



*SAN JUAN DE PASTO(NARIÑO)
14 DE ABRIL DE 2016*

Ceros de Textura en el Sector de Quarks del Modelo Estándar

*Informe Final Proyecto de Investigación:
“Higgses en los Modelos 3-3-1”
Acuerdo No. 012.*

por

Yithsbey Giraldo

*UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
San Juan de Pasto, Nariño
Colombia*

Contenido

1. Introducción	3
1.1. Textura de Fritzsch con seis ceros	4
1.2. Cinco ceros de textura	5
1.3. Datos experimentales	5
1.3.1. Masas de los quarks y la CKM	6
2. Transformaciones de Base Débil	7
2.1. Matrices de masa iniciales para los quarks	8
2.2. Un sólo autovalor de masa negativo	9
3. Texturas de Cinco Ceros	10
3.1. Fases no físicas	11
3.2. Textura numérica de cinco ceros	12
3.2.1. Patrón con dos ceros en la diagonal	12
3.3. Textura de cinco ceros analítica para las matrices de masa de los quarks	16
4. Conclusiones	19
A. Productos del Proyecto de Investigación	20
A.1. Acuerdos	21
A.2. Ponencias y Congresos	24
A.3. Artículos publicados	28

Capítulo 1

Introducción

Si bien, el sector gauge del Modelo Estándar (ME) con la simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ es muy exitoso, el sector de Yukawa del ME sigue siendo aún poco conocido. El origen de las masas de los fermiones, los ángulos de mezcla y la violación CP permanecen como problemas abiertos de la física de partículas. Ha habido una gran cantidad de estudios sobre las simetrías fundamentales posibles en las matrices de acoplamiento de Yukawa del ME [1, 2, 3]. Por consiguiente, en ausencia de una teoría más fundamental de las interacciones, un enfoque independiente del modelo fenomenológico para buscar posibles texturas o simetrías en las matrices de masa fermiónicas sigue jugando todavía un papel importante.

En el ME, el término de masa está dado por

$$- \mathcal{L}_M = \bar{u}_R M_u u_L + \bar{d}_R M_d d_L + h.c., \quad (1.1)$$

donde las matrices de masa M_u y M_d son matrices complejas tridimensionales. En el caso más general, estas matrices contienen 36 parámetros reales, siendo este valor mucho mayor que los diez observables físicos que van a describir: seis masas de los quarks, tres ángulos de mezcla de sabor y una fase que viola la simetría carga-paridad (CP). Por este motivo, en principio, el modelo no es predictivo. Sin embargo, modelos como el ME o sus extensiones, donde los campos derechos son singletes bajo $SU(2)$, siempre es posible elegir una base adecuada para los quarks derechos haciendo uso, para ello, del teorema de la descomposición polar del álgebra matricial, en el que siempre se puede expresar una matriz general como el producto de una matriz hermítica y una matriz unitaria. Podemos entonces considerar que las matrices de masa de los quarks son hermíticas, puesto que la matriz unitaria asociada, puede ser absorbida por los campos de los quarks derechos. Por esta razón, sin perder generalidad, las matrices de masa de los quarks M_u y M_d pueden considerarse hermíticas [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:

$$M_u^\dagger = M_u, \quad \text{y} \quad M_d^\dagger = M_d. \quad (1.2)$$

Esto reduce inmediatamente el número de parámetros libres de 36 a 18. Este número sigue siendo aún grande comparado con los diez parámetros físicos correspondiente a las seis masas de los quarks y a los cuatro parámetros físicos de la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Esta redundancia está estrechamente relacionada con el hecho de que uno tiene la libertad de hacer transformaciones de base débil (en inglés *weak-basis (WB) transformations*) en virtud de lo

cual las matrices de masa de los quarks cambian, pero las corrientes gauge permanecen diagonales y reales. En el siguiente capítulo estudiaremos en más detalle las transformaciones de base débil.

Por otro lado, tomando en cuenta que actualmente no hay una teoría viable para la física de sabores, se recurre, por lo general, a modelos fenomenológicos; entre ellos, las texturas en las matrices de masa. Texturas explícitas en las matrices de masa fueron introducidas por Fritzsche [11, 12, 13, 14], a fin de comprender el patrón de mezclas de quarks y la violación CP. Detalles adicionales al respecto son discutidas en [15, 16, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 2, 3, 18, 19, 20, 21]. Específicamente, la estructura de las matrices de masa de los quarks, que regulan las características que mezclan los sabores de los quarks, se desconoce completamente en el Modelo Estándar (ME) electrodébil. Una teoría más fundamental que el Modelo Estándar debería ser capaz de determinar las matrices de masa de los quarks, de tal modo que los parámetros físicos relevantes (la masa de los seis quarks, los tres ángulos de mezcla y una fase que viola la simetría CP) podrían ser calculados. Intentos en esta dirección, es decir, partiendo de las teorías de la gran unificación supersimétrica y supercuerdas, son alentadoras, pero no han probado ser muy exitosas. Fenomenológicamente, un enfoque usualmente usado, es investigar las texturas simples de las matrices de masa de los quarks que puedan reproducir relaciones consistentes y comprobables experimentalmente entre las masas de los quarks y los parámetros de mezcla [4]. Las simetrías discretas de sabor ocultas en tales texturas podrían finalmente proporcionar información de la dinámica subyacente responsable de la generación de masa de los quarks y la violación CP.

Una propuesta simple e instructiva considera seis ceros de textura para las matrices hermíticas de masa de los quarks. Esta propuesta la hizo Fritzsche por primera vez en la Referencia [1]. Un caso diferente con seis ceros de textura, no paralelos, fue propuesto en [22]. Ambas texturas son físicamente descartadas actualmente [20, 21], porque, entre otras cosas, no reproducen algunas entradas de la matriz de mezcla (V) de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). En concreto, en ambos casos, la magnitud de $|V_{ub}/V_{cb}|$ predicha, dada por $\sqrt{m_u/m_c}$, es demasiado baja ($V_{ub}/V_{cb} \approx 0.05$ o menor para valores razonables de las masas de los quarks m_u y m_c [23]) de acuerdo con el resultado experimental actual ($|V_{ub}/V_{cb}|_{\text{ex}} \approx 0.09$ [23]). Debido a esto, algunos autores han recomendado enfáticamente usar sólo cuatro ceros de textura [20, 15, 16]. Mostraremos en este trabajo que con cuatro ceros de textura las predicciones son fácilmente factibles e, incluso, podemos conseguir texturas de cinco ceros viables. Pero primero, estudiemos la textura de seis ceros propuesta por Fritzsche.

1.1. Textura de Fritzsche con seis ceros

Como ya dijimos, la hermiticidad de las matrices de masa de los quarks, establecido en la ecuación (1.2), reduce el número de parámetros libres de 36 a 18, que, sin embargo, es todavía un número grande comparado con el número de observables (10 en total). Con la idea de reducir el número de parámetros libres, Weinberg habló de texturas, y luego Fritzsche [24, 11, 12] propuso texturas específicas en las matrices de masa, que por un lado resultan en relaciones experimentales favorables y auto-consistentes entre las masas de los quarks y los parámetros de mezcla de sabor; y por otro lado, las simetrías discretas de sabor ocultas en estas texturas de las matrices de masa, podrían finalmente proporcionar evidencias útiles hacia la dinámica de generación de masa de los quarks y la violación CP en un marco teórico más fundamental. A fin de entender las texturas y su utilidad, consideremos el caso específico de la textura de seis ceros propuesta inicialmente por

Fritzsch [12], dado por

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & A_U & 0 \\ A_U^* & 0 & B_U \\ 0 & B_U^* & C_U \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & A_D & 0 \\ A_D^* & 0 & B_D \\ 0 & B_D^* & C_D \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

donde ambas matrices tienen un paralelismo respecto de los tres ceros de textura que cada uno contiene. Esta propuesta de Fritzsch se descartó debido al valor grande de la masa del quark “t”, de tal manera que la predicción $|V_{cb}|$ está muy lejos de los datos experimentales [6, 25]. Además, como dijimos anteriormente, la magnitud predicha de $|V_{ub}/V_{cb}| = \sqrt{m_u/m_c}$ es demasiado baja ($V_{ub}/V_{cb} \approx 0.05$ o menor para valores razonables de las masas de los quarks m_u y m_c [10]) de acuerdo con el resultado experimental actual ($|V_{ub}/V_{cb}|_{\text{ex}} \approx 0.09$ [23]).

Una textura diferente con seis ceros, no todos paralelos, fue dada en [22]

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & C_u & 0 \\ C_u^* & 0 & B_u \\ 0 & B_u^* & A_u \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & C_d & 0 \\ C_d^* & B_d & 0 \\ 0 & 0 & A_d \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

que es descartada por las mismas razones que el modelo de seis ceros de textura propuesto por Fritzsch.

En consecuencia, el siguiente caso a considerar es la textura de cinco ceros, que ha sido estudiada ampliamente por un grupo de investigadores, pero los resultados han sido contradictorios.

1.2. Cinco ceros de textura

Varios autores han explorado, en trabajos recientes, las matrices de masa de los quarks con cinco ceros de textura [26, 19, 7, 27, 8, 6, 15, 28, 29, 30]. Una conclusión general dada por ellos es que las texturas de cinco ceros no son modelos viables, o que tienen una viabilidad limitada. Sin embargo, ejemplos numéricos que muestran la viabilidad del modelo fueron dados por mí en el artículo [9], donde se comprueba su validez mediante la adición de fases no físicas en las matrices de diagonalización [31]. Por lo tanto, en su momento, presentamos un método analítico para poder determinar modelos que contengan varios ceros de textura en el sector matricial de masa de los quarks, teniendo en cuenta los últimos datos experimentales disponibles [23]. Utilizamos de forma simultánea, en nuestra investigación, dos enfoques muy usuales: un enfoque consiste en colocar ceros (llamados ceros de textura) en ciertas entradas de las matrices de masa de los quarks, que pueden predecir relaciones consistentes y favorables experimentalmente, entre masas de los quarks y los parámetros de mezcla de sabor [22, 32, 33]; el cual se utiliza en conjunción con el otro enfoque, conocido como la transformación WB (transformación de base débil), que transforma las representaciones matriciales de masa de los quarks a representaciones equivalentes [15].

1.3. Datos experimentales

Antes de introducirnos a calcular ceros de textura para las matrices de masa de los quarks, necesitamos dar los datos experimentales más recientes de las masas de los quarks y los ángulos de mezcla CKM.

1.3.1. Masas de los quarks y la CKM

Como los parámetros de la matriz CKM $|V_{ij}|$ están dados a la escala de energía $\mu = m_Z$, donde m_Z es la masa del bosón neutro Z, demos las masas de los quarks (en unidades de MeV) a esta escala ($\mu = m_Z$) [10, 34, 35, 36].

$$\begin{aligned} m_u &= 1.38_{-0.41}^{+0.42}, \quad m_c = 638_{-84}^{+43}, \quad m_t = 172100 \pm 1200, \\ m_d &= 2.82 \pm 0.48, \quad m_s = 57_{-12}^{+18}, \quad m_b = 2860_{-60}^{+160}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

La matriz de mezcla CKM [37, 38, 23] es un matriz unitaria 3×3 , que puede ser parametrizado por tres ángulos de mezcla y la fase de Kobayashi-Maskawa (KM) que viola la simetría carga-paridad (CP) [38]. Es usual escoger la siguiente representación estándar [39]

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

donde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, y los ángulos se encuentran en el primer cuadrante, así que $s_{ij}, c_{ij} \geq 0$. Y δ es la fase responsable de la violación CP en los procesos de cambio de sabor en el ME.

La parametrización de Wolfenstein [40, 41, 42]

$$\begin{aligned} s_{12} &= \lambda, & s_{23} &= A \lambda^2, \\ s_{13} e^{i\delta} &= \frac{A \lambda^3 (\bar{\rho} + i \bar{\eta}) \sqrt{1 - A^2 \lambda^4}}{\sqrt{1 - \lambda^2} [1 - A^2 \lambda^4 (\bar{\rho} + i \bar{\eta})]}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

exhibe la jerarquía experimental $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$. El pequeño rango permitido para algunos elementos de la matriz de mezcla CKM, y debido a la unitariedad, permite ajustar de acuerdo al método dado en las Referencias [40, 43, 42], los parámetros de Wolfenstein de la ecuación (1.7)

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.22537 \pm 0.00061, & A &= 0.814_{-0.024}^{+0.023}, \\ \bar{\rho} &= 0.117 \pm 0.021, & \bar{\eta} &= 0.353 \pm 0.013. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Los resultados de ajuste para los valores de los nueve elementos de la CKM son

$$V = \begin{pmatrix} 0.974267 & 0.225369 & 0.00355431 e^{-i1.25135} \\ 0.225222 e^{-i3.14099} & 0.97343 e^{-i3.23011 \times 10^{-5}} & 0.0413441 \\ 0.00886248 e^{-i0.379708} & 0.0405392 e^{-i3.12285} & 0.999139 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

con magnitudes

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00014 & 0.22536 \pm 0.00061 & 0.00355 \pm 0.00015 \\ 0.22522 \pm 0.00061 & 0.97343 \pm 0.00015 & 0.0414 \pm 0.0012 \\ 0.00886_{-0.00032}^{+0.00033} & 0.0405_{-0.0012}^{+0.0011} & 0.99914 \pm 0.00005 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

Y la cantidad invariante de Jarlskog es

$$J = \text{Im}(V_{us} V_{ub}^* V_{cs}^* V_{cb}) = (3.06_{-0.20}^{+0.21}) \times 10^{-5}. \quad (1.11)$$

Capítulo 2

Transformaciones de Base Débil

La transformación de base débil (conocido en inglés como Weak Basis Transformation o WB Transformation) más general que deja el contenido físico invariante y las matrices de masa Hermíticas, consiste en la transformación

$$\begin{aligned} M_u &\longrightarrow M'_u = U^\dagger M_u U, \\ M_d &\longrightarrow M'_d = U^\dagger M_d U, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde U es una matriz unitaria arbitraria. Podemos decir que las dos representaciones matriciales de masa $M_{u,d}$ y $M'_{u,d}$ son equivalentes respectivamente. Lo que implica que el número de representaciones equivalentes es infinita. Este tipo de transformaciones lo vamos a usar bastante más adelante.

Una cosa interesante es que las transformaciones WB puede generar todas las representaciones matriciales de masa a partir de una base matricial específica. Empecemos con una representación matricial Hermítica específica para las matrices de masa de los quarks dado por (M_u, M_d) , cuya diagonalización

$$U_u^\dagger M_u U_u = D_u \quad \text{y} \quad U_d^\dagger M_d U_d = D_d. \quad (2.2)$$

nos da las masas de los quarks “up” (u) y “down” (d) contenidos en las matrices diagonales D_u y D_d . De donde obtenemos la matriz de mezcla CKM

$$V_{ckm} = U_u^\dagger U_d. \quad (2.3)$$

Ahora consideremos otra base igualmente válida (M'_u, M'_d) , tal que

$$U_u'^\dagger M'_u U'_u = D_u \quad \text{and} \quad U_d'^\dagger M'_d U'_d = D_d, \quad (2.4)$$

y

$$V_{ckm} = U_u'^\dagger U'_d. \quad (2.5)$$

Igualando las expresiones (2.3) y (2.5) nos da que

$$U_u^\dagger U_d = U_u'^\dagger U'_d \Rightarrow U_u' U_u^\dagger = U'_d U_d^\dagger. \quad (2.6)$$

E igualando (2.2) y (2.4), nos da respectivamente

$$U_u'^\dagger M'_u U'_u = U_u^\dagger M_u U_u \quad \text{y} \quad U_d'^\dagger M'_d U'_d = U_d^\dagger M_d U_d, \quad (2.7)$$

que nos permite expresar a M_u y M_d en términos de M'_u y M'_d de la siguiente manera

$$M_u = U_u U_u'^{\dagger} M'_u U'_u U_u^{\dagger}, \quad (2.8)$$

$$M_d = U_d U_d'^{\dagger} M'_d U'_d U_d^{\dagger}. \quad (2.9)$$

Al usar (2.6) en (2.9), obtenemos que

$$M_d = U_u U_u'^{\dagger} M'_d U'_u U_u^{\dagger}. \quad (2.10)$$

donde $U = U_u U_u'^{\dagger}$ es una matriz unitaria, que nos permite afirmar lo siguiente

“En el ME, dos bases matriciales Hermíticas para las masas de los quarks, dadas por (M_u, M_d) y (M'_u, M'_d) , con las mismas masas y parámetros de mezcla de sabor, a una escala específica de energía, están relacionadas a través de una transformación WB,” (2.11)

2.1. Matrices de masa iniciales para los quarks

Como dijimos anteriormente podemos usar una base específica para las matrices de masa de los quarks, de donde podemos determinar cualquier otra base usando la transformación WB. Hay dos bases muy simples, generales y cómodas para trabajar [10, 15, 31, 44, 45]. Una de ellas es la *base diagonal “up”* dada por

$$M_u = D_u = \begin{pmatrix} \lambda_{1u} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2u} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3u} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$M_d = V D_d V^{\dagger},$$

y la otra es la *base diagonal “down”*

$$M_u = V^{\dagger} D_u V,$$

$$M_d = D_d = \begin{pmatrix} \lambda_{1d} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3d} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde V es la matriz de mezcla CKM, y los autovalores de masa de los quarks $|\lambda_{iu,d}|$ ($i = 1, 2, 3$) para “up” ($q = d$) y “down” ($q = u$) satisfacen

$$|\lambda_{1u}| = m_u, |\lambda_{2u}| = m_c, |\lambda_{3u}| = m_t, \quad (2.14)$$

$$|\lambda_{1d}| = m_d, |\lambda_{2d}| = m_s, |\lambda_{3d}| = m_b.$$

Los $\lambda_{iu,d}$ pueden ser positivos o negativos, donde el signo menos puede ser luego absorbido por los quarks derechos, y satisfacen la jerarquía

$$|\lambda_{1u,d}| \ll |\lambda_{2u,d}| \ll |\lambda_{3u,d}|, \quad (2.15)$$

Las bases (2.12) y (2.13) son generales y pueden ser deducidas a partir de cualquier representación matricial de masa Hermítica M_u and M_d . Hagamos una transformación WB usando la matriz unitaria U_u que diagonaliza a M_u , de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} M_u &\longrightarrow M'_u = U_u^\dagger M_u U_u = D_u, \\ M_d = U_d D_d U_d^\dagger &\longrightarrow M'_d = U_u^\dagger (U_d D_d U_d^\dagger) U_u, \\ &= (U_u^\dagger U_d) D_d (U_d^\dagger U_u), \\ &= V D_d V^\dagger, \end{aligned}$$

donde de la matriz de mezcla $V = U_u^\dagger U_d$. En el otro caso nos da que

$$\begin{aligned} M_d &\longrightarrow M'_d = U_d^\dagger M_d U_d = D_d, \\ M_u = U_u D_u U_u^\dagger &\longrightarrow M'_u = U_d^\dagger (U_u D_u U_u^\dagger) U_d, \\ &= (U_d^\dagger U_u) D_u (U_u^\dagger U_d), \\ &= V^\dagger D_u V. \end{aligned}$$

2.2. Un sólo autovalor de masa negativo

Como algunos ceros de textura se encuentran en las entradas diagonales de las matrices de masa de los quarks “up” y “down”, al menos uno y a lo sumo dos de sus autovalores deben ser negativos [15]. Para el caso de dos autovalores negativos, las matrices de masa pueden reducirse a un sólo autovalor negativo, añadiendo un signo a las matrices de masa de la siguiente manera

$$M_u = -(-M_u) \quad \text{y/o} \quad M_d = -(-M_d),$$

y aplicando la transformación WB a los términos entre paréntesis. Así que consideraremos que cada matriz de masa M_u y M_d contiene sólo un autovalor negativo.

Capítulo 3

Texturas de Cinco Ceros

Analícemos primero el siguiente problema que luego usaremos en casos especiales. Consideremos la siguiente estructura para las matrices de masa de los quarks

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_q| & 0 \\ |\xi_q| & \gamma_q & |\beta_q| \\ 0 & |\beta_q| & \alpha_q \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde $q = u$ para la matriz de masa “up”, y $q = d$ para la matriz de masa “down”. La matriz de masa (3.1) no contiene las fases de los parámetros, puesto que pueden ser incluidos después a través de una transformación WB. Como M_q es una matriz hermítica, los parámetros γ_q y α_q son números reales.

La matriz M_q se diagonaliza con la matriz unitaria U_q de la siguiente manera

$$U_q^\dagger M_q U_q = \begin{pmatrix} \lambda_{1q} & & \\ & \lambda_{2q} & \\ & & \lambda_{3q} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

donde los λ_{iq} ($i = 1, 2, 3$) son definidos en (2.14). Observemos que γ_q , $|\beta_q|$ y $|\xi_q|$ pueden ser expresados en términos de los λ_{iq} y α_q usando las funciones matriciales invariantes $\text{tr} M_q$, $\text{tr} M_q^2$ y $\det M_q$ de la siguiente forma.

$$\gamma_q = \lambda_{1q} + \lambda_{2q} + \lambda_{3q} - \alpha_q, \quad (3.3a)$$

$$|\beta_q| = \sqrt{\frac{(\alpha_q - \lambda_{1q})(\alpha_q - \lambda_{2q})(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{\alpha_q}}, \quad (3.3b)$$

$$|\xi_q| = \sqrt{\frac{-\lambda_{1q}\lambda_{2q}\lambda_{3q}}{\alpha_q}}. \quad (3.3c)$$

Las ecuaciones (3.3) son números reales, debido a esto α_q se encuentra en un intervalo. Miremos las diferentes posibilidades.

- Si $\lambda_{1q} < 0$, $\lambda_{2q} > 0$ y $\lambda_{3q} > 0$ entonces

$$|\lambda_{2q}| < \alpha_q < |\lambda_{3q}|. \quad (3.4)$$

- Si $\lambda_{1q} > 0$, $\lambda_{2q} < 0$ y $\lambda_{3q} > 0$ entonces

$$|\lambda_{1q}| < \alpha_q < |\lambda_{3q}|. \quad (3.5)$$

- Si $\lambda_{1q} > 0$, $\lambda_{2q} > 0$ y $\lambda_{3q} < 0$ entonces

$$|\lambda_{1q}| < \alpha_q < |\lambda_{2q}|. \quad (3.6)$$

En el anterior análisis, tomamos en cuenta la jerarquía (2.15) y sólo se consideró un autovalor negativo de acuerdo a lo establecido en la Sección 2.2.

El resultado analítico exacto para la matriz de diagonalización U_q dado en (3.2) es [20, 9, 46]

$$U_q = \begin{pmatrix} e^{ix_q} \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}\lambda_{3q}(\alpha_q - \lambda_{1q})}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & e^{iy_q} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}\lambda_{3q}(\lambda_{2q} - \alpha_q)}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{1q}\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{3q})}{\alpha_q(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \\ -e^{ix_q} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}(\lambda_{1q} - \alpha_q)}{(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & e^{iy_q} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{2q})}{(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{3q}(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \\ e^{ix_q} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}(\alpha_q - \lambda_{2q})(\alpha_q - \lambda_{3q})}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & -e^{iy_q} \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{3q}(\alpha_q - \lambda_{1q})(\alpha_q - \lambda_{2q})}{\alpha_q(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

donde las fases incluidas x_q y y_q hacen compatible la matriz de mezcla CKM obtenida, con la convención escogida en (1.6). No necesitamos incluir una fase en la tercera columna puesto que puede ser absorbida en las otras fases. Demostremos que estas fases no tienen ningún significado físico.

3.1. Fases no físicas

Las fases adicionales introducidas en en la matriz de diagonalización (3.7) dejan el contenido físico invariable, incluida la cantidad invariante de Jarlskog. Esto puede ser visto realizando los siguientes productos en (3.7), para $q = u$ y $q = d$

$$U_u = U'_u f_1 \quad \text{y} \quad U_d = U'_d f_2,$$

donde las matrices de diagonalización U'_u y U'_d no contienen las fases dadas en (3.7), puesto que estas fases se encuentran en las matrices diagonales f_1 y f_2 ,

$$f_1 = \begin{pmatrix} e^{ix_u} & & \\ & e^{iy_u} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_2 = \begin{pmatrix} e^{ix_d} & & \\ & e^{iy_d} & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con la fórmula (2.3) la matriz de mezcla CKM que obtenemos es

$$V_{ckm} = U_u U_d = (U'_u f_1)^\dagger (U'_d f_2) = f_1^\dagger (U'^{\dagger}_u U'_d) f_2,$$

así que

$$U'^{\dagger}_u U'_d = f_1 V_{ckm} f_2^\dagger. \quad (3.8)$$

Por tanto la matriz de mezcla CKM se puede obtener con las matrices de diagonalización U'_u y U'_d , o con U_u y U_d . La diferencia se presenta en las fases incluidas en las matrices diagonales f_1 y f_2 , que no tienen ningún significado físico y se pueden obviar [47]. La cantidad invariante de Jarlskog, como cualquier otra cantidad física, no se ve afectada al incluir estas fases en (3.7).

3.2. Textura numérica de cinco ceros

Las matrices de masa de los quarks *realistas* contienen a lo sumo tres ceros de textura en sus elementos matriciales. Además, tenemos sólo dos patrones matriciales de masa dependiendo de cómo los tres ceros de textura se distribuyen en las entradas de las matrices de masa. En un caso tenemos una matriz con dos ceros en la diagonal (*patrón con dos ceros en la diagonal*) y en el otro una matriz con un cero en la diagonal (*patrón con un cero en la diagonal*), tal como se indica en la Tabla 3.1. En esta tabla podemos observar que haciendo transformaciones WB con matrices de permutación p , obtenemos todos los casos viables para cada patrón. Es importante resaltar que no se pueden obtener más configuraciones viables con tres ceros. Por consiguiente, la Tabla 3.1 resume todos los casos viables con tres ceros para las matrices de masa “up” y “down”. Estos patrones son generales y nos es necesario incluir fases. Estudiemos cada patrón.

Matrices de Permutación	Patrón con dos ceros en la diagonal ($p_i M_q p_i^T$)	Patrón con un cero en la diagonal ($p_i M_q p_i^T$)
$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \xi_q & 0 \\ \xi_q & 0 & \beta_q \\ 0 & \beta_q & \alpha_q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \xi_q & 0 \\ \xi_q & \gamma_q & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_q \end{pmatrix}$
$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_q \\ 0 & \alpha_q & \beta_q \\ \xi_q & \beta_q & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_q \\ 0 & \alpha_q & 0 \\ \xi_q & 0 & \gamma_q \end{pmatrix}$
$p_3 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_q & \beta_q & 0 \\ \beta_q & 0 & \xi_q \\ 0 & \xi_q & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_q & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_q & \xi_q \\ 0 & \xi_q & 0 \end{pmatrix}$
$p_4 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \xi_q & \beta_q \\ \xi_q & 0 & 0 \\ \beta_q & 0 & \alpha_q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \gamma_q & \xi_q & 0 \\ \xi_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_q \end{pmatrix}$
$p_5 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_q & 0 & \beta_q \\ 0 & 0 & \xi_q \\ \beta_q & \xi_q & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_q \\ 0 & \xi_q & \gamma_q \end{pmatrix}$
$p_6 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \beta_q & \xi_q \\ \beta_q & \alpha_q & 0 \\ \xi_q & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \gamma_q & 0 & \xi_q \\ 0 & \alpha_q & 0 \\ \xi_q & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tabla 3.1: Patrón con uno y dos ceros en la diagonal. No es necesario incluir las fases.

3.2.1. Patrón con dos ceros en la diagonal

En lo que sigue vamos a trabajar los dos casos “up” y “down” simultáneamente, que serán indicados indistintamente con q , donde $q = u$ o $q = d$ dependiendo si trabajamos respectivamente con la matriz de masa “up” o con la matriz de masa “down”. La representación estándar para el

patrón de dos ceros en la diagonal, de acuerdo con la Tabla 3.1 es

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_q| & 0 \\ |\xi_q| & 0 & |\beta_q| \\ 0 & |\beta_q| & \alpha_q \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

donde la matriz de diagonalización U_q satisface la siguiente relación

$$U_q^\dagger M_q U_q = D_q = \begin{pmatrix} \lambda_{1q} & & \\ & \lambda_{2q} & \\ & & \lambda_{3q} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

donde la matriz masa diagonal de los quarks D_q contiene los autovalores de masa de los quarks $|\lambda_{iq}|$. Los operadores matriciales invariantes “determinante” y “traza” aplicados sobre (3.10), nos da

$$\alpha_q = \lambda_{1q} + \lambda_{2q} + \lambda_{3q}, \quad (3.11a)$$

$$|\beta_q| = \sqrt{-\frac{(\lambda_{1q} + \lambda_{2q})(\lambda_{1q} + \lambda_{3q})(\lambda_{2q} + \lambda_{3q})}{\alpha_q}}, \quad (3.11b)$$

$$|\xi_q| = \sqrt{\frac{-\lambda_{1q}\lambda_{2q}\lambda_{3q}}{\alpha_q}}. \quad (3.11c)$$

La expresión (3.11c) debe ser un número real, y además, debido a que asumimos un sólo autovalor λ_{iq} negativo (Sección 2.2), tenemos que

$$\alpha_q > 0, \quad (3.12)$$

que junto con (3.11b) y la jerarquía (2.15) sólo se permite una posibilidad

$$\lambda_{1q}, \lambda_{3q} > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{2q} < 0. \quad (3.13)$$

De acuerdo a (3.7), y asumiendo $\gamma_q = 0$ en (3.1), tenemos que la matriz de diagonalización para (3.9) es

$$U_q = \begin{pmatrix} e^{ix} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}\lambda_{3q}(\alpha_q - \lambda_{1q})}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & -e^{iy} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}\lambda_{3q}(\lambda_{2q} - \alpha_q)}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{1q}\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{3q})}{\alpha_q(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \\ e^{ix} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}(\lambda_{1q} - \alpha_q)}{(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & e^{iy} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{2q})}{(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{3q}(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \\ -e^{ix} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}(\alpha_q - \lambda_{2q})(\alpha_q - \lambda_{3q})}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & -e^{iy} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{3q}(\alpha_q - \lambda_{1q})(\alpha_q - \lambda_{2q})}{\alpha_q(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

donde α_q está definido en (3.11a).

La base diagonal “down”

Haciendo una transformación WB para la base diagonal “down” (2.13), usando en este caso la matriz unitaria dada en (3.14) con $q = d$, es decir con U_d , tenemos que

$$M'_d = U_d(D_d)U_d^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_d| & 0 \\ |\xi_d| & 0 & |\beta_d| \\ 0 & |\beta_d| & \alpha_d \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$M'_u = U_d(V^\dagger D_u V)U_d^\dagger, \quad (3.16)$$

donde usamos la relación (3.10). De acuerdo a (3.12) y (3.13), tenemos en este caso

$$\lambda_{1d}, \lambda_{3d} > 0, \quad \lambda_{2d} < 0, \quad \alpha_d = \lambda_{1d} + \lambda_{2d} + \lambda_{3d} > 0. \quad (3.17)$$

El cálculo se facilita si definimos las siguientes nuevas variables para las fases introducidas en (3.14)

$$\begin{aligned} e^{ix} &= x_1 + ix_2, \quad \text{with} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ e^{iy} &= y_1 + iy_2, \quad \text{with} \quad y_1^2 + y_2^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por consiguiente, las variables satisfacen

$$|x_1|, |x_2| \leq 1, \quad \text{and} \quad |y_1|, |y_2| \leq 1. \quad (3.19)$$

Con las anteriores definiciones y usando los datos disponibles para la matriz de mezcla CKM en (1.9), los elementos de la matriz M'_u en (3.16) son *hipersuperficies* para el conjunto de puntos (x_1, x_2, y_1, y_2) en \mathbb{R}^4 al considerar cada uno de los siguientes casos: $\lambda_{1u} = -m_u$ o $\lambda_{2u} = -m_c$ o $\lambda_{3u} = -m_t$. El análisis de estas hipersuperficies, al tomar en cuenta las condiciones (3.19), muestra que las entradas (1, 2) y (1, 3) de M'_u podrían tener soluciones nulas (ceros de textura).

$\lambda_{1u} = -m_u$: En este caso los resultados se obtienen considerando las siguientes masas para los quarks (en unidades de MeV): $m_u = 1.71604$, $m_d = 2.9042$, $m_s = 65$, $m_c = 567$, $m_b = 2860$, $m_t = 172100$ los cuales están cerca de los valores centrales y están dentro del rango permitido por (1.5). Las variables (x_1, x_2, y_1, y_2) satisfacen las ecuaciones implícitas

$$\begin{aligned} \text{Re}[M'_u(1, 2)] &= -138.321 + 201.317x_1 - 80.6426x_2 + 204.719y_1 \\ &\quad - 164.358x_1y_1 + 21.6323x_2y_1 + 3.85055y_2 - 21.6323x_1y_2 \\ &\quad - 164.358x_2y_2 = 0, \\ \text{Im}[M'_u(1, 2)] &= 80.479x_1 + 200.909x_2 - 4.02965y_1 - 23.6558x_1y_1 \\ &\quad - 179.732x_2y_1 + 214.241y_2 + 179.732x_1y_2 \\ &\quad - 23.6558x_2y_2 = 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.684994, \quad y_1 = -0.500433, \\ x_2 &= 0.728548, \quad y_2 = -0.865775, \end{aligned}$$

de tal manera que la entrada matricial $M'_u(1, 1) = 0$. La correspondiente textura de cinco ceros para las matrices de masa de los quarks obtenidas son

$$M'_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -79.32299208381 + 154.7195315i \\ 0 & 5539.23021 & 28125.945500584217 + 6112.7938593i \\ -79.32299208381 - 154.7195315i & 28125.9455 - 6112.7938593i & 167126.0537497 \end{pmatrix} \text{ MeV}, \quad (3.20a)$$

$$M'_d = \begin{pmatrix} 0 & 13.891097 & 0 \\ 13.891097 & 0 & 421.41405 \\ 0 & 421.41405 & 2797.9042 \end{pmatrix} \text{ MeV}, \quad (3.20b)$$

y sus matrices de diagonalización son respectivamente:

$$U_u = \begin{pmatrix} 0.6762634914995 + 0.734812367i & -0.050244372843746 + 0.01389198632i & -0.0004494994264332 + 0.00088826384734i \\ 0.027504657705 - 0.0431835830349i & -0.4970428606 - 0.849312285i & 0.1665852443687 + 0.03528548775i \\ -0.00340858221659 + 0.00924818235635i & 0.1150663143 + 0.12513711i & 0.98538127634 - 0.00519998920457i \end{pmatrix}, \quad (3.21a)$$

$$U_d = \begin{pmatrix} 0.67017852 + 0.71279034i & 0.10351850 + 0.17909241i & 0.00070804245 \\ 0.14011366 + 0.14902248i & -0.48438959 - 0.83801926i & 0.14577693 \\ -0.021125534 - 0.022468754i & 0.071301225 + 0.12335484i & 0.98931723 \end{pmatrix}, \quad (3.21b)$$

que da el valor exacto de la matriz de mezcla CKM (1.9) $U_u^\dagger U_d = V$ y la fase de violación de CP, en concordancia con los valores medidos a 1σ [27, 30]. En el proceso se incluyeron bastante cifras significativas.

$\lambda_{2u} = -m_c$: Las masas de los quarks que mejor se ajustan a los resultados son (en unidades de MeV): $m_u = 1.38$, $m_d = 2.82$, $m_s = 70.8356$, $m_c = 592.3$, $m_b = 2860$, $m_t = 172100$ donde las ecuaciones implícitas

$$\begin{aligned} \text{Re}[M'_u(1, 2)] &= 69.8779 + 212.583x_1 - 84.5059x_2 + 203.455y_1 \\ &\quad + 66.7775x_1y_1 + 21.9698x_2y_1 + 3.80114y_2 \\ &\quad - 21.9698x_1y_2 + 66.7775x_2y_2 = 0, \\ \text{Im}[M'_u(1, 2)] &= 84.3394x_1 + 212.165x_2 - 3.99422y_1 - 23.7916x_1y_1 \\ &\quad + 72.3149x_2y_1 + 213.789y_2 - 72.3149x_1y_2 \\ &\quad - 23.7916x_2y_2 = 0 \end{aligned}$$

tiene las soluciones $x_1 = -0.99609$, $x_2 = -0.0883441$, $y_1 = 0.949769$, $y_2 = 0.312952$, de tal forma que $M'_u(1, 1) = 0$. Las correspondientes matrices de masa con cinco ceros de textura son

$$M'_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 101.16321 - 273.96222i \\ 0 & 1649.3286 & 19419.195 - 2159.2334i \\ 101.16321 + 273.96222i & 19419.195 + 2159.2334i & 169859.75 \end{pmatrix} \text{ MeV}, \quad (3.22a)$$

$$M'_d = \begin{pmatrix} 0 & 14.304633 & 0 \\ 14.304633 & 0 & 441.0438 \\ 0 & 441.0438 & 2791.9844 \end{pmatrix} \text{ MeV}, \quad (3.22b)$$

y sus respectivas matrices de diagonalización

$$U_u = \begin{pmatrix} -0.99358138 - 0.098207896i & 0.039092042 - 0.040251962i & 0.0005870283 - 0.0015803942i \\ 0.020016032 + 0.052233615i & 0.94574516 + 0.29911097i & 0.11321111 - 0.012367896i \\ -0.0011910042 - 0.0045650693i & -0.10404534 - 0.046096344i & 0.99349071 + 0.0019085337i \end{pmatrix}, \quad (3.23a)$$

$$U_d = \begin{pmatrix} -0.97682387 - 0.086635334i & -0.18589492 - 0.061253052i & 0.0007623121 \\ -0.19257000 - 0.017079196i & 0.92053883 + 0.30332089i & 0.15241321 \\ 0.030450627 + 0.0027006918i & -0.14181749 - 0.046729377i & 0.98831656 \end{pmatrix}, \quad (3.23b)$$

que da la matriz CKM exacta (1.9): $U_u^\dagger U_d = V$. Un análisis completo de este último caso fue hecho en [44].

Debemos decir que hemos tomado en cuenta todas las posibilidades, pero sólo encontramos a lo sumo cinco ceros de textura. En consecuencia, texturas con seis ceros no son modelos realistas. Adicionalmente, para la base diagonal “up” (2.12) no se encontraron ceros de textura. Igualmente, para el patrón de un cero en la diagonal dado en la Tabla 3.1, no se encontraron texturas de cinco ceros.

3.3. Textura de cinco ceros analítica para las matrices de masa de los quarks

Se conoce bien de la existencia de ciertas relaciones entre las matrices de masa de los quarks, los ángulos de mezcla CKM y la fase de violación CP, así que debemos hacer un estudio analítico para desentrañar aspectos más profundos de la física de sabores. En nuestro caso, la textura numérica de cinco ceros para las matrices de masa de los quarks dadas en (3.20) y (3.22) son modelos viables de acuerdo a los últimos datos a bajas energías. Así que consideremos la estructura estándar analítica del modelo de cinco ceros de textura

$$M_u = P^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 & |\xi_u| \\ 0 & \alpha_u & |\beta_u| \\ |\xi_u| & |\beta_u| & \gamma_u \end{pmatrix} P, \quad (3.24a)$$

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_d| & 0 \\ |\xi_d| & 0 & |\beta_d| \\ 0 & |\beta_d| & \alpha_d \end{pmatrix}, \quad (3.24b)$$

donde todas las fases están incluidas en la matriz diagonal $P = \text{diag}(e^{-i\phi_{\xi_u}}, e^{-i\phi_{\beta_u}}, 1)$, (con $\phi_{\beta_u} \equiv \arg(\beta_u)$ y $\phi_{\xi_u} \equiv \arg(\xi_u)$), y no se necesita considerar las fases para M_d , puesto que pueden ser absorbidas a través de una transformación WB. Como M_u y M_d son matrices hermiticas los parámetros α_u, α_d y γ_u son números reales. Así que tenemos nueve parámetros libres $|\xi_u|, |\beta_u|, \alpha_u, \gamma_u, |\xi_d|, |\beta_d|, \alpha_d, \phi_{\xi_u}, \phi_{\beta_u}$, a fin de reproducir diez cantidades físicas: las seis masas de los quarks, los tres ángulos de mezcla y la fase de la matriz CKM, lo que implica relaciones físicas entre las masas de los quarks y las mezclas. Los cinco ceros de textura *no* son de tipo Fritzsche debido a que su patrón de ceros no se ajusta con los ceros de textura propuesto por Fritzsche en (1.3).

Haciendo la permutación $P_2 = [(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)]$ para la matriz M_u en (3.24), ésta puede ser escrita en la forma

$$M_u = P^\dagger P_2 \begin{pmatrix} 0 & |\xi_u| & 0 \\ |\xi_u| & \gamma_u & |\beta_u| \\ 0 & |\beta_u| & \alpha_u \end{pmatrix} P_2 P, \quad (3.25)$$

tal que la matriz permutada tiene la misma forma de (3.1) con $q = u$. Así que considerando el caso

$$\lambda_{1u} = -m_u, \quad \lambda_{2u} = m_c, \quad \text{y} \quad \lambda_{3u} = m_t,$$

de acuerdo a las Ecuaciones (3.3), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_u &= m_t + m_c - m_u - \alpha_u, \\
|\beta_u| &= \frac{\sqrt{\alpha_u - m_c} \sqrt{m_t - \alpha_u} \sqrt{\alpha_u + m_u}}{\sqrt{\alpha_u}}, \\
|\xi_u| &= \frac{\sqrt{m_c} \sqrt{m_t} \sqrt{m_u}}{\sqrt{\alpha_u}},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

y usando (3.4), tenemos la siguiente restricción

$$m_c < \alpha_u < m_t. \tag{3.27}$$

De acuerdo a (3.7) y (3.25), la matriz aproximada U_u ($\rightarrow P^\dagger P_2 U_u$) que diagonaliza a M_u , está dada por

$$U_u \approx \begin{pmatrix} e^{i(\phi_{\xi_u})} & \frac{\sqrt{\alpha_u - m_c} \sqrt{m_u} e^{i(\phi_{\xi_u})}}{\sqrt{\alpha_u} \sqrt{m_c}} & \frac{\sqrt{m_c} \sqrt{m_t - \alpha_u} \sqrt{m_u} e^{i(\phi_{\xi_u})}}{\sqrt{\alpha_u} m_t} \\ \frac{\sqrt{\alpha_u - m_c} \sqrt{m_t - \alpha_u} \sqrt{m_u} e^{i(\phi_{\beta_u})}}{\sqrt{\alpha_u} \sqrt{m_c} \sqrt{m_t}} & -\frac{\sqrt{m_t - \alpha_u} e^{i(\phi_{\beta_u})}}{\sqrt{m_t}} & \frac{\sqrt{\alpha_u - m_c} e^{i(\phi_{\beta_u})}}{\sqrt{m_t}} \\ -\frac{\sqrt{\alpha_u} \sqrt{m_u}}{\sqrt{m_c} \sqrt{m_t}} & \frac{\sqrt{\alpha_u - m_c}}{\sqrt{m_t}} & \frac{\sqrt{m_t - \alpha_u}}{\sqrt{m_t}} \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

donde tuvimos en cuenta la jerarquía (2.15) y la relación (3.27). No incluimos las fases puesto que sólo estamos interesados en las magnitudes.

De la matriz de masa M_d en (3.24b), en el caso ($q = d$), tomando en cuenta los resultados (3.11), tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_d &= m_d + m_b - m_s, \\
|\beta_d| &= \frac{\sqrt{m_d + m_b} \sqrt{m_b - m_s} \sqrt{m_s - m_d}}{\sqrt{m_d + m_b - m_s}}, \\
|\xi_d| &= \frac{\sqrt{m_b} \sqrt{m_d} \sqrt{m_s}}{\sqrt{m_d + m_b - m_s}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Y la matriz unitaria U_d que diagonaliza M_d , de acuerdo a (3.13) y (3.14), nos da el resultado aproximado

$$U_d \approx \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{m_d}}{\sqrt{m_s}} & \frac{\sqrt{m_d} m_s}{(m_b)^{3/2}} \\ \frac{\sqrt{m_d}}{\sqrt{m_s}} & 1 & \frac{\sqrt{m_s}}{\sqrt{m_b}} \\ -\frac{\sqrt{m_d}}{\sqrt{m_b}} & -\frac{\sqrt{m_s}}{\sqrt{m_b}} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

donde de nuevo se tuvo en cuenta la jerarquía (2.15), y no consideramos las fases x, y .

Encontremos los valores aproximados de la matriz CKM, $V = U_u^\dagger U_d$. En particular, usando las matrices de diagonalización (3.28) y (3.30) para U_u y U_d , respectivamente, que sobreviven a

las pruebas de corriente experimentales. A los órdenes preponderantes, obtenemos

$$|V_{ud}| \approx |V_{cs}| \approx |V_{tb}| \approx 1, \quad (3.31a)$$

$$|V_{us}| \approx \left| \sqrt{\frac{\alpha_u - m_c}{\alpha_u}} \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} - e^{i(\phi_{\beta_u} - \phi_{\xi_u})} \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} \right|, \quad (3.31b)$$

$$|V_{cd}| \approx \left| \sqrt{\frac{\alpha_u - m_c}{\alpha_u}} \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} - e^{i(\phi_{\xi_u} - \phi_{\beta_u})} \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} \right|, \quad (3.31c)$$

$$|V_{cb}| \approx \left| \sqrt{\frac{m_s}{m_b}} - e^{i\phi_{\beta_u}} \sqrt{\frac{\alpha_u - m_c}{m_t}} \right|, \quad (3.31d)$$

$$|V_{ts}| \approx \left| \sqrt{\frac{m_s}{m_b}} - e^{-i\phi_{\beta_u}} \sqrt{\frac{\alpha_u - m_c}{m_t}} \right|, \quad (3.31e)$$

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \approx \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \left| \frac{\sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t}} - e^{-i\phi_{\beta_u}} \sqrt{\frac{\alpha_u - m_c}{\alpha_u}} \sqrt{\frac{m_s}{m_b}}}{\sqrt{\frac{\alpha_u - m_c}{m_t}} - e^{-i\phi_{\beta_u}} \sqrt{\frac{m_s}{m_b}}} \right|, \quad (3.31f)$$

$$\frac{|V_{td}|}{|V_{ts}|} \approx \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}, \quad (3.31g)$$

donde se consideró $\alpha_u \ll m_t$. Por consiguiente α_u es un parámetro aparentemente libre que debe ser ajustado para que den las cantidades físicas. Observemos que si $\alpha_u \gg m_c$ entonces $\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \approx \sqrt{\frac{m_u}{m_c}}$, pero consideraremos $\alpha_u \gtrsim m_c$ a fin de ajustar a los datos experimentales. También, podemos observar que la famosa relación de Gatto-Sartori-Tonin (GST) se sigue manteniendo [48].

Es obvio que las ecuaciones (3.31a), (3.31b), (3.31c) y (3.31g) son consistentes con los resultados previos [20, 49, 21]. Un buen ajuste de las ecuaciones (3.31) y la CKM a los datos experimentales sugiere que

$$\alpha_u = 5539.2302 \text{ MeV}, \quad \phi_{\beta_u} = 0.214008, \quad \phi_{\xi_u} = 2.044543, \quad (3.32)$$

que no difiere de los valores dados en [20, 49, 21] para $\phi_1 \approx -\pi/2 \sim (\phi_{\beta_u} - \phi_{\xi_u})$, que es un término importante de contribución a la violación CP en el contexto de las masas matriciales, y $\phi_2 \approx \pi/15 \sim \phi_{\beta_u} \rightarrow 0$.

Capítulo 4

Conclusiones


Hemos hecho una búsqueda completa de ceros de textura en las matrices de masa de los quarks usando las transformaciones WB [9, 45]. Hemos sido capaces de reproducir todos los posible ceros de textura, a partir de bases matriciales específicas, como por ejemplo (2.12) o (2.13). De esa manera, hemos encontrado sólo dos patrones de textura de cinco ceros numéricos diferentes: se trata de las bases matriciales (3.20) y (3.22), que dan valores exactos para las masas de los quarks, los ángulos de mezcla, y la cantidad invariante de Jarlskog a un nivel de confianza de un 1σ . Debemos enfatizar que sólo estos patrones de cinco ceros son posibles, incluyendo las permutaciones, para el patrón de dos ceros en la diagonal, lo cual es indicado en la Tabla 3.1. Una base estándar de cinco ceros para este modelo viable es dada en (3.24). Tiene nueve parámetros para reproducir diez cantidades físicas: 6 masas de los quarks, tres ángulos de mezcla y 1 fase de la matriz CKM, lo que implica relaciones físicas entre las masas de los quarks y las mezclas, resumidas en las relaciones (3.31), que han sido estudiadas antes; aunque, sus estructuras no son tan simples como las presentadas por Fritzsche en (1.3); y dependen de un parámetro libre. Sin embargo, la relación GST se preserva, y una importante contribución de violación CP está todavía presente en el contexto del modelo. Además, nuestro modelo de cinco ceros no es del tipo Fritzsche, porque no tiene la misma distribución de ceros como las presentes en (1.3).




Recientemente algunos autores han cuestionado los modelos de cinco ceros de textura. De acuerdo a estos autores las texturas de cinco ceros tienen una viabilidad limitada en el contexto de los modelos de tipo Fritzsche, y en consecuencia recomiendan sólo trabajar con modelos con texturas de cuatro ceros [50, 26, 51, 7, 8, 6]. Sin embargo ha habido muchas propuestas de texturas de cinco ceros [26, 7, 27, 28, 29], aunque la mayoría de ellos son texturas de ceros de tipo Fritzsche, así que no coincide con la configuración obtenida por mi en (3.24). En ese sentido hemos encontrado una nueva textura de cinco ceros de tipo *no* Fritzsche que es un modelo viable y que reproduce los datos experimentales.

Apéndice A

Productos del Proyecto de Investigación

A.1. Acuerdos

 Universidad de NARIÑO
FACULTAD CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ACUERDO N° 009
(Febrero 11 de 2014)

**EL COMITÉ CURRICULAR Y DE INVESTIGACIÓN DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO**
En ejercicio de sus atribuciones legales, reglamentarias y estatutarias, y

CONSIDERANDO:

- Que el Docente Tiempo Completo YITHSBY GIRALDO ÚSUGA adscrito al Programa de Física, mediante oficio del 28 de Enero de 2014, solicita al Comité Curricular y de Investigaciones descarga académica y el registro del proyecto de investigación ante la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad de Nariño.
- Que el proyecto de investigación se denomina *"Higgses en los Modelos 3-3-1"*, el cual es de gran importancia por la proyección investigativa del Grupo de investigación de Altas Energías al cual pertenece el docente.
- Que la política del Departamento de Física ha sido siempre respaldar los procesos de investigación en virtud de los niveles de calidad y como premisa en su parte misional en el proceso de Re-acreditación que se está adelantando.
- Que el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Física avala el proyecto de investigación y,

ACUERDA:

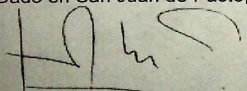
PRIMERO: Aprobar el proyecto de investigación denominado *"Higgses en los Modelos 3-3-1"*, a cargo del docente Tiempo Completo Yithsbey Giraldo Úsuga, a partir del Semestre A de 2014, con una descarga de 4 horas.

SEGUNDO: Registrar el proyecto en el Sistema de Investigaciones y Relaciones Internacionales.

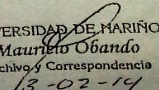
TERCERO: La Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales, la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y el Departamento de Física anotaran lo de su cargo.

COMUNIQUESE Y CUMPLASE:

Dado en San Juan de Pasto, a los once (11) días del mes de Febrero de dos mil catorce (2014).


LUIS PORTILLA SALAZAR
Presidente

Elaboró: Jonny Santander
Revisó: Luis Portilla Salazar


UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Maureen Obando
Archivo y Correspondencia
13-02-14

Ciudad Universitaria Torobajo Calle 18 # 50 - 2 Bloque 1 - Comutador 7311449 Ext. 203 - San Juan de Pasto - Nariño - Colombia
e-mail: fisica@udenar.edu.co - fisicaudenar@gmail.com

ACUERDO No. 012

(Marzo 10 de 2014)

Por la cual se inscribe un proyecto en el Sistema de Investigaciones

EL COMITÉ DE INVESTIGACIONES DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO

En uso de sus atribuciones estatutarias y reglamentarias y

CONSIDERANDO

Que mediante Acuerdo # 008 de febrero 11 de 2014, el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Física, aprueba del proyecto de investigación denominado "Estructura Canónica para una Teoría de Fotones Masivos".

Que el proyecto será ejecutado por el profesor German Ramos Zambrano adscrito al Departamento de Física y tendrá una duración 21 meses a partir del semestre A de 2014.

Que mediante Acuerdo # 009 de febrero 11 de 2014, el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Física, aprueba el proyecto de investigación denominado "Higgses en los Modelos 3-3-1".

Que el proyecto será ejecutado por el profesor Yithsbey Giraldo Úsuga adscrito al Departamento de Física y tendrá una duración 24 meses a partir del semestre A de 2014.

Que el Comité Curricular y de Investigación del Departamento de Física solicita el registro de los proyectos ante el Sistema de Investigaciones de la Universidad de Nariño.

Que es viable inscribir los proyectos, sin embargo, no se asignan recursos del Sistema de Investigaciones, toda vez que los proyectos no se tramitaron a través de la convocatoria de investigación docente, mecanismo por el cual se otorga financiación.

ACUERDA

ARTICULO 1º Inscribir en el Sistema de Investigaciones, el proyecto de investigación "Estructura Canónica para una Teoría de Fotones Masivos" ejecutado por el profesor German Ramos Zambrano adscrito al Departamento de Física.

ARTICULO 2º El proyecto tendrá una duración 21 meses y se ejecutarán durante los semestres A y B de los años 2014 y 2015.

ARTICULO 3º Inscribir en el Sistema de Investigaciones, el proyecto de investigación "Higgses en los Modelos 3-3-1" ejecutado por el profesor Yithsbey Giraldo Usaga adscrito al Departamento de Física.

ARTICULO 4º El proyecto tendrá una duración 24 meses y se ejecutarán durante los semestres A y B de los años 2014 y 2015.

ARTICULO 5º Los profesores German Ramos y Yithsbey Giraldo deberán diligenciar los proyectos en la plataforma del Sistema de Información del Sistema de Investigaciones.

ARTICULO 6º Los proyectos mencionados no serán financiados con recursos del Sistema de Investigaciones.

ARTICULO 7º La Vicerrectoría de Investigaciones y Postgrados, el Sistema de Investigaciones, el Departamento Física anotarán lo de su cargo.

COMUNÍQUESE Y CÚMPLASE

Dado en San Juan de Pasto, a los diez (10) días del mes de Marzo de dos mil catorce (2014).

Original firmado
FREDY HERNÁN VILLALOBOS GALVIS
Presidente

Original firmado
CAROLA FERNANDA BOTINA TUPAZ
Secretaría



ACUERDO No. 021
(Abril 18 de 2016)

Por el cual se aprueba la terminación del proyecto de investigación.

EL COMITÉ DE INVESTIGACIONES DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO
En uso de sus atribuciones estatutarias y reglamentarias y

CONSIDERANDO:

Que mediante Acuerdo No 012 de 2014, fue inscrito el proyecto de investigación "Higgses en los modelos 3-3-1" liderado por el profesor Yithsbey Giraldo Úsuga

Que el docente presenta como resultados del trabajo: el informe final de la investigación el cual es el único requisito para los proyectos inscritos en la Vicerrectoría de investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales.

ACUERDA

- ARTICULO 1. Aprobar la terminación del proyecto de investigación "Higgses en los modelos 3-3-1" liderado por el profesor Yithsbey Giraldo Úsuga.
- ARTICULO 2. Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales, el Sistema de Investigaciones, el Departamento de Física anotarán lo de su cargo

COMUNÍQUESE Y CÚMPLASE

Dado en San Juan de Pasto, a los dieciocho (18) días del mes de abril de dos mil dieciséis (2016).


HUGO RUIZ BRASO
Presidente


MARÍA CONSTANZA CABRERA DULCE.
Secretaria

Revisó: María Fernanda G.

A.2. Ponencias y Congresos

Ponencia “Técnicas de Investigación en la Física de Altas Energías”, realizado en el TALLER INTERNACIONAL DE TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN de la Universidad de Nariño el 25 de septiembre de 2014.

Resumen: El grupo de Física de Altas Energías de la Universidad de Nariño, que se encuentra en categoría A de Colciencias, cuenta con diferentes técnicas para hacer investigación. Contamos con el internet y la base de datos donde los físicos guardan sus artículos y los resultados de sus investigaciones, todo con acceso libre. Contamos con un sistema operativo gratuito como el LINUX, que tiene disponible software libre de muy alta calidad para hacer cálculos matemáticos, numéricos y estadísticos. El LATEX, es el procesador de textos más ampliamente usado para escribir textos científicos, el cual utilizamos permanentemente. Contamos con estudiantes monitores y de investigación que han contribuido a nuestro trabajo e investigación de diferentes formas.



VIPRI
Universidad de Nariño
1904 - 2014

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
VICERRECTORÍA DE POSTGRADOS
RELACIONES INTERNACIONALES
DEPARTAMENTO DE SOCIOLOGÍA



CERTIFICAN

QUE: Yithsbey Giraldo

ASISTIÓ COMO PONENTE A EL:

TALLER INTERNACIONAL
DE TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN

SAN JUAN DE PASTO. 24, 25 Y 26 DE SEPTIEMBRE

2014



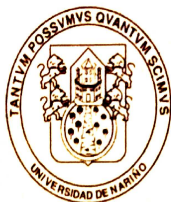

MARTHA SOFÍA GONZALES INSUASTI

Vicerrectora VIPRI


RICARDO OVIEDO AREVALO

Director del programa de Sociología

Ponencia “El descubrimiento del bosón de Higgs” realizado durante la Jornada Académica y de Integración, Universidad de Nariño, 24 de octubre de 2014.



Universidad de Nariño
Departamento de Física

La Universidad de Nariño Certifica que:

PH.D YITHSBEY GIRALDO

Participó en calidad de

PONENTE

En la

**Segunda Jornada Académica y
de Integración**

Realizado en San Juan de Pasto, el día 24 de Octubre de 2014



Luis Aphaño Portilla
Director Programa de Física

Erick Alexander Potosi
Representante Estudiantil

Mario Andres Guillin
Representante O.C.F

Participación en el X Simposio Latinoamericano de Física de Altas Energías (X SILAFAE), que se realizó en la ciudad de Medellín durante los días 24 al 28 de noviembre de 2014. En el simposio expuse el póster “Texture Zeros and WB Transformations in the Quark Sector of the Standard Model ”.

Resumen: Stimulated by the recent attention given to the texture zeros found in the quark mass matrices sector of the Standard Model, an analytical method for identifying (or to exclude) texture zeros models will be implemented here, starting from arbitrary quark mass matrices and making a suitable weak basis (WB) transformation, we are able to find equivalent quark mass matrix. It is shown that the number of non-equivalent quark mass matrix representations is finite. We give exact numerical results for parallel and non-parallel four-texture zeros models. We find that some five-texture zeros ansatz are in agreement with all present experimental data. And we confirm definitely that six-texture zeros of Hermitian quark mass matrices are not viable models anymore.



Latin American Symposium of High Energy Physics

Ruta N , Medellín - Colombia . November 24th - 28th 2014

I can confirm that Yithsbey Giraldo assisted the X Latin American Symposium on High Energy Physics (SILAFAE), held at rutaⁿ in Medellín, Colombia. The participant presented a entitled Texture zeros and weak basis transformations in the quark sector of the standard model.

Prof. Diego Restrepo
Instituto de Física
Universidad de Antioquia
restrepo@udea.edu.co
On behalf of the organizing committee.

SILAFAE
MEDELLIN 2014

Ponencia “Tripletes Escalares Linealmente Dependientes que no Inducen Axiones en los Modelo 3-3-1.” en el “3th National Meeting on Heavy Flavor physics”, que se realizó en Ibagué (Colombia) del 9 al 12 de Diciembre del presente año 2015.





III Encuentro Nacional de Física de Sabores Pesados 2015

Se otorga la presente
CONSTANCIA

YITHSBEY GIRALDO

Por su participación como **PONENTE** en el “III Encuentro Nacional de Física de Sabores Pesados”, trabajo titulado **Tripletes Escalares Linealmente Dependientes que no Inducen Axiones en los Modelos 3-3-1**, efectuado del 9 al 12 de diciembre del 2015, en la ciudad de Ibagué, Tolima, Colombia.


Pedro José Gallego Tejada
Decano
Facultad de Ciencias
Universidad del Tolima


Carlos Eduardo Vera Aguirre
Comité organizador
Facultad de Ciencias
Universidad del Tolima

A.3. Artículos publicados

Publicación del paper “Reply to “Comment on ‘Texture zeros and weak basis transformations in the quark sector of the standard model’” en la revista *Physical Review D*.

PHYSICAL REVIEW D **91**, 038302 (2015)

Reply to “Comment on ‘Texture zeros and weak basis transformations in the quark sector of the standard model’”

Yithsbey Giraldo

Departamento de Física, Universidad de Nariño, A.A. 1175 San Juan de Pasto, Colombia
(Received 12 January 2015; published 24 February 2015)

We respond to the comments on my recent paper, Y. Giraldo [*Phys. Rev. D* **86**, 093021 (2012)]. In their comments, they begin discussing a particular class of five-zero texture non-Fritzsch-like quark mass matrix, which was proposed by me, and question its validity. Then, they put in doubt the phases included in the unitary matrices used for diagonalizing the quark mass matrices, from which they claim that the CP violating parameter ϵ_k obtained does not agree with the experimental value. Because of these comments, finally, they recommend being careful while analyzing the implications of weak basis transformations on textures. Other minor points are also discussed by them. In the following, I will show that the mentioned five-zero texture non-Fritzsch-like quark mass matrices are completely valid and generate all the physical quantities involved, including the CP violating parameter ϵ_k , for which is required the inclusion of phases in the unitary matrices used for diagonalizing the quark mass matrices in order to put the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix in standard form. These phases can be rotated away so they do not have any physical meaning. Finally, the relevance of the weak basis transformation is appreciated: it is *complete* and facilitates calculations, especially of texture zeros.

DOI: 10.1103/PhysRevD.91.038302

PACS numbers: 12.15.Ff

I. INTRODUCTION

In the Standard Model (SM), the most general weak basis (WB) transformation [1] that leaves the physical content invariable and the up- and down-quark mass matrices M_u and M_d Hermitian¹ is

$$\begin{aligned} M_u &\longrightarrow M'_u = U^\dagger M_u U, \\ M_d &\longrightarrow M'_d = U^\dagger M_d U, \end{aligned} \quad (1.1)$$

where U is an arbitrary unitary matrix. We say that the two quark mass matrices $M_{u,d}$ and $M'_{u,d}$ are equivalent to each other. So, this implies that the number of equivalent mass matrices is infinity. Hence, we are able to explicitly construct texture zeros in quark mass matrices through WB transformations. If these texture zeros exist, the WB transformation is able to find them. The reason is that, as was shown in my paper [2], the WB transformation is exhaustive (complete), finding all possibilities, including possible four- and five-zero textures.

Through WB transformations, Branco *et al.* [1] show that it is always possible to find, at most, three zeros in quark mass matrices with no physical meanings. But, this does not restrict the number of zeros that can be found by applying the WB transformation to mass matrices; in this case the model must be put into a physical context. Therefore, we have found additional zeros by using the recent quark mass and mixing data. These additional zeros

¹The quark mass matrices are Hermitian due to the polar decomposition theorem, where the unitary component can be absorbed in the right-handed quark fields.

now have physical meanings because they were obtained from specific experimental data.

II. UP MASS MATRIX IN DIAGONAL FORM

One point of discussion is that to facilitate the analysis the initial quark mass matrices used by me is as follows [2]:

$$\begin{aligned} M_u &= D_u = \begin{pmatrix} \lambda_{1u} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2u} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3u} \end{pmatrix}, \\ M_d &= V D_d V^\dagger, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where the quark masses would be located in the respective elements of both up and down diagonal matrices D_u and D_d , and V is the usual quark Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) mixing matrix. The authors' comments claim that we do not start with the most general mass matrices. But this is not true. The starting matrices (2.1), used in papers like [1,3], are as general as any other ones. The reason is that starting from arbitrary Hermitian matrices M_u and M_d , using their respective diagonalizing matrices U_u and U_d , and performing a WB transformation (1.1) using for this case the unitary matrix $U = U_u$, we have

$$\begin{aligned} M_u &\longrightarrow M'_u = U_u^\dagger M_u U_u = D_u, \\ M_d &= U_d D_d U_d^\dagger \longrightarrow M'_d = U_u^\dagger (U_d D_d U_d^\dagger) U_u, \\ &= (U_u^\dagger U_d) D_d (U_d^\dagger U_u), \\ &= V D_d V^\dagger, \end{aligned}$$

where the CKM mixing matrix $V = U_u^\dagger U_d$ was considered. Additionally, note that the three no-physical-texture zeros mentioned above appear also in (2.1).

However, the crux of the comments is below.

III. PHASES AND THE CKM MIXING MATRIX

Let us resolve the problem for a particular case. Let us consider the numerical quark mass matrices given in Eq. (4.22) of my paper [2], which was also considered by the authors' comments in row (a) of Table I. Apparently, the corresponding CKM matrix obtained is not compatible with the recent quark mixing data. The numerical quark mass matrices in discussion are (in MeV units)

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -92.3618 + 157.694i \\ 0 & 5748.17 & 28555.1 + 5911.83i \\ -92.3618 - 157.694i & 28555.1 - 5911.83i & 166988 \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & 13.9899 & 0 \\ 13.9899 & 0 & 424.808 \\ 0 & 424.808 & 2796.9 \end{pmatrix},$$

where their diagonalizing matrices are, respectively,²

$$U_u = \begin{pmatrix} 0.998779 \times e^{2.10064i} & 0.0493829 \times e^{2.10064i} & 0.00104594 \times e^{2.10064i} \\ 0.0484608 \times e^{0.20415i} & 0.983788 \times e^{-2.93744i} & 0.172662 \times e^{0.204148i} \\ -0.00955555 \times e^{0i} & 0.172401 \times e^{0i} & 0.984981 \times e^{0i} \end{pmatrix},$$

$$U_d = \begin{pmatrix} 0.978718 & 0.205210 & -0.000718698 \\ 0.202880 & 0.968118 & 0.146926 \\ -0.0308464 & -0.143653 & 0.989147 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

from which the authors' comments have obtained the quark mixing matrix, Eq. (7). Nevertheless, generalizing the result in (3.1), no physical phases (x, y, z, v and w) can be added to the matrices, obtaining the following diagonalizing matrices:

$$U'_u = \begin{pmatrix} 0.998779 \times e^{2.10064i} \times e^{xi} & 0.0493829 \times e^{2.10064i} \times e^{yi} & 0.00104594 \times e^{2.10064i} \times e^{zi} \\ 0.0484608 \times e^{0.20415i} \times e^{xi} & 0.983788 \times e^{-2.93744i} \times e^{yi} & 0.172662 \times e^{0.204148i} \times e^{zi} \\ -0.00955555 \times e^{0i} \times e^{xi} & 0.172401 \times e^{0i} \times e^{yi} & 0.984981 \times e^{0i} \times e^{zi} \end{pmatrix}, \quad (3.2a)$$

$$U'_d = \begin{pmatrix} 0.978718 \times e^{iv} & -0.205210 \times e^{iv} & 0.000718698 \\ 0.202880 \times e^{iv} & 0.968118 \times e^{iv} & 0.146926 \\ -0.0308464 \times e^{iv} & -0.143653 \times e^{iv} & 0.989147 \end{pmatrix}, \quad (3.2b)$$

and where there is no way to distinguish which are the "true" matrices of diagonalization. Even further, if you choose the values $x = -1.30524$, $y = 0.790611$, $z = -0.00515513$, $v = 0.785572$ and $w = -2.14216$, you obtain

$$U'_u = \begin{pmatrix} 0.998779 \times e^{0.795395i} & 0.0493829 \times e^{2.89125i} & 0.00104594 \times e^{2.09548i} \\ 0.0484608 \times e^{-1.10109i} & 0.983788 \times e^{-2.14683i} & 0.172662 \times e^{0.198993i} \\ 0.00955555 \times e^{1.83635i} & 0.172401 \times e^{0.790611i} & 0.984981 \times e^{-0.00515513i} \end{pmatrix},$$

$$U'_d = \begin{pmatrix} 0.978718 \times e^{0.785572i} & -0.205210 \times e^{-2.14216i} & 0.000718698 \\ 0.202880 \times e^{0.785572i} & 0.968118 \times e^{-2.14216i} & 0.146926 \\ -0.0308464 \times e^{0.785572i} & -0.143653 \times e^{-2.14216i} & 0.989147 \end{pmatrix},$$

two diagonalizing matrices that are equally valid. As a result, a quark CKM mixing matrix compatible with the recent mixing data [4] is derived:

²These diagonalizing matrices were obtained by using Mathematica, but different matrices are obtained by using other software like maxima, octave, etc. Actually, the difference is just in the phases.

$$V_{\text{ckm}} = U_u^\dagger \cdot U_d = \begin{pmatrix} 0.974276 & 0.225334 & 0.00124462 - 0.0032841i \\ -0.225194 - 0.000106564i & 0.973443 - 0.0000294788i & 0.0411845 \\ 0.00806881 - 0.00319789i & -0.0404056 - 0.000739786i & 0.999145 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

As you can observe, the phases included in (3.2) are not against reducing the number of free parameters. These phases come out naturally from the diagonalizing process, and it is impossible to avoid them. When you establish specific diagonalization matrices, you are choosing specific phases. These phases are just different ways to present the CKM matrix, as was said in my paper [2] above Eq. (3.29).

Going even further, these phases have an interpretation and its nature is clarified in the next section.

IV. NO PHYSICAL PHASES

The additional phases introduced in matrices (3.2) leave the physical content invariant, including the Jarlskog invariant quantity. This can be seen by bringing the matrices (3.2) to the following products

$$U_u = U_u f_1 \quad \text{and} \quad U_d = U_d f_2,$$

where the diagonal matrices $f_1 = \text{diag}(e^{xi}, e^{yi}, e^{zi})$ and $f_2 = \text{diag}(e^{vi}, e^{wi}, 1)$; and U_u and U_d are given in (3.1), such that the CKM mixing matrix obtained in (3.3) becomes

$$V_{\text{ckm}} = U_u^\dagger U_d = (U_u f_1)^\dagger (U_d f_2) = f_1^\dagger (U_u^\dagger U_d) f_2,$$

and therefore

$$U_u^\dagger U_d = f_1 V_{\text{ckm}} f_2^\dagger, \quad (4.1)$$

which implies the following two results:

- (1) First, the mixing matrix obtained from Eq. (3.1), i.e., $U_u^\dagger U_d$, apparently does not fit the standard form of the CKM mixing matrix, but it is well known that the five phases present in f_1 and f_2 can be rotated away [5], such that both expressions for the CKM, in (4.1), are equivalent. Therefore, the Jarlskog invariant, as well as any other physical quantity, is not affected by adding phases as given in (3.2). And as a result, the phases x, y, z, v and w have no physical meaning.
- (2) Second, if there are still doubts, f_1 and f_2 in (4.1) add phases to the matrix elements of V_{ckm} , where each phase of f_2 is placed in the same column and each phase of f_1 in the same row. Therefore, the Jarlskog invariant $J = \text{Im}(V_{us} V_{ub}^* V_{cs} V_{cb})$ is not affected by adding these additional phases, because they cancel out in the same row (V_{us}, V_{ub}^*) and (V_{cs}^*, V_{cb}), and in the same column (V_{us}, V_{cs}^*) and (V_{ub}^*, V_{cb}).

Finally, the Jarlskog invariant quantity is

$$J = \text{Im}(V_{us} V_{ub}^* V_{cs} V_{cb}) = 2.96695 \times 10^{-5},$$

clearly inside the range given by PDG 2012 [4], i.e., $(2.80 - 3.16) \times 10^{-5}$.

We can consider other phase invariant quantities like the inner angles of the CKM unitarity triangle: $\beta = \arg(-V_{cd} \times V_{cb}^* / V_{td} V_{tb}^*) = 21.6^\circ$, $\alpha = \arg(-V_{td} V_{tb}^* / V_{ud} V_{ub}^*) = 89.1^\circ$, and $\gamma = \arg(-V_{ud} V_{ub}^* / V_{cd} V_{cb}^*) = 69.2^\circ$.

However, in the frame of the SM, the usual formula for the kaon CP violating parameter ϵ_k is valid only in the basis where $V_{ud} V_{us}^*$ is real [4,6]; for that reason the phases given in (3.2) must be considered in order to transform the CKM mixing matrix into its standard convention.

V. CONCLUSIONS

To begin with, it is important to mention that, in the SM, performing a WB transformation is always possible to find a maximum of three no-physical-vanishing elements in the quark mass matrices. In the process, the values of the physical quantities do not matter. But if we want to find additional zeros, it is necessary to take into account physical considerations.

Another important result, emphasized by other authors, is that the quark mass matrix structure given in (2.1), which was mentioned in my paper [2] as the *u-diagonal representation*, is as general as any other one. These matrices are deduced from a WB transformation and have the advantage of having available the quark masses and the CKM matrix elements.

The phases included in the diagonalizing matrices (3.2) are precisely the five phases that can be rotated away through the phase redefinition of the left-handed up- and down-quark fields, as was shown in (4.1), and as a consequence these phases have no physical meaning. Even further, as a result, these phases do not affect the invariance of the Jarlskog quantity, and so on. With respect to the kaon CP violating parameter ϵ_k , it must be calculated in a basis where $V_{ud} V_{us}^*$ is real. For that reason, phases must be included in the diagonalizing matrices in order to achieve this requirement.

The introduction of extra additional phases is definitely not against the basic spirit of the texture specific mass matrices, which was to control the number of free parameters. These phases have no physical meaning, but their inclusion is necessary to adjust the resulting CKM matrix to its standard choice.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by Department of Physics in the Universidad de Nariño, Approval Agreement No. 009.

COMMENTS

- [1] G. C. Branco, D. Emmanuel-Costa, and R. G. Felipe, *Phys. Lett. B* **477**, 147 (2000); D. Emmanuel-Costa and C. Simoes, *Phys. Rev. D* **79**, 073006 (2009).
- [2] Y. Giraldo, *Phys. Rev. D* **86**, 093021 (2012).
- [3] H. Fusaoka and Y. Koide, *Phys. Rev. D* **57**, 3986 (1998).

PHYSICAL REVIEW D **91**, 038302 (2015)

- [4] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **86**, 010001 (2012).
- [5] A. Rasin, arXiv:hep-ph/9708216.
- [6] G. Buchalla, A. J. Buras, and M. E. Lautenbacher, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1125 (1996).

Trabajo titulado “Seeking Texture Zeros in the Quark Mass Matrix Sector of the Standard Model”, publicado en la revista “Nuclear and Particle Physics Proceedings”.

Provided for non-commercial research and education use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.



This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and education use, including for instruction at the authors institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/authorsrights>



Seeking Texture Zeros in the Quark Mass Matrix Sector of the Standard Model

Yithsbey Giraldo

Departamento de Física, Universidad de Nariño, A.A. 1175, San Juan de Pasto, Colombia

Abstract

Here we show that the Weak Basis Transformation is an appropriate mathematical tool that can be used to find texture zeros in the quark mass matrix sector of the Standard Model. So, starting with the most general quark mass matrices and taking physical data into consideration, it is possible to obtain more than three texture zeros by any Weak Basis transformation. The general quark mass matrices considered, were obtained through a special weak basis transformation wherein the up-quark mass matrix (down-quark mass matrix) has been taken to be diagonal and the down-quark mass matrix (up-quark mass matrix), in general form, includes the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix.

Keywords: Fermion mass matrices; weak basis transformations; quark mixings.

1. Introduction

In the Standard Model (SM), the masses of all quarks arise from the Yukawa Lagrangian

$$-\mathcal{L}_M = \bar{u}_R M_u u_L + \bar{d}_R M_d d_L + h.c., \quad (1)$$

where the flavour structure of Yukawa couplings is not constrained by gauge symmetry and, as a result, the up and down quark mass matrices, M_u and M_d , are arbitrary 3×3 complex matrices, thus containing a total of 36 free parameters. A first simplification, without losing generality, the quark mass matrices can be considered Hermitian because of the unitary matrix component, coming from the polar decomposition, can be absorbed in the right-handed quark fields. This immediately brings down the number of free parameters to 18. This number is to be compared to the ten physical parameters corresponding to the six quark masses and four physical parameters of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrix. The above redundancy is closely related to the fact that one has the freedom to make Weak-Basis (WB) transformations under which the quark mass matrices change but the gauge currents remain diagonal and real.

For Hermitian quark mass matrices, one can further perform a common unitary transformation on both left-

and right-handed quark fields, which keeps the mass matrices to be Hermitian and has no physical effect, namely, the physical observables are unchanged under the WB transformation [1, 2]

$$\begin{aligned} M_u &\longrightarrow M'_u = U^\dagger M_u U, \\ M_d &\longrightarrow M'_d = U^\dagger M_d U, \end{aligned} \quad (2)$$

where U is an arbitrary unitary matrix. It implies that the number of quark mass matrices representing the same model is infinity.

Two sets of quark mass matrices related by a WB transformation obviously have the same physical content [1]. Conversely, two sets of quark mass matrices having the same physical content are related by a WB transformation [3]. That is, two sets of quark mass matrices have the same physical content if and only if they are related by a WB transformation.

On the other hand, in the absence of any viable theory for flavor physics, one usually resorts to phenomenological models such as texture specific mass matrices. Texture specific mass matrices were introduced explicitly by Fritzsch [4–7]. In particular, Fritzsch-like texture specific mass matrices seem to be very helpful in understanding the pattern of quark mixings and CP violation. For details we refer the readers to [1–14].

This short paper is organized as follows: in Sect. 2, we show the completeness of WB transformation by showing its ability to obtain different quark mass matrix representations and discuss its physical implications. Then we present in Sect. 3 a kind of general quark mass matrices can be used as the starting point in the analysis, and finally our conclusions are presented in Sect. 4.

2. Completeness of WB Transformations

Let us show that the WB transformation method is complete in the sense that it generates all possible quark mass matrix representations. Let us consider first the Hermitian quark mass matrices indicated by (M_u, M_d) , and diagonalize them as follows

$$U_u^\dagger M_u U_u = D_u \quad \text{and} \quad U_d^\dagger M_d U_d = D_d, \quad (3)$$

where CKM mixing matrix is given by

$$V = U_u^\dagger U_d. \quad (4)$$

On the other hand, any other mass matrices (M'_u, M'_d) representing the same physical phenomenon give

$$U_u'^\dagger M'_u U'_u = D_u \quad \text{and} \quad U_d'^\dagger M'_d U'_d = D_d, \quad (5)$$

and

$$V = U_u'^\dagger U'_d. \quad (6)$$

Equating the expressions in (4) and (6) yields

$$U_u^\dagger U_d = U_u'^\dagger U'_d \Rightarrow U_u' U_u^\dagger = U_d' U_d^\dagger. \quad (7)$$

And equating expressions (3) and (5), gives respectively

$$U_u'^\dagger M'_u U'_u = U_u^\dagger M_u U_u \quad \text{and} \quad U_d'^\dagger M'_d U'_d = U_d^\dagger M_d U_d, \quad (8)$$

where we find that the mass matrices M_u and M_d can be expressed in terms of the mass matrices M'_u and M'_d as follows

$$M_u = U_u U_u'^\dagger M'_u U'_u U_u^\dagger, \quad (9)$$

$$M_d = U_d U_d'^\dagger M'_d U'_d U_d^\dagger. \quad (10)$$

Using (7) into (10), we have

$$M_d = U_u U_u'^\dagger M'_d U'_u U_u^\dagger. \quad (11)$$

that together with (9) and given that $U = U_u U_u'^\dagger$ is an unitary matrix allows us to state:

“Two sets of quark mass matrices having the same physical content are related by a WB transformation.”

So, starting from particular quark mass matrices, the WB transformation is able to find any other viable quark mass matrix configurations, i.e., if there exists a set of

viable quarks mass matrices, it is certain that there is a unitary matrix leading to them. Although, the difficulty resides in finding an appropriated unitary matrix [3].

Because some texture zeros must lie along the diagonal elements of both up and down Hermitian quark mass matrices, it implies that at least one, and at most two, of their eigenvalues must be negative [1]. So, following the reasoning in the paragraph above, this means that the relative sign of the quark mass parameters should be considered. Which implies a total of 36 independent initial quark mass matrices, depending what quark mass eigenvalues are negative. But, in the case of finding texture zeros, two negative eigenvalues can be reduced to only one by factoring a minus sign which can be absorbed into the quark mass matrices, so that, for this case only 9 independent initial quark mass matrices are considered, say each one with only a negative eigenvalue [3].

Hence, we are now able to explicitly construct texture zeros in quark mass matrices through WB transformations. If these texture zeros exist, the WB transformation is able to find them. Through WB transformations, Branco et al. [1] show that is always possible to find, at most, three zeros in quark mass matrices with no physical meanings. But, this does not restrict the number of zeros can be found by applying the WB transformation to mass matrices, the case is that the model should be put into a physical context. Therefore, we have found additional zeros [3] (four and even five texture zeros) by using the recent quark mass and mixing data. These additional zeros now have physical meanings because they were obtained from specific experimental data.

With all this in mind, the question is, what quark mass matrices are to be used initially in order to find texture zeros through WB transformations. The answer is below.

3. The Initial Quark Mass Matrices

It is quite comfortable to use as initial quark mass matrices the following structure

$$M_u = D_u = \begin{pmatrix} \lambda_{1u} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2u} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3u} \end{pmatrix}, \quad M_d = V D_d V^\dagger, \quad (12)$$

where the up and down diagonal matrices D_u and D_d contain the respective quark mass eigenvalues, and V is the usual quark CKM mixing matrix. The calculus of texture zeros is facilitated by using these initial quark mass matrices, because we have simultaneously available the quark masses and the CKM matrix elements.

The starting matrices (12), used in papers like [1, 3, 15], are as general as any other one. The reason is that starting from arbitrary Hermitian matrices M_u and M_d , and using their respective diagonalizing matrices U_u and U_d , and performing a WB transformation (2) using for this case the unitary matrix $U = U_u$, we have

$$\begin{aligned} M_u &\longrightarrow M'_u = U_u^\dagger M_u U_u = D_u, \\ M_d = U_d D_d U_d^\dagger &\longrightarrow M'_d = U_u^\dagger (U_d D_d U_d^\dagger) U_u, \\ &= (U_u^\dagger U_d) D_d (U_d^\dagger U_u), \\ &= V D_d V^\dagger, \end{aligned}$$

where the CKM mixing matrix $V = U_u^\dagger U_d$ was considered. Additionally, note also that the three no physical texture zeroes mentioned above appear also in (12).

The other possibility that also works well is derived as follows

$$\begin{aligned} M_d &\longrightarrow M'_d = U_d^\dagger M_d U_d = D_d, \\ M_u = U_u D_u U_u^\dagger &\longrightarrow M'_u = U_d^\dagger (U_u D_u U_u^\dagger) U_d, \\ &= (U_d^\dagger U_u) D_u (U_u^\dagger U_d), \\ &= V^\dagger D_u V, \end{aligned}$$

such that we obtain a similar quark mass matrix structure

$$M_u = V^\dagger D_u V, \quad M_d = D_d = \begin{pmatrix} \lambda_{1d} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3d} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

which is as general as the previous one.

4. Conclusions

To begin with, the WB transformation is complete, so we can find all possible quark mass matrices representing the model by starting from specific quark mass matrix configurations. It is important to mention that, in the SM, is always possible to find a maximum of three no physical vanishing elements in the quark mass matrices by performing a WB transformation. In the process does not matter the value of physical quantities. But if we want to find additional texture zeros is necessary to take into account physical considerations.

Another important result, emphasized by other authors, is that the quark mass matrix structure given in (12) (or (13)), which was called in my paper [3] as the *u-diagonal representation* (or the *d-diagonal representation*), is so general as any other one. These matrices are deduced from a WB transformation and have the advantage of having available the quark masses and the CKM matrix elements.

Taking into account the two paragraphs above, we have a solid way to find texture zeros in the quark mass matrix sector of the SM: it consists, initially, by choosing the general quark mass matrix structure (12) (or (13)) and applying them appropriated WB transformations, which implies that four and five texture zeros, if they exist, is going appear [3].

Acknowledgments

This work was partially supported by Department of Physics in the Universidad de Nariño, approval Agreement No. 009.

References

- [1] G. C. Branco, D. Emmanuel-Costa, R. G. Felipe, Texture zeros and weak basis transformations, Phys.Lett. B477 (2000) 147–155. arXiv:hep-ph/9911418.
- [2] Y.-F. Zhou, Textures and hierarchies in quark mass matrices with four texture zeros (2003). arXiv:hep-ph/0309076.
- [3] Y. Giraldo, Texture zeros and weak basis transformations in the quark sector of the standard model, Phys.Rev. D86 (2012) 093021. arXiv:1110.5986 [hep-ph].
- [4] H. Fritzsch, Calculating the cabibbo angle, Phys. Lett. B70 (1977) 436.
- [5] H. Fritzsch, Weak interaction mixing in the six-quark theory, Phys. Lett. B73 (1978) 317.
- [6] H. Fritzsch, Quark masses and flavor mixing, Nucl. Phys. B155 (1979) 189.
- [7] H. Fritzsch, Flavor mixing and the internal structure of the quark mass matrix, Phys. Lett. B166 (1986) 423.
- [8] D. Emmanuel-Costa, C. Simoes, Reconstruction of quark mass matrices with weak basis texture zeroes from experimental input, Phys.Rev. D79 (2009) 073006. arXiv:0903.0564 [hep-ph].
- [9] G. C. Branco, L. Lavoura, F. Mota, Nearest neighbor interactions and the physical content of fritzsch mass matrices, Phys.Rev. D39 (1989) 3443.
- [10] P. Ramond, R. G. Roberts, G. G. Ross, Stitching the yukawa quilt, Nucl.Phys. B406 (1993) 19–42. arXiv:hep-ph/9303320.
- [11] M. Randhawa, V. Bhatnagar, P. S. Gill, M. Gupta, Unique mass texture for quarks and leptons, Phys.Rev. D60 (1999) 051301. arXiv:hep-ph/9903428.
- [12] S. Sharma, P. Fakay, G. Ahuja, M. Gupta, Clues towards unified textures, Int.J.Mod.Phys. A29 (2014) 1444005. arXiv:1404.5726[hep-ph].
- [13] H. Fritzsch, Z.-z. Xing, Four zero texture of hermitian quark mass matrices and current experimental tests, Phys.Lett. B555 (2003) 63–70. arXiv:hep-ph/0212195.
- [14] Z.-z. Xing, H. Zhang, Complete parameter space of quark mass matrices with four texture zeros, J. Phys. G30 (2004) 129–136. arXiv:hep-ph/0309112.
- [15] H. Fusaoka, Y. Koide, Updated estimate of running quark masses, Phys. Rev. D57 (1998) 3986–4001. arXiv:hep-ph/9712201.
- [16] A. Rasin, Diagonalization of quark mass matrices and the cabibbo-kobayashi-maskawa matrix (1997). arXiv:hep-ph/9708216.
- [17] X.-G. He, W.-S. Hou, Relating the long b lifetime to a very heavy top quark, Phys.Rev. D41 (1990) 1517.

Bibliografía

- [1] H. Fritzsch, “Weak interaction mixing in the six-quark theory,” *Phys. Lett.*, vol. B73, p. 317, 1978.
- [2] G. C. Branco, L. Lavoura, and F. Mota, “Nearest neighbor interactions and the physical content of fritzsch mass matrices,” *Phys.Rev.*, vol. D39, p. 3443, 1989.
- [3] P. Ramond, R. G. Roberts, and G. G. Ross, “Stitching the yukawa quilt,” *Nucl.Phys.*, vol. B406, pp. 19–42, 1993.
- [4] H. Fritzsch and Z. zhong Xing, “Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons,” *Prog.Part.Nucl.Phys.*, vol. 45, pp. 1–81, 2000.
- [5] Z. zhong Xing and Z. hua Zhao, “On the four-zero texture of quark mass matrices and its stability,” *Nucl.Phys.*, vol. B897, pp. 302–325, 2015.
- [6] M. Gupta and G. Ahuja, “Flavor mixings and textures of the fermion mass matrices,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A27, p. 1230033, 2012.
- [7] P. O. Ludl and W. Grimus, “A complete survey of texture zeros in general and symmetric quark mass matrices,” *Phys.Lett.*, vol. B744, pp. 38–42, 2015.
- [8] S. Sharma, P. Fakay, G. Ahuja, and M. Gupta, “Finding a unique texture for quark mass matrices,” *Phys.Rev.*, vol. D91, p. 053004, 2015.
- [9] Y. Giraldo, “Texture zeros and weak basis transformations in the quark sector of the standard model,” *Phys.Rev.*, vol. D86, p. 093021, 2012.
- [10] H. Fusaoka and Y. Koide, “Updated estimate of running quark masses,” *Phys. Rev.*, vol. D57, pp. 3986–4001, 1998.
- [11] H. Fritzsch, “Calculating the cabibbo angle,” *Phys. Lett.*, vol. B70, p. 436, 1977.
- [12] H. Fritzsch, “Weak interaction mixing in the six - quark theory,” *Phys.Lett.*, vol. B73, pp. 317–322, 1978.
- [13] H. Fritzsch, “Quark masses and flavor mixing,” *Nucl. Phys.*, vol. B155, p. 189, 1979.
- [14] H. Fritzsch, “Flavor mixing and the internal structure of the quark mass matrix,” *Phys. Lett.*, vol. B166, p. 423, 1986.

- [15] G. C. Branco, D. Emmanuel-Costa, and R. G. Felipe, “Texture zeros and weak basis transformations,” *Phys.Lett.*, vol. B477, pp. 147–155, 2000.
- [16] Y.-F. Zhou, “Textures and hierarchies in quark mass matrices with four texture zeros,” 2003.
- [17] D. Emmanuel-Costa and C. Simoes, “Reconstruction of quark mass matrices with weak basis texture zeroes from experimental input,” *Phys.Rev.*, vol. D79, p. 073006, 2009.
- [18] M. Randhawa, V. Bhatnagar, P. S. Gill, and M. Gupta, “Unique mass texture for quarks and leptons,” *Phys.Rev.*, vol. D60, p. 051301, 1999.
- [19] S. Sharma, P. Fakay, G. Ahuja, and M. Gupta, “Clues towards unified textures,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A29, p. 1444005, 2014.
- [20] H. Fritzsch and Z.-z. Xing, “Four zero texture of hermitian quark mass matrices and current experimental tests,” *Phys.Lett.*, vol. B555, pp. 63–70, 2003.
- [21] Z.-z. Xing and H. Zhang, “Complete parameter space of quark mass matrices with four texture zeros,” *J. Phys.*, vol. G30, pp. 129–136, 2004.
- [22] X.-G. He and W.-S. Hou, “Relating the long b lifetime to a very heavy top quark,” *Phys.Rev.*, vol. D41, p. 1517, 1990.
- [23] K. A. Olive *et al.*, “Review of particle physics (rpp),” *Chin. Phys.*, vol. C38, p. 090001, 2014.
- [24] S. Weinberg, “The problem of mass,” *Trans.New York Acad.Sci.*, vol. 38, pp. 185–201, 1977.
- [25] B. Dutta and S. Nandi, “A new ansatz: Fritzsch mass matrices with least modification,” *Phys.Lett.*, vol. B366, pp. 281–286, 1996.
- [26] P. Fakay, “Revisiting texture 5 zero quark mass matrices.” arXiv:1410.7142 [hep-ph], 2014.
- [27] W. A. Ponce, J. D. Gómez, and R. H. Benavides, “Five texture zeros and cp violation for the standard model quark mass matrices,” *Phys.Rev.*, vol. D87, p. 053016, 2013.
- [28] B. R. Desai and A. R. Vaucher, “Quark mass matrices with four and five texture zeroes, and the ckm matrix, in terms of mass eigenvalues,” *Phys.Rev.*, vol. D63, p. 113001, 2001.
- [29] N. Mahajan, R. Verma, and M. Gupta, “Investigating non-fritzsch like texture specific quark mass matrices,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A25, pp. 2037–2048, 2010.
- [30] R. Verma, “Minimal weak basis textures and quark mixing data,” *J.Phys.*, vol. G40, p. 125003, 2013.
- [31] Y. Giraldo, “Reply to comment on ”texture zeros and wb transformations in the quark sector of the standard model” ,” *Phys.Rev.*, vol. D91, p. 038302, 2015.
- [32] L. E. Ibanez and G. G. Ross, “Fermion masses and mixing angles from gauge symmetries,” *Phys.Lett.*, vol. B332, pp. 100–110, 1994.

- [33] N. Uekusa, A. Watanabe, and K. Yoshioka, “Asymmetry and minimality of quark mass matrices,” *Phys.Rev.*, vol. D71, p. 094024, 2005.
- [34] K. A. Olive *et al.*, “Review of particle physics (rpp),” *Chin. Phys.*, vol. C38, p. 090001, 2014.
- [35] Z. zhong Xing, H. Zhang, and S. Zhou, “Updated values of running quark and lepton masses,” *Phys.Rev.*, vol. D77, p. 113016, 2008.
- [36] Z. zhong Xing, H. Zhang, and S. Zhou, “Impacts of the higgs mass on vacuum stability, running fermion masses and two-body higgs decays,” *Phys.Rev.*, vol. D86, p. 013013, 2012.
- [37] N. Cabibbo, “Unitary symmetry and leptonic decays,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 10, pp. 531–533, 1963.
- [38] M. Kobayashi and T. Maskawa, “Cp violation in the renormalizable theory of weak interaction,” *Prog.Theor.Phys.*, vol. 49, pp. 652–657, 1973.
- [39] L.-L. Chau and W.-Y. Keung, “Comments on the parametrization of the kobayashi-maskawa matrix,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 53, p. 1802, 1984.
- [40] A. J. Buras, M. E. Lautenbacher, and G. Ostermaier, “Waiting for the top quark mass, $k \rightarrow \pi^+$ neutrino anti-neutrino, $b(s)0$ - anti- $b(s)0$ mixing and cp asymmetries in b decays,” *Phys.Rev.*, vol. D50, pp. 3433–3446, 1994.
- [41] J. Charles *et al.*, “Cp violation and the ckm matrix: Assessing the impact of the asymmetric b factories,” *Eur.Phys.J.*, vol. C41, pp. 1–131, 2005.
- [42] L. Wolfenstein, “Parametrization of the kobayashi-maskawa matrix,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 51, p. 1945, 1983.
- [43] A. Hocker, H. Lacker, S. Laplace, and F. L. Diberder, “A new approach to a global fit of the ckm matrix,” *Eur.Phys.J.*, vol. C21, pp. 225–259, 2001. See also Ref. [41] and updates at <http://ckmfitter.in2p3.fr/>.
- [44] Y. Giraldo, “Texture zeros and wb transformations in the quark sector of the standard model,” *Phys. Rev.*, vol. D86, p. 093021, 2012.
- [45] Y. Giraldo, “Seeking texture zeros in the quark mass matrix sector of the standard model.” arXiv:1503.02775 [hep-ph], 2015.
- [46] Z. zhong Xing and H. Zhang, “Complete parameter space of quark mass matrices with four texture zeros,” *J. Phys.*, vol. G30, pp. 129–136, 2004.
- [47] A. Rasin, “Diagonalization of quark mass matrices and the cabibbo-kobayashi-maskawa matrix.” hep-ph/9708216, 1997.
- [48] R. Gatto, G. Sartori, and M. Tonin, “Weak selfmasses, cabibbo angle, and broken $su(2) \otimes su(2)$,” *Phys.Lett.*, vol. B28, pp. 128–130, 1968.

- [49] P. S. Gill and M. Gupta, “Fritzsch-xing mass matrices, v_{td} and cp violating phase δ ,” *Phys.Rev.*, vol. D56, pp. 3143–3146, 1997.
- [50] S. Sharma, P. Fakay, G. Ahuja, and M. Gupta, “Comment on ”texture zeros and weak basis transformations in the quark sector of the standard model”,” *Phys.Rev.*, vol. D91, p. 038301, 2015.
- [51] S. Sharma, P. Fakay, G. Ahuja, and M. Gupta, “Clues towards unified textures,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A29, p. 1444005, 2014.