichas partículas. Como no estamos interesados en problemas de causalidad, no es relevante en es te contexto saber si la temperatura está determinada por la velocidad con que se mueven las partículas o esta última es la causa de la temperatura del sistema.

Es claro que la trayectoría y velocidad a que se -- mueve una de las partículas concretas del sistema es imprevisible porque su dirección y velocidad constituyen una variable aleatoria. Pero el enorme número de partículas que- existen en el sistema hace posible aplicar teorémas estadísticos bien conocidos que permiten predecir con error despreciable el comportamiento medio agregado de todas las partículas.

Aparece aquí claramente el problema caracteristico - de agregación: inferir cuál será el comportamiento de un -- conjunto elevado de partículas sobre la base de ciertas hipótesis relativas al comportamiento individual de las mis-- mas.

En este caso el problema de pasar del análisis individual (particular) al colectivo (conjunto de partículas - que forman el sistema) se resuelve mediante los siguientes pasos:

<u>Primero</u>.- Se formula una hipótesis individual de -- comportamiento: la velocidad media de cada partícula es -- una variable aleatoría cuya media aumenta con la temperatura del sistema.

Segundo.- Se formula un supuesto de agregación, es decir, un supuesto sobre la interrelación existente entre varias unidades individuales puestas en contacto: la coexistencia de varias partículas en el mismo sistema sólo - produce alteraciones asistemáticas en el comportamiento - individual de cada una de ellas.

Tercero.- Se aplica un teorema de agregación: por- la ley de los grandes números, el aumento de temperatura- se asocia a una elevación de la velocidad media con que se desplazan las partículas.

Resumiendo, cada partícula tiene una ley de comportamiento individual. Las interacciones entre partículas no alteran de forma sistemática este comportamiento indivi--- dual. Si el número de partículas es suficientemente elevado, las alteraciones en el comportamiento individual de -- las mismas, al ser errático y no sistemático, tenderá a -- compensarse y, por media, podrá con toda seguridad aso--- ciarse el aumento de temperatura a mayor velocidad media - de desplazamiento de las partículas.

Debe observarse que no estamos en condiciones de decir cómo se comportará una partícula individual del sistema porque una cualquiera de las partículas, elegida al -- azar, puede presentar un comportamiento totalmente anómalo o errático. Pero lo que interesa es que el conjunto de -- ellas se comportará, sin lugar a dudas, de una forma deter minada y predictible.

El ejemplo descrito es especialmente iluminador porque permite señalar los tres pasos que se encuentran presentes en cualquier proceso de agregación tanto en las ciencias físicas como en las sociales. Estos son:

1.- Unos supuestos sobre el comportamiento de las unidades individuales.

2.- Un supuesto agregativo sobre la interación entre unidades elementales cuando estas se ponen en contacto.

3.- Un proceso lógico de agregación (en el ejemplo descrito, la ley de los grandes números).

CAPITULO II

LA NOCION DE SISTEMA DENTRO DE LA T.G.S. Y LOS CONCEPTOS MATEMATICOS PREVIOS PARA EL ANALISIS DE UN SISTEMA

2. LA NOCION DE SISTEMA DENTRO DE LA T.G.S. Y LOS CONCEPTOS MATEMATICOS PREVIOS PARA EL ANALISIS DE UN SISTEMA

2.1. ASPECTOS DE LA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS (T.G.S.)

2.2. CONCEPTOS ALGEBRAICOS

2.3. ISOMORFISMO

2.1.- ASPECTOS DE LA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS (T.G.S.)

2.1.1.-El concepto de la Teoría General de Sistemas.

La Teoría General de Sistemas, en el sentido mas amplio, se refiere a una colección de conceptos generales, principios, instrumentos, problemas, métodos y técnicas relacionados con los sistemas.

Como señala Ludwig von Bertalanffy (3), aunque la noción de sistema general, y la idea de teoría general de sistemas, son relativamente recientes. Su concepción y desarrollo se debe al propio Bertalanffy, biólogo alemán, que la esbozó a partir de los últimos años de la década de los treinta.

La necesidad de una comprensión más profunda de los fenómenos biológicos, psicológicos y sociales, despertó el interés en el estudio de sistemas que, estaban constituidos por partes ligadas por interacciones fuertes entre sí. Este nuevo campo de estudio contrastaba con el método clásico "Newtoniano", que concebía el objeto de investigación científica con una colección de componentes aislados, de cuyas propiedades intentaban deducirse las propiedades de todo el objeto, sin considerar las interacciones entre las partes (4).

Bertalanffy, partiendo de la biología, encontró un paralelismo de principios cognoscitivos generales en tre esta ciencia y otras que partían de planteamientos-independientes. Esto se concretaba en modelos, princi--pios y leyes formalmente idénticos aplicados en campos diferentes. Como consecuencia de estas propiedades gene rales no resultaba difícil encontrar similitudes estruc turales o, formular isomorfismos entre los distintos --campos de la ciencia.

Por ello la T.G.S. se propone como meta, el evi-tar la repetición de esfuerzos inútiles en la búsqueda-de principios en un campo de estudio , cuando ya fueron descubiertos en otros en los que la estructura teoríca-requerida estaba adelantada (3).

La Teoría General de Sistemas es una teoría mul-tidisciplinar igualmente aplicable a ciertos tipos de -fenómenos en todas las disciplinas.

Se ha constituido una sociedad científica, la So ciety for General Systems Research,cuyos objetivos se -pueden considerar una clara exposición de los que se --persiguen en la investigación en la Teoría General de -Sistemas. Estos objetivos son los siguientes:(1)

1.- Investigar el isomorfismo de conceptos, le--yes y modelos en varios campos y facilitar transferen--cias de un campo a otro.

2.- Promover el desarrollo de modelos teóricos - adecuados en aquellos campos que carecen de ellos.

3.- Minimizar la duplicación de esfuerzos teóricos en campos diferentes.

4.- Promover la unidad de la ciencia a través de la mejora de comunicación entre especialistas de distintos campos.

2:1.2.- Aspectos básicos en el análisis de sistemas.

A continuación se describen a manera introductoria los conceptos utilizados para el análisis de un sistema en el marco de la T.G.S., si bien en el siguiente capítulo en el apartado 3.1., se definirán todos estos conceptos de una forma clara y precisa dentro de un -- planteamiento estrictamente matemático.

Comenzando por la definición de sistema, entre - las muchas que se han elaborado, función del sistema específico estudiado, quizá la más clara, dada por Laszlo (7) y Klir y Valach (6), es la que lo define "como un - conjunto S, compuesto por un conjunto de elementos E ((e_o, e_1, ..., e_i, ..., e_n), y un conjunto de relaciones R (r_{o1}, r_{o2}, ..., r_{ij}, ..., r_{nn})". Los ele-- mentos del conjunto E, se pueden identificar como objetos propiamente dichos, o como atributos* variables de - los objetos. Analogamente los elementos del conjunto de- relaciones R, puede estar constituido por relaciones en- tre atributos de dichos objetos.

El sistema quedaría pues definido por:

$$S = \{E, R\}$$

o de una manera más desarrollada por :

$$S = \{E_1, E_2, R_1, R_2\}$$

donde:

E_1: Conjunto de objetos propiamente dichos.

E_2: Conjunto de atributos de los objetos.

R_1: Conjunto de relaciones entre los elementos de E_1

R_2: Conjunto de relaciones entre los elementos de E_2

Pasando de esta definición a un nivel de análisis superior, se establecen los siguientes conceptos básicos sin que su orden de descripción signifique relación je- rárquica alguna.

a) Subsistema.

Se entiende por subsistema, cualquier parte del - sistema inicial, que pueda definirse también como tal, y

---

* Entendiendo por atributo una propiedad o caracteristica

que tenga unas ciertas relaciones interiores que la distingan del resto de las partes del sistema como un todo.

b) Entorno del sistema.

Se considera como entorno del sistema al conjunto de todos aquellos sistemas que se relacionen con el- que se considera a estudio.

c) Estructura del sistema.

Se considera como estructura del sistema, la forma en que están interrelacionados los elementos del sistema.

d) Estado de un sistema.

Se define como estado de un sistema al valor de- los elementos y sus relaciones en un determinado momento en el tiempo.

e) Espacio de fase de un sistema.

Se entiende como espacio de fase de un sistema - al conjunto de todos los estados posibles del sistema.

f) Comportamiento de un sistema.

Se define por comportamiento de un sistema a la- forma en que el sistema reacciona frente a un estímuloo acción determinada.

Todos estos conceptos tienen cabida en el estudio de un sistema, cualquiera que fuera, al encuadrarle dentro del análisis de la teoría general de sistemas.

2.1.3.- Tipología de sistemas.

Existen distintos tipos de sistemas obedeciendo a -- distintas clasificaciones que puedan hacerse.

En primer lugar cabe distinguir entre sistemas reales y conceptuales, según sus objetos o elementos sean entes materiales y existan en el espacio y el tiempo real o - sean conceptos de cualquier tipo.

Usando los criterios de : complejidad y determinismo, Stafford Beer (2) clasifica los sistemas en cuatro grupos, - desde los deterministas simples a los probabilisticos complejos,pasando por los deterministas complejos y los probabilistas simples.

Desde un punto de vista eminentemente práctico, los - sistemas de mayor interés son: sistemas abiertos y sistemas- cerrados.

Un sistema es abierto cuando no está aislado de su entorno o medio, existiendo interacciones, como intercambios - de materiales, energia o información. En caso contrario se -

dice que el sistema es cerrado. La física ordinaría sólo se ocupa de sistemas aislados del medio circundante. Así, la fisicoquímica nos habla de las reacciones, de sus velocidades, y de los equilibrios químicos que acaban por establecerse en un recipiente cerrado donde se mezclan cierto número de sustancias reaccionantes. La termodinámica declara expresamente que sus leyes sólo se aplican a sistemas cerrados. En particular, el segundo principio afirma que, en un sistema cerrado, cierta magnitud, la entropía, debe aumentar hasta el máximo, y el proceso acabará por detenerse en un estado de equilibrio.

Sin embargo, se encuentran sistemas que, por su misma naturaleza y definición, no son sistemas cerrados.

Todo organismo viviente es ante todo un sistema abierto. Se mantiene en continua incorporación y eliminación de materia, constituyendo y demoliendo componentes, sin alcanzar, mientras la vida dure, un estado de equilibrio químico y termodinámico, sino manteniendose en un estado llamado uniforme (Steady) que difiere de aquél.

Según la formulación de Klir y Valach (6) los sistemas abiertos o cerrados se identificaron como:

<u>Sistema abierto</u>.

$$\left.\begin{array}{l} r_{oi} \neq 0 \\ r_{io} \neq 0 \end{array}\right\} \forall i$$

<u>Sistema cerrado</u>.

$$\left.\begin{array}{l} r_{oi} \neq 0 \\ r_{io} \neq 0 \end{array}\right\} \forall i$$

donde r_{oi} expresa la relación entre el entorno y los elementos del sistema, y r_{io} la relación entre los elementos e_i del sistema y el entorno e_o.

Si una de las relaciones r_{oi}, r_{io} es distinta de cero se denomina sistema relativamente cerrado, que puede convertirse en otro sistema cerrado con un elemento más que el primitivo, es decir con(n + 1) elementos.

2.1.4.- La formulación de isomorfismo en la T.G.S.

La formulación de isomorfismo en teoría de sistemas es de gran importancia. Como ejemplo se recuerda que el objeto principal que establece el programa de la Society for General Systems Research es:

- Investigar el isomorfismo de conceptos, leyes y modelos en varios campos y facilitar transferencias de un campo a otro.

Bertalanffy (3), entiende el isomorfismo, en un sentido muy general, distinguiendo tres clases o niveles en las similitudes entre fenómenos: analogías, homologías y explicaciones.

. Las analogías serían aquellas similitudes superficiales entre fenómenos que no se corresponden ni en factores causales ni en leyes pertinentes. Así existen analo gías entre el crecimiento de un organismo con el de un - cristal o el de una celda osmótica, ya que hay parecidos superficiales en uno u otro aspecto, pero puede afirmarse con seguridad que el crecimiento de una planta o de - un animal no sigue la pauta del crecimiento de un cris-- tal o de una estructura osmótica, y las leyes pertinen-- tes difieren.

. Las homologías se presentan cuando difieren los factores eficientes, pero las leyes respectivas son formalmente identicas. Semejantes homologías tienen considerable importancia como modelos conceptuales en la cien-- cia. Son ejemplos la homología existente entre la transmisión de calor y el fluido de una sustancia. Estas homologías físicas tienen ya caracter científico, pero en -- forma más general, las homologías lógicas, no solo permiten el isomorfismo en la ciencia sino que, como modelo - conceptual, está en situación de dar instrucciones para- la consideración y la eventual explicación de fenómenos.

. La explicación es, el enunciado de condiciones- y leyes específicas que son válidas para un objeto separado o para una clase de objetos determinados. En lenguaje lógico-matemático esto quiere decir que las funciones generales de una ecuación son sustituidas por funciones- especificadas aplicables al caso en cuestión, pues toda- explicación científica requiere el conocimiento de sus - leyes específicas.

Otra interpretación parecida,pero no identica,-- del isomorfismo se encuentra en Chadwick(5) que expre-- sa: Se obseva un interés en partir de analogías genera-- les (similaridad, paralelismo) hacia homologías (similaridad de posición o estructura, pero no de función), una tendencía a la creación de homeomorfías (igualdad o similaridad de forma) y homeónomos (con la misma ley de crecimiento) y sobre todo de isomorfismos, es decir, correspondencias en formas y naturaleza y en las operaciones.

2.2.- CONCEPTOS ALGEBRAICOS

Una vez expresados los aspectos básicos en la Teoría General de Sistemas, se introducen, dentro de este apartado, todas las definiciones básicas del álgebra(desde conjunto a aplicaciones, pasando por los distintos tipos de relaciones: binaría, equivalencia y orden) de manera que sirven de apoyo para poder plantear de forma precisa la definición y estudio de un sistema.

2.2.1.- Noción de conjunto.

La noción de conjunto corresponde a las nociones corrientes de conjunto, de colección, de agrupación, de clase, etc, de objetos de cualquier naturaleza; en el lenguaje corriente estos objetos se llaman elementos, miembros, individuos,del conjunto, de la colección, de la agrupación,(8).

En matemáticas se han escogido las palabras conjunto y elemento y se expresa:

Un conjunto está constituido de elementos, palabras ambas que están precisadas por las siguientes reglas:

1.- Un conjunto E está bien definido cuando se posee un criterio que permite afirmar si el objeto a pertenece al conjunto E o no pertenece a dicho conjunto.

Pertenencía $a \in E$

Negación pertenencia $a \notin E$

2.- Un mismo ser matemático no puede ser a la vez un conjunto y un elemento de este conjunto.

3.- La colección de todos los conjuntos imagina-- bles no es un conjunto.

2.2.2.- Relaciones.

2.2.2.1.- Producto cartesiano de conjuntos.

El producto cartesiano de conjuntos consiste en - formar con la ayuda de los objetos o elementos matemáticos x,y, enunciados en ese orden, un tercer objeto o elemento que demostraremos (x,y) y que llamaremos pareja -- (x,y).

La operación que consiste en formar parejas estará sometida a una sola regla, la siguiente: Para que se- verifique $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ es necesario y suficiente- que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Es esencial no confundir la pareja(x,y), con el - conjunto $\{x,y\}$.

A los elementos x e y se les denominan primera y- segunda componente de la pareja (x,y), respectivamente.

DEFINICION 2.1. (Producto cartesiano de conjuntos.)

Se llama producto cartesiano de los conjuntos A y B, y se representa por A x B, al conjunto cuyos elementos - son todas las parejas ordenadas(a,b), tales que $a \in A$ y $b \in B$.

El producto cartesiano de tres conjuntos, A x B x C será el conjunto de las ternas ordenadas (a,b,c,) tales- que $a \in A$, $b \in B$, y $c \in C$.

De manera análoga se definiría el producto cartesia no de n conjuntos, siendo n un número natural mayor que3.

Cuando los n factores de un producto cartesiano son iguales a un mismo conjunto A, se expresará dicho produc to por A^n.

DEFINICION 2.2. (Diagonal.)

Se define como diagonal de A^n al subconjunto D, de- finido por $D = \{(a,a,\ldots a) \ / \ a \in A\} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2.2.2.2.- Relaciones binarias.

a).- Relación binaria. Gráfica.

DEFINICION 2.3. (Relación binaria).

se define como relación binaria entre dos conjuntos A y B a todo subconjunto R del producto A x B.

En lugar de $(x,y) \in R$ generalmente escribimos x R y, y se leerá "x está en relación R con y". Si (x,y) R escribimos $x \not R\, y$.

Si $R \subset A \times A$ se dirá que R es una relación binaria sobre el conjunto A.

Al conjunto A se le llama conjunto inicial, y al B, conjunto final.

Dentro del conjunto A, no todos sus elementos tienen su correspondiente en B. Al conjunto de los elementos de A que tienen correspondiente en B se le llama conjunto original u origen. Analogamente al conjunto de los elementos de B que tienen correspondiente en A, se le llama imagen. (8)

Se puede obtener la <u>gráfica</u> de una relación entre dos conjuntos A y B de la siguiente forma: representaremos los elementos de los conjuntos A y B por puntos sobre sendos ejes perpendiculares entre si; por los puntos así marcados sobre cada eje, se trazan rectas paralelas al otro; los puntos de intersección de estas rectas representan a los elementos del conjunto $A \times B$; los pertenecientes al conjunto $R \subset A \times B$ se dibujan más gruesos.

b).- <u>Propiedades de la relación binaria</u>.

Una relación binaria R sobre el Conjunto A, puede cumplir las siguientes propiedades:

- <u>Reflexiva</u> si

  $(\forall x \in A) \qquad x \, R \, x$

- <u>Simétrica</u> si

  $(\forall x,y \in A) \qquad [x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x]$

- <u>Antisimétrica</u> si

  $(\forall x,y \in A) \qquad [x \, R \, y \text{ e } y \, R \, x] \Leftrightarrow x = y$

- <u>Transitiva</u> si

  $(\forall x,y,z \in A) \qquad [x \, R \, y \text{ e } y \, R \, z] \Rightarrow x \, R \, z$

2.2.2.3.- Relaciones de equivalencia

DEFINICION 2.4. (Relacion de equivalencia.)

Una relación binaria entre elementos de un conjunto A es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica, y transitiva.

Se escribirá

$$x \equiv y \pmod R$$

que se lee "x e y son equivalentes -o congruentes- módulos R", o bien "x es equivalente -o congruente- a y, módulos R". Luego si R es una relación de equivalencia, tenemos;

$$(\forall\ x \in A) \qquad x \equiv x \quad (\text{mod } R)$$

$$(\forall\ x,y \in A) \quad [x \equiv y\ (\text{mod } R) \Rightarrow y \equiv x\ (\text{mod } R)]$$

$$(\forall x,y,z \in A) \quad [x \equiv y\ (\text{mod } R) \text{ e } y \equiv z\ (\text{mod } R) \Rightarrow x \equiv z\ (\text{mod } R)]$$

CLASES DE EQUIVALENCIA MODULAR. CONJUNTO COCIENTE.

Si R es una relación de equivalencia definida sobre A, se llama clase de equivalencia, módulo R, toda parte de A descrita por todos los equivalentes a uno de ellos $\underline{x}$, se le designará $\underline{\dot{x}}$, se dirá que $\underline{x}$ es un representante de la -- clase $\underline{\dot{x}}$.

Todo $\underline{x}'$ equivalente a x módulo R pertenece a $\dot{x}$; luego $\dot{x}' \subset \dot{x}$; como la relación $x = x'$ (mod R) es simétrica, se-tiene también $\dot{x} \subset \dot{x}'$; finalmente

$$[x = x' \quad (\text{mod } R)] \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{x}'$$

Consideremos dos clases de equivalencia módulo R, - $\dot{x}$ e $\dot{y}$; o bien son disjuntos, o bien existe z de A tal que-

$$z \in \dot{x} \qquad \text{y} \qquad z \in \dot{y}$$

luego z es equivalente, módulo R, a $\underline{x}$ y a $\underline{y}$ y en virtud de la transitividad $\underline{x}$ e $\underline{y}$ son equivalentes, módulos R; - luego las clases $\dot{x}$ e $\dot{y}$ se confunden; por tanto:

TEOREMA 2.1. Dos clases de equivalencia, módulo R, son -- disjuntas o confundidas.

Por otro lado, todo $\underline{x}$ de A pertenece al menos a una clase $\underline{\dot{x}}$ (aquella que representa) y a una sola, puesto que dos clases son disjuntas o confundidas; en fin, ninguna-- clase es vacia, puesto que $\underline{\dot{x}}$ contiene al menos a $\underline{x}$, luego al conjunto de las clases módulo R es una partición de A.

Reciprocamente, sea $\mathcal{P}$ una partición de A, la relación " x e y pertenecen al mismo subconjunto A_1 de la partición" es visiblemente una relación de equivalencia definida sobre A, luego:

TEOREMA 2.2. Dada una relación de equivalencia R definida sobre un conjunto A, el conjunto de las clases de equiva-- lencia, módulo R, es una partición de A. Recíprocamente, - toda partición de A define una relación de equivalencia sobre A.

DEFINICION 2.5. (conjunto cociente.)

El conjunto de las clases de equivalencia de A, módulo R, se llama conjunto cociente de A por la relación de -- equivalencia R y se designa A/R.

2.2.2.4.- Relaciones de orden.

a).- <u>Relaciones de orden. Relación de preorden. Relación de orden estricto</u>.

DEFINICION 2.6. (Relación de orden)

Se define como relación de orden, sobre el conjunto

A, y la simbolizaremos por $\leq$, a toda relación binaria sobre A que cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Si solo verifica las propiedades reflexiva y transitiva, se denominará relación de preorden.

Se considera que $y \geq x$ es sinónimo de $x \leq y$, y leeremos esta relación de una cualquiera de las maneras que sigue:

$$x \text{ es } \left\{\begin{array}{l}\text{menor}\\ \text{inferior}\\ \text{no mayor}\end{array}\right\} \text{ que } y, \text{ o bien } \quad y \text{ es } \left\{\begin{array}{l}\text{mayor}\\ \text{superior}\\ \text{no menor}\end{array}\right\} \text{ que}$$

DEFINICION 2.7. (Relación de orden estricto.)

Llamaremos relación de orden estricto, sobre el conjunto A, la simbolización por $<$, a toda relación binaria sobre A que cumpla las propiedades antisimétrica y transitiva.

Consideramos que $y > x$ es sinónimo de $x < y$, y leeremos esta relación de una cualquiera de las maneras que sigue:

$$x \text{ es } \left\{\begin{array}{ll}\text{estrictamente} & \text{menor}\\ \quad '' & \text{inferior}\end{array}\right\} \text{ que } y, \text{ o bien}$$

$$y \text{ es } \left\{\begin{array}{ll}\text{estrictamente} & \text{mayor}\\ \quad '' & \text{superior}\end{array}\right\} \text{ que } x$$

Observese que una "relación de orden estricto" no es una "relación de orden".

Dada una "relación de orden" se establece de una ma nera inmediata su correspondiente "relación de orden estricto", y reciprocamente.

DEFINICION 2.8. (Relación de preorden.)

Se dice que A es un conjunto ordenado (preordenado) si sobre A se ha definido relación de orden (preorden)

b).- Conjunto totalmente ordenado.

DEFINICION 2.9. (Conjunto totalmente ordenado.)

Diremos que dos elementos x,y de un conjuntc "preordenado" A son comparables si la relación "$x \leq y$ ó $y \leq x$" es cierta.

Se dice que un conjunto A está totalmente ordenado si es ordenado y si dos elementos cualesquiera de A son comparables. (Se dirá también que la relación de orden correspondiente es una relación de orden total).

Cuando la relación de orden definida sobre un conjunto no es una relación de orden total se suele decir que la ordenación es parcial.

c).- Máximo y mínimo. Conjuntos bien ordenados.

Si en un conjunto ordenado A existe un elemento a tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$, entonces a es el único elemento de A que posee esa propiedad. En efecto, pues si se tiene también $b \leq x$ para todo $x \in A$, se deduce que $a \leq b$ y $b \leq a$, y en consecuencia $a = b$.

Estas consideraciones nos permiten establecer la definición siguiente:

DEFINICION 2.10. (Máximo y mínimo.)

Sea A un conjunto ordenado. Se dice que un elemento $a \in A$ es el mínimo (máximo) elemento de A si, para todo $x \in A$, se tiene $a \leq x$ $(x \leq a)$.

Un conjunto ordenado no tiene porqué admitir necesariamente máximo o mínimo.

DEFINICION 2.11. (Conjunto bien ordenado.)

Se dice que un conjunto está bien ordenado si está ordenado y si toda parte no vacía de A admite un elemento mínimo.

Un conjunto bien ordenado A está totalmente ordenado, puesto que toda parte $\{x,y\}$ de A posee un elemento mínimo.

d).- Mayorante y minorante; extremo superior e inferior. Maximal y minimal.

DEFINICION 2.12. (Mayorante y minorante.)

Sea A un conjunto preordenado y X una parte de A.- Se llama minorante ó cota inferior (mayorante ó cota superior) de X en A a todo elemento $x \in A$ tal que, para todo $y \in X$ se tiene $x \leq y$ $(x \geq y)$. Se dice entonces que se minora (mayora) X.

Evidentemente el conjunto de los minorantes (mayorantes) de una parte X de un conjunto preordenado A puede ser vacío.

De una parte X de A, cuyo conjunto de los minorantes (mayorantes) es no vacío, se dice que es minorada (mayorada). Una parte a la vez minorada y mayorada se dirá acotada.

Por otra parte, si X es minorada (mayorada acotada), toda parte de X es minorada (mayorada, acotada).

DEFINICION 2.13. (Extremo inferior, extremo superior.)

Sean A un conjunto ordenado y X una parte de A. Se dice que un elemento de A es el extremo inferior (extremo superior) de X en A si es el máximo (mínimo) elemento del conjunto de los minorantes (mayorantes) de X en A.

Dada una parte X de un conjunto ordenado A denotamos por $\sup_E^X$ $(\inf^X)$, o bien sup X (infX) cuando no haya posibilidad de confusión, al extremo superior (extremo inferior) de X en E, cuando este extremo existe.

El extremo superior (inferior) de un conjunto con dos elementos $\{x,y\}$ se denotará (cuando existe) -------- $\sup(x,y)$ $(\inf(x,y))$.

Son de fácil comprobación las dos afirmaciones siguientes:

1.- Si una parte X de un conjunto ordenado A admite un - elemento máximo a, entonces a es extremo superior de X en A.

2.- Toda parte X, de un conjunto bien ordenado A, mayorada- en A, admite un extremo superior en A.

DEFINICION 2.14. (Elemento maximal y minimal.)

Sea un conjunto ordenado. Llamaremos elemento mini-- mal (maximal) de A a todo elemento $a \in A$ tal que la rela--- ción $x \leq a (x \geq a)$ implica $x = a$

Resulta inmediato comprobar que: si A admite un míni mo a, entonces a es el único elemento minimal de A.

2.2.3.- Aplicaciones.

2.2.3.1.- Aplicación. Dominio y recorrido. Imágenes direc-- tas y recíprocas.

DEFINICION 2.15. (Aplicación.)

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se llama aplica ción de A en B a toda relación binaría F entre A y B en la- que, para todo $x \in A$, existe un único $y \in B$ tal que $(x,y) \in F$.

Se suele expresar también que F es una función defi- nida sobre A con valores en B, en cuyo caso al elemento y - tal que $(x,y) \in F$ se le llama valor de la función F en x, y- se escribe $y = F(x)$. Los términos función y aplicación son- pues sinónimos y se emplean indistintamente en la práctica.

Para indicar que F es una aplicación de A en B se - escribe

$$F : A \rightarrow B.$$

Al conjunto A se le llama domínio u original de la- función.

Al conjunto de los $y \in B$ tales que existe un $x \in A$ -- que verifica $y = F(x)$ se llama recorrido o imagen de la -- función.

Si es $A_1 \subset A$ se llama imagen directa de A_1 por F, y- se representa por $F(A_1)$ al conjunto de los elementos $y \in B$- para los que existe un $x \in A_1$ tal que $F(x) = y$

Si es $B_1 \subset B$ se llama imagen recíproca de B_1 por F, y se representa por $F^{-1}(B_1)$ al conjunto de los elementos -- $x \in A$ tales que $F(x) \in B_1$.

DEFINICION 2.16. (Restricción de una aplicación a un sub- conjunto.)

Siendo f una aplicación de A en B y X una parte de- A, se llama restricción de f a X la aplicación g de X en B definida por

$$\forall x \in X \qquad g(x) = f(x)$$

de f se dice que es una prolongación de g.

2.2.3.2.- Aplicaciones sobreyectivas, inyectivas y biyectivas. Transformaciones.

DEFINICION 2.17. (Aplicación sobreyectiva.)

Se dice que $F : A \to B$ es una aplicación sobreyectiva cuando $F(A) = B$, es decir cuando todo elemento de B es la imagen de al menos un elemento de A, o también cuando el conjunto imagen coincide con B.

DEFINICION 2.18. (Aplicación inyectiva.)

Se dice que $F : A \to B$ es una aplicación inyectiva cuando $F(x) = F(y)$ implica $x = y$, es decir cuando todo elemento de B es imagen de a lo sumo un elemento de A. También puede definirse como $x \neq y \Rightarrow F(x) \neq F(y)$.

DEFINICION 2.19. (Aplicación biyectiva.)

Se dice que $F : A \to B$ es una aplicación biyectiva cuando es sobreyectiva e inyectiva, es decir cuando todo elemento de B es imagen de un elemento de A y solo de uno.

DEFINICION 2.20. (Transformaciones.)

Se define como transformación a toda aplicación biyectiva de un conjunto en si mismo.

2.2.3.3.- Relación de equivalencia definida por una aplicación.

TEOREMA.- 2.3.

Sea $f : A \to B$. La relación $x R y$ si. $f(x) = f(y)$ es una relación de equivalencia sobre A.

En efecto cumple las propiedades:

1.- Reflexiva.

$$f(a) = f(a) \Rightarrow a \; R \; a.$$

2.- Simétrica.

$$\text{Si} \quad a \; R \; b \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow b \; R \; a.$$

3.- Transitiva.

$$\text{Si} \quad a \; R \; b \quad y \quad b \; R \; c \Rightarrow f(a) = f(b) = f(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \; R \; c.$$

2.3.- ISOMORFISMO

2.3.1.- Introducción.

Una vez desarrollados los conceptos algebraicos - previos necesarios para poder abordar en el siguiente capítulo la definición de sistema, se procede en el presente apartado a profundizar en conceptos tales como son: leyes de composición interna y externa, noción de estructura y homomorfismos e isomorfismos, inevitables para poder seguir y comprender el planteamiento metodológico de la - tesis al analizar el sistema de escolares de E.G.B. a nivel urbano.

2.3.2.- Ley de composición interna.

DEFINICION 2.21. (Ley de composición interna.)

Se llama ley de composición interna entre elementos de un conjunto A, a toda aplicación de una parte E de A x A en A. Se dice entonces que A está provisto de la -- ley interna considerada.

Es decir, a la pareja (x,y) de E, una ley interna- hace corresponder un elemento único z de A

$$(x,y) \rightarrow Z = F(x,y)$$

Cuando E = A x A, se dice que la ley está definida sobre todo A, se dice entonces que es una operación inter na sobre A o una ley interna sobre A.

El valor F(x,y) que corresponde a la pareja (x,y) - se llama el compuesto de x y de y que son sus términos. - El compuesto lo designaremos con el símbolo

$$x \; T \; y$$

Dada la ley interna $(x,y) \rightarrow x \; T \; y$, la ley interna $(x,y) \rightarrow y \; T \; x$ se llama opuesta a la primera.

Observese que siendo único el compuesto de dos términos cualesquiera que sean x,y,z, es

$$x = y \Rightarrow x \; T \; z = y \; T \; z \quad y \quad z \; T \; x = z \; T \; y$$

En resumen, se puede decir que un conjunto E provisto de una ley interna T es un par, lo que se expresará frecuentemente por (E,T).

Las leyes de composición interna pueden gozar de distintas propiedades, de las que se pasan a recordar a continuación las más importantes

Cuando A es finito, la ley esta determinada por su tabla; por ejemplo, en notación multiplicativa.

$$
\begin{array}{c|c}
 & a_1 \cdots\cdots a_p \cdots\cdots a_q \cdots\cdots a_n \\
\hline
a_1 & (a_1)^2 \cdots\cdots a_1a_p \cdots\cdots a_1a_q \cdots\cdots a_1a_n \\
\vdots & \\
a_p & a_pa_1 \cdots\cdots (a_p)^2 \cdots\cdots a_pa_q \cdots\cdots a_pa_n \\
\vdots & \\
a_q & a_qa_1 \cdots\cdots a_qa_p \cdots\cdots (a_q)^2 \cdots\cdots a_qa_n \\
\vdots & \\
a_n & a_na_1 \cdots\cdots a_na_p \cdots\cdots a_na_q \cdots\cdots (a_n)^2
\end{array}
$$

factor de la derecha

factor de la izquierda

a).- <u>Composición de una sucesión ordenada finita de elementos. Asociatividad.</u>

Sean tres elementos a,b,c dados en este orden de (E,T), para definir el elemento compuesto de a,b,c en este orden, se pueden calcular los elementos compuestos.

$$(a\ T\ b)\ T\ c \qquad \text{o} \qquad a\ T\ (b\ T\ c)$$

puede ocurrir que estos resultados sean desiguales; como se va a ver, los cálculos en (E,T) son mucho más fáciles si estos dos elementos compuestos son iguales, cualesquiera que sean a,b,c; de donde la siguiente definición:

DEFINICION 2.22. (Asociatividad.)

Una ley interna T definida sobre A es asociativa -

si y sólo si

$$(\forall a,b,c \in A) \quad (a\ T\ b)\ T\ c = a\ T\ (b\ T\ c)$$

b).- <u>Conmutatividad de una ley interna. Elementos permutables.</u>

DEFINICION 2.23. (Conmutatividad.)

Una ley interna T definida sobre A es conmutativa si y sólo si

$$a\ T\ b = b\ T\ a \qquad \forall a,b \in A$$

Sin que la ley T sea conmutativa, puede suceder que para dos elementos particulares a y b de A, se tenga

$$a\ T\ b = b\ T\ a$$

se dice entonces que a y b son <u>permutables</u> en la ley T, o también que a y b permutan en la ley T. Se dice también que a y b son conmutables o también que conmutan en la ley T.

Si existe un elemento a permutable con todo elemento x de A, es decir, tal que

$$a\ T\ x = x\ T\ a \qquad \forall x \in A$$

se dice que a es un elemento central de (A,T). Se llama centro de (A,T) el conjunto de sus elementos centrales.

c).- <u>Elementos regulares.</u>

Estando A previsto de una ley T, considerense las-dos aplicaciones de A en A definidas por

$$x \rightarrow f_a(x) = a \mathrm{T} x$$

$$x \rightarrow g_a(x) = x \mathrm{T} a$$

se llaman, respectivamente, traslación por la izquierda- y traslación por la derecha, asociadas al elemento a.

Si f_a es inyectiva, para todo x y todo y de A.

$$a \mathrm{T} x = a \mathrm{T} y \Rightarrow x = y$$

se dice entonces que a es regular por la izquierda.

Igualmente si g_a es inyectiva, para todo x y todo- y de A

$$x \mathrm{T} a = y \mathrm{T} a \Rightarrow x = y$$

se dice que a es regular por la derecha.

Un elemento a es regular si es a la vez regular por la izquierda y por la derecha; cuando se pasa de la - igualdad

$$a \mathrm{T} x = a \mathrm{T} y \quad \text{o} \ (x \mathrm{T} a = y \mathrm{T} a) \ \text{a la} \ x = y,$$

se dice que se simplifica por a.

d).- Elemento neutro. Elementos simétricos.

DEFINICION 2.24. (Elemento neutro.)

Si existe en (A,T) un elemento e tal que

$$e \mathrm{T} x = x \mathrm{T} e = x \qquad \forall x \in A$$

si la ley T es asociativa, este elemento es único y se le llama el elemento neutro de (A,T).

DEFINICION 2.25. (Elemento simetrizable)

Dada una ley T definida sobre A poseyendo un elemento neutro e, un elemento a es simetrizable por la ley T si existe a' de A tal que

$$a \; T \; a' = a' \; T \; a = e$$

se dice que a' es un simétrico de a en (A,T).

Siendo la relación precedente simétrica en a y a': a es un simétrico de a'; se dice que a y a' son simétricos.

2.3.3.- Leyes internas asociadas a una misma ley interna.

2.3.3.1.- Ley interna definida sobre $\mathcal{P}(A)$ deducida de una ley interna definida sobre A.

Estando A provisto de una ley interna T, se puede definir una ley interna T' sobre $\mathcal{P}(A)$ poniendo, para A_1 y B_1 dos partes de A,

$$A_1 \; T' \; A_2 = \{ Z \;/\; (\exists\, x \in A_1),\; (\exists\, y \in A_2),\; Z = x \; T \; y \},$$

dicho de otra manera, $A_1 \; T' \; A_2$ es la parte A descrita por $x \; T \; y$ cuando x describe A_1 e y describe A_2.

Las leyes T y T' están definidas sobre dos conjuntos diferentes A y $\mathcal{P}(A)$; por otra parte,

$$\{x\} \; T' \; \{y\} = \{x \; T \; y\}$$

En general no hay ningún inconveniete en designar - las dos leyes por el mismo símbolo T, se dice entonces que la ley

$$(A,B) \to A \; T \; B$$

definida sobre $\mathcal{P}(A)$ es la extensión de la ley x T y a las partes de A.

2.3.3.2.- Parte estable. Ley inducida.

DEFINICION 2.26. (Parte estable.)

Una parte E de un conjunto A provisto de una ley interna T es estable para esta ley si

$$(\forall x,y \in E) \quad x \; T \; y \in E.$$

Se observa que E es estable si y sólo si

$$E \; T \; E \subset E$$

La aplicación de E x E en E definida por

$$(x,y) \to x \; T \; y$$

es, pues , una ley de composición interna definida sobre - E, se llama ley inducida sobre E por la ley T definida sobre A, se dice que la ley T sobre A prolonga la ley así definida sobre E. Si no da lugar a confusión, la ley T definida sobre A y la ley inducida por T sobre una parte estable E de A se designarán con el mismo símbolo.

Si la ley T es asociativa o conmutativa sobre A, se - ve inmediatamente que la ley inducida en una parte estable de A es asociativa y conmutativa.

Se ve igualmente que si la ley T posee un elemento-neutro <u>e</u> perteneciente a una parte estable E, la ley inducida sobre E admite <u>e</u> por elemento neutro.

2.3.3.3.- Transporte de una ley interna por biyección.

Sea A un conjunto provisto de una ley interna T y f una biyección de A sobre un conjunto A'. Podemos definir - una ley interna T' sobre A' de la siguiente manera natural: cualquiera que sean x' e y' de A', existe x e y únicos de- A, tales que

$$f(x) = x' \qquad f(y) = y'$$

por definición, el elemento compuesto de x' e y' por la -- ley T' será f(x T y), es decir

$$(\forall x', y' \in A') \quad x' \, T' \, y' = f\left[f^{-1}(x') \, T \, f^{-1}(y')\right]$$

Se dice que la ley T' de A' ha sido definida por - transporte de la ley T de A mediante la biyección f de A- sobre A'. La relación anterior puede también escribirse

$$(\forall x, y \in A) \qquad f(x \, T \, y) = f(x) \, T' \, f(y)$$

2.3.4.- <u>Leyes externas</u>.

DEFINICION 2.27. (Ley de composición externa.)

Dado un conjunto A de elementos a,b,...y un conjunto Ω de elementos α,β... se llama ley de composición externa entre elementos de A y elementos de Ω, toda aplicación f de Ω x A en A

$$(\alpha,a) \longrightarrow f(\alpha,a)$$

$f(\alpha,a)$, elemento de A, es el elemento compuesto de $\underline{\alpha}$ y de $\underline{a}$ por la ley externa considerada. Ω se llama el conjunto de los operadores para la ley externa considerada.

Si x describe una parte A_1 de A, se designará αA_1 el conjunto descrito por αx (α elemento de Ω)

Siendo A_1 una parte de A, se dice que es estable para la ley externa si para todo α de Ω : $\alpha A_1 \subset A_1$

Los conjuntos Ω y A pueden estar provistos de leyes internas, de donde se siguen posibles relaciones entre la ley externa y las distintas leyes internas. Entre las cuales cabe destacar las siguientes.

Si el conjunto Ω está provisto de una ley interna asociativa T, se dice que la ley externa es asociativa con relación a la ley T de Ω si

$$(\forall \alpha,\beta \in \Omega) \ (\forall a \in A) \quad (\alpha \top \beta)a = \alpha(\beta a)$$

Si el conjunto A está provisto de una ley interna T, se dice que la ley externa es distributiva con relación a - la ley interna T de A si

$$(\forall \alpha \in \Omega) \quad (\forall a,b \in A) \qquad \alpha(a \mathrm{T} b) = (\alpha a) \mathrm{T} (\alpha b)$$

Si el conjunto A está provisto de una ley interna T- y Ω provisto de una ley $\perp$, se dice que la ley externa es -- distributiva con relación a las dos leyes internas T y $\perp$ si

$$(\forall \alpha,\ \beta \in \Omega) \quad (\forall a \in A) \quad (\alpha \perp \beta) a = (\alpha a) \mathrm{T} (\beta a)$$

2.3.5.- Estructura.

Las propiedades de una ley interna definida sobre - un conjunto A le dan una estructura, así por ejemplo:

Un conjunto G provisto de una ley interna tiene una estructura de grupo para esta ley si:

- La ley es asociativa.
- Está provista de un elemento neutro.
- Todo elemento es simetrizable.

Si, además, la ley es conmutativa, se dice que G tiene una estructura de grupo conmutativo o abelino.

También se pueden definir las estructuras mediante- varias leyes internas y externas, así aparecen las conocidas estructuras algebraicas de anillo, cuerpo y espacio --vectorial.

Una estructura está, pues, definida sobre un conjunto A al dar relaciones entre elementos de A o entre elementos de A y elementos de otros conjuntos. A se llama soporte de la estructura considerada.

Se ve que un conjunto en sí mismo no posee ninguna-estructura, mientras no se definan sobre el mismo operaciones algebraicas, relaciones de orden, etc. Así por ejemplo, una estructura de grupo es un par (G,T), donde la ley T posee las propiedades ya indicadas.

Un mismo conjunto A puede estar provisto de varias-estructuras, considerese A provisto de dos estructuras S_1- y S_2, se podrá distinguir:

- El conjunto A.

- El conjunto A provisto de la estructura S_1.
- El conjunto A provisto de la estructura S_2.

- El conjunto A provisto de dos estructuras S_1 y S_2.

2.3.6.- Homomorfismo e Isomorfismo.

2.3.6.1.- Homomorfismo de (A,T) en (A´T´)

Considerese una aplicación f de (A,T) en (A´, T´), se puede formar el compuesto de x e y en A, sea $x \; T \; y$ y su imagen $f(x \; T \; y)$ en A'; se pueden formar también las imágenes $f(x)$ y $f(y)$, después su elemento compuesto en A', sea $f(x) \; T \; f(y)$. Las aplicaciones de (A,T) en $(A'T')$ tales que estos dos elementos de A' sean iguales nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICION 2.28. (Homomorfismo.)

Se llama homomorfismo de (A,T) en $(A';T')$ toda aplicación f de A en A' tal que

$$(\forall x,y \in A) \qquad f(x \; T \; y) = f(x) \; T' \; f(y)$$

Un homomorfismo de (A,T) en (A,T) se llama un endomorfismo de (A,T)

Un homomorfismo de (A,T) en (A',T') se dice suprayectivo, inyectivo, biyectivo según que la aplicación f sea suprayectiva, inyectiva, biyectiva.

TEOREMA 2.4.

Si f es un homomorfismo de (A,T) en (A',T'), entonces:

a) $f(A)$ es una parte estable de A' para la ley T.

b) Si la ley T es asociativa (conmutativa), la ley inducida por la ley T' sobre $f(A)$ es asociativa (conmutativa).

c) Si e es elemento neutro de (A,T), $e' = f(e)$ es elemento neutro de $(f(A),T')$.

Si, además, x es simetrizable en (A,T) y admite x_1 por simé trico, $f(x)$ es simetrizable y admite $f(x_1)$ por simétrico - en $(f(A),T')$.

Este teorema enuncia propiedades de la ley T' sobre $f(A)$ deducidas de propiedades de la ley T sobre A. Conside rando, pues, los elementos arbitrarios x',y',z', de $f(A)$ - existe x,y,z de A tales que

$$f(x) = x', \quad f(y) = y', \quad f(z) = z'.$$

a) x e y pertenecen a A, análogamente x T y, luego

$$f(x\ T\ y) = f(x)\ T'\ f(y) = x'\ T'\ y' \in f(A)$$

b) la relación de asociatividad aplicada a x,y,z en A

$$(x\ T\ y)\ T\ z = x\ T\ (y\ T\ z)$$

da en $f(A)$ por el homomorfismo f

$$f\left[x\ T\ (y\ T\ z)\right] = f(x)\ T'\ f(y\ T\ z) = f(x)\ T'\left(f(y)\ T' f(z)\right) =$$

$$= x'\ T'\ (y'\ T'\ z') = f\left[(x\ T\ y)\ T\ z\right] = f(x\ T\ y)\ T'\ f(z) =$$

$$= \left[f(x)\ T'\ f(y)\right]\ T'\ f(z) = (x'\ T'\ y')\ T'\ z'.$$

Igualmente

$$x\ T\ y = y\ T\ x \Rightarrow f(x\ T\ y) = f\ (y\ T\ x) \Rightarrow x'\ T'\ y' = y'\ T'\ x'$$

c) $e\ T\ x = x\ T\ e = x \Rightarrow f(e\ T\ x) = f(x\ T\ e) = f(x)$,

es decir, poniendo

$$e' = f(e) : e'\ T'\ x' = x'\ T'\ e' = x'$$

Ademas, sea x_1, simétrico de x supuesto simetrizable

$$x\ T\ x_1 = x_1\ T\ x = e \Rightarrow f(x\ T\ x_1) = f(x_1\ T\ x) = f(e),$$

es decir,

$$f(x)\ T'\ f(x_1) = f(x_1)\ T'\ f(x) = e'.$$

Se ve, que todas estas propiedades de la ley T' han sido demostradas únicamente para la ley inducida sobre f(A) no se puede decir nada para la ley T' sobre A'- f(A), puesto que la igualdad fundamental

$$f(x\ T\ y) = f(x)\ T'\ f(y)$$

sólo concierne los elementos de A y de f(A).

Por otra parte, de las propiedades de la ley T' (incluso sobre f(A)), no se puede en general deducir nada para la ley T; sea, en efecto, x',y',z' los elementos de f(A), imagenes respectivas de x,y,z, de A, de una igualdad en --- f(A) tal como $z' = x'\ T'\ y'$, no podemos en general deducir- que z y x T y son iguales, sino solamente que por el homomorfismo f, z y x T y tienen la misma imagen en f(A). Hay,- sin embargo, un caso en que se puede relevar las propiedades de (A',T') a las de (A,T), es el caso en que f es biyectiva.

2.3.6.2.- Isomorfismo de (A,T) sobre (A´,T´)

Considerese un homomorfismo biyectivo, f de (A,T)-sobre (A´,T´), siendo f una biyección, cualesquiera que - sean x´ e y´ de A´, existe x e y únicos de A imagenes recíprocas respectivas de x´ e y´.

Se tiene, pues, siendo f un homomorfismo,

$$f(x\ T\ y) = f(x)\ T'\ f(y) = x'\ T'\ y'$$

y siendo f una biyección

$$f^{-1}(x'\ T'\ y') = x\ T\ y = f^{-1}(x')\ T\ f^{-1}(y')$$

luego f^{-1} es un homomorfismo (biyectivo) de (A´,T´) sobre (A,T), de donde:

DEFINICION 2.29. (Isomorfísmo.)

Si f es un homomorfismo biyectivo de (A,T) sobre - (A´,T´), f^{-1} es un homomorfismo biyectivo de (A´,T´) sobre (A,T); se dice que f es un isomorfísmo de (A,T) sobre -- (A´,T´).

Un isomorfísmo de (A,T) sobre (A,T) se llama un -- automorfismo de (A,T).

Naturalmente un isomorfismo posee todas las propie-dades de un homomorfismo particular.

Pero el hecho de que el homomorfismo f sea biyectivo entraña resultados más precisos que los del teorema 2.4. De una manera general, toda propiedad de la ley T sobre A (ley T´ sobre A´) implica la misma propiedad de la ley T´ sobre A´(ley T sobre A).

CAPITULO III

ESTRUCTURA MATEMATICA DE LOS SISTEMAS

3. ESTRUCTURA MATEMATICA DE LOS SISTEMAS

3.1. CONCEPTO DE SISTEMA

3.2. EL CASO DEL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO

3.1.- CONCEPTO DE SISTEMA

La definición de sistema que se introduce en este capítulo, aún manteniendo la estructura dada por Laszlo-(*), contiene diferencias al considerarse los conjuntos-de funciones sobre elementos y de funciones sobre atributos, en vez de conjuntos de relaciones propiamente dichos sobre elementos y sobre atributos. Esta decisión de considerar conjuntos de funciones en vez de relaciones resulta más especifica en la definición de sistema.

También se definen de manera matemática los conceptos de subsistema, entorno de un sistema, jerarquía de -- sistemas, así como los de estado, comportamiento, estructura e isomorfismo de un sistema, necesarios para el objetivo propuesto de manejar los sistemas como una estructura matemática que los definan.

3.1.1.- El sistema como estructura matemática.

En este apartado se trata de definir a los siste-- mas como una estructura matemática que sirva para modelar convenientemente la idea física de los mismos.

Conjunto básico.

Uno de los componentes de un sistema es un conjunto

(*) Ver apartado 2.1.2.

básico a partir del cual se definen el resto de los elementos. En lo que sigue este conjunto se designará por A.

Otro elemento de un sistema está constituido por un atributo, que no es más que una partición del conjunto básico en clases o niveles. Una forma de definir atributos sobre el conjunto básico es mediante relaciones de equivalencia, puesto que una relación de equivalencia en A, particiona dicho conjunto. Al conjunto cociente se le llama atributo y se le designará en lo que sigue por letras mayúsculas con un asterisco.

TEOREMA 3.1.-

Sea A un conjunto y $f: A \to \mathbb{R}$ una aplicación acotada superior e inferiormente de A en el conjunto de los números reales. Dada una n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números -- reales ampliados con el $+\infty$ y el $-\infty$ tales que

$$-\infty = x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = \infty$$

la relación definida por

$$a_1 \; R_f \; a_2 \Leftrightarrow \exists j / \begin{cases} x_j \leq f(a_1) < x_{j+1} \\ x_j \leq f(a_2) < x_{j+1} \end{cases}$$

$j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

que expresa que dos entes están relacionados y solo si - sus imagenes reales pertenecen al mismo intervalo -----

$[x_j \, , \, x_j + 1]$, es una relación de equivalencia.

En efecto:

1.- Es Reflexiva; como la función está acotada se verifica

$$x_1 \leqslant f(a) \leqslant x_n$$

Entonces,

$$\forall\, a \in A \Rightarrow \exists !\, j / x_j \leqslant f(a) < x_{j+1} \Rightarrow a\, R_f\, a$$

2.- Es Simétrica;

$$\forall\, a, b \in A$$

Si

$$a\, R_f\, b \qquad j / \begin{cases} x_j \leqslant f(a) < x_{j+1} \\ x_j \leqslant f(b) < x_{j+1} \end{cases} \Rightarrow \exists j \,\Big|\, \begin{cases} x_j \leqslant f(b) < x_{j+1} \\ x_j \leqslant f(a) < x_{j+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$b\, R_f\, a$$

$j \quad \{1, 2, \ldots, n-1\}$

3.- Es Transitiva.

Se demuestra igualmente de forma trivial.

Este teorema nos permite definir atributos del sistema mediante funciones de A en $\mathbb{R}$, y n-plas que cumplan las condiciones establecidas en dicho teorema.

TEOREMA 3.2.-

Dado un conjunto A, una aplicación f: A x A→ $\mathbb{R}$ en el conjunto de los números reales y una n-pla $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de números reales tal que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ se puede - definir una relación en A mediante

$$a_1 \; R_f \; a_2 \Leftrightarrow \exists j \in \{1,2,\ldots,n-1\} / x_j \leq f(a_1,a_2) \leq X_{j+1}$$

Esta relación no es de equivalencia.

DEFINICION 3.1. (Función n-dimensional sobre el conjunto básico A.)

Se define como aplicación funcional, forma o función n-dimensional sobre el conjunto básico A a toda función $\underline{k}$ definida sobre A^n y con imágenes en $\mathbb{R}$, es decir

$$k: A^n \to \mathbb{R}$$

DEFINICION 3.2. (Función de nivel.)

Se define como función p-dimensional de nivel de un sistema a toda función $\underline{l}$ definida sobre un conjunto pro-- ducto de atributos

$$l: A_1^* \times A_2^* \times \ldots \times A_p^* \to \mathbb{R}$$

3.1.1.1.- Función de atributo inducida por una función sobre el conjunto básico.

DEFINICION 3.3. (Función de atributo inducida por una función sobre el conjunto básico.)

Toda función sobre el conjunto básico $g: A^n \to \mathbb{R}$ indu ce una función de nivel sobre todo conjunto producto de n atributos

$$G : A_1^* \times A_2^* \times \ldots \times A_n^* \to \mathbb{R}$$

definida mediante

$$G(a_1^*,a_2^*,\ldots,a_n^*) = \sum_{(a_1,a_2,..,a_n)\in(a_1^*,a_2^*,..,a_n^*)} g(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

siendo $(a_1^*,a_2^*,\ldots,a_n^*)\in A_1^* \times A_2^* \times \ldots \times A_n^*$

A esta función se la llama inducida por la g.

Esta definición permite definir funciones de nivel a partir de funciones sobre elementos.

3.1.2.- Sistema. Subsistema. Entorno de un sistema.

DEFINICION 3.4. (Sistema.)

Se define como sistema a toda familia de cuaternas (A,α,β,γ) constituida por un conjunto básico $\underline{A}$, un conjunto $\underline{\alpha}$ de atributos sobre A, un conjunto $\underline{\beta}$ de funciones sobre el conjunto básico A, y un conjunto $\underline{\gamma}$ de funciones de nivel, es decir;

$$S = \{(A(t),\ \alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t));\ t\in T\}$$

donde t es el indice de la familia y T el conjunto de índices.

DEFINICION 3.5. (Subsistema.)

Se dice que un sistema

$$S_1 = \{(A_1(t),\ \alpha_1(t),\ \beta_1(t),\ \gamma_1(t));\quad t \in T\}$$

es un subsistema de un sistema

$$S = \{(A(t),\ \alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t));\quad t \in T\},$$

cuando se verifican las condiciones siguientes:

a) $A_1(t)$ es un subconjunto de $A(t)$ $(A_1(t) \subset A(t))$; $\forall\, t \in T$

b) $\alpha_1(t)$ es un subconjunto del conjunto constituido por los atributos correspondientes a las restricciones de los atributos de S a $A_1(t)$ para todo $t \in T$.

c) $\beta_1(t)$ es un subconjunto del conjunto de las funciones restricción, de las funciones de $\beta(t)$ a $A_1(t)$ para todo $t \in T$.

d) $\gamma_1(t)$ es un subconjunto de las funciones restricción, de las funciones de $\gamma(t)$ a los niveles inducidos por los atributos de $\alpha_1(t)$ para todo $t \in T$.

DEFINICION 3.6. (Entorno de un sistema.)

Dado un sistema universal P y el conjunto ρ de todos los subsistemas de P, se define como entorno, E_s, de un subsistema S de P al conjunto diferencia del conjunto ρ y el conjunto S^* de todos los subsistemas de S, es decir

$$E_s = \rho - S^* = P \cap (S^*)'$$

donde $(S^*)'$ es el conjunto complementario de S^* con respecto al universal P

3.1.3.- Jerarquía de sistemas.

DEFINICION 3.7. (Jerarquía de sistemas.)

Dos sistemas S_1 y S_2 se dice que están relacionados (S_1 R S_2) si y solo si

"S_1 es subsistema del S_2" en S^*,

es una relación de orden parcial del conjunto de los subsistemas de un sistema dado S, definiendo una relación de jerarquia.

En efecto se verifican las propiedades

a) Reflexiva

$$\forall S_1 \rightarrow S_1 \; R \; S_1$$

ya que S_1 verifica las condiciones dadas en la definición 3.5. con respecto a si mismo.

b) Antisimétrica

$$\forall S_1, S_2 \; \{S_1 \; R \; S_2 \;\; y \;\; S_2 \; R \; S_1\} \Leftrightarrow S_1 = S_2$$

en efecto puesto que se tendría que cumplir dado

$$S_1 = \{(A_1(t),\ \alpha_1(t),\ \beta_1(t),\ \gamma_1(t));\ \forall\, t \in T\} \quad y$$

$$S_2 = \{(A_2(t),\ \alpha_2(t),\ \beta_2(t),\ \gamma_2(t));\ \forall\, t \in T\}$$

$$A_1(t) \subset A_2(t) \quad y \quad A_2(t) \subset A_1(t) \Rightarrow A_1(t) = A_2(t);\ \forall\, t \in T$$

e igualmente sucede con respecto a los conjuntos

$$(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t)),\ (\beta_1(t),\ \beta_2(t)),\ (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t));\ \forall\, t \in T$$

c) Transitiva

$$(\forall\, S_1, S_2, S_3) \quad [S_1\ R\ S_2 \quad y \quad S_2\ R\ S_3] \Leftrightarrow S_1\ R\ S_3$$

En efecto dada que

$$S_1 = \{(A_1(t),\ \alpha_1(t),\ \beta_1(t),\ \gamma_1(t));\quad t \in T\}$$

$$S_2 = \{(A_2(t),\ \alpha_2(t),\ \beta_2(t),\ \gamma_2(t));\quad t \in T\}$$

$$S_3 = \{(A_3(t),\ \alpha_3(t),\ \beta_3(t),\ \gamma_3(t));\quad t \in T\}$$

se verifica para los conjuntos básicos,

$$A_1(t) \subset A_2(t) \quad y \quad A_2(t) \subset A_3(t) \Rightarrow A_1(t) \subset A_3(t);\ \forall\, t \in T$$

también para los conjuntos $\alpha(t)$.

- $\alpha_1(t)$ es un subconjunto del conjunto constituido por los atributos correspondientes a las restricciones de S_2 a $A_1(t)$ para todo $t \in T$.

. $\alpha_2(t)$ es un subconjunto del conjunto constituido por los atributos correspondientes a las restricciones de S_3 a - $A_2(t)$ para todo $t \in T$.

y por cumplirse

$$A_1(t) \subset A_2(t) \subset A_3(t) \qquad \forall t \in T$$

se puede concluir que:

. $\alpha_1(t)$ es un subconjunto del conjunto constituido por los atributos correspondientes a las restricciones de S_3 a - $A_1(t)$ para todo $t \in T$.

Análogamente se demuestra para los conjuntos de funciones- $\beta(t)$ y $\gamma(t)$ para todo $t \in T$.

3.1.4.- Estado, estructura y comportamiento de un sistema.

DEFINICION 3.8. (Estado de un sistema.)

Dado un sistema $S = \{(A(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)); \forall t \in T\}$ se entiende por estado de un sistema S asociado a $t_1 \in T$ a- la cuaterna

$$(A(t_1), \alpha(t_1), \beta(t_1), \gamma(t_1))$$

Los estados de un sistema no son arbitrarios, es decir existen condiciones para que puedan coexistir en un estado un determinado conjunto básico con unos ciertos atributos, con unas funciones y unas funciones de nivel. Incluso ciertas funciones o funciones de nivel pueden quedar de terminadas al conocer el conjunto básico y los atributos. El conjunto de estas condiciones definen la estructura -- (naturaleza) del sistema.

En general se supone que la estructura de un sistema se mantiene constante, en cambio su estado es variable; de aquí que la mayor parte de la Tesis se encamine a definir la estructura del sistema y la aplicación a casos específicos se haga determinando el estado del sistema:

DEFINICION 3.9. (Comportamiento de un sistema.)

Dado un sistema

$$S = \{(A(t),\ \alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t));\quad t \in T\}$$

y un estado del mismo

$$S(t_1) = ((A(t_1),\ \alpha(t_1),\ \beta(t_1),\ \gamma(t_1)),$$

La estructura del sistema permitirá conocer el comportamiento del sistema, es decir, el cambio que experimenta - su estado al producirse alguna modificación en los componentes del sistema.

3.1.5.- Isomorfismo entre sistemas.

DEFINICION 3.10. (Isomorfismo entre sistemas.)

Se dirá que dos sistemas

$$S^1 = \{(A^1(t^1),\ \alpha^1(t^1),\ \beta^1(t^1),\ \gamma^1(t^1));\ t^1 \in T^1\}$$

y

$$S^2 = \{(A^2(t^2),\ \alpha^2(t^2),\ \beta^2(t^2),\ \gamma^2(t^2));\ t^2 \in T^2\}$$

son isomorfos cuando pueden establecerse una aplicación - biunívoca, $g : T^1 \rightleftarrows T^2$, y unas familias de aplicaciones - biunívocas

$$\left.\begin{array}{l} f^{A}_{t_1} : A^1(t_1) \longrightarrow A^2\ (g(t_1)) \\[2ex] f^{\alpha}_{t_1} : \alpha^1(t_1) \longrightarrow \alpha^2\ (g(t_1)) \\[2ex] f^{\beta}_{t_1} : \beta^1(t_1) \longrightarrow \beta^2\ (g(t_1)) \\[2ex] f^{\gamma}_{t_1} : \gamma^2(t_1) \longrightarrow \gamma^2\ (g(t_1)) \end{array}\right\} \forall t_1 \in T^1$$

$$h^{\beta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h^{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde α, β y γ son elementos de sendos conjuntos indices - tales que sean conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} A^{1^n}(t_1) \arrow[r, "f^A_{t_1}"] \arrow[d, "k(t_1)"] & A^{2^n}(g(t_1)) \arrow[d, "f^{\beta}_{t_1} k(t_1)"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\forall t_1 \in T^1,\ \forall k(t_1) \in \beta^1(t_1)$$

y

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j=1}^{p} A_j^{1^*}(t_1) \arrow[r, "f^{\alpha}_{t_1}"] \arrow[d, "l(t_1)"] & \prod_{j=1}^{p} A_j^{2^*}(g(t_1)) \arrow[d, "f^{\gamma}_{t_1} l(t_1)"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$\forall\, t_1 \in T^1$, y $\forall\, l(t_1) \in \gamma^1(t_1)$

3.2. EL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO

En este apartado se trata de, una vez definido un sistema y sus peculiaridades, aplicarlo al sistema de escolares de Educación General Básica (E.G.B) a nivel urbano, para lo que se pasa a describir como se entienden todos los puntos del apartado anterior.

3.2.1.- <u>Conjunto básico y de atríbutos</u>.

El conjunto básico A se define como el conjunto - de escolares de E.G.B. de una determinada urbe o ciudad.

Por escolar se entiende un individuo varón o hembra, que por estar comprendido entre una determinada --- edad (de 6 a 14 años) está obligado a recibir Educación-General Básica asistiendo a un centro de enseñanza o escuela. También puede darse la situación de escolares con más de 14 años, aunque sólo excepcionalmente.

En todo lo que sigue se aportarán datos concretos referidos al sistema de escolares de E.G.B. de la ciudad de Santander y para el curso academíco de 1977-78, si -- bien solo se considerarán los escolares de primer curso-de E.G.B., por ser el curso que realmente puede influir-para el análisis de la localización espacial y considerarse suficiente para la determinación del sistema de escolares de E.G.B. a nivel urbano.

El conjunto básico del sistema de escolares que se considera, lo componen los 3.021 alumnos de primero de E.G.B. que habia matriculados durante el curso 1977 - 78 en la ciudad de Santander. Este dato se ha obtenido directamente encuestando a todos los centros de E.G.B.

Como conjunto de atríbutos α se considera el formado por los siguientes:

a) Zona de residencia

Dividiendo el término municipal de la ciudad (en nuestro caso Santander) en las zonas que muestra la figura 3.1., se puede mediante el teorema 3.1. definir el atríbuto zona de residencia aplicando a todos los escolares que viven dentro de una misma zona el número de su zona.

La zonificación adoptada está basada en la división administrativa por distritos y secciones, (existiendo la correspondencia señalada en la tabla 3.1) cuya razón de adopción se explica por el hecho de solo existir datos utilizables a nivel de zonificación administrativa.

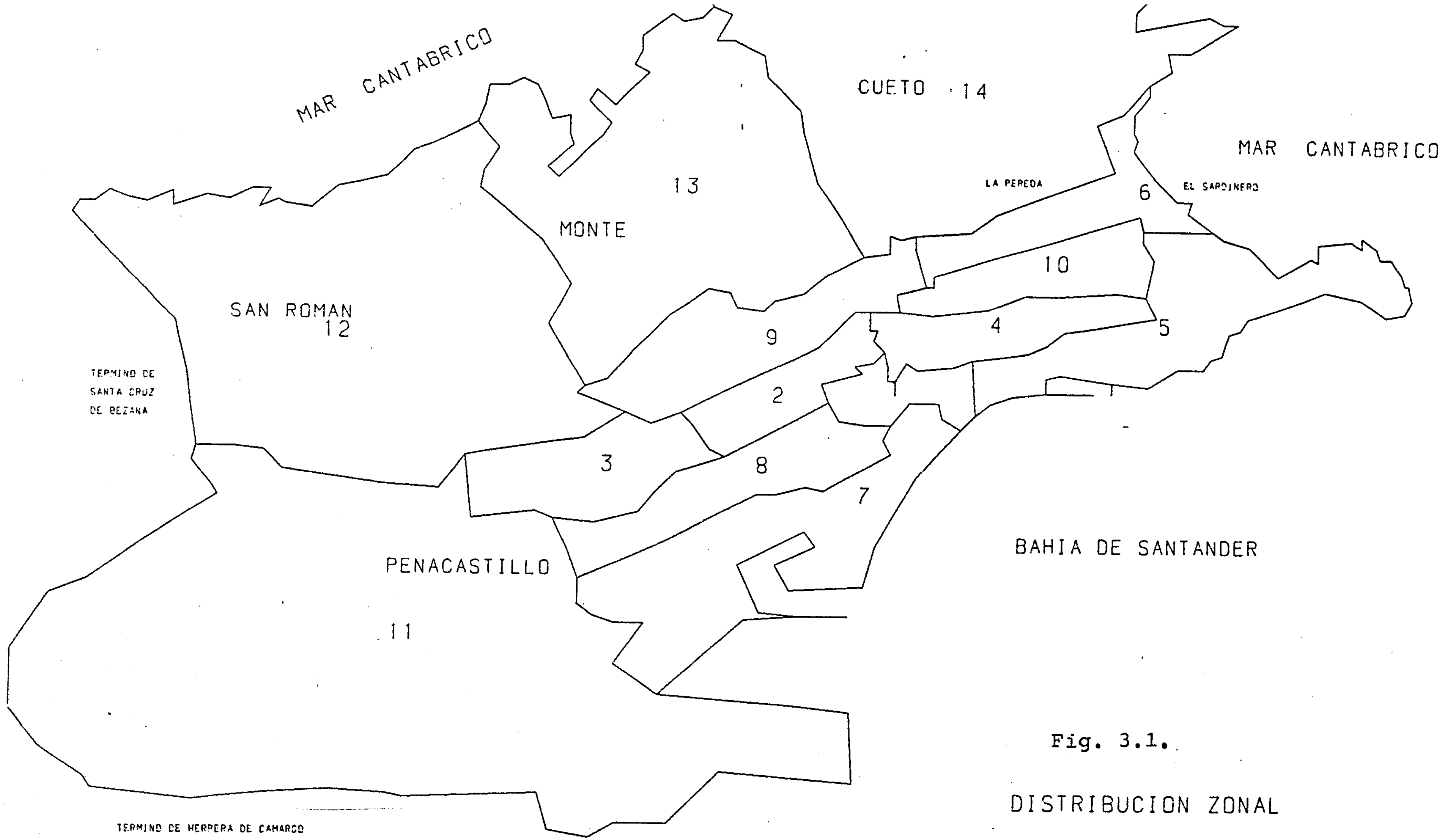

Fig. 3.1.

DISTRIBUCION ZONAL

CORRESPONDENCIA ENTRE ZONIFICACION ADOPTADA Y DIVISION

ADMINISTRATIVA

ZONA	DIVISION ADMINISTRATIVA DISTRITO Y SECCION
1	1 Entero
2	2.1 al 2.13
3	2.14
4	3 Entero
5	4.1 al 4.9 y 4.11
6	4.10
7	5 Entero
8	6 Entero
9	7.1 al 7.5
10	7.6 al 7.12
11	8.1 al 8.4
12	8.5 al 8.7
13	8.8 y 8.9
14	8.10 al 8.12

TABLA 3.1

b) Centro de Enseñanza

El conjunto básico de escolares por medio de este atríbuto, aplicando el teorema 3.1., se dividirá en clases de equivalencia, cada una de las cuales agrupará a -

los escolares que acuden a un mismo Centro de Enseñanza.

La relación de centros de enseñanza de E.G.B. para el curso de 1977-78 es mostrada en la tabla 3.2. así como su correspondiente localización en la figura 3.2.

c) Tipo de Centro

Análogamente por medio de este atríbuto el conjunto básico de escolares se devidirá en clases de equivalencia, cada una de las cuales agrupará a los escolares que reciben enseñanza en el mismo tipo de centro.

Los centros escolares se pueden clasificar en tres formas diferentes:

c.1.- Atendiendo al tipo de administración.

En la figura 3.3. se expone la clasificación actual existente atendiendo al tipo de administración.

Por Centro Estatal se entiende, aquellos colegios o escuelas pertenecientes al Estado, siendo los docentes funcionarios.

Los Centros Estatales pueden a su vez ser de los siguientes tipos:

- Centros que no tienen más que 1 aula (centros o escuelas unitarios).

TABLA 3.2.

Relación de centros de enseñanza de E.G.B.

Nº	CENTRO	DOMICILIO
1	C.N. "General Sagardía"	Cajo
2	C.N. "Quinta Porrua"	Vázques de Mella
3	C.N. "Calvo Sotelo"	Peña Herbosa
4	C.N. "José M. Pereda"	San Simón
5	C.N. "Menéndez Pelayo"	Lope de Vega
6	C.N. "Practicas Niñas"	Cisneros
7	C.N. "Practicas Niños"	Cisneros
8	C.N. "Ramón Pelayo"	ALTA
9	Graduada de niños "Sardinero"	Encina, 6
10	Graduada mixta	Cueto-Bellavista
11	Graduada de Niños	Hipódromo
12	Uª de Niños. Cueto	B°La Pereda
13	Uª de Niñas. Cueto	B°La Pereda
14	ELOY VILLANUEVA (Monte)	B° Bolado, 1
15	Escuela Mixta (Peñacastillo)	B° Ojaiz

TABLA 3.2. (Continuación)

Nº	CENTRO	DOMICILIO
16	Graduada de Niños "José Antonio"	Camarreal. Peñacastillo
17	Graduada de Niños "Marqués de Estella"	B° San Martín. "
18	C.N. "Canda Landaburu"	La Albericia
19	Graduada Mixta. San Román	B° Sorno
20	Angeles Custodios	Avda. Reina Victoria
21	Antiguos alumnos E. Cristianas	B° Pesquero
22	La Anunciación	B°CCueto
23	Cervantes	Antonio Lopez
24	Ciculo Católico	Guevara
25	Compañia de Maria	Via Cornelia
26	Divina Pastora	Santa Lucia
27	Maria Auxiliadora	Gral. Dávila
28	Haypo	Cta. Cadenas, 7
29	Mercedes	Gral. Dávila
30	La Milagrosa	Tantín

TABLA 3.2. (Continuación)

Nº	CENTRO	DOMICILIO
31	N.S. de los Milagros	Capitán Palacios
32	Puente	Valencia
33	Purisima Concepción	Alta
34	Sagrado Corazón	Pérez Galdós
35	San Antonio	Juan de la Cosa
36	San José Femenino	Asilo
37	S. Justo-Divino Maestro	Capitán Palacios
38	San Martín	Canalejas
39	San Roque	La Iglesia
40	Sta. Maria Micaela	San Fernando
41	Verdemar	B° Corbán
42	Vermar	Gral. Dávila
43	Jardín de Africa	B° Aviche. Monte
44	San Agustín	Avda. del Faro
45	El Pilar	Cómez Oreña
46	El Greco-S. Fco. de Asis	Monte

TABLA 3.2. (Continuación)

Nº	CENTRO	DOMICILIO
47	San Francisco	G° San Francisco
48	La Salle	C. Alonso Vega
49	Sagrada Familia	Las Presas
50	Deogracias	Menédez Pelayo
51	Escolapios	Canalejas
52	Montessori	Floranes
53	Tagore	Reina Victoria
54	Kinder	Lirio
55	Virgen del Milagro	Colonia V. del Milagro
56	Castroverde	Menéndez Pelayo
57	Ntra. Sra. Montserrat	Travesia Valderrama
58	Torreblanca	Duque Santo Mauro
59	Filiar 3. Femenina	B° Pesquero
60	C.N. Escuela de Comercio	Magallanes
61	Colegio Albarada	Gral. Dávila

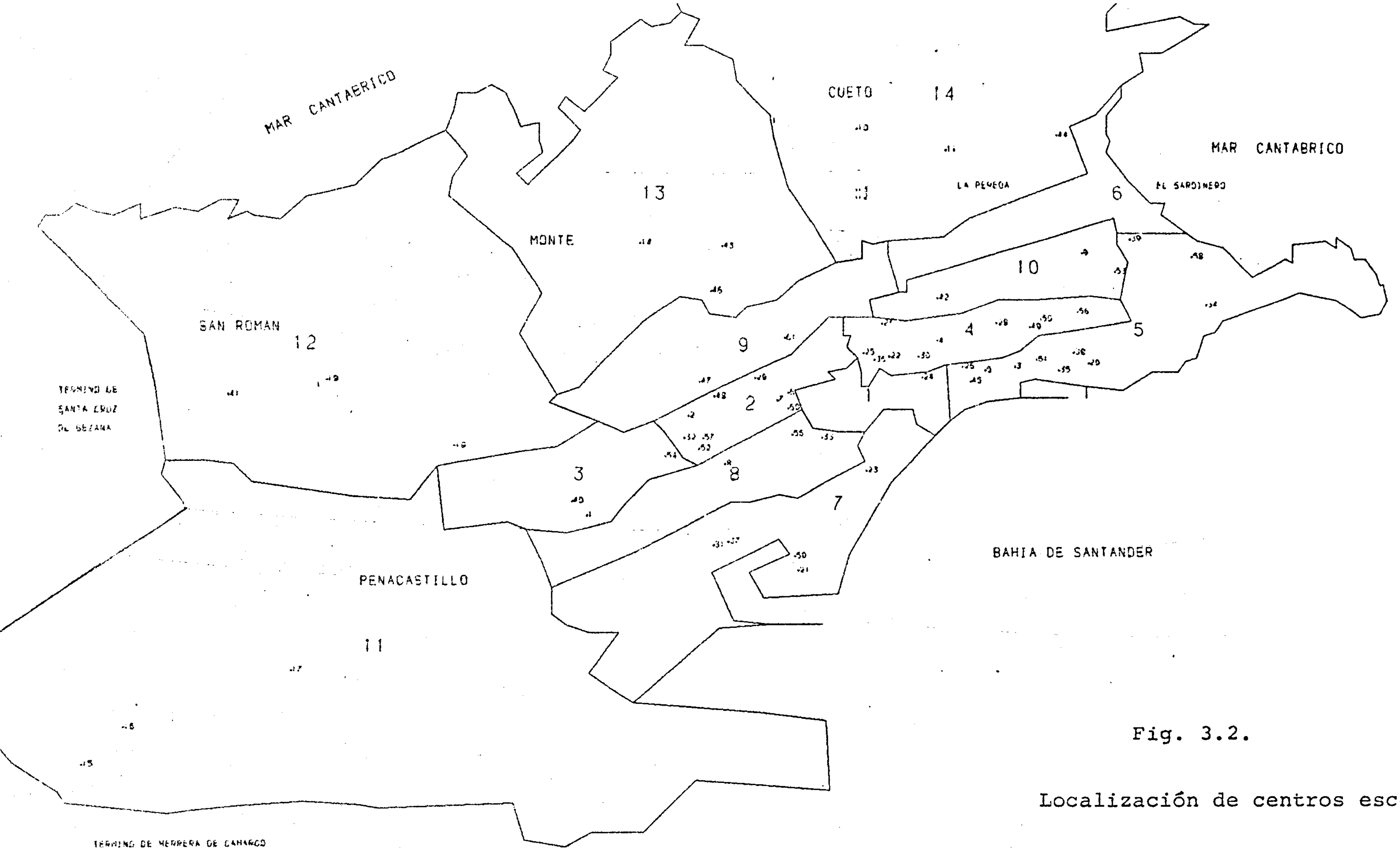

Fig. 3.2.

Localización de centros escol

- Centros menores de 4 aulas (escuelas graduadas).
- Centros menores de 8 aulas (escuelas graduadas).
- Centros con 8 aulas o más (escuelas o colegios nacionales).

En donde se adopta como variable de clasificación

- Centros escolares
  - Estatales
    - C.N. (Colegios nacionales)
    - Otros (Escuelas unitarias, gradua.
  - Patronatos
  - Privados
    - Iglesia
    - Seglares
      - Subvencionados
        - Ayuda plena
        - Ayuda al precio
      - No subvencionados

Fig.3,3. Centros Escolares según tipo de Admón.

el número de aulas, siendo la capacidad máxima de un aula de 40 alumnos.

Los colegios en regimen de Patronato comprenden -- aquellos centros que por iniciativa privada (generalmente la Iglesia, Ayuntamiento,etc,) han llegado a instalarse,-

pero el Estado se hace cargo de las retribuciones del personal docente (funcionarios de carrera y contratados). Este tipo de centros actualmente esta considerado a extinguir.

Se considera como centro privado aquel que pertenezca a personas o sociedades privadas, pudiendo ser por el tipo de personas o entidades privadas: Colegios privados, pertenecientes al clero y colegios privados pertenecientes a seglares.

Los centros privados (tanto pertenecientes a la Iglesia como a seglares) pueden estar no subvencionados o bien subvencionados: con ayuda plena cuando reciben el total de la subvención fijada por el Estado (para el curso 79-80 se cifra en 800.000 pts/año por unidad escolar*) y de ayuda al precio cuando reciben un porcentaje sobre el total que recibe uno de plena, que suele oscilar entre el 30% y el 50%.

c.2.- <u>Atendiendo al tipo de enseñanza que imparten</u>

Un mismo colegio puede llegar a impartir a la vez los tipos de enseñanza que a continuación se enumeran:

---

* Recuerdese que por unidad escolar se entiende una clase para 40 alumnos.

- Preescolar.
- E.G.B. (Educación General Básica).
- B.U.P. (Bachillerato Unificado Polivalente).
- F.P. (Formación Profesional).

Dentro de la enseñanza estatal lo más frecuente -- son tipos de centros independientes:

. Centros que imparten solo E.G.B.; o bien preescolar y E.G.B. : Colegios Nacionales, Escuelas Graduadas y Escuelas Unitarias.

. Centros que imparten solo F.P. : Escuelas de Formación Profesional.

. Centros que imparten solo enseñanza de B.U.P. :- Institutos de Enseñanza Media.

No sucede lo mismo con la enseñanza privada, en donde tanto en la eclesiastica como en la seglar, si bien con ma-- yor frecuencia en la primera, se pueden encontrar cole--- gios donde se imparten las siguientes combinaciones de Enseñanza:

- Colegios de E.G.B. con o sin preescolar.
- Colegios con E.G.B. y B.U.P.
- Colegios con 2ª Etapa de E.G.B. y B.U.P.
- Colegios con E.G.B., B.U.P. y F.P.

c.3.- Atendiendo al tipo de localización.

Se establece la siguiente clasificación:

- Urbano
- Suburbano

Entendiendo por centro escolar de localización urbana, aquellos que se caractericen por situarse en las zonas con mayor dotación de servicios o equipamientos colectivos y recibir alumnos de diversas áreas de la ciudad. Por el contrario, se consideran como de localización suburbana, aquellos centros escolares que se situan en zonas residenciales, barriadas, etc., con escasez de dotaciones en equipamientos colectivos, y que reciben alumnos principalmente de los alrededores de su localización.

En la tabla 3.3. se reflejan, para los 61 centros de E.G.B. en el curso 77-78 el atributo de tipo centro, atendiendo al tipo de administración y localización.

3.2.2.- Conjunto de funciones sobre el conjunto básico y de funciones de nivel.

En el sistema de escolares se pueden definir funciones sobre el conjunto básico de elementos tales como las siguientes funciones uni-dimensionales:

. Asociar a cada escolar (elemento) la distancia entre su residencia y centro de enseñanza.

. Asociar a cada escolar alguna de sus caracteristi

T A B L A 3.3

Tipo de Centros atendiendo a su administración y localización

CENTRO Nº	TC.C1	TC.C3	CENTRO Nº	TC.C1	TC.C3
1	C.N.	Ur.	32	Sub.S.	Ur.
2	C.N.	Ur.	33	Sub.I	Ur.
3	C.N.	Ur.	34	Sub.I	Ur.
4	C.N.	Ur.	35	Sub.I	Ur.
5	C.N.	Ur.	36	Sub.I	Ur.
6	C.N.	Ur.	37	Sub.S	Ur.
7	C.N.	Ur.	38	Sub.S	Ur.
8	C.N.	Ur.	39	Sub.S	Ur.
9	Gr.	Ur.	40	Sub.I	Ur.
10	Gr.	Sub.	41	Sub.S	Sub.
11	Gr.	Sub.	42	Sub.S	Sub.
12	Un.	Sub.	43	Sub.I	Sub.
13	Un.	Sub.	44	Sub.I	Ur.
14	C.N.	Sub.	45	NSub.S	Ur.
15	Un.	Sub.	46	NSub.S	Sub.
16	Gr.	Sub.	47	Sub.S	Sub.
17	Gr.	Sub.	48	NSub.I	Sub.
18	C.N.	Sub.	49	NSub.I	Ur.
19	Cr.	Sub.	50	NSub.I	Ur.
20	Sub.I	Ur.	51	NSub.I	Ur.
21	Sub.I	Sub.	52	NSub.S	Ur.
22	Pat.	Ur.	53	NSub.S	Ur.
23	Sub.S	Ur.	54	NSub.S	Ur.
24	Pat.	Ur.	55	NSub.S	Ur.
25	Sub.I	Ur.	56	NSub.I	Ur.
26	Sub.I	Ur.	57	NSub.S	Ur.
27	Sub.I	Ur.	58	NSub.S	Ur.
28	Sub.S	Ur.	59	NSub.S	Sub.
29	Sub.I	Ur.	60	C.N.	Ur.
30	Sub.I	Ur.	61	NSub.S	Ur.
31	Sub.S	Ur.			Ur.

TC.C1: Tipo de centro según punto C1
TC.C3: Tipo de centro según punto C3
Ur: Localización Urbana
Sub: Localización Suburbana
C.N.: Colegio Nacional
Gr: Graduada
Un: Unitaria

Sub.I: Subvencionado Iglesia
Sub.S: Subvencionado Seglares
NSubI: No " Iglesia
NSubS: No " Seglares
Pat.: Patronato

cas medibles, tales como: edad, altura del escolar, etc.

Si bien el conjunto de funciones que tienen más interés en el análisis de los modelos de localización espacial, como se verá en los capítulos posteriores, son las funciones de nivel (definición 3.2) en base a los cuales se pueden establecer las siguientes:

a) Número de alumnos residentes por zona.

Por medio del atributo ya definido como zona de residencia, se establece la función de nivel uni-dimensional que aplica a cada zona residencial considerada el número de alumnos que en ella habitan (en nuestro caso alumnos correspondientes a primer curso de E.G.B.). Los datos para el curso de 1977-78 referentes a la ciudad de Santander se muestran en la tabla 3.4.

b) Número de alumnos matriculados en cada centro.

Por medio del atributo ya definido en 3.2.1.b, como Centro de Enseñanza se establece una función de nivel uni-dimensional que aplica a cada Centro de Enseñanza el número de alumnos en el matriculados, los datos para el curso de referencia 77-78 se muestran en la tabla 3.5.

c) Flujos entre zonas de residencia y centros escolares.

Por medio de los dos atributos definidos en el apdo. 3.2.1.,: zona de residencia y centro de enseñanza, se establece la función del nivel bi-dimensional que aplica al conjunto producto de los conjuntos cocientes inducido por aquellos atributos el conjunto de números reales formado- por el número de alumnos que residiendo en una zona i, -- acuden a un centro de enseñanza j donde:

$$i = \{1,2,...,14\}$$

$$j = \{1,2,...,61\}$$

para los datos referidos al curso 1977-78.

TABLA 3.4.

Alumnos residentes por zonas

ZONA	Nº DE ALUMNOS
1	221
2	443
3	41
4	370
5	293
6	47
7	421
8	325
9	256
10	270
11	115
12	103
13	45
14	71
TOTAL	3021

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del Padrón 1975.

TABLA 3.5.

Alumnos matriculados por centros. Curso 1977-78

Centro Nº	Nº Alumnos	Centro Nº	Nº Alumnos
1	74	31	75
2	80	32	40
3	40	33	42
4	67	34	88
5	32	35	38
6	80	36	84
7	87	37	83
8	80	38	31
9	4	39	36
10	11	40	45
11	10	41	53
12	3	42	45
13	2	43	40
14	60	44	120
15	3	45	32
16	26	46	60
17	10	47	14
18	79	48	80
19	18	49	60
20	46	50	27
21	38	51	87
22	47	52	26
23	30	53	24
24	22	54	201
25	64	55	10
26	40	56	74
27	80	57	22
28	42	58	16
29	87	59	35
30	35	60	104
		61	32

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 3.6. se muestra los valores reales de flujos entre zonas de residencia y centros escolares, para un total de 23 centros escolares.

d) Distancias entre zonas de residencia y centros escolares

Por medio de los atributos zona de residencia y centros de enseñanza, se establece la función de nivel bi-dimensional que aplica al conjunto producto de los conjuntos cociente inducido por dichos atributos, el conjunto de los números reales formado por la distancia entre el centro de gravedad de las zonas de residencia y los centros de enseñanza. La tabla 3.7. recoge las distancias entre los centros de gravedad de las 14 zonas, y los 61 centros escolares de la ciudad de Santander para el curso académico 77-78.

3.2.3.- Resumen de los componentes del sistema de escolares.

En la siguiente figura 3.4. se muestra a manera de síntesis los elementos que componen los conjuntos

- Básico de elementos: A
- Atributos: α
- Funciones sobre elementos: β
- Funciones de nivel: γ

para el sistema de escolares.

TABLA 3.6.

Flujos entre Zonas de Residencia y Centros Escolares

	2	4	6	8	9	11	14	16	17	18	19	21	25	29	33	34	41	42	44	48	51	56	60
1	-	2	15	1	-	-	-	-	-	-	-	1	12	20	8	9	4	-	9	5	6	7	9
2	29	-	42	12	-	-	-	-	-	-	-	-	13	48	2	7	8	2	16	34	8	4	35
3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	23	-	-	1	1	-	-	1	-	2	4	3	1	1
4	-	52	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10	2	-	8	7	4	6	1	18	8	-
5	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	31	1	-	19	5	20	23	-
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	4	-	-	28	-	2	-	-
7	1	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	36	11	2	2	16	8	-	14	6	8	16	13
8	1	-	14	62	-	-	-	-	-	-	-	-	8	9	33	-	2	-	4	8	1	1	42
9	33	2	3	1	-	-	4	-	-	-	-	-	1	2	1	-	4	7	2	10	-	-	1
10	2	10	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	11	2	30	9	2	6	10	-
11	-	-	-	-	-	-	-	17	10	-	-	-	-	2	-	-	1	-	1	2	-	-	-
12	3	-	-	-	-	-	1	-	-	43	11	-	-	-	-	-	5	-	-	1	-	-	2
13	1	-	-	-	-	-	31	-	-	2	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1
14	-	-	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	1	-	-	2	1	-	8	-	-	-	-

Fuente: elaboración propia

TABLA 3.7.

Distancias entre zonas y centros (en Kms.)

C \ Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2.2	1.6	0.3	3.2	4.2	5.2	2.7	1.2	1.9	3.8	2.2	3.1	3.3	4.6
2	1.5	0.6	0.9	2.5	3.6	4	2.6	0.7	0.7	2.7	3.5	2.9	2.2	3.9
3	1.2	2	3.5	0.5	0.8	1.8	1.8	2	2	0.8	5.2	5.5	3.7	3.7
4	0.7	1.9	3	0.2	1.4	2.1	1.7	1.8	1.8	0.9	5	5.1	3.8	4
5	0.8	1.7	3.3	0.5	1.1	2.1	1.7	2.1	2.1	0.8	5.3	5.3	3.9	3.8
6	0.6	0.3	1.9	1.8	2.9	3.9	1.6	1	0.7	2.4	3.8	3.7	2.2	3.2
7	0.6	0.3	1.9	1.8	2.8	3.9	1.6	1	0.7	2.4	3.8	3.7	2.2	3.2
8	1.2	0.9	1.5	2.2	3.3	4.3	1.9	0.2	1.4	3.2	3.1	3.5	2.9	4.3
9	2.9	3.2	4.6	1.6	0.9	1.3	3.7	4.1	3.1	1.1	6.4	6.4	4.5	3
10	2.6	2.8	4	3	3.6	4.1	3.5	3.7	3.2	2.6	6	5.9	2.5	0.7
11	2.5	3.2	4.1	2.6	3	2.1	3.6	3.8	2.8	2.8	5.8	6.2	2.9	0.5
12	1.9	2.5	3.5	2	3.1	3.5	3	3.2	2.2	2.2	5.2	5.6	2.3	1
13	1.9	2.5	3.5	2	3.1	3.5	3	3.2	2.2	2.2	5.2	5.6	2.3	1
14	2.4	1.9	2.8	3.4	4.4	4.9	4.1	2.6	1.2	3.5	4.8	3.2	0.5	3.1
15	6.6	6.1	5.4	7.7	8.6	9.5	6.2	5.6	6.5	8	2.6	2.6	8	9.2
16	6.3	5.8	5.1	7.4	8.3	9.2	5.9	5.3	6.2	7.7	2.3	2.3	7.7	8.9
17	4.6	4.1	3.4	5.7	6.6	7.5	4.2	3.6	4.5	6	0.6	3.6	6	7.2
18	3.2	2.5	1.2	2.4	5.4	5.9	3.6	2.3	2.4	4.4	2	2.4	3.4	5
19	3.9	3.1	2.5	4.8	6	6.6	4.2	3	3	4.7	5.1	0.9	3.4	5.1
20	1.7	2.6	4	1.1	0.6	1.6	2.2	2.3	2.8	1.5	5.7	6.1	5.3	3.8
21	1.6	2.1	3.7	2.5	3.2	4.3	0.4	2.4	2.5	4.1	5.4	5.8	4.4	4.7
22	0.4	1.6	2.9	0.7	1.8	2.7	1.4	1.5	1.5	1.4	4.3	5	3.3	2.4
23	0.7	1.4	2.8	1.1	2.2	3.3	0.4	1.6	1.8	1.9	3.6	4.3	3.4	3.4
24	0.6	1.4	2.9	0.5	1.5	2.5	1.6	1.5	1.5	1.1	4.5	4.9	3.2	2.8
25	0.4	1.4	2.5	0.8	2.2	3.1	1.4	1.4	1.7	1.8	4.2	4.6	2.9	2.8
26	0.7	1.6	3.2	0.5	1.2	2.2	1.7	2.1	2.1	0.8	5.2	5.3	3.8	3.8
27	0.7	1.6	2.6	1.5	1.9	2.6	1.9	2.3	1.8	1.4	4.6	4.7	2.8	2
28	1.2	2.9	3.8	0.4	1.2	1.8	1.8	2.7	2.6	5	5.5	5.8	4.1	3.6
29	1.4	0.4	1.4	1.7	2.8	3.5	2	1.6	0.3	1.8	3.7	3.5	1.7	2.9
30	0.4	1.6	2.8	0.5	1.7	2.4	1.4	2.1	1.9	1.2	4.6	5	4	4.3
31	1.9	2.1	2.1	2.5	3.5	4.5	0.8	1.4	2.3	3.4	3.8	4.2	3.8	4.6

Z = zonas; C = centros

TABLA 3.7. (Continuación)

Distancias entre zonas y centros (en Kms.)

Z / C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
32	1.5	0.6	1	2.7	3.8	4.1	2.4	0.6	0.9	2.9	3.5	2.9	2.4	4
33	0.6	0.6	2.1	1.5	2.4	3.4	1.2	0.7	1	2.4	3.8	4	2.9	3.7
34	2.9	3.7	5	2.1	0.9	1.2	3.4	3.9	3.8	1.7	6.8	7	5.4	3.2
35	1.5	2.4	3.8	0.9	0.8	1.8	2	2.2	2.6	1.5	5.5	5.9	5.1	3.8
36	0.4	1.5	2.8	0.8	1.9	2.7	1.4	1.4	1.5	1.4	4.2	4.9	3.2	2.4
37	1.9	2.1	2.1	2.5	3.5	4.5	0.8	1.4	2.3	3.4	3.8	4.2	3.8	4.6
38	1.6	2.4	4	1	0.5	1.5	2.3	2.5	2.7	1.5	5.6	6	5	3.4
39	3	4	4.9	2	1	0.5	3.6	4.1	3.4	1.5	7.1	7.4	5.2	2.8
40	2.2	1.6	0.2	3.2	4.2	5.2	2.7	1.3	1.9	3.8	2.2	3.1	3.3	4.6
41	5.2	4.3	3.6	6.2	7.2	7	5.7	4.1	4.5	6	3.8	1.6	4.2	7
42	1.6	2	2.9	1	1.8	2.4	2.8	2.6	1.7	1	5.1	4.9	3.2	2.6
43	2.1	1.7	2.8	3.1	4.2	4.6	4	2.3	1.9	3.2	4.8	3.2	0.9	2.2
44	4.5	4.6	5.6	2.8	1.6	0.7	4.9	6	4.3	2.2	8.6	7.5	5.8	1.9
45	0.7	1.6	2.6	0.6	1.2	1.2	1.6	2.1	2.2	0.9	5.2	5.3	3.9	3.9
46	1.8	1.4	2.5	2.8	3.9	4.3	3.7	2	1.6	2.9	4.5	2.9	1.1	1.9
47	1.5	0.6	1.1	2.3	3.4	3.7	2.7	1.2	0.5	2.5	3.7	3.1	2	4
48	1.3	0.4	1.1	2.1	3.2	3.5	2.5	1	0.5	2.5	3.7	3.3	2	4
49	1.8	2.6	4	0.6	0.9	1.5	2.3	3.3	2.9	1.3	5.6	5.7	4.8	3.4
50	1.8	2.6	4	0.6	0.9	1.5	2.3	3.3	2.9	1.3	5.6	5.7	4.8	3.4
51	1.4	2.2	3.8	0.8	0.7	1.7	2.1	2.3	2.5	1.3	5.4	5.8	4.8	4.6
52	1.4	0.7	1.3	2.4	3.6	4.6	2.1	0.6	1.1	3	3	3.3	2.7	3.7
53	2.6	3.4	4.8	1.4	0.4	0.7	3.2	3.7	3.2	1.1	6.6	6.4	4.8	3.9
54	1.6	1	1	2.6	3.8	4.8	2.1	3.9	3.4	1.3	6.8	6.6	5	4.1
55	0.7	0.6	1.3	1.7	2.8	3.9	1.7	0.6	1.8	2.5	3.6	4	2.5	3.4
56	2	2.8	4.2	0.8	0.7	1.3	2.5	3.5	3.1	1.5	5.8	5.9	5	3.6
57	1.3	0.7	1.3	2.4	3.6	4.6	2.2	0.6	1.1	3	3	3.3	2.7	3.7
58	3.2	3.9	5.2	2.3	1	1.3	3.6	4.1	3.8	1.8	6.9	7.1	5.5	3.4
59	1.6	2.1	3.7	2.5	3.2	4.3	0.4	2.4	2.5	4.1	5.4	5.8	4.4	4.7
60	0.5	0.3	1.9	1.8	2.8	3.8	1.5	1	0.7	2.4	3.8	3.8	2.2	3.2
61	1.4	0.9	1.8	1.3	2.4	3.1	2.1	1.6	0.6	1.7	4	3.8	2.1	2.5

Z = zonas; C = centros

Conjunto básico (A)	. Escolares
Atributos (α)	. Zona de residencia . Centro al que acuden . Tipo de centro escolar
Funciones sobre elementos (β)	. Distancia entre su lugar de residencia y su centro . Años de cada escolar
Funciones de nivel (γ)	. Nº alumnos residentes en cada zona . Nº alumnos que asisten a cada centro . Flujos entre zonas y centros escolares . Distancias entre zonas y centros.

Figura 3.4: Los componentes del sistema de escolares.

3.2.4.- Jerarquización: Subsistemas.

Definido el sistema de escolares a nivel urbano - (ver figura 3.4.) y siguiendo la definición 3.5. se pue-- den considerar entre otros los siguientes subsistemas:

a) Subsistema de escolares de E.G.B. que residen en las - zonas más al Norte del término municipal de Santander (zonas 12, 13, y 14 de la figura 3.1.)

$$S_1 = \{(A_1(t_1), \alpha_1(t_1), \beta_1(t_1), \gamma_1(t_1)\}; \ t_1 = \text{Curso 1977-78}\}$$

donde:

- $A_1(t_1)$ es el conjunto de escolares que residen en las zonas 12, 13 y 14 del têrmino municipal de Santander.

- $\alpha_1(t_1)$ es el conjunto de atributos constituido por las zonas de residencia 12, 13, 14, los centros que en ellas se localizan (centros de nûmeros 10,11,12,13,14,18,19,41, 43,44,y 46 de la tabla 3.2.) asî como el tipo al que pertenecen (ver tabla 3.3.).

- $\beta_1(t_1)$ es el conjunto constituido por las distancias para cada escolar entre su zona de residencia y el centro escolar al que acude, asî como su edad.

- $\gamma_1(t_1)$ es el conjunto referido al nûmero de alumnos para las zonas 12,13 y 14 (ver tabla 3.4); los alumnos que asisten a los centros que dichas zonas se localizan (ver tabla 3.5); las distancias entre dichas zonas y centros (ver tabla 3.7); asî como los flujos (ver tabla 3.6).

b) Subsistema de escolares de E.G.B. que acuden a centros estatales (ver tabla 3.3.)

$S_2 = \{(A_2(t_1),\ \alpha_2(t_1),\ \beta_2(t_1),\ \gamma_2(t_1));\ t_1 = \text{curso 77-78}\}$

donde:

- $A_2(t_1)$ es el conjunto de escolares que acuden a centros estatales, expresamente los colegios nûmeros 1 al 19, y -

número 60 de la tabla 3.3.

- $\alpha_2(t_1)$ es conjunto formado por las zonas de residencia de escolares que acuden a centros estatales, así como dichos centros estatales.

- $\beta_2(t_1)$ es el conjunto formado por las distancias entre su lugar de residencia y centro escolar para el conjunto $A_2(t_1)$, así como también la edad escolar.

- $\gamma_2(t_1)$ es el conjunto sobre $\alpha_2(t_1)$ de su número de residentes por zona, y alumnos por centro, así como sus -- distancias y flujos.

Inmediatamente se comprende que aparecen relaciones jerárquicas (según la definición 3.7. que se expresa en el apartado 3.1.3.) que pueden definir niveles de jerarquia tales como los que siguen:

Nivel 1: Sistema de escolares de E.G.B. del término municipal de Santander.

Nivel 2: Subsistema de escolares de E.G.B. que residen en el Norte de la ciudad. (zonas 12,13 y 14 de la figura 3.1)

Nivel 3: Subsistema de escolares de E.G.B. que residen en la zona 12 (ver figura 3.1)

Analogamente se definirán relaciones jerarquicas para -- otros subsistemas.

3.2.5.- Entorno de sistema.

Según la definición 3.7. expuesta en el apartado 3.1.2., el entorno de un sistema estaría formado por el conjunto diferencia del conjunto ρ de todos los subsistemas de P (sistema universal dado) y el conjunto S* de todos los subsistemas de S.

Considerando como sistema universal P el conjunto de todos los escolares de E.G.B. españoles y las extensiones naturales para α, β, y γ.

Ya que practicamente el total de alumnos que acuden a los centros de enseñanza de E.G.B. localizados en el término municipal de Santander, residen en el mismo, las relaciones existentes entre los elementos del sistema con su entorno se pueden considerar nulos; constituyendo nuestro sistema, siguiendo los conceptos ya expuestos en el apartado 2.1.3., un sistema cerrado.

CAPITULO IV

MODELIZACION DE LOS SISTEMAS: LOS MODELOS DE LOS SISTEMAS URBANOS

4. MODELIZACION DE LOS SISTEMAS: LOS MODELOS DE LOS SISTEMAS

4.1. LA MODELIZACION DE LOS SISTEMAS

4.2. EL MODELO URBANO DE DISTRIBUCION DE WILSON

4.3. EL MODELO URBANO DE ECHENIQUE

4.1. LA MODELIZACION DE LOS SISTEMAS

4.1.1.- El nivel jerárquico de los modelos en el análisis científico.

En los capítulos precedentes se han utilizado -- conceptos tales como: paradigma, modelo e, incluso, teoría (teoria general de los sistemas), sin detenerse en- buscar una relación jerárquica entre ellos, con validez general en el análisis científico. El estudio más detenido de los modelos en el marco de la Teoría General de los Sistemas conviene sea precedido de una referencia a la relación citada.

Chadwick establece el esquema jerárquico siguiente (1):

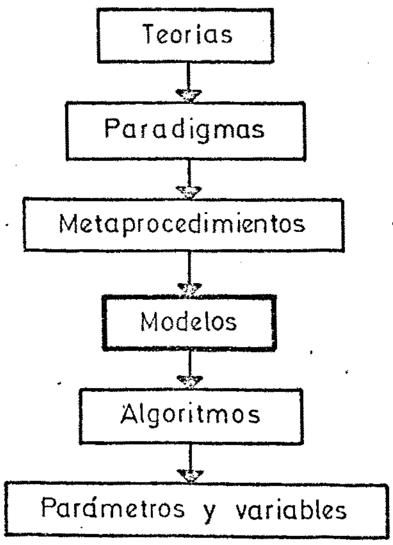

Figura 4.1.- Nivel jerárquico de los modelos en el análisis científico

Para Chadwick "una teoría es un conjunto de --- ideas o proposiciones que pretenden explicar un grupo- de hechos o fenómenos, una progresión sobre leyes gene rales, una declaración sistemática de principios gene- rales".

De manera algo menos abstracta se considera una- teoría en los tratados de lógica o metodología científi ca. Así, por ejemplo, Sacristan (1973) dice:

> "La preocupación por los fundamentos de una cien cia y la reflexión sobre los mismos presuponen- una considerable acumulación de conocimientos - en ella, y tienen que ver con el deseo de orde- nar esos conocimientos de modo que sea posible- distinguir cuáles son las nociones básicas. -- Cuando es posible satisfacer ese deseo, y los - conceptos y enunciados de una ciencia están or- denados como jerárquicamente, de modo que unos- sirvan de base a otros, se dice que esa ciencia es una teoría". (9)

El concepto de paradigma, frente a un significado tradi cional del término que lo relacionaba con ejemplo, mode lo, arquetipo, etc., Kuhn lo introdujo en el análisis - de la historia y la metodología de las ciencias con --- otro sentido mucho más amplio. El paradigma de Kuhn(*)

(*) Según se expresa en el apartado 1.1.2.

es el conjunto de conceptos, categorías, relaciones y métodos aceptados de una forma general por toda la comunidad científica en cierto momento, es en cierta forma, un punto de vista respecto a la realidad, una forma de entender el quehacer científico.

Kuhn(5) ha explicado magistralmente el proceso de sustitución de un paradigma por otro en la consecución de las revoluciones científicas. En un momento dado del estado de la ciencia, un paradigma deja de ser válido para enfrentarse a las nuevas teorias y sus conceptos e instrumentos fallan para resolver los nuevos problemas; la crisis se produce, todas las bases científicas anteriores se cuestionan y el paradigma se rechaza.

En el nivel inmediato a los paradigmas se encuentran los metaprocedimientos, referidos a una forma de selección de procedimientos, o un método de métodos, que traslade las pautas teóricas hacia alguna aplicación concreta. Los metaprocedimientos se pueden representar por metalenguajes, o lenguajes de "más alto nivel" utilizados para la selección y el análisis de lenguajes concretos.

En el siguiente nivel encontraremos a los modelos, que se analizan en el apartado siguiente como sistema, representación de otros sistemas. La repre--

sentación se consigue por medio de lenguajes de diversos-tipos, que pueden variar del matemático al literario, pasando por otros muchos, físicos, gráficos, etc,.

El algoritmo es ya un procedimiento o método con--creto de cómputo, referido a la utilización de un modelo-determinado que utiliza ya el lenguaje del usario o el de la máquina que vaya a realizar ese cómputo. Una lista, organigrama, o relación de pasos, son representación del algoritmo.

Cuando se utiliza el lenguaje matemático en la representación de modelos, éste, así como los posibles lenguajes de usario o máquina que los computen implica el -uso de cantidades, representadas por símbolos, llamadas-parámetros y variables. Encontrandonos en el último ni--vel de la jerarquía.

4.1.2.- Los modelos y sus clases.

La definición de modelo dentro de la teoria de --sistemas, no puede ser más simple y al tiempo exigir más explicaciones y matizaciones. Un modelo es un sistema, -representación de otro sistema.

El mundo real en su conjunto, que no puede ser --abarcado por la mente humana, se descompone en sistemas-más o menos simples en un proceso de abstracción simplificador del análisis. Pero aún un sistema, sea real o -- conceptual, puede resultar, a un cierto nivel de resolución de dificil comprensión. El modelo aparece entonces- como una representación más o menos simplificada del sistema, que suprimiendo los elementos incidentales, permite se destaquen los aspectos fundamentales del mismo.

De esto se deduce la cualidad de sistema que, en - principio, tiene todo modelo, aunque sistema diferente del sistema representado, y a veces de caracteristicas absolutamente distintas, pero sistema en suma.

Lo que se está expresando acerca de los modelos -- puede enlazarse con otros aspectos teóricos de la teoría- de sistemas expuesta en el capítulo dos.

Klir y Valach(4) encuentran dos tipos de similitu-- des entre sistemas: "Similitud en el universo" (conjunto A de elementos) y "similitud en el comportamiento". A partir de estas similitudes presentan el isomorfismo a que pueden dar lugar los mismos, siendo un sistema modelo del otro. - Es decir, el proceso de modelización implica un isomorfismo entre el sistema representado y el modelo.

Klir en un trabajo posterior, distingue entre modelos de comportamiento y modelos de estructura.

En el modelo de comportamiento solo existirá isomorfismo entre el modelo y el sistema de referencia en los aspectos funcionales, mientras que en los modelos de estructura el isomorfismo se referirá a los aspectos de estructura.

Lo principal que nos aporta la distinción entre modelos de comportamiento y modelos de estructura, es la idea de que un modelo no tiene por qué representar enteramente al sistema de referencia. Ello nos lleva a otra clasificación de los modelos, similar pero algo más general que esta última, que no es corriente en los manuales y, sin embargo, es fundamental en el desarrollo y entendimiento de toda nuestra Tesis. Se encuentra en Mc Grath, Nordlie y Vanghan (1973), y distingue entre modelos de planeamiento y modelos de investigación.

- Los modelos de planeamiento ("design models") representan el sistema en su conjunto, aunque pueda variar el grado o nivel de resolución, de esta representación o descripción. Son generalmente modelos abstractos, formulados verbalmente en un principio para matematizarse posteriormente.

- Los modelos de investigación, representan o describen únicamente ciertos elementos, características o relacciones del sistema que resultan re levantes en la investigación de dicho sistema. En otras palabras "un modelo de investigación-puede ser considerado como un resumen eficiente de conocimientos empíricos acerca de un aspecto del problema, o como un conjunto interrelacionado de hipótesis a ser comprobadas por -aplicación de acumulación de información y métodos de síntesis de la misma" (3).

Esta clasificación es utilizada por otros autores pero-con nombres distintos, llamando a los primeros modelos-normativos y a los segundos descriptivos(6) y, como ya-se ha señalado, tiene cierto paralelismo con los de comportamiento y de estructura de Klir. La diferencia esencial de estas clasificaciones se encuentran en que los-modelos de planeamiento exigen una representación to--tal del sistema, factor que no es necesario para defi--nir los normativos o de comportamiento.

Los modelos de investigación referidos a ciertos elementos o relaciones del sistema únicamente son extraordinariamente útiles en el estudio de un isomorfismo -entre dos sistemas, permitiendo comprobar la validez de un modelo que representa unos elementos o relaciones en un sistema, para representar a los homólogos en el otro es decir, comprobar la homología del modelo en el isomorfismo planteado. Esta comprobación ha de hacerse, como-se ha dicho, utilizando la información existente acerca de los elementos o relaciones del sistema y los métodos de síntesis correspondientes. Todo este proceso es el - que se sigue en el siguiente capítulo.

Resumiendo, podemos expresar que en todo lo dicho se manejan dos tipos de isomorfismo: el isomorfismo entre sistemas, y el existente entre los modelos que representan algunos elementos o relaciones de cada uno de los sistemas y esos elementos o relaciones, por el hecho de la misma representación.

En las páginas precedentes se ha realizado una primera clasificación de los modelos, que se puede considerar única a pesar de la distinta nomenclatura utilizada por unos u otros autores:

. Modelo de planeamiento-de investigación (Mc --- Grath, Nordlie y Vanghan).

. Modelos normativos-descriptivos (Lee ó Chorley y Haggett).

. Modelos de comportamiento-estructurales (Klir).

La definición dada a los primeros, distingue su-clasificación en cuanto a diferente generalidad, exigiendo una representación total del sistema para los de planeamiento, pero respondiendo a conceptos similares. - Esta clasificación es la principal en nuestro trabajo, - pero existen otras muchas posibles.

Una de las clasificaciones más generales es la dada por Echenique (3) clasificando los modelos en tres categorías de acuerdo con los siguientes factores: para --

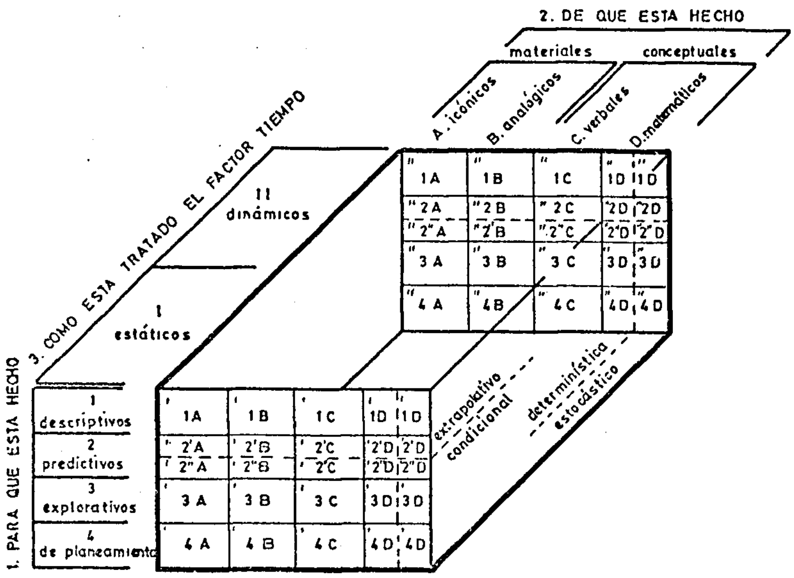

Figura 4.2.- Sistema de clasificación de modelos en 3 categorías

qué está hecho el modelo, de qué está hecho y cómo se trata el factor tiempo (fig. 4.2.)

a) Para qué está hecho el modelo. Este primer aspecto tiene en cuenta las interpretaciones de quién hace el modelo y las materias que el modelo intenta resolver. Dentro de esta categoría se distinguen cuatro tipos principales de modelo:

- Modelo descriptivo, cuya intención principal es comprender la realidad, con la finalidad de establecer cómo acaece un fenómeno en particular y la descripción de las relaciones entre factores-relevantes.

- Modelo predictivo, cuya función principal es el proveer una imagen futura del sistema, distin-- guiéndose dos clases: extrapolativos, donde só- lo se expresa la continuación de tendencias his tóricas que estaban ya en el modelo descriptivo, y los condicionales, donde se especifican los - mecanismos de causa y efecto que gobiernan las- variables.

- Modelo explorativo, cuya función principal es - descubrir por especulación, variando sistemáti- camente los parámetros básicos usados en el mo- delo descriptivo, otras realidades que son lógi camente posibles. Su objetivo es no sólo explo- rar nuevas posibilidades, sino también volver a la realidad para ver si estas posibilidades teó ricamente determinadas pueden darse en ella.

- Modelo de planeamiento, que introduce una medi- da de optimización en términos de los críterios elegidos para determinar medios de alcanzar las metas de planeamiento fijadas. Para alcanzar la optimización se requieren distintos pasos: espe cificación de programas o acciones alternativas que podrían elegirse. Predicción de las conse-- cuencias de elegir cada alternativa. Califica--

ción de estas consecuencias de acuerdo a una escala de medida de obtención de metas. Selección de la alternativa que rinda la más alta puntuación.

b) <u>De qué está hecho el modelo</u>. El segundo aspecto de la clasificación se relaciona con los medios elegidos para representar la realidad. Estos pueden ser clasificados como físicos o conceptuales.

- <u>Modelo físico</u>, en el cual las características físicas de la realidad se representan por medio de las mismas o análogas características. Se dividen a su vez, en dos categorías: icónicos, en los cuales las propiedades físicas se representan sólo por un cambio de escala, y analógicos en los cuales las propiedades físicas del mundo real se representan por propiedades diferentes de acuerdo con ciertas reglas de transformación.

- <u>Modelo conceptual</u>, en el cual las características relevantes están representadas por conceptos (lenguaje o símbolos). Clasificandosé a su vez en dos tipos: verbales o matemáticos. En los verbales, la descripción de la realidad se hace en términos lógicos, utilizando la palabra oral o escrita. En los matemáticos la realidad se repre senta mediante el uso de símbolos y las relaciones se expresan por medio de operaciones. Una subclasificación adicional de los modelos matemáticos llevaría a una distinción entre modelo deterministicos y estocásticos. Tal clasificación atiende al grado de probabilidad incluido.

c) Cómo está tratado el factor tiempo. El tercer aspecto de la clasificación distingue entre los modelos estáticos y los dinámicos.

- Modelo estático, es el que está diseñado para representar un determinado estado del sistema en el tiempo, ya sea en el pasado, presente o futuro.

- Modelo dinámico, es el que está diseñado para representar el desarrollo o evolución del sistema en el tiempo. Normalmente se suele comenzar por describir un "estado base" del sistema, el cual se desarrolla luego en el tiempo.

4.1.3.- Reglas para el diseño de los modelos.

De los distintos modelos referidos en el apartado anterior, solamente pueden ofrecerse reglas generales para su diseño en los modelos formulados matemáticamente.- Los modelos materiales o conceptuales compuestos de una descripción verbal, responderán muy particularmente al -

caso concreto en que se apliquen.

Esas reglas generales para los modelos matemáticos han sido pensadas normalmente para los modelos normativos útiles en el planeamiento, si bien no en el sentido dado a esta palabra por Mc Grath, Nordlie y Vanghan, de que representen a la totalidad del sistema. Dichas reglas suelen referirse en primer lugar a modelos que representan parcialmente el sistema (los que hemos denominado de investigación) para hacerlas extensivas al diseño de modelos que intentan abarcar el sistema en su conjunto, como se verá más adelante, dentro de este capítulo, con el modelo de stocks y actividades de Echenique.

Sin entrar a discutir de nuevo si esas reglas generales se refieren a sistemas de planeamiento o de investigación y considerándolas válidas para estos últimos, de mayor interés en nuestro caso, hacemos un breve repaso de las mismas sin profundizar en ellas, al no ser éste el lugar adecuado para ello. El proceso secuencial de aplicación de estas reglas, siguiendo el citado libro de Lee (1.973) es como sigue:

a) Definición del sistema, destacando los elementos y relaciones que se van a representar con el modelo, en el caso de que no sean todos.

b) Elección de las variables que van a intervenir en el modelo. Estas variables podrán corresponder en la representación a las características o atributos de los parámetros del sistema u otros elementos.

Dentro de este paso es importante el problema de la agregación. Si se considera agregación sectorial o espacial, y en este último caso surge la pregunta, ¿Que extensión deberán tener las zonas, y que criterio se usará para definirlas? A menudo el hecho de que los datos solo existan dentro de una división administrativa preexistente, determina el tipo de sistema zonal a elegir. También tiene interés el tratamiento que se ha de dar a la variable tiempo si el modelo es dinámico.

c) Elaboración de hipótesis, es decir, relaciones matemáticas entre las variables del modelo, que representarán a las relaciones del sistema y se concretarán en ecuaciones. Este paso suele denominarse especificación del modelo, A la ecuación o conjunto de ecuaciones así formadas se las denomina normalmente forma estructural del modelo, aunque no tenga por qué representar a los aspectos estructurales del sistema según la nomenclatura que se ha venido empleando.

En el caso de que la forma estructural del sistema se componga de más de una ecuación matemática, podrán distinguirse submodelos del modelo, que a veces representarán subsistemas del sistema pero otras únicamente elementos o relaciones distintas dentro del sistema de referencia.

d) Identificación del modelo, que abarca la fase de estimación y cálculo de los parámetros que aparezcan en las ecuaciones del modelo y que representan el elemento de unión en el isomorfismo o representación entre el sistema o sus elementos y el modelo. Este proceso, denominado en ocasiones ajuste o calibrado del modelo, se reduce a la utilización de los distintos métodos de síntesis de información y aplicación de la misma, a la que ya se ha hecho referencia.

e) Validación del modelo, es decir, comprobación o confirmación de que cumple la función para la que fue diseñado, en cuanto a exactitud, constancia temporal, si es dinámico,etc. Esta última fase, compleja en muchos casos, enlaza con otra menos general como es la aplicación del modelo en predicciones o simulaciones en el caso de que sea normativo. Con ello se deja nuevamente el campo de interés, restringido ahora a los modelos de investigación.

No siempre será necesario recorrer completa esta secuencia de fases para el diseño de un modelo. Aceptando como válidos los principios de la teoría de sistemas, lo corriente será partir de modelos previamente especificados, con una cierta forma estructural y utilizados en sistemas diferentes de estudio. En resumen, supuesta cumplida la fase a) se pasará a las d) y e) de diseño y utilización de los modelos.

4.2. EL MODELO URBANO DE DISTRIBUCION DE WILSON

Hasta finales de los años sesenta, dentro de los modelos de distribución de viajes en el transporte urbano, - el modelo de gravedad clásico era el más utilizado; el -- cual se desarrolla en analogía con la ley de newton donde la fuerza gravitacional F_{ij} entre dos masas m_i y m_j separadas por una distancia d_{ij} es:

$$F_{ij} = \gamma \frac{m_i \; m_j}{d_{ij}^2} \qquad (4.1)$$

donde γ es una constante. El análogo modelo de gravedad de transporte es entonces

$$T_{ij} = k \; \frac{O_i D_j}{c_{ij}^2} \qquad (4.2)$$

donde k es una constante y el costo del viaje es interpretado como distancia. Siendo T_{ij} el número de viajes entre- las zonas i y j; c_{ij} el costo del viaje entre i y j; O_i el número total de viajes originados en i; y D_j el número total de viajes con destino en j. Este modelo tiene las propiedades siguientes: T_{ij} es directamente proporcional a - O_i y D_j e inversamente proporcional al cuadrado del coste, para cada par de zonas i y j.

Además deben verificarse las siguientes condiciones

$$\sum_j T_{ij} = O_i \qquad (4.3)$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \qquad (4.4)$$

lo cual hace que la constante k se desglose en dos conjuntos de contantes A_i y B_j donde

$$T_{ij} = A_i \; B_j \; \frac{O_i \; D_j}{c_{ij}^2} \qquad (4.5)$$

con
$$A_i = \frac{1}{\sum_j \frac{B_j \; D_i}{c_{ij}^2}} \qquad (4.6)$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i \frac{A_i \; O_i}{c_{ij}^2}} \qquad (4.7)$$

Wilson (10) ha conseguido una derivación teórica absolutamente nueva y general de los modelos de gravedad, a partir del concepto de entropía de un sistema (*). Wilson olvida la analogía con la mecánica clásica para establecerla con la mecánica estadistica clásica y los procesos de maximización de la entropia.

Obtiene el número de estados o viajes individuales asociados a la matriz $\{T_{ij}\}$ de la manera siguiente. Supongasé que T es el total de viajes ($T = \sum_{ij}\sum T_{ij}$). Primeramen

---

(*) Concepto que se desarrollará en el siguiente capítulo.

te, se puede seleccionar T_{11} viajes del total T,T_{12} de- $T-T_{11}$, etc., y así el número de posibles asignaciones - de viajes individuales, o estados, es el número de maneras al combinar T elementos de T_{11} en T_{11}, multiplicado por el número de maneras al combinar $T-T_{11}$ elementos de T_{12} en T_{12}, etc. Así el número total de estados será

$$W(\{T_{ij}\}) = C^{T}_{T_{11}} \; C^{T-T_{11}}_{T_{12}} \qquad (4.8)$$

explícitamente

$$W(\{T_{ij}\}) = \frac{T!}{T_{11}!\,(T-T_{11})!} \; \frac{(T-T_{11})!}{T_{12}!\,(T-T_{11}-T_{12})!} \cdots = \frac{T!}{\prod\limits_{ij} T_{ij}!} \qquad (4.9)$$

y maximizando (4.9) sujeto a las restricciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \sum_j T_{ij} &= O_i \\ \sum_i T_{ij} &= D_j \\ \sum_{ij}\sum T_{ij}c_{ij} &= C \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

en donde C es el coste generalizado de transporte, y - aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange;

$$L = \mathrm{Ln}W + \sum_i \alpha_i \Big(O_i - \sum_j T_{ij}\Big) + \sum_j \beta_j \Big(D_j - \sum_i T_{ij}\Big) + \gamma\Big(C - \sum_i\sum_j T_{ij}c_{ij}\Big) \qquad (4.11)$$

y donde α_i, β_j y γ son los multiplicadores de Lagrange. Obsérvese que resulta más conveniente maximizar LnW - que W, y entonces es posible usar la aproximación de - Stirling.

$$\mathrm{Ln}\, N! = N\, \mathrm{Ln}\, N - N \tag{4.12}$$

Los T_{ij} que maximizan L, y que por tanto constituyen - la distribución más probable de viajes, son las solu-- ciones de

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = 0 \tag{4.13}$$

y en consecuencia se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = - \mathrm{Ln}\, T_{ij} - \alpha_i - \beta_j - \gamma c_{ij} \tag{4.14}$$

Despejando T_{ij} se obtiene

$$T_{ij} = \exp(-\alpha_i - \beta_j - \gamma c_{ij}) \tag{4.15}$$

y sustituyendo en (4.10) se tiene

$$O_i = \sum_j T_{ij} = \exp(-\alpha_i) \sum_j \exp(-\beta_j - \gamma c_{ij}) \tag{4.16}$$

$$D_j = \sum_i T_{ij} = \exp(-\beta_j) \sum_i \exp(-\alpha_i - \gamma c_{ij}) \tag{4.17}$$

si se denomina

$$A_i = \frac{\exp(-\alpha_i)}{O_i} \tag{4.18}$$

$$B_j = \frac{\exp(-\beta_j)}{D_j} \tag{4.19}$$

entonces se tiene

$$T_{ij} = A_i\ B_j\ O_i\ D_j\ \exp(-\gamma c_{ij}) \tag{4.20}$$

con

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j\ D_j \exp(-\gamma c_{ij})} \tag{4.21}$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_j A_i\ O_i \exp(-\gamma c_{ij})} \tag{4.22}$$

que constituye el modelo de Wilson.

4.3. EL MODELO URBANO DE ECHENIQUE.

4.3.1.- Los niveles de desagregación del sistema urbano.

4.3.1.1.- Primer nivel de desagregación y sus relaciones.

Echenique (3) demuestra la necesidad de entender la ciudad como un sistema compuesto de elementos y relaciones, que debe ser representado a través de un modelo para poder manejarlo y comprenderlo. Estos modelos se centran en la forma en que los elementos del sistema están localizados en el espacio urbano y sus relaciones espaciales.

El sistema urbano se concibe según Echenique con distintos grados de agregación los cuales se reflejan en la fig. 4.3., pudiendo observarse tres niveles de desagregación.

En el primer nivel el sistema urbano se desagrega en dos elementos, las actividades humanas, tales como trabajar, viajar, etc., y los stocks físicos, tales como el suelo, edificios y canales que ponen en comunicación dichas actividades. Las relaciones dentro de este primer nivel de desagregación del sistema urbano pueden expresarse de la manera siguiente: las actividades generan una demanda por stock físico que, una vez construido y por tanto localizado, determina, a su vez, la localización de acti-

- SISTEMA URBANO
  - Actividades
    - Localizados
      - Empleo básico
      - Empleo de servicio
      - Residenciales
    - Flujos
      - Viajes al trabajo
      - Viajes al servicio
  - Stocks
    - Espacios adaptados
      - Terreno
      - Edificado
    - Canales
      - Redes de transporte

1er Nivel — 2º Nivel — 3er Nivel

Fig. 4.3.- Niveles de desagragación del sistema urbano

vidades (figura(4.4)

Hay que hacer notar el distinto grado de dinamicidad en los stocks y las actividades, ya que estas van cambiando de forma continua con el tiempo (año a año e incluso hora a hora), pero los stocks físicos, aunque pueden -

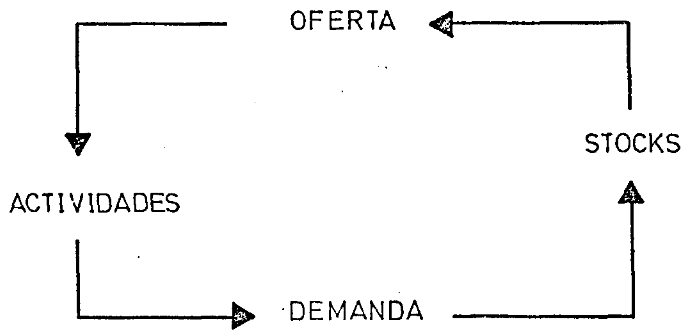

Figura 4.4.- Relaciones en el primer nivel de desagregación

sufrir cambios en el uso que se les dé, cambian muy lentamente en el tiempo.

4.3.1.2.- Segundo nivel de desagregación y sus relaciones.

En este nivel, las actividades se desagregan en dos elementos: las actividades localizadas y las actividades - de flujo.

Las actividades localizadas son aquellas actividades que se desarrollan en un determinado lugar, tales como el trabajo, la residencia o el servicio, a diferencia de - las actividades de flujo que se desarrollan entre lugares, tales como viajar.

Los stocks se desagregan en espacios adaptados que sirven de locales para el desarrollo de las actividades lo calizadas, tales como edificios, y los canales de comunicación, que contienen flujos. (figura 4.5).

En este nivel las relaciones se vuelven más complejas, ya que las actividades generan flujos.

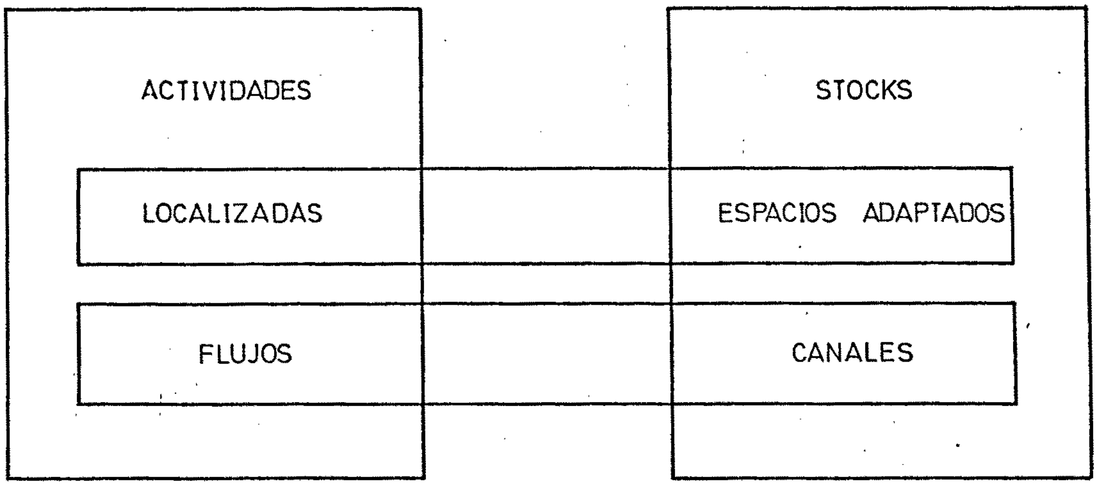

Figura 4.5.- Relaciones en el segundo nivel de desagregación

entre ellas, que requieren espacios adaptados y canales para poder llevarlas a cabo.

4.3.1.3.- Tercer nivel de desagregación y sus relaciones.

En este nivel se desagregan a las actividades localizadas en diferentes tipos, tales como actividades de trabajo (empleo) y residenciales; los flujos en dos tipos, -- viajes al trabajo y viajes al servicio. Los espacios adaptados se desagregan en espacios dedicados a empleo básico, empleo de servicio, y a viviendas o residencias, mientras-que los canales se desagregan solo en el conjunto de transportes que por ellos van a circular.

Las relaciones entre los distintos elementos que en este nivel de desagregación existen, han sido explicadas según distintos sistemas por Lowry, Garin y Echenique, y serán comentadas con mayor atención en el apartado siguiente.

4.3.2.-.Modelos que representan las relaciones entre distintos elementos del tercer nivel de desagregación.

4.3.2.1.- Modelo de actividades localizadas o de Lowry.

Este modelo desarrollado por Lowry (7) en 1.964 relaciona dentro del tercer nivel de desagregación el empleo básico, el empleo de servicios y las residencias. Por empleo básico se entiende el correspondiente al sector o industría básico que produce bienes que se consumen principalmente fuera del área y cuyo crecimiento está relacionado con el nacional. Por empleo de servicios se comprende el resto del empleo, para servir el sector básico y a la población residente.

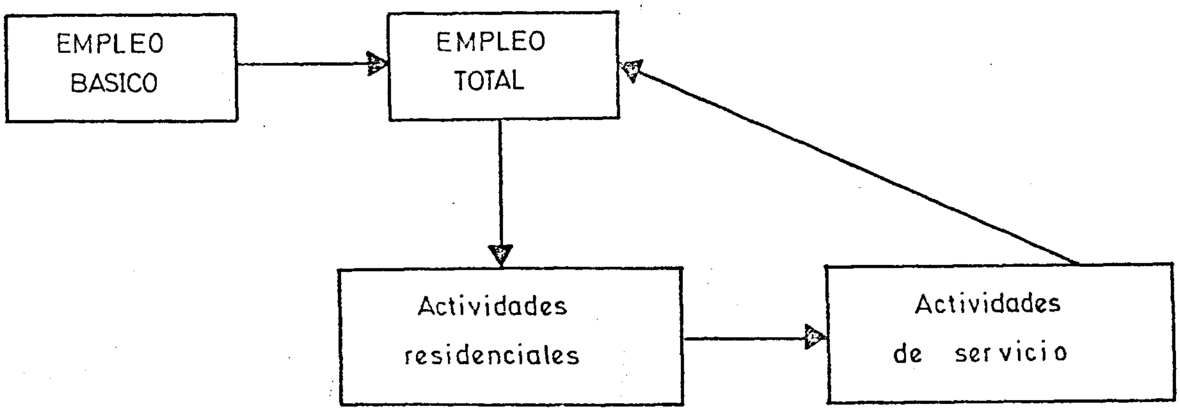

Figura 4.6.- Estructura del modelo de actividades localizadas de Lowry

La estructura del modelo de Lowry (figura 4.6) establece que, dada una determinada localización del empleo básico en la ciudad, es posible buscar la distribución -- más probable de actividades residenciales, sobre cuya base es posible encontrar la localización más probable de - las actividades de servicio. Estas últimas suponen una -- nueva cantidad de empleo agregada al sistema, que generará nuevas distribuciones residenciales que, a su vez, requerirán de nuevas cantidades de servicios, etc., hasta - que el sistema llega a un estado de equilibrio entre em-- pleo, residencia y servicio.

Las relaciones entre empleo y residencia, y entre residencia y servicios están determinadas por modelos de accesibilidad cuya estructura es la siguiente:

$$Q_{ij}^{x} = G_i^x \, W_j^x \, e^{-\alpha c_{ij}} \Big/ \sum_j W_j^x \, e^{-\alpha c_{ij}} \qquad (4.23)$$

donde:

Q_{ij}^x = actividad x localizada en j y originada en i.

G_i^x = actividad generadora de x en i.

W_j^x = atracción en zona j para x.

c_{ij} = coste viaje i-j.

$W_j^x \, e^{-\alpha c_{ij}}$ = accesibilidad de la zona j para actividad x, en i.

$W_j^x \, e^{-\alpha c_{ij}} / \sum_j W_j^x \, e^{-\alpha c_{ij}}$ = accesibilidad relativa = probabilidad que actividad x localizada en i vaya a zona j.

α = parámetro a calibrar.

4.3.2.2.- MOdelo de localización de actividades o de Garin-Lowry.

Garin mejora el modelo de Lowry, demostrando que las relaciones entre los elementos considerados en el modelo de Lowry son flujos de transporte. De esta forma la relación empleo-vivienda constituye el viaje al trabajo y la relación vivienda-servicios constituye el viaje a servicios.

La estructura del modelo es la dada en la figura 4.7, utilizandose modelos de accesibilidad para definir los viajes, según se ha visto en (4.23)

4.3.2.3.- Modelo de stocks y actividades o de Echenique.

El de Garin-Lowry se puede mejorar mediante la introducción de los stocks físicos en el sistema, puesto que para determinar la localización de la actividad residencial, es necesario conocer la disponibilidad de superficie construida. Igualmente, para efectuar los viajes, se requiere de canales de comunicación. Esto es lo que básicamente realiza el modelo desarrollado en la Universidad de Cambrigde (Echenique, 1.969) que incluye un proceso de localización

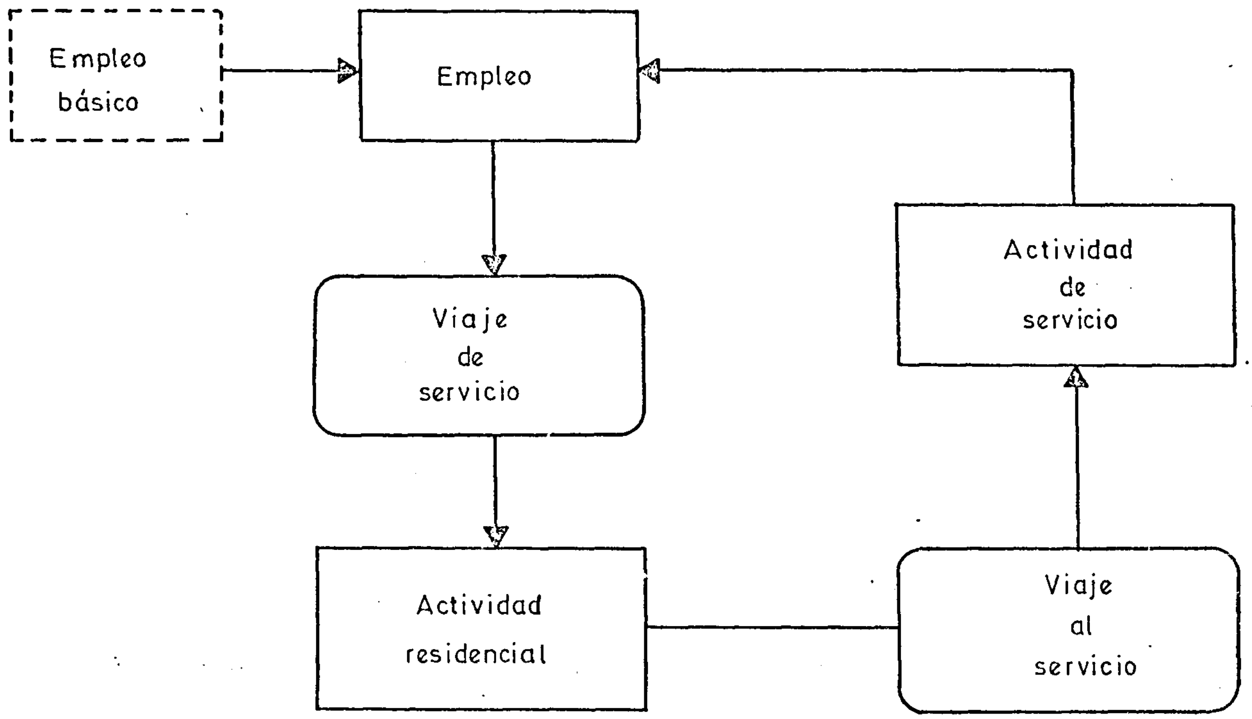

Figura 4.7.- Estructura del modelo de Garin - Lowry

de stocks (figura(4.8)

El modelo distingue entre el proceso de generación y localización del stock físico de superficie construida- en una ciudad y el proceso de generación y localización -. de actividades urbanas. Ambos procesos se encuentran in-- terrelacionados, de manera tal que las actividades (residentes, servicios,etc.) generan una demanda de suelo y vivienda los que, una vez localizados, restringen la futura localización de actividades. Así, las actividades no sólo- están localizadas en la ciudad de acuerdo con·sus relaciones funcionales sino que lo están también, de acuerdo con-- restricciones impuestas por el stock físico disponible (edificaciones, suelo y redes de transporte).

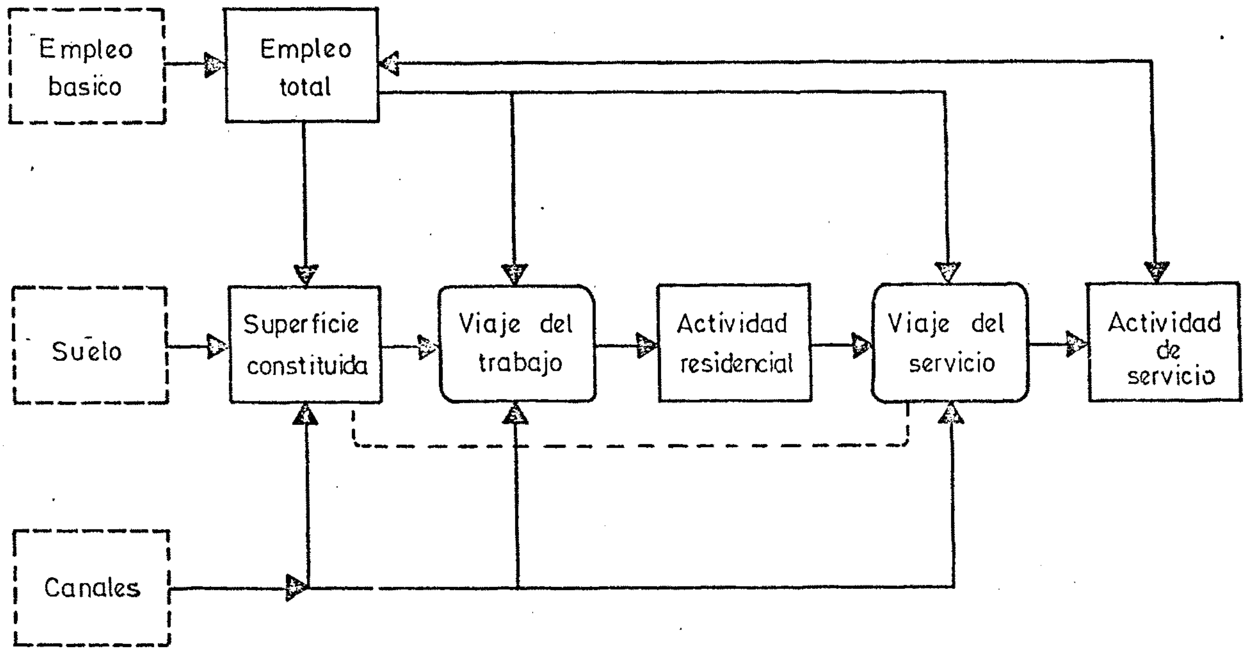

Figura 4.8.- Estructura del modelo de stocks y actividades

La determinación de la localización de los stocks y actividades se realiza mediante un proceso iterativo. Puesto que la localización de cada uno de los elementos depende de la localización de todos los demás, por medio de -- aproximaciones sucesivas nos vamos acercando a un estado -

de equilibrio entre todos ellos.

Para dar comienzo a la secuencia de operaciones se requieren algunos elementos exógenos (entradas), los cuales son determinantes de la estructura urbana, siendo los siguientes:

- Empleo básico.
- Suelo urbano disponible.
- La red de transporte.

El modelo está constituido por tres submodelos interrelacionados: los de superficie construida, de localización residencial y de localización del empleo de servicio. Por medio del proceso iterativo, el modelo determina la localización más probable del stock físico y de las actividades urbanas (residentes, servicios y flujos de tráfico), según la siguiente secuencia: la localización del empleo básico genera una demanda de superficie construida que es distribuida por el submodelo correspondiente; los empleados son distribuidos a sus lugares de residencia por el submodelo de localización residencial, generando a la vez los viajes al trabajo realizados y la población dependiente (familiares, etc.); la población residencial genera una demanda de servicios que es localizada a través del submodelo de localización del empleo de servicio, generando también los viajes al servicio; el empleo de servicio generado se agrega al empleo básico, recomenzando -

nuevamente la secuencia; finalmente, luego de un número razonable de iteraciones, se llega a un estado de equilibrio entre el stock y las actividades. La estructura iterativa entre residentes y empleo de servicio está basada en el modelo de Lowry (1,969).

A continuación desarrollamos la estructura de los tres submodelos que se usan:

a) Submodelo de localización de superficie construida.

Conocida la demanda de superficie construida en una ciudad, que puede expresarse en hectáreas de superficie construida por empleo (parámetro w), este submodelo la distribuye a las zonas de acuerdo con la disponibilidad de suelo desarrollable en cada zona, a la accesibilidad a los centros de empleo y en relación a la disponibilidad y accesibilidad del suelo del resto de las zonas competitivas. La estructura del modelo es:

$$F_j = \sum_i E_i w\, L_j \exp(-\beta^f d_{ij})\, A_i \qquad (4.24)$$

siendo

$$A_i = \left[\sum_j L_j \exp(-\beta^f d_{ij})\right]^{-1} \qquad (4.25)$$

donde

F_j = superficie construida localizada en la zona j.

E_i = empleo total en la zona i.

W = demanda de superficie construida por empleo.

$W = \frac{F}{E}$ superficie construida total/empleo total.

L_j = suelo disponible en la zona j.

d_{ij} = distancia entre la zona i y la zona j.

β^f = parámetro.

b) Submodelo de localización residencial.

Los empleados en una ciudad requieren cierto espacio para el desarrollo de sus actividades residenciales, cuya localización puede determinarse distribuyéndolos desde sus lugares de trabajo a la superficie construida en cada zona, teniendo en cuenta la accesibilidad entre ambos y la existencia además de superficie construida en todas las zonas restantes y su accesibilidad. Determinada la localización residencial de los empleados, la población residencial en cada zona se puede determinar mediante un coeficiente de participación laboral (número de familiares dependientes de cada empleo).

La superficie construida disponible para uso residencial es:

$$F_j^r = F_j - (E_j^b\, p + E_j^s\, q) \qquad (4.26)$$

donde

F_j^r = Superficie construida disponible para uso residencial en j.

F_j = superficie construida total en j.

E_j^b = empleo básico en la zona j.

E_j^s = empleo de servicio en la zona j.

P,q = estándares espaciàles para el empleo básico y de servicio.

El viaje del trabajo y la localización residencial se obtienen como:

$$E_{ij} = E_i F_j^r \exp(-\beta^r d_{ij}) A_i \tag{4.27}$$

siendo

$$A_i = \left[\sum_j F_j^r \exp(-\beta^r d_{ij})\right]^{-1} \tag{4.28}$$

donde

E_i = empleados que trabajan en i y se localizan residencialmente en j.

E_i = empleos en la zona i.

F_j^r = superficie construida disponible para uso residencial en j.

d_{ij} = distancia entre i y j.

β^r = parámetro que se define como:

$$\beta^r = \frac{\eta^r}{\overline{d^r}}$$

donde

η^r = valor a ser calibrado.

$\overline{d^r}$ = distancia promedio de los viajes al trabajo.

La población total en cada zona es:

$$P_j = \sum_j E_{ij} u \qquad (4.29)$$

donde

P_j = población residencial en j.

u = coeficiente de participación laboral

$$u = \frac{P}{E} \quad \frac{\text{Población total}}{\text{Empleo total}}$$

c) Submodelo de localización del empleo de servicio.

La población de una ciudad requiere de servicios, los cuales pueden ser distribuidos de acuerdo a un modelo de mercado potencial, tomando en consideración la accesibilidad a la población residencial, el empleo localizado en cada zona y la accesibilidad competitiva a todas las zonas restantes. Entonces, los viajes al servicio se obtienen como:

$$P_{ji} = P_j \, E_i^{\alpha} \exp(-\beta^{\alpha} d_{ji}) \, A_j \qquad (4.30)$$

siendo

$$A_j = \left[\sum_j E_i^{\alpha} \exp(-\beta^{\alpha} d_{ji}) \right]^{-1} \qquad (4.31)$$

donde

P_{ji} = población que vive en j y que acude a i para servicios.

E_i = empleos en la zona i.

d_{ji} = distancia entre la zona i.

β^s = parámetro definido como:

$$\beta^s = \frac{\eta^s}{\overline{d^s}}$$

donde

η^s = parámetro a ser calibrado.

$\overline{d^s}$ = distancia promedio del viaje servicios.

α = parámetro que representa las economías de escala.

El empleo de servicio se obtiene en cada zona como:

$$E_i^s = \sum_j P_{ji} v \qquad (4.32)$$

donde

E_j^s = empleo de servicio en la zona j.

v = proporción de empleos de servicio por habitante.

$$v = \frac{E^s}{P} \; \frac{\text{empleo de servicio total}}{\text{población total}}$$

Finalmente los flujos entre zonas se calculan mediante la suma ponderada de los viajes al trabajo y los viajes al servicio, utilizando constantes de proporcionalidad.

$$T_{ij} = \gamma R_{ij} + \delta S_{ij} \tag{4.33}$$

donde

T_{ij} = viajes totales entre i y j.

R_{ij} = viajes al trabalo.

S_{ij} = viajes al servicio

γ, δ = constantes de proporcionalidad.

4.3.3.- El sistema de escolares de E.G.B. a nivel urbano dentro de un nivel superior de desagregación.

Nuestro sistema de escolares que estamos estudiando, vemos que dentro de la desagregación del sistema urbano dada por Echenique, se situaría en un nivel superior de desagregación de los elementos:

- Actividades localizadas: empleo de servicio.
- Actividades flujos: viajes al servicio.

Dentro del término "servicio" se pueden considerar cinco categorías principales:

. Comercio

. Administración

. Educación

. Sanidad

. Servicios recreativos.

En otro nivel superior podría desagregarse el servicio "Educación" en:

. Educación preescolar
. " E.G.B.
. " B.U.P.
. " Universitaria.

entrando en este nivel (concretamente Educación de E.G.B) el análisis del sistema de escolares objeto de nuestra Tesis.

Esta desagregación del sistema urbano en dos niveles más sobre el tercer nivel que utiliza Echenique en su modelo de stocks y actividades, complica en nivel sumo las relaciones entre elementos, requiriéndose cada vez más información para demostrar la validez de los fundamentos en que se basan, así como hacer que los resultados sean más dificiles de interpretar y la probabilidad de que se produzcan errores acumulativos aumenta.

Queda claro, no obstante, que el sistema de escolares no deja de ser un subsistema en última instancia del sistema urbano, al cuál se llega por otros subsistemas, concretamente cinco niveles siguiendo a Echenique.- Si bien, nuestra linea de investigación no va a desarrollarse como subsistema del sistema urbano, de tal manera que se puedan obtener modelos que sirvan para poder aplicarse a la realidad.

CAPITULO V

EL ANALISIS DE LA LOCALIZACION ESPACIAL DE ESCOLARES Y SU ISOMORFISMO CON UN SISTEMA TERMODINAMICO

5. EL ANALISIS DE LA LOCALIZACION ESPACIAL DE ESCOLARES Y SU ISOMORFISMO CON UN SISTEMA TERMODINAMICO

5.0. INTRODUCCION

5.1. LOCALIZACION ESPACIAL DEL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO

5.2. EL SISTEMA TERMODINAMICO Y LA MECANICA ESTADISTICA CUANTICA

5.3. ISOMORFISMO ENTRE EL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO Y EL SISTEMA DE PARTICULAS DE UNA VASIJA CERRADA

5.4. CONCEPTO DE ENTROPIA APLICADO AL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO

5.0. INTRODUCCION.

Definido en el capítulo tercero de forma matemática el concepto de sistema y aplicado al sistema de escolares de E.G.B. a nivel urbano, se pasa a análizar su localización espacial.

Dentro del primer apartado se estudian distintos modelos probabilísticos definidos para el análisis de la localización espacial.

Se exponen conceptos fundamentales de la termodinámica y principalmente de la mecánica estadística cuántica, necesario para el isomorfismo que se plantea entre el sistema de escolares de E.G.B. y el sistema de partículas de una mezcla de gases contenidos en una vasija cerrada.

Finalmente se aplica el concepto de la entropía, desarrollado en la termodinámica, al sistema de escolares.

5.1. LOCALIZACION ESPACIAL DEL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO

5.1.1.- Localización de la población escolar.

No basta solo con concebir a los escolares y escuelas dentro de una ciudad como un sistema, es necesario además representarlo. Toda representación es un modelo y el objetivo de este es proveer un cuadro simplificado e inteligible de la realidad, con el fin de comprenderla mejor.

Por representación entendemos la expresión de -- ciertas características relevantes de la realidad observada, incluyendo esta objetos o sistemas que existen,-- han existido o podrían existir.

En este apartado se plantea el problema concreto de la localización de escolares de E.G.B. entre los centros de una cierta ciudad o población.

Considerese el suelo urbano dividido en $\underline{n}$ zonas-homógeneas de residencia de la población escolar. Supóngase además que existen $\underline{m}$ centros escolares en donde -- puede recibir enseñanza dicha población (ver figura 5.1)

El problema que aquí se plantea consiste en determinar como se localiza el colectivo escolar entre los diferentes centros, es decir en determinar la matriz T, cu yos elementos T_{ij} representan el número de alumnos que- residen en $\underline{i}$ y asisten al centro $\underline{j}$, supuesto conocido - el número total de escolares residentes en cada zona y- la capacidad de los centros. En lo que sigue se denota- por O_i el número de residentes en la zona $\underline{i}$, D_j el núme ro de alumnos que asisten al centro j, y E_j la capaci-- dad del centro j.

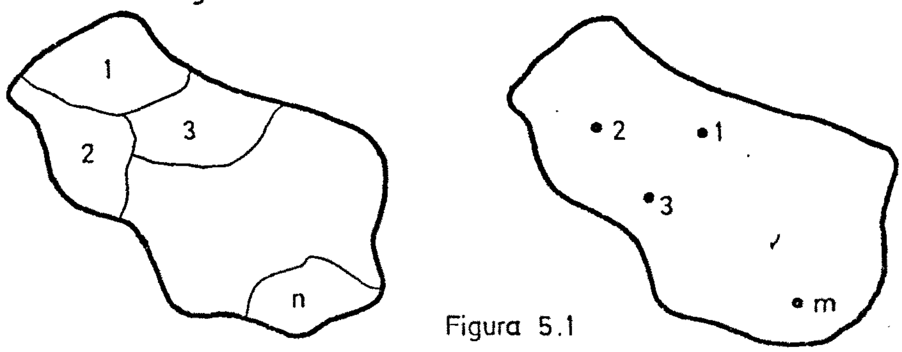

Figura 5.1

Zona

Centros escolares

Además deben verificarse las relaciones siguientes:

$$\sum_{j=1}^{m} T_{ij} = O_i \; ; \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{5.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_{ij} = D_j \; ; \quad j = 1,2,\ldots,m \tag{5.2}$$

$$D_j \leq E_j \qquad j = 1,2,\ldots,m \tag{5.3}$$

es decir el número total de alumnos que parten de cada- zona i a los diferentes centros debe ser igual a la población escolar O_i residente en dicha zona. También el- número total de alumnos D_j que asisten al centro j, deberá igualar al total de los alumnos que acuden a él desde las diferentes zonas. Finalmente la ocupación de cada centro no puede superar su capacidad.

5.1.2. Funciones de probabilidad asociadas a distintos tipos de localizaciones espaciales de escolares.

5.1.2.1.- Localización espacial libre en una zona.

Supongase que cada escolar de una zona dada i, tiene probabilidad P_{ij} de asistir al centro j, lo que implica que

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1 \qquad (5.4.)$$

y que la capacidad de los centros es tal que,

$$O_i \leqslant E_j \ ; \quad j = 1,2,\ldots,m \qquad (5.5.)$$

entonces la variable aleatoría m-dimensional T_{ij} (i fijo) es multinominal, ya que resulta de repetir O_i veces la elección entre m centros con probabilidades P_{ij} (j = 1,2,...,m). En consecuencia la probabilidad de que la localización espacial de la población de esa zona sea una dada T_{ij} (j = 1,2,...,m) viene dada por

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{O_i}{T_{i1}!\ T_{i2}!\cdots T_{im}!} \quad P_{i1}^{T_{i1}} \cdot P_{i2}^{T_{i2}} \cdots P_{im}^{T_{im}} \\[2ex] \sum\limits_{j=1}^{m} T_{ij} = O_i \ ; \quad T_{ij} \geqslant 0 \ ; \ j = 1,2,\ldots,m \end{array}\right\} \qquad (5.6)$$

Obsérvese que la condición (5.5) equivale a suponer - que no existe límite en la capacidad de nigún centro, razón por la cual se dice que se trata de una, localización espacial libre.

5.1.2.2.- Localización espacial libre en el nucleo urbano.

Si en vez de suponer una sola zona se considera el conjunto de todas ellas, y en el supuesto de que -- las localizaciones de las diferentes zonas son independientes, lo cual sucede en la realidad, se tiene que la variable aleatoria n x m-dimensional T_{ij} tiene por función de probabilidad

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} O_i!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \prod_{ij} P_{ij}^{T_{ij}} \qquad (5.7)$$

$$\sum_{j=1}^{m} T_{ij} = O_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,n \ ; \ T_{ij} \geqslant 0; \forall i,j$$

Todo ello es cierto en el supuesto de que se verifique la condición

$$\sum_{i=1}^{n} O_i \leqslant E_j \ ; \quad j = 1,2,\ldots,m \qquad (5.8)$$

por lo que (5.7) de la función de probabilidad para la localización espacial libre de la población escolar, - que refleja la tendencia ideal desde el punto de vista sociologico, ya que la elección es libre sin condiccio namiento de capacidad.

5.1.2.3.- Localización espacial condicionada en el nucleo urbano.

Puesto que en general no se verifica la condi-- ción (5.8), es decir que cada uno de los centros no -- puede por si sola albergar a toda la población, la localización (5.7) no es la real, ya que las localizacio nes posibles de la población escolar son muchas menos- de las consideradas por (5.7), puesto que deben verifi carse las condiciones

$$\sum_{i=1}^{n} T_{ij} \leqslant E_j ; \quad j = 1,2,\ldots,m \tag{5.9}$$

por tanto la verdadera función de probabilidad en la - hipótesis de que se conserva la proporción entre las - probabilidades de sucesos posibles en ambas hipótesis- es la función trancada de la dada en (5.7), es decir

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\prod_{i=1}^{n} O_i!}{H \prod_{ij} T_{ij}!} \prod_{ij} P_{ij}^{T_{ij}} \\ \\ \sum_{j=1}^{m} T_{ij} = O_i \; ; \; i = 1,2,\ldots,n \; ; \; T_{ij} \geqslant 0; \; \forall i,j \\ \\ \sum_{i=1}^{n} T_{ij} \leqslant E_j \end{array}\right\} \quad (5.10)$$

siendo

$$H = \sum_{S} \frac{\prod_{i=1}^{n} O_i!}{\prod_{i=j} T_{ij}!} \prod_{ij} P_{ij}^{T_{ij}} \qquad (5.11)$$

donde S es la región definida por

$$\sum_{i=1}^{n} T_{ij} \leq E_j ; \; \forall j \qquad (5.12)$$

5.1.2.4.- Localización espacial condicionada con restri cción de coste, en el nucleo urbano.

En los apartados anteriores se ha pasado de la función de probabilidad expresada en (5.7) a otra más real expresada en (5.10), pero que no incluye otra restricción que también deberá tenerse en consideración, y que viene dada por la siguiente expresión:

$$\sum_{i}^{n} \sum_{j}^{m} T_{ij} \; c_{ij} = C \qquad (5.13)$$

donde

c_{ij} = coste de viaje de i a j.

C = Gasto total de los viajes producidos por los escolares.

Si bien, hemos de considerar, que c_{ij} podría ser interpretado también como una medida general de la impedancia entre i y j, la cual puede ser medida como la distancia existente, el tiempo de viaje, el costo, o de --

forma mas efectiva como una combinación ponderada de todos esos factores, referida como un "costo generalizado".

5.1.3.- Localización espacial más probable en el nucleo urbano.

5.1.3.1.- Localización espacial libre más probable.

Otro de los problemas que se presentan en la práctica es la determinación de al matriz T_{ij}, supuesta conocida la matriz P_{ij}. En este caso parece lógico elegir los valores T_{ij} con mayor probabilidad como estimadores de los valores reales, para lo cual debe maximizarse la expresión (5.10) con respecto a T_{ij} con las restricciones (5.12). Ello no es más que utilizar los estimadores de máxima verosimilitud.

En el caso particular en que

$$E_j = D_j \; ; \quad j = 1,2,\dots,n \tag{5.14}$$

se tiene, maximizando (5.7) o mejor tomando previamente logaritmos.

$$\sum_{i,j} (T^1_{ij} \log P_{ij} - \log T^1_{ij}!) + \sum_i \lambda_i (O_i - \sum_{j=i}^{m} T^1_{ij}) \tag{5.15}$$

y derivando respecto a T^1_{ij}

$$\log P_{ij} - \log T^1_{ij} - \lambda_i = 0 \tag{5.16}$$

luego

$$\frac{P_{ij}}{T^1_{ij}} = e^{\lambda_i} \qquad (5.17)$$

por tanto

$$T^1_{ij} = P_{ij} \quad e^{-\lambda_i} \qquad (5.18)$$

y sumando en j

$$O_i = \sum_j T^1_{ij} = e^{-\lambda_i} \sum_j P_{ij} = e^{-\lambda_i} \qquad (5.19)$$

luego queda finalmente

$$T^1_{ij} = P_{ij}\, O_i \qquad (5.20)$$

5.1.3.2.- Localización espacial condicionada más probable.

En este caso ello equivale a maximizar

$$V = \frac{\prod_{i=1}^{n} O_i!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \prod_{ij} P_{ij}^{T_{ij}} \qquad (5.21)$$

con las restricciones siguientes

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{m} T_{ij} = O_i \\ \\ \sum_{i=1}^{n} T_{ij} = D_j \end{array}\right\} \qquad (5.22)$$

Por tanto aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, se tiene que debe maximizarse la función auxiliar:

$$L = \mathrm{Ln}V + \sum_i \left[\lambda_i (O_i - \sum_j T_{ij})\right] + \sum_j \left[\beta_j (D_j - \sum_i T_{ij})\right] \quad (5.23)$$

y en consecuencia debe tenerse

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = - \mathrm{Ln}\, T_{ij} + \mathrm{Ln}\, P_{ij} - \lambda_i - \beta_j = 0 \quad (5.24)$$

donde la

$$\frac{\partial \, \mathrm{Ln}\, T_{ij}!}{\partial T_{ij}}$$

se ha calculado aplicando la formula aproximada de Stirling

$$\mathrm{Ln}\, T_{ij}! = T_{ij}\, \mathrm{Ln}\, T_{ij} - T_{ij} \quad (5.25)$$

Despejando T_{ij} de (5.24) se obtiene

$$T_{ij} = P_{ij} \exp(-\lambda_i - \beta_j) \quad (5.26)$$

y sustituyendo en (5.22) se tiene

$$O_i = \sum_j T_{ij} = \exp(-\lambda_i) \sum_j P_{ij} \exp(-\beta_j) \quad (5.27)$$

$$D_j = \sum_i T_{ij} = \exp(-\beta_j) \sum_i P_{ij} \exp(-\lambda_i) \quad (5.28)$$

si se llama:

$$A_i = \frac{\exp(-\lambda_i)}{O_i} = \frac{1}{\sum_j P_{ij}\exp(-\beta_j)} \qquad (5.29)$$

$$B_j = \frac{\exp(-\beta_j)}{D_j} = \frac{1}{\sum_i P_{ij}\ \exp(-\lambda_i)} \qquad (5.30)$$

y se sustituye en (5.26), se llega a la expresión que define el modelo

$$T_{ij} = P_{ij}\ A_i\ O_i\ B_j\ D_j \qquad (5.31)$$

donde A_i y B_j, pueden expresarse:

$$A_i = \frac{1}{\sum_j P_{ij}\ B_j\ D_j} \qquad (5.32)$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i P_{ij}\ A_i\ O_i} \qquad (5.33)$$

Esta manera de expresar A_i y B_j, permite su calculo por iteración.

5.1.3.3.- Localización espacial condicionada con restricción de coste más probable.

En este caso ello equivale a maximizar

$$V = \frac{\prod_{i=1}^{n} O_i!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \prod_{ij} P_{ij}^{T_{ij}} \qquad (5.34)$$

con las restricciones siguientes

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j}^{m} T_{ij} = O_i \\ &\sum_{i}^{n} T_{ij} = D_j \\ &\sum_{i}\sum_{j} T_{ij}\, c_{ij} = C \end{aligned}\right\} \qquad (5.35)$$

Por tanto aplicando de nuevo el método de los multiplicadores de Lagrange, se tiene que debe maximizarse - la función auxiliar:

$$L = \mathrm{LnV} + \sum_i \lambda_i (O_i - \sum_j T_{ij}) + \sum_j \beta_j (D_j - \sum_i T_{ij}) + \gamma (C - \sum_{ij} T_{ij}\, c_{ij}) \qquad (5.36)$$

y donde λ_i, β_j y γ son los multiplicadores de Lagrange.- Observese que es más conveniente maximizar LnV que V, ya que entonces es posible además usar la aproximación de - Stirling

$$\mathrm{LnV}! = \mathrm{VLnV} - V \qquad (5.37)$$

para estimar los términos factoriales. Los valores T_{ij} -

que maximizan L, y que por tanto constituyen la localización espacial más probable, son solución de

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = 0 \; ; \; \forall T_{ij}; \; i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,m;$$

y en consecuencia debe tenerse

$$\frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = - \operatorname{Ln} T_{ij} + \operatorname{Ln} P_{ij} - \lambda_i - \beta_j - \gamma c_{ij} = 0 \tag{5.38}$$

donde aplicando la formula aproximada de Stirling(5.37)

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} T_{ij}!}{\partial T_{ij}} = \operatorname{Ln} T_{ij} \tag{5.39}$$

Despejando T_{ij} de (5.38) se obtiene

$$T_{ij} = P_{ij} \exp(-\lambda_i - \beta_j - \gamma c_{ij}) \tag{5.40}$$

y sustituyendo en (5.35) se tiene:

$$O_i = \exp(-\lambda_i) \sum_j P_{ij} \exp(-\beta_j - \gamma c_{ij}) \tag{5.41}$$

$$D_j = \exp(-\beta_j) \sum_i P_{ij} \exp(-\lambda_i - \gamma c_{ij}) \tag{5.42}$$

si se llama

$$A_i = \frac{\exp(-A_i)}{O_i} = \frac{1}{\sum_j P_{ij} \exp(-\beta_j - \gamma c_{ij})} \tag{5.43}$$

$$B_j = \frac{\exp(-\beta_j)}{D_j} = \frac{1}{\sum_i P_{ij}\exp(-\lambda_i - \gamma c_{ij})} \tag{5.44}$$

y se sustituye en (5.40), se llega a la expresión que define el modelo:

$$T_{ij} = P_{ij}\ A_i\ B_j\ O_i\ D_j\ \exp(-\gamma c_{ij}) \tag{5.45}$$

donde A_i y B_j, pueden expresarse como

$$A_i = \frac{1}{\sum_j P_{ij}\ B_j\ D_j\ \exp(\gamma c_{ij})} \tag{5.46}$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i P_{ij}\ A_i\ O_i\ \exp(-\gamma c_{ij})} \tag{5.47}$$

Obteniendose A_i y B_j por medio de calculo iterativo.

En el caso en que la matriz de probabilidades - sea equiprobable

$$P_{ij} = 1/m\ ;\ \forall i,j;\ i = 1,2,\ldots,n;\quad j = 1,2,\ldots,m \tag{5.48}$$

ya que se tiene que cumplir la condición

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$$

En donde las expresiones del modelo (5.45) (5.46) y (5.47) se convierten en

$$\left.\begin{aligned}
T_{ij} &= \frac{A_i}{m} B_j\, O_i\, D_j \exp(-\gamma c_{ij}) \\
\frac{A_i}{m} &= \frac{1}{\sum\limits_j B_j\, D_j \exp(-\gamma c_{ij})} \\
B_j &= \frac{1}{\sum\limits_i \frac{A_i}{m}\, O_i \exp(-\gamma c_{ij})}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.49)$$

o lo que es lo mismo llamando

$$\frac{A_i}{m} = A_i^*$$

$$\left.\begin{aligned}
T_{ij} &= A_i^*\, B_j\, O_i\, D_j \exp(-\gamma c_{ij}) \\
A_i^* &= \frac{1}{\sum\limits_i B_j\, D_j \exp(-\gamma c_{ij})} \\
B_j &= \frac{1}{\sum\limits_i A_i^*\, O_i \exp(-\gamma c_{ij})}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.50)$$

que coincide con el modelo de Wilson dado en el apdo.4.2.

5.1.3.4.- Localización espacial con el único criterio de minimizar su coste.

Si el criterio para elegir la localización espacial fuese el económico, la solución se obtendría de minimizar

$$C = \sum_{ij} C_{ij}\, T_{ij} \qquad (5.51)$$

donde C es el coste generalizado, y c_{ij} es el coste asociado a un escolar que residiendo en la zona i va al centro j, sometido a las condiciones

$$\left.\begin{array}{ll} O_i = \sum\limits_j T_{ij}; & i = 1,2,\ldots,n \\ D_j = \sum\limits_i T_{ij}; & j = 1,2,\ldots,m \\ T_{ij} \geqslant 0; \ \forall i,j & \end{array}\right\} \qquad (5.52)$$

y por tanto se trata de un problema de programación lineal entera, cuya solución se designará por T^e_{ij}

5.1.3.5.- Medida de la libertad de elección de una localización espacial.

La matriz diferencia $\Delta T_S = T^1 - T$ sirve para dar una medida de la libertad de elección de la población escolar. Donde T^1 viene dada por (5.20) y T por (5.31) según la situación que se considere.

Por otra parte se tiene que para T dada por (5.31)

$$\Delta T_{ij} = T^1_{ij} - T_{ij} = P_{ij}\left[\exp(-\lambda^1_i) - \exp(-\lambda^2_i - \beta^2_j)\right] \qquad (5.53)$$

y para que sea nula debe ser

$$\lambda^1_i = \lambda^2_i + \beta^2_j \ ; \ \forall i,j \text{ tal que } P_{ij} \neq 0 \qquad (5.54)$$

ello implica que β_j sea constante.

Como medida de la libertad podemos elegir una - norma de la matriz ΔT.

$$\Delta T = (\sum_{ij} |\Delta T_{ij}|^{P})^{1/P} \quad ; \ 1 \leqslant p < \infty \qquad (5.55)$$

Por otra parte la matriz $\Delta T_e = T^e - T$ sirve para dar -- una medida del deficit producido. Como norma de la ma-- triz ΔT_e.

Finalmente una medida conjunta de ambos puede - ser

$$M = (\|\Delta T_S\|^{P} + \|\Delta T_e\|^{P})^{1/P} \qquad (5.56)$$

5.1.4.- Estimación de parámetros.

5.1.4.1.- Estimación de los parámetros en las distribuciones multinomiales.

Un problema que se presenta en la práctica es el- de estimar los parámetros del modelo, es decir la matriz P_{ij}.

En el caso del modelo de localización espacial libre, los estimadores de máxima verosimilitud son:

$$\hat{P}_{ij} = \frac{t_{ij}}{o_i} \qquad (5.57)$$

donde t_{ij} son los alumnos que van de la zona i al centro j, de una muestra reducida o_i del total O_i.

En el caso de la localización espacial condicionada el método de máxima verosimilitud da como estimación- los valores $\hat{P}_{ij}$ tales que verifican

$$\max_{P_{ij}} \quad \frac{\prod_{i=1}^{n} O_i!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \prod_{ij} \hat{P}_{ij}^{T_{ij}} \tag{5.58}$$

que pueden o no coincidir con los dados por (5.57)

5.1.4.2.- Estimación de los parámetros en las distribuciones multinomiales con una muestra incompleta.

Supuesto que $T_{i1}, T_{i2}, \ldots, T_{im}$ tienen asociada una distribución multinomial con parámetros O_i, P_{i1}, $P_{i2}, \ldots, P_{im}$. Supuesto también que $T'_{i1}, T'_{i2}, \ldots, T'_{im}$ ($m' < m$) tiene asociada una distribución multinomial, independiente de $T_{i1}, T_{i2}, \ldots, T_{im}$, com parámetros.

$$O'_i \;,\; P_{ij} \left(\sum_{j=1}^{m'} P_{ij} \right)^{-1} \quad (j = 1,2,\ldots,m')$$

Esto corresponde a una situación en la cual los datos representados por $T_{i1}, T_{i2}, \ldots, T_{im}$ son suplementados por una posterior muestra de un experimento incompleto en el cual faltan valores correspondientes a $(m' + 1), (m' + 2), \ldots, m$.

Asano (1) ha mostrado que los estimadores de máxima verosimilitud de los P_{ij} son:

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{P}_{ij} = T_{ij} \;/\; O_i & \text{si } j > m' \\[2ex] \hat{P}_{ij} = \dfrac{T_{ij} + T'_{ij}}{O_i \left[1 + O'_i \left(\sum\limits_{j=1}^{m'} T_{ij} \right)^{-1} \right]} & \text{si } j \leqslant m' \end{array}\right\} \quad (5.59)$$

5.2. EL SISTEMA TERMODINAMICO Y LA MECANICA ESTADISTICA

5.2.0.- Introducción.

La termodinámica estudia, las relaciones generales que existen entre las propiedades de la materia y que junto con los datos experimentales permiten establecer completamente la ecuación de estado (*) de una sustancia partícular. El sistema termodinámico esta formado por el conjunto de innumerables partículas de diversos tipos, tales como átomos, moléculas, electrones, fotones, etc.; estudiando la mecánica estadística, los modelos microscópicos (a nivel de partículas) que permiten determinar cuantitativamente las ecuaciones termodinámicas de estado en función de otros parámetros más primitivos, como son los parámetros atómicos y moleculares.

Las partículas que componen un sistema se encuentran encerradas dentro de superficies reales o ficticias denominadas contornos o límites del sistema. Así por ejemplo, las moléculas de hidrógeno gaseoso contenidas dentro de un cilindro constituyen un sistema. La región que rodea al sistema se conoce como medio exterior al -

---

(*) Ecuaciones, cualquiera que sea su forma, algebraica, gráfica o tabular, que relaciona las propiedades termodinámicas (presión, volumen, temperatura) de una sustancia.

al sistema (vease fig5.2). Esta idea de sistema resulta sumamente útil en termodinámica, ya que por ejemplo un volumen en cuyo interior no existe materia, pero si radiación puede considerarse como un sistema formado por multitud de fotones(**), pudiendose obtener una importante información sobre los campos de radiación. Un sis

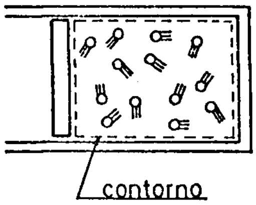

Figura 5.2.- Un sistema termodinámico

tema a través de cuyos contornos no puede realizarse ningún tipo de intercambio con el medio exterior se conoce como sistema aislado, concepto que tiene gran importancia en termodinámica, puesto que los postulados fundamentales y modelos que se desarrollan se refieren a este tipo de sistemas.

En los siguientes apartados se describirá el sistema de partículas siguiendo la nomenclatura del capítulo tercero, así como los modelos que se han desarrollado en la mecánica estadística.

(**) Concepto que se define en el siguiente apartado.

5.2.1.- Conceptos termodinámicos previos.

5.2.1.1.- Niveles de energía.

La teoria electromagnética enseña, confirmado con la experiencia, que la radiación que se propaga a través del espacio transporta energía y cantidad de movimiento, y como vehículo portador de estas magnitudes el hombre ha inventado una partícula denominada fotón (2) . La ecuación fundamental de la teoria electromagnética, que relaciona la energia E con la cantidad de movimiento P, es

$$P = \frac{E}{c} \qquad (5.60)$$

siendo c la velocidad de la luz. La relación existente entre la longitud de onda de la radiación (considerada ahora como una onda electromagnética) y su frecuencia viene dada por la ecuación

$$c = \lambda\nu \qquad (5.61)$$

La radiación se considera por tanto que tiene algunas características propias de las partículas, tales como masa, cantidad de movimiento y energia, y otras propias de las ondas, tales como frecuencia y longitud de onda. Durante mucho tiempo esta dualidad fue objeto de controversía, hasta que finalmente la teoria cuántica unificó los dos modelos de la radiación en uno.

Las ecuaciones (5.60) y (5.61) son dos de los pilares sobre los que se asienta la física moderna. El tercero lo constituye la ecuación de Einstein-Planck, la cual establece la relación que existe entre la energía de un fotón y la frecuencia de radiación. Esta ecuación es

$$\varepsilon = h\nu \qquad (5.62)$$

La constante h es la constante de Planck. Esta ecuación es extraordinariamente importante por cuanto expresa la condición de que un fotón asociado a una radiación de frecuencia determinada solo puede tener una energía y una cantidad de movimiento, es decir, un estado permitido. La energía que acompaña a la radiación está por tanto cuantizada, pudiendo las partículas existir solamente en algunos niveles de energía o estados cuánticos determinados.

Todas las partículas pueden poseer energía, y la energía del sistema, como un todo, puede adoptar muchas formas. La cuántización del estado da lugar a la cuantización de la energía del sistema. Sin embargo, como existen muchas partículas, los niveles de energía del sistema se encuentran muy próximos unos a otros, y así en muchos casos se puede considerar que la energía del sistema varía de una manera discreta. La conclusión importante de lo precedente es la energía de los estados varía de una manenera discreta.

5.2.1.2.- Microestados, Macroestados y Conjuntos.

En la descripción estadística de la materia se utilizan tres términos importantes, que son: microestado, macroestado y conjunto.

Por microestado se entiende cualquier estado microscópico de la materia, determinado en función de las propiedades de las partículas, consideradas individualmente. La manera de determinarlo depende del modelo particular que se emplee. Por ejemplo, se puede determinar un microestado, indicando cuales son las partículas que se encuentran en cada uno de los posibles estados cuánticos que puede ocupar una sola partícula.

Se denomina macroestado a todo estado del sistema determinado en función de las propiedades (instantáneas) del conjunto de partículas que lo integran. Por ejemplo, si el modelo es tal que las partículas se pueden discernir unas de otras se puede determinar el macroestado, indicando el número de partículas que existen en cada uno de los posibles estados de la partícula. Los macroestados están definidos de tal modo que el sistema pueda encontrarse en un macroestado dado de múltiples maneras, o dicho con otras palabras, que sean muchos los microestados que pueden tener las propiedades totales de ese macroestado. Otra manera de considerar un macroestado es como un grupo de microestados con alguna característica en común.

Por último se denomina conjunto a la totalidad de los macroestados (o microestados) y representa todos los-posibles estados que puede ocupar un sistema en unas condiciones determinadas. El conjunto se considera en termodinámica, como ya se ha comentado en el punto 5.2.0,como un sistema aislado en el cual ciertas propiedades, como- la energía y volumen, entre otras, permanecen invariables,lógicamente, los microestados integrantes de un sistema aislado deben tener todos la misma energía y volumen.

El concepto de cuantización permite enumerar los- microestados de una manera discreta, al menos en principio. Cuando se constituye una teoría para explicar el -- comportamiento de una determinada sustancia, el análisis estadístico-cuántico, debe permitir el establecimiento - de algún tipo de modelo que sirva para definir los macroestados y los microestados. Los microestados deben desempeñar el papel de "mínimo denominador común" de los estados, pudiendose obtener cada uno de ellos, solo de una - manera. Conocido el número de microestados de un macroestado determinado, se pueden determinar en principio las- distintas formas que puede presentar el sistema en dicho macroestado, o el número de maneras distintas en que puede presentarse ese macroestado particular.

Para aclarar estos conceptos, se considera el siguiente ejemplo sencillo: Supongase que se tiene un sistema tal, que las partículas que lo integran solo pueden ocupar alguno de los cinco estados cuánticos cuyas energias son: 0,1,2,3 y 4 eu, siendo eu una unidad arbitraria de energía. También se supondrá que el sistema está compuesto únicamente por tres partículas, las cuales se representan por A,B y C. Además se considerará únicamente los estados que tienen la misma energia total 9eu, en lo que equivale a una energia media por partícula de 3eu. Los macroestados, microestados y el conjunto correspondientes a este sistema son los representados en la Fig.5.3.

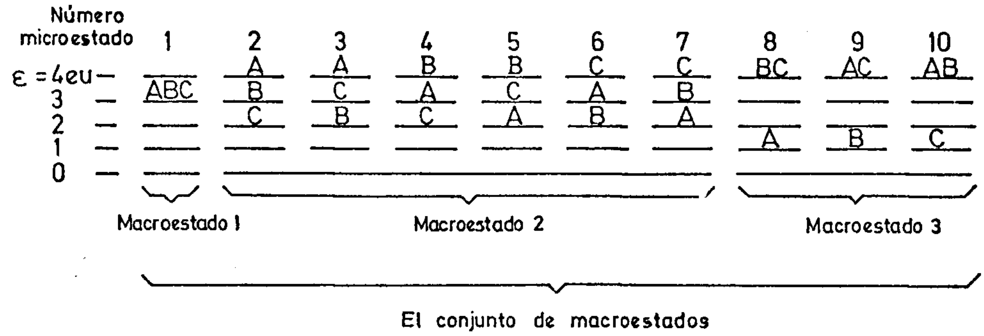

Figura 5.3.- Ejemplo de microestados

Como cada microestado solo puede presentarse de una manera, el modelo estadístico que se emplea siempre es aquél en el cual cada microestado tiene la misma probabilidad de existencia. Por tanto la probabilidad de un microestado es igual a la unidad dividida por el número total de microestados que forman el conjunto.

5.2.1.3.- Macroestado más probable.

En termodinámica estadístico-cuántica tiene singular importancia el macroestado más probable, ya que sus propiedades son prácticamente idénticas a las propiedades medias del conjunto, lo que permite predecir con toda -- exactitud las propiedades macroscópicas del sistema a partir de las correspondientes a este macroestado. Esto nos va a permitir, como se verá en el apartado siguiente, definir el método a utilizar para la obtención de los modelos estadísticos que representen la manera en que se localizan las partículas en la materia. En la tabla 5.1. se puede observar las probabilidades asociadas a los distin-

Macroestados	Maneras de formarse	Probabilidades
1	1	0,1
2	6	0,6
3	3	0,3

Tabla 5.1.

Ejemplo de probabilidades asociadas a los macroestados.

tos macroestados del ejemplo de la figura 5.3. en donde de los tres macroestados posibles el más probable es el correspondiente al número dos.

5.2.1.4.- Mezclas de sustancias independientes.

Si se supone que los estados cuánticos que pueden-ocupar las partículas de un constituyente determinado no-se ven afectados por la presencia de las partículas de --los otros, las propiedades de la mezcla pueden determinarse conocidas las de sus constituyentes. En este caso se -obtiene una mezcla de sustancias independientes. Las mezclas de gases, cuya densidad no sea demasiado elevada, --así como algunas soluciones sólidas y líquidas pueden considerarse como mezclas de sustancias independientes.

La energía interna de una mezcla es la suma de las energías internas de los distintos constituyentes, mas la energía asociada a las fuerzas que actuan entre las partículas de las distintas especies. Sin embargo, cuando la -densidad de los gases es baja, estas fuerzas son pequeñas, y pueden despreciarse. En todas las mezclas formadas por-sustancias independientes, se pueden considerar las fuerzas que actúan entre las distintas especies como despreciables, y, por tanto,

$$U = \sum_i U_i \tag{5.63}$$

siendo U_i la energia interna del constituyente i.

Como los estados cuánticos que pueden ocupar los -constituyentes son independientes, el número de maneras -de formarse un macroestado determinado de la mezcla es -simplemente el producto del número de manera de formarse-cada uno de los macroestados de los distintos constituyentes

$$\Omega = \Omega_1 \, \Omega_2 \, \ldots, \Omega_n = \prod_i \Omega_i \tag{5.64}$$

siendo Ω_i el número de maneras para formar un macroestado determinado del constituyente i.

Otras propiedades de las mezclas de sustancias independientes se refieren a la temperatura, presión y entropía(*) diciendo que:

$$\begin{aligned} S &= \sum_i S_i \\ T_1 &= T_2 = \ldots\ldots = T \\ P &= \sum_i P_i \end{aligned} \tag{5.65}$$

la entropía total S de la mezcla es la suma de las entropías de las sustancias que la constituyen; lo mismo sucede para la presión total de la mezcla P; y por último la temperatura T es igual en la mezcla y las diversas sustancias que la componen.

5.2.1.5.- Entropía.

Las partículas de un sistema termodinámico en unas condiciones determinadas puede ocupar distintos niveles de energía o estados cuánticos, que a su vez dan lugar a muchisimos microestados. Si llamamos Ω al número de microestado la definición estadística de la entropía es:

(*) Concepto que se desarrolla en el siguiente apartado.

$$S = k \; Ln \; \Omega \qquad (5.66)$$

siendo k la constante de Boltzmann, definida por

$$k = \frac{R}{N_o} \qquad (5.67)$$

donde R es la constante de los gases, y N_0 el número de Avogrado.

5.2.2.- Los componentes del sistema de partículas de una vasija cerrada.

Considerese un sistema aislado, compuesto por n gases encerrados en una vasija. Siguiendo las definiciones- de los componentes para un sistema dadas en el capítulo - 3, se pasa a enumerar los componentes para este sistema - de partículas de n gases.

a) Conjunto básico de elementos.

El conjunto básico A se define como el conjunto - de "partículas microscópicas" de una determinada vasija - que contiene n gases. Se designa con el nombre de "partícula microscópica" a toda partícula física de tamaño igual o inferior al de la molécula. De acuerdo con esto, los - átomos, neutrones, protones, electrones, moléculas, mesones, piones y fotones, son todos partículas microscópicas (2).

b) Conjunto de atributos.

Como conjunto de atributos $\underline{\alpha}$ se considera el formado por los siguientes:

b.1.) Gases de la mezcla.

Al estar compuesta la mezcla de n gases independientes, se puede mediante el Teorema 3.1. definir el atributo gas de la mezcla aplicando a todas las partículas que pertenenecen a un mismo gas un número que le identifica de la lista de gases que componen la mezcla.

b.2.) Niveles de energía.

Las partículas de los distintos gases que componen la mezcla, solo pueden estar ocupando niveles de energia de valor $h\nu$, como ya se ha mencionado en el apartado 5.2.1.1. Por medio de este atributo el conjunto de partículas que contiene la vasija, aplicando el Teorema 3.1., se dividirá en clases de equivalencia, cada una de las cuales agrupará a las partículas que se situan en el mismo nivel de energía.

b.3.) Tipo de niveles de energia.

Las partículas que están dentro de un mismo nivel de energía, pueden estar ocupando distintos estados cuánticos. Análogamente aplicando el Teorema 3.1., el conjunto básico de partículas se dividirá en clases de equivalencia, -

cada una de las cuales agrupará a las partículas que pertenecen a un mismo tipo de nivel de energia, clasificación esta que previamente se habrá establecido en función de los estados cuánticos que le compongan.

c) <u>Conjunto de funciones sobre el conjunto básico</u>.

En el sistema de partículas contenidas en una vasija cerrada, se pueden definir funciones sobre el conjunto básico de elementos tales como las siguientes funciones uni-dimensionales:

- Asociar a cada partícula su recorrido libre medio, o distancia media recorrida por una partícula entre dos choques sucesivos.
- Asociar a cada partícula alguna de sus características medibles, tales como: masa, densidad, etc.

d) <u>Funciones de nivel</u>.

Se pueden definir las siguientes funciones de nivel sobre el sistema de partículas:

d.1.) <u>Número de partículas por gas</u>.

Por medio del atributo ya definido como "gases de la mezcla" se establece la función de nivel uni-dimensional que aplica a cada gas considerado el número de partículas que lo forman.

d.2.) Número de partículas por nivel de energia.

Por medio del atributo definido como niveles - de energía o estados cuánticos se establece una función- de nivel uni-dimensional que aplica a cada nivel de ener gía el número de partículas que en el se encuentran.

d.3.) Flujos de partículas de cada gas entre distintos niveles de energia.

Por medio de los dos atributos: Gases de la -- mezcla y niveles de energia, se establece la función de- nivel bi-dimensional que aplica al conjunto producto de- los conjuntos cociente inducido por aquellos atributos - el conjunto de números reales formado por el número de - partículas que perteneciendo a un determinado gas i, se- encuentra en un cierto nivel de energia j.

d.4.) Media de los recorridos libres medios para las- partículas de un determinado gas que se encuen- tra en un cierto nivel de energia.

Por medio de los atributos: Gases de la mezcla y niveles de energia, se establece la función de niveles bi-dimensional que aplica al conjunto producto de los -- conjuntos cociente inducido por dichos atributos el con- junto de números reales formado por la distancia media - de los recorridos libres medios para las partículas que- perteneciendo a un gas i, se encuentre en el nivel de --

energia j.

En la siguiente figura 5.4. se muestra a manera de sintesís, los elementos que componen los conjuntos:

. Básico de elementos: A

. Atributos: α

. Funciones sobre elementos: β

. Funciones de nivel: γ

Para el sistema de partículas contenido en una vasija cerrada.

5.2.3.- <u>La Mecánica estadística cuántica como método de localización de partículas entre niveles de energia.</u>

5.2.3.1.- El método de la mecánica estadística cuántica

Un análisis basado en la mecánica estadística cuántica, consta generalmente de los cuatro puntos principales siguientes:

1.- El establecimiento del modelo estadístico y la determinación de los estados cuánticos que, pueden ocupar el sistema.

2.- La determinación del número de maneras distintas mediante los cuales puede formarse cada macroestado.

3.- La determinación del macroestado cuya formación puede realizarse del mayor número de maneras distintas es decir del macroestado más probable de un sistema, en el caso en

Conjunto básico (A)	. Partículas
Atributos (α)	. Gases de la mezcla . Niveles de energía . Tipo de nivel de energía
Funciones sobre elementos (β)	. Recorrido libre medio . Masa de cada partícula
Funciones de nivel (γ)	. Número de partículas por gas . Número de partículas por nivel de energía . Flujos de partículas de cada gas - entre distintos niveles de energía . Media de los recorrios libres me-- dios para las partículas de un de- terminado gas que se encuentra en- un cierto nivel de energía

Figura 5.4. Los componentes del sistema de partícu las de gases contenidos en una vasija cerrada.

que la energía, el volumen y otras condiciones impuestas al sistema aislado sean fijos y determinados.

4.- El cálculo de las propiedades correspondientes a este macroesto más probable, las cuales nos permiten predecir las propiedades (termodinámicas) medias en el tiempo de la sustancia.

El establecimiento del modelo estadístico obliga a definir lo que es un microestado, así como a fijar las reglas según las cuales los microestados se agrupan para formar los macroestado. Estos modelos se determinan generalmente por tanteos, hasta que se encuentra un modelo tal que los resultados obtenidos con él, concuerdan con los valores experimentales. Por supuesto, la experiencia conseguida al cabo del tiempo, facilita en gran medida el establecimiento de nuevos modelos, si bien únicamente se va a tratar con casos para los cuales se conocen ya los modelos adecuados.

En los casos que se estudiarán, se supondrá que las partículas se comportan con independencia unas de otras; es decir, se considera que los estados cuánticos que pueden ocupar son totalmente independientes. Esta hipótesis permite determinar los estados que puede ocupar el sistema, conocidos los de una sola partículas.

El macroestado más probable de un sistema aislado sometido a determinadas condiciones se verá que es aquel cuya entropía es máxima. Una vez determinado el macroestado -- más probable, su entropía se puede expresar en función de la energía interna y del volumen, lo cual a su vez permitirá obtener por derivación las restantes propiedades termodinámicas.

5.2.3.2.- Modelos estadísticos de los sistemas formados - por partículas independientes.

Normalmente, los modelos utilizados en el análisis estadístico cuántico de los sistemas constituidos por partículas independientes son tres. Las reglas que rigen el-establecimiento y agrupamiento de los microestados son totalmente distintas, y como consecuencia, lo mismo ocurre-con los resultados a que se llega. En los tres modelos los estados cuánticos que pueden ocupar las partículas se clasifican en grupos que tienen la misma energía.

En lo que sigue, N representa el número total de -- partículas, z_i el número de estados cuánticos que componen el grupo i, y n_i el número de partículas, cuyos estados -- cuánticos pertenecen al grupo i.

5.2.3.2.1.- Estadística de Maxwell-Boltzamann (MB)

En esta estadística, cualquier estado en el cual determinadas partículas ocupan estados cuánticos conocidos - se define como microestado, y se llama macroestado al conjunto de todos los microestados que tienen un determinado-número de partículas en cada grupo de estados cuánticos, con independencia de cuáles sean las partículas que puedan ocupar cada uno de ellos. Como ejemplo se considera el de la fig. 5.5., en la cual están numerados todos los microestados de un sistema compuesto por tres partículas y cinco estados cuánticos, que componen el macroestado formado por dos grupos, el 1 y el 2, con dos partículas y una en cada uno de ellos respectivamente. El simbolo -

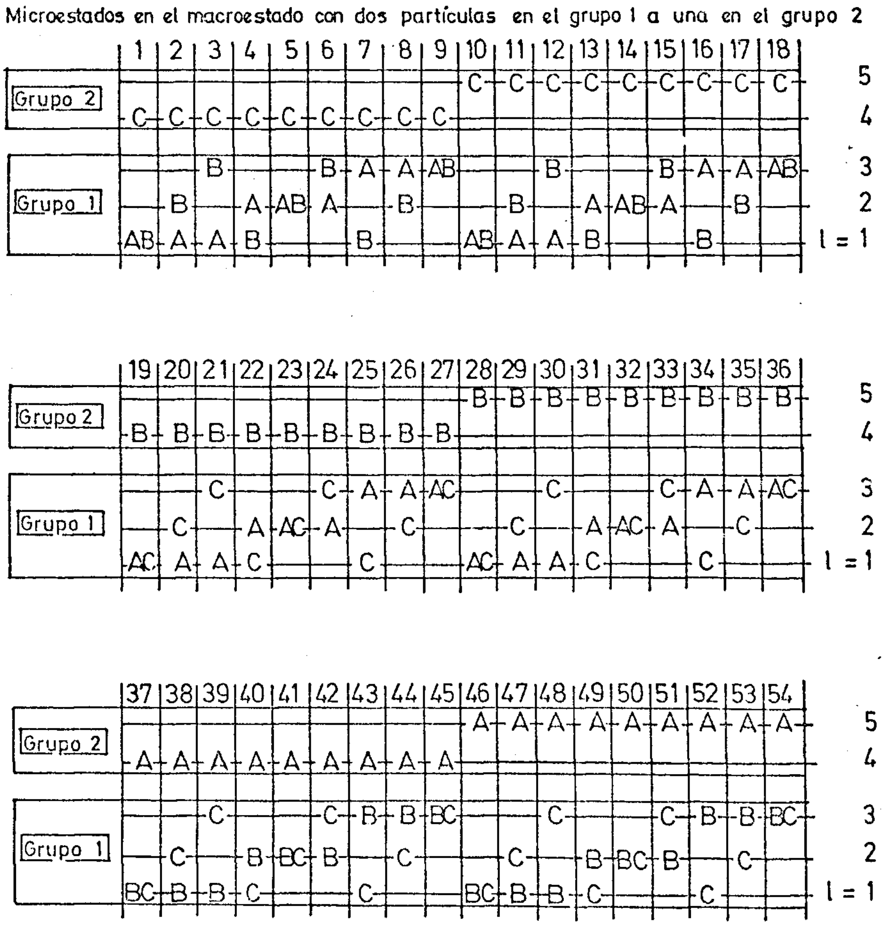

Figura 5.5.- Microestados MB

representativo del estado cuántico es 1. Observese que -- los microestados 2 y 4 se consideran distintos. Por tanto, esto implica que en esta estadística las partículas son - discernibles entre si.

El número de maneras de formarse un microestado MB es pues,

$$\Omega_{MB} = N! \frac{z_1^{n_1} \; z_2^{n_2} \ldots}{n_1! \; n_2! \ldots} = N! \prod_i \frac{z_i^{n_i}}{n_i!} \qquad (5.68)$$

en nuestro ejemplo sustituyendo valores se obtiene

$$3! \; \frac{3^2 \; 2^1}{2! \; 1!} = 54$$

lo que concuerda con lo representado en la fig. 5.5.

5.2.3.2.2.- Estadística de Bose-Einstein (BE)

En esta estadística, cualquier estado del sistema en el cual exista un número determinado de partículas se- define como un microestado, mientras que un macroestado - es el conjunto de todos los microestados que tienen un nú mero determinado de partículas en cada grupo de estados - cuánticos. La estadística BE difiere del modelo MB en que las partículas se supone que son indiscernibles. En la -- figura 5.6. y considerando el mismo ejemplo expuesto en - el caso anterior se representan los microestados Bose-Ein tein que componen el macroestado. Obsérvese que si las par tículas de la figura 5.5. fueran iguales, cada fila de esta figura sería equivalente a la correspondiente de la figura 5.6.

Microestados en el macroestado con dos partículas en el grupo 1 a una en el grupo 2

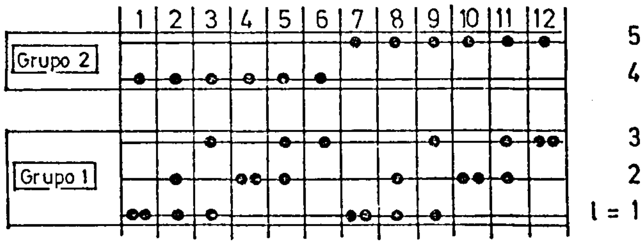

Figura 5.6.- Microestados BE

El número de microestados que componen el macroestado BE es

$$\Omega_{BE} = \prod_i \frac{(n_i + z_i - 1)!}{n_i!\,(z_i - 1)!} \tag{5.69}$$

En el ejemplo de la figura 5.6.

$$\Omega_{BE} = \frac{4!}{2!\;2!} \cdot \frac{2!}{1!\;1!} = 12$$

5.2.3.2.3.- Estadística de Fermi-Dirac (FD)

En esta estadística, un microestado viene definido por cualquier estado del sistema en el cual a lo más existe una partícula en cada estado cuántico mientras que un macroestao es el conjunto formado por todos los microestados que tienen un número determinado de partículas en cada grupo de estados cuánticos. En el modelo FD, como ocu rre en el modelo BE, las partículas se supone que son indiscernibles. Por ejemplo en la figura 5.7. se representan los microestados FD que componen el macroestado indicado, en un sistema formado por tres partículas y cinco estados.

Microestados en el macroestado con dos partículas en el grupo 1 a una en el grupo 2

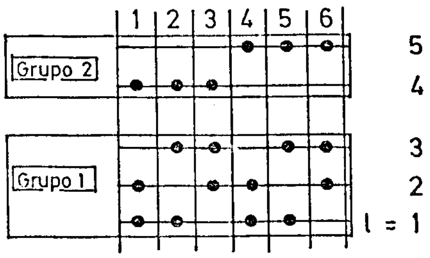

Figura 5.7.- Microestados FD

El número de maneras de formar un macroestado FD es

$$\Omega_{FD} = \prod_i \frac{z_i!}{n_i!\ (z_i - n_i)!} \qquad (5.70)$$

En el ejemplo de la figura 5.7. se obtiene

$$\Omega_{FD} = \frac{3!}{2!\ 1!} \cdot \frac{2!}{1!\ 1!} = 6$$

Una consecuencia del modelo FD, es que el mismo estado cuántico no puede estar ocupado por dos partículas. Esta condición es consecuencia del principio de exclusión de Pauli; Pauli llegó a la conclusión de que no puede --

existir ningún átomo en un estado en el cual dos de sus electrones ocupen el mismo estado cuántico. La estadística FD viene desempeñando un papel importante en el estudio de la estructura interna de los átomos y moléculas.

5.2.3.3.- Determinación del macroestado más probable.

5.2.3.3.1.- Macroestado más probable para las distintas estadísticas.

Una vez elegido el modelo estadístico más conveniente, se puede determinar, conocidas las energías de los diversos estados cuánticos, el macroestado más probable. A continuación se determina la distribución más probable de las partículas independientes entre los estados y grupos de estados posibles en el caso de un modelo MB, y se indicarán los resultados que se obtienen en un análisis similar de los modelos estadísticos BE y FD.

El número de maneras de formarse un microestado MB se vio que era (5.68)

$$\Omega_{MB} = N! \prod_i \frac{Z_i^{n_i}}{n_i!}$$

Si representamos por ε_i la energía correspondiente a los estados cuánticos del grupo de estados i, ésta será la energía de cualquier partícula del grupo. El estado del sistema que presente el máximo valor de Ω se tendrá -

que elegir de entre las distribuciones posibles que satis fagan las dos condiciones siguientes:

$$\sum_i n_i = N \tag{5.71}$$

$$\sum_i n_i \, \varepsilon_i = U \tag{5.72}$$

La primera de ellas establece simplemente que el número total de partículas es N, y la segunda que la energia interna total debe tener un valor concreto y definido.

El macroestado más probable corresponderá aquel que maximiza Ω_{MB} o lo que resulta igual

$$S_{MB} = k \, Ln\Omega_{MB} \tag{5.73}$$

osea, la antropía del sistema con las condiciones (5.71) y (5.72).

Utilizando el método de los multiplicadores de Langrange, se tiene que maximizarse la función auxiliar :

$$L = Ln\Omega_{MB} - \lambda(N - \sum_i n_i) - \beta(U - \sum_i n_i \varepsilon_i) \tag{5.74}$$

en donde λ y β son multiplicadores de Lagrange. Además se usará la aproximación de Stirling

$$Ln\ n! = N.Ln - n \tag{5.75}$$

para estimar los términos factoriales. Los valores n_i que maximizar L, y que por tanto constituyen la distribución más probable, son solución de

$$\frac{\delta L}{\delta n_i} = 0; \qquad \forall\, n_i \ ; \qquad i = 1,2,\ldots\ldots.. \tag{5.76}$$

y en consecuencia debe obtenerse

$$\frac{\delta L}{\delta n_i} = \mathrm{Ln}\ z_i - \mathrm{Ln}\ n_i - \lambda - \beta\varepsilon_i = 0 \tag{5.77}$$

y de aquí

$$\frac{n_i}{z_i} = \frac{1}{e^{\lambda} + \beta\varepsilon_i} \tag{5.78}$$

o expresado de otra manera

$$\frac{n_i}{z_i} = \frac{1}{A\ e^{\beta\varepsilon_i}} \tag{5.79}$$

Para las estadísticas BE y FD se obtienen los resultados siguientes:

$$\text{BE} \qquad \frac{n_i}{z_i} = \frac{1}{A\ e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \tag{5.80}$$

$$\text{FD} \qquad \frac{n_i}{z_i} = \frac{1}{A\ e^{\beta\varepsilon_i} + 1} \tag{5.81}$$

Las constantes A se calculan en función de los parámetros β mediante las condiciones que determinan el número total de partículas N. Para el caso MB se tiene

$$N = \sum_i n_i = \frac{1}{A} \sum_i z_i \; e^{-\beta\varepsilon_i} \tag{5.82}$$

Obsérvese que la suma está extendida a todos los grupos de estados cuánticos, pero todos los estados cuánticos- z_i tienen la misma energía, la expresión anterior puede escribirse en la forma

$$N = \frac{1}{A} \sum_{i'} e^{-\beta i} \tag{5.83}$$

en la cual, la suma se extiende a todos los estados cuánticos que puede ocupar la partícula. Esta suma es la llamada función de partición, la cual se representa por Z

$$Z = \sum_{i'} e^{-\beta i} \tag{5.84}$$

y sustituyendo en (5.79) el valor de A se obtiene

$$\frac{n_i}{z_i} = \frac{N}{Z} \; e^{-\beta\varepsilon_i} \tag{5.85}$$

La entropía del estado más probable puede calcularse en el caso del modelo MB como:

$$S_{MB} = K \; Ln\Omega_{MB} = K \sum_i (n_i \; Ln \frac{z_i}{n_i} + n_i) + K \; Ln \; N! \tag{5.86}$$

donde n_i/z_i viene dada por la ecuación (5.79). Análogamente, para el caso de los modelos BE y FD

$$S_{BE} = k \sum_i \left[n_i Ln(\frac{z_i}{n_i} + 1) + z_i Ln(1 + \frac{n_i}{z_i})\right] \qquad (5.87)$$

$$S_{FD} = k \sum_i \left[- z_i Ln(1 - \frac{n_i}{z_i}) + n_i Ln(\frac{z_i}{n_i} - 1)\right] \qquad (5.88)$$

5.2.3.3.2.- Macroestado más probable de una mezcla de gases de independientes.

En el supuesto de una mezcla de i gases independientes y para el caso de la estadística de Maxwell-Boltzmann, el número de estados para un gas i sería

$$\Omega_i = \frac{N_i! \prod_j z_{ij}^{n_{ij}}}{\prod_j n_{ij}!} \qquad (5.89)$$

siendo j el número de niveles de energía.

El número de maneras de formarse un macroestado determinado de la mezcla, según se vio en (5.64)

$$\Omega = \prod_i \Omega_i = \prod_i N_i! \frac{\prod_{ij} z_{ij}^{n_{ij}}}{\prod_{ij} n_{ij}!} \qquad (5.90)$$

Con las restriciones siguientes

$$\sum_j n_{ij} = N_i \qquad (5.91)$$

$$\sum\sum n_{ij} \varepsilon_{ij} = U \qquad (5.92)$$

el macroestado más probable se obtiene, como ya conocemos de maximizar la función

$$L = Ln\Omega + \sum_i \lambda_i (N_i - \sum_j n_{ij}) + \gamma (U - \sum_j \sum_i n_{ij} \varepsilon_{ij}) \qquad (5.93)$$

en donde λ_i y γ son los multiplicadores de Lagrange. Además se usará la conocida aproximación de Stirling.

$$Ln\ n! = nLn - n$$

para estimar los términos factoriales. Los valores n_{ij} -- que maximizan L, y que por tanto constituyen la distribución más probable, son solución de

$$\frac{\delta L}{\delta n_{ij}} = 0 \ ; \quad \forall\, n_{ij} \ ; \quad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,n; \\ j = 1,2,\ldots,m; \end{array}$$

y en consecuencia debe obtenerse

$$\frac{\delta L}{\delta n_{ij}} = - Ln\ n_{ij} + Ln\ Z_{ij} - \lambda_i - \gamma\ \varepsilon_{ij} = 0 \quad (5.94)$$

despejando n_{ij} se obtiene

$$n_{ij} = Z_{ij} \exp(-\lambda_i - \gamma\ \varepsilon_{ij}) \qquad (5.95)$$

y sustituyendo en (5.91)

$$N_i = \exp(-\lambda_i) \sum_j Z_{ij} \exp(-\gamma\ c_{ij}) \qquad (5.96)$$

si se llama

$$A_i = \frac{\exp(-\lambda_i)}{N_i} = \frac{1}{\sum\limits_j z_{ij} \exp(-\gamma \varepsilon_{ij})} \qquad (5.97)$$

si se sustituye en (5.95) se obtiene

$$n_{ij} = Z_{ij}\, A_i\, N_i \exp(-\gamma \varepsilon_{ij}) \qquad (5.98)$$

Análogamente se obtiene para las estadísticas FD y BE.

5.3. ISOMORFISMO ENTRE EL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO Y EL SISTEMA DE PARTICULAS DE UNA VASIJA CERRADA.

Dentro de este apartado se plantea el isomorfismo existente entre el sistema de escolares de E.G.B. a nivel urbano, objeto de aplicación en la Tesis, definido en el apartado 3.2., y el sistema de partículas de una vasija cerrada, definido en el apartado 5.2.2., esto permitirá comprobar la validez metodológica de la teoría general de sistemas; y de manera más concreta poder utilizar y aplicar conceptos de E.G.B. a nivel urbano, lo cual se realizará en el siguiente apartado.

5.3.1.- Planteamiento del isomorfismo.

Para que los dos sistemas,

S^1 = {Escolares de E.G.B. a nivel urbano}

S^2 = {Partículas de una vasija cerrada. }

sean isomorfos se deberán cumplir los supuestos dados en el apartado 3.1.5. Dentro de este apartado se va a demostrar que pueden establecerse las familias de aplicaciones biunivocas siguientes:

$$\left.\begin{array}{lll} f^{A}_{t_1} : & A^1(t_1) \longrightarrow & A^2(g(t_1)) \\ f^{\alpha}_{t_1} : & \alpha^1(t_1) \longrightarrow & \alpha^2(g(t_1)) \\ f^{\beta}_{t_1} : & \beta^1(t_1) \longrightarrow & \beta^2(g(t_1)) \\ f^{\gamma}_{t_1} : & \gamma^1(t_1) \longrightarrow & \gamma^2(g(t_1)) \end{array}\right\} \forall t_1 \in T^1$$

entre los conjuntos $(A^1,\alpha^1,\beta^1,\gamma^1)$ y $(A^2,\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)$ que han sido dados en las figura 3.4. y 5.4. respectivamente, y que se muestran en la figura 5.8.

En efecto, de entre los distintos sistemas de escolares y de partículas concretos que se podrían estudiar, se puede encontrar, para un sistema de escolares dado por las siguientes constantes:

- Nº de escolares que lo componen = t
- Nº de zonas de residencia = n
- Nº de centros = m
- Nº de tipos de centros = 1

el correspondiente sistema de partículas, variando las dimensiones de la vasija que las contienen así como los gases que lo componen, en donde:

- Nº de partículas = t
- Nº de gases = n

	SISTEMA DE ESCOLARES		SISTEMA DE PARTICULAS
	$A^1(t_1)$		$A^2(\varepsilon(t_1))$
$f^A_{t_1}$	• Escolares	$\longrightarrow$	• Partículas
	α^1		α^2
$f^\alpha_{t_1}$	• Zona de residencia • Centro al que acuden • Tipo de centro	$\longrightarrow$	• Gases de la mezcla • Nivel de energía • Tipo de nivel
	$\beta^1(t_1)$		$\beta^2(\varepsilon(t_1))$
$f^\beta_{t_1}$	• Distancia entre zona de residencia y centro al que acuden • Años de cada escolar	$\longrightarrow$	• Recorrido libre medio • Masa de cada partícula
	$\gamma^1(t_1)$		$\gamma^2(\varepsilon(t_1))$
$f^\gamma_{t_1}$	• Nº escolares residentes en cada zona • Nº de escolares que asisten a cada centro • Flujo entre zonas y centros escolares • Distancias entre zonas y centros	$\longrightarrow$	• Nº de partículas por gas • Nº de partículas por nivel de energía • Flujos de cada gas entre dos niveles de energía • Media de recorridos libres medios entre gases y niveles de energía

Figura 5.8.- Aplicaciones biunívocas entre los sistemas de escolares y de partículas para $t_1 \varepsilon T^1$

- Nº niveles de energia = m
- Nº de tipos de niveles de energia = 1

De esta manera se pueden establecer las aplicaciones biunivocas entre los conjuntos A y α, que apliquen

1.- A cada escolar una partícula
2.- A cada zona de residencia un gas
3.- A cada centro escolar un nivel de energia
4.- A cada tipo de centro, un tipo de nivel de energia.

Funciones β.

Puesto que estas funciones están definidas sobre el conjunto básico A y se cumple que:

Nº de escolares = Nº de partículas = t

se pueden establecer las aplicaciones biunívocas siguientes:

1.- A la función uni-dimensional o forma distancia entre zona y residencia y centro al que acuden, se le hacen corresponder la función uni-dimensional o forma recorrido libre medio.

2.- A la función uni-dimensional o forma, años de cada escolar, se lé asocia la forma masa de cada partícula.

Además, a las distintas distancias para cada escolar aso cian, los recorridos libres medios de las correspondientes partículas

$$h^{\beta_1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

y a los años de cada escolar, la masa de cada partícula

$$h^{\beta_2}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

estas aplicaciones permiten que se cumpla de manera conmutativa el diagrama correspondiente del apartado 3.1.5.

Funciones γ.

Puesto que estas funciones están definidas sobre el conjunto de atributos α y se cumple que:

Nº de zonas de residencia = Nº de gases = n

Nº de centros = Nº de niveles de energia = m

se pueden establecer las aplicaciones biunívocas siguientes:

1.- A la función de nivel nº de escolares residentes en cada zona se la hace corresponder la función de nivel nº de partículas por gas.

2.- A la función de nivel nº de escolares que asisten a cada centro se la hace corresponder la función de nivel de partículas por nivel de energía.

3.- A la función de nivel flujo entre zonas y cen--

tros escolares, se le hace corresponder la función de nivel, flujo de partículas de cada gas entre los nivels de energía.

4.- A la función de nivel distancia entre zonas y centros, se le hace corresponder la función de nivel medio de recorridos libres medios entre gases y niveles de energia.

Por otra parte se asocia:

A los distintos números de escolares residentes, los números de partículas para los correspondientes gases

$$h^{\gamma_1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

A los distintos números de escolares que asisten a cada centro, los números de partículas por nivel de energía

$$h^{\gamma_2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

A los distintos flujos entre zonas y centros escolares; los flujos de partículas de cada gas entre los niveles de energía

$$h^{\gamma_3} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

A las distintas distancias entre zonas y centros, las medias de recorridos libres medios entre gases y niveles de energía

$$h^{\gamma_4} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

En cuanto a la estructura de los modelos utilizados para estudiar la localización espacial de escolares, así como la distribución de las partículas, se pueden establecer las siguientes aplicaciones biunívocas entre parámetros y ecuaciones:

1.- A los parámetros P_{ij}: Probabilidad de que un escolar residiendo en la zona i, acuda al centro escolar j, se les hace corresponder las Z_{ij}: número de estados cuánticos del gas i correspondiente al nivel energetico j

$$P_{ij} \longrightarrow Z_{ij}$$

2.- Al coste generalizado c_{ij} para la zona de residencia i, centro escolar j; se le hace corresponder ε_{ij}, energía para gas i situado en el nivel energético j

$$c_{ij} \longrightarrow \varepsilon_{ij}$$

3.- Al coste generalizado total del sistema de escolares, se le hace corresponder la energia interna total del sistema de partículas

$$C \longrightarrow U$$

donde

$$C = \sum_{j}\sum_{i} T_{ij}\, c_{ij}$$

$$U = \sum_{j}\sum_{i} n_{ij}\, \varepsilon_{ij}$$

También se verifica

$$\sum_j T_{ij} = O_i \longrightarrow \sum_j n_{ij} = N_i$$

aplicación definida dentro de las funciones de nivel $\underline{\gamma}$, aunque expresada matemáticamente con la nomenclatura ya utilizada en apartados anteriores y para el modelo de distribución de partículas entre los distintos niveles de energía, en cada mezcla de gases independientes, según se vio en el apartado 5.2.3.3.2.,

$$\left.\begin{aligned} n_{ij} &= Z_{ij}\, A_i\, N_i\, \exp(-\gamma\varepsilon_{ij}) \\ A_i &= \frac{1}{\sum_j Z_{ij}\, \exp(-\gamma\varepsilon_{ij})} \\ U &= \sum_{ji} n_{ij}\, \varepsilon_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (5.99)$$

se puede establecer una aplicación biunivoca con el modelo de localización espacial libre de escolares y con restrición de coste, que se obtendría siguiendo los pasos que se indican en el apartado 5.1.3.3., sin considerar la restrición

$$\sum_j T_{ij} = D_j$$

y que se obtendría el modelo

$$\left.\begin{aligned} T_{ij} &= P_{ij}\, A_i\, O_i\, \exp(-\gamma\varepsilon_{ij}) \\ A_i &= \frac{1}{\sum\limits_j P_{ij}\, \exp(-\gamma c_{ij})} \\ C &= \sum_j \sum_i T_{ij}\, c_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad (5.100)$$

Por tanto se puede establecer una aplicación biunivoca- entre la estructura de los modelos (5.99) y (5.100)

$$T_{ij} = P_{ij}\, A_i\, O_i\, \exp(-\gamma c_{ij}) \longrightarrow n_{ij} = Z_{ij}\, A_i\, N_i \exp(-\gamma\varepsilon_{ij}) \qquad (5.101)$$

con respecto a los otros modelos considerados se pueden establecer aplicaciones biunívocas entre la función de- probabilidad para la localización espacial de escolares de un nucleo urbano, (dada en 5.7)

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} O_i!}{\prod\limits_{ij} T_{ij}!} \prod_{ij} P_{ij}^{T_{ij}} \qquad (5.102)$$

y la función del número de estados de un sistema termo- dinámico de partículas (dada en 5.90) para la estadística de MB,

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} N_i!}{\prod\limits_{ij} n_{ij}!} \prod_{ij} Z_{ij}^{n_{ij}} \qquad (5.103)$$

También resultan análogos los métodos de máxima verosimilitud, y de maximización de la entropía.

5.4. EL CONCEPTO DE ENTROPIA APLICADO AL SISTEMA DE ESCOLARES DE E.G.B. A NIVEL URBANO.

Una vez obtenida la matriz T_{ij} según el modelo de localización espacial que se considere, se puede hallar el valor de la entropía asociado al sistema. Según se expresó en el apartado 5.2.1.5. la entropía de un sistema termodinámico es función del número de microestados que puedan formarse. También se puede considerar como una medida de la incertidumbre.

Esta medida de la incertidumbre fue dada por Shannon (3) como:

$$S(P_1,P_2,\ldots,P_n) = -k\sum_j P_i \mathrm{Ln} P_i \qquad (5.104)$$

definida para la distribución de probabilidades $(P_1,P_2,\ldots\ldots,P_n)$.

En nuestro sistema la entropía sería según la formula (5.104)

$$S(P_{11},P_{12},\ldots,P_{nm}) = -k\sum_{ij} P_{ij}\ \mathrm{Ln}\ P_{ij} \qquad (5.105)$$

en donde

$$P_{ij} = \frac{T_{ij}}{T} \qquad (5.106)$$

con

$$T = \sum_{ij} T_{ij} \qquad (5.107)$$

Según se vio en el apartado 4.2., el número de ma neras de combinar T en grupos de T_{ij}, o lo que en términos termodinámicos sería el número de microestados - que viene dado por la expresión

$$W = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \qquad (5.108)$$

siendo la entropía del sistema

$$S = \text{Ln } W = \text{Ln } T! - \sum_{ij} (T_{ij}\text{Ln}T_{ij} - T_{ij}) \qquad (5.109)$$

y aplicando la aproximación de Stirling resulta

$$S = T\text{Ln}T - T - \sum_{ij} T_{ij}\text{Ln}T_{ij} + \sum_{ij} T_{ij} \qquad (5.110)$$

lo que resulta

$$S = T\text{Ln}T - \sum_{ij} T_{ij}\text{Ln}T_{ij} \qquad (5.111)$$

expresión que calcula el valor de la entropía S, conocida la distribución T_{ij}.

Por otra parte sustituyendo T_{ij} por Tp_{ij} según- la expresión (5.106)

$$S = T \text{ Ln } T - \sum_{ij} Tp_{ij} \text{ Ln } Tp_{ij} =$$

$$= T \text{ Ln } T - \sum_{ij} Tp_{ij} \text{ Ln } T - \sum_{ij} Tp_{ij}\text{Ln } p_{ij} =$$

$$= T \text{ Ln } T - T \text{ Ln } T \sum_{ij} p_{ij} - \sum_{ij} Tp_{ij} \text{ Ln } p_{ij} =$$

$$= - T \sum_{ij} p_{ij} \text{ Ln } p_{ij} \qquad (5.112)$$

que coincide con la definición dada por Shannon, expresión (5.105) haciendo

$$k = T$$

Por tanto ambas expresiones (5.111) y (5.112) - son válidas para el calculo de la entropía del sistema.

Otro punto de vista a tener en consideración es el hecho de que el valor de la entropía para un sistema de escolares de un nucleo urbano, en donde el número de centros es determinado, resulta distinto según - el tipo de zonificación escogida. (Normalmente la zonificación viene determinada por el sistema de información de datos con el cual se puede contar) lo cual -- plantea la posibilidad de estudiar distintos tipos de- zonificaciones, eligiendo la que maximice la entropía, así como el establecimiento de una relación jerárquica del sistema de escolares a nivel urbano cuya medida sería la entropía.

CAPITULO VI

EL ANALISIS DE LA LOCALIZACION ESPACIAL DE ESCOLARES DE E.G.B. APLICADO A LA CIUDAD DE SANTANDER

6. EL ANALISIS DE LA LOCALIZACION ESPACIAL DE ESCOLARES DE E.G.B. APLICADA A LA CIUDAD DE SANTANDER

6.0. INTRODUCCION

6.1. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL LIBRE

6.2. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL CONDICIONADA

6.3. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL CONDICIONADA CON RESTRICCION DE COSTE

6.4. ANALISIS COMPARATIVO

6.0. INTRODUCCION.

Dentro de esta capítulo se trata de aplicar los modelos expuestos en el capítulo anterior al sistema de escolares de E.G.B. de la ciudad de Santander. La relación de centros se ha expuesto en la tabla 3.2., así como su localización espacial en la figura 3.2. La zonificación se refleja en la figura 3.1.,así como el total de escolares residentes por zona en la tabla 3.4. y los escolares matriculados por centros en la tabla 3.5. Para poder calibrar los modelos y analizarlos, se pudo obtener, encuestando al total de los centros escolares, la distribución de 23 centros entre las distintas zonas de residencia, según se muestra en la tabla 3.6.

Todos los datos están referidos para el curso escolar 1977-78, y únicamente para los escolares del primer curso de E.G.B. , si bien igualmente los modelos serían aplicables para el total de escolares de E.G.B. en sus distintos niveles.

De todos los modelos descritos en el capítulo quinto, no se considera el modelo de "localización espacial con el único criterio de minimizar su coste".

Son considerados solo dos tipos de hipótesis:

Hipótesis 1: aplicación propiamente dicha del modelo, estimando los parámetros en función únicamente de la distancia.

Hipótesis 2: Estimación corregida de los parámetros considerados en la hipótesis 1, con la muestra de distribución real (tabla3.6), por medio de la formula de Asano(*)

(*) Ver apartado 5.1.4.2.

6.1. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL LIBRE

Para el modelo de localización espacial libre la ecuación que lo define es según se vio en el apdo. 5.1.3.1.

$$T_{ij} = P_{ij}\, O_i$$

que verifica las condiciones

$$\sum_j T_{ij} = O_i$$

$$\sum_j P_{ij} = 1$$

Para la aplicación práctica, se considera la hipótesis de la probabilidad de que un escolar residente en la zona i acuda al centro j, es inversamente proporcional a su distancia, distancias que vienen dadas por la tabla 3.7. siendo

$$P_{ij} = \frac{1/D_{ij}}{\sum_j (1/D_{ij})}$$

Los resultados del modelo se han obtenido por medio de los programas de cálculo(*) DL para la obtención de la matriz T_{ij}, y PSAN para su dibujo por zonas, como se muestra en la figura 6.1. a la 6.14. Otro dato que tam

---

(*) Se incluyen en el anejo de programación.

bién se obtiene con el programa DL es el valor de la entropía del sistema calculada según la formula (5.110), siendo el valor obtenido

$$S = 18836$$

Del análisis de las figuras 6.1-6.14. se observa, para la distribución de una zona, un mayor reparto de escolares entre centros próximos a la misma, como era lógico de esperar.

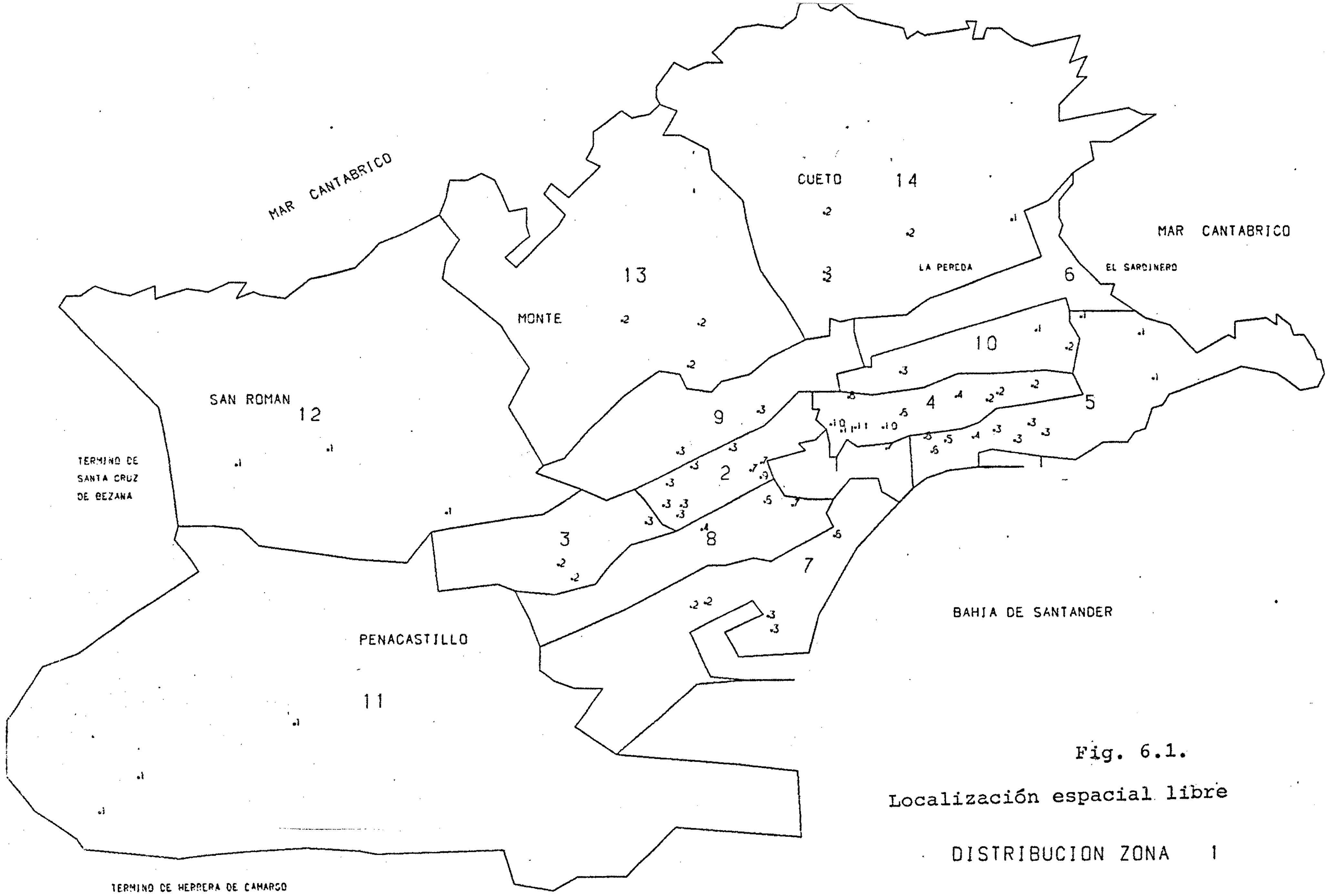

Fig. 6.1.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 1

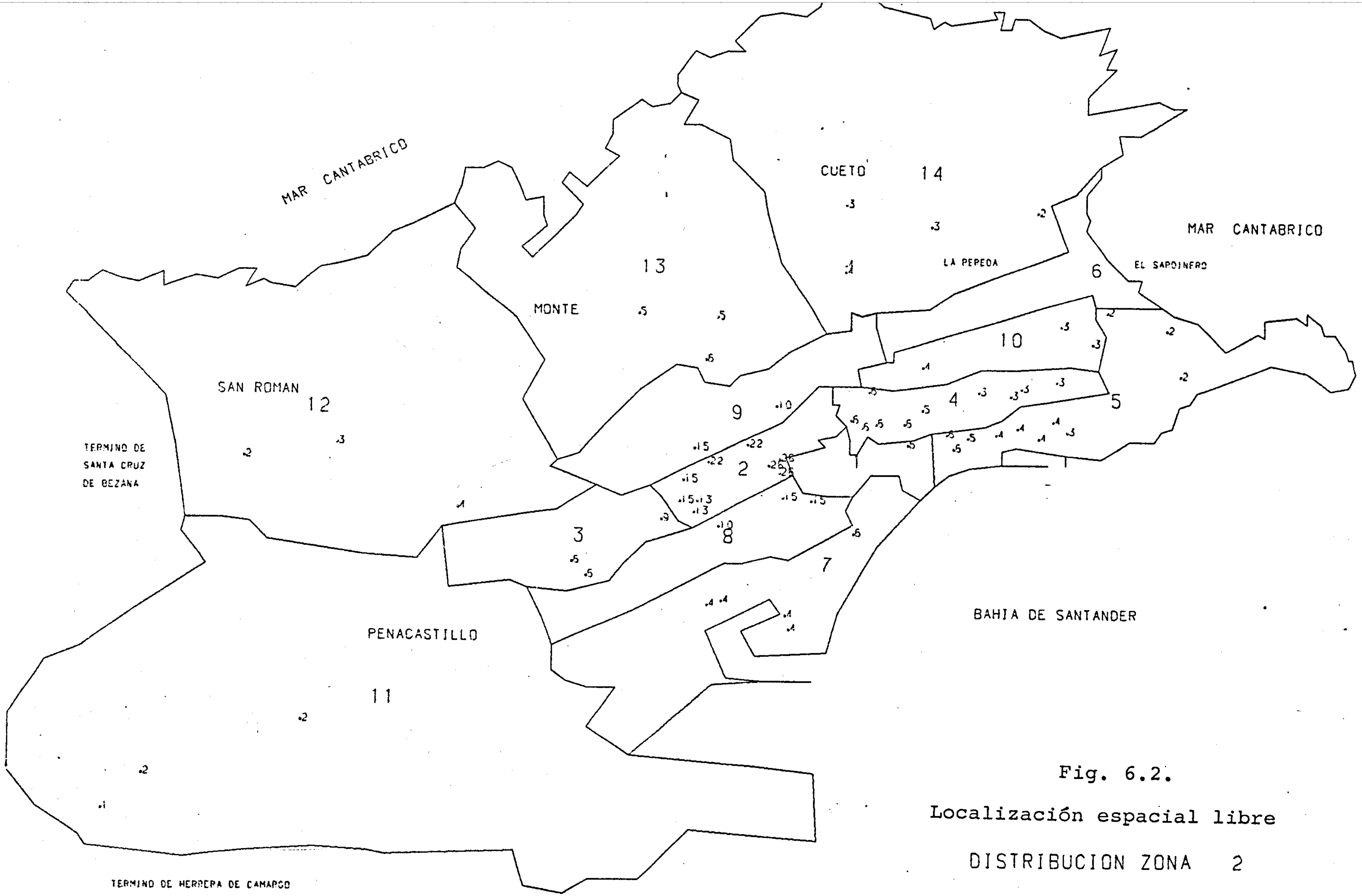

Fig. 6.2.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 2

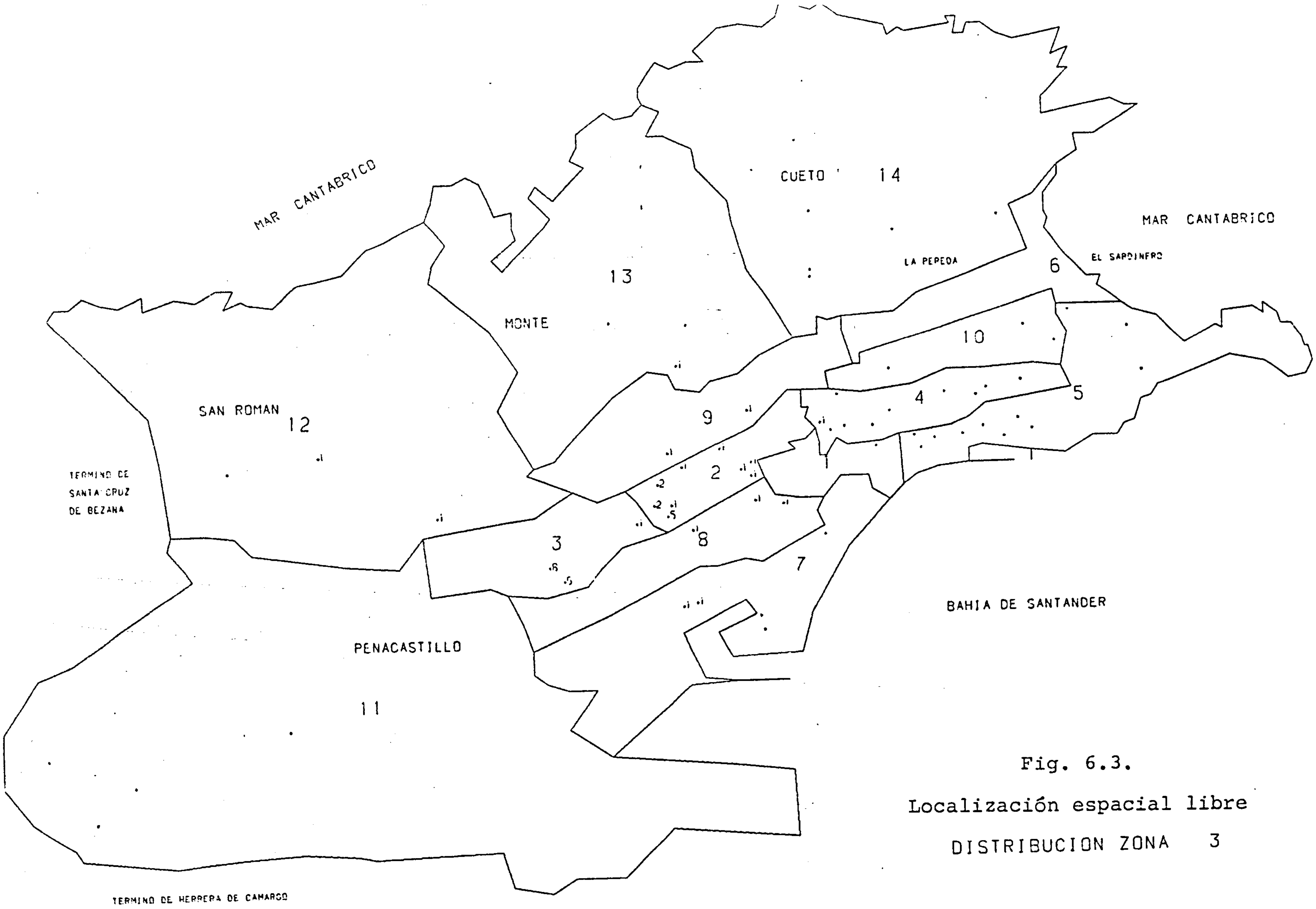

Fig. 6.3.
Localización espacial libre
DISTRIBUCION ZONA 3

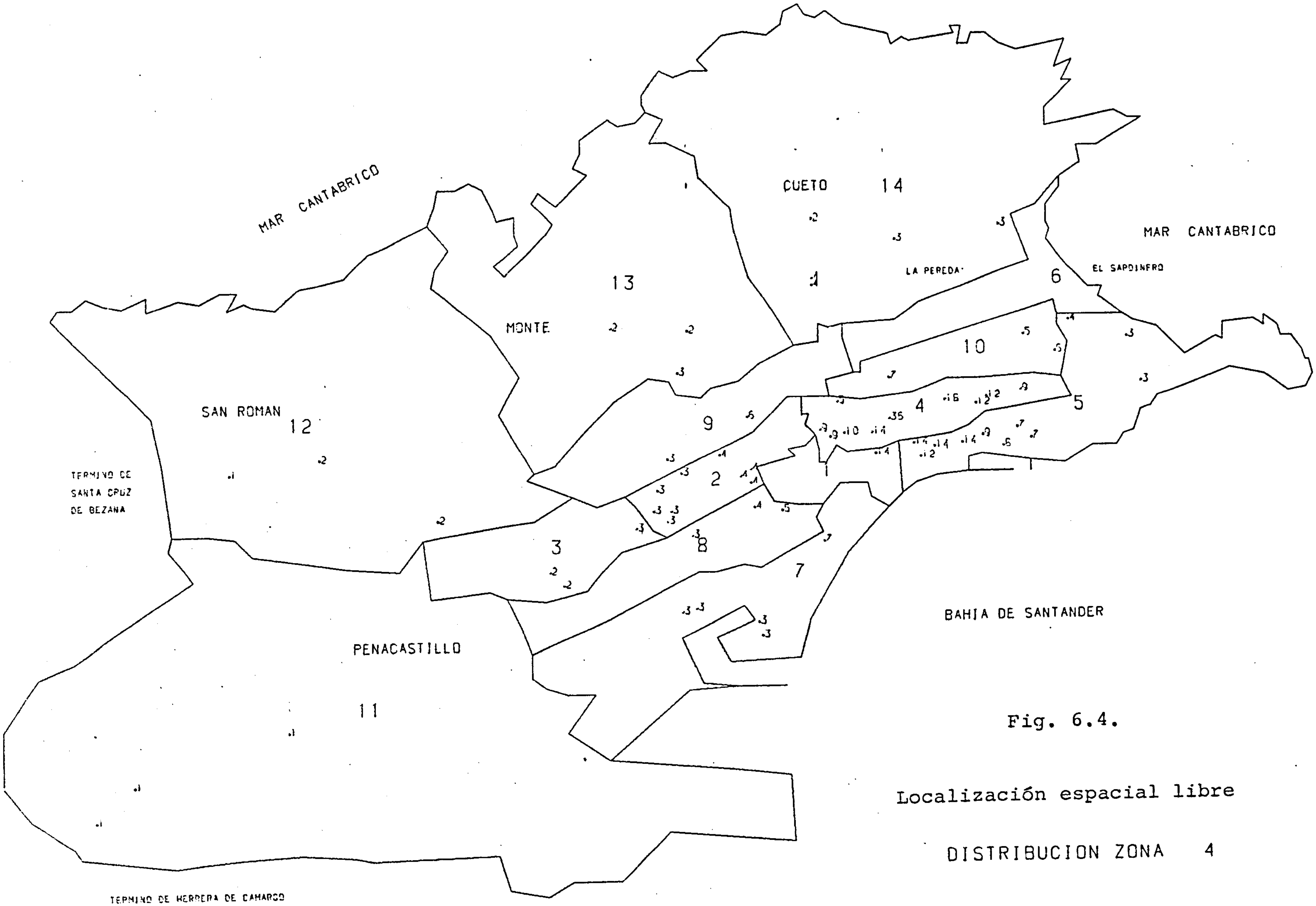

Fig. 6.4.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 4

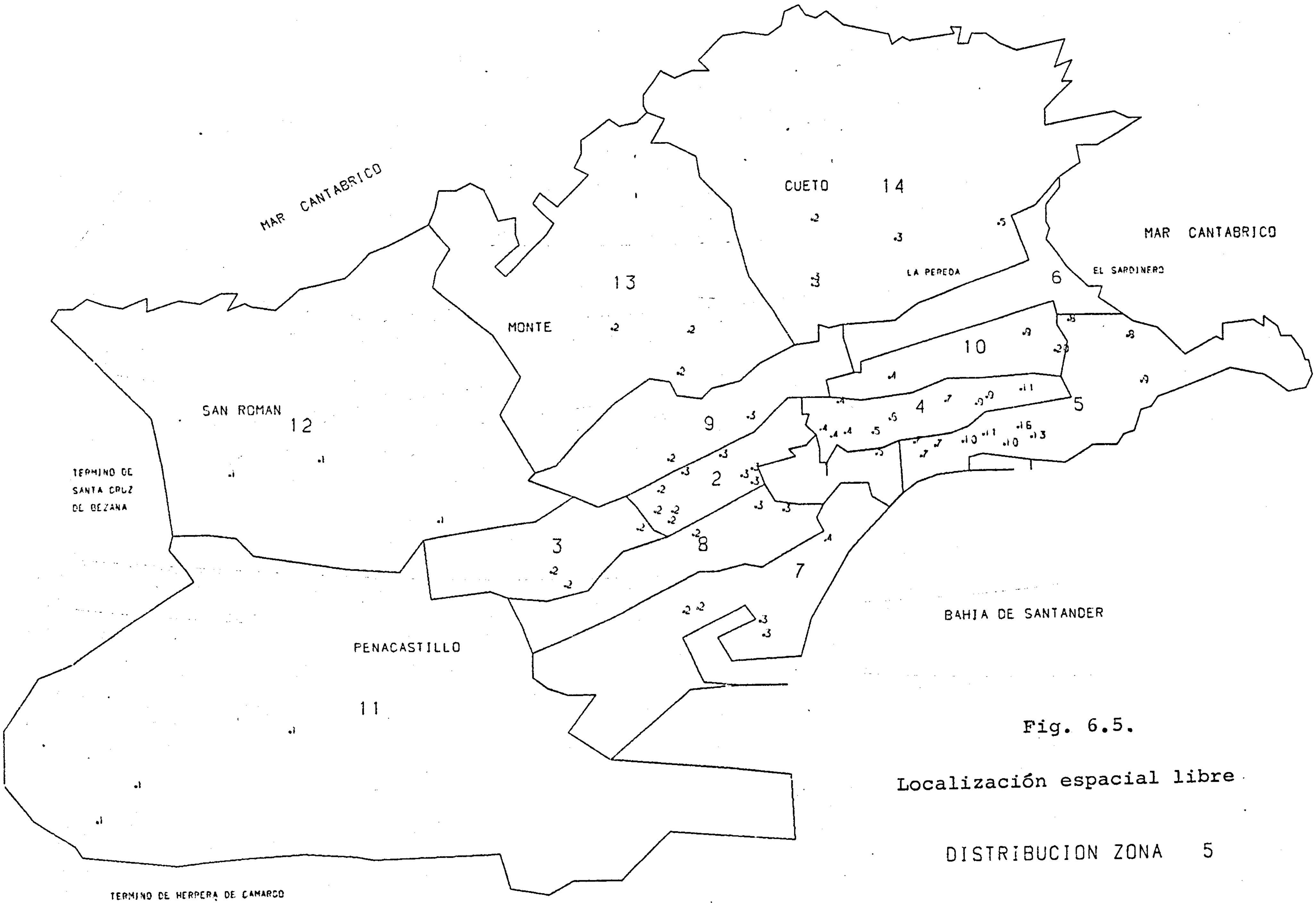

Fig. 6.5.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 5

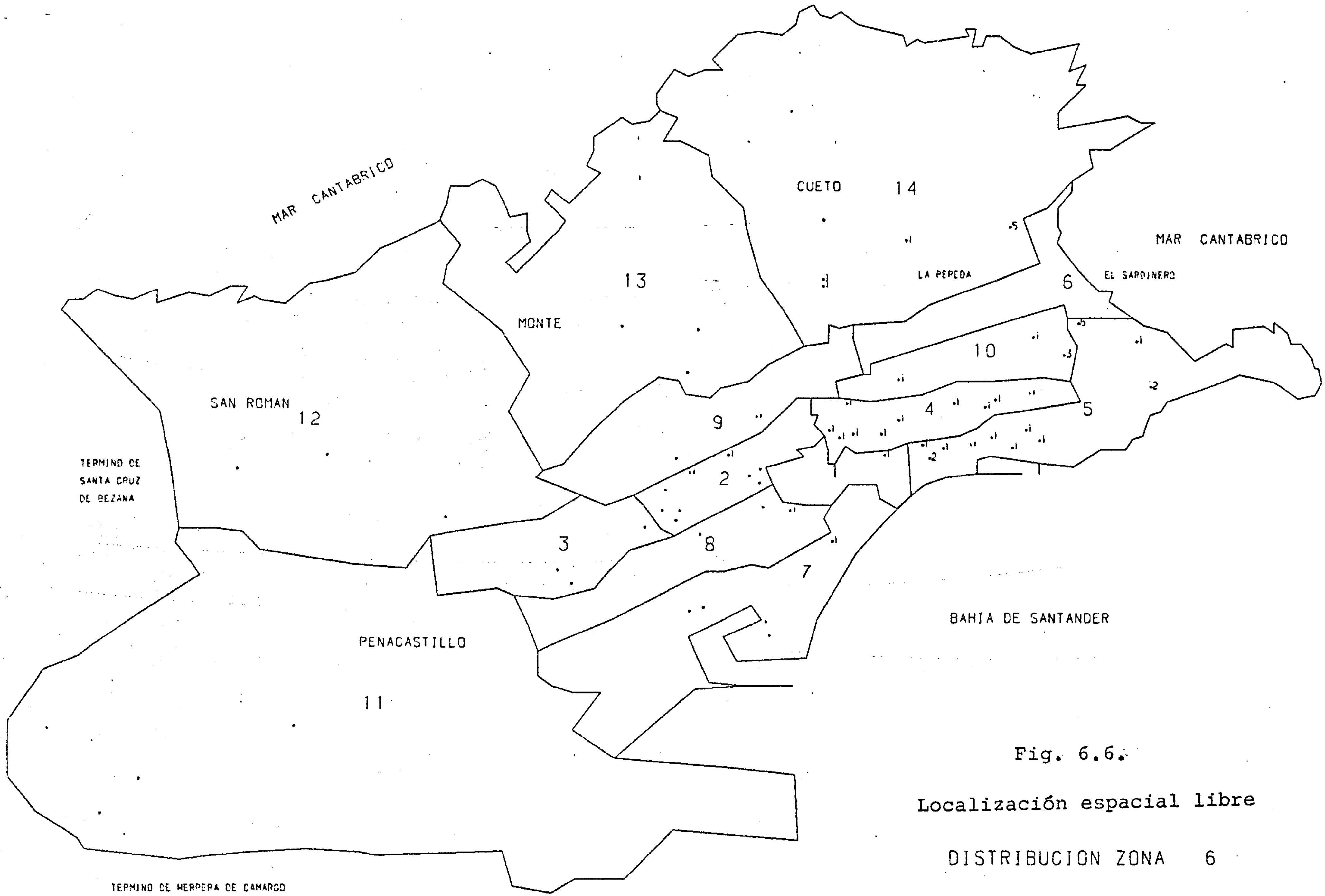

Fig. 6.6.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 6

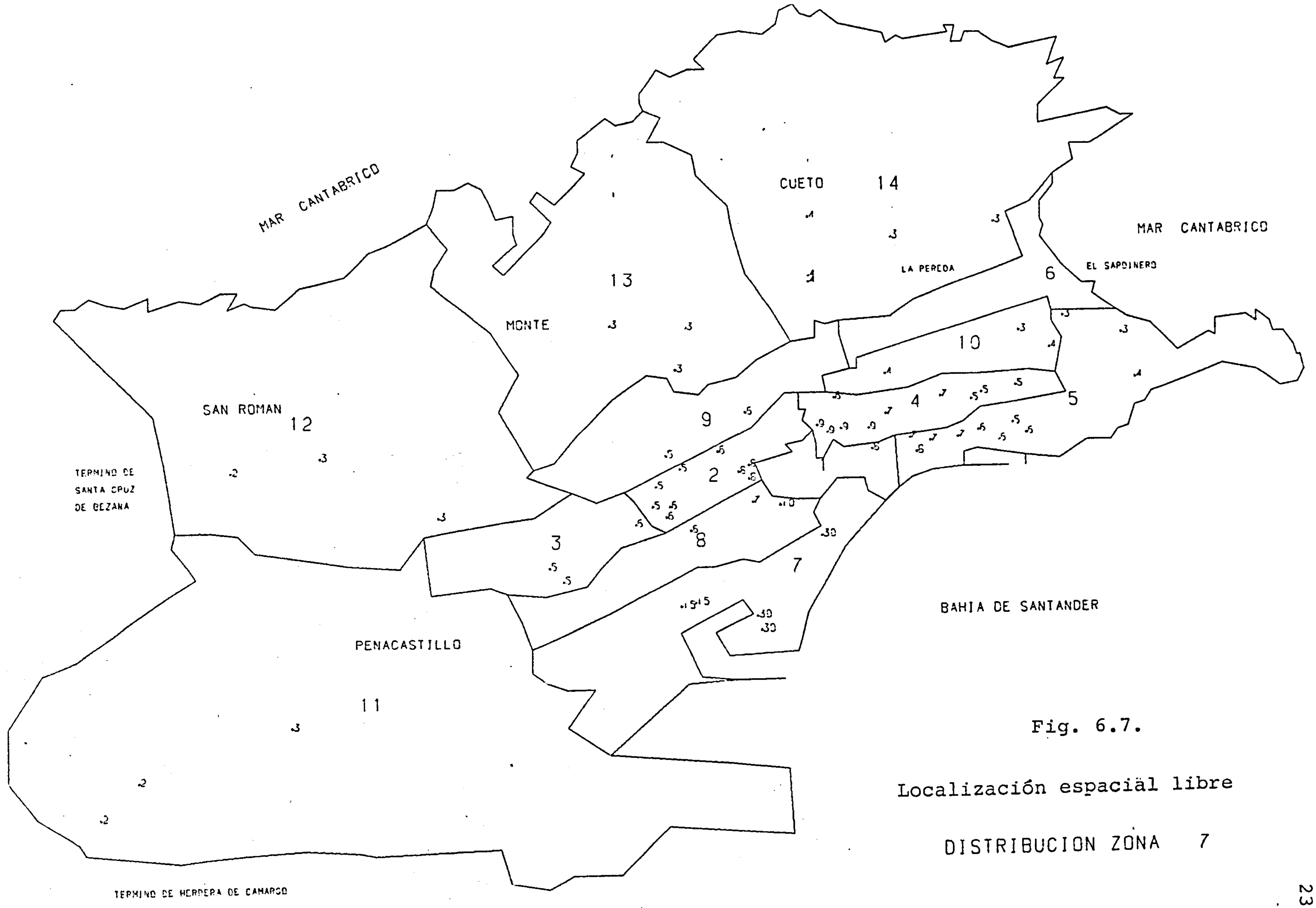

Fig. 6.7.

Localización espaciäl libre

DISTRIBUCION ZONA 7

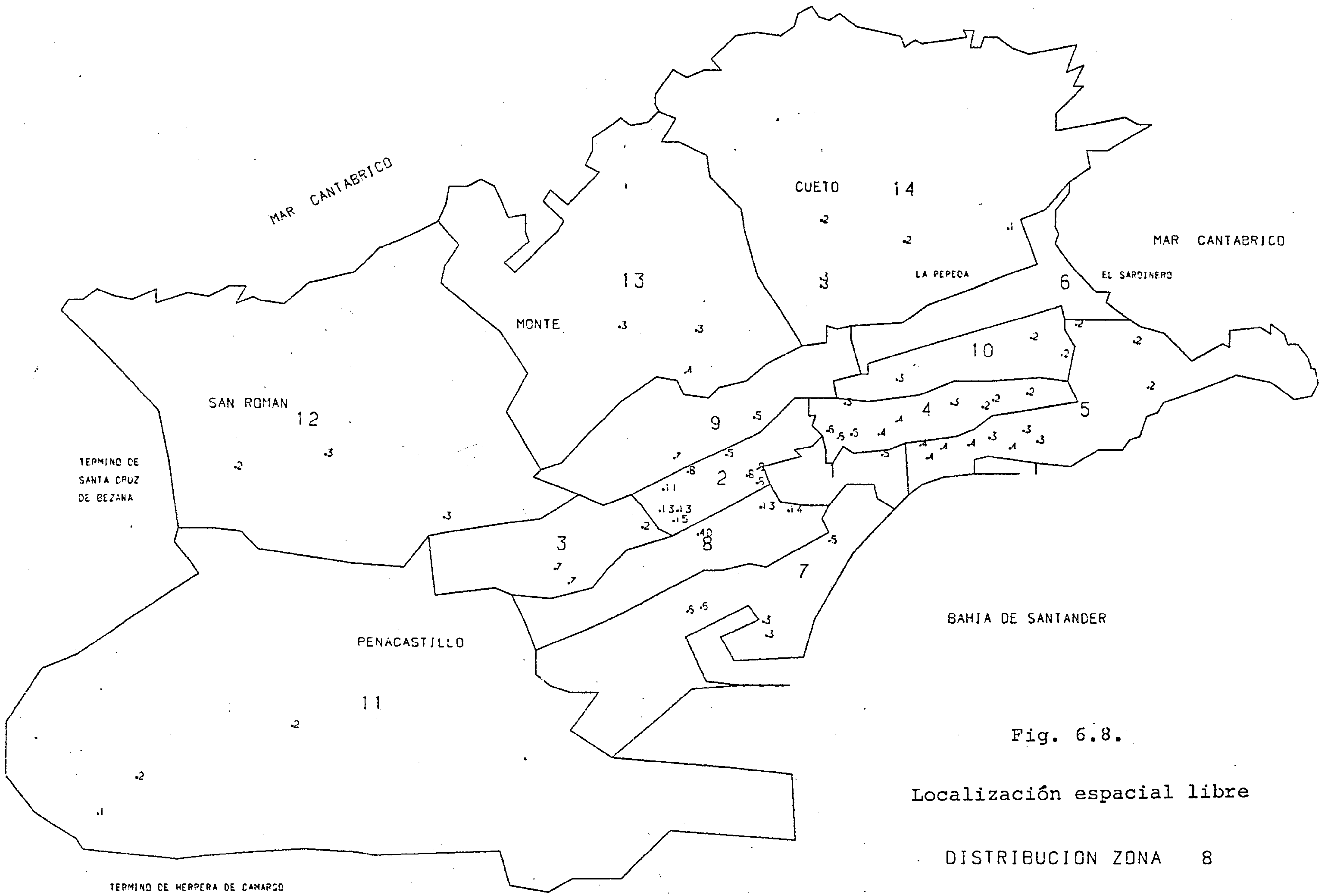

Fig. 6.8.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 8

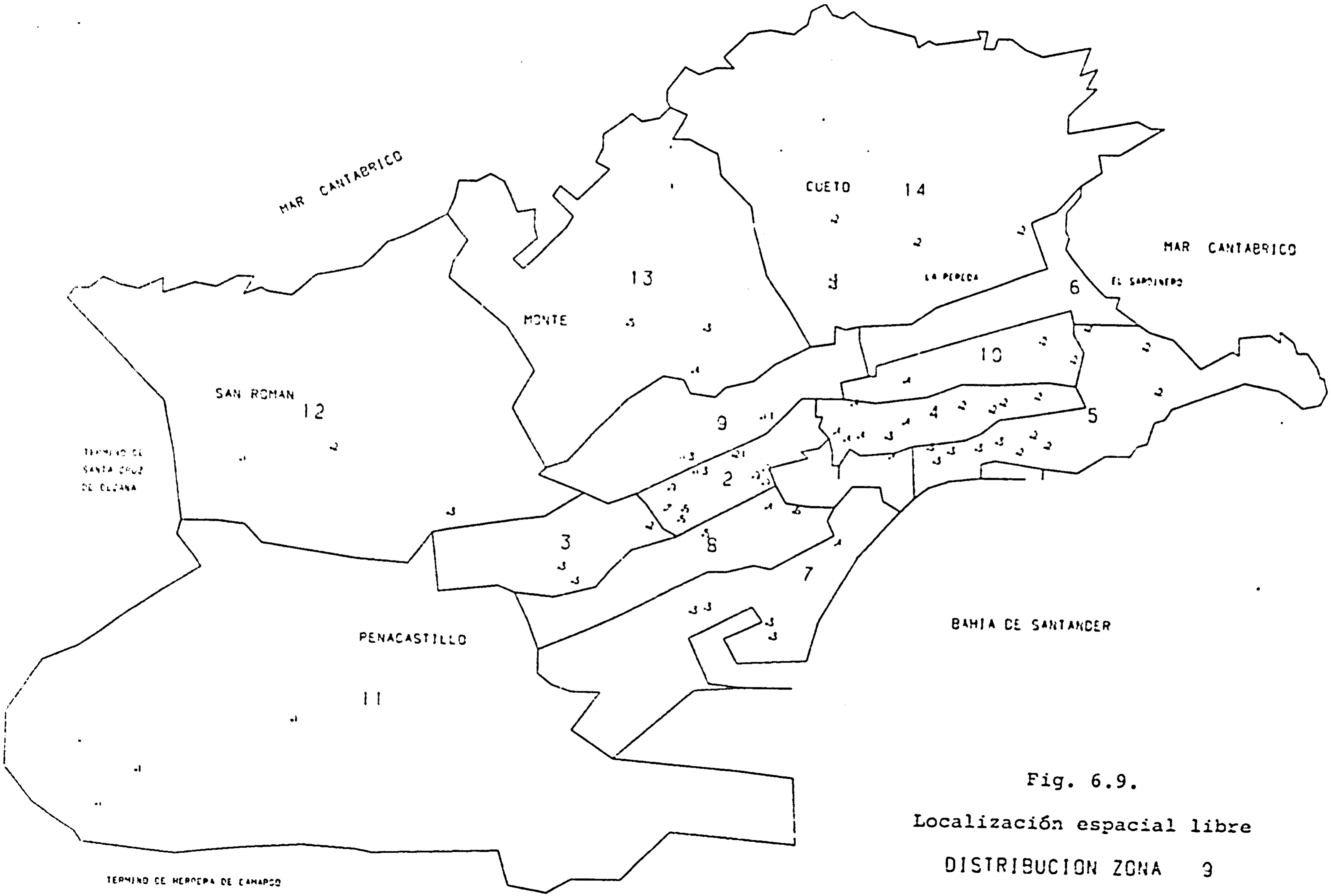

Fig. 6.9.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 9

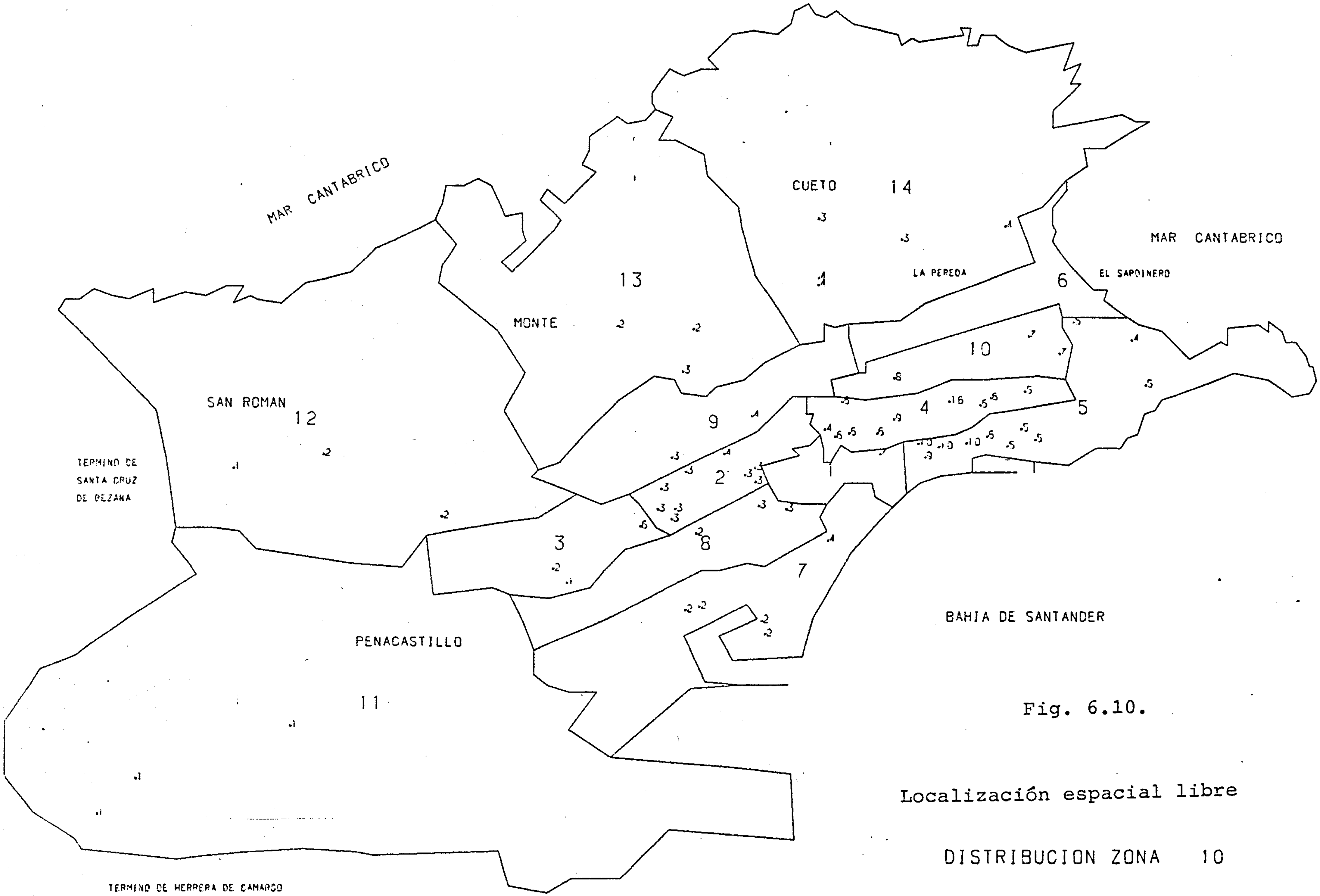

Fig. 6.10.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 10

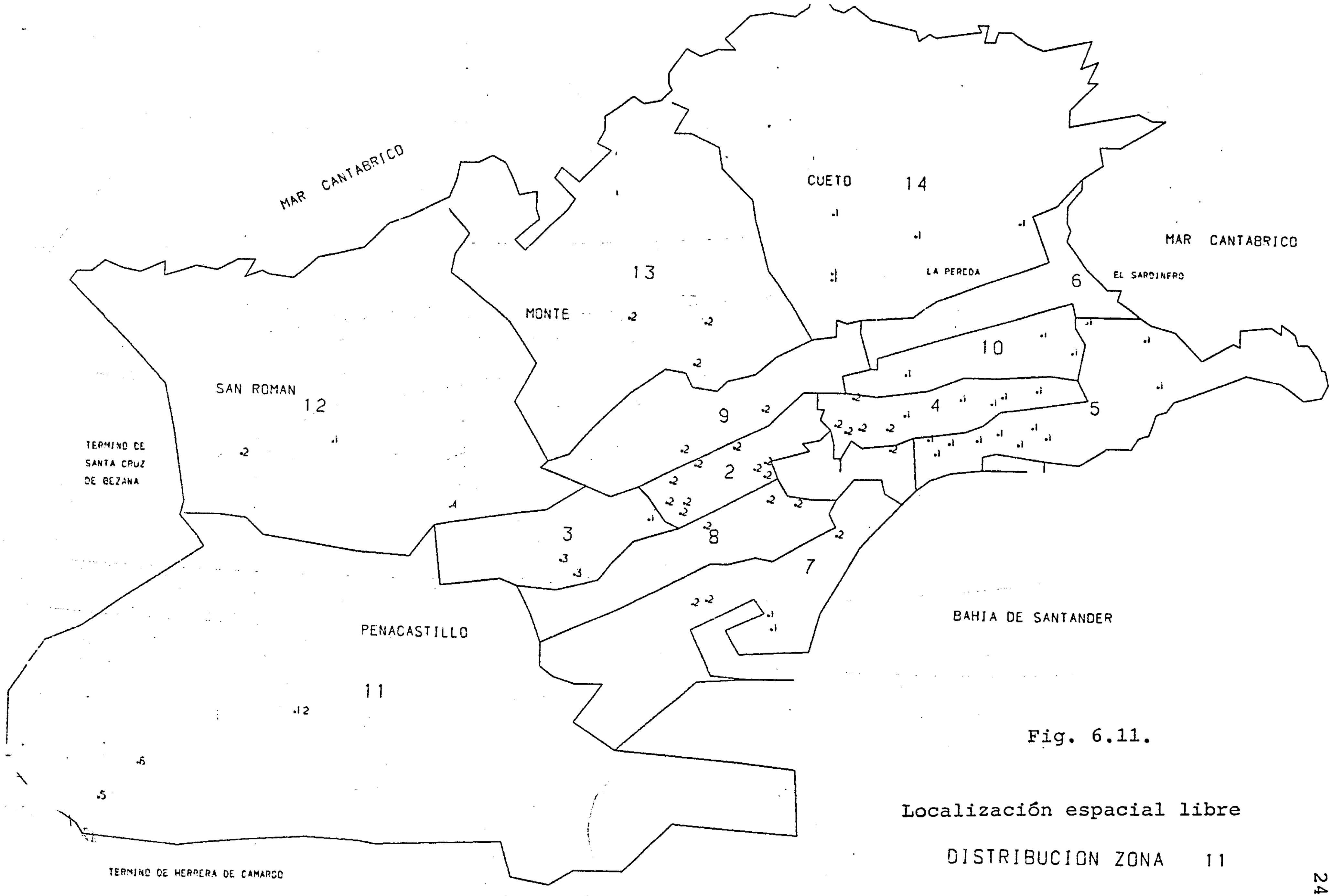

Fig. 6.11.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 11

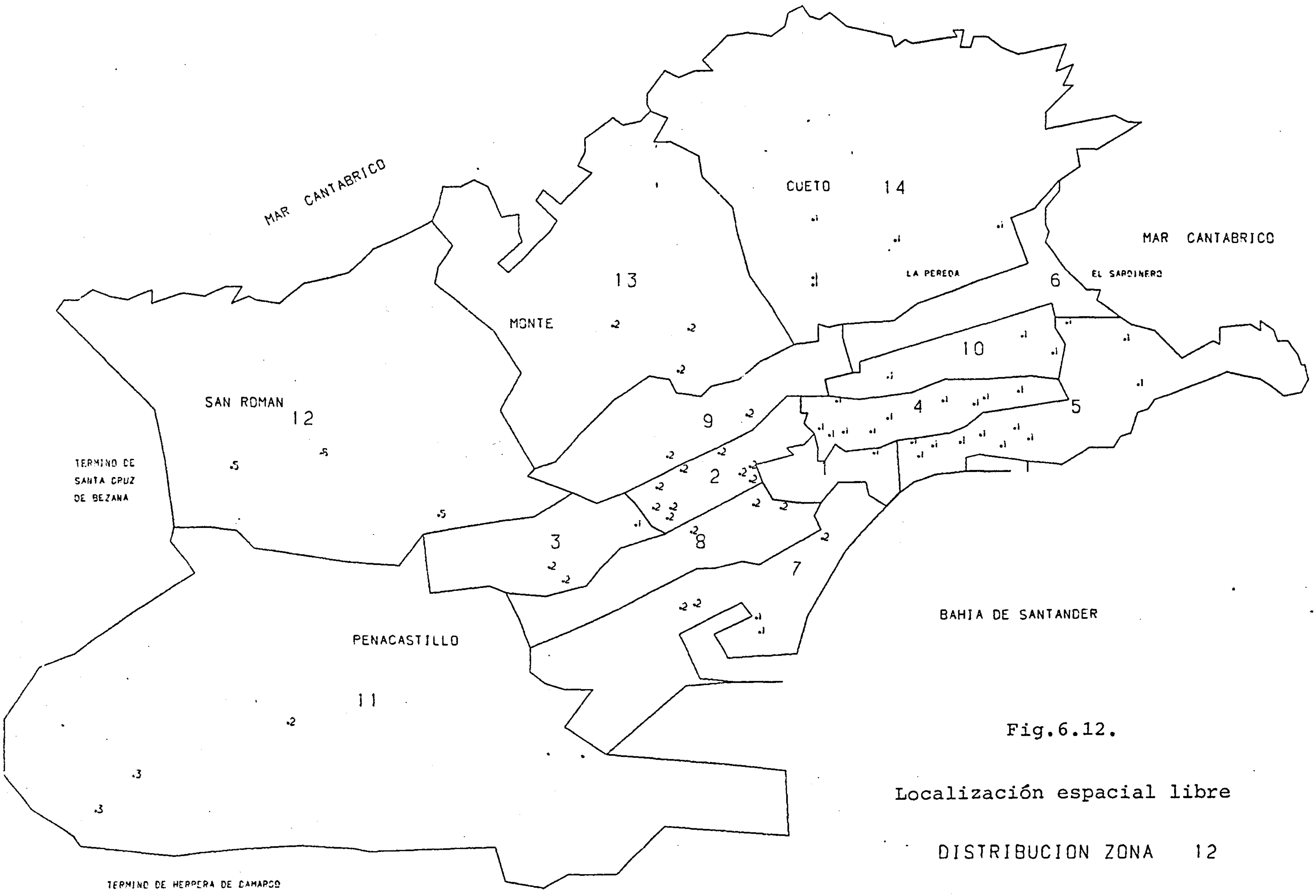

Fig.6.12.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 12

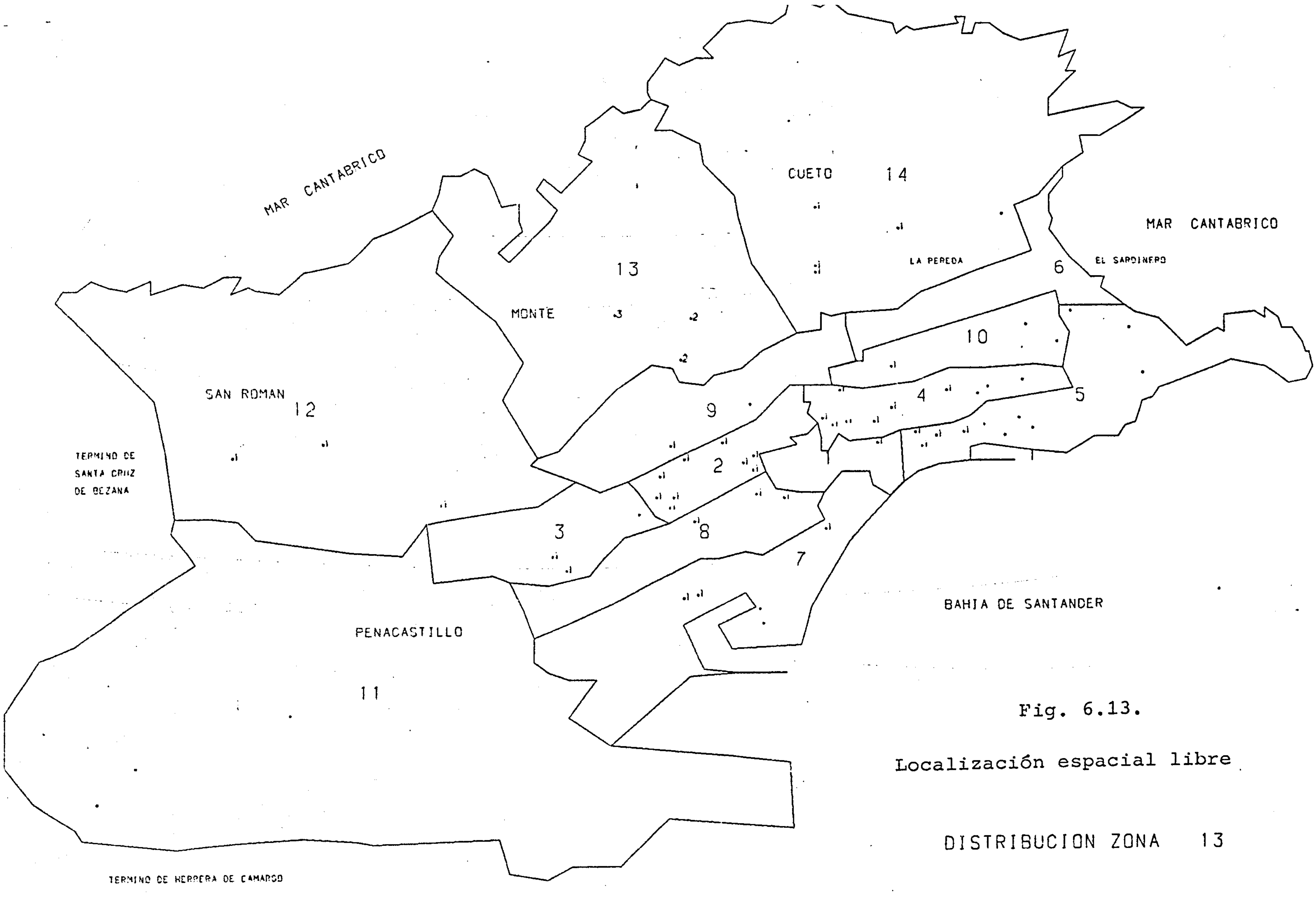

Fig. 6.13.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 13

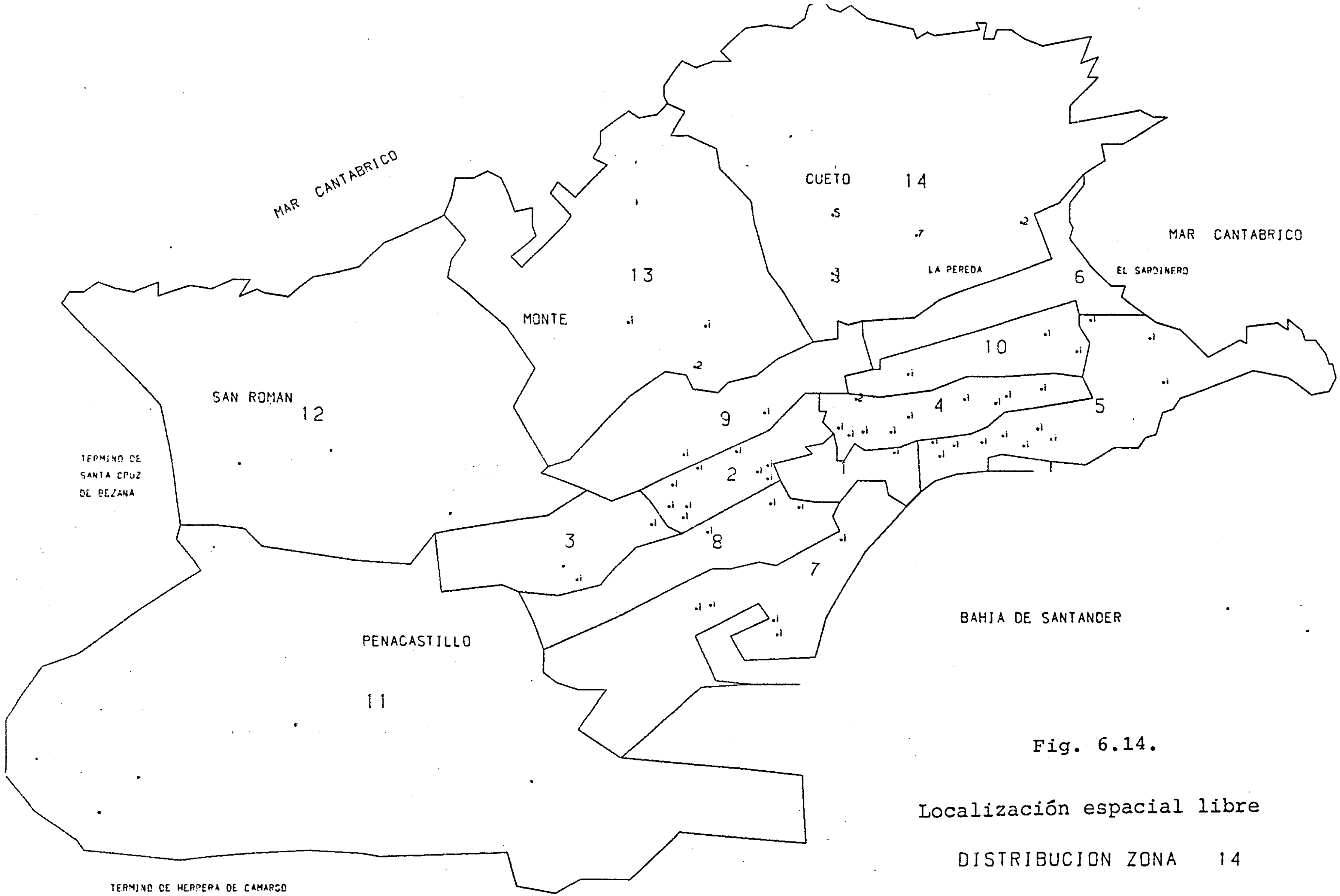

Fig. 6.14.

Localización espacial libre

DISTRIBUCION ZONA 14

6.2. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL CONDICIONADA.

En este caso las ecuaciones que definen el modelo, según se expresa en el apartado 5.1.3.2., son:

$$T_{ij} = P_{ij}\, A_i\, O_i\, B_j\, D_j$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j P_{ij}\, B_j\, D_j}$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i P_{ij}\, A_i\, O_i}$$

que verifican las condiciones

$$\sum_j T_{ij} = O_i$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j$$

$$\sum_j P_{ij} = 1$$

6.2.1.- Hipótesis 1.

En está hipótesis se considera que la probabilidad de que un escolar residente en la zona i acuda al centro j, es inversamente proporcional a la distancia correspondiente entre la zona i y el centro j; siendo

$$P_{ij} = \frac{1/D_{ij}}{\sum_j (1/D_{ij})}$$

Los resultados del modelo se han obtenido por medio del programa de cálculo (*) DC para la obtención de la matriz T_{ij}, como se muestra en la tabla 6.1. Otros datos que también obtiene el programa DC son:

- La entropía del sistema calculada según la formula (5.110), siendo el valor obtenido

$$S = 18284$$

- La suma total de los valores absolutos de las diferencias entre la muestra de la localización espacial real (tabla 3.6) y la del modelo, cuyo valor obtenido es

$$DM = 1046$$

lo que correspondería, suponiendo un reparto uniforme entre los 23 centros que componen la muestra y las 14 zonas de residencia, a un error de $\pm$ 3 escolares por zona y centro con respecto a los resultados del modelo, resultado no adecuado, puesto que entre otras razones habría que haber calibrado previamente los parámetros P_{ij} considerando ya la situación real de la muestra; hecho que se realiza en el siguiente apartado dentro de la hipótesis 2.

No obstante, del análisis comparativo de los resultados del modelo con la muestra, merece destacarse el siguiente.

(*) Que se incluyen en el anejo de programación

TABLA 6.1.

Loc. esp. condicionada hipótesis 1

ZONA

CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	4	10	6	5	4	1	9	13	6	4	6	4	1	1
2	4	19	1	4	3	1	7	10	13	4	3	3	1	1
3	2	3	0	10	6	1	4	3	2	6	1	1	0	1
4	5	3	0	31	4	1	6	4	3	7	1	1	0	1
5	3	2	0	8	4	0	4	2	2	5	1	1	0	0
6	8	29	0	5	3	0	8	9	9	3	2	2	1	1
7	5	32	1	5	3	0	9	9	10	4	2	2	1	1
8	4	9	1	4	2	0	6	41	5	2	2	2	1	1
9	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
10	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	2
11	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	2
12	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
13	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
14	3	8	1	4	3	1	5	6	10	4	3	3	7	2
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
16	1	2	0	2	2	0	3	2	2	2	5	4	0	1
17	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	4	1	0	0
18	4	9	2	5	4	1	10	10	8	5	10	7	2	2
19	1	2	0	1	1	0	2	2	2	1	1	5	0	0
20	3	3	0	7	13	1	5	4	2	5	1	1	0	1
21	2	3	0	2	2	0	21	2	2	1	1	1	0	1
22	6	4	0	9	3	1	7	4	3	4	1	1	1	1
23	3	2	0	3	2	0	13	2	1	2	1	1	0	0
24	3	2	0	5	2	0	3	2	2	2	1	0	0	0
25	12	6	0	11	4	1	10	6	[illegible]	5	2	1	1	1
26	4	3	0	10	4	0	5	3	2	6	1	1	0	1
27	11	9	1	9	7	1	11	6	5	10	3	2	1	3
28	2	2	0	13	4	0	4	2	2	10	1	1	0	1
29	4	24	1	5	3	1	7	6	25	5	2	2	1	1
30	5	5	0	9	3	0	5	2	2	3	1	1	0	0
31	4	7	1	5	4	1	27	10	5	4	3	2	1	1
32	2	10	1	2	1	0	4	9	5	2	1	1	1	1
33	5	4	0	3	2	0	7	7	4	2	1	1	0	1
34	4	6	0	10	24	3	10	6	4	12	3	2	1	3
35	2	3	0	7	8	1	5	3	2	4	1	1	0	1
36	15	8	0	14	6	1	12	8	5	7	2	2	1	2
37	4	6	1	6	4	1	40	11	5	4	4	3	1	1
38	2	2	0	5	10	1	3	2	1	3	1	0	0	1
39	2	2	0	4	8	3	4	2	2	5	1	1	1	1
40	2	6	5	3	2	0	5	6	4	2	4	1	1	1
41	2	5	1	4	3	1	6	6	4	4	5	10	1	1
42	3	4	0	3	5	1	5	3	4	8	1	1	1	1
43	3	6	1	3	2	0	4	5	4	3	2	2	3	2
44	5	9	1	13	23	10	12	6	7	16	4	4	2	8
45	3	3	0	7	4	1	4	2	2	4	1	1	0	0
46	4	10	1	5	3	1	6	7	7	4	3	3	3	3
47	1	5	0	1	1	0	1	2	3	1	0	1	0	0
48	4	25	1	5	3	1	6	10	15	4	2	2	1	1
49	3	4	0	16	11	1	7	3	3	7	2	1	1	1
50	1	2	0	7	5	1	3	1	1	3	1	1	0	1
51	5	7	0	17	20	2	16	6	4	16	2	2	1	1
52	2	6	0	2	1	0	3	6	3	1	1	1	0	0
53	1	1	0	3	10	1	1	1	1	3	1	1	0	0
54	15	46	5	17	12	2	32	12	10	32	6	5	2	5
55	1	2	0	1	1	0	1	2	1	1	0	0	0	0
56	4	5	0	16	18	2	7	4	3	4	2	2	1	2
57	2	5	0	2	1	0	2	6	2	1	0	0	0	1
58	0	2	0	1	5	1	1	1	0	3	0	0	1	1
59	1	3	0	2	2	0	19	3	1	2	0	0	1	1
60	11	17	1	5	4	0	16	11	11	4	2	2	2	2
61	1	5	1	3	1	0	3	3	6	2	1	0	0	1

. Existen centros escolares caracterizados porque sus escolares residen en zonas muy determinadas, distribuyendose en el modelo entre casi todas, aunque con mayor peso para las zonas cercanas a la localización del centro . Esto sucede entre otros con los centros escolares números 4, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 42. Por tanto se originan dispersiones apreciables con las zonas para las cuales, en el modelo residen escolares y en la muestra real no ocurre esto.

. Otros centros como los números 44, 48, entre las zonas próximas se distribuyen con mayor peso en las residenciales que en los barrios, dada su característica de centros privados. de precios altos y buena oferta.

. Para centros tales como los 34, 51 y 60 el modelo se ajusta bastante bien, exceptuando las pocas zonas para las cuales no reside ningún escolar en ellas, según la muestra de los datos reales.

. Para centros como 56, el número de escolares para la zona de su localización es mayor en el modelo que en la muestra, distribuyendose muchos escolares en zonas lejanas.

También se observa que las mayores distribuciones de escolares entre una zona con los centros escolares localizados de la misma, se produce para las zonas 2,3,4,5,12, 13 y 14 como lógicamente era de esperar, si se análiza la tabla 6.2.

TABLA 6.2.

Comparación entre escolares residentes por zona y escolares matriculados en centros de la zona.

ZONA	Nº de escolares (A)	Escolares matriculados (B)	Diferencia (B - A)
1	221	22	- 199
2	443	606	+ 163
3	41	320	+ 279
4	370	580	+ 210
5	293	486	+ 193
6	47	——	- 47
7	421	261	- 160
8	325	132	- 193
9	256	46	- 210
10	270	73	- 197
11	115	39	- 76
12	103	150	+ 47
13	45	160	+ 115
14	71	146	+ 75
TOTAL	3021	3021	

Fuente: Elaboración propia a partir de las tablas 3.5 y 3.6.

6.2.2.- Hipótesis 2.

En este caso se corrigen los valores de P_{ij} considerados en la hipótesis 1, con la distribución de la muestra real (tabla 3.6), y por medio de la formula de Asano.

Los resultados del modelo se han obtenido con los programas de cálculo DC y PSAN, mostrándose gráficamente en las figuras 6.15. a la 6.28.

El valor obtenido de la entropía para esta hipótesis es:

$$S = 17853$$

y la suma total de las diferencias con la muestra:

$$DM = 561$$

valor netamente inferior al de la hipótesis 1, mejorándose los resultados del modelo.

Del análisis comparativo de los resultados del modelo con la distribución real de la muestra, pueden sacarse las siguientes conclusiones:

- Para centros escolares como los nº 4,13,16,17,etc., caracterizados porque sus escolares residen, (para la distribución real) en zonas muy determinadas; con la correción de Asano el modelo se mejora para estos centros concentrandose su mayor distribución de escolares en las zonas más próximas a la localización de los centros.

- Para centros como los 34,44,48,51,60 el modelo se ajusta bastante bien, aunque manteniendo en los números 44- y 48 la ligera tendencía, observada en el caso de la hipótesis 1.

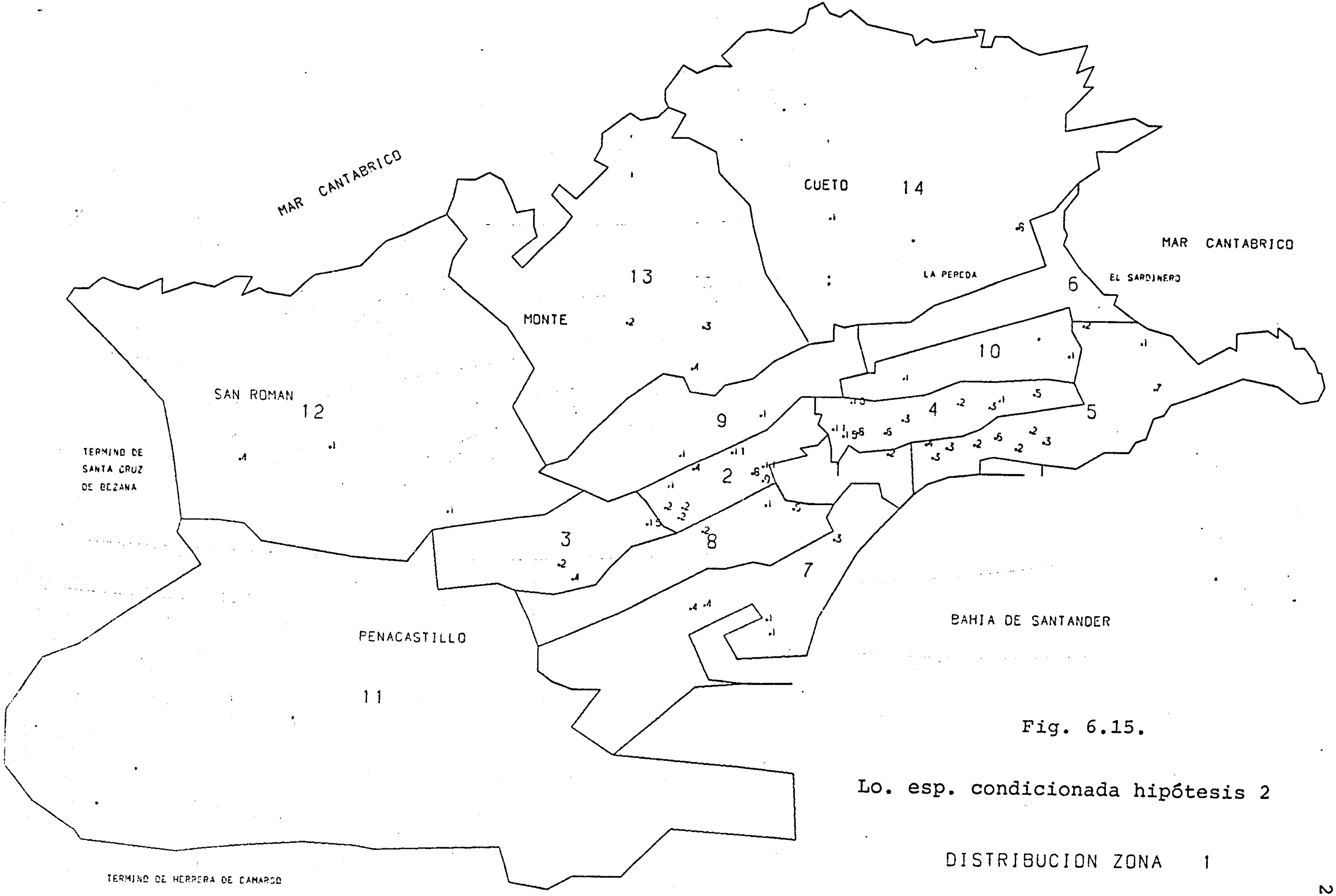

Fig. 6.15.

Lo. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 1

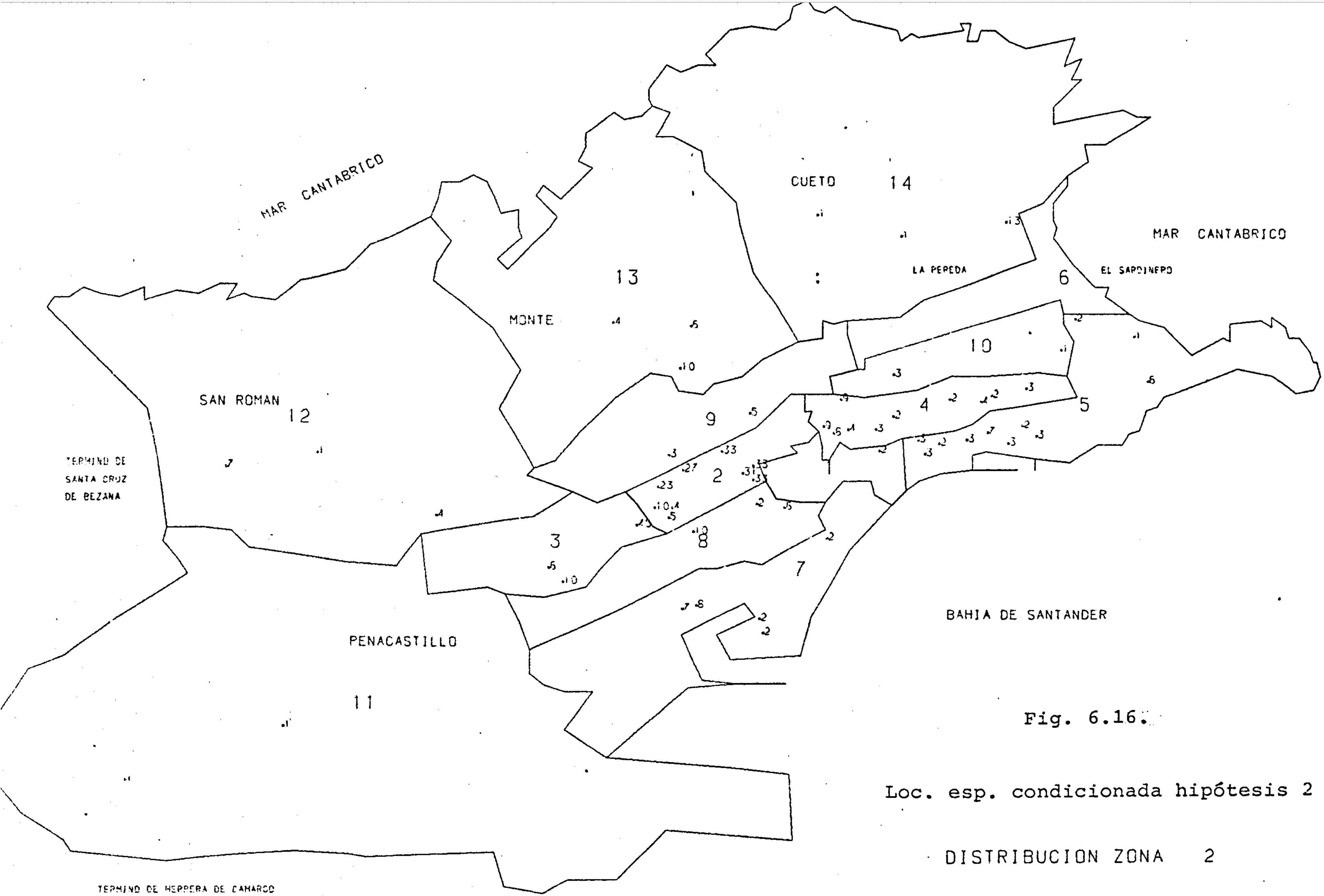

Fig. 6.16.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 2

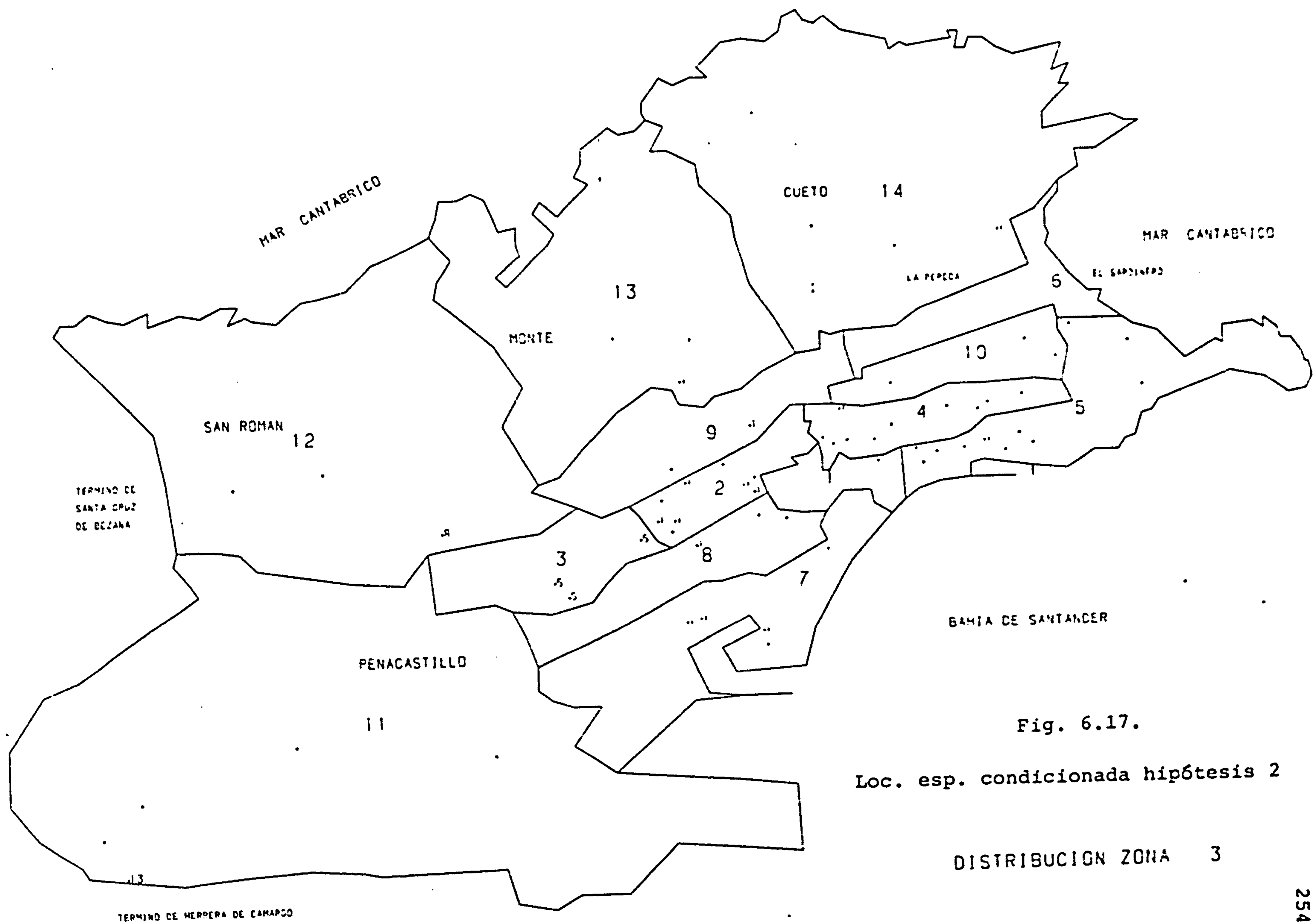

Fig. 6.17.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 3

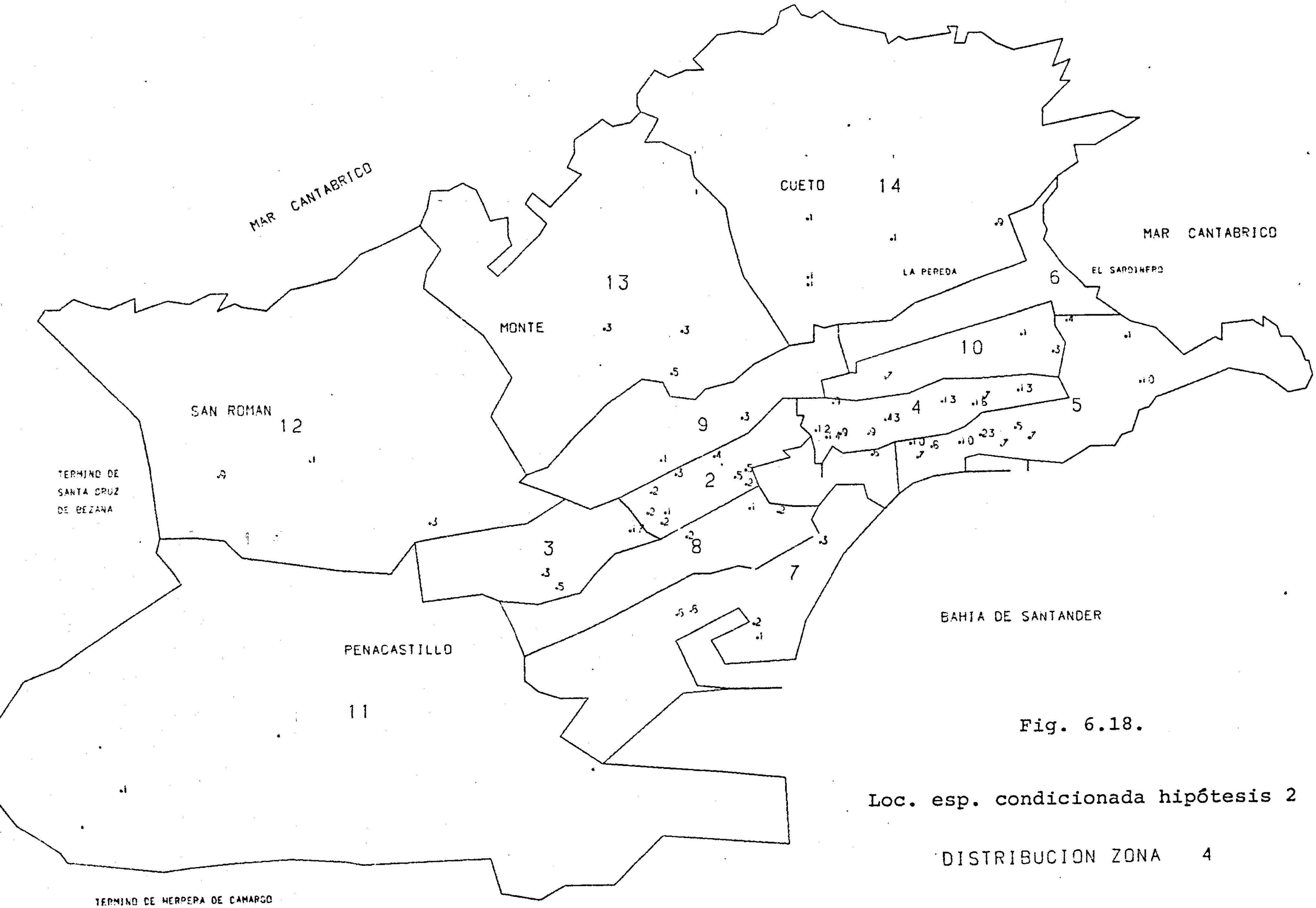

Fig. 6.18.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 4

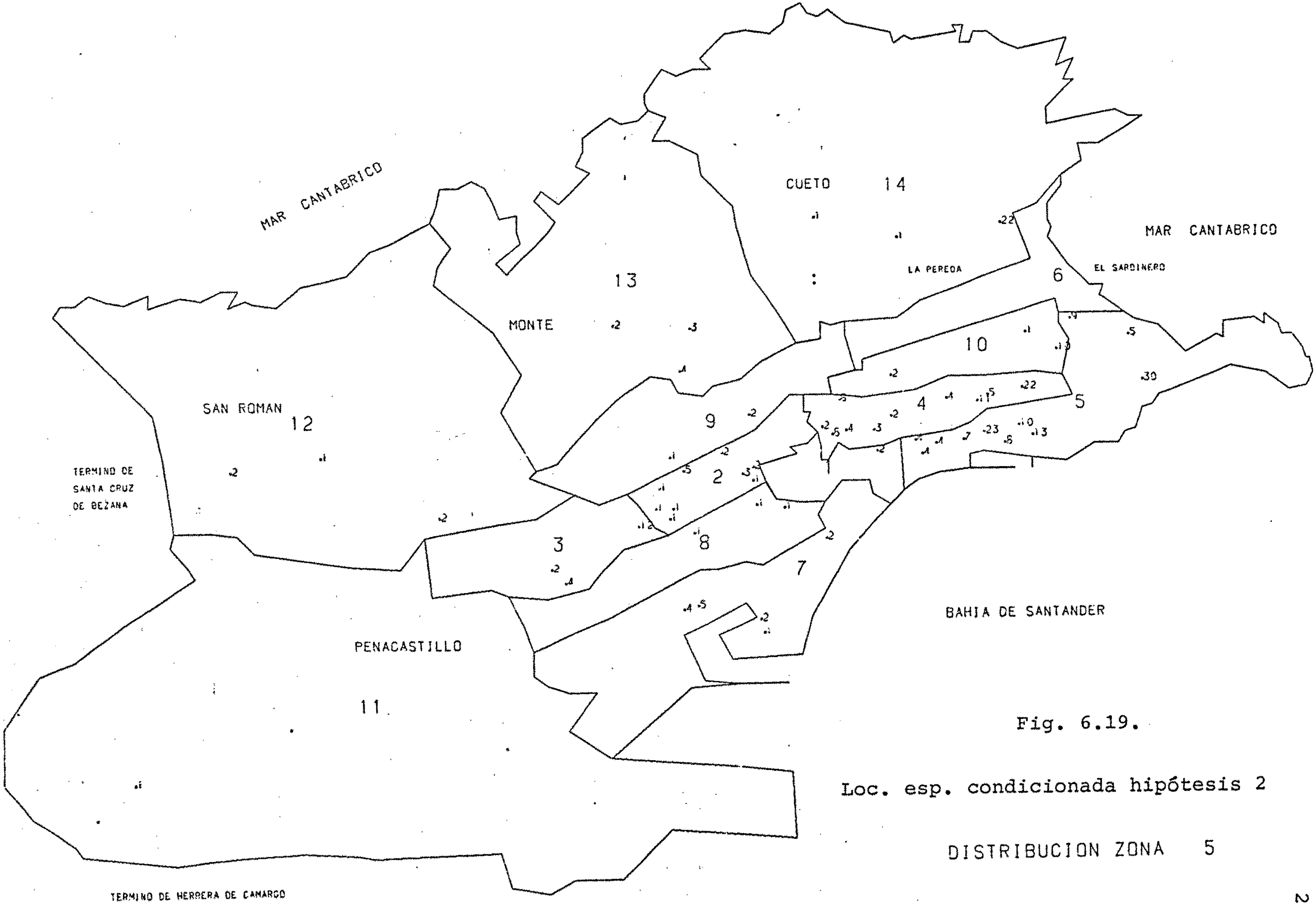

Fig. 6.19.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 5

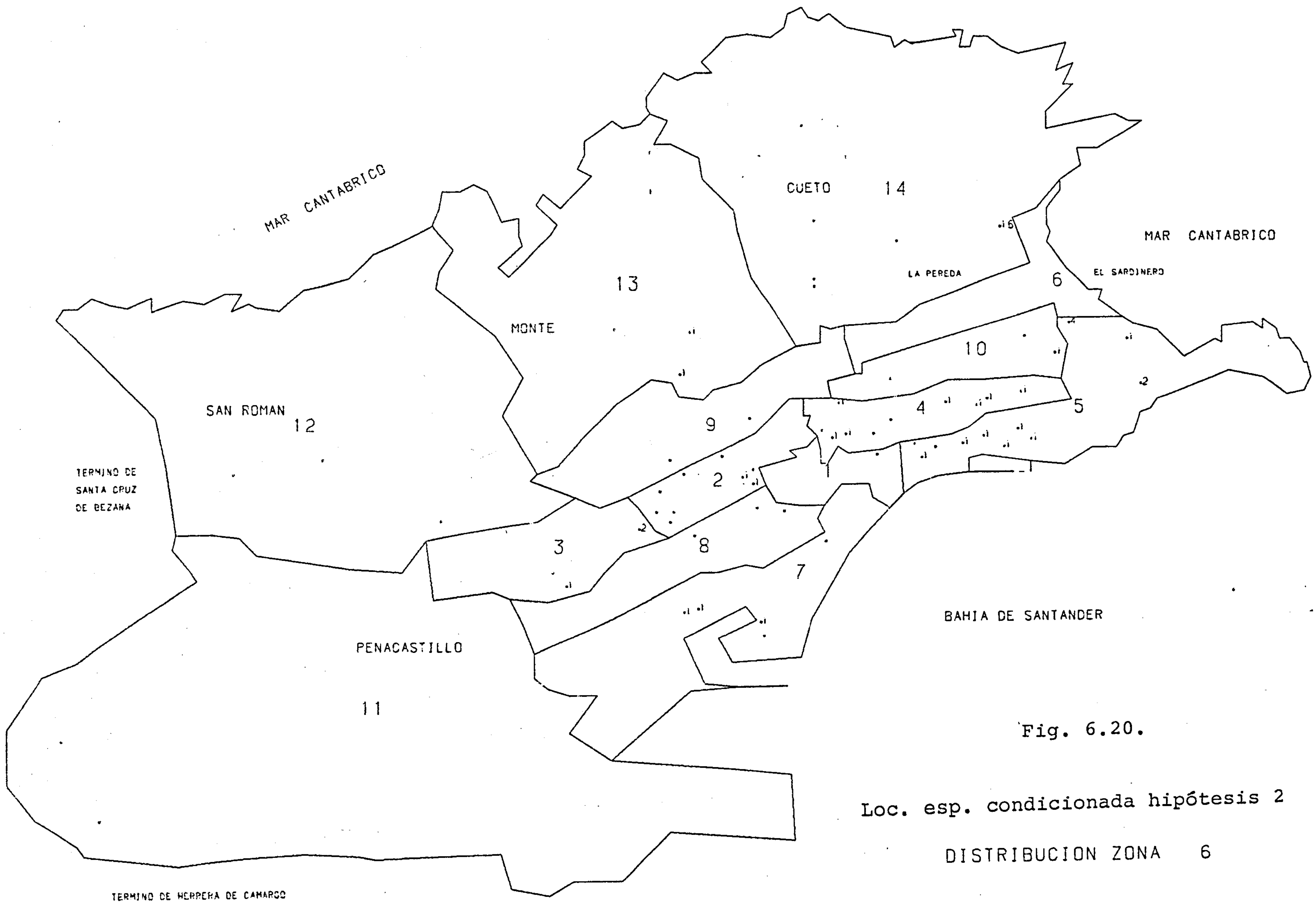

Fig. 6.20.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 6

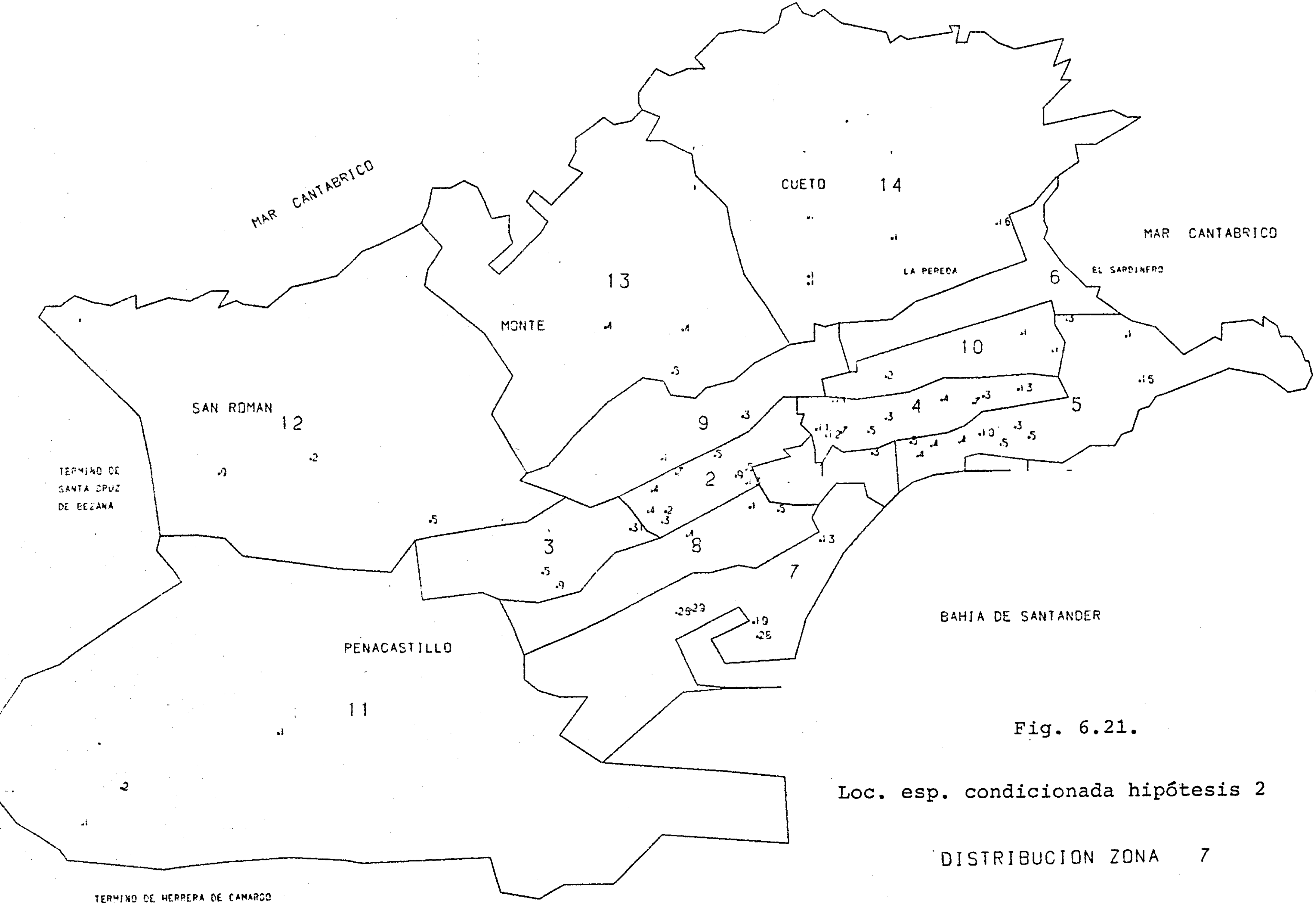

Fig. 6.21.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 7

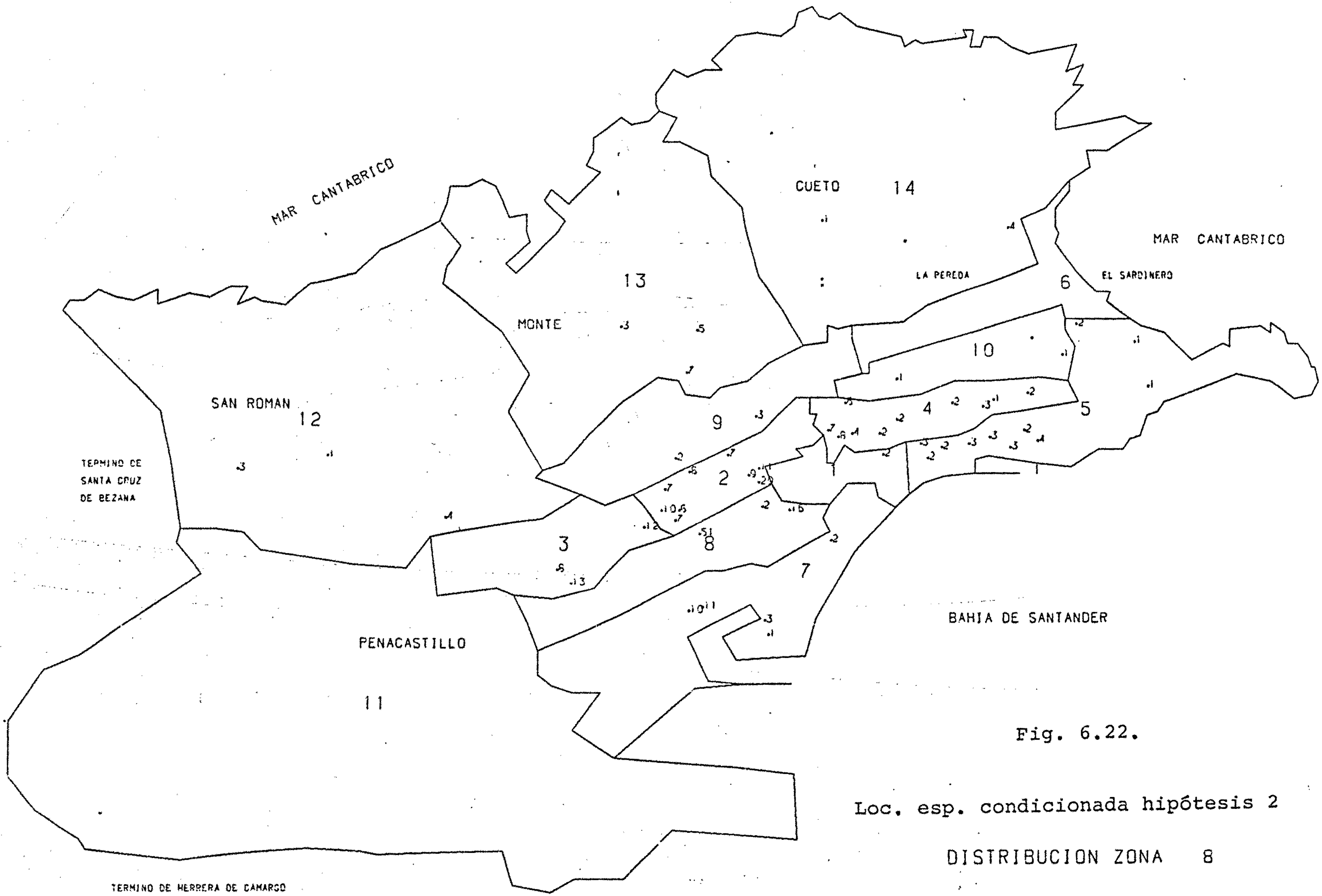

Fig. 6.22.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 8

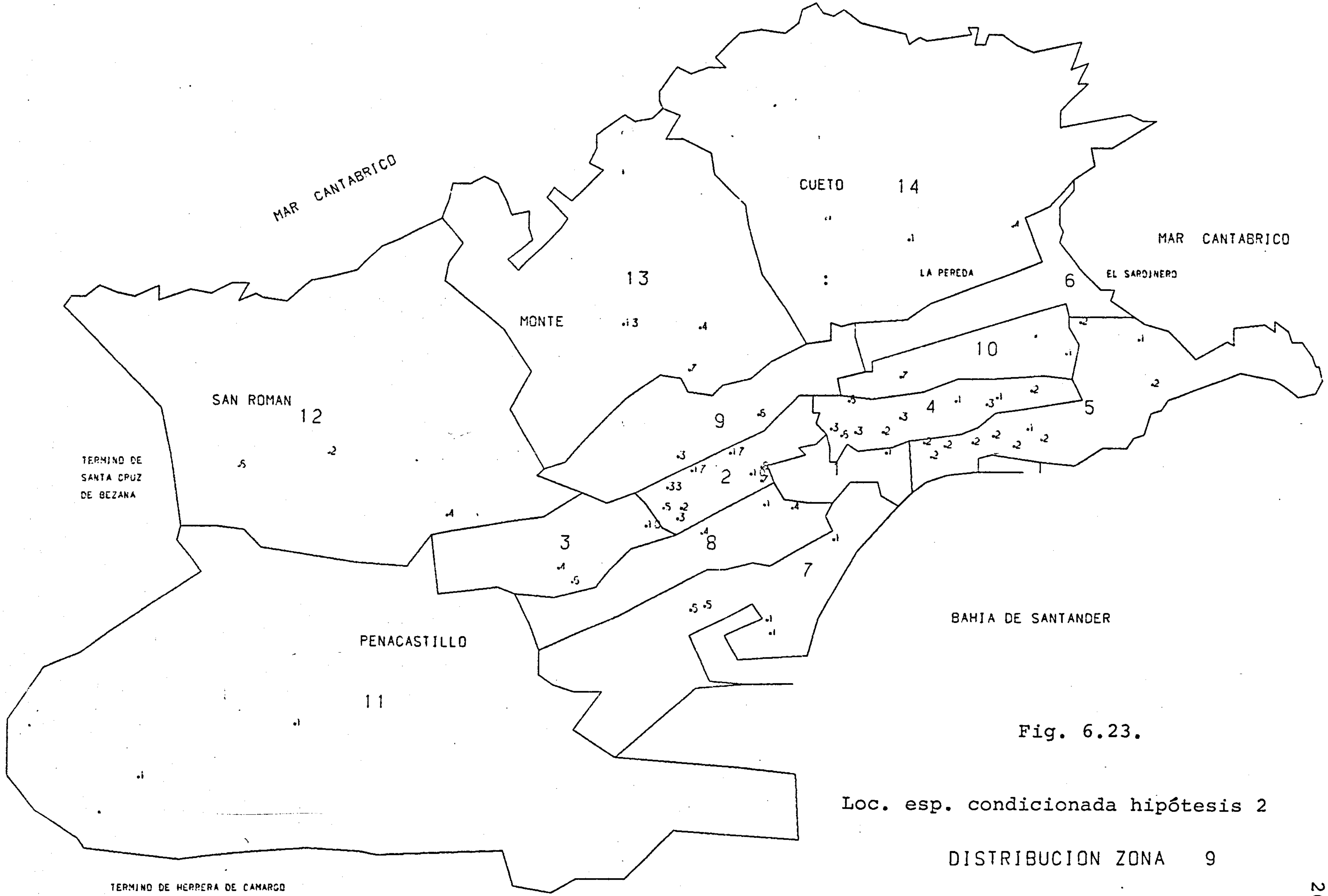

Fig. 6.23.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 9

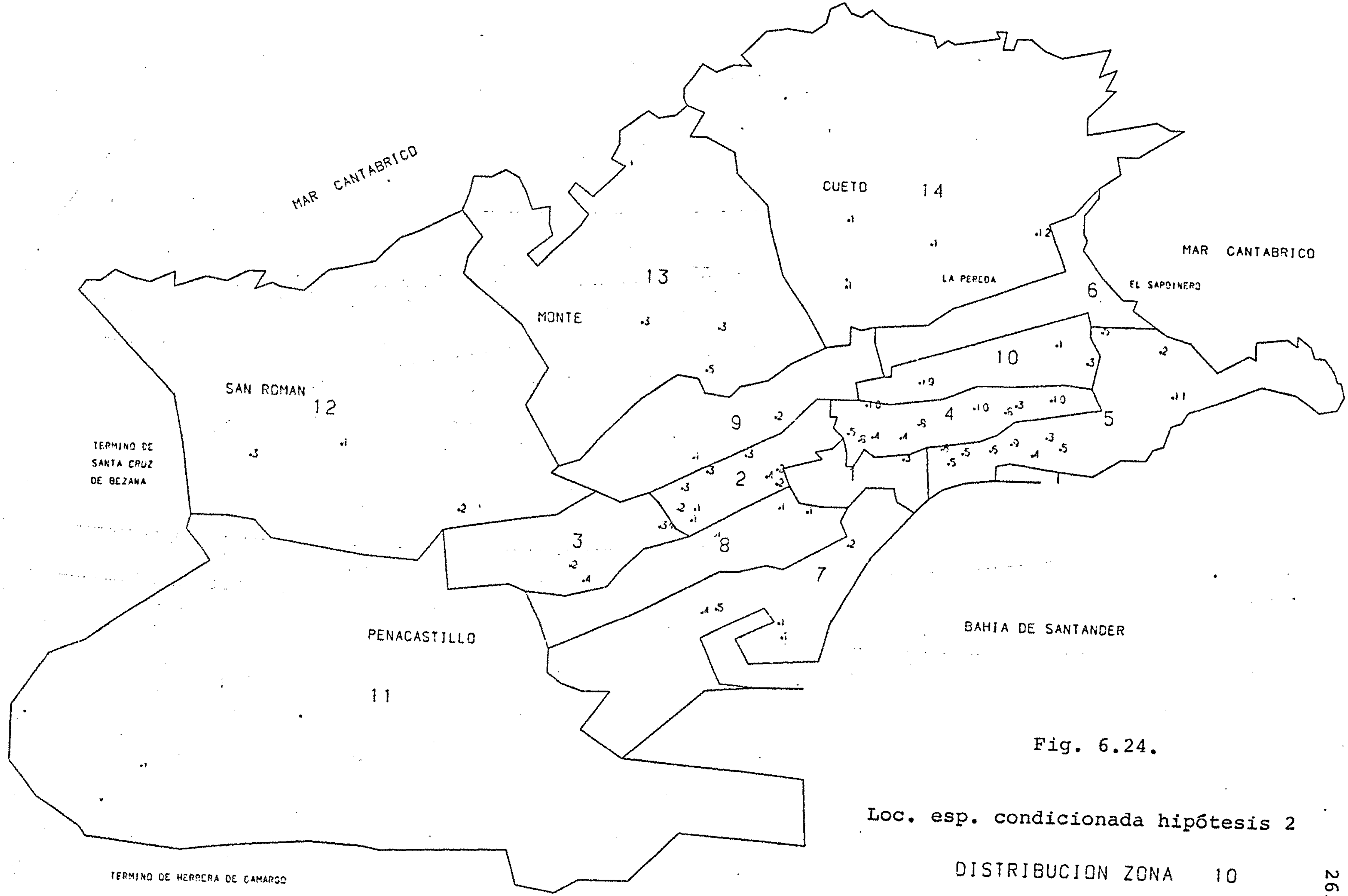

Fig. 6.24.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 10

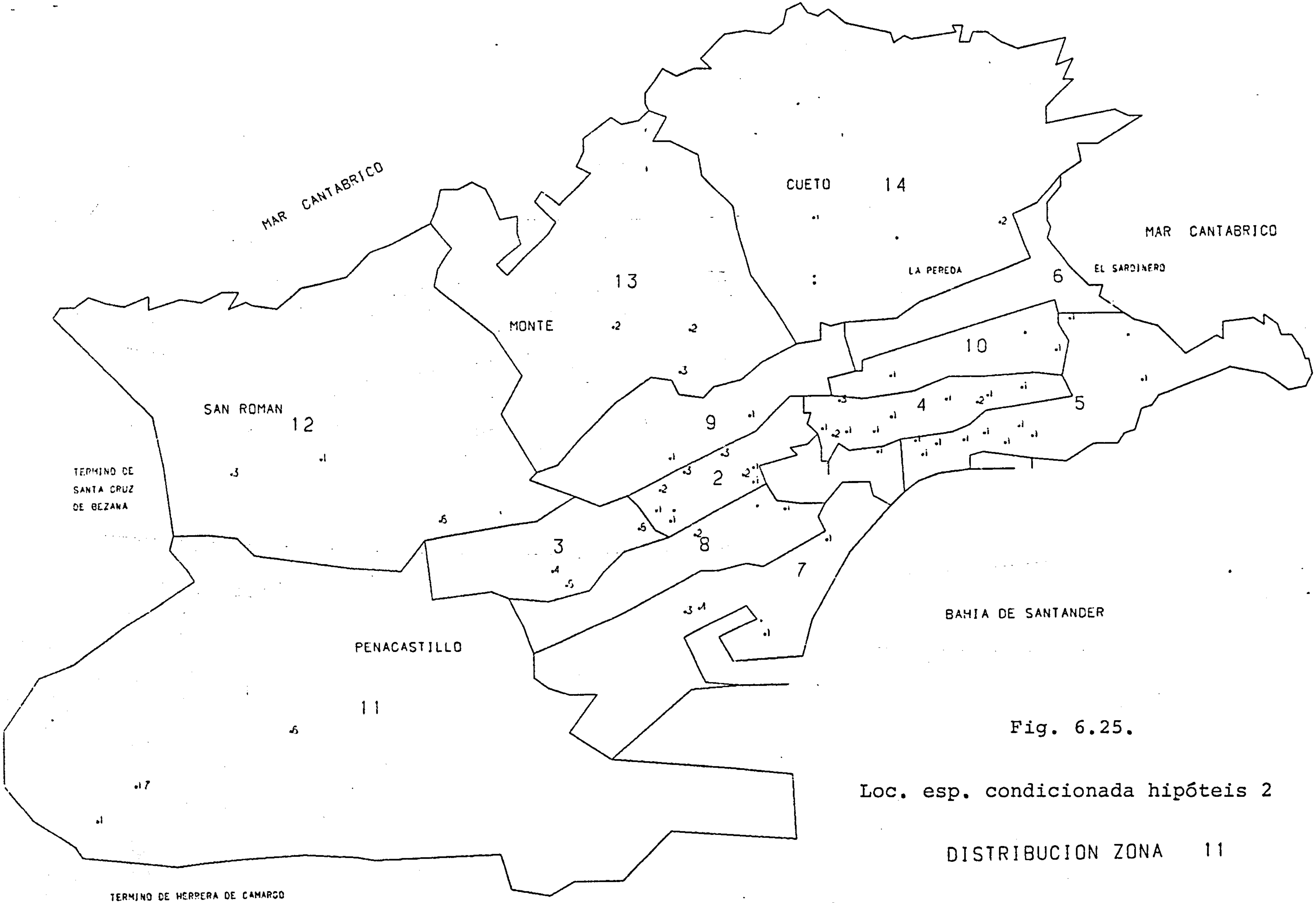

Fig. 6.25.

Loc. esp. condicionada hipóteis 2

DISTRIBUCION ZONA 11

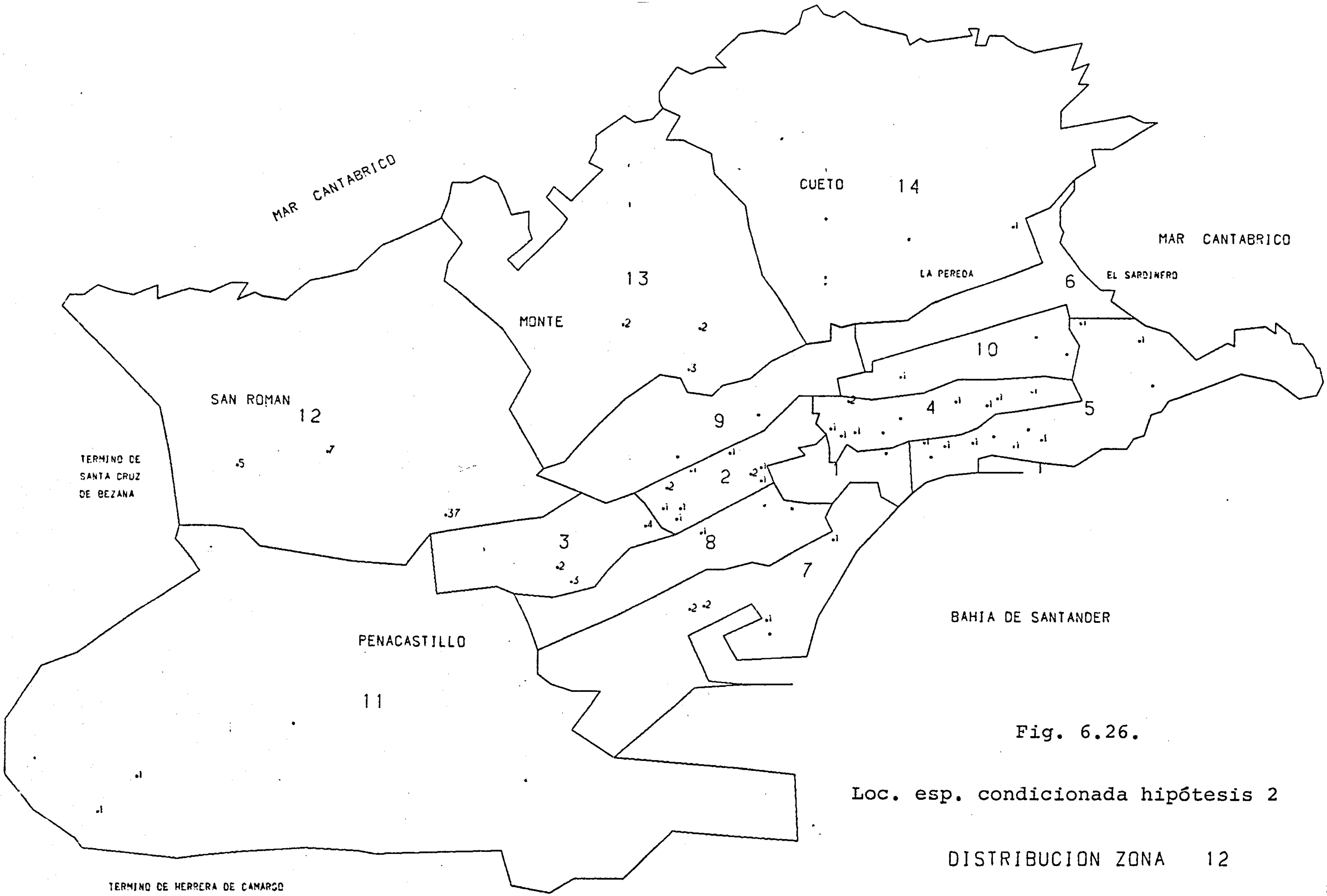

Fig. 6.26.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 12

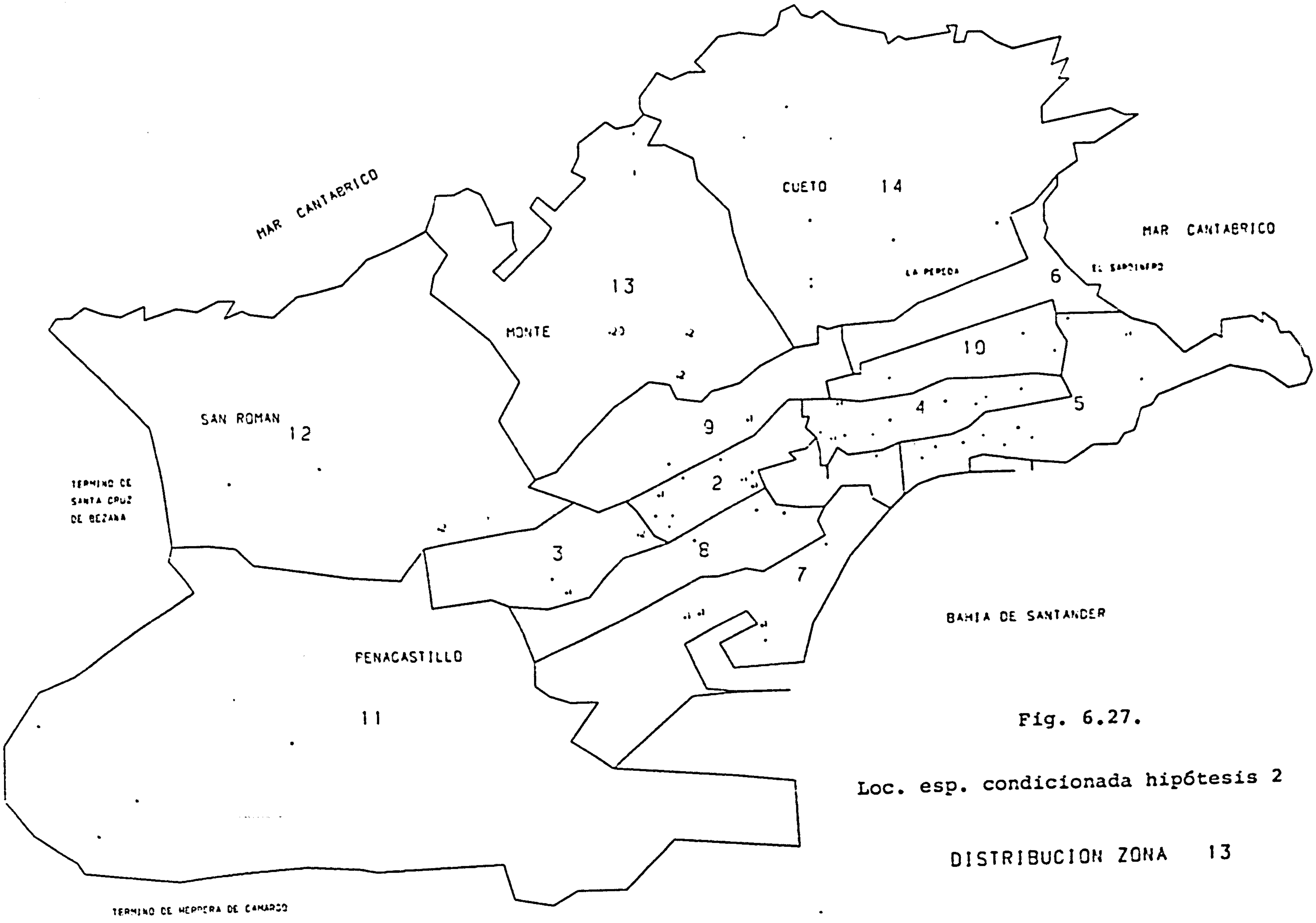

Fig. 6.27.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 13

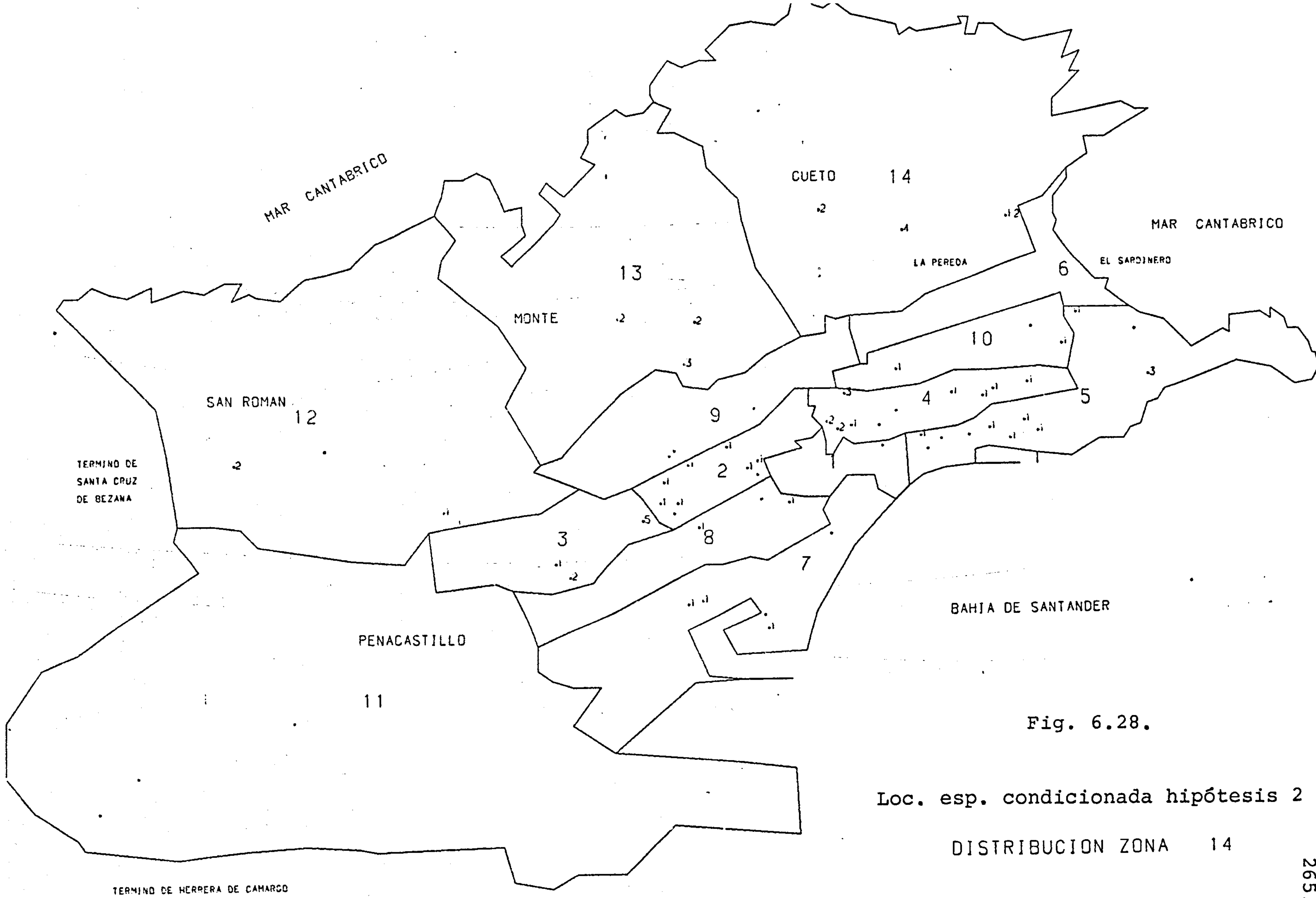

Fig. 6.28.

Loc. esp. condicionada hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 14

6.3. APLICACION DEL MODELO DE LOCALIZACION ESPACIAL CONDICIONADA CON RESTRICCION DE COSTE.

Para este modelo las ecuaciones que lo definen según se vió en el apartado 5.1.3.3. son:

$$T_{ij} = P_{ij}\ A_i\ B_j\ O_i\ D_j\ \exp(-\ \gamma c_{ij})$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j P_{ij}\ B_j\ D_j\ \exp(-\ \gamma c_{ij})}$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i P_{ij}\ A_i\ O_i\ \exp(-\ \gamma c_{ij})}$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij}\ c_{ij} = C$$

que verifican las condiciones

$$\sum_j T_{ij} = O_i$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j$$

$$\sum_j P_{ij} = 1$$

6.3.1.- Hipótesis 1.

En esta hipótesis se considera, al igual que en los modelos anteriores, que la probabilidad de que un escolar-residente en la zona $\underline{i}$ acuda al centro escolar $\underline{j}$, es inver samente proporcional a la distancia correspondiente entre la zona i y el centro j. Los valores de c_{ij} se estiman suponiendo que son proporcionales a las distancias, y el coste total a partir de la distribución T_{ij} obtenida por el modelo de la localización espacial libre.

Los resultados del modelo se han obtenido por medio del programa de cálculo (*) DCRC para la obtención de la matriz T_{ij}, como se muestra en la tabla 6.3.

Otros datos obtenidos por el programa DCRC son:

- La entropía del sistema, cuyo valor obtenido es

$$S = 17.796$$

- La suma total de los valores absolutos de las diferencias entre la muestra de localización espacial real (tabla 3.6) y la del modelo, cuyo valor obtenido es

$$DM = 976$$

valor inferior aunque muy aproximado, al del modelo de localización espacial condicionada en la hipótesis 1.

Del análisis comparativo de los resultados del modelo con la muestra, se comprueba que existen las mismas tendencías expresadas para el modelo de localización espa

(*) Ver anejo de programación

TABLA 6.3.

Loc. esp. condicionada con restr. coste hipótesis 1

NOTA

CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	10	8	3	2	0	8	16	6	3	9	4	1	1
2	4	21	1	3	2	0	5	19	14	3	3	3	1	1
3	2	2	0	12	7	1	4	2	2	7	1	0	0	0
4	5	3	0	35	4	1	5	3	2	7	1	1	0	0
5	3	2	0	9	4	0	4	2	1	6	1	0	0	0
6	8	32	0	4	2	0	8	9	10	2	2	1	1	1
7	9	35	0	4	2	0	8	10	11	3	2	1	1	1
8	3	9	1	3	1	0	6	48	4	1	2	1	1	0
9	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
10	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	3
11	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	4
12	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	3	8	1	3	2	0	4	5	12	3	2	4	11	2
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
16	1	1	0	1	1	0	2	2	1	1	9	7	0	0
17	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	7	1	0	0
18	3	9	3	4	2	0	8	11	6	3	16	10	1	1
19	1	2	0	1	0	0	1	2	1	1	1	8	0	0
20	2	2	0	8	16	1	5	3	2	5	1	0	0	1
21	2	2	0	2	1	0	26	2	1	1	1	0	0	0
22	10	4	0	9	3	0	7	4	3	4	1	1	0	1
23	3	2	0	3	1	0	15	2	1	1	1	1	0	0
24	3	2	0	6	2	0	3	2	1	3	0	0	0	0
25	14	6	0	12	3	0	10	6	4	4	2	1	1	1
26	4	3	0	12	4	0	5	2	2	7	1	0	0	0
27	13	9	0	9	7	1	11	6	6	10	2	2	1	3
28	2	1	0	14	4	1	4	2	1	11	1	0	0	1
29	3	26	1	5	2	0	6	5	21	4	2	2	1	1
30	7	2	0	10	2	0	5	2	2	4	1	0	0	0
31	3	6	1	4	2	0	14	11	4	3	3	2	1	1
32	2	11	1	2	1	0	3	11	5	1	1	1	1	0
33	5	9	0	3	2	0	7	8	4	2	1	1	0	0
34	3	4	0	10	31	4	8	4	3	14	2	1	1	3
35	2	2	0	8	9	1	5	3	2	4	1	0	0	1
36	17	7	0	15	5	0	13	8	6	7	2	1	1	2
37	4	6	1	5	3	0	37	12	5	3	3	2	1	1
38	2	2	0	5	12	1	3	2	1	3	0	0	0	0
39	1	1	0	4	10	5	3	2	2	6	1	0	0	1
40	2	6	7	2	1	0	4	9	4	1	5	2	1	1
41	2	4	1	2	1	0	4	5	3	2	7	20	1	1
42	3	4	0	9	4	1	4	3	4	9	1	1	1	1
43	3	7	0	3	1	0	3	5	5	2	2	3	4	2
44	3	5	0	13	30	15	8	3	5	19	2	2	1	13
45	4	2	0	8	4	1	4	2	1	5	1	0	0	0
46	4	11	1	4	2	0	4	7	8	4	3	4	4	4
47	1	4	0	1	0	0	1	2	4	1	0	0	0	0
48	4	28	1	3	2	0	5	10	15	3	2	2	1	1
49	3	3	0	20	13	1	6	2	2	8	0	1	0	1
50	1	1	0	3	6	1	3	1	1	4	0	0	0	1
51	5	5	0	19	23	2	10	5	4	11	1	1	0	1
52	1	6	0	1	1	0	3	8	3	1	1	1	0	0
53	1	1	0	2	12	1	1	1	1	4	0	0	0	0
54	16	55	0	14	8	1	35	8	8	33	3	5	1	4
55	1	3	0	0	0	0	1	3	1	1	0	0	0	0
56	3	4	0	18	22	2	7	3	3	9	1	1	0	1
57	2	5	1	1	1	0	1	6	3	0	0	1	0	1
58	0	0	1	1	6	1	1	0	0	2	0	1	1	1
59	1	1	1	1	1	1	24	1	1	0	0	1	1	1
60	12	40	1	4	2	1	10	11	12	3	2	2	2	2
61	1	5	1	3	1	1	3	2	7	2	0	0	1	1

cial en la hipótesis 1, con ligeros aumentos en la distribución de escolares entre los centros de su misma zona,

6.3.2.- Hipótesis 2.

Análogamente para este caso se corrigen los valores de P_{ij} considerados en la hipótesis 1, con los de la distribución real de la muestra (tabla 3.6), y por medio de la formula de Asano.

Los resultados del modelo se han obtenido con los programas de cálculo DCRC y PSAN, mostrándose gráficamente en las figuras 6.29 a la 6.42.

El valor obtenido de la entropía para es hipótesis es

$$S = 17.564$$

y la suma de las diferencias con la muestra

$$DM = 539$$

valor netamente inferior al de la hipótesis 1, mejorando sensiblemente los resultados del modelo.

Del análisis comparativo de los resultados del modelo para esta hipótesis con la distribución real de la muestra, se obtienen análogas conclusiones que para el modelo de localización espacial condicionada,con ligeros aumentos en las distribuciones de escolares entre los centros de su misma zona.

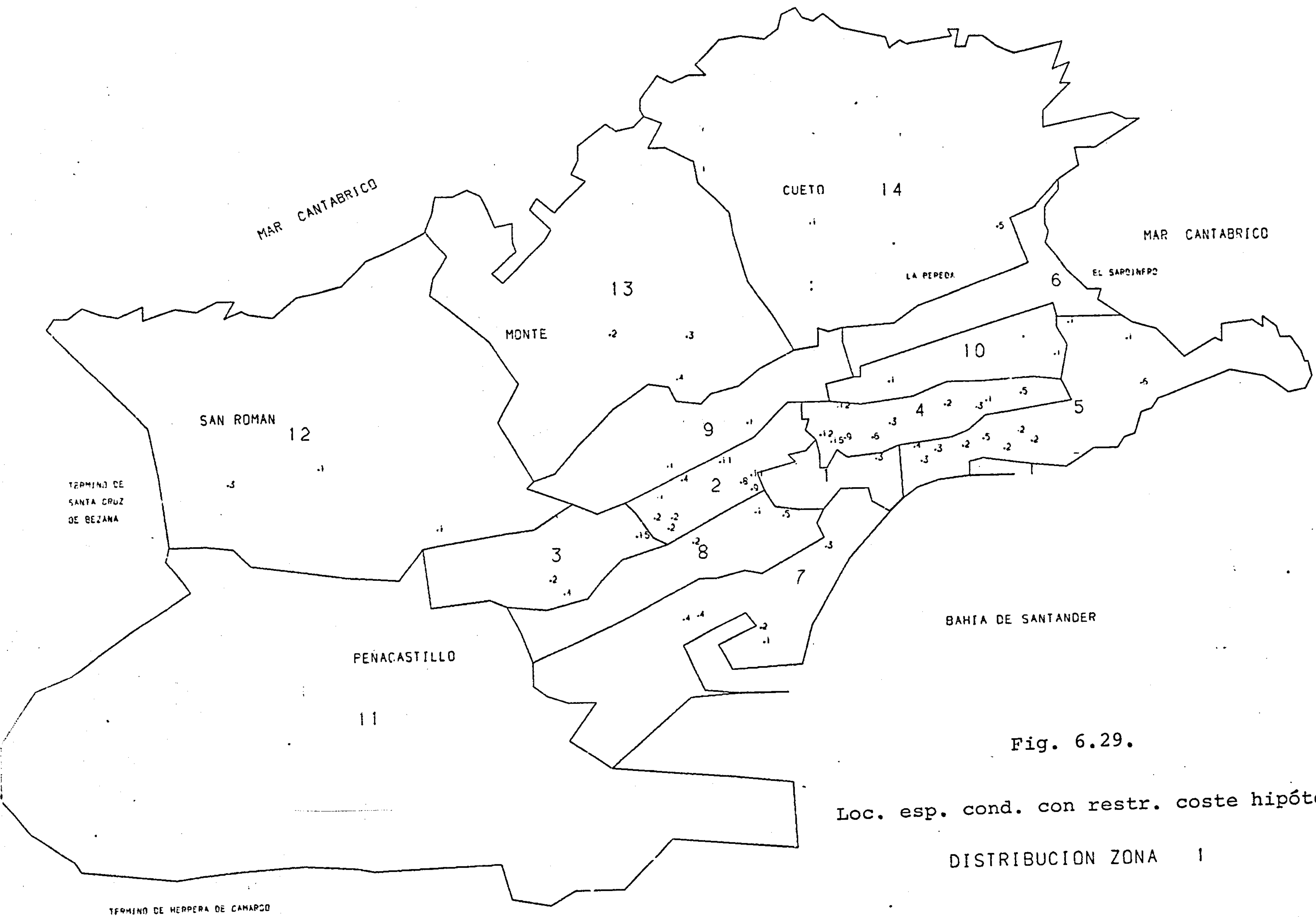

Fig. 6.29.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 1

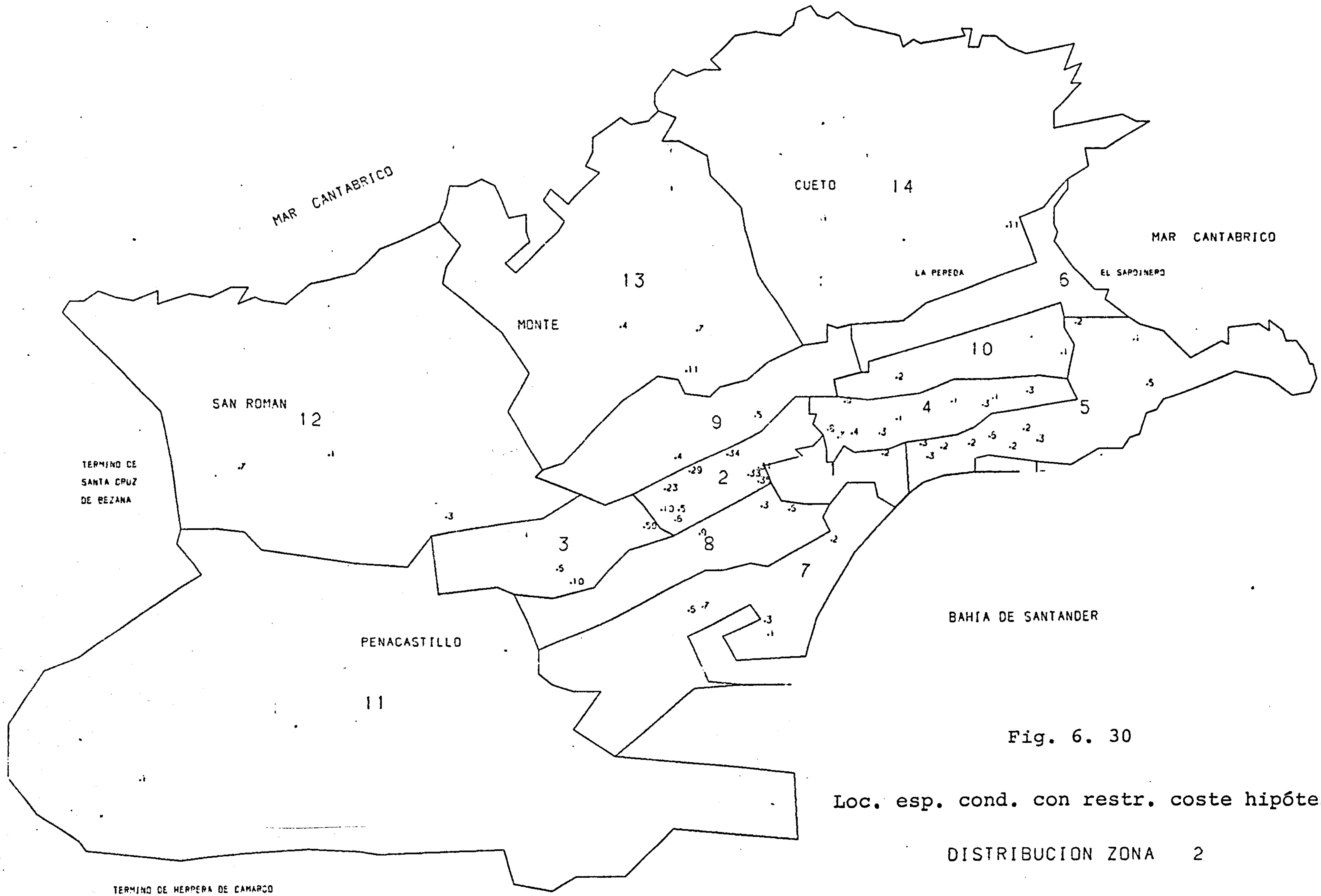

Fig. 6. 30

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 2

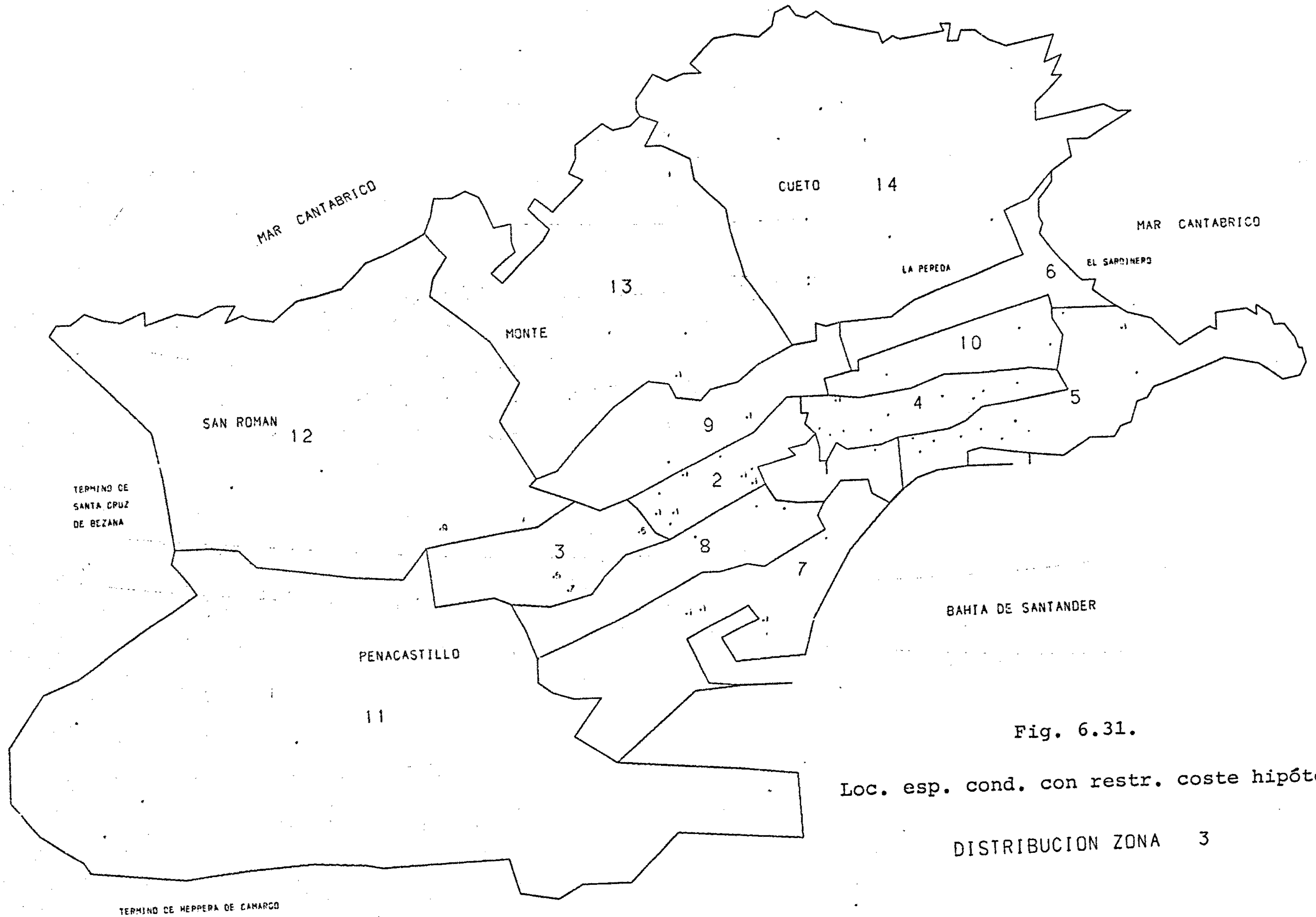

Fig. 6.31.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 3

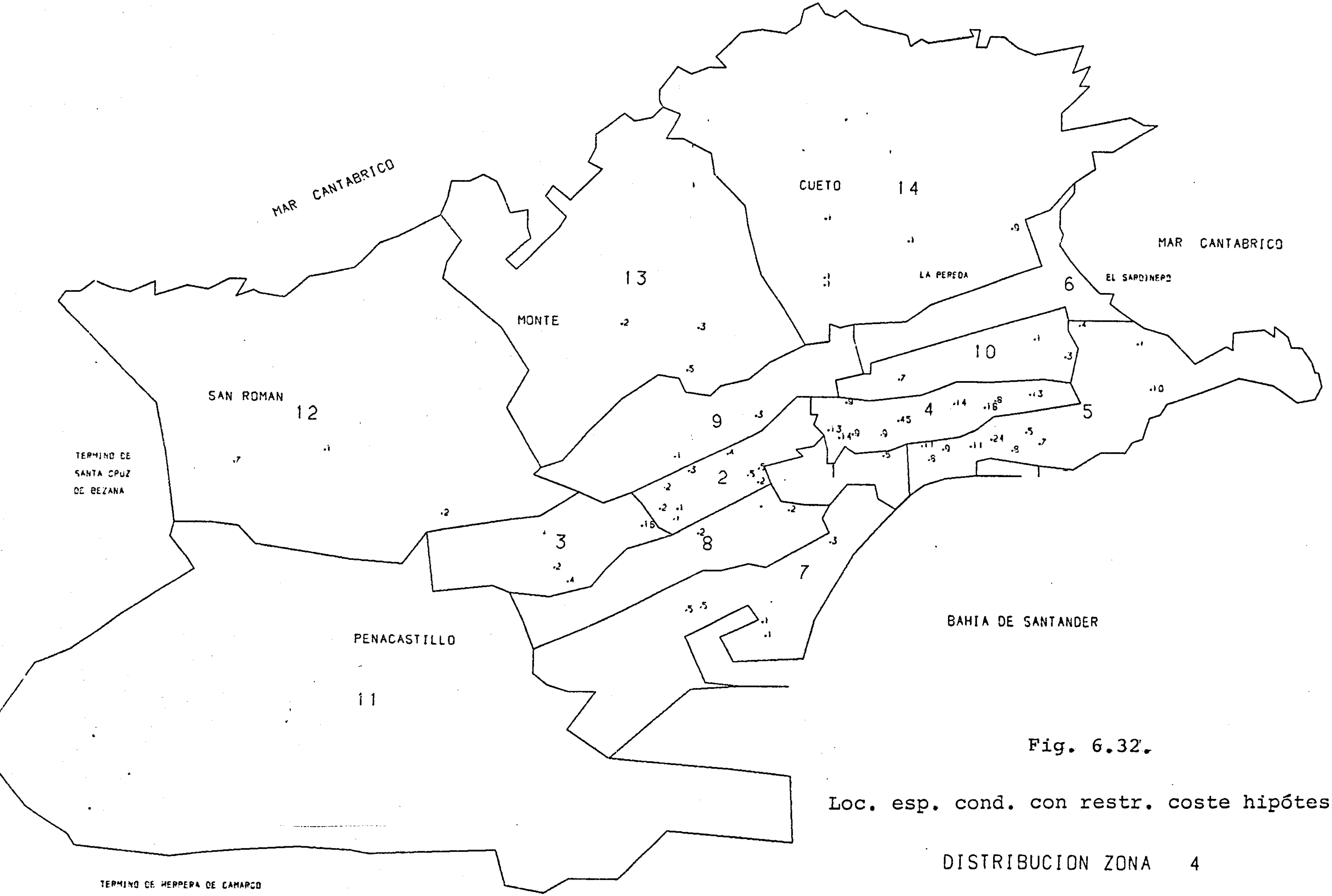

Fig. 6.32.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 4

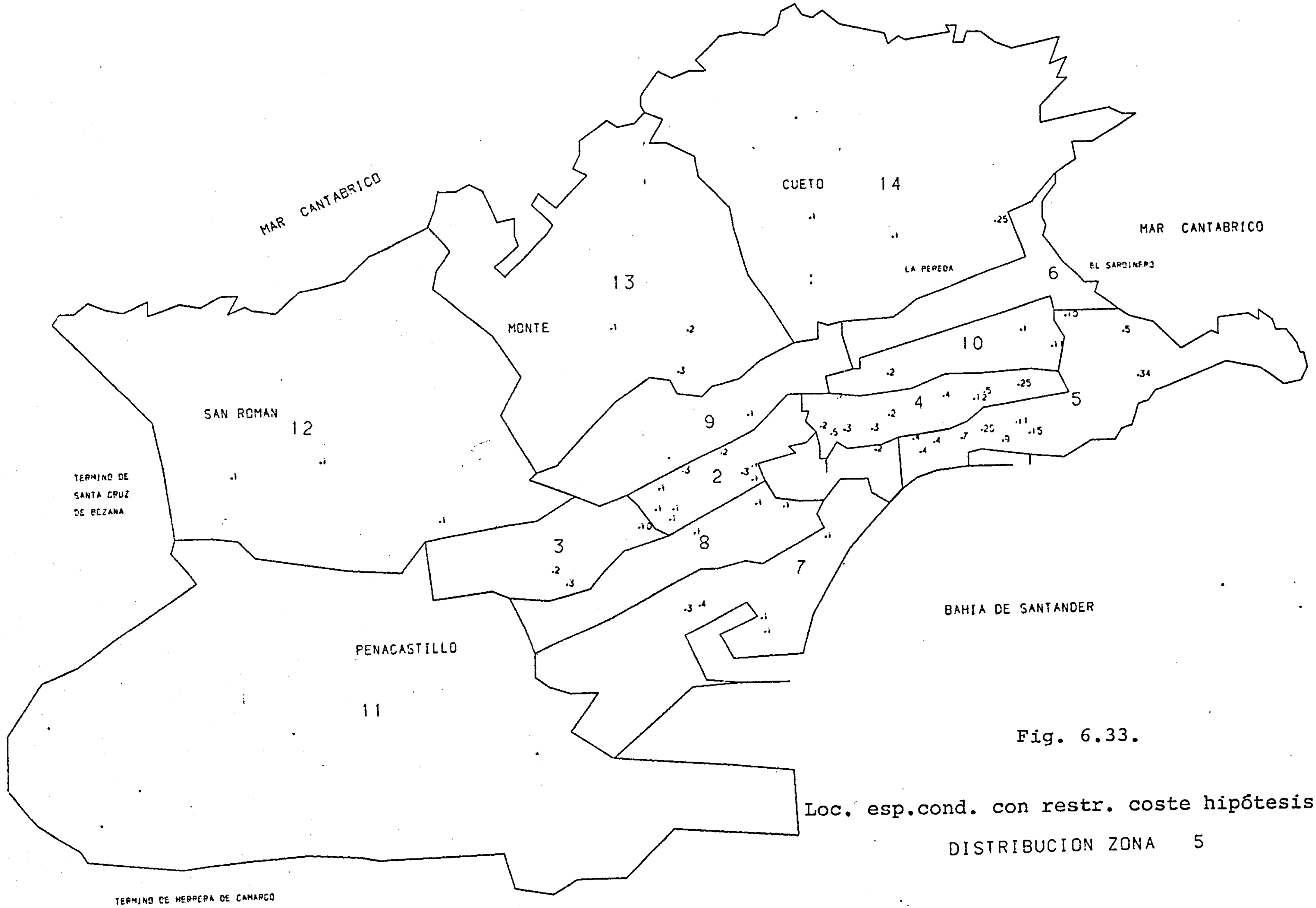

Fig. 6.33.

Loc. esp.cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 5

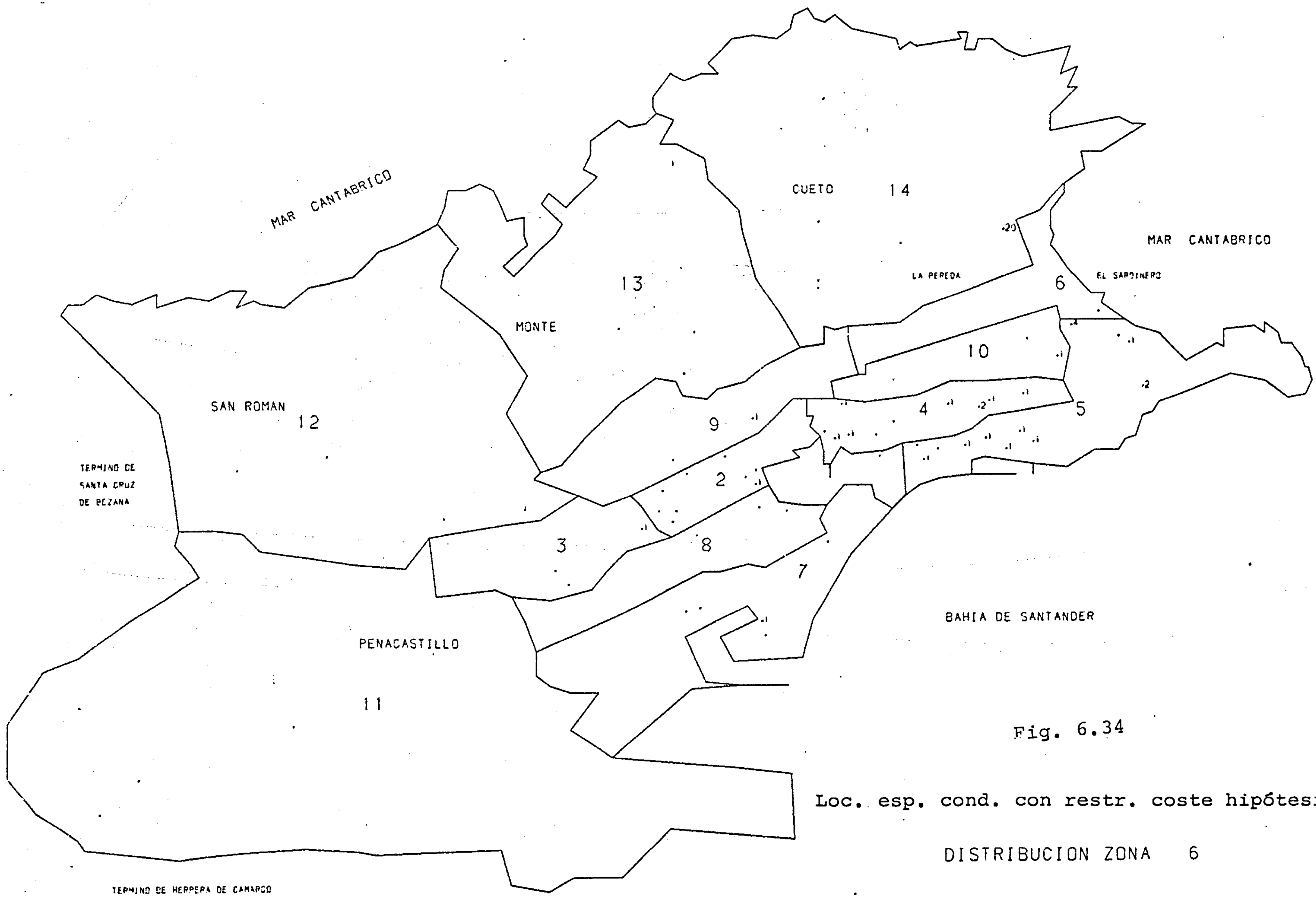

Fig. 6.34

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 6

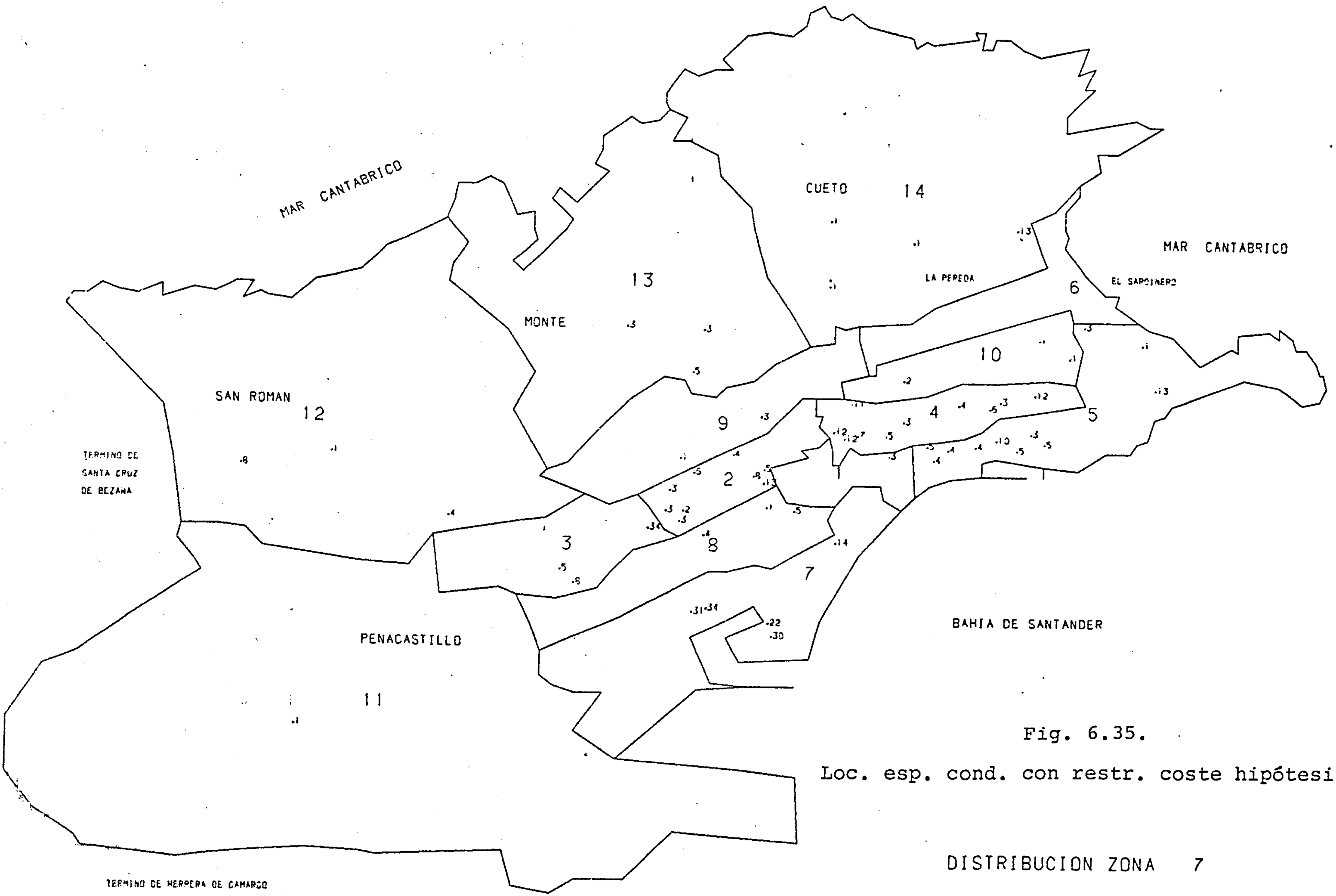

Fig. 6.35.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 7

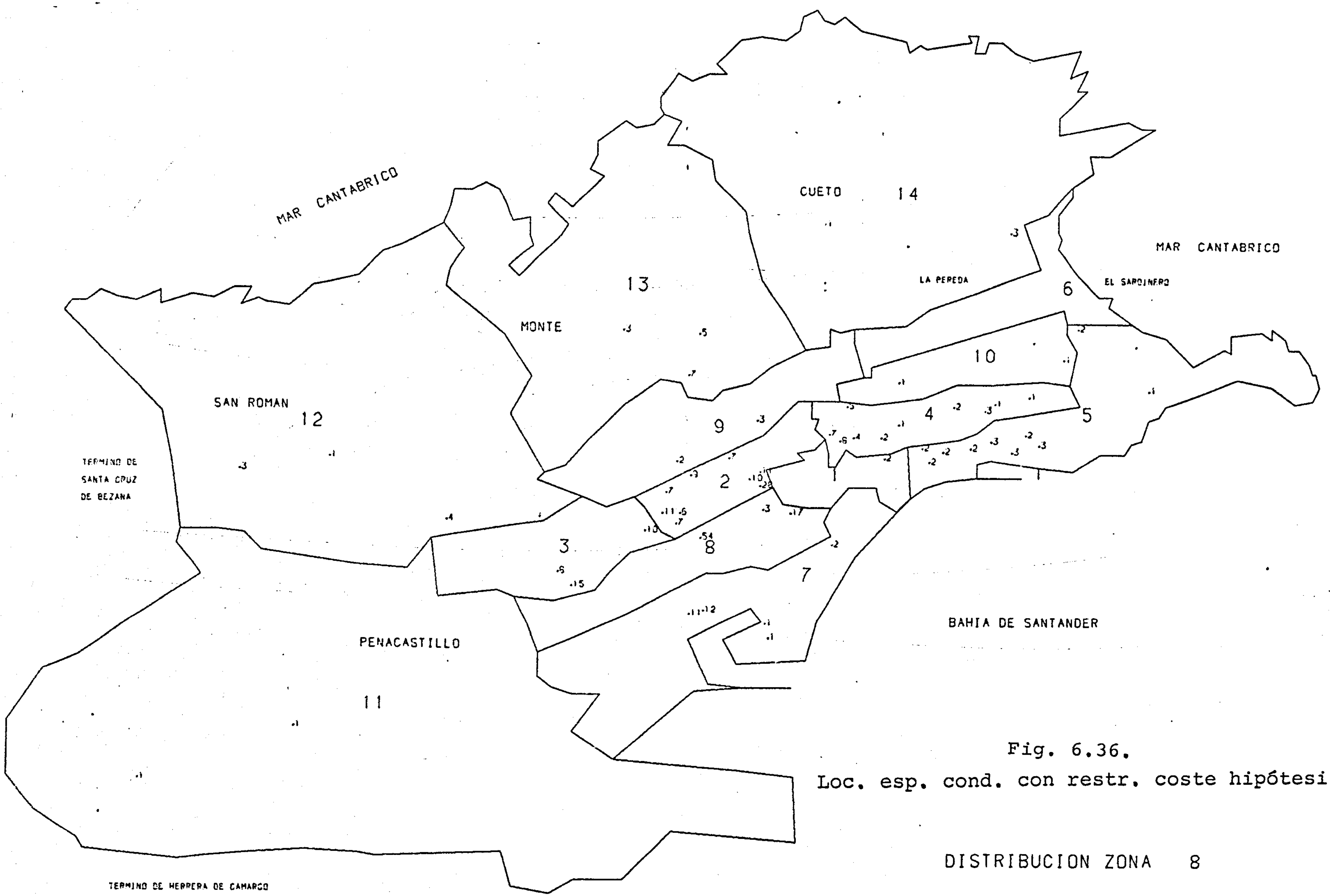

Fig. 6.36.
Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 8

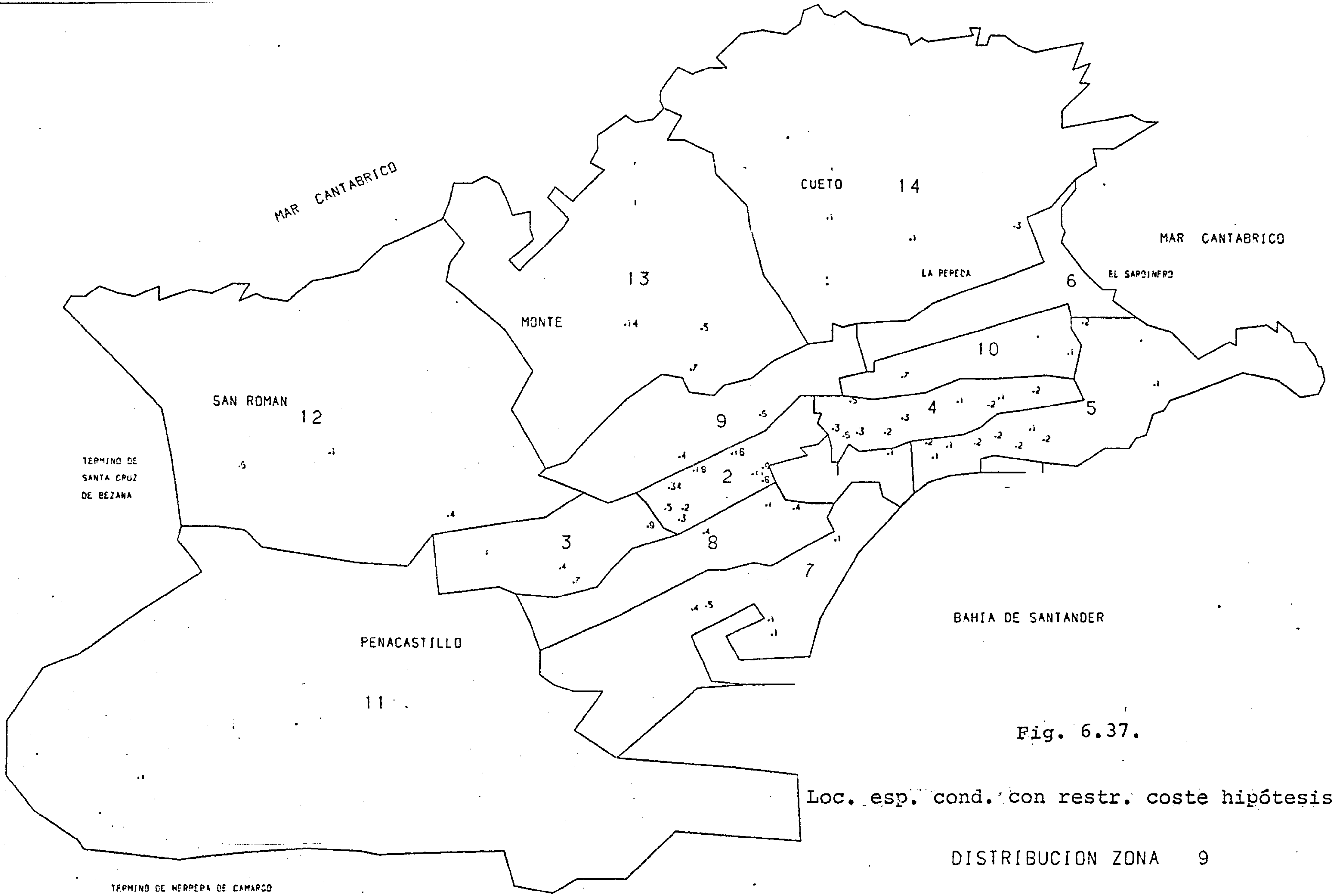

Fig. 6.37.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 9

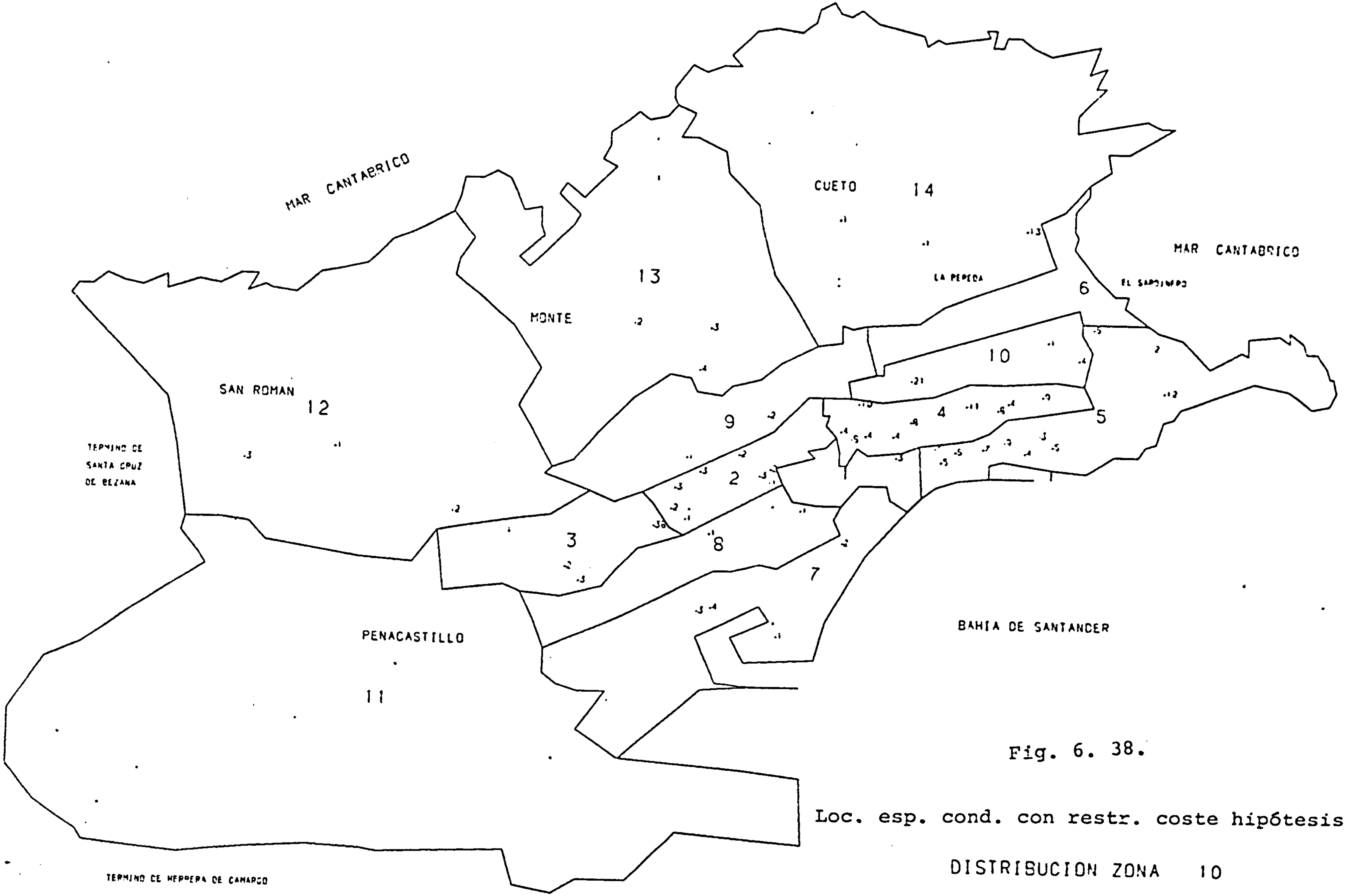

Fig. 6. 38.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 10

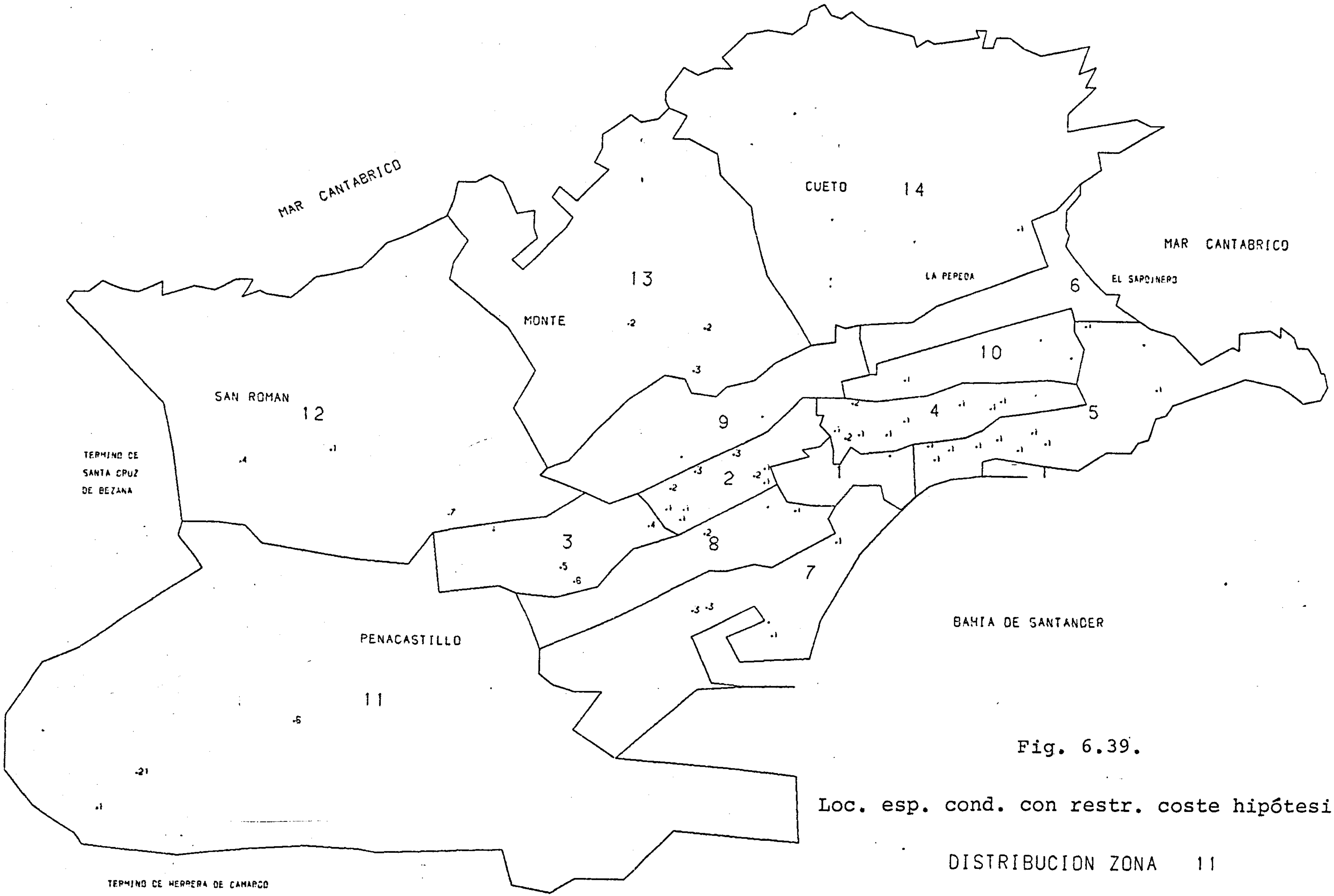

Fig. 6.39.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis

DISTRIBUCION ZONA 11

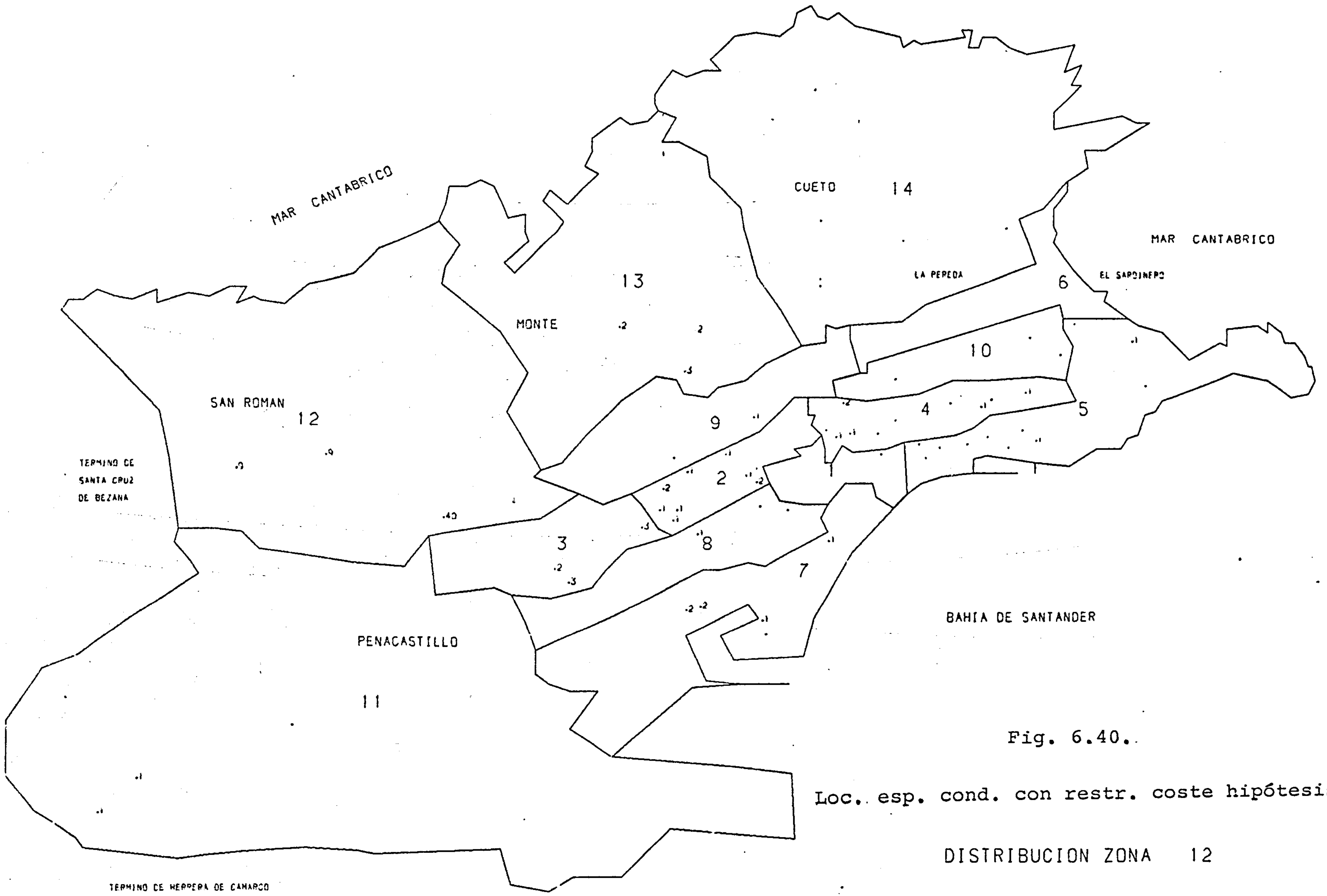

Fig. 6.40.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 12

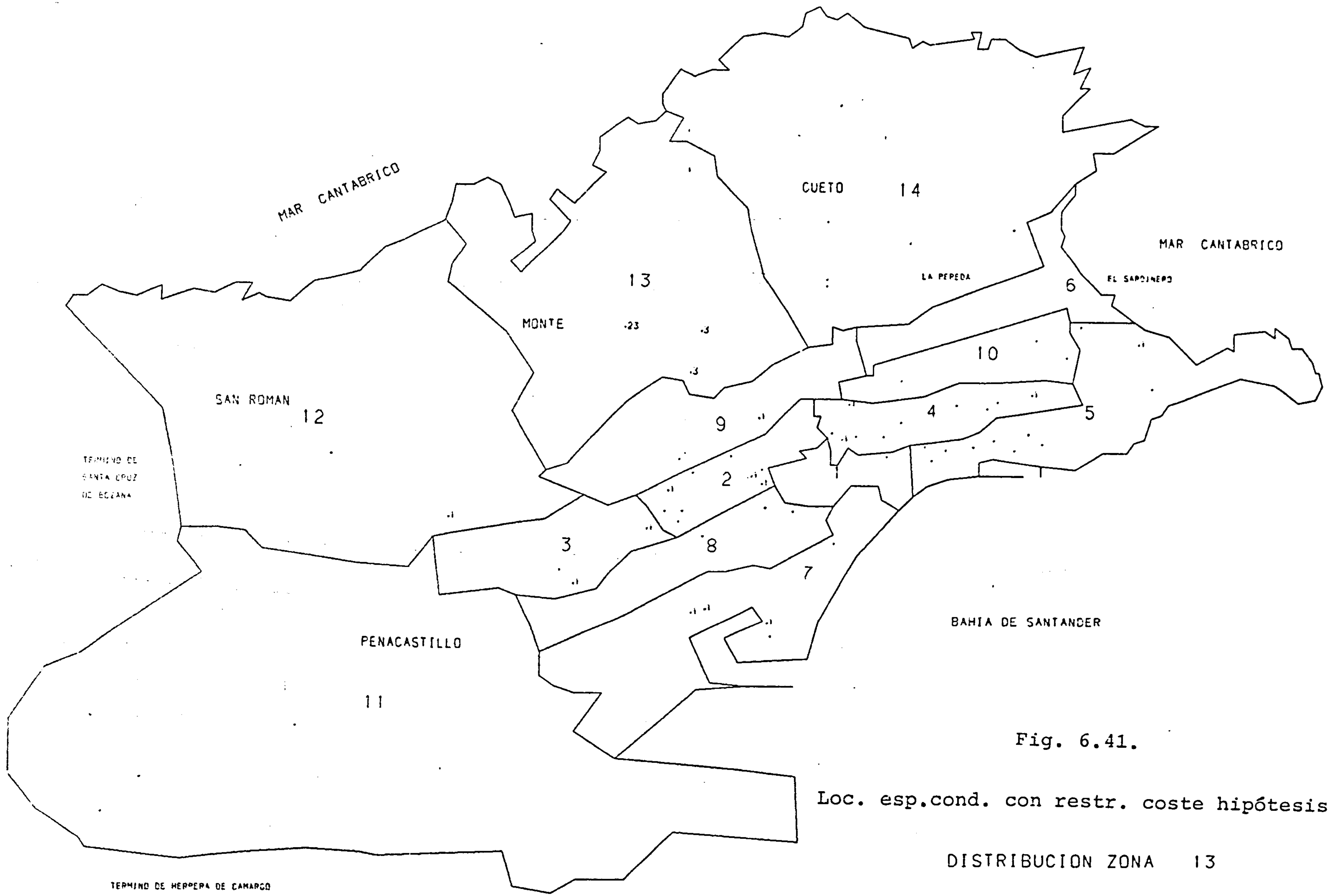

Fig. 6.41.

Loc. esp.cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 13

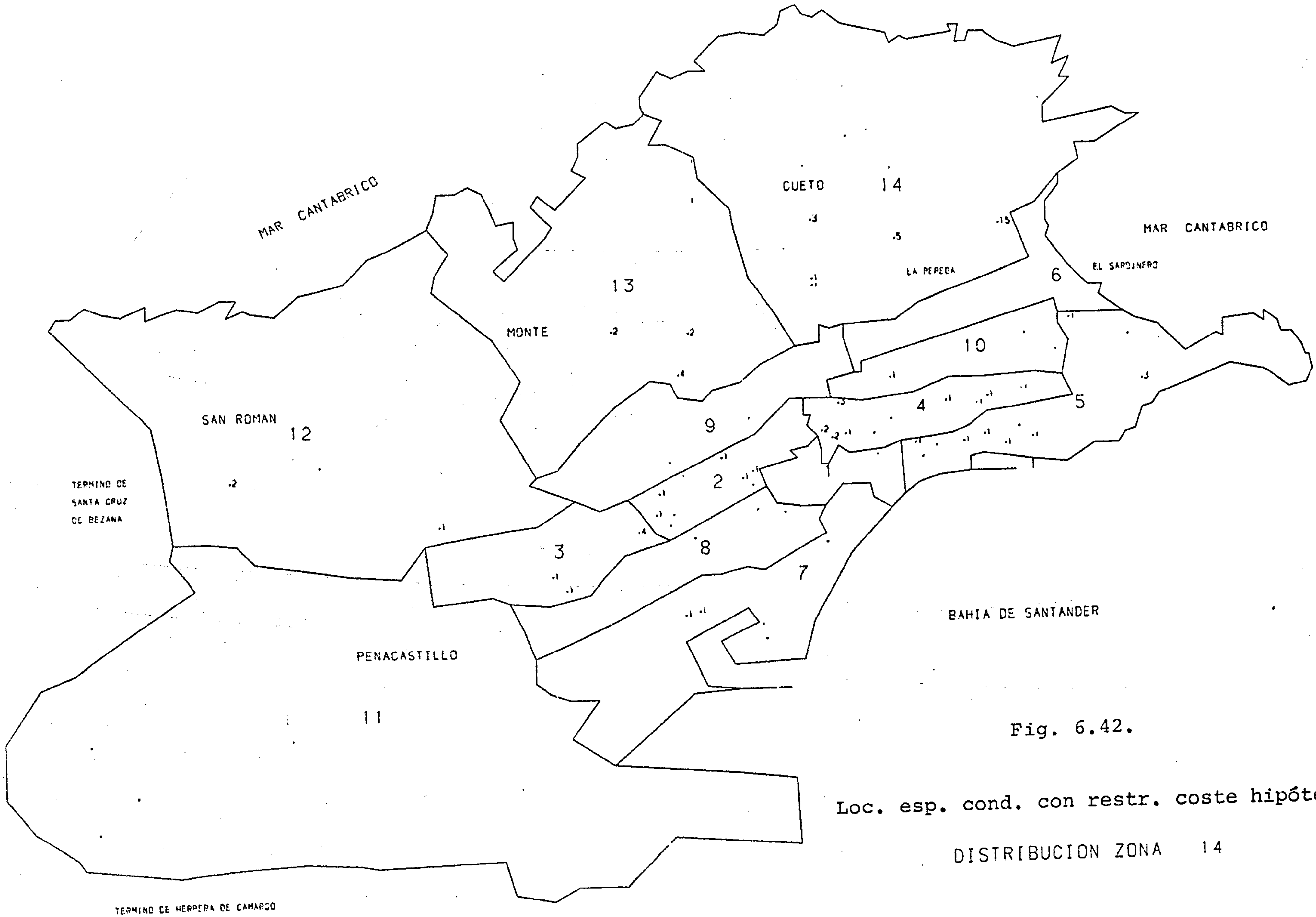

Fig. 6.42.

Loc. esp. cond. con restr. coste hipótesis 2

DISTRIBUCION ZONA 14

6.3.3.- El modelo de Wilson.

Este modelo, como ya se indicó en el apartado 5.1.3.3., es un caso particular del modelo de localización espacial condicionada con restricción de coste, cuando P_{ij} = cte. siendo sus ecuaciones

$$T_{ij} = A_i \, B_j \, O_i \, D_j \exp(-\gamma c_{ij})$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j \, D_j \exp(-\gamma c_{ij})}$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_i A_i \, O_i \exp(-\gamma c_{ij})}$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij} \, c_{ij} = C$$

que verifican las condiciones

$$\sum_j T_{ij} = O_i$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j$$

$$\sum_j P_{ij} = 1$$

Al igual que el modelo de localización espacial condicionada con restricción de coste los valores de c_{ij} se estiman suponiendo que son proporcionales a las distancias, y el coste total a partir de la distribu--

ción T_{ij} obtenida por el modelo de localización espacial libre.

Los resultados del modelo se han obtenido por medio de los programas de cálculo (*) DWILSON para la obtención de la matriz T_{ij}, como se muestra en la tabla 6.4.

El valor obtenido de la entropía para este modelo es

$$S = 17.564$$

y la suma de las diferencias con la muestra

$$DM = 1109$$

Del análisis comparativo de los resultados del modelo con la distribución real de la muestra se obtienen análogas conclusiones a las expresadas para el modelo de localización espacial condicionada, aunque con una ligera disminución en el reparto de los escolares de una zona entre los centros de la misma, y el correspondiente aumento en las zonas mas alejadas.

(*) Ver anejo de programación.

TABLA 6.4.

Loc. esp. según el modelo de Wilson

ZONA

C NT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	4	12	4	5	1	0	9	16	7	2	11	4	1	1
2	5	19	2	4	2	0	5	18	13	3	3	3	1	1
3	3	3	0	9	7	1	5	3	2	0	0	0	0	1
4	7	5	0	18	7	1	9	5	4	9	1	0	0	1
5	3	3	0	7	4	1	5	2	2	5	0	0	0	0
6	6	21	1	6	2	0	11	12	11	3	2	1	1	1
7	9	22	1	7	3	0	12	13	12	3	2	1	1	1
8	6	15	1	5	2	0	10	25	7	2	4	2	1	0
9	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
10	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	3
11	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	5
12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
13	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	3	11	1	3	1	0	3	6	14	2	1	4	9	2
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0
16	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	14	9	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3	1	0	0
18	3	10	4	2	1	0	6	11	3	2	20	10	1	1
19	1	2	0	1	0	0	1	2	1	0	1	9	0	0
20	3	3	0	9	12	1	6	4	2	5	0	0	0	1
21	3	4	0	3	1	0	21	5	1	1	0	0	0	0
22	6	5	0	9	4	0	9	5	4	4	1	0	0	1
23	3	3	0	4	2	0	10	3	1	2	1	0	0	0
24	2	3	0	5	2	0	3	2	2	3	0	0	0	0
25	8	8	0	12	4	0	11	2	4	5	1	1	1	1
26	4	4	0	9	5	1	6	3	2	8	0	0	0	0
27	10	10	1	10	7	1	12	6	6	10	1	1	1	4
28	3	2	0	11	6	1	6	2	2	9	0	0	0	0
29	5	22	1	7	3	0	9	6	16	6	2	2	2	2
30	5	4	0	9	3	0	6	2	2	4	1	0	0	0
31	4	7	1	5	2	0	10	13	5	2	3	1	1	1
32	2	10	1	2	1	0	3	10	6	1	1	2	1	0
33	4	6	0	4	2	0	7	9	5	2	1	1	0	0
34	4	4	0	13	31	5	7	5	3	15	0	0	0	5
35	3	3	0	6	8	1	5	3	2	4	0	0	0	1
36	10	9	0	15	6	1	14	9	7	6	1	1	1	2
37	5	8	1	6	2	0	13	14	5	2	3	2	1	1
38	2	2	0	5	9	1	3	2	1	4	0	0	0	1
39	1	1	0	6	11	3	2	1	2	7	0	0	0	2
40	2	6	3	2	1	0	5	10	4	1	0	2	1	0
41	1	4	1	2	0	0	2	4	2	1	7	29	1	0
42	3	5	0	10	5	1	4	3	4	3	1	0	0	1
43	3	8	1	3	1	0	2	5	5	2	1	2	4	3
44	2	4	0	15	37	15	5	1	4	21	0	0	0	16
45	3	5	0	7	4	1	5	2	2	5	0	0	0	0
46	5	13	1	4	2	0	5	8	8	3	1	4	4	4
47	1	4	0	1	0	0	1	2	3	1	0	1	0	0
48	5	22	2	5	2	0	5	15	15	3	2	2	2	1
49	3	4	0	17	13	2	7	2	2	8	1	0	0	1
50	1	2	0	9	6	1	3	1	1	4	0	0	0	0
51	6	7	0	19	20	2	10	6	4	11	1	0	0	1
52	2	6	1	1	1	0	3	6	3	1	1	1	0	0
53	1	0	0	4	9	1	2	1	1	5	0	0	0	0
54	14	[illegible]	6	10	6	0	16	5	7	[illegible]	1	1	1	3
55	1	2	0	0	1	0	1	3	1	0	1	0	0	0
56	4	4	0	19	20	3	7	3	3	9	1	0	0	1
57	2	5	1	1	1	0	2	5	2	0	1	1	1	0
58	1	0	0	2	5	1	1	0	0	2	1	1	1	1
59	3	3	1	2	1	0	18	2	1	0	1	1	1	1
60	11	26	1	7	3	1	14	14	14	4	3	2	2	1
61	2	6	1	4	1	1	5	3	5	2	0	0	1	0

6.4. ANALISIS COMPARATIVO

Según se expresó en el apartado 5.1.3.5., la matriz diferencia $\Delta T_s = T^1 - T$ sirve para dar una medida de la libertad de elección de la población escolar, siendo T^1 la matriz de localización espacial libre y T la correspondiente al modelo e hipótesis que se considere.

En las siguientes tablas 6.5 a la 6.9. se muestran las matrices diferencias ΔT_s correspondientes a:

- Modelo de localización espacial condicionada, hipótesis 1 y 2 (DC1 y DC2).
- Modelo de localización espacial condicionada con restricción de coste, hipótesis 1 y 2 (DCRC1 y DCRC2).
- Modelo de Wilson. (DWILSON).

Como norma matricial de la libertad de elección se considera:

$$\|\Delta T_s\| = \sum_{ij} |T^1_{ij} - T_{ij}|$$

obteniéndose para los distintos modelos e hipótesis los resultados de la tabla 6.10. así como para la muestra de la distribución real (tabla 3.6).

Análogamente se puede obtener la norma matricial D obtenida considerando la suma de los valores absolutos de-

TABLA 6.5.

Diferencia entre loc. esp. libre y DC1

	ZONAS														
CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	TOTAL
1	-2	-4	0	-3	-2	-1	-4	-6	-3	-3	-3	-2	0	0	-33
2	-1	-4	1	-1	-1	-1	-2	-5	-4	-1	-1	-1	0	0	-21
3	2	1	0	4	4	0	3	1	1	4	0	0	1	0	21
4	1	2	0	5	2	0	1	0	1	2	0	0	1	0	15
5	2	3	0	6	3	1	3	2	1	5	0	0	1	1	28
6	-1	-1	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-3
7	-1	-4	0	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-10
8	0	1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1
9	1	3	0	4	8	1	2	2	2	6	1	1	0	1	32
10	1	2	0	1	1	0	3	1	1	2	0	1	1	3	17
11	1	2	0	2	2	1	2	1	1	2	1	1	1	5	22
12	2	4	0	3	3	1	3	3	3	3	1	1	1	3	31
13	2	4	0	3	3	1	3	3	3	4	1	1	1	3	32
14	-1	-3	-1	-2	-1	-1	-2	-3	-5	-2	-1	-1	-4	-1	-28
15	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	4	2	0	0	14
16	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	-1	-1	1	-1	0	-1	-6
17	1	1	0	0	1	0	2	1	0	1	8	1	0	0	16
18	-3	-5	-1	-3	-3	-1	-7	-7	-5	-3	-6	-2	-1	-2	-49
19	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	3	1	0	10
20	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
21	1	1	0	1	1	0	9	1	1	1	0	0	0	0	16
22	3	2	0	1	1	0	2	1	1	2	1	0	0	0	14
23	3	4	0	4	2	1	17	3	3	2	1	1	1	1	43
24	4	4	0	9	3	1	5	3	2	5	1	1	1	1	40
25	-2	0	1	-2	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	-5
26	2	3	0	4	3	1	2	1	1	4	0	0	1	0	22
27	-5	-3	-1	-4	-3	0	-5	-3	-2	-4	-1	-1	0	-1	-33
28	2	1	0	5	3	1	3	1	0	6	0	0	1	0	23
29	-1	-2	0	-1	0	0	-1	-1	-4	-1	0	0	0	0	-11
30	4	3	0	5	2	1	4	2	1	3	1	0	1	1	28
31	-2	-3	0	-2	-2	-1	-12	-4	-2	-2	-1	0	0	0	-31
32	1	5	1	1	1	0	1	4	2	1	1	1	0	0	19
33	2	6	1	2	1	1	3	7	2	1	1	1	1	0	29
34	-3	-4	0	-7	-15	-1	-6	-4	-2	-7	-2	-1	-1	-2	-55
35	1	1	0	1	2	0	1	1	0	1	0	0	0	0	8
36	-4	-2	0	-5	-2	0	-3	-2	-2	-1	0	-1	0	-1	-23
37	-2	-4	0	-3	-2	-1	-15	-5	-2	-2	-2	-1	0	0	-39
38	1	2	0	2	8	0	2	1	1	2	0	1	0	0	20
39	-1	0	0	0	0	3	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0
40	0	0	3	-1	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	-2
41	-1	-3	-1	-3	-2	-1	-4	-4	-3	-3	-3	-5	0	-1	-34
42	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-3
43	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-2	-1	-1	0	0	-1	-1	-11
44	-4	-7	-1	-10	-18	-5	-9	-5	-5	-12	-3	-5	-2	-6	[illegible]
45	3	3	0	5	3	1	4	2	1	5	0	0	1	1	29
46	-2	-4	0	-2	-1	-1	-3	-3	-3	-1	-1	-1	-1	-1	-24
47	2	12	1	2	1	0	4	5	10	2	2	1	1	1	44
48	-1	-3	0	-2	0	0	-1	-2	-2	-1	0	0	0	0	-12
49	-1	-1	0	-4	-2	0	-2	-1	-1	-1	-1	0	-1	0	-15
50	1	1	0	5	4	0	2	1	1	3	0	0	0	0	18
51	-2	-3	0	-8	-9	-1	-4	-3	-1	-4	-1	-1	-1	0	-38
52	1	7	5	1	1	0	3	9	3	2	1	1	1	1	36
53	1	2	0	2	10	2	3	1	1	4	0	0	0	1	27
54	-12	-37	-4	-14	-10	-2	-26	-10	-8	-25	-5	-4	-2	-4	-164
55	5	13	1	3	2	0	6	11	3	2	2	2	1	1	52
56	-2	-2	0	-7	-7	-1	-2	-2	-1	-3	-1	-1	-1	-1	-31
57	1	8	1	1	1	0	4	7	4	2	2	2	1	0	34
58	1	0	0	2	3	0	2	1	2	1	1	1	-1	0	13
59	2	1	0	1	1	0	11	0	2	0	1	1	-1	0	19
60	-2	-9	0	-1	-1	0	-2	-3	-2	-1	0	0	-1	-1	-23
61	2	5	0	3	2	1	3	2	0	2	1	2	0	0	23

TABLA 6.6.

Diferencia entre loc. esp. libre y DC2

ZONAS

CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	TOTAL
1	-2	-4	0	-3	-2	-1	-4	-6	-3	-3	-3	-1	0	-1	-33
2	2	-8	2	1	1	0	1	4	-24	0	0	0	0	0	-21
3	2	1	0	4	3	0	3	1	1	4	0	0	1	1	21
4	3	3	0	-7	4	1	4	2	1	1	0	1	1	1	15
5	2	3	0	5	3	1	3	2	1	5	0	0	1	1	28
6	-4	-5	1	-1	1	0	3	-3	1	1	1	1	1	0	-3
7	-1	-3	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-10
8	2	0	0	1	1	0	2	-11	1	1	0	1	1	0	-1
9	1	3	0	4	8	1	2	2	2	6	1	1	0	1	32
10	1	2	0	1	1	0	3	1	1	2	0	1	1	3	17
11	2	2	0	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	3	22
12	2	4	0	3	3	1	3	3	3	3	1	1	1	3	31
13	2	4	0	3	3	1	3	3	3	4	1	1	1	3	32
14	0	1	0	-1	0	0	-1	0	-8	-1	0	0	-17	-1	-28
15	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	4	2	0	0	14
16	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	-11	2	0	0	-6
17	1	1	0	1	1	0	2	1	0	1	6	2	0	0	16
18	0	0	-7	-1	-1	0	-2	-1	-1	0	-2	-32	-1	-1	-49
19	0	2	1	1	0	0	1	2	0	1	0	1	1	0	10
20	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
21	2	2	0	2	2	0	2	2	2	1	0	1	0	0	16
22	3	2	0	1	0	0	2	1	1	2	1	0	1	0	14
23	3	4	0	4	2	1	17	3	3	2	1	1	1	1	43
24	5	4	0	8	3	1	5	3	3	4	1	1	1	1	40
25	-1	-3	1	-3	2	1	-2	-1	1	-1	1	0	1	-1	-5
26	2	3	0	4	3	1	2	1	1	4	0	0	1	0	22
27	-4	-3	-1	-4	-4	0	-5	-3	-2	-4	-1	-1	0	-1	-33
28	2	1	0	5	3	0	3	1	1	6	0	0	1	0	23
29	-8	-11	1	0	1	1	1	-2	4	1	-1	1	1	0	-11
30	4	3	0	5	2	1	4	2	1	2	1	1	1	1	28
31	-2	-3	0	-3	-2	-1	-11	-4	-2	-2	-1	0	0	0	-31
32	1	5	1	1	1	0	1	3	2	1	1	1	1	0	19
33	2	9	1	3	2	1	5	-2	2	2	1	2	1	0	29
34	-6	-4	0	-7	-21	0	-11	1	0	-6	0	1	0	-2	-55
35	1	1	0	1	2	0	1	1	0	1	0	0	0	0	8
36	-4	-2	0	-5	-2	0	-3	-2	-2	-2	0	0	0	-1	-23
37	-2	-4	0	-3	-3	-1	-14	-5	-2	-3	-2	0	0	0	-39
38	1	2	0	2	8	0	2	1	1	2	0	1	0	0	20
39	-1	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	2	-1	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	1	-1	-2
41	-3	-5	0	-8	-1	0	-7	-1	-5	-2	-1	0	1	-2	-34
42	2	1	0	0	2	1	2	2	-5	-11	0	0	1	0	-3
43	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-1	0	0	0	-1	-11
44	-7	-11	-1	-6	-17	-11	-13	-3	-2	-8	-1	0	0	-10	-90
45	3	3	0	5	3	1	4	2	1	4	0	1	1	1	29
46	-2	-4	0	-2	-2	-1	-2	-3	-3	-2	-1	-1	0	-1	-24
47	2	12	1	2	1	0	4	5	10	2	1	2	1	1	44
48	-1	-5	0	0	-2	1	-2	0	-4	0	-1	1	1	0	-12
49	-1	-1	0	-4	-2	0	-2	-1	-1	-2	-1	0	0	0	-15
50	1	1	0	5	4	0	2	1	1	3	0	0	0	0	18
51	-3	-3	-1	-14	-12	0	-4	0	1	-3	0	1	0	0	-38
52	1	8	5	1	1	0	3	8	3	2	1	1	1	1	36
53	1	2	0	2	10	2	3	1	1	4	0	1	0	0	27
54	-12	-36	-5	-14	-10	-2	-25	-10	-3	-28	-5	-3	-2	-4	-154
55	5	13	1	3	2	0	5	11	3	2	2	2	1	1	52
56	-3	0	0	-4	-11	0	-8	0	0	-5	0	0	0	0	-31
57	1	9	0	2	1	0	4	7	4	2	2	1	1	0	34
58	0	1	0	2	3	0	2	1	1	2	1	0	-1	1	13
59	2	2	-1	1	1	-1	11	0	2	1	1	0	-1	1	19
60	0	-5	0	2	2	-1	-5	-21	2	1	1	1	0	1	-22
61	2	5	0	3	1	1	3	2	5	2	1	2	-1	1	27

TABLA 6.7.

Diferencia entre loc. esp. libre y DCRC1

	ZONAS														
CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	TOTAL
1	-1	-4	-2	-1	0	0	-3	-9	-3	-2	-6	-2	0	0	-33
2	-1	-6	1	0	0	0	0	-3	-5	0	-1	-1	0	0	-21
3	2	2	0	2	3	0	3	2	1	3	0	1	1	1	21
4	1	2	0	1	2	0	2	1	2	2	0	0	1	1	15
5	2	3	0	5	3	1	3	2	2	4	0	1	1	1	28
6	-1	-4	1	0	1	0	0	-1	-1	1	0	1	0	0	-3
7	-2	-7	1	0	1	0	0	-2	-2	0	0	1	0	0	-10
8	1	1	0	0	1	0	0	-3	1	1	0	1	0	1	-1
9	1	3	0	4	3	1	2	2	2	6	1	1	0	1	32
10	1	2	0	1	1	0	3	1	1	2	1	1	1	2	17
11	2	2	0	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	3	22
12	2	4	0	3	3	1	3	3	3	4	1	1	1	2	31
13	2	4	0	3	3	1	4	3	3	4	1	1	1	2	32
14	-1	-3	-1	-1	0	0	-1	-2	-7	-1	0	-2	-3	-1	-28
15	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	4	2	0	0	14
16	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	-4	0	0	-6
17	1	2	0	1	1	0	2	1	1	1	5	1	0	0	16
18	-2	-5	-2	-2	-1	0	-5	-8	-5	-1	-12	-5	0	-1	-49
19	0	1	1	1	1	0	2	1	1	1	0	0	1	0	10
20	1	1	0	-1	-3	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
21	1	2	0	1	2	0	4	1	2	1	0	1	0	1	16
22	1	2	0	1	1	1	2	1	1	2	1	0	1	0	14
23	3	4	0	4	3	1	15	3	3	3	1	1	1	1	43
24	4	4	0	8	3	1	5	3	3	4	2	1	1	1	40
25	-4	0	1	-3	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-5
26	2	3	0	2	3	1	2	2	1	3	0	1	1	1	22
27	-7	-3	0	-4	-3	0	-5	-3	-2	-4	0	-1	0	-1	-33
28	2	2	0	4	3	0	3	1	1	5	0	1	1	0	23
29	0	-4	0	-1	1	1	0	0	-8	0	0	0	0	0	-11
30	3	4	0	4	3	1	4	2	1	2	1	1	1	1	28
31	-1	-2	0	-1	0	0	-19	-5	-1	-1	-1	0	0	0	-31
32	1	4	1	1	1	0	2	2	2	2	1	1	0	1	19
33	2	6	1	2	1	1	3	6	2	1	1	1	1	1	29
34	-2	-2	0	-7	-22	-2	-4	-2	-1	-9	-1	0	-1	-2	-55
35	1	2	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	8
36	-6	-1	0	-6	-1	1	-4	-2	-2	-1	0	0	0	-1	-23
37	-2	-2	0	-2	-1	0	-22	-6	-2	-1	-1	0	0	0	-39
38	1	2	0	2	6	0	2	1	1	2	1	1	0	1	20
39	0	1	0	0	-2	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0
40	0	0	1	0	1	0	1	-2	-1	1	-2	0	0	-1	-2
41	-1	-2	-1	-1	0	0	-2	-3	-2	-1	-5	-15	0	-1	-34
42	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-3
43	-1	-2	0	-1	1	0	0	-2	-2	0	0	-1	-2	-1	-11
44	-2	-3	0	-10	-25	-11	-5	-2	-3	-15	-1	-1	-1	-11	-90
45	2	4	0	4	3	1	4	2	2	4	0	1	1	1	29
46	-2	-5	0	-1	0	0	-1	-3	-4	-1	-1	-2	-2	-2	-24
47	2	11	1	2	2	0	4	5	9	2	2	2	1	1	44
48	-1	-6	0	0	1	1	0	-2	-5	0	0	0	0	0	-12
49	-1	0	0	-8	-4	0	-1	0	0	-2	1	0	0	0	-15
50	1	2	0	4	3	0	2	1	1	2	1	1	0	0	18
51	-2	-1	0	-10	-12	-1	-4	-2	-1	-5	0	0	0	0	-39
52	2	7	5	2	1	0	3	7	3	2	1	1	1	1	36
53	1	2	0	3	8	2	3	1	1	3	1	1	0	1	27
54	-13	-46	-5	-11	-6	-1	-29	-6	-5	-33	-2	-2	-1	-3	-164
55	5	12	1	4	3	0	6	10	3	2	2	2	1	1	52
56	-1	-1	0	-9	-11	-1	-2	-1	-1	-4	0	0	0	0	-31
57	1	8	0	2	1	0	5	7	3	3	2	1	1	0	34
58	1	2	-1	2	2	0	2	2	2	2	1	0	-1	0	14
59	2	3	-1	2	2	-1	5	2	2	2	1	0	-1	0	19
60	-3	-12	0	0	1	-1	-2	-3	-3	0	0	0	-1	-1	-25
61	2	5	0	3	2	0	3	5	4	2	2	2	-1	0	27

TABLA 6.8.

Diferencia entre loc. esp. libre y DCRC2

CENT.	ZONAS 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	TOTAL
1	-2	-4	-1	-2	-1	0	-3	-8	-4	-2	-5	-1	0	0	-33
2	2	-8	2	1	1	0	2	4	-25	0	0	0	0	0	-21
3	2	2	0	3	3	0	3	2	1	3	0	1	1	0	21
4	3	4	0	-9	4	1	4	3	1	1	0	1	1	1	15
5	2	3	0	5	3	1	3	2	2	4	0	1	1	1	28
6	-4	-6	1	-1	2	0	3	-3	0	1	1	2	1	0	-3
7	-1	-5	0	-1	0	0	0	-2	-2	0	0	1	0	0	-10
8	2	1	1	1	1	0	2	-14	1	1	0	1	1	1	-1
9	1	3	0	4	8	1	2	2	2	0	1	1	0	1	32
10	1	2	0	1	1	0	3	1	1	2	1	1	1	2	17
11	2	3	0	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	2	22
12	2	4	0	3	3	1	3	3	3	4	1	1	1	2	31
13	2	4	0	3	3	1	4	3	3	4	1	1	1	2	32
14	0	1	0	0	1	0	0	0	-9	0	0	0	-20	-1	-23
15	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	4	2	0	0	14
16	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	-15	2	0	0	-6
17	1	2	0	1	1	0	2	1	1	1	4	2	0	0	16
18	0	1	-8	0	0	0	-1	-1	-1	0	-3	-35	0	-1	-49
19	0	2	1	1	0	0	2	2	1	1	0	-1	1	0	10
20	1	0	0	0	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
21	2	3	0	2	2	0	0	2	2	1	0	1	0	1	16
22	2	2	0	1	1	0	2	1	1	2	1	0	1	0	14
23	3	4	0	4	3	1	16	3	3	2	1	1	1	1	43
24	4	4	0	9	3	1	5	3	3	4	2	1	1	1	40
25	-2	-2	1	-4	2	1	-3	-1	1	0	1	1	1	-1	-5
26	2	3	0	3	3	1	2	2	1	3	0	1	1	0	22
27	-6	-3	-1	-4	-3	0	-5	-3	-2	-4	0	-1	0	-1	-33
28	2	2	0	4	3	0	3	1	1	5	0	1	1	0	23
29	-8	-12	1	0	1	1	2	-2	3	2	-1	1	1	0	-11
30	4	3	0	5	2	1	4	2	1	2	1	1	1	1	23
31	-2	-2	0	-2	-1	0	-16	-5	-1	-1	-1	0	0	0	-31
32	1	5	1	1	1	0	2	2	2	1	1	1	1	0	19
33	2	9	1	3	2	1	5	-3	2	2	1	2	1	1	29
34	-5	-3	0	-7	-25	0	-9	1	1	-7	0	1	0	-2	-55
35	1	2	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	9
36	-5	-1	0	-5	-2	0	-3	-2	-2	-2	0	0	0	-1	-23
37	-2	-3	0	-2	-2	0	-19	-6	-2	-2	-1	0	0	0	-39
38	1	2	0	2	7	0	2	1	1	2	0	1	0	1	20
39	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	-1	0	1	0	0	0
40	0	0	2	0	0	0	0	-1	-1	0	-2	0	1	-1	-2
41	-2	-5	0	-6	0	0	-6	-1	-5	-2	-2	-4	1	-2	-34
42	2	2	0	0	2	1	2	2	-3	-13	0	1	1	0	-3
43	-1	-2	0	-1	0	0	0	-2	-2	-1	0	0	-1	-1	-11
44	-5	-9	0	-6	-21	-15	-10	-2	-1	-9	0	1	0	-13	-90
45	3	3	0	4	3	1	4	2	2	4	0	1	1	1	29
46	-2	-5	0	-2	-1	0	-2	-3	-3	-1	-1	-1	-1	-2	-24
47	2	11	1	2	2	0	4	5	9	2	2	2	1	1	44
48	-1	-7	0	0	0	1	-1	-1	-5	0	-1	1	1	1	-12
49	-1	0	0	-5	-3	-1	-1	-1	0	-2	0	0	0	0	-15
50	1	2	0	4	4	0	2	1	1	2	0	1	0	0	18
51	-2	-2	0	-15	-14	0	-4	0	1	-3	0	1	0	0	-38
52	1	7	5	2	1	0	3	8	3	2	1	1	1	1	36
53	1	2	0	2	9	2	3	1	1	3	1	1	0	1	27
54	-12	-41	-5	-13	-8	-1	-28	-8	-7	-32	-3	-2	-1	-3	-164
55	5	12	1	4	2	0	6	10	3	3	2	2	1	1	52
56	-3	0	0	-4	-14	0	-7	1	0	-4	1	0	-1	0	-31
57	1	8	0	2	1	0	4	7	4	3	1	1	1	1	34
58	0	1	-1	2	3	0	2	2	2	2	1	0	-1	1	14
59	1	1	-1	2	2	-1	8	2	2	2	1	0	-1	1	19
60	0	-7	0	2	2	-1	-5	-20	1	2	1	0	0	1	-24
61	2	5	0	3	2	0	3	2	5	2	2	1	-1	1	27

TABLA 6.9.

Diferencia entre loc. esp. libre y DWILSON

	ZONAS														
CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	TOTAL
1	-2	-6	2	-1	1	0	-3	-9	-4	-1	-8	-2	0	0	-33
2	-2	-4	0	-1	0	0	-1	-7	-4	0	-1	-1	0	0	-21
3	1	1	0	5	3	0	2	1	1	4	1	1	1	0	21
4	-1	0	0	18	-1	0	-2	-1	0	0	0	1	1	0	15
5	2	2	0	7	3	0	2	2	1	5	1	1	1	1	28
6	-1	7	0	-2	1	0	-3	-4	-2	0	0	1	0	0	-3
7	-2	6	0	-3	0	0	-4	-5	-3	0	0	1	0	0	-10
8	-2	-5	0	-2	0	0	-4	15	-2	0	-2	0	0	1	-1
9	1	2	0	4	8	1	3	2	2	6	1	1	0	1	32
10	1	2	0	1	1	0	3	1	1	2	1	1	1	2	17
11	1	2	0	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	4	22
12	2	4	0	3	3	1	4	3	3	3	1	1	1	2	31
13	2	4	0	3	3	1	4	3	3	4	1	1	1	2	32
14	-1	-6	-1	-1	1	0	0	-3	-9	0	1	-2	-6	-1	-28
15	1	1	0	1	1	0	2	1	1	1	3	2	0	0	14
16	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	-8	-6	0	0	-6
17	1	2	0	1	1	0	3	1	1	1	4	1	0	0	16
18	-2	-6	-3	0	0	0	-3	-8	-5	0	-16	-5	0	-1	-49
19	0	1	1	1	1	0	2	1	1	2	0	-1	1	0	10
20	0	0	0	-2	1	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	0
21	0	0	0	0	2	0	9	0	1	1	1	1	0	1	16
22	5	1	0	1	0	1	1	0	0	2	1	1	1	0	14
23	3	3	0	3	2	1	20	2	2	2	1	2	1	1	43
24	5	3	0	9	3	1	5	3	2	4	2	1	1	1	40
25	2	-2	1	-3	0	1	-2	-2	0	-1	1	0	0	0	-5
26	2	2	0	5	2	0	1	1	1	4	1	1	1	1	22
27	-4	-4	-1	-5	-3	0	-6	-3	-2	-4	1	0	0	-2	-33
28	1	1	0	7	1	0	1	1	0	7	1	1	1	1	23
29	-2	0	0	-3	0	1	-3	-3	3	-2	0	0	-1	-1	-11
30	5	2	0	6	2	1	3	2	1	2	1	1	1	1	28
31	-2	-3	0	-2	0	0	-15	-7	-2	0	-1	1	0	0	-31
32	1	5	1	1	1	0	2	3	1	2	1	0	0	1	19
33	3	7	1	1	1	1	3	6	1	1	1	1	1	1	29
34	-3	-2	0	-10	-22	-3	-3	-1	-1	-10	1	1	0	-2	-55
35	0	1	0	0	2	0	1	1	0	1	1	1	0	0	8
36	1	-3	0	-6	-2	0	-5	-3	-3	-2	1	0	0	-1	-23
37	-3	-4	0	-3	0	0	-18	-8	-2	0	-1	0	0	0	-39
38	1	2	0	1	9	0	2	1	1	1	1	1	0	0	20
39	0	1	0	-2	-3	3	1	1	0	-2	1	1	0	-1	0
40	0	-2	5	0	1	0	0	-3	-1	1	-3	0	0	0	-2
41	0	-2	-1	0	1	0	0	-2	-1	0	-5	-24	0	0	-34
42	0	-1	0	-3	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-3
43	-1	-3	-1	-1	1	0	1	-2	-2	0	1	0	-2	-2	-11
44	-1	-2	0	-12	-32	-10	-2	0	-2	-17	1	1	0	-14	-90
45	3	3	0	5	3	1	3	2	1	4	1	1	1	1	29
46	-3	-7	0	-1	0	0	0	-4	-4	0	1	-2	-2	-2	-24
47	2	11	1	2	2	0	4	5	10	2	2	1	1	1	44
48	-2	0	-1	-2	1	1	-1	-5	-2	0	0	0	-1	0	-12
49	-1	-1	0	-5	-4	-1	-2	0	0	-2	0	1	0	0	-15
50	1	1	0	4	3	0	2	1	1	2	1	1	0	1	18
51	-3	-3	0	-10	-4	-1	-4	-3	-1	-5	0	1	0	0	-33
52	1	7	4	2	1	0	3	9	3	2	1	1	1	1	36
53	1	3	0	1	11	2	2	1	1	2	1	1	0	1	27
54	-15	-51	-7	-13	-4	0	-30	-4	-5	-32	0	0	-1	-2	-164
55	5	13	1	4	2	0	6	10	3	3	1	2	1	1	52
56	-2	-1	0	-10	-9	-2	-2	-1	-1	-4	0	1	0	0	-31
57	1	8	0	2	1	0	4	8	4	3	1	1	0	1	34
58	0	2	0	1	3	0	2	2	2	2	0	0	-1	0	13
59	0	1	-1	1	2	0	12	1	2	2	0	0	-1	0	19
60	-2	2	0	-3	0	-1	-6	-6	-5	-1	-1	0	-1	0	-24
61	1	4	0	2	2	0	3	2	6	2	2	2	-1	1	26

las diferencias entre la muestra de la distribución real y los resultados del modelo.

TABLA 6.10.

Norma matricial de la libertad de elección por modelos e hipótesis

MODELO	NORMA	N. muestra
DC1	1623	552
DC2	1821	735
DCRC1	1685	574
DCRC2	1858	763
DWILSON	1802	655

En la tabla 6.11. se muestran los valores de la norma matricial D para los distintos modelos e hipótesis; (valores ya citados en los apartados anteriores)que miden la calidad del modelo para reflejar la realidad.

TABLA 6.11.

Norma matricial D por modelos e hipótesis

MODELO	NORMA
DC1	1046
DC2	561
DCRC1	976
DCRC2	539
DWILSON	1109

Del análisis conjunto de las tablas 6.10. y 6.11. y- aplicando el criterio de que el modelo más adecuado, corresponde a la menor norma matricial de libertad de elección y- norma D, se obtiene la siguiente tabla 6.12. de la norma -- conjunta,suma de ambas para la muestra de la distribución - real, y clasificada de menor a mayor valor absoluto.

TABLA 6.12.

Norma matricial conjunta (libertad de elección + Norma D)

MODELO	N. conjunta
DC2	1296
DCRC2	1302
DCRC1	1550
DC1	1598
DWILSON	1764

Se observa que los modelos más adecuados desde el punto de- vista conjunto, libertad de elección y Norma D, corresponde a los modelos de localización espacial condicionada, y de - localización espacial condicionada con restricción de coste, ambos corregidos por Asano; siendo el modelo menos adecuado el de Wilson.

Del análisis de las tablas 6.5. a la 6.9. se observa que para los centros escolares situados en zonas con exceso de plazas escolares con respecto a sus necesidades (zonas - 2,3,4,5,12,13, y 14 según se muestra en la tabla 6.1), las-diferencias entre el modelo de localización espacial libre y los otros modelos es negativa, como era lógico de esperar, puesto que el modelo de localización espacial libre, al no habérsele impuesto la limitación de capacidad para los centros escolares, tiende a distribuir los escolares residentes en una zona entre centros de la misma.

En las tablas 6.13. a la 6.15. se reflejan las diferencias entre los distintos modelos, con las siguientes normas matriciales de valores absolutos de diferencias, va

MODELO	NORMA
DC1 - DCRC1	547
DC1 - DWILSON	813
DC2 - DCRC2	327

lores que eran lógico de esperar si se los compara con los de la tabla 6.12., en donde los resultados de los modelos DC2 y DCRC2 son muy parecidos.

Del análisis de estas tablas podemos obtener las conclusiones siguientes:

- Considerando que la matriz de probabilidades está regída únicamente por la variable distancia las diferencias en los resultados obtenidos para los distintos modelos no resultan apreciables.
- Se observa que la variable distancia influye en

la localización espacial de escolares en algunos centros escolares de manera predominante, aunque no única.

. Se manifiesta un mejor ajuste en el modelo de localización condicionada con restricción de coste (ver tabla 6.11) que se vería mejorada si los c_{ij} se estimasen no proporcionales a las distancias sino en función del coste de enseñanza más el de transporte.

TABLA 6.13.

Diferencia entre los modelos DC1 y DCRC1

	ZONAS														
CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	TOTAL
1	1	0	-2	2	2	1	1	-3	0	1	-3	0	0	0	16
2	0	-2	0	1	1	1	2	-3	-1	1	0	0	0	0	12
3	0	1	0	-2	-1	0	0	1	0	-1	0	1	0	1	8
4	0	0	0	-4	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	8
5	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	4
6	0	-3	0	1	1	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	9
7	-1	-3	1	1	1	0	1	-1	-1	1	0	1	0	0	12
8	1	0	0	1	1	0	0	-7	1	1	0	1	0	1	14
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	2
11	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-2	4
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	2
13	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	2
14	0	0	0	1	1	1	1	1	-2	1	1	-1	-4	0	14
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	-4	-3	0	1	14
17	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	-3	0	0	0	6
18	1	0	-1	1	2	1	2	-1	0	2	-6	-3	1	1	22
19	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	-3	0	0	6
20	1	1	0	-1	-3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	8
21	0	1	0	0	1	0	-5	0	1	0	0	1	0	1	10
22	-2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	4
23	0	0	0	0	1	0	-2	0	0	1	0	0	0	0	4
24	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	4
25	-2	0	0	-1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	6
26	0	0	0	-2	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	1	6
27	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4
28	0	1	0	-1	0	-1	0	0	1	-1	0	1	0	0	6
29	1	-2	0	0	1	1	1	1	-4	1	0	0	0	0	12
30	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	6
31	1	1	0	1	2	1	-7	-1	1	1	0	0	0	0	16
32	0	-1	0	0	0	0	1	-2	0	1	0	0	0	1	6
33	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	2
34	1	2	0	0	-7	-1	2	2	1	-2	1	1	0	0	20
35	0	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4
36	-2	1	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	8
37	0	2	0	1	1	1	-7	-1	0	1	1	1	0	0	16
38	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	4
39	1	1	0	0	-2	-2	1	0	0	-1	0	1	1	0	10
40	0	0	-2	1	1	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	8
41	0	1	0	2	2	1	2	1	1	2	-2	-10	0	0	24
42	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	4
43	0	-1	1	0	1	0	1	0	-1	1	0	-1	-1	0	8
44	2	4	1	0	-7	-6	4	3	2	-3	2	2	1	-5	42
45	-1	1	0	-1	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	6
46	0	-1	0	1	1	1	2	0	-1	0	0	-1	-1	-1	10
47	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	4
48	0	-3	0	2	1	1	1	0	-3	1	0	0	0	0	12
49	0	1	0	-4	-2	0	1	1	1	-1	2	0	1	0	14
50	0	1	0	-1	-1	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	6
51	0	2	0	-2	-3	0	0	1	0	-1	1	1	1	0	12
52	1	0	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	4
53	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	6
54	-1	-9	-1	3	4	1	-3	4	2	-7	3	2	-1	1	42
55	0	-1	0	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	4
56	1	1	0	-2	-4	0	0	1	0	-1	1	1	1	1	14
57	0	0	-1	1	0	0	1	0	-1	1	0	-1	0	0	6
58	0	2	-1	0	-1	0	0	1	0	1	0	-1	0	0	7
59	0	2	-1	1	1	-1	-5	2	0	2	0	-1	0	0	16
60	-1	-3	0	1	2	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	10
61	0	0	0	0	0	-1	0	1	-1	0	1	0	-1	0	5
TOTAL	26	60	13	54	72	27	50	45	36	52	38	50	15	23	574

TABLA 6.14.

Diferencia entre los modelos DC1 y DWILSON

	ZONAS														
CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	TOTAL
1	0	-2	2	2	3	1	1	-3	-1	2	-5	0	0	0	22
2	-1	0	-1	0	1	1	1	-2	0	1	0	0	0	0	8
3	-1	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	1	1	0	0	6
4	-2	-2	0	13	-3	0	-3	-1	-1	-2	0	1	0	0	28
5	0	-1	0	1	0	-1	-1	0	0	0	1	1	0	0	6
6	0	8	-1	-1	1	0	-3	-3	-2	0	0	1	0	0	20
7	-1	10	0	-2	0	0	-3	-4	-2	1	0	1.	0	0	24
8	-2	-6	0	-1	0	0	-4	16	-2	0	-2	0	0	1	34
9	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	2
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	2
12	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	2
13	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	2
14	0	-3	0	1	2	1	2	0	-4	2	2	-1	-2	0	20
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	2
16	1	1	0	2	2	0	2	1	2	2	-9	-5	0	1	28
17	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	-4	0	0	0	8
18	1	-1	-2	3	3	1	4	-1	0	3	-10	-3	1	1	34
19	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	-4	0	0	8
20	0	0	0	-2	1	0	-1	0	0	0	1	1	0	0	6
21	-1	-1	0	-1	1	0	0	-1	0	0	1	1	0	1	8
22	2	-1	0	0	-1	1	-1	-1	-1	0	0	1	1	0	10
23	0	-1	0	-1	0	0	3	-1	-1	0	0	1	0	0	8
24	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	4
25	4	-2	0	-1	0	1	-1	-2	0	0	1	0	0	0	12
26	0	-1	0	1	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	0	1	8
27	1	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	2	1	0	-1	8
28	-1	0	0	2	-2	-1	-2	0	0	1	1	1	0	1	12
29	-1	2	0	-2	0	1	-2	-2	7	-1	0	0	-1	-1	20
30	1	-1	0	1	0	0	-1	0	0	-1	0	1	0	0	6
31	0	0	0	0	2	1	-3	-3	0	2	0	1	0	0	12
32	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	-1	0	1	6
33	1	1	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	1	6
34	0	2	0	-3	-7	-2	3	3	1	-3	3	2	1	0	30
35	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	4
36	5	-1	0	-1	0	0	-2	-1	-1	-1	1	1	0	0	14
37	-1	0	0	0	2	1	-3	-3	0	2	1	1	0	0	14
38	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	4
39	1	1	0	-2	-3	0	2	1	0	-2	1	1	1	-1	16
40	0	-2	2	1	1	0	0	-2	0	1	-2	0	0	1	12
41	1	1	0	3	3	1	4	2	2	5	-2	-14	0	1	42
42	0	-1	0	-2	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	6
43	0	-2	0	0	1	0	2	0	-1	1	1	0	-1	-1	10
44	3	5	1	-2	-14	-5	7	5	3	-5	4	4	2	-5	58
45	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1	1	0	0	4
46	-1	-3	0	1	1	1	3	-1	-1	1	2	-1	-1	-1	18
47	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
48	-1	3	-1	0	1	1	0	-3	0	1	0	0	-1	0	12
49	0	0	0	-1	-2	-1	0	1	1	-1	1	1	1	0	10
50	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	-1	1	1	0	1	6
51	-1	0	0	-2	0	0	0	0	0	-1	1	2	1	0	9
52	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
53	0	1	0	-1	1	0	-1	0	0	-2	1	1	0	0	8
54	-3	-14	-3	1	6	2	-4	5	3	-6	5	4	-1	2	59
55	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	-1	0	0	0	4
56	0	1	0	-3	-2	-1	0	1	0	-1	1	2	1	1	14
57	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	1	-1	-1	-1	1	8
58	-1	2	0	-1	0	0	0	1	0	1	-1	-1	0	0	8
59	-2	0	-1	0	1	0	1	1	0	2	-1	-1	0	0	10
60	0	11	0	-2	1	-1	-4	-3	-3	0	-1	0	0	1	27
61	-1	-1	0	-1	0	-1	0	0	1	0	1	0	-1	1	8
TOTAL	44	100	15	74	74	28	45	90	44	60	40	74	17	34	413

TABLA 6.15.

Diferencia entre los modelos DC2 y DWILSON

	ZONAS														
CENT.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	TOTAL
1	0	0	-1	1	1	1	1	-2	-1	1	-2	0	0	1	12
2	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	2
3	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	-1	5
4	0	1	0	-2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
5	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	4
6	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	4
7	0	-2	0	0	0	1	1	-1	-1	1	0	1	0	0	8
8	0	1	1	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	1	6
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	2
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	2
13	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	2
14	0	0	0	1	1	0	1	0	-1	1	0	0	-3	0	8
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	-4	0	0	0	8
17	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	0	0	4
18	0	1	-1	1	1	0	1	0	0	0	-1	-3	1	0	10
19	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	-2	0	0	4
20	1	0	0	0	-2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
21	0	1	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	1	4
22	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
23	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	2
24	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
25	-1	1	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	1	0	0	6
26	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	4
27	-2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4
28	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	4
29	0	-1	0	0	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	4
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	1	0	1	1	1	-5	-1	1	1	0	0	0	0	12
32	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	2
33	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	2
34	1	1	0	0	-4	0	2	0	1	-1	0	0	0	0	10
35	0	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4
36	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
37	0	1	0	1	1	1	-5	-1	0	1	1	0	0	0	12
38	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
39	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	4
40	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	2
41	1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	-1	-4	0	0	10
42	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	1	0	0	4
43	0	-1	0	0	1	1	1	0	-1	0	0	0	-1	0	6
44	2	2	1	0	-4	-4	3	1	1	-1	1	1	0	-3	24
45	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
46	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	-1	-1	6
47	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	4
48	0	-2	0	0	2	0	1	-1	-1	0	0	0	0	1	8
49	0	1	0	-2	-1	-1	1	0	1	0	1	0	0	0	8
50	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	4
51	1	1	1	-1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
52	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
53	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	4
54	0	-5	0	1	2	1	-3	2	1	-4	2	1	1	1	24
55	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	4
56	0	0	0	0	-3	0	1	1	0	1	1	0	-1	0	8
57	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	4
58	0	0	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	3
59	-1	-1	0	1	1	0	-3	2	0	1	0	0	0	0	10
60	0	-2	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	-1	0	0	6
61	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	-1	0	0	4
TOTAL	14	45	5	26	40	13	40	24	20	30	24	24	8	18	327

C O N C L U S I O N E S

De lo expuesto en la Tesis a lo largo de los seis capítulos anteriores se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1.- El enfoque metodológico de la Tesis se encuandra dentro de la Teoría General de Sistemas (T.G.S), considerandose a ésta como un paradigma (en el sentido dado por Kuhn) científico válido.

2.- A los sistemas físicos se les puede dotar de una estructura matemática que permite un análisis riguroso de los mismos y en especial del isomorfismo entre -- sistemas. De esta forma quedan definidos conceptos - tales como:

. Conjunto básico o soporte del sistema.
. Atributo.
. Función sobre el conjunto básico del sistema.
. Función de nivel.
. Subsistema.
. Entorno de un sistema.
. Estado de un sistema.
. Estructura de un sistema.
. Comportamiento de un sistema.
. Jerarquía de sistemas.

3.- Este nuevo concepto de sistema puede ser aplicado al caso de los escolares de E.G.B. de un nucleo urbano, puesto que se pueden definir conjuntos tales como:

a) Conjunto básico de escolares.

b) Conjunto de atributos: zona de residencia; -- centros escolares; y tipos de centros escolares.

c) Conjunto de funciones sobre elementos: distancia entre lugar de residencia y su centro; y- años de cada escolar.

d) Conjunto de funciones de nivel: número de escolares residentes por zona; número de escolares que asisten a cada centro; flujo de escolares entre zonas y centros; y distancia en-- tre zonas y centros.

4.- El sistema de escolares de E.G.B. a nivel urbano es un subsistema en última instancia del sistema urbano, al cual puede llegarse a través de otros subsistemas, requiriendosé cinco niveles en el modelo urbano de Echenique.

5.- Se dan funciones de probabilidad asociadas a los distintos tipos de localizaciones espaciales de escolares consideradas: libre, condicionada y condicionada con restricción de coste, así como el criterio empleado para obtener la localización espacial más probable.

6.- Se ha introducido el concepto de localización espacial libre que representa las tendencias deseadas de la población escolar.

7.- Se ha introducido una norma matricial como medida de la libertad de elección de una localización espacial condicionada por las limitaciones de los centros escolares.

8.- Se ha introducido una norma matricial como medida de la libertad de elección de una localización espacial condicionada por las limitaciones de los centros escolares y con restricción de coste.

9.- El modelo de distribución de Wilson puede considerarse como un caso particular del modelo general de localización espacial condicionada con restricción de coste más probable, cuando la matriz de probabilidades permanece constante, o sea:

$$P_{ij} = cte \qquad \forall\, i,j \begin{Bmatrix} i = 1,2,\ldots,n \\ j = 1,2,\ldots,m \end{Bmatrix}$$

10.- El concepto de sistema puede ser aplicado al caso de partículas, de un número determinado de gases, contenidos en una vasija cerrada, puesto que se pueden definir conjuntos tales como:

a) Conjunto básico de partículas.

b) Conjunto de atributos: gases de la mezcla, nivel de energía, y tipo de nivel.

c) Conjunto de funciones sobre elementos: recorrido libre medio, y masa de cada partícula.

d) Conjunto de funciones de nivel: número de partículas por gas, número de partículas por nivel de energía, flujos de partículas entre gases y los- niveles de energía, y media de recorridos libres- medios entre gases y niveles de energía.

11.- El sistema de partículas contenidas en una vasija - cerrada es isomorfo con el sistema de escolares de- E.G.B. a nivel urbano.

12.- El concepto de entropía, como medida de incertidumbre, desarrollada en los sistemas termodinámicos, - puede aplicarse al sistema de escolares de E.G.B. a nivel urbano.

13.- La aplicación de los modelos de localización espa-- cial de escolares entre sus distintos centros, se - ajustan de manera más precisa a la realidad en la - medida en que se consideren los diversos factores - que puedan influir, siendo la distancia uno de los más importantes.

A P E N D I C E 1

R E F E R E N C I A S

CAPITULO 1

(1) ALLAN, J. y TOULMIN, S. (1974)."La Viena de Wittgenstein". Editorial Taurus. Madrid.

(2) BERTALANFFY, L. Von (1976)."Teoría general de los Sistemas". Fondo de Cultura Económica.(FCE) Madrid.

(3) CHADWICK, G. F. (1971) "Asystems view of planning towards a theory of the urban and regional planning process". Pergamon Press, Oxford.
Trad. esp. "Una visión sistématica del planeamiento". Gustavo Gili, Barcelona, 1973.

(4) CHORLEY, R. J. y HAGGET, P. (1967). "Modelos, paradigmas y la Nueva Geografía", en "Socio-Económic-Models in Geography", (R. J. Chorley y P. Hagget edit.) Methnen Co. London.
Trad. esp. "La Geografía y los Modelos Socio-econoñicos". Inst. de Estudios de Admón. Local. Madrid.

(5) FREUND, J. (1973). "Les théories des sciences humaines". PUF, Paris. (Ed. cast. Península, 1975)

(6) GARCIA COTARELO, R. (1979). "Crítica de la Teoría de Sistemas". Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS). Madrid.

(7) GOULDNER, A. (1972). "The Coming Crisis of Western Sociology". Londres.

(8) HARVEY, D. (1973). "Social Justice and the City". Arnold. London. (Ed. cast. Siglo XXI, 1977)

(9) KUHN, T. S. (1977). "La estructura de las revoluciones científicas". Colección Breviarios. - Fondo de Cultura Económica. Madrid.

(10) LANDAUER, GUSTAV. (1959). "Lichtenberg Reader Selected Writings of Georg Christoph Lichtenberg". Beacon Hill Press. Boston.

(11) MURCIA. Emilio. (1979). "El paradigma sistémico en - Geografía y Ordenación del Territorio". - Ciudad y Territorio. Madrid.

(12) PIAGET, J. (1972). "Problémes de psychologie génetique". Denöel-Gouthier. Paris. (Ed. cast. - Ariel, 1975).

(13) PIAGET, J. (1974). "Le estructuralisme". PUF. Paris.- (Ed. cast. Oikus-Tau. Barcelona, 1974).

(14) WALLACE, W. L. (1971). "La lógica de la ciencia en la sociología". Alianza Universidad Nº 150. - Madrid.

(15) WITTGENSTEIN, L. (1972). "Tractatus Logico-Philosophicus". Alianza Editorial. Madrid.

CAPITULO 2

(1) ARACIL, J. (1977). "Introducción a la dinámica de sistemas". Alianza Universidad. Madrid.

(2) BEER, S. (1959). "Cybernetics and Management". English Universities Press. London.

(3) BERTALANFFY,L. Von (1976). "Teoría General de los Sistemas". Fondo de Cultura Económica (FCE) Madrid.

(4) BERTALANFFY, L. Von et alt. (1978). "Tendencias en la Teoría General de Sistemas", "Selección-prólogo de George J. Klir. Alianza Universidad. Madrid.

(5) CHADWICK, G. F. (1971). "A Systems view of planning - towards a theory of the urban and regional planning process". Pergamon Press, - Oxford.
Trad. esp. "Una visión sistémica del planeamiento". Gustavo Gili. Barcelona.1973.

(6) KLIR, J. y VALACH, M. (1967). "Cybernetic Models". Iliffe Books. London.

(7) LASZLO, E. (1975). "The Meaning and significance of General System Theory". Behavioral Science, Vol. 20, Nº 1, January.

(8) QUEYSANNE, M. (1973). "Algebre básica". Editorial Vicens-Vives. Madrid.

CAPITULO 4

(1) CHADWICK, G.F. (1971). "A systems view of planning towards a theory of the urban and regional planning process". Pergamon Press. Oxford.
Trad. esp. "Una visión sistém ca del planeamiento". Gustavo Gili. Barcelona. 1973.

(2) CHORLEY, R. J. y HAGGET, P. (1967) "Modelos, Paradigmas y la Nueva Geografía", en "Socio-Economic Models in Geography". (R.J. Chorley y P. Hagget edit.) Methuen Co. London.
Trad. esp. "La Geografía y los Modelos Socio-económicos". Inst. de Estudios de Admón. Local. Madrid, 1971.

(3) ECHENIQUE, M. (1975). "Modelos matemáticos de la estructura espacial urbana: aplicaciones en América Latina". Ediciones Siap. Buenos Aires.

(4) KLIR, J. y VALACH, M. (1967). "Cybernetic Models". Iliffe Books. London.

(5) KUHN, T. S. (1962). "The Structure of Scientific Revolutions". University of Chicago. Press. Chicago.
Trad. esp. "La Estructura de las Revoluciones científicas". Fondo de Cultura Económica. (FCE). Madrid. 1975.

(6) LEE, C. (1973). "Models in planning". Pergamon. Press. London.
Trad. esp. "Modelos de planificación".- Pirámide. Madrid. 1975.

(7) LOWRY, I. S. (1964). "A model of Metropolis". Rand Corporation. Santa Mónica. California.

(8) MC GRATH, J. E., NORDLIE, P. G. y VAUGHAN, W. S. (1973) "A Descriptive Framework for Comparison of System Research Methods". en "Systems Analysis" (S.L. Optner edit.). Penguin- Books. Hardmondworth.

(9) SACRISTAN, M. (1973). "Introducción a la Lógica y al - Análisis Formal". Ariel. Barcelona.

(10) WILSON, A. G. (1970). "Entopy in urban and regional modelling". Pion Limited. London.

CAPITULO 5

(1) ASANO, C. (1965). "On estimating multinomial probabilities by pooling incomplete samples". - Annals of the Institute of Statistical Matematics. Tokyo,17,1-13.

(2) REYNOLDS. (1967). "Termodinâmica". Ediciones del Castillo. Madrid.

(3) SHANNON, C., WEAVER, W. (1949). "The Mathematical Theory of communication. (University of - Illinois Press).

A P E N D I C E 2

B I B L I O G R A F I A

ABELLANAS, P. (1965). "Elementos de Matemáticas". Editado por el autor. Madrid.

AGUILAR, J. (1970). "Termodinámica y mecánica estadística". Editorial Sucesores de Vives Mora. Valencia.

BATTY, M. (1976). "Entropy in Spatial Aggregation". Geographical Analysis, vol 8. Ohio State University Press.

BATTY, M. (1976). "Urban Modelling: Algorithms, calibrations, predictions". Cambridge University Press. Cambridge.

BATTY, M. (1971). "Modelling cities as dynamic systems". Nature, 231, 425-8.

BERRY, B. J. L. (1964)."Aproaches to regional analysis: a synthesis". Annals of the Association of American Geographers, 54, 2-11.

BERTALANFFY, L. von (1979). "Perspectivas en la teoría general de sistemas". Alianza Universidad. Madrid.

BUCHANAN, G. et al. (1975). "Planificación territorial". Tomo II. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid.

CARNAP, R. et alt. (1974). "Matemáticas en las ciencias del comportamiento". Alianza Universidad. - Madrid.

CASTILLO, E. (1973). "Apuntes de cálculo numérico". Servi-- cio de publicaciones de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Santander.

CASTILLO, E. y PESQUERA, M.A. (1978). Model distribution of scholar population". Second international conference on applied numerical modelling. Madrid.

CASTILLO, E. (1978). "Intoducción a la estadística aplicada". Tomo I. Editado por el Autor. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puer-- tos. Santander.

COLIN, L. (1975). "Modelos de Planeamiento". Editorial Pirámide. Madrid.

CRAMER, H. (1953). "Métodos Matemáticos de Estadística". -- Editorial Aguilar. Madrid.

DATA GENERAL S.A. (1978). "Extended Basic, User's Manual".- Universidad de Santander.

DATA GENERAL S.A. (1979). "Fortran 5, Reference Manual". - Universidad de Santander.

FAST, J. D. (1965). "Entropía: Significación de la noción de entropía y sus aplicaciones científicas". Editorial Paraninfo. Madrid.

FORRESTER, J. W. (1968). "Principles of Systems". Wright-Allen Press. New-York.

HAGGET, P. (1976). "Análisis locacional en la geografía humana". Editorial Aguilar. Madrid.

HUTCHINSON, B.G. (1974). "Principles of Urban Transport - Systems Planning". Mc Graw-Hill Book - Company. New-York.

ISARD, W. et al. (1972). "Ecologic-economic anlysis for regional development". Free Press. New - York.

JOHNSON, N. L. y KOTZ, S. (1969). "Discrete distributions". Houghton Mifflin Company. Boston. U.S.A.

KLIR, L. (1965). "The general system as a methodological -- toal". General Systems, 10, 29-42.

KLIR, G. J. (1972). "Trends in General Systems Theory". Wiley-Interscience. Now York.

LENTIN, A. y RIVAUD, J. (1969). "Algebra moderna". Editorial Aguilar. Madrid.

MCLOUGHLIN, J.B. (1971). "Planificación Urbana y regional. - Un enfoque de sistemas". Instituto de - estudios de la Administración Local. Colección Nuevo Urbanismo nº 4. Madrid.

MCLOUGHLIN, J. B. (1970). "Cybernetic and general system - approaches to urban and regional re---- search, a review of the literature". Environment and Planning.

MESAROVIC, M. D. (1964). "Views on general systems theory". Proceedings of the Second Systems Symposium (Case Institute of Technology,- develand).

MESAROVIC, M. D. (1964). "Fomdations for a General Systems- Theory" en "Views on General Systems - Theory" (M.S. Mesarovic edit.). John - Wiley. New York.

PIAGET, J. et alt. (1974). "Tendencias de la investigación- en las Ciencias Sociales". Alianza Universidad. Madrid.

RIOS, S. (1972). "Análisis estadístico aplicado". Editorial Paraninfo. Madrid.

RUDNER, R. (1974). "Filosofía de la Ciencia Social". Alianza Universidad. Madrid.

SCHMIDT-RELENBERG, N. (1976). "Sociología y Urbanismo". Instituto de estudios de la Administración Local. Colección Nuevo Urbanismo nº 18. Madrid.

SEARS, F. W. (1959). "Introducción a la termodinámica, teoría Cinética de los gases y mecánica estadística". Editorial Reverté. Barcelona.

SPIEGEL, M. R. (1969). "Teoría y problemas de estadística". Mc Graw-Hill Company. New York.

WARTOFSKY, W. (1974). "Introducción a la filosofía de la ciencia". Alianza Universidad. Madrid.

WHITE, L. L. et al. (1973). "Las estructuras jerárquicas". Alianza Universidad. Madrid.

WILSON, A. G. et al. (1978). "Models of cities and Regions: Theoretical and Empirical Developments". Editorial John Wiley. Londres.

WILSON, A. G. (1974). "Urban and Regional Models Geography an Planning". Editorial John Wiley. Londres.

A N E J O

P R O G R A M A C I O N

En este anejo se incluyen los listados de los programas utilizados para los distintos modelos a los que se refiere el capítulo 5 y en especial el capítulo 6; así como el programa encargado de realizar en el plotter las figuras incluidas en el capítulo 6.

Como características comunes a todos ellos pueden establecerse las siguientes:

- Lenguaje de programación: FORTRAN V.
- Ordenador de procesado de las siguientes características y composición:
  - 1 Procesador central eclipse S-230 de Data General con capacidad de 256 KBYTES, memoria de semiconductores (MOS) con opción de correción automática de errores.
  - 1 Procesador de coma flotante.
  - 1 Consola maestra del sistema con Display de 24 líneas de 80 caracteres C/U.
  - 1 Multiplexor de comunicaciones con interfase de ocho líneas.
  - 7 Consolas terminales compuestas de teclado y display, con las mismas características que la consola maestra.
  - 5 Impresores Centronics, modelo 700, de 60 caracteres por segundo con interfase serie para su conexión a los display anteriores y funcionar como

dispositivo de "HARD COPY" de ellos.

- 1 Sub-sistema de disco de 96 Megabytes.
- 1 Sub-sistema de disco de 10 Megabytes.
- 1 Plotter marca Calcomp mod. 836.
- 1 Impresora de líneas Centronics mod. 6600, 600 lí-- neas por minuto, 64 caracteres ASCII.
- 1 Unidad de cinta magnética marca Kennedy mod. 9000, de 45 IPS. y densidad dual de grabación 800/1600 - BPI.
- 1 Lectora de tarjetas, 300 tarjetas por minuto.
- 2 Perforadoras de tarjetas.
- Sofware- Sistemas operativos RDOS y AOS de Data General, así como FORTRAN y BASIC extendido.

En las siguientes figuras se incluyen los programas:

- DL: Programa para la aplicación del modelo de localización espacial libre.
- DC: Programa para la aplicación del modelo de localización espacial condicionada.
- DCRC: Programa para la aplicación del modelo de localización espacial condicionada con restricción de coste.
- DWILSON: Programa para la aplicación del modelo de - Wilson.
- PSAN: Programa para el dibujo en plotter de los re-- sultados de los distintos modelos.

También se incluye la subrutina AJUSTEI necesaría-para el ajuste de los valores reales que se obtienen en -los distintos modelos a valores enteros.

Figura 1. Anejo.DL

Programa del modelo de loc. esp. libre.

```
C       DISTRIBUCION LIBRE
        DIMENSION O(14),D(61),A(14),B(61),AL(14),AL1(61),P(14,61)
     1,T(14,61),T1(14,61),TP(14,61),OP(14),H1(14),D1(61),IT(14,61),HA(14)
        ACCEPT"JW",JW
        ACCEPT"ERROR",ERROR
        OPEN 1,"DULSDAT"
        OPEN 2,"DATPRO"
        OPEN 3,"MUESTRA"
        OPEN 4,"FDL4"
        OPEN 5,"FDL5"
        READ FREE (3)TP,H1,OP,D1
        ACCEPT"SI SE LEEN LOS DATOS 1, SI NO 0",S
        IF(S.EQ.0)GO TO 100
        DATA N,M/14,61/
        DATA O/221,443,41,370,293,47,421,325,256,270,115,103,45,71/
        DATA D/74,80,40,67,32,89,87,69,4,11,10,3,2,60,3,26,10,79,18,46,38,47,30,
     223,64,49,30,42,37,35,75,40,42,89,38,84,83,31,36,45,53,46,40,120,32,60,14
     3,80,60,27,87,26,24,201,10,74,22,16,35,104,32/
        READ FREE (2) P,T
 2000   WRITE(JW,1)N,M
    1   FORMAT(" N=",I2," M=",I2)
        WRITE(JW,4)
        WRITE(JW,2)(O(I),I=1,N)
    2   FORMAT(2X,14I5)
        WRITE(JW,5)
        WRITE(JW,2)(D(I),I=1,M)
        WRITE(JW,6)
        DO 60 I=1,N
   60   WRITE(JW,3)(P(I,J),J=1,M)
    3   FORMAT(1X,21F5.3)
    4   FORMAT(" MATRIZ DE RESIDENTES DE LAS ZONAS")
    5   FORMAT(" MATRIZ DE CAPACIDADES DE LOS CENTROS")
    6   FORMAT(" MATRIZ DE PROBABILIDADES")
        IF(S.EQ.0)GO TO 200
        WRITE FREE (1)N,M,O,D,P
        GO TO 200
  100   READ FREE (1)N,M,O,D,P
        GO TO 2000
  200   WRITE(JW,3005)
        DO 3003 I=1,N
        DO 3003 J=1,M
        T1(I,J)=P(I,J)*O(I)
 3003   IT(I,J)=INT(T1(I,J)+0.51)
        DO 3002 I=1,N
 3002   WRITE(JW,2500)(IT(I,J),J=1,M)
 2500   FORMAT(1X,15I7)
 3005   FORMAT(" DISTRIBUCION LIBRE")
        TYPE"DISTRIBUCION LIBRE"
        TYPE"COMIENZA CACULO ENTROPIA"
C       CALCULO DE LA ENTROPIA
        TOT=0.
        ITOT=0
        DO 310 I=1,N
        DO 310 J=1,M
        ITOT=ITOT+IT(I,J)
        TOT=TOT+T(I,J)
        IF(IT(I,J).EQ.0)GO TO 310
        W1=W1-((T(I,J)*LOG(T(I,J)))-T(I,J))
  310   CONTINUE
        TYPE"ENTROPIA"
        W=TOT*LOG(TOT)-TOT+W1
        TYPE" T=",ITOT," W1=",W1,"ENTROPIA=",W
        WRITE(JW,340)W,ITOT
  340   FORMAT(" VALOR DE LA ENTROPIA=",I15," VALOR DE T=",I6)
        DO 350 I=1,N
        DO 360 J=1,M
        IF(D1(J).EQ.0)GO TO 360
        S1=S1+ABS(IT(I,J)-TP(I,J))
  360   CONTINUE
  350   CONTINUE
        WRITE(JW,370) S1
  370   FORMAT(" VALOR DIFERENCIA CON LA MUESTRA",I10)
        CLOSE1
        CLOSE2
        CLOSE3
        CLOSE4
        CLOSE5
        STOP
        END
```

Figura 2. Anejo. DC

Programa del modelo de loc. esp. condicionada

```
C         DISTRIBUCION CONDICIONADA
          DIMENSION O(14),D(61),A(14),B(61),AL(14),AL1(61),P(14,61)
     1,T(14,61),T1(14,61),TP(14,61),OP(14),H1(14),D1(61),IT(14,61),MA(14)
          ACCEPT"JW",JW
          ACCEPT"ERROR",ERROR
          OPEN 1,"CONDDAT"
          OPEN 2,"DATPRO"
          OPEN 3,"MUESTRA"
          OPEN 4,"FDC4"
          OPEN 5,"FDC5"
          READ FREE (3)TP,H1,OP,D1
          ACCEPT"SI SE LEEN LOS DATOS 1, SI NO 0",S
          IF(S.EQ.0)GO TO 100
          DATA N,M/14,61/
          DATA O/221,443,41,370,293,47,421,325,256,270,115,103,45,71/
          DATA D/74,80,40,67,32,80,47,80,4,11,10,3,2,60,2,26,10,79,16,46,36,47,30,
     222,54,40,50,42,37,35,75,40,42,68,35,84,83,31,36,45,53,45,40,120,32,60,14
     3,80,60,27,87,26,24,201,10,74,22,16,35,104,32/
          READ FREE (2) P,T
 2000     WRITE(JW,1)N,M
    1     FORMAT(" N=",I2,"  M=",I2)
          WRITE(JW,4)
          WRITE(JW,2)(O(I),I=1,N)
    2     FORMAT(2X,14I5)
          WRITE(JW,5)
          WRITE(JW,2)(D(I),I=1,M)
          WRITE(JW,6)
          DO 60 I=1,N
   60     WRITE(JW,3)(P(I,J),J=1,M)
    3     FORMAT(1X,21F5.3)
    4     FORMAT(" MATRIZ DE RESIDENTES DE LAS ZONAS")
    5     FORMAT(" MATRIZ DE CAPACIDADES DE LOS CENTROS")
    6     FORMAT(" MATRIZ DE PROBABILIDADES")
          IF(S.EQ.0)GO TO 200
          ACCEPT" ESTIMACION POR DISTANCIAS 1, POR ASANO 2",AS
          IF(AS.EQ.1)GO TO 200
          DO 10 I=1,14
          DO 20 J=1,61
          IF (D1(J).EQ.0)GO TO 20
          P(I,J)=(T(I,J)+TP(I,J))/(O(I)*(1+(OP(I)*(1/H1(I)))))
 20       CONTINUE
 10       CONTINUE
          WRITE FREE (1)N,M,O,D,P
          GO TO 200
  100     READ FREE (1)N,M,O,D,P
          GO TO 2000
  200     DO 3010 I=1,N
          AL(I)=-LOG(O(I))
 3010     WRITE(JW,407)I,AL(I)
  407     FORMAT(" I=",I3," LANDA=",G12.3)
          DO 210 I=1,N
  210     A(I)=1/O(I)
  300     DO 220 J=1,M
          C=0
          DO 230 I=1,N
  230     C=C+P(I,J)*A(I)*O(I)
  220     B(J)=1/C
          B1=0
          DO 240 I=1,N
          C=0
          DO 250 J=1,M
  250     C=C+P(I,J)*B(J)*D(J)
          B1=B1+ABS(A(I)-1/C)
```

Figura 2. Anejo

(continuación)

```
 240    A(I)=1/C
        TYPE"B1=",B1
        IF(B1.GT.ERROR) GOTO 300
        DO 400 I=1,N
        AL(I)=-LOG(A(I)*D(I))
 400    WRITE(JW,405)I,A(I),AL(I)
        DO 410 J=1,M
        AL1(J)=-LOG(B(J)*D(J))
 410    WRITE(JW,406)J,B(J),AL1(J)
 406    FORMAT(" J=",I3,"  B=",G12.3,"  BETA=",G12.3)
 405    FORMAT(" I=",I3,"  A=",G12.3,"  LANDA=",G12.3)
        WRITE(JW,3006)
3006 FORMAT(" DISTRIBUCION CONDICIONADA")
        TYPE"DISTRIBUCION CONDICIONADA"
        DO 1002 I=1,N
        DO 1002 J=1,M
        T(I,J)=P(I,J)*A(I)*D(I)*B(J)*D(J)
1002    CONTINUE
        CALL AJUSTEI(N,M,T,IT,HA,D,D)
        DO 1000 I=1,N
1000    WRITE(JW,1001)(IT(I,J),J=1,M)
1001    FORMAT(1X,15I7)
        TYPE"COMIENZA CACULO ENTROPIA"
C       CALCULO DE LA ENTROPIA
        ITOT=0
        TOT=0.
        DO 310 I=1,N
        DO 310 J=1,M
        ITOT=ITOT+IT(I,J)
        TOT=TOT+T(I,J)
        IF(IT(I,J).EQ.0)GO TO 310
        W1=W1-((T(I,J)*LOG(T(I,J)))-T(I,J))
 310    CONTINUE
        TYPE"ENTROPIA"
        W=TOT*LOG(TOT)-TOT+W1
        TYPE"  T=",ITOT,"  W1=",W1,"ENTROPIA=",W
        WRITE(JW,340)W,ITOT
 340    FORMAT("  VALOR DE LA ENTROPIA=",I15,"  VALOR DE T=",I6)
        DO 350 I=1,N
        DO 360 J=1,M
        IF(D1(J).EQ.0)GO TO 350
        S1=S1+ABS(IT(I,J)-TP(I,J))
 360    CONTINUE
 350    CONTINUE
        WRITE(JW,370) S1
 370    FORMAT("  VALOR DIFERENCIA CON LA MUESTRA=",I10)
        CLOSE1
        CLOSE2
        CLOSE3
        CLOSE4
        CLOSE5
        STOP
        END
```

Figura 3. Anejo

Subrutina para el ajuste de los valores reales que se obtienen en los distintos modelos, a valores enteros.

```
C       SUBRUTINA PARA AJUSTAR EN VALORES ENTEROS LA M. DE DISTRIBUCION
        SUBROUTINE AJUSTE(IT,N,M,T,IT,MA,D,J)
        DIMENSION T(1 ,51),IT(1 ,51),MA(N),D(6),L(14),LTOTAL(14)
        DO 13 I=1,N
  13    LTOTAL(I)=0
        DO 12 I=1,N
        DO 11 J=1,M
        IT(I,J)=INT(T(I,J)+1.E-6)
        LTOTAL(I)=LTOTAL(I)+IT(I,J)
  11    CONTINUE
  12    CONTINUE
        DO 8 J=1,M
        ITOTAL=0
        DO 3 I=1,N
        MA(I)=T(I,J)-FLOAT(IT(I,J))
   3    ITOTAL=ITOTAL+IT(I,J)
        NS=N
        NN=N
   2    K=1
        NN=NS
        DO 1 I=1,NN-1
        IF(MA(I).LE.MA(I+1))GO TO 1
        K=0
        CIN=MA(I)
        MA(I)=MA(I+1)
        MA(I+1)=CIN
        NS=I
   1    CONTINUE
        IF(K.EQ.0)GO TO 2
C       TYPE"MEZCLA MA",(MA(I),I=1,N)
        ID=INT(D(J)+1.E-6)
        NAUX=ABS(ITOTAL-ID)
        N7=N+1
C       TYPE"NAUX",NAUX
C       TYPE" N=",N
        DO 7 I=1,NAUX
   9    N7=N7-1
  10    DO 4 II=1,N
        IF(MA(N7).EQ.(T(II,J)-FLOAT(IT(II,J))))GO TO 5
   4    CONTINUE
        TYPE"N7",N7,"J",J
        IF(N7.EQ.0)GO TO 8
   5    IF(ITOTAL.GT.ID)GO TO 6
        LTOTAL(II)=LTOTAL(II)+1
        IF(II.GT.14)GO TO 10
C       TYPE"LTOTALES",LTOTAL(II),"RESIDENTES",D(II),"II",II
        IF(LTOTAL(II).GT.D(II))GO TO 9
        IT(II,J)=IT(II,J)+1
C       TYPE"MA(N7)",MA(N7),"II",II
        GO TO 7
   6    IF(IT(II,J).LE.0)GO TO 7
        IT(II,J)=IT(II,J)-1
   7    CONTINUE
   8    CONTINUE
        RETURN
        END
```

Figura 4. Anejo. DCRC

Programa del modelo de loc. esp. cond. con restr.de coste

```
C       DISTRIBUCION CONDICIONADA CON RESTRICCION DE COSTE
        DIMENSION O(14),D(61),A(14),B(61),AL(14),AL1(61),DIS(14,61)
     1,T(14,61),TP(14,61),OP(14),H1(14),D1(61),P(14,61),IT(14,61),HA(14)
        ACCEPT"JW",JW
        ACCEPT"ERROR",ERROR
        ACCEPT"ERROR COSTE",EC
        ACCEPT"COSTE  TOTAL",COSTE
        OPEN 1,"DATOS"
        OPEN 2,"MUESTRA"
        OPEN 3,"DATPRO"
        OPEN 4,"=DCRC4"
        OPEN 5,"=DCRC5"
        READ FREE(1) DIS
        READ FREE (2) TP,H1,OP,D1
        READ FREE(3) P,T
        DATA N,M/14,61/
        DATA O/221,443,41,370,293,47,421,325,256,270,115,103,45,71/
        DATA D/74,80,40,67,32,80,87,80,4,11,10,3,2,60,3,26,10,79,18,46,38,47,30,
     222,64,40,95,42,37,35,75,40,42,88,38,84,83,31,36,45,53,45,40,120,32,60,14
     3,80,60,27,67,26,24,201,10,74,22,16,35,104,32/
 2000   WRITE(JW,1)N,M
    1   FORMAT(" N=",I2,"  M=",I2)
        WRITE(JW,4)
        WRITE(JW,2)(O(I),I=1,N)
    2   FORMAT(2X,14I5)
        WRITE(JW,5)
        WRITE(JW,2)(D(I),I=1,M)
    4   FORMAT(" MATRIZ DE RESIDENTES DE LAS ZONAS")
    5   FORMAT(" MATRIZ DE CAPACIDADES DE LOS CENTROS")
        ACCEPT" ESTIMACION POR DISTANCIAS 1, CORREGIDA POR ASANO 2",AS
        IF(AS.EQ.1)GO TO 205
        WRITE(JW,15)
   15   FORMAT(" ESTIMACION CORREGIDA POR ASANO")
        DO 40 I=1,N
        DO 50 J=1,M
        IF(D1(J).EQ.0)GO TO 50
        P(I,J)=(T(I,J)+TP(I,J))/(O(I)*(1+(OP(I)*(1/H1(I)))))
   50   CONTINUE
   40   CONTINUE
  205   CONTINUE
        ACCEPT"GAMMA=",GAMMA
        DO 210 I=1,N
  210   A(I)=1/O(I)
  300   DO 220 J=1,M
        C=0
        DO 230 I=1,N
  230   C=C+P(I,J)*A(I)*O(I)*EXP(-GAMMA*DIS(I,J))
  220   B(J)=1/C
        B1=0
        DO 240 I=1,N
        C=0
        DO 250 J=1,M
  250   C=C+P(I,J)*B(J)*D(J)*EXP(-GAMMA*DIS(I,J))
        B1=B1+ABS(A(I)-1/C)
  240   A(I)=1/C
        TYPE"B1=",B1
        IF(B1.GT.ERROR) GOTO 300
        DO 400 I=1,N
        AL(I)=-LOG(A(I)*O(I))
  400   TYPE"  I=",I,"  A=",A(I),"  LANDA=",AL(I)
        DO 410 J=1,M
        AL1(J)=-LOG(B(J)*D(J))
  410   TYPE"  J",J,"  B=",B(J),"  BETA",AL1(J)
```

Figura 4. Anejo

(continuación)

```
      DO 1000 I=1,N
      DO 1002 J=1,M
1002  T(I,J)=P(I,J)*A(I)*O(I)*B(J)*D(J)*EXP(-GAMMA*DIS(I,J))
1000  CONTINUE
      DO 10 I=1,N
      DO 20 J=1,M
20    COSTE1=COSTE1+T(I,J)*DIS(I,J)
 10   CONTINUE
      DIF=ABS(COSTE-COSTE1)
      IF(DIF.LT.EC)GO TO 4000
      COSTE1=0
      TYPE"  DIF.=",DIF,"  GAMMA=",GAMMA
      GO TO 205
4000  WRITE(JW,3006)
3006  FORMAT("  DISTRIBUCION  CONDICIONADA CON RESTRICCION DE COSTE ")
      CALL AJUSTE1(N,M,T,IT,HA,O,D)
      DO 9000 I=1,N
9000  WRITE(JW,9001)(IT(I,J),J=1,M)
9001  FORMAT(1X,15I7)
C     CALCULO DE LA ENTROPIA
      DO 310 I=1,N
      DO 310 J=1,M
      ITOT=ITOT+IT(I,J)
      IF(IT(I,J).EQ.0)GO TO 310
      W1=W1-(IT(I,J)*LOG(IT(I,J))-IT(I,J))
310   CONTINUE
      W=ITOT*LOG(ITOT)-ITOT+W1
      WRITE(JW,340) W,ITOT
340   FORMAT("  VALOR DE LA ENTROPIA=",I15," VALOR DE T=",I6)
      TYPE"  T=",ITOT,"  W1=",W1," ENTROPIA=",W
      DO 350 I=1,N
      DO 360 J=1,M
      IF(D1(J).EQ.0)GO TO 360
      S=S+ABS(IT(I,J)-TP(I,J))
      STOT=STOT+1
360   CONTINUE
350   CONTINUE
      MEDIA=S/STOT
      WRITE(JW,370) MEDIA
370   FORMAT("  VALOR MEDIA DE DIFERENCIAS CON LA MUESTRA=",I9)
      DO 9999 I=1,N
      DO 9999 J=1,M
      IF(D1(J).EQ.0)GO TO 9999
      IT(I,J)=IT(I,J)-TP(I,J)
9999  CONTINUE
      WRITE(JW,9888)
9888  FORMAT(///,1X," MATRIZ DE DEFICIT")
      DO 9990 I=1,N
9990  WRITE(JW,9001)(IT(I,J),J=1,M)
      CLOSE1
      CLOSE2
      CLOSE3
      CLOSE4
      CLOSE5
      STOP
      END
```

Figura 5. Anejo.DWILSON

Programa del modelo de Wilson.

```
C       DISTRIBUCION DE WILSON
        DIMENSION O(14),D(61),A(14),B(61),AL(14),AL1(61),DIS(14,61)
     1,T(14,61),TP(14,61),OP(14),H1(14),D1(61),IT(14,61),HA(14)
        ACCEPT"JW",JW
        ACCEPT"ERROR",ERROR
        ACCEPT"ERROR COSTE",EC
        ACCEPT"COSTE  TOTAL",COSTE
        OPEN 1,"DATOS"
        READ FREE(1) DIS
        OPEN 2,"MUESTRA"
        OPEN 4,"FDWILSON"
        READ FREE (2) TP,H1,OP,D1
        DATA N,M/14,61/
        DATA O/221,443,41,370,293,47,421,325,256,270,115,103,45,71/
        DATA D/74,80,40,67,32,50,87,80,4,11,10,3,2,60,3,26,10,79,14,45,36,47,30,
     222,64,49,95,42,87,35,75,40,42,88,35,84,83,31,36,45,53,45,46,120,32,65,14
     3,80,60,27,57,26,24,201,10,74,22,15,35,104,32/
 2000   WRITE(JW,1)N,M
    1   FORMAT(" N=",I2," M=",I2)
        WRITE(JW,4)
        WRITE(JW,2)(O(I),I=1,N)
    2   FORMAT(2X,14I5)
        WRITE(JW,5)
        WRITE(JW,2)(D(I),I=1,M)
    4   FORMAT(" MATRIZ DE RESIDENTES DE LAS ZONAS")
    5   FORMAT(" MATRIZ DE CAPACIDADES DE LOS CENTROS")
  205   CONTINUE
        ACCEPT"GAMMA=",GAMMA
        DO 210 I=1,N
  210   A(I)=1/O(I)
  300   DO 220 J=1,M
        C=0
        DO 230 I=1,N
  230   C=C+A(I)*O(I)*EXP(-GAMMA*DIS(I,J))
  220   B(J)=1/C
        B1=0
        DO 240 I=1,N
        C=0
        DO 250 J=1,M
  250   C=C+B(J)*D(J)*EXP(-GAMMA*DIS(I,J))
        B1=B1+ABS(A(I)-1/C)
  240   A(I)=1/C
        TYPE"B1=",B1
        IF(B1.GT.ERROR) GOTO 300
        DO 400 I=1,N
        AL(I)=-LOG(A(I)*O(I))
  400   TYPE"  I=",I,"  A=",A(I),"  LANDA=",AL(I)
        DO 410 J=1,M
        AL1(J)=-LOG(B(J)*D(J))
  410   TYPE"  J",J,"  B=",B(J),"  BETA",AL1(J)
        DO 1000 I=1,N
        DO 1002 J=1,M
 1002   T(I,J)=A(I)*O(I)*B(J)*D(J)*EXP(-GAMMA*DIS(I,J))
 1000   CONTINUE
        DO 10 I=1,N
        DO 20 J=1,M
   20   COSTE1=COSTE1+T(I,J)*DIS(I,J)
   10   CONTINUE
        DIF=ABS(COSTE-COSTE1)
        IF(DIF.LT.EC)GO TO 4000
        COSTE1=0
        TYPE"  DIF.=",DIF,"  GAMMA=",GAMMA
        GO TO 205
```

Figura 5. Anejo

(continuación)

```
4000    WRITE(JW,3006)
 3006   FORMAT("  DISTRIBUCION  DE  WILSUN")
        CALL AJUSTEI(N,M,T,IT,HA,D,Q)
        DO 9000 I=1,N
 9000   WRITE(JW,9001)(IT(I,J),J=1,M)
 9001   FORMAT(1X,15I7)
C       CALCULO DE LA ENTROPIA
        ITOT=0
        W1=0
        DO 310 I=1,N
        DO 320 J=1,M
        ITOT=ITOT+IT(I,J)
        IF(IT(I,J).EQ.0)GO TO 320
        W1=W1-((IT(I,J)*LOG(IT(I,J)))-IT(I,J))
 320    CONTINUE
        TYPE" ITOTAL = ",ITOT
 310    CONTINUE
        W=ITOT*LOG(ITOT)-ITOT+W1
        WRITE(JW,340) W,ITOT
 340    FORMAT("  VALOR DE LA ENTROPIA=",I15," VALOR  DE  T=",I6)
        DO 350 I=1,N
        DO 360 J=1,M
        IF(D1(J).EQ.0)GO TO 360
        S=S+ABS(IT(I,J)-TP(I,J))
 360    CONTINUE
 350    CONTINUE
        WRITE(JW,370) S
 370    FORMAT("  VALOR DIFERENCIA CON LA MUESTRA=",I9)
        DO 9999 I=1,N
        DO 9999 J=1,M
        IF(D1(J).EQ.0)GO TO 9999
        IT(I,J)=IT(I,J)-TP(I,J)
 9999   CONTINUE
        WRITE(JW,9888)
 9888   FORMAT(///,1X," MATRIZ DE DEFICIT ")
        DO 9990 I=1,N
 9990   WRITE(JW,9991)(IT(I,J),J=1,M)
 9991   FORMAT(1X,15I7)
        CLOSE1
        CLOSE2
        CLOSE4
        STOP
        END
```

Figura 6. Anejo. PSAN

Programa para el dibujo de los resultados.

```
C       PROGRAMA PARA DIBUJAR SALIDA DE RESULTADOS
        DIMENSION X(200),Y(200),IT(14,61)
        CALL PLOTS (0,0,7)
        ACCEPT"ESCALA",FACT
        CALL FACTOR(FACT/2.54)
        M=61
        OPEN 1,"COORDENADAS"
        OPEN 2,"FDWILSON"
        ACCEPT"FICHERO A LEER",JW
        ACCEPT"ALTURA DE LOS NUMEROS DE LAS ZONAS",H1
        ACCEPT"ALTURA DE LOS NUMEROS DE LOS CENTROS",H2
        ACCEPT"ALTURA DE LOS PUNTOS PARA LOS CENTROS",H3
        ACCEPT"ALTURA LETRAS PEQUENAS",H4
        ACCEPT"ALTURA LETRAS GRANDES",H5
        ACCEPT"ALTURA ROTULO",H6
        ACCEPT"VALOR DE I7=",I7
  9     READ FREE(1)N,(X(I),Y(I),I=1,N)
        IF(N.EQ.0)GO TO 8
C       DIBUJA LIMITES ZONAS
        CALL PLOT(X(1),Y(1),3)
        DO 2 J=2,N
  2     CALL PLOT(X(J),Y(J),2)
        GO TO 9
C       NUMERO DE ZONAS
  8     READ FREE(1) NZONAS,(X(I),Y(I),I=1,NZONAS)
        DO 3 I=1,NZONAS
        FPN=I
  3     CALL NUMBER(X(I),Y(I),H1,FPN,0.,-1)
C       DIBUJA NOMBRES PUEBLOS
        CALL SYMBOL(32.9,22.,H5,15HMAR  CANTABRICO,0.,15)
        CALL SYMBOL(7.5,22.5,H5,15HMAR  CANTABRICO,25.,15)
        CALL SYMBOL(3.,3.3,H4,29HTERMINO DE HERRERA DE CAMARGO,0.,29)
        CALL SYMBOL(10.,10.3,H5,12HPENACASTILLO,0.,12)
        CALL SYMBOL(5.7,17.2,H5,9HSAN ROMAN,0.,9)
        CALL SYMBOL(14.5,19.5,H5,5HMONTE,0.,5)
        CALL SYMBOL(22.5,23.5,H5,5HCUETO,0.,5)
        CALL SYMBOL(27.,11.,H5,18HBAHIA DE SANTANDER,0.,18)
        CALL SYMBOL(26.,21.,H4,9HLA PEREDA,0.,9)
        CALL SYMBOL(2.,15.5,H4,10HTERMINO DE,0.,10)
        CALL SYMBOL(2.,15.,H4,10HSANTA CRUZ,0.,10)
        CALL SYMBOL(2.,14.5,H4,9HDE BEZANA,0.,9)
        CALL SYMBOL(31.4,21.,H4,12HEL SARDINERO,0.,12)
  6     READ FREE(1) NCENTROS,(X(I),Y(I),I=1,NCENTROS)
        IF(JW.EQ.3)GO TO 24
        IF(JW.EQ.4)GO TO 24
        GO TO 23
 24     ACCEPT"N. DE LINEAS A SALTAR",IL2
        DO 26 I=1,IL2
        READ(JW,13)
 26     CONTINUE
 23     IF(JW.EQ.6)GO TO 27
        GO TO 28
 27     ACCEPT"LINEAS A SALTAR",I9
        DO 20 I=1,I9
        READ(JW,13)
 20     CONTINUE
        TYPE"I7 = ",I7
        GO TO 21
 28     DO 12 I=1,10
 12     READ(JW,13)
 13     FORMAT(1X)
 21     N=14
        DO 10 I=1,N
        READ(JW,11)(IT(I,J),J=1,M)
 10     CONTINUE
 11     FORMAT(1X,15I7)
        DO 7 J=1,NCENTROS
        CALL SYMBOL(X(J)-H3/2,Y(J),H3,30,0.,-1)
        IF(IT(I7,J).EQ.0)GOTO 7
        FPN=IT(I7,J)
        TYPE"FPN",FPN
        CALL NUMBER(X(J),Y(J),H2,FPN,0.,-1)
  7     CONTINUE
        CALL SYMBOL(27.,4.,H6,20HDISTRIBUCION ZONA    ,0.,20)
        FPN=I7
        CALL NUMBER(999.,999.,H6,FPN,0.,-1)
        CALL PLOT(0.,0.,999)
        CLOSE1
        CLOSE2
        STOP
        END
```