ISSN: 1665-5826

Educación Matemática

México • vol. 24 • núm. 3 • diciembre de 2012 • $100 m.n.

COMIE

Comité editorial

La publicación de EDUCACIÓN MATEMÁTICA 24-3 fue posible gracias al apoyo de la Universidad Pedagógica Nacional de México.

El Comité Editorial agradece a Editorial Santillana la cesión de los derechos de uso del diseño editorial de EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia positiva en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en ZDM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (Mathematics Didactics Database), Latindex, REDALYC (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SCIELO) y el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica. Las colaboraciones son recibidas en: revedumat@yahoo.com.mx. Edición e impresión a cargo de Impretei, S. A. de C. V. Almería, núm 17, col. Postal, C. P. 03410, México, D. F.

Educación Matemática

COMIE

Educación Matemática *vol. 24 • núm. 3 • diciembre de 2012*

Contenido

Editora responsable: Alicia Ávila Storer

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102
Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499

Fecha de edición: diciembre de 2012
El tiro fue de 100 ejemplares.
Impreso en México/Printed in Mexico.

www.revista-educacion-matematica.com

Editorial

El contenido de este número nos motivó a reflexionar sobre dos aspectos de las investigaciones publicadas en EDUCACIÓN MATEMÁTICA. El primero de ellos está relacionado con la internacionalidad de nuestra revista; el segundo con el interés, al parecer creciente, por la investigación de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, tanto en el escenario nacional como en el internacional. Empezamos nuestras reflexiones con este último punto. En este número aparecen tres artículos de geometría que muestran no solo la complejidad de su enseñanza y su aprendizaje, sino también que es una rama del conocimiento que ofrece una gran riqueza en la formación matemática de los alumnos a la vez que importantes desafíos para la enseñanza y la formación de profesores.

En el artículo "La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje", Gustavo Adolfo Marmolejo y Myriam Belisa Vega ponen de relieve la importancia de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas en general, y de la geometría en particular. A partir de una reflexión sobre el proceso de *desvisualización* o *desespacialización* que se dio entre los siglos XVII y XX, los autores afirman que la aparición de los computadores gráficos y de los programas informáticos, hicieron que el interés de los investigadores por el papel que juega la visualización creciera en las últimas décadas. En su artículo, los autores sostienen que, entre los distintos tipos de representaciones que se movilizan en la geometría, las figuras juegan un papel determinante, pues constituyen un importante soporte intuitivo para la actividad geométrica.

Complementario del anterior es el artículo "El 'Conocimiento especializado del contenido' de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos". Este artículo aborda el estudio del conocimiento especializado que se hace necesario para enseñar geometría en educación básica. En él, sus autoras, Natalia Sgreccia y Marta Massa –sobre la base del trabajo de Deborah Ball– señalan que la enseñanza de este contenido requiere, por parte del maestro, un conocimiento especializado que refiere a los usos específicos que surgen en el proceso de enseñanza, a las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformarlo en contenido enseñable. En particular, destacan que en la formación de profesores en el ámbito de la geometría es deseable la promoción de una fluida relación 2d-3d desde la representación gráfica.

En "Análisis de situaciones de aula en el contexto de la práctica de investigación: un punto de vista semiótico", Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño revisitan investigaciones realizadas hace algunos años, utilizando los instrumentos analíticos y críticos que la semiótica les ofrece hoy en día. Desde una perspectiva ontosemiótica abordan el estudio de temas relacionados con la geometría y las representaciones algebraicas, como el cálculo del volumen y las representaciones semióticas de relaciones de dos variables. Entre otras cuestiones, y poniendo como ejemplo el caso de la enseñanza de las pirámides, destacan la existencia de un "salto semiótico fuerte" entre las distintas representaciones que se utilizan en la escuela y la realidad a la cual hacen referencia. Este hecho lleva a los autores a pensar en la oposición entre realidad, modelo concreto, representación figural y objeto matemático resultante de las prácticas escolares de enseñanza. Se trata, pues, de un número que se centra en la problemática en torno a la geometría, desde una interesante diversidad de aproximaciones teóricas y metodológicas que resultan complementarias.

Tres contribuciones igualmente interesantes completan el número: "Acerca de la comprensión del concepto del supremo", de Lidia Aurora Hernández y María Trigueros, y "Dificultades de comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios", de Hugo Alvarado y Lidia Retamal. Ambos escritos abordan contenidos de cálculo de nivel superior, mientras que en el titulado "Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en educación secundaria", de Luis Reina, Miguel Wilhelmi y Aitzol Lasa, se hace un análisis, también ontosemiótico, de este contenido poco abordado en educación secundaria.

El segundo punto que, como anunciamos al inicio, nos interesa destacar, es el de la diversidad de nacionalidades que concurren en este número. El número está integrado con los escritos de autores de seis países: Argentina, Colombia, Chile, España, Italia y México. Esta multiplicidad de procedencias refleja el carácter internacional y la importancia de la circulación de EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Dicho carácter sustituyó pronto al local con que naciera la revista en el año 1989, y se ha mantenido y acrecentado a lo largo de sus 24 años de vida, como se puede constatar en este número. La procedencia de los evaluadores del volumen 24-3 (los países mencionados, y además Canadá, Brasil y Perú), es otra muestra de la importancia internacional de nuestra revista, principalmente en el mundo de habla hispana. Resulta, como es patente, un órgano indispensable en la difusión de la producción de la comunidad de investigadores de la educación matemática.

El Comité Editorial

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje[1]

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia y Myriam Belisa Vega Restrepo

Resumen: Si bien las figuras geométricas son un importante soporte intuitivo para el desarrollo de actividades geométricas, no es obvio ni espontáneo que en la resolución de un problema matemático los educadores y estudiantes hagan de ellas elementos claves para realizar exploraciones heurísticas. Por el contrario, múltiples investigaciones evidencian la complejidad de tal aprovechamiento y el requerimiento de un aprendizaje específico. En este artículo se destacan, entre otros, los procedimientos –cognitivamente potentes y económicos– realizados por un grupo de estudiantes que, habiendo participado de una secuencia de enseñanza sobre maneras de transformar figuras geométricas, luego realizaron actividades de comparación de figuras según sus cantidades de área.

Palabras Clave: visualización, figuras geométricas, aprehensión operatoria, configuración, visibilidad.

The display in the geometric figures. Importance and complexity

Abstract: Although geometric figures are an important intuitive support for the development of geometric activities, it is not obvious or spontaneous for teachers and students to make them key elements of heuristics exploration in the resolution of mathematical problems. By contrast, many investigations show the complexity of this type of use and the requirement of a specific learning. This article is outlined, between others, powerful and economic cognitively procedures, they were maid by a group of students that participated in an education sequence, about some ways to transform geometric figures, then they realized activities of figures comparison according to their area quantities.

Key words: visualization, geometric figures, operative apprehension, configuration, visibility

Fecha de recepción: l de junio de 2012. Fecha de aceptación: 30 de octubre de 2012.

[1] Una versión previa, parcial y simplificada de este documento se publicó como Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: Visualización, figuras y áreas, en *Memorias XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de Aritmética* (Tomo II). (661-693). Bogotá, Colombia.

INTRODUCCIÓN

La historia de las matemáticas entre los siglos XVII y gran parte del XX puso en evidencia una "desvisualización" o "desespacialización" en la geometría (Davis, 1993). Esa tendencia a dejar de lado la visualización se debió no solo a que no se la consideró necesaria, sino a que se la supuso un obstáculo para el desarrollo de las matemáticas. La aparición de los computadores gráficos y de los programas informáticos, junto al desarrollo de estudios sobre el funcionamiento de la mente, hicieron que el interés de los investigadores en el campo de la educación matemática por el papel e importancia que juega la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas creciera en los últimos decenios (Presmeg, 2006). Muchos investigadores de finales del siglo XX, entre los que destacamos a Zimmerman y Cunnighan (1991), afirmaron que estaban viviendo una etapa de renacimiento de la visualización. En la actualidad, existe una tendencia cada vez más fuerte a reconocer la gran importancia y el especial interés de la visualización en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas (Villani, 1998; Arcavi, 2003; Duval, 2003; Presmeg, 2006).

La visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación semiótica[2] que se considere (Duval; 1988a, 2003). En nuestra investigación la atención recae en la visualización asociada a las figuras geométricas de naturaleza bidimensional. Asumimos que la visualización es una actividad cognitiva compuesta por dos maneras de proceder sobre las figuras geométricas: una, la acción de discernir en una figura geométrica inicial (figura de partida) las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada) (Duval, 2003); y dos, los cambios de focalización aplicados sobre la figura, sub-figuras y/o sub-configuraciones que conforman la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la tarea propuesta.

Como lo indica una exhaustiva revisión de la literatura especializada, son enormes y variados los aportes que la investigación en educación matemática ha realizado en torno a la visualización. Entre ellos destacan, por su cantidad, los estudios sobre el papel que desempeña la visualización de las figuras geométricas en el desarrollo de otras actividades cognitivas, por ejemplo, el

[2] "Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas... permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) que tienen el valor de significantes" (Duval, 1999: 34). Las figuras geométricas, los gráficos cartesianos, los esquemas, la escritura aritmética y algebraica, las tablas son algunas de las representaciones semióticas de mayor uso en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

razonamiento deductivo (Sánchez, 2003), la argumentación (Mezquita, 1989) y la modelación (Ribera y Becker, 2008) y aquellos que procuran dar cuenta del papel de la visualización en el desarrollo de conceptos matemáticos en contextos educativos, por ejemplo, la homotecia (Lemonidis, 1991) y el área (Outherd y Mitchelmore , 2000). Hay, además, serios estudios sobre la incidencia que pueden tener los educadores en el desarrollo cognitivo gracias al uso de elementos visuales por parte de sus estudiantes (Presmeg, 1986; Markovits, Rosenfeld y Eylon, 2006) y otros más que se interesan por el papel que juegan los materiales didácticos en entornos informáticos en el desarrollo de la visualización (Kordaky, 2003). También hay estudios respecto a cómo los manuales escolares promueven o inciden en el aprendizaje de la visualización (Marmolejo y González, 2012).

Sin embargo, aún son incipientes los estudios que exploren la pertinencia y necesidad de constituir la visualización como objeto de la enseñanza en reconocimiento de que se trata de una actividad cognitiva que, de no orientarse adecuadamente, puede dificultar aún más el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, Villani (1998) y Presmeg (2006) hacen un urgente y reiterativo llamado a la comunidad educativa para convertir esta actividad cognitiva en objeto de enseñanza explícito en los currículos escolares. Duval (1999) y Markovits, Rosenfeld y Eylon (2006), por su parte, ponen en evidencia que las figuras geométricas, como potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas matemáticos, están lejos de ser un asunto obvio y espontáneo tanto para los estudiantes como para los educadores. En un sentido distinto, Clements, Swaminathan, Zeitler y Sarama (1999), Moriena y Scaglia (2003) y Walcott, Mohr y Kastberg (2009) muestran las dificultades que tienen los estudiantes para discriminar y clasificar figuras bidimensionales. Así mismo, se ha reportado la existencia de factores que facilitan o dificultan la visualización tanto de las sub-figuras, como de las transformaciones figurales que han de tenerse en cuenta en la solución de un problema geométrico dado; Padilla (1992), por ejemplo, identificó la composición de elementos distintos que generan niveles de complejidad diferente en la discriminación de la operación de reconfiguración;[3] Marmolejo (2007), por su parte, resalta que las características del contorno de una figura junto a la orientación de los trazos que han de introducirse en ella, son aspectos que explican la dificultad que tienen los estudiantes para descomponer una figura en sub-figuras previamente determinadas. En relación

[3] "... tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente" (Duval, 1999: 156).

con la posibilidad de discriminar en una figura las unidades de dimensión 1 y dimensión 2 que le conforman e "inferir" a partir de ellas las propiedades matemáticas relevantes al problema planteado, Duval (2005) y Gal y Linchevski (2010) han encontrado que los estudiantes privilegian una visualización de naturaleza estática o icónica, centrada en lo que "a primera a vista se ve" en la figura geométrica en estudio; de quedarse en esta manera de ver, esta actividad cognitiva resulta no solo insuficiente, sino que además dificulta la aplicación y desarrollo de conceptos y relaciones geométricas.

Por nuestra parte, asumimos una perspectiva teórica que considera, por un lado, que la particularidad de los objetos matemáticos exige para su aprendizaje que actividades cognitivas fundamentales como la representación, la conceptualización, el razonamiento, la visualización, la comprensión de textos, la resolución de problemas, requieran simultánea y articuladamente de variados sistemas de representación semiótica (Duval, 1999). Por otro, que el aprendizaje de la geometría, en particular, ocurre necesariamente mediante la coordinación de actividades de visualización, razonamiento y construcción, cada uno con sus funciones epistemológicas específicas. Si bien el desarrollo del funcionamiento cognitivo de cada una de estas actividades ocurre de manera separada, la visualización puede privilegiarse en la enseñanza escolar básica de la geometría como la puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y construcción geométricos (Duval, 1998).

Nuestro interés, como ya hemos mencionado, se centra en la visualización vinculada al registro semiótico de las figuras, en particular de las figuras geométricas bidimensionales, puesto que son soportes intuitivos que ayudan de manera importante a dotar de sentido y significado el aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones figurales son las que permiten la conducta de abducción (Duval, 1999); esto es, la de delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración. Hablar del papel heurístico de las figuras es decir que la conducta de abducción es la que guía la deducción.

No obstante el reconocimiento generalizado de lo anteriormente dicho en diferentes investigaciones, incluida la presente, pone en evidencia que hacer de las figuras herramientas heurísticas potentes para la comprensión y la resolución de problemas geométricos está lejos de ser obvio y espontáneo (Duval, 1999; Padilla, 1992; Marmolejo, 2007, 2010). Por el contrario, es necesario aprender a discriminar entre diferentes formas de ver para reconocer las que son pertinentes y potentes para la resolución de la actividad matemática planteada;

es decir, es indispensable aprender no solo a detectar, sino también a aprovechar o vencer, según sea el caso, la presencia de factores que hacen posible discriminar sobre una figura las sub-figuras o sub-configuraciones pertinentes a la resolución del problema planteado.

Privilegiamos en este trabajo la temática área de regiones poligonales[4] frente a otras presentes en los currículos de matemáticas, pues su aprendizaje coincide, en gran medida, con características del aprendizaje de la visualización (Duval, 1999): aplicación de modificaciones sobre las figuras, no requiere razonamientos de naturaleza deductiva y no exige construcciones con instrumentos geométricos.

El propósito de esta investigación es comparar las visualizaciones privilegiadas por estudiantes que tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre las posibilidades heurísticas y operativas que permiten las figuras geométricas, gracias a actividades propuestas por su profesor en las que, implícitamente, se compararon áreas de regiones poligonales, con las maneras de ver introducidas por alumnos, que al contrario, no participaron en tales procesos de reflexión.

REFERENTES TEÓRICOS

De acuerdo con Duval (1998), la enseñanza y el aprendizaje de la geometría involucran, como mínimo, tres actividades cognitivas: la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento relacionado con procesos discursivos y la visualización, cuya atención recae en las representaciones espaciales. Cada actividad tiene funciones epistemológicas distintas; la visualización, por ejemplo, permite la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas. Si bien cada una puede ser aprendida o enseñada de manera independiente o separada, la articulación entre ellas es requisito ineludible para asegurar el aprendizaje de la geometría. Para lograr que haya sinergia entre esas actividades, es necesario, en primera instancia, separar las diferentes maneras de ver que subyacen a su aprendizaje y luego diferenciar los tipos de razonamiento que conviven en el aprendizaje de esta disciplina, lo uno y lo otro es lo que da base para el aprendizaje de las construcciones. La visualización, pues, se impone como elemento crucial en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

[4] Definimos como región poligonal a la unión de un polígono simple con su interior. Al polígono se lo llama contorno o frontera de la región poligonal.

Entre los distintos tipos de representaciones que se movilizan en la geometría, las figuras juegan un papel determinante, pues constituyen un importante soporte intuitivo para la actividad geométrica (Duval, 1999). Como todo tipo de sistema de representación semiótico, los requeridos por la geometría exigen la puesta en acto de dos clases de transformación para asegurar la comprensión de los objetos matemáticos en que se reflexiona: la conversión y el tratamiento, este último interior, la primera exterior al sistema de representación en juego (Duval, 1999). Para describir cuál es el aporte heurístico de una figura en el desarrollo de una actividad matemática, es necesario distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución al problema planteado. Duval (1995) mostró que una figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente: perceptual (identificación perceptiva espontánea), operatoria (transformación heurística de las figuras) y discursiva (reconocimiento de unidades figurales y variabilidad dimensional intrafigural). Y que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan y, en otros, se oponen (Duval, 2003). El interés de la presente investigación recae en la segunda de estas aprehensiones y en los cambios de focalización bidimensionales que se introducen sobre una figura al desarrollar una tarea geométrica. Enseguida describimos estos elementos conceptuales.

Aprehensión operatoria

Las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre ellas. Son cuatro las clases de modificaciones que es factible realizar sobre las figuras que se consideran en nuestra investigación: las mereológicas (Duval, 1988b), centradas en las relaciones entre las partes y el todo; las ópticas (Duval, 1988b), cuando la transformación apela a la imagen de la figura; las posicionales (Duval, 1988b), cuando la transformación se realiza teniendo en cuenta el cambio de la figura en cuanto a su orientación en el campo en que destaca y, finalmente, las intrínsecas (Marmolejo y González, 2011), cuando se transforma la organización perceptiva de la figura de partida a nivel interno bajo la introducción o inhibición de trazos. Con cada modificación se realizan varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística: la reconfiguración, cuando la modificación es mereológica; la superponibilidad y la anamorfosis, cuando es óptica; la rotación y la traslación en el caso de la modificaciones posicionales y el fraccionamiento, cuando es intrafigural. La productividad heurística de una figura tiene que ver con las modificaciones que se producen en ella gracias a una operación cognitiva determinada. La productividad heurística genera ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos susceptibles de traer a colación para resolver la actividad propuesta.

De otra parte, sucede que "las unidades figurales que se han podido identificar perceptivamente, no siempre concuerdan con las que están designadas en el enunciado, o con las que son pertinentes para la resolución del problema planteado" (Duval, 1999: 160). La no-congruencia entre lo que muestra la introducción discursiva de la figura y lo que se privilegia en su organización perceptiva o, a la inversa, la presencia de una fuerte congruencia entre estos dos aspectos, junto a que las unidades que han de considerarse no son las directamente visibles en la figura y designadas en el enunciado, se constituyen, uno y otro, en fuertes obstáculos para la resolución del problema planteado. Por el contrario, la existencia de congruencia y de coincidencia entre las unidades que se evidencian en la figura y el enunciado con aquellas que es necesario tener en cuenta, pone en evidencia un espectacular aumento de éxitos en relación con el desempeño en tareas donde esto no sucede (Duval, 1999).

Otro aspecto relacionado con la complejidad de operar en las figuras tiene que ver con que no es suficiente que un alumno pueda acceder a los diferentes tratamientos que permiten las figuras; es decir, que pueda realizar o resaltar trazos sobre una figura, dibujar sobre ella sub-figuras, realizar transformaciones y rotaciones, transformar una figura dada en otra figura de contorno global diferente; también es necesario que pueda discriminar aquellas transformaciones que, por su naturaleza, son pertinentes, potentes y económicas cognitivamente en la solución del problema planteado. Distintas investigaciones han identificado factores que facilitan, o por el contrario, dificultan la visualización tanto de las sub-figuras, como las transformaciones figurales que han de tenerse en cuenta (factores de visibilidad) en la solución del problema planteado (Duval, 1998; Padilla, 1992; Marmolejo, 2007). Así mismo, se ha demostrado que estos factores de visibilidad inciden en los tiempos de respuestas, con lo cual se resalta la complejidad cognitiva que subyace en la visualización al interior del registro semiótico de las figuras (Padilla, 1992). Entre los factores de visibilidad se destacan: que la figura de partida sea presentada sobre un fondo cuadriculado o sobre uno no cuadriculado, que el reagrupamiento de las partes en que ha sido dividida la figura forme una configuración convexa o no-convexa, que sea necesario aplicar una o varias operaciones posicionales sobre las sub-figuras claves para lograr una adecuada colocación, que una misma parte de una figura deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos intermediarios que han de compararse, que solo se deba tener en cuenta las características del contorno de la figura que ha de reconfigurase, que las partes en que está dividida la figura que se reconfigurará deban ser desplazadas a su interior o, al contrario, que algunas deban desplazarse a su exterior, y que el fraccionamiento de la figura que se transformará en las partes claves sea dado de entrada o deba ser introducido.

Cambio de focalización bidimensional

Como lo expresan Marmolejo y González (2011), no basta con la discriminación de operaciones que han de realizarse sobre una figura y las transformaciones que se generan en ella, para describir la visualización asociada a las figuras bidimensionales que subyace al desarrollo y comprensión de tareas de áreas de regiones poligonales. Es necesario considerar, además, los cambios en la manera de ver en la figura que ha de medirse, centrados en unidades visuales 2D (figura de partida, sub-figuras y/o sub-configuraciones); es decir, pasar de centrar la atención en las características globales 2D de la figura de partida, a hacerlo en sus partes 2D constituyentes (sub-figuras o sub-configuraciones) y/o, en caso de haber varias figuras de partida, pasar de centrar la atención de una a otra y/o considerar simultáneamente la partes 2D que las conforman.

Metodología

En cuanto a la manera como fueron filtrados los datos, la investigación es de carácter cualitativo, puesto que aquellos se consideraron según los criterios de los investigadores. Conforme al propósito de comparar, describir y explicar el procesamiento cognitivo de los estudiantes que participaron en dos grupos distintos de la situación sometida a estudio, la investigación es de naturaleza comparativa, descriptiva e interpretativa. La captación y selección de los datos se realizó de forma inductiva; es decir, las categorías de análisis implementadas en la investigación se extrajeron de las producciones de los estudiantes. Su interpretación consideró el análisis funcional propuesto por Duval (1999) para la actividad cognitiva vinculada a los registros semióticos de representación, en particular el relacionado con las figuras geométricas y la visualización asociada a ellas. Así mismo, considerando el grado de abstracción, se trata de una investigación básica que no pretende establecer aplicaciones prácticas que puedan deducirse del estudio.

Instrumentos de recolección de datos

Los datos se acopiaron por medio de las producciones escritas de los estudiantes al resolver las tareas propuestas y, en casos puntuales, con entrevistas semi-estructuradas para ampliar o precisar las descripciones y explicaciones desarrolladas por ellos.

Población

La población estuvo constituida por 150 estudiantes de cuatro cursos de grado tercero de primaria, de igual número de instituciones educativas de la ciudad de Santiago de Cali (Colombia), con edades entre ocho y nueve años. Previo a la investigación, en ninguno de los cuatro cursos se habían adelantado procesos de enseñanza en los que explícitamente se reflexionara sobre el área de regiones poligonales y su medida.

El trabajo de campo

Los cuatro cursos de tercer grado de primaria se dividieron en dos grupos: el grupo E, uno de los cuatro cursos con 30 estudiantes; el grupo C, los tres cursos restantes con 120 estudiantes. En el primer grupo se implementó una secuencia de enseñanza especial, adicional a la habitual, desarrollada en cinco sesiones de clase, con una duración de 60 minutos cada una. Se hizo énfasis en la reflexión sobre algunos tratamientos que permiten las figuras geométricas y que hacen de estas representaciones soportes heurísticos en el aprendizaje de las matemáticas. Los tratamientos privilegiados fueron: introducir trazos sobre una figura, dividirla en partes, aplicar sobre ellas operaciones posicionales como rotaciones y traslaciones y transformar una figura en otra de contorno global diferente. Los alumnos del segundo grupo, por el contrario, no participaron en ningún proceso de enseñanza sobre las figuras y sus posibilidades operatorias y heurísticas

La secuencia de enseñanza consideró el trabajo individual de los estudiantes, seguido de la presentación y discusión de sus maneras de proceder en grupos de tres estudiantes y luego la presentación, al grueso de estudiantes, de las posibilidades y limitantes encontradas a las maneras de proceder discutidas al interior de los pequeños grupos. Por último, cada uno de los estudiantes consignó en su cuaderno la manera de proceder que, de manera posterior a la discusión, asumió como más pertinente o más interesante para el desarrollo de la tarea propuesta. La participación del profesor a cargo, tanto en el trabajo individual como en el realizado en pequeños grupos y a nivel grupal, se limitó a suscitar en los estudiantes la descripción y explicación en detalle de sus maneras de proceder.

Posteriormente, en los dos grupos, de forma paralela al desarrollo de las clases de geometría donde los estudiantes iniciaban la construcción del área de regiones poligonales, se implementaron dos actividades (ilustraciones 1 y 2) que fueron desarrolladas por los estudiantes en parejas escogidas de manera libre y espontánea, organizados en el aula de la misma manera. En todos los casos, los estudiantes trabajaron con sus profesores habituales, quienes fueron informados en detalle en cuanto a la finalidad de las actividades propuestas; su participación se limitó a entregar a los estudiantes las actividades, acompañarlos en la lectura de la consigna de las tareas propuestas y a la recolección de la producción escrita de los estudiantes.

Las parejas de estudiantes emplearon entre 10 y 30 minutos en la resolución de cada una de las actividades, por lo cual en todos los cursos se requirió solo una sesión para ello. Todos los estudiantes realizaron las dos actividades y, por tanto, los datos empíricos recolectados incluyen todos los estudiantes de la población escogida.

El instrumento de análisis

El interrogante que orientó nuestro estudio fue el siguiente: Al desarrollar tareas de comparación de cantidades de área, ¿cuáles son las diferencias y similitudes existentes entre las maneras de ver privilegiadas por parte de estudiantes que previamente han tenido la oportunidad de reflexionar de manera explícita sobre las posibilidades heurísticas y operatorias que brindan las figuras, y las formas de ver implementadas por estudiantes que no han tenido esa oportunidad?

Se tuvieron en cuenta cuatro categorías de análisis, a través de las cuales fue posible hacer un registro pormenorizado de los tipos de visualización introducidos por la población participante en la investigación: operaciones visuales, focalización, rol heurístico y conversión. De esta manera fue posible discriminar cuatro tipos distintos de visualización en las producciones de los estudiantes. En lo que sigue describimos en detalle cada una de las categorías y los elementos que les caracterizan:

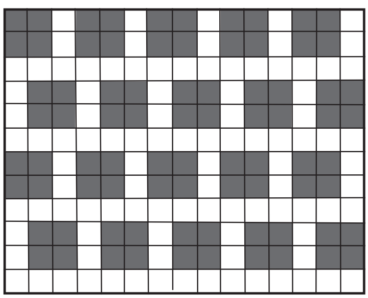
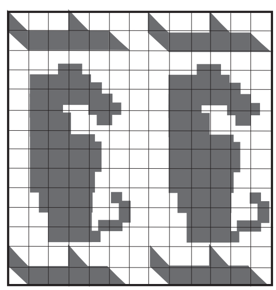
- *Operaciones visuales*: aluden a las acciones que se aplican sobre la figura en estudio y que producen sobre ella transformaciones figurales. Fueron tres las operaciones privilegiadas por los estudiantes en este estudio: reconfiguración (Rec), Traslación (T) y re-fraccionamiento[5] (Ref).
- *Focalización*: considera los saltos de naturaleza bidimensional aplicados sobre la figura de inicio. Los tipos de focalización encontrados en este estudio fueron: local con pérdida de globalidad (LPG) y local sin pérdida de globalidad (LSPG). En el primer caso, la atención recae sobre las sub-figuras que conforman la representación de partida, ignorándose en el proceso de resolución las características perceptuales de la figura de inicio. En el segundo, si bien la atención recae en las sub-figuras, las características globales de la figura de partida no son dejadas de lado.
- *Rol heurístico*: alude al papel que desempeña la figura en el desarrollo de la tarea propuesta. Encontramos en los procedimientos de los estudiantes cuatro niveles en que la figura se considera como soporte heurístico: 1) Nulo (N): la figura no suscita maneras de proceder que lleven a una respuesta adecuada a la pregunta planteada; de hacerlo, la manera de ver en ella conduce a maneras de proceder no pertinentes y/o a afirmaciones y consideraciones equivocadas. 2) Bajo (B): la figura permite maneras de proceder que suscitan la resolución del problema planteado, pero los procedimientos aplicados se caracterizan por ser engorrosos y poco económicos. 3) Medio (M): la figura pasa a ser un soporte heurístico para la resolución, pero las maneras de proceder tienden a ser poco económicas, aunque sean pertinentes y posibiliten una resolución adecuada. 4) Alto (A): la figura se constituye en soporte heurístico que suscita maneras de proceder económicas y pertinentes al problema planteado
- *Transformación*: alude a los dos cambios que permiten los registros semióticos de representación, en el caso de esta investigación, las figuras y el registro numérico (aritmético): Tratamiento, los que se pueden hacer al interior de cada registro; Conversión, los que se hacen entre los distintos registros semióticos en juego. Identificamos cuatro clases de transformaciones en los procedimientos de los estudiantes: 1) Interno-interno (T-T): primero tratamientos figurales y después tratamientos aritméticos, sin que haya conversión. 2) Interna-externa-interna (T-E-T): primero tratamientos figurales, conversión a registro numérico y por últi-

[5] Pasar de centrar la atención en las sub-figuras que conforman la figura de inicio, a discriminar en ella sub-configuraciones pertinentes al desarrollo de la tarea propuesta.

mo tratamientos aritméticos. 3) Interno aritmético (Ta): el procedimiento de resolución recae de forma absoluta sobre tratamientos aritméticos y 4) Interno figural (Tf): el procedimiento pone en evidencia tratamientos exclusivamente figurales.

CARACTERIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS

Las actividades implementadas en la investigación (ilustraciones 1 y 2) tienen un enunciado en lengua natural y una figura representada sobre un fondo cuadriculado. Los conocimientos matemáticos necesarios para resolver los problemas propuestas son mínimos y básicos para los alumnos del grado escogido; se trata de actividades que no requieren de ningún razonamiento que exija la utilización de definiciones, teoremas, propiedades y fórmulas matemáticas. Las figuras, en cada caso, son potentes heurísticamente, pues permiten varias posibilidades de transformación pertinentes a la resolución del problema propuesto. A pesar que la intención de cada actividad es que los alumnos reflexionen sobre el área de regiones poligonales, en las consignas no se hace referencia explícita a este objeto matemático; está implícito en el uso de expresiones que ponen en relieve la comparación directa entre figuras a partir de sus cantidades de área: *¿Cuál de las dos tiene mayor superficie? ¿Dónde se gastó mayor cantidad de pintura?* Cada situación demanda una explicación y justificación de los diversos procedimientos puestos en juego por los alumnos.

ACTIVIDAD 1: Este es el fondo de una piscina. Necesitamos saber cuál superficie es mayor: ¿la superficie blanca o la superficie gris? Explica tu procedimiento.	ACTIVIDAD 2: El mural del colegio está pintado tal como lo muestra la figura. Si los dibujos fueron pintados con color gris y el resto de la pared con color blanco, ¿dónde se gastó mayor cantidad de pintura? Explica tu procedimiento.
Ilustración 1 	Ilustración 2 

La complejidad de las actividades se relaciona con cinco aspectos:

1. No hay congruencia semántica entre el enunciado en lengua natural y la figura. En las dos situaciones la consigna introduce un anclaje sobre dos superficies distintas, la superficie blanca y la superficie gris, dándoles el mismo estatus dentro de la tarea. Al tiempo, la organización perceptiva de las figuras hace que la superficie gris sea espontáneamente vista como un conjunto de superficies independientes entre sí: en la primera actividad se discriminan 20 cuadrados grises y en la segunda se realzan seis figuras, dos con forma de caballo de mar y cuatro con forma de tiburón. Esa misma organización hace que la superficie blanca no sea espontáneamente vista, pues juega el papel de fondo.
2. Sea cual fuere la transformación por la que se opte, es necesario neutralizar en la figura su organización perceptiva, pues esta hace predominar los contornos de las configuraciones grises y de los cuadrados pequeños blancos sobre cualquier contorno de las sub-figuras pertinentes para la solución del problema planteado. Adicionalmente, luego las sub-figuras han de ser vistas por separado, aunque tengan parte de su contorno en común y, finalmente, ha de centrarse atención solo en una de ellas.
3. El grado de potencia heurística que presentan las figuras en esta actividad es alto. Son posibles varios tipos de transformación pertinentes para llegar a la conclusión de que la zona blanca es mayor que la zona gris: la figura se puede seccionar en diversas sub-figuras superponibles entre sí y, de esta manera, se pueden comparar las dos superficies.
4. Una figura y otra suscitan maneras de proceder totalmente diferentes en relación con las posibles unidades de medida vinculadas con la cuadrícula. En la primera, donde la distribución de zonas blancas y grises sigue una organización análoga a la de la cuadrícula misma, el conteo juega un papel determinante y eficaz para ver el fraccionamiento que la cuadrícula introduce sobre las partes que se han de comparar. No ocurre así con la figura de la segunda actividad, en la que el fondo cuadriculado se constituye en un obstáculo, pues es necesario considerar la figura de partida tanto en su globalidad, como en la semejanza existente entre sus partes.
5. La exigencia de conocimientos matemáticos en cada una de las actividades es de naturaleza distinta. En la primera, no es necesario ningún tipo de conocimiento sobre área para resolver la tarea planteada; es un

ejercicio de conteo más que un problema geométrico. En la segunda sí lo es, pues requiere establecer la relación de orden que exige considerar el área como un tipo de magnitud mediada por la aplicación de una operación interna propia de la magnitud área (unión de áreas). En este sentido, la actividad 1 permite centrarse en un registro numérico mientras que la actividad 2 exige la introducción de transformaciones de la figura.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las actividades propuestas en la investigación desencadenaron procedimientos de naturaleza diferente, según el tipo de visualización adoptado. Estas maneras de proceder no solo permitirán destacar la enorme complejidad de la visualización, sino mostrar el error de quienes la consideran obvia y espontánea. Así mismo, aportan suficientes elementos para reconocer la visualización como función cognitiva susceptible de ser incluida en procesos de enseñanza y, por esta vía, promover y apoyar su aprendizaje.

En lo que sigue describiremos en detalle las visualizaciones discriminadas en la investigación; en algunos casos y a modo de ejemplo, hacemos la descripción de fragmentos de las estrategias a las que recurrieron los estudiantes. Posteriormente, describiremos las diferencias y similitudes presentes en las maneras de ver empleadas por los estudiantes de los dos grupos.

Visualización 1 (V1): la atención de quien enfrenta la situación planteada recae exclusivamente en las sub-figuras de la figura de partida. Esta forma de ver, según la actividad desarrollada, moviliza dos procedimientos distintos, a saber:

- La primera actividad se realiza mediante un procedimiento en el que la figura no juega un rol heurístico en el intento de dar respuesta a la pregunta planteada. Se recurre a la figura de partida únicamente para discriminar sus partes, que se asumen como disjuntas entre sí; es decir, no se toman en consideración las características perceptivas globales de la figura de partida. No se realizan operaciones ni sobre la figura global ni sobre las partes discriminadas. No hay conversión de un registro a otro; por el contrario, el desarrollo de la actividad se realiza de manera exclusiva con tratamientos aritméticos tipo conteo.
- La segunda actividad se realiza mediante un procedimiento que, igual

> que el anterior, no se toman en consideración las características perceptivas globales de la figura de inicio y la atención recae en las subfiguras que le conforman. La diferencia con el procedimiento anterior es que se hacen transformaciones sobre las partes de la figura de inicio (reconfigura sub-figuras para conformar nuevas sub-figuras con forma cuadrada) pero, una vez establecidas las transformaciones, el desarrollo de la actividad continúa con tratamientos aritméticos tipo conteo.

Esta forma de ver conduce a que el estudiante se enzarce en acciones monótonas, extensas y engorrosas con un margen de error muy amplio para dar una respuesta a la pregunta de la situación. Además, esta centración en las unidades mínimas de la figura y solo en ellas, es decir, asumir como unidad de visualización cada uno de los cuadrados que conforman el fondo cuadriculado, lleva a una pérdida de la globalidad de la figura y estorba que pueda tomársela como soporte heurístico; los estudiantes que desplegaron este procedimiento e intentaron recurrir a la figura como herramienta heurística, lo hicieron de manera que aquella resultaba muy inestable "perdiendo o ganando" partes, sobre lo cual no logran ganar algún control.

Por ejemplo, en la actividad 2 encontramos con frecuencia el caso en que, cuando los estudiantes terminan de contar los cuadrados que están completamente coloreados de blanco o gris, se enfrentan con la situación de que hay otros cuadrados que no están coloreados en su totalidad. Ante esto proceden de formas diferentes: cuentan las fracciones de cuadrado como si fuesen unidades completas, o las ignoran y solo cuentan los completos, o las asumen como la mitad o el cuarto de una unidad, dejando de lado sus formas (triangulares, cuadradas, rectangulares) y posteriormente, por cada dos o cuatro de ellas, respectivamente, completan una unidad. Es claro que estos estudiantes en ningún momento recurren al registro semiótico de las figuras como tal; por el contrario, los procedimientos son de tipo conteo. Quienes procedieron mediante este tipo de visualización no lograron llegar a una solución satisfactoria del problema propuesto y más bien, al final, optaron por tratar de adivinar.

Otro caso es el de los estudiantes que no solo ven la figura como si estuviese fraccionada en una serie de cuadrados adjuntos entre sí, sino que reconocen la existencia de figuras triangulares, cuadradas y rectangulares al interior de cada una de los cuadrados que no están totalmente coloreados y, posteriormente, las llevan a aquellos lugares en la figura cuya forma permite un encaje y así conformar un cuadrado completo (de color blanco o gris). De esta manera obtienen una nueva figura de contorno global distinto y proceden a contar la unión de las partes “no completas”. En este caso se ha hecho uso de algunas de las posibilidades que permiten las figuras, por ejemplo, por complementariedad de formas, se unieron partes de un mismo color para conformar cuadrados completos. Sin embargo, una vez realizado este procedimiento la figura es dejada de lado y la actividad del estudiante se centra en el conteo. Es en este sentido que decimos que las posibilidades figurales son puestas en juego en una muy baja racionalidad.

Pues, esta forma de ver puede convertirse en un obstáculo para el reconocimiento del papel heurístico que la figura puede jugar en la solución de estos problemas; en la búsqueda de totalizar la cantidad de cuadrados que conforman las partes blancas y grises de la figura dada, hay estudiantes que no discriminan la presencia de las seis sub-figuras cuyas superficies están coloreadas de gris: cuatro peces y dos caballos de mar, y en consecuencia, que tanto peces como caballos, respectivamente, tienen igual forma y superficie. Esto impide que, a partir de un reconocimiento global de la figura, se pueda recurrir a ella como un soporte intuitivo que guíe la solución del problema hacia procedimientos de racionalidades mayores a las que subyacen al despliegue exclusivo del conteo.

Visualización 2(V2): identificada solo en la actividad 1. El interés de quienes resuelven la actividad recae tanto en las características perceptivas globales de la figura de inicio, como en las sub-figuras que le conforman. Primero introducen sobre la figura de partida transformaciones internas, luego hacen una conversión que permite pasar de una representación figural a una aritmética y, posteriormente, despliegan tratamientos aritméticos. La operación de re-fraccionamiento caracteriza esta forma de ver; su aplicación suscita una reorganización perceptiva de naturaleza interna en la representación de inicio. Así, quien intenta resolver el problema planteado pasa de centrar la atención en un conjunto de partes adjuntas entre sí a privilegiar la presencia de varias sub-configuraciones: 20 rectángulos de área pequeña y 4 de área mayor (Ilustración 3).

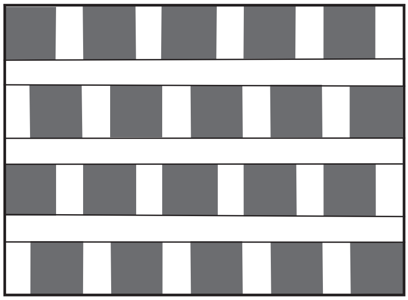


Ilustración 3. Modo de Visualización 2

Esta visualización conduce a procedimientos de racionalidades mayores a los evidenciados en V1: no solo la figura juega como herramienta heurística que guía la solución del problema, sino que además se recurre al uso de tratamientos aritméticos de mayor envergadura que el conteo. Es el caso del procedimiento puesto en evidencia en el fragmento de una entrevista realizada a una pareja de estudiantes y que transcribimos a continuación, en el que hacen un uso compuesto de operaciones aditivas y multiplicativas. Tras pedir a los alumnos que explicaran por qué afirmaban que la zona blanca es mayor que la gris, uno de ellos argumentó lo siguiente:

> Lo que hice fue multiplicar los cuadritos de los cuadros grises [un cuadrado gris está compuesto por 4 cuadritos] por la cantidad de cuadrados grises que hay, 20×4 = 80. Los cuadros blancos los junté y los volví líneas verticales [rectángulos compuestos por dos cuadrados blancos y que separan verticalmente una configuración gris de otra] y horizontales [rectángulos compuestos de 15 cuadritos que separan horizontalmente las configuraciones grises] ... los cuadritos de las líneas verticales los multipliqué por dos (20×2) y me dio 40. Los cuadritos de las líneas horizontales los multipliqué por cuatro (15×4 = 60), luego sumé sus resultados y me dio 100. Por eso la parte blanca es la más grande, porque hay más cuadritos blancos.

Visualización 3 (V3): así como los estudiantes que enfrentaron la situación 1 mediante la visualización anterior, hay otros estudiantes que consideran como unidad de visualización tanto la figura de partida como las sub-figuras que le constituyen pero que, a diferencia de los otros, realizan transformaciones de naturaleza figural seguidas de la introducción de conteo sobre las partes que componen la figura de llegada. El grado heurístico es de nivel medio. La conversión, en este caso, no hace parte de los procedimientos que los estudiantes siguen. Identificamos dos procedimientos que movilizan este tipo de visualización:

En el primero se introducen dos operaciones: una de re-fraccionamiento, a través de la cual los estudiantes transforman la representación de entrada desde una figura compuesta por sub-figuras puestas una al lado de la otra, a una de organización perceptual interna distinta; la figura se divide, así, en dos zonas de igual forma y cantidad de área, descompuestas cada una en partes igualmente no solapadas. La segunda operación es la traslación que los estudiantes hacen de algunas de las partes de una de las zonas hacia la segunda de ellas. Así pues, tras una reorganización de la estructura perceptiva interna de la figura, los procedimientos de los estudiantes dan lugar a una nueva representación de llegada. Teniendo esta, realizan sobre una de las partes de la nueva figura tratamientos aditivos tipo conteo.

Este procedimiento fue el que llevó a que una pareja de estudiantes lograran resolver satisfactoriamente la situación 1. Los estudiantes, tras hacer un re-fraccionamiento en la figura de inicio, la dividen en dos partes iguales (A y B); luego cambian la unidad de visualización, es decir, pasan de centrar la atención en la globalidad de la figura de inicio o en los cuadrados blancos y grises en que se descompone, a hacerlo en las zonas A y B. Posteriormente, cambian de nuevo la focalización, centrando la atención en las cuadrados grises presentes en la parte B. Enseguida vuelven a hacer un re-fraccionamiento, esta vez sobre cada uno de los cuadrados grises que están en B, descomponiéndolos en dos rectángulos iguales entre sí (Ilustración 4). Para resolver el problema propuesto, les bastó trasladar dichos rectángulos de la zona B y encajarlos en las partes blancas disponibles en A. Al preguntar a los alumnos cuál era la conclusión que alcanzaron tras proceder de esta manera, uno de ellos manifestó lo siguiente: "...concluí que la parte blanca es más grande que la gris, porque a la gris le hacen falta 10 cuadritos pequeños para completar el lado A, mientras que en la blanca no le hace falta nada".

Los estudiantes que presentaron este procedimiento no tuvieron en cuenta al conteo como herramienta fundamental para el desarrollo de la situación; ellos pusieron en juego racionalidades más complejas y elaboradas, propias de la geometría. Además, el área de regiones poligonales, objeto de enseñanza que se pretende movilizar con estas situaciones, siempre estuvo implícito a lo largo del procedimiento que los llevó a la solución del problema. Sin embargo, la figura no jugó en su máxima potencialidad, como sí sucede en la última de las visualizaciones identificadas en la investigación.

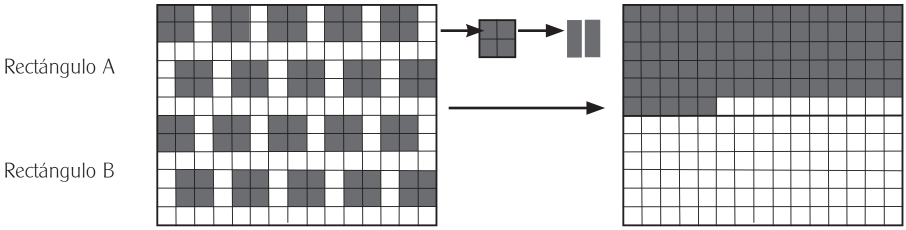


Ilustración 4. Modo de visualización 3

El segundo procedimiento identificado lo encontramos solo en el desarrollo de la actividad 2. Se caracteriza por la realización de un re-fraccionamiento sobre la figura de inicio que la descompone en dos sub-configuraciones iguales, cada una compuesta por dos peces y un caballo de mar representados sobre un fondo cuadriculado. Posteriormente, la focalización de quien resuelve la tarea recae en una de ellas, en particular, en las partes en tono oscuro. Por acción del fondo cuadriculado, las zonas oscuras tienden a ser discriminadas como una composición de triángulos, cuadrados pequeños y cuadrados grandes. A continuación, los estudiantes hacen reconfiguraciones sobre cada cuatro cuadrados pequeños y cada pareja de triángulos transformándolos en cuadrados grandes. Simultáneamente, se introduce un conteo uno a uno tanto de los cuadrados grandes que conforman la figura como de aquellos que aparecen tras el proceso de reconfiguración. Así pues, al ser iguales las dos partes en que los estudiantes dividieron la figura de inicio, les bastó establecer la relación entre la zona blanca y gris de una de ellas para resolver el problema planteado. De esta manera establecen la relación entre las cantidades de área de la parte blanca y la gris en la figura en estudio.

Visualización 4: un grupo muy pequeño de estudiantes manifestó una mayor flexibilidad para ver en la figura. Igual que en las dos maneras de ver antes descritas, la focalización es local sin que haya pérdida de globalidad. El rol heurístico jugado por la representación de inicio es alto. En el procedimiento que le caracteriza se realizan operaciones de re-fraccionamiento y reconfiguración; así mismo, el tratamiento figural es la transformación semiótica que se impone. Esta manera de ver la encontramos de manera prioritaria en el desarrollo de la actividad 1, transcurriendo de la siguiente manera: tras reconfigurar la figura inicial en 20 sub-figuras iguales entre sí (ilustración 5), los estudiantes asumen como unidad de visualización una de estas sub-figuras y, centrados en ella, concluyen que en la piscina la superficie blanca es mayor que la superficie gris. Al exigir una justificación, uno de los alumnos se limitó a señalar primero la parte blanca y luego la parte gris de la sub-figura diciendo "no la puedo volver como un cuadrado", aludiendo de esta manera que no es posible reconfigurar la zona blanca en la figura de superficie gris.

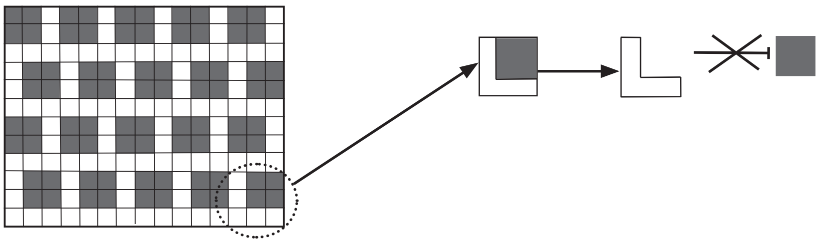


Ilustración 5. Modo de visualización 4

En la tabla 1 se presentan sintéticamente las cuatro visualizaciones previamente descritas, así como los elementos que les caracterizan descritos en el instrumento de análisis:

Tabla 1: visualizaciones presentes en los procedimientos de resolución aplicados por los estudiantes al resolver las actividades propuestas

Categorías	*V1*		*V2*	*V3*		*V4*
	P1	*P2*		*P1*	*P2*	
Operación	Ausente	Rec.	Ref.	Ref.+T	Ref.+Rec	Ref.+Rec.
Focalización	LPG	LPG	LSPG	LSPG	LSPG	LSPG
Rol heurístico	Nulo	B	B	M	M	A
Transformación	Ta	T-T	T-E-T	TT	T-T	Tf

Contraste entre las visualizaciones introducidas por los grupos en estudio

En lo que sigue describimos las similitudes y diferencias de visualización encontradas en los dos grupos (grupo C y E) según cada actividad:

Actividad 1: El 100% de los estudiantes del grupo C realizaron esta actividad con la forma de ver y proceder del tipo V1. Este tipo de visualización, si bien suscita una manera de proceder que podría llevar a la resolución de la tarea planteada, es la menos económica y más engorrosa de todos los procedimientos que se desprenden de las visualizaciones posibles que permite la figura de inicio. Son muchos los cuadros blancos y grises que destacan en la figura y, por tanto, el conteo uno a uno ocupa tiempos mayores que los tratamientos explicitados por la mayoría de las visualizaciones posibles. Además, no pone en evidencia el propósito de la tarea: comparar cualitativamente las partes en cuestión. En relación con el procedimiento aritmético empleado, no aporta en nada a reflexiones aritméticas distintas a las que el estudiante ha venido realizando en la etapa pre-escolar o en los grados primero y segundo. En pocas palabras, los estudiantes de este grupo se quedaron en un registro numérico donde la figura no jugó un papel heurístico en la solución del problema planteado.

Los estudiantes del grupo E, por el contrario, introdujeron cuatro tipos de visualización distintos. También se presentó el tipo de visualización V1, pero solo por 20% de los estudiantes. La visualización de mayor presencia fue la V3; por medio de ella 60% de los estudiantes de este grupo puso en acto racionalidades geométricas, donde la figura jugó como una representación dinámica y el área se trató como un tipo de magnitud. Sin embargo, no es la manera de ver más propicia, pues hacer re-fraccionamientos sobre algunas sub-figuras y su posterior desplazamiento a una zona distinta de la figura son acciones, igual que el conteo, engorrosas y poco económicas.

En relación con las maneras de ver que suscitaron estrategias potentes según el rol que desempeñó en ellas la figura, el éxito alcanzado y el tiempo exigido para su aplicación, destacan las visualizaciones V2 y V4. Fueron pocos los estudiantes del grupo E que privilegiaron tales maneras de ver: 13% y 6% respectivamente. En el primer caso, desencadenando maneras de proceder poco habituales en estudiantes del grado considerado e introduciendo una conversión del registro figural al aritmético; en el segundo, haciendo de la figura un importante y destacado soporte heurístico para el desarrollo de la tarea planteada.

Actividad 2: El desarrollo de esta actividad suscitó solo dos tipos de visualización: el modo de ver V1, movilizado por 100% de los estudiantes del grupo C y 93% de los estudiantes del grupo E, y el modo de ver V4 por parte de 7% de los estudiantes del grupo E.

La distribución de las zonas grises y su conformación en figuras con contornos no continuos en esta actividad, desencadenaron procedimientos poco económicos y engorrosos basados en el conteo y no en la comparación cualitativa entre superficies. Por tanto, para la gran mayoría de los estudiantes de un grupo y otro, la complejidad de las figuras geométricas, en este caso, no constituyeron un soporte heurístico en el desarrollo de la actividad.

La pareja de estudiantes (7%) que recurrió al modo de ver V4, logró sobrepasar la complejidad de la tarea conformando sub-figuras para cada uno de los tipos de configuración de la actividad, con la misma unidad de visualización al interior de cada una de ellas, con base en lo cual luego pudieron hacer una apreciación global para la comparación de áreas. Es a través de este tipo de visualización que se puede apreciar que, a los ojos de los estudiantes, las figuras geométricas pueden jugar y juegan como soportes intuitivos en su máxima expresión.

CONCLUSIÓN

La geometría es una de las partes de las matemáticas que genera una particular preocupación en los educadores matemáticos dado su abandono como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX. Esta situación se ve reflejada en las encuestas nacionales e internacionales que evalúan los conocimientos matemáticos de los estudiantes (Villani, 1998). Actualmente existe en la comunidad matemática internacional una amplia convergencia de opinión en que la geometría, después de años de abandono, debiera ser revitalizada en sus variados aspectos en todos los niveles escolares (Villani, 1998). No obstante, es utópico, y hasta cierto punto indeseable, pensar que la geometría ocupe ahora un tiempo análogo al que antaño se le dedicaba en las instituciones educativas, pues son muchos los objetos, propiedades y relaciones matemáticas sobre los que se ha de reflexionar. Pero eso no justifica que en la actualidad los tiempos asignados sean cada vez menores. Entonces, ¿cómo hacer que la geometría ocupe un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas? Investigaciones realizadas por Duval (1998, 1999), Padilla (1992), Lemonídis (1991), así como las nuestras (Marmolejo, 2005, 2007) aportan elementos importantes para acercar respuestas tentativas a tal cuestionamiento. La visualización se constituye en un lugar de enorme potencia para devolver el lugar que le corresponde a la geometría en los currículos escolares. Pero, como se pone en evidencia en esta investigación, esta actividad cognitiva no se adquiere de forma inmediata ni simple; más bien es una cuestión de tratamiento de información susceptible de un aprendizaje específico.

Para que un alumno pueda discriminar las diferentes maneras de ver que permiten las figuras geométricas y de esta manera acceder a las figuras como verdaderos soportes intuitivos en el desarrollo de actividades matemáticas, es indispensable y urgente abrir espacios específicos en los currículos escolares de la educación primaria básica dirigidos a su enseñanza. En la única etapa de educación institucionalizada en la que existe tal intencionalidad es en el preescolar, pero está más orientada al desarrollo de la motricidad fina y al reconocimiento de figuras por parte del alumno, que al desarrollo de algún tipo de racionalidad de orden geométrico. Posteriormente, en los cursos de educación básica, los alumnos deberían, a partir de ese reconocimiento visual y de esa actividad motora adquirida, entender todas las posibilidades que brindan las figuras. En este sentido es importante resaltar que, si bien la implementación de una cuantas sesiones de enseñanza de la visualización suscita una variedad de procedimientos, algunos de ellos de considerable potencia en el desarrollo de tareas matemáticas, no bastan unas pocas sesiones para asegurar una adecuada movilización de los tratamientos figurales que permitan a la visualización ser una herramienta heurística ante las exigencias que las matemáticas escolares requieren. Por el contrario, ha de constituirse en objeto constante de enseñanza durante los primeros ciclos de la educación básica.

El área de regiones poligonales, por su parte, se constituye en la ocasión propicia para promover la enseñanza de la visualización asociada a las figuras geométricas. Pues como se ha puesto en evidencia en este documento, la comparación de figuras a partir de sus cantidades de área es un lugar idóneo para el desarrollo de habilidades visuales en los primeros grados de la educación primaria, máxime si se considera que este objeto métrico tiende a ser un elemento de reflexión a lo largo de toda la educación básica. En este sentido afirmamos que el área de regiones poligonales se constituye en una entrada a la enseñanza de la geometría.

Datos de los autores

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia. Profesor Universidad de Nariño (Colombia). Departamento de Matemáticas y Estadística; usalgamav@gmail.com
Myriam Belisa Vega Restrepo. Profesora Universidad del Valle (Colombia). Instituto de Educación y Pedagogía; myvega43@hotmail.com

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. En *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Clements, D. Swaminathan, S. Zeitler, M. A. y Sarama, J. (1999). Young children´s concepts of shape. En *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2). Pp. 192-212

Davis. P. (1993). Visual Theorems. En *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 333-344

Duval, R. (1988a). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253

Duval, R. (1988b). Approche Cognitive des Problèmes de géométrie en termes de congruence. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En R. Suttherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlín, 142-157.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 37-51.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Trad. Myriam Vega Restrepo (1º ed.). Colombia. Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Mexico, 41-76.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. En *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Gal, H y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. En *Educational studies in mathematics*, 74, pp. 163-183

Kordaki, M. (2003). The effect of tools a computer microworld on students´strategies regarding the concept of conservation of area. En *Educational Studies in Mathematics* 52 (2), 177–209.

Lemonidis, C. (1991). Analyses et réalisation d´une expérience d´enseignement de homothétiee. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2-3), 295-324.

Markovits, Z., Rosenfeld, S. y Eylon, B.S. (2006). Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers. En Novotná, J. Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 145-152

Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. En *Revista Sigma*, 10 (2), 10-26

Marmolejo, G. (2007). Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad. Tesis de magister no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Marmolejo, G. (2005). Análisis del Tópico de Geometría y Medición. En *Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la escuela.* Universidad del Valle. Cali. Colombia, 27-44

Marmolejo, G. y González, M.T. (2011). La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de Análisis de libros de texto. Conferencia presentada en Asocolme 12 (6-12 octubre). Armenia (Colombia).

Marmolejo, G. y González, M.T. (2012). *El Control Visual para la construcción del concepto de área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis*. En prensa.

Mesquita, A. (1989b). L'Influence de aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie. Disertación doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Strasbourg, Francia.

Moriena, S. y Scaglia, S. (2003), Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la Geometría. En *Educación Matemática*, 15 (1), 5-19.

Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2000). Young children´s intuitive understanding of rectangular area measurement. En *Journal for research in mathematics education*, 31(2), pp. 168-190.

Padilla, V (1992). L´influence d'une acquisition de traitementes purement figuraux pour l'apprentissage des Mathematiques. Thèse U. L. P. Strasbourg, Francia.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Gutierrez, P. Boero (Eds.), *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers, 205-235.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. En *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297–311.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. En *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*. 40 (1), pp. 65-82

Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. En *Educación Matemática*, 15, (2), 27-53.

Villani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study). En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 337-346.

Walcott, C. , Mohr, D. y Kastberg, S. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. En *Journal of Mathematical Behavior*, 28, pp. 30-40.

Zimmermann, W. y Cunnigham, S. (1991). Editor's introduction: What is Mathematical Visualization? En W, Zimmermann y S. Cunnigham (Eds.), *Visualization in teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington. D. C., 1-8.

‘Conocimiento especializado del contenido’ de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos

Natalia Sgreccia y Marta Massa

Resumen: El conocimiento especializado del contenido constituye uno de los dominios de conocimiento requeridos para enseñar matemáticas. En este artículo se presentan resultados, vinculados con dicho dominio, como parte de una investigación realizada con estudiantes avanzadas y egresadas de un Profesorado de matemáticas de Argentina. La indagación estuvo orientada a caracterizar sus conocimientos para enseñar cuerpos poliedros y redondos en los dos primeros años de la escuela secundaria. El estudio, de tipo cualitativo-descriptivo, empleó como instrumento una entrevista abierta. Si bien las participantes dieron indicios de un conocimiento matemático bastante consolidado, se detectaron debilidades en la conformación de su conocimiento especializado del contenido.

Palabras clave: conocimiento especializado del contenido, formación de profesores de matemáticas, cuerpos geométricos

‘Specialized content knowledge’ of pre-service and novel teachers of Mathematics. The case of geometrical solids

Abstract: Specialized content knowledge constitutes one of the required domains of knowledge for teaching Mathematics. Related results with that domain are presented in this paper, as part of a research done on advanced and graduates students in Mathematics Teaching in Argentina. The research was oriented to characterize the knowledge for teaching solids in the two first years of secondary school. In this qualitative-descriptive study, an opened interview was used as instrument. While participants gave signs of a quite consolidated mathematical knowledge, weaknesses were identified in their specialized content knowledge.

Keywords: specialized content knowledge, Mathematics teacher education, geometrical solids.

Fecha de recepción: 30 de abril de 2012. Fecha de aceptación: 18 de noviembre de 2012.

INTRODUCCIÓN

Con frecuencia se observa una reducida competencia espacial en el desempeño de alumnos que ingresan a carreras universitarias que la requieren, tales como ingeniería, arquitectura, química, diseño y bellas artes, entre otras. Las debilidades observadas pueden relacionarse con el escaso tiempo destinado al desarrollo de la competencia espacial en la escolaridad previa, a pesar de estar la misma vinculada con el pensamiento crítico y la imaginación. Vázquez y Noriega Biggio (2010) analizan esta competencia sobre una muestra estadísticamente significativa de jóvenes que ingresan a la universidad e identifican un mayor desarrollo en los estudiantes que proceden de escuelas técnicas.

La enseñanza de la geometría que se realiza en las escuelas actualmente no refleja el reconocimiento atribuido a los sólidos como un buen soporte para desarrollar actividades de producción matemática. González, Guillén y Figueras (2007) señalan que tal exclusión podría deberse a la debilidad en la formación de los profesores en la didáctica de la geometría 3d.

La revisión sobre investigaciones en la formación de profesores de matemáticas realizada por Sánchez (2011) muestra cinco ejes de relevancia en este campo: creencias, visiones y concepciones de los profesores; prácticas docentes; conocimiento y habilidades de los profesores; relación entre teoría y práctica; práctica reflexiva. El eje conocimiento y habilidades de los profesores se vincula con aquello que debe disponer un docente para generar una buena enseñanza. Shulman (1986) inicia esta línea de investigación sobre la formación del profesor, con una propuesta de categorías para conceptualizar la clase de conocimiento requerido en la enseñanza de cualquier materia. Sin embargo, todavía no se le ha dado la suficiente importancia a este eje en los programas de formación de profesores (Pinto Sosa y González Astudillo, 2008), a pesar de haberse constituido en un tema de interés creciente en Educación Matemática.[1] Ball, Thames y Phelps (2008) avanzan en la línea de investigación de Shulman, orientándola hacia las matemáticas, e identifican seis dominios de *conocimiento matemático para enseñar*, uno de los cuales corresponde al *conocimiento especializado del contenido*.

En el área de geometría, Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010) analizan las implicaciones del *conocimiento matemático para enseñar* en la práctica docente en la escuela primaria, al abordar el contenido cubos. Concluyen que las carencias

[1] A partir de la tercera edición del *International Congress of Mathematical Education* en 1976, existe un grupo específico que trata la temática.

en el *conocimiento especializado del contenido*, evidenciadas ante la imposibilidad del docente para que su noción de cubo se despliegue en explicaciones y procedimientos matemáticos para hacerlo enseñable, repercuten en variados aspectos de la enseñanza de las matemáticas.

Gonzato, Díaz Godino y Neto (2011) elaboran cuestionarios para evaluar los *conocimientos didáctico-matemáticos* de profesores en formación para la educación primaria acerca de la visualización de objetos tridimensionales. Su modelo didáctico-matemático, basado en el "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; citados en Gonzato *et al.*, 2011), considera tres componentes en la faceta epistémica del conocimiento del contenido del profesor: dos de ellas, *conocimiento común del contenido* y *conocimiento especializado del contenido*, corresponden a las definidas por Ball *et al.* (2008), y se incorpora una tercera definida como *conocimiento ampliado del contenido*. En su estudio consideran cinco tipos de tareas relacionadas con dicha temática: la coordinación e integración de las vistas de objetos, la rotación de un objeto en el espacio, el plegado y desplegado de desarrollos, la composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional y la generación de sólidos de revolución. Los resultados muestran que el profesor en formación consigue resolver correctamente las tareas relacionadas con los conocimientos *común y ampliado* del contenido, pero tiene dificultades en identificar los objetos y procesos puestos en juego en la resolución así como en justificar su proceder, dando indicios de debilidades en su *conocimiento especializado del contenido*.

Guillén (2000) indaga los objetos mentales conformados por estudiantes para profesor de escuela primaria para determinadas familias de sólidos que se presentan mediante diferentes representaciones físicas. Su perspectiva teórica se basa en el modelo de Van Hiele (1986) junto con el enfoque de Freudenthal (1983), e incorpora los procesos visuales y analíticos propuestos por Hershkowitz (1990) para interpretar la construcción de la imagen de un concepto, así como el efecto de ejemplos prototípicos y distractores. Algunas de las cuestiones planteadas[2] a los estudiantes entrevistados requieren respuestas donde se articulan nociones sustentadas en un conocimiento que corresponde a lo que Ball *et al.* (2008) denominan *especializado del contenido*. Los resultados de Guillén muestran que los ejemplos de poliedros que tienen mayor incidencia sobre el objeto

[2] Se muestra, por ejemplo, un modelo de un antiprisma pentagonal de base regular y se pregunta: ¿A qué familia pertenece? ¿Por qué dices que es un antiprisma? Si te fijaras en los vértices, ¿podrías decir algo? Y esta propiedad que has dicho, ¿la cumplen todos los antiprismas?

mental correspondiente son generalmente aquellos que se han caracterizado con mayor cantidad de atributos. Además, las representaciones físicas de los sólidos pueden condicionar la identificación de los mismos como ejemplos o no-ejemplos de una familia en situaciones de enseñanza o bien actuar como distractores visuales de las diferentes representaciones físicas de los sólidos. Guillén señala como factores que dan lugar a ideas erróneas: problemas de lenguaje, juicios basados en subfamilias o en parte de una figura; extensión de una propiedad de una familia de sólidos a otra, o de elementos del plano a elementos del espacio; aplicación incorrecta de relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento; incomprensión de conceptos implicados en cierta propiedad. Algunos de estos resultados constituyen un aporte significativo para interpretar posibles dificultades en la organización del *conocimiento especializado del contenido* "sólidos" de los futuros profesores.

Asimismo, si se considera que el *conocimiento especializado del contenido* está vinculado con la capacidad de un profesor de matemáticas para representar con exactitud ideas matemáticas y proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes, entonces resulta importante analizar las habilidades espaciales de los propios docentes y la manera en que las utilizan para representar espacialmente y transmitir el concepto representado. En este sentido, Gutiérrez (1998) efectúa un significativo aporte respecto de las representaciones en geometría 3d y sus transformaciones planas como contenido de enseñanza. Guirette y Zubieta (2010) examinan la lectura y construcción de dibujos geométricos en el quehacer matemático de un conjunto de profesores de escuela secundaria y de bachillerato en México. Identifican que el diagrama bien puede tener un papel heurístico, bien constituir un obstáculo en una situación geométrica. Reconocen que todos los profesores logran distinguir algunas propiedades geométricas y las relaciones que les permiten organizar un diagrama satisfactorio, así como esbozar una justificación. Sin embargo, señalan una gran dificultad por parte de los profesores para ofrecer un argumento, ya que no logran "desempaquetar del diagrama las relaciones pertinentes que, en sinergia, los hubiera llevado a esbozar una justificación satisfactoria" (p. 116), características que ponen en evidencia la debilidad en el *conocimiento especializado del contenido.*

Finalmente, cabe mencionar los aportes esperados en el desarrollo de las habilidades espaciales por el empleo de recursos de geometría dinámica tridimensional. Güven y Kosa (2008) analizan tales habilidades en un grupo de futuros profesores de matemáticas, desarrolladas mediante el empleo del *soft-*

ware Cabri3D. A diferencia de lo que suponían, encuentran un bajo desarrollo de habilidades espaciales en los participantes de su investigación. Consideran que esto puede deberse a la falta de oportunidades para crear y manipular modelos 3d, así como al habitual desplazamiento del foco hacia el cálculo de medidas. Samper, Perry, Camargo, Molina y Echeverry (2010) realizan un estudio sobre la formación de profesores para la educación secundaria con *software* de geometría dinámica, focalizando particularmente en la lógica de la demostración. Sostienen que, al respecto, es necesaria una labor decidida y sistemática para la formación del profesor.

Los resultados encontrados señalan debilidades formativas, de los profesores o futuros profesores, en geometría 3d y, en especial, en las orientaciones para transformarlos en contenidos a ser enseñados.

En Argentina se ha iniciado un proceso de acreditación de la formación universitaria de profesores de matemáticas, que plantea la necesidad de generar conocimientos que orienten sobre los modos más apropiados de desarrollar acciones formativas. Este estudio, que está situado en el eje conocimiento y habilidades de los profesores de matemáticas y que forma parte de una investigación más amplia, busca conocer: ¿cuáles son los rasgos que caracterizan el *conocimiento especializado del contenido* para enseñar *cuerpos poliedros y redondos* de los profesores? Interesa conocer las decisiones relacionadas con la adaptación de los contenidos geométricos 3d que realizan los docentes noveles y los futuros docentes para que sean enseñados en los dos primeros años de la escuela secundaria. El mismo se aborda mediante un estudio de caso que contempla:

- *una carrera*: Profesorado de matemáticas (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina. En este país, la carrera de grado Profesorado de matemáticas existe diferenciada de la Licenciatura en matemáticas, que está orientada a la investigación (pura o aplicada) en esta disciplina. En Argentina, coexisten dos subsistemas formadores de profesores, dependientes de diferentes jurisdicciones gubernamentales: el *nacional*, que se realiza en carreras de Profesorado que se cursan en las Universidades, y el *provincial*, que se efectúa en los denominados Institutos de Formación Docente como formación superior no universitaria. En ambos tipos, a su vez, la gestión puede ser pública o privada;
- *dos tipos de actores*: estudiantes avanzados –que cursan el tercer o cuarto año de la carrera– y egresados en los últimos cinco años. Se considera

aquí a las personas que han sido formadas en el marco de la carrera con el Plan de Estudios 2002 vigente;

- *un nivel de enseñanza*: los primeros años de la escuela secundaria (alumnos con edades entre 12 y 14). La decisión de centrar el estudio en este nivel de escolaridad se debe a que el enfoque sintético de la geometría es requerido desde las disposiciones curriculares con mayor especificidad en los primeros años del secundario que en los últimos. Además, en esta etapa de la escolaridad, los alumnos transitan entre el nivel primario de educación (con tratamiento predominantemente intuitivo) y el secundario superior (con mayor formalización y abstracción). A nivel universitario, el tratamiento de la geometría es, en general, axiomático.

Se considera que esta investigación puede contribuir al desarrollo del área *formación de profesores de matemáticas* complementando, en geometría 3d y en la escuela secundaria, los estudios realizados por Ball[3] y su equipo, que giran mayoritariamente sobre el campo numérico en el nivel primario de educación. El estudio que aquí se expone busca ampliar la comprensión acerca del conocimiento especializado que los profesores de matemáticas poseen sobre *cuerpos geométricos*.

ENFOQUE TEÓRICO

Según Ball *et al.* (2008), la mayoría de la gente estaría de acuerdo en que conocer matemáticas es importante para su enseñanza. Sin embargo, lo que comprende tal conocimiento y su alcance aún amerita indagación desde la investigación especializada. Por y para ello estos autores proponen un conjunto de seis dominios de *conocimiento matemático para enseñar* que han de disponer los profesores:

Dominio 1. Conocimiento común del contenido: es el que poseen las personas que usan las matemáticas en cualquier ámbito científico o profesional, no solo de enseñanza.

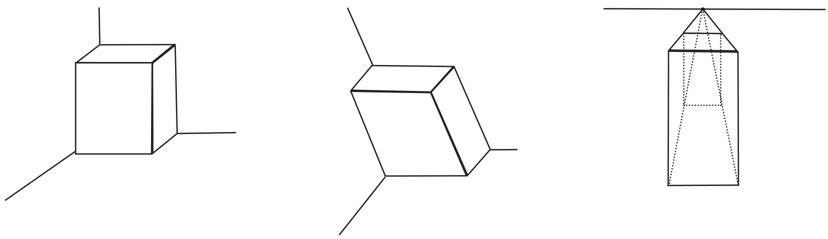
Dominio 2. Conocimiento en el horizonte matemático: permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículum y ofrece una visión para entender las conexiones entre las diversas nociones matemáticas.

[3] Véase http://www-personal.umich.edu/~dball/

Dominio 3. Conocimiento especializado del contenido: atiende a los usos específicos que surgen en el proceso de enseñanza, a las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformarlo en contenido enseñable, aspectos que no se requieren en otras profesiones u oficios que recurren a las matemáticas. Comprende el conocimiento y habilidades matemáticas propias de los docentes, que generalmente no poseen otros adultos, aun cuando hubieran completado sus estudios superiores (Delaney, Ball, Hill, Schilling y Zopf, 2008). Este conocimiento involucra un trabajo de desmenuzamiento: organizar la estructura conceptual en que serán presentadas las ideas matemáticas; formular preguntas matemáticamente productivas; encontrar un ejemplo para construir un aspecto matemático específico; adaptar el contenido matemático de los libros de texto; reconocer qué está involucrado al usar una representación matemática particular; explicar y justificar por qué se efectúa cierto procedimiento o desarrollo y no otro. Estas tareas demandan un entendimiento y razonamiento exclusivo de la enseñanza, más allá del conocimiento matemático en sí que se está enseñando.

Análogamente a los ejemplos sugeridos por Ball (2010) puede señalarse que, en la enseñanza de cuerpos geométricos en la escuela secundaria, el *conocimiento especializado del contenido* se requiere cuando el profesor debe actuar ante situaciones como las siguientes:

- Para evaluar si los alumnos entienden qué es un prisma, el docente debería poder elegir, con fundamento, la representación plana que sería conveniente presentarles entre algunas como las que se muestran en la Figura 1. Para ello debe conocer que en cualquiera de ellas se distorsiona alguna de las propiedades del cuerpo y que se requiere el conocimiento de convenciones en la lectura visual (Guillén, 2010). Por ejemplo, el docente debe conocer que la proyección en perspectiva caballera se basa en el uso de un triedro trirrectángulo cuyas direcciones se toman como referencia; sobre dos de ellas se dibuja la cara frontal en su forma y dimensiones reales, y sobre la tercera dirección, que expresa la profundidad, se proyectan en forma oblicua las caras perpendiculares a la frontal aplicando un coeficiente de reducción. En la proyección isométrica, las tres aristas que convergen en un vértice se representan formando ángulos de 120° entre sí y conservando, en la representación plana, la relación con las medidas y el paralelismo entre las aristas paralelas del cuerpo. En la proyección en perspectiva frontal, el prisma se sitúa con sus caras paralelas al plano de dibujo y las aristas perpendiculares se proyectan sobre direcciones que convergen sobre un punto (denominado punto principal) en la línea del horizonte, en este caso solo la cara frontal no se distorsiona.

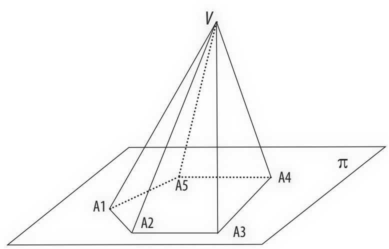


Proyección en perspectiva caballera | Proyección isométrica | Proyección en perspectiva frontal

Figura 1 Posibles representaciones planas de prismas

- El profesor de matemáticas debería poder transformar una definición de pirámide aprendida en su formación disciplinar universitaria, que constituye el *conocimiento común del contenido:*

> Sean $A_1A_2 \ldots A_n$ un polígono contenido en un plano π y un punto $V \notin \pi$. El conjunto de los puntos que pertenecen a todos los segmentos $\overline{PV}$ donde $P \in A_1A_2 \ldots A_n$ se llama pirámide de vértice V y base $A_1A_2 \ldots A_n$ (Garguichevich, 2007: 279).



en una definición adaptada al nivel educativo en cuestión –omitiendo parcialmente notación simbólica e información matemática precisa– como las presentadas en libros de texto:

La pirámide es el poliedro que tiene una base poligonal y sus caras laterales triangulares. Todas las caras laterales concurren en un vértice llamado cúspide (Andrés, Latorre y Machiunas, 2000: 194).

> A los cuerpos que tienen todas las caras planas los llamamos poliedros. En las pirámides todas las caras, menos una, tienen un vértice en común (Barallobres, 1997: 41).

Dominio 4. Conocimiento del contenido y de los alumnos: integra conocimiento acerca de la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos. Permite al docente prever respuestas, actitudes, dificultades y aciertos de sus alumnos en relación con el conocimiento matemático.

Dominio 5. Conocimiento del contenido y de la enseñanza: requiere una interacción entre el entendimiento matemático específico y los aspectos pedagógicos y didácticos que inciden en el aprendizaje del alumno. Comprende, entre otros, las formas didácticas de abordar el desarrollo de las matemáticas para hacer accesible su contenido a otros, los criterios para distinguir entre contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que han de ser objeto de enseñanza, las orientaciones para gestionar la clase, la selección de los recursos didácticos, la organización de instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos.

Dominio 6. Conocimiento del contenido y del currículum: comprende los fundamentos, enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado. Es un conocimiento vinculado con lo normado jurisdiccional e institucionalmente y que posibilita las decisiones y acciones como docente.

Ball *et al.* (2008) describen situaciones en las que se utilizan conocimientos de diferentes dominios. Así, por ejemplo, ante la resolución de un problema matemático realizada por un alumno, reconocer si la misma es correcta o incorrecta demanda *conocimiento común del contenido*; dilucidar qué anduvo mal mediante el análisis matemático del error, considerar los pasos seguidos y las suposiciones hechas implica un *conocimiento especializado del contenido*; reconocer que ha visto ese tipo de error antes en otros alumnos frente a situaciones de la misma naturaleza expresa un *conocimiento del contenido y de los alumnos*.

En el caso específico del *conocimiento matemático para enseñar* el Teorema de Euler para poliedros en la escuela secundaria, el *conocimiento común del contenido* se pone en juego al establecer las condiciones bajo las que se parte en cuanto a los entes matemáticos involucrados como hipótesis (poliedro convexo simple) y la propiedad matemática que se ha de satisfacer como tesis (la cantidad de vértices más la de aristas menos la de caras es dos). El *conocimiento* *en el horizonte matemático* involucra conocer que los poliedros convexos simples son un caso particular de la n-esfera, cuando n es nulo (o de un cuerpo sin agujeros, topológicamente equivalente a una esfera). En forma complementaria, este conocimiento implica saber justificar por qué Leonhard Euler (1707-1783) es considerado el principal matemático del siglo XVIII. El *conocimiento especializado del contenido* se activa para tomar decisiones en relación con la elección de ciertos poliedros entre un conjunto posible, para explorar empíricamente entre los que satisfacen o no la propiedad, y observar regularidades, para reconocer el tributo geométrico que connota la diferencia. *El conocimiento del contenido y de los alumnos* da indicios de posibles límites en el razonamiento geométrico de los alumnos (qué y hasta dónde podrán demostrar solos) y en qué parte quizás requieran un apoyo-guía del docente; saber en qué parte de la propiedad hay que tener especial cuidado debido a que suele acarrear dificultades cognitivas; considerar cuáles ejemplos posiblemente los alumnos perciben como más familiares, favoreciendo sus aprendizajes. *El conocimiento del contenido y de la enseñanza* se utiliza cuando se decide, por ejemplo, si la clase donde se explorará la relación de Euler en los poliedros convexos y se reconocerán los sólidos platónicos se desarrollará con la modalidad de taller –trabajando los alumnos en pequeños grupos, en la construcción de poliedros regulares con piezas plásticas con forma de polígonos regulares (triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y heptágonos) y bisagras para encastrarlas (Sgreccia y Massa, 2011)– o mediante acciones individuales de exploración utilizando recursos informáticos; para idear una secuencia de actividades de manera que los alumnos den evidencias de aprendizajes adecuados o erróneos. Finalmente, el *conocimiento del contenido y del currículum* es utilizado para comprender el entramado de la red de conocimientos previos y posteriores del eje Geometría en la articulación prevista en el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de Santa Fe, 1999) que contextualiza la planificación de la unidad correspondiente.

METODOLOGÍA

Basados en un enfoque cualitativo-descriptivo (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006), se recurrió a la entrevista escrita como técnica para recoger información. Esta forma de entrevista está indicada cuando se pretende recoger información preguntando a un grupo relevante de sujetos, a un costo viable, con un formato común en las preguntas (Gonzato *et al.*, 2011; Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez, 1999). En una investigación más amplia se implementó la entrevista, mediante cinco cuestionarios para abordar aspectos relacionados con los seis dominios del *conocimiento matemático para enseñar* el contenido cuerpos geométricos.

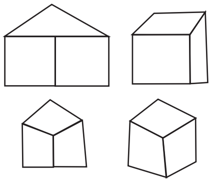
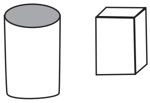
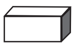
Los cuestionarios se estructuraron con un total de 29 preguntas abiertas, con la intención de que el interrogado respondiera en forma amplia con su propio vocabulario (Ander-Egg, 2003). Tales preguntas estuvieron orientadas a recoger hechos, acciones docentes, intenciones y opiniones relacionadas con el *conocimiento matemático para enseñar* cuerpos geométricos.

Fueron aplicados a 19 estudiantes avanzadas[4] y 13 egresadas recientes[5] del PM de la UNR. Se emplea el femenino, pues todas las participantes eran mujeres. Constituyen el 75% de las cohortes 2002-2007 (intervalo que comprende el año de inicio del Plan de Estudios y el año máximo de ingreso de los estudiantes de cuarto año al momento de realizar el trabajo de campo). Se administraron fuera del horario de clase, en forma individual y se respondieron secuencialmente durante un mes, de acuerdo con un cronograma pre-establecido y acordado con las participantes, quienes intervinieron voluntariamente en el estudio. El 25% restante, si bien manifestó interés en participar, no pudo ajustarse al cronograma por motivos de estudio o laborales.

En este artículo se analizan las seis cuestiones que se detallan en el Cuadro 1 y que involucran situaciones de aplicación, es decir, de conocimientos en acción (Perkins, 1992). Si bien las preguntas requirieron a las participantes elaborar aspectos relacionados con el *conocimiento del contenido y de la enseñanza* (dominio 5), las cuestiones se utilizaron también para identificar el contenido geométrico que se estaba adaptando para producir explicaciones, interpelaciones u orientaciones a fin de ponerlo en situación de enseñanza. Con esta última perspectiva, las cuestiones ofrecieron información relacionada con el *conocimiento especializado del contenido* cuerpos geométricos, dominio sobre el que se centra este artículo. En el Cuadro 1 se presentan, además, las categorías de análisis respectivas.

[4] Identificadas en lo sucesivo como A1... A19.
[5] Identificadas como B1... B13.

Cuadro 1 Cuestiones formuladas y categorías de análisis

Cuestiones	*Categorías de análisis*
 Suponga que sus alumnos dibujaron representaciones planas de cubos. ¿Cómo les explicaría que no son apropiadas?	**Representación plana de objetos 3d**, en ejemplos relativos a cubos. Interesa conocer el foco matemático que se tendría en cuenta para abordar la corrección del error manifiesto cuando los alumnos representan inadecuadamente en 2d un objeto básico 3d. Esto permite detectar en las participantes la identificación del contenido usado inapropiadamente y su forma de adecuarlo en la explicación.
 Quizás los alumnos tengan dificultades para entender que para cubrir la superficie lateral de estos cuerpos se usan trozos de papel de la misma forma. ¿Cómo actuaría para superarlas?	**Identificación de formas de partes de los cuerpos**, en particular de la superficie lateral de cilindros y prismas. Interesa conocer la manera en que las participantes adaptarían el contenido para guiar su tratamiento.
Si un alumno piensa que  y  son cuerpos diferentes, ¿cómo intervendría para superar esta dificultad?	**Exploración de invariantes geométricos**, teniendo en cuenta la posible identificación de cuerpos geométricos según su posición. Interesa indagar la adecuación que se prevé para construir la noción de invariante geométrico ante una concepción erróneamente configurada por el alumno: "los cuerpos difieren por su posición".
¿Cuáles son las dificultades de los alumnos con las que suele encontrarse, o supone que podría encontrarse, al enseñar cuerpos poliedros y redondos en los dos primeros años de la escuela secundaria?* ¿Cómo contribuye, o contribuiría, a superarlas?	**Contenido cuerpos poliedros y redondos en general**, pensando en un alumno de los primeros años de la escuela secundaria. El sentido es similar al anterior, pero indagándose ahora en todo el contenido cuerpos poliedros y redondos, en los dos primeros años del secundario.
Si un estudiante piensa que una pirámide de base cuadrada es un poliedro regular, ¿qué preguntas le haría para que modifique esta noción?	**Clasificación de poliedros**, contemplando el caso de una pirámide de base cuadrada. Interesa identificar el foco matemático sobre el que se centra la interpelación a los alumnos que están concibiendo erróneamente a cierto poliedro, y la secuenciación con la que se busca la reconstrucción conceptual.

[*] Esta pregunta es pertinente al dominio 4: *Conocimiento del contenido y los alumnos*. Por tal motivo no se analiza en este artículo.

Cuestiones	*Categorías de análisis*
Si un estudiante no reconoce al tetraedro como una pirámide, porque dice: "no encuentro su base", ¿cómo lo orientaría?	**Reconocimiento de elementos de los cuerpos**, en particular para encontrar la base de un tetraedro regular. Interesa reconocer los aspectos matemáticos que sustentan la adecuación del contenido para la identificación de la base de un tetraedro regular.

Para el procesamiento de la información se utilizó el análisis de contenido (Cabrera Ruiz, 2009; Mundina, 2005), reconociendo las ideas, significados y temas. Se trabajó en forma integrada tanto desde un plano teórico/prescriptivo –definiendo *a priori* un sistema de categorías asociadas con el dominio *conocimiento especializado del contenido*– como desde un plano empírico/inductivo –a partir de la detección de indicadores de cada categoría en las respuestas de las participantes, elaboración de modalidades y subcategorías.

RESULTADOS

Para cada categoría de análisis se presentan las subcategorías y modalidades emergentes del estudio. A cada modalidad antecede un par ordenado (a, b) donde "a" (entre 0 y 19) representa la cantidad de estudiantes y "b" (entre 0 y 13) la de egresadas que hicieron referencia a esa idea. Se transcriben algunas respuestas como ejemplo, indicándose entre paréntesis el código de la participante correspondiente. Cabe destacar que las modalidades no resultan mutuamente excluyentes.

REPRESENTACIÓN PLANA DE OBJETOS 3D

El foco matemático sobre el cual las participantes centraron sus explicaciones da cuenta de dos tipos de referentes, asumidos como subcategorías, con diferentes modalidades para una adecuación al nivel de escolaridad, según se muestra en el Cuadro 2.

Cuadro 2 Referente a la adecuación del foco matemático para la enseñanza

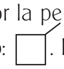
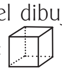
Subcategorías	*Modalidades*	*Ejemplos*
Características propias del cuerpo	(12, 7) Análisis de la forma de las caras.	El cubo tiene todas sus caras iguales, pues son cuadrados (A13).
	(6,1) Empleo de la definición de cubo y la clasificación general de poliedros.	Por definición un cubo o hexaedro regular es un poliedro de seis caras cuadradas congruentes. Un cubo, además de ser un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectángulo, pues todas sus caras son de cuatro lados y paralelas dos a dos, e incluso como un prisma de base cuadrangular y altura equivalente al lado de la base (A16).
	(5,0) Observación de los ángulos diedros y triedros para reconocer la perpendicularidad de planos.	Sus ángulos son rectos (. . .) les haría observar las características de los triedros del cubo. Que observen los diedros que forman las caras del cubo, y que se convenzan de la perpendicularidad de las mismas (A8).
	(2,3) Comparación de la cantidad de elementos (vértices, caras, aristas) del objeto real y del representado.	Cuántas caras tiene un cubo y (. . .) que compare con cuántas se ven en el dibujo. Cuántas aristas y que compare, cuántos vértices y que compare (B5).
Asociaciones a la perspectiva	(14, 7) Visualización del paralelismo, como elemento clave de la perspectiva.	(Referidas a aristas) Las aristas visibles de la base (cuadrado) inferior tienen que verse paralelas a la base superior y (. . .) eso está fallando en estos dibujos (B7). (Referidas a caras) Les preguntaría si todos los pares de caras opuestas están en planos paralelos (A2).
	(3, 2) Consideración de las posiciones relativas entre el observador y el objeto 3d.	Suponiendo que el cubo en el que estás pensado tiene una de sus caras apoyada en una mesa, ¿cuál sería esa cara?; si el cubo está apoyado frente a nosotros, ¿cuál es la cara que veríamos de frente?, ¿veríamos alguna de las caras laterales?, ¿cuáles? (B4).
	(2, 2) Reconocimiento de los invariantes geométricos mediante perspectiva.	Sus caras no son cuadrados, son polígonos irregulares, ya que si observamos cada uno de los lados no son líneas rectas **de igual longitud**[*] (A17).

Prácticamente la mitad de las participantes (11, 4) organizó explicaciones en las cuales integra el criterio centrado en la perspectiva con la primera o cuarta modalidad del basado en la característica del objeto matemático *cubo*. De acuerdo con lo señalado por Gutiérrez (1998), tales explicaciones contemplan las propiedades matemáticas prioritarias en este tipo de representación. Así, se podría hablar de un criterio "semi-consolidado" en este conjunto de participantes.

[*] Se destaca en negrita la parte referida a la modalidad asociada. Puede observarse, como sucede en otros casos, que también hay elementos ("Sus caras no son cuadrados, son polígonos irregulares...") individualizados en otra modalidad ("Formas de las caras"). Para evitar la pérdida de sentido de su contenido, se transcribió la oración en forma completa.

Casi esa misma cantidad de participantes (6, 8) produjo explicaciones sustentadas en un único *foco matemático*: solo atendiendo a la *forma* (3, 5) o solo a la *perspectiva* basada en las posiciones relativas observador-objeto (3, 3). Una egresada (B3) no se basó en un referente *matemático* en su respuesta.

Las explicaciones de las participantes involucran tratamientos que aluden a tres tipos de adecuaciones del contenido matemático a fin de trabajar sobre el error: la relación representación plana-objeto imaginario; la relación representación plana-objeto concreto; habilidades específicas para una representación plana formalizada de objetos 3d, con códigos característicos, como es la perspectiva caballera. En relación con este último tratamiento, la egresada B11 señaló particularidades del contenido en cuestión, así como un orden explícito en el que se procedería en la explicación:

> (...) para dibujar un cubo, que es una figura tridimensional, en una hoja, es decir en dos dimensiones, hay que respetar el paralelismo entre las aristas. Para dibujar un cubo procedemos de la siguiente manera: Paso 1: dibujamos una de sus caras como un paralelogramo cuyos lados sean iguales (un rombo), en particular podemos dibujar un cuadrado. Ejemplo: . Paso 2: trazamos una arista que tenga como extremo uno de los vértices dibujados. Por la perspectiva, su longitud debe ser algo menor a las demás aristas ya dibujadas. Ejemplo: . Paso 3: trazamos ahora todas las aristas que son paralelas a la dibujada en el paso 2. Las longitudes de estas aristas deben ser iguales a la longitud de la arista dibujada en el paso 2. La arista que queda "dentro" de la cara dibujada en el paso 1 debe hacerse con trazo punteado para dejar en claro que no pertenece al mismo plano que la cara dibujada en el paso 1. Ejemplo: . Paso 4: completamos la cara paralela a la dibujada en el paso 1 uniendo los vértices a los que hasta ahora concurría una única arista teniendo en cuenta las aristas que deben ser paralelas. Las aristas que en el dibujo quedan "dentro" de la figura dibujada deben hacerse con trazo punteado. Ejemplo: 

El análisis de aquellas respuestas en las que se refirieron en simultáneo al *foco matemático* de la cuestión con las *habilidades matemáticas* cuyo desarrollo promoverían en los alumnos, desde el tratamiento del contenido en el nivel de escolaridad contemplado, permitieron reconocer una gradación de criterios (A, B y C) según se muestra en la Figura 2.

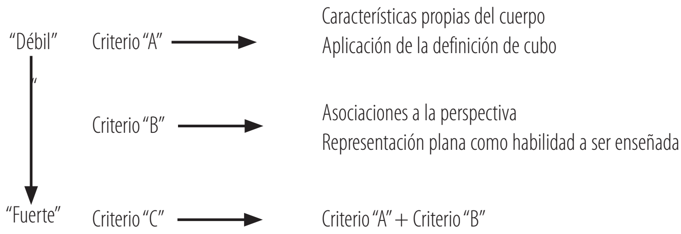


Figura 2 Gradación de los criterios identificados

El criterio más débil es el "A" que hace foco matemático solo en las *características propias del cuerpo*, sin asociar la *perspectiva* en su explicación, y en cuanto a la adecuación del contenido para ser enseñado, solo considera la *aplicación de la definición de cubo*. Un criterio más fortalecido es el "B", que integra un foco matemático con *asociaciones a la perspectiva* mediante adaptaciones del contenido que conciben a la *representación plana como habilidad a ser enseñada*. Finalmente, un criterio que contemple los dos anteriores se entiende como el más fuerte, por cuanto tiene en cuenta en forma más completa el aspecto geométrico en tratamiento.

Identificación de formas de partes de los cuerpos

Las explicaciones matemáticas de las participantes para superar la dificultad de reconocer al rectángulo como figura común en el desarrollo de la superficie lateral del cilindro y del prisma, pudieron ser agrupadas según las dos subcategorías que se presentan en el Cuadro 3. Tales subcategorías corresponden a actividades que las participantes sugieren para adaptar el contenido geométrico en cuestión para construir la relación entre figuras en el plano y en el espacio tridimensional.

Para superar la dificultad, las participantes señalaron en forma directa, con cuatro variantes o modalidades, a la *construcción de la relación 2d-3d*, donde predominó la propuesta de *forrado* y *(des)armado* de cuerpos, lo cual resulta atinado, pues apunta al objeto en estudio. También, con mayor tendencia en el grupo de estudiantes, se avanzó hacia la noción matemática de *desarrollo plano* de los cuerpos geométricos involucrados.

Cuadro 3 Identificación de formas de partes de los cuerpos

Subcategorías	*Modalidades*	*Ejemplos*
Construcción de la relación 2d-3d	(10,7) Forrado de cuerpos, mediante la envoltura con papel.	Haría que los alumnos tomen un trozo de papel con forma rectangular con las medidas adecuadas y que cubran ellos mismos la superficie lateral de un cilindro y luego que cubran la superficie lateral de un prisma (B11).
Construcción de la relación 2d-3d	(8, 4) Armado de cuerpos.	Les pediría que tomen una hoja y que con sus manos unan un par de sus lados opuestos (A8). Les haría recortar dos rectángulos iguales y luego los dos círculos y las dos bases del prisma y se los haría notar mediante la construcción de ambos cuerpos (A13).
	(6, 5) Desarmado de cuerpos.	Que los alumnos desarmen cilindros y prismas hechos en cartulina para visualizar el desarrollo de su superficie lateral y comprobar que ambas resultan rectangulares (B9).
	(5, 1) Desarrollo plano (o plantilla, reticulado) de cuerpos.	Trabajar con cartulinas, armando ambos cuerpos, para que observen que el desarrollo del cilindro es un rectángulo y dos círculos, y el desarrollo del prisma es un rectángulo y dos cuadrados, con lo cual efectivamente podrán concluir que ambas superficies laterales tendrán la misma forma, es decir, forma rectangular (A6).
Contextualización del contenido	(7, 5) Vinculación con medidas, al restringir el análisis a superficies laterales congruentes.	Les pediría que corten dos rectángulos de cartulina, papel de regalo o cualquier material (del área lateral considerada) y forren el prisma y luego el cilindro, de esta manera **pueden ver que usan la misma cantidad de papel y pueden cubrir ambos cuerpos. Luego, se podría verificar esto mediante las fórmulas de área lateral de cada cuerpo** (B3).
	(1, 6) Modelización, a partir del empleo de objetos cotidianos.	La manipulación de objetos es muy importante para el estudio en geometría. La aproximación de figuras y cuerpos con objetos o cosas de la vida real es importante para que el alumno "vea" las matemáticas que lo rodean (partes o cosas de una casa como ventana, paredes, puerta, mesa, una habitación, etc.; pelotas, un barrilete, un cucurucho, un dado, una pileta, un rollo de papel y más). (A8).

Solo una egresada no logró enunciar una secuenciación conceptual para trabajar la relación 3d-2d involucrada en la cuestión, expresando simplemente: *Haría que los dibujaran en su carpeta* (B2).

En la subcategoría *contextualización del contenido* se incluyeron modalidades asociadas con respuestas que vincularon al contenido geométrico en cuestión con otros contenidos (primera modalidad) o con orientaciones para la construcción de ciertos modelos (modelización) como abstracción a partir de objetos concretos (segunda modalidad).

A pesar que la figura que acompaña la cuestión muestra claramente diferencias en las dimensiones de los dos cuerpos, llama la atención la cantidad de participantes (casi 40%) que desplazó el foco de la actividad hacia las medidas, como se aprecia en el Cuadro 3. Con el agregado de *mismo tamaño* a la condición de *misma forma* establecida en la consigna, sesgaron sus orientaciones a un caso particular sobre la base de cálculo de áreas. Esto sugiere una tendencia hacia lo numérico/algebraico como criterio para propiciar la superación de una dificultad de naturaleza geométrica.

La modelización, a partir del empleo de objetos cotidianos para superar eventuales dificultades asociadas a la identificación de formas, fue notoriamente más considerada por parte de las egresadas. Se aprovecharon en algunos casos las particularidades propias del objeto para relacionarlo con el tópico relativo a la superficie lateral que aquí se está tratando.

Exploración de invariantes geométricos

Fue posible identificar que las respuestas acerca de la exploración de invariantes en la situación planteada podían ser agrupadas, por su contenido, en dos subcategorías según se muestra en el Cuadro 4.

Las participantes otorgaron prioritariamente una importancia relevante a los movimientos de los cuerpos en el espacio, destacando la *manipulación de objetos*. La cuarta parte de estudiantes y una egresada formularon un criterio semejante, pero se diferenciaron del primer grupo en que organizarían tal manipulación trabajando con *diferentes objetos congruentes entre sí*, a fin de orientar comparativamente la observación sobre material concreto y no dejarlo limitado al recuerdo de las posiciones ocupadas temporalmente por un mismo cuerpo al ser movido. Cuatro estudiantes y una egresada se refirieron a las distintas *posiciones relativas del observador con respecto al cuerpo*, poniendo de manifiesto una noción más amplia del concepto de movimiento en sus mentes, en el sentido de imagen dinámica de acuerdo con Gutiérrez (1996).

Cuadro 4 Exploración de invariantes geométricos

Subcategorías	*Modalidades*	*Ejemplos*
Movimientos en el espacio	(11, 9) Manipulación de un mismo cuerpo para conocer invariancia de forma y tamaño.	Si a un cuerpo lo movemos en el espacio, sigue siendo el mismo cuerpo, no cambia. No importa la posición en la que esté (si lo giro, lo tumbo, lo doy vuelta . . .), el cuerpo seguirá siendo el mismo. ("Si él está acostado o parado, ¿cambia?... ¡No!, ¡sigue siendo él!") (B1).
	(5, 1) Manipulación de cuerpos congruentes para estudiar la invariancia mediante la reproducción de la situación dada.	Llevar los dos cuerpos iguales y colocarlos en las posiciones del dibujo para luego mover solo uno, y así llevarlo a la misma posición del otro (A14).
	(4, 1) Posiciones relativas entre el observador y el cuerpo geométrico.	Uno es el otro en una posición diferente o visto desde otro sitio, pero que en realidad sí es el mismo. Para complementar esto, tomaría algún objeto y le pediría que lo mirara desde lugares diferentes, por ejemplo: de costado, de arriba y de frente (A11).
Otros procedimientos matemáticos para la exploración de invariantes	(5, 5) Descripción de características y definición.	Dos cuerpos son distintos si algunas de las caras son distintas, por ejemplo si un cuerpo tiene una cara rectangular y el otro tiene una cara triangular, o si difieren en la cantidad de caras, de aristas o de vértices (A18).
	(2, 1) (Des)armado de ambos cuerpos.	Armar los dos cuerpos al mismo tiempo y ponerlos en la situación planteada; luego "acostar" el que está parado, luego desarmar los cuerpos y ver que tienen el mismo patrón (A3).
	(0, 3) Vinculación con medidas (área total, volumen).	Charlar con los alumnos y concluir que, si fueran diferentes cuerpos, tendrían distintas capacidades, entonces realizar los cuerpos y comprobar que ellos tienen la misma capacidad, por ejemplo, llenando ambos cuerpos con la misma cantidad de arena, arroz, polenta o algún material del estilo (B3). Podemos calcular su volumen, la superficie total de sus caras, etc., y mostrarle que, a pesar de que consideremos la longitud de otra arista como la altura del prisma y otro paralelogramo como base, hay propiedades del cuerpo que no se modifican (B11).
	(2, 0) Aplicación de propiedades invariantes del prisma frente a movimientos rígidos.	Utilizaría las propiedades del prisma y de ese prisma en particular para probar que es el mismo cuerpo, pero posicionado distinto (A4).
	(2, 0) Comparación de elementos a partir de su identificación.	Podrían marcar con colores los elementos que tienen en común y, al finalizar, observarán que son iguales (A13).

En cuanto a otros procedimientos matemáticos –distintos a los movimientos en el espacio– para realizar la exploración solicitada, predominó la *descripción de las características y definición*. Aquí cabe mencionar que una egresada atendió a una condición necesaria, pero no suficiente, al expresar: *Les haría un cuadrito para completar con el número de vértices, caras y aristas de cada uno de los cuerpos* (B8). Es decir, no tiene en cuenta que esos datos no son excluyentes, ya que existen cuerpos con igual cantidad de vértices, caras y aristas pero que son distintos (por ejemplo, un cubo y un prisma de base cuadrangular no regular).

También hubo alusiones al (des)armado de ambos cuerpos para compenetrarse más en el patrón que los sostiene (como es posible apreciar en la respuesta de la estudiante A3), uso de propiedades invariantes del cuerpo en cuestión ante movimientos que no alteran su forma ni tamaño (A4) y la identificación de elementos congruentes entre los cuerpos (A13).

Algunas participantes recurrieron a las nociones de capacidad y volumen como criterio de comparación, trasladando y restringiendo la cuestión geométrica a una de medida (según expresaron B3 y B11). Estas participantes no percibieron que se puede dar el caso de tener cuerpos con igual medida de volumen y, asimismo, ser distintos (por ejemplo un cono y un cilindro, donde las bases sean las mismas y la altura del primero sea tres veces la altura del segundo). Así, se aprecia que, intentar superar esta dificultad puede, a su vez, constituirse en un obstáculo didáctico, por cuanto el docente elige orientar a sus alumnos de una manera que resulta inapropiada y, por lo tanto, no solo no soluciona la dificultad de origen, sino que introduce un sesgo matemático.

Contenido cuerpos poliedros y redondos en general

A partir del análisis de las respuestas de las participantes, emergieron las tres modalidades que se muestran en el Cuadro 5.

Primeramente, cabe observar la notoria diferencia en cantidad de respuestas que concentró la primera modalidad (casi 80% de las participantes) en comparación con las restantes.

En cuanto a la *construcción del contenido cuerpos poliedros y redondos* en la escuela secundaria *con soporte de algún recurso*, en todos los casos se asoció alguna habilidad matemática con el uso que tal soporte estaría favoreciendo desarrollar: manipulación, visualización, (des)armado, clasificación, representación, aplicación. Las participantes atendieron a los procesos graduales de adecuación del contenido para identificar semejanzas y diferencias, reconocer características y elaborar criterios de clasificación. Estos aspectos se trabajarían sobre objetos concretos o bien recurriendo a lo digital y virtual.

Cuadro 5 Contenido cuerpos poliedros y redondos en general

Modalidades	*Ejemplos*
(15,10) Construcción del contenido con soporte de algún recurso.	(Reconocimiento de diferencias y semejanzas en sus características) Hay que hacerles ver que están por todas partes (. . .) Yo trataría de buscar en la vida real ejemplos de poliedros y cuerpos redondos (. . .) para que ellos mismos clasifiquen (B13). (Armado y desarmado) Llevar a la escuela los cuerpos construidos en distintos materiales y poder desplegarlos para trabajar con la superficie lateral y total (B7). (Visualización de representaciones virtuales) Usar programas matemáticos que permitan hacer dichas representaciones para una mejor visualización (A3).
(3, 3) Representación 2d de objetos 3d.	Aclarar a los alumnos que los objetos geométricos son ideas que viven en nuestra mente pero que en la realidad podemos ver representaciones de estas ideas y que podemos dibujar estos objetos en 2 dimensiones usando ciertas convenciones (B11).
(2 ,0) Fijación de conceptos y notación.	Hacer un repaso de las figuras geométricas elementales. Para poder consolidar los conceptos básicos y así poder pasar a las dificultades de los cuerpos poliedros y redondos (. . .) Utilizando un vocabulario correspondiente, por ejemplo, para indicar los elementos de los prismas y de las pirámides, desarrollo plano; ortoedro y cubo (A5).

En menor medida se particularizó la *representación plana* de objetos tridimensionales basada en reglas propias del dibujo técnico o sistema de representación (como dijo la egresada B11). Muy pocas participantes mencionaron acciones centradas en profundizar sobre aspectos conceptuales o ligados a la notación matemática. Cabe observar que resulta llamativo que, al ubicarse en el contenido *cuerpos poliedros y redondos*, las participantes hayan hecho más referencias a los *poliedros* que a los *redondos*.

Clasificación de poliedros

El análisis del *contenido* y el *tipo* de las preguntas formuladas por las participantes permitió identificar los conocimientos y habilidades que ponen en juego al momento de interpelar a alumnos para que revisen sus ideas. En el Cuadro 6 se detallan las modalidades asociadas con dos enfoques (global y analítico) en relación con el *contenido* de las preguntas.

Puede observarse que la mayoría de las participantes orientó su pregunta al foco del problema: las *caras* de la pirámide, para desarrollar un proceso *analítico*. Lo encuadraron tanto en un análisis *estático* –estudio del cuerpo en reposo–, como *dinámico* –al recurrir a la producción de movimientos con cuerpos piramidales reales para visualizar la cara desigual–, con predominio del primero sobre el segundo. En todos los casos se procuró distinguir la forma de la base (cuadrado) de la de las caras laterales (triángulos).

Cuadro 6 Contenido de las preguntas

Subcategorías	*Modalidades*	*Ejemplos*
Enfoque global (centrado en el objeto pirámide)	(10,7) Reflexión acerca de la definición del objeto en estudio.	¿Cómo sabemos si un cuerpo es un poliedro? Este cuerpo (. . .) ¿Cómo sabemos ahora que un poliedro es regular? (B11).
	(4,2) Reflexión centrada en las condiciones necesarias y suficientes para que un poliedro sea regular.	¿Cumple entonces esta pirámide con todas y cada una de las condiciones pedidas para ser un poliedro regular? (B9).
Enfoque analítico (centrado en los elementos constitutivos del poliedro dado)	(14, 13) Caras.	(Análisis estático) Le preguntaría si ese cuerpo posee todas sus caras iguales. Si me contesta que sí, considerando que la base no forma parte de las caras, le preguntaría cuáles son "todas" las caras de un cuerpo poliedro (A2). (Análisis dinámico) Apoya la pirámide en el banco, ¿qué figuras son sus caras laterales, es decir, las caras que puedes ver sin levantarla? Ahora levántala y mira su base, ¿qué figura es?, ¿es la misma que las laterales? (B10).
	(2,0) Ángulos.	¿La suma de los ángulos interiores de cada cara es igual a la suma de los ángulos interiores de la base? (A3).
	(2,0) Cantidad de aristas concurrentes en cada vértice.	Les mostraría que en uno de los vértices (el que está "arriba") convergen más aristas que en los otros (A13).

Solo una estudiante y una egresada se focalizaron en la comparación con un poliedro regular más familiar, para enfatizar los roles de las caras como frontera y de la base como apoyo: *Según ese razonamiento, ¿un cubo tendría 5 caras? (porque no cuenta aquella sobre la cual se apoya)* (B12).

Pocas se detuvieron a analizar los ángulos de la pirámide, ya sea en la cantidad que concurre en un vértice (según expresó la estudiante A1: *¿Cuántos ángulos se unen en cada vértice del poliedro?*) como en la comparación de la suma de los ángulos interiores de las caras laterales con la base (A3). La estudiante A13 expresó una idea similar a la de A1, pero aludiendo a aristas en lugar de vértices.

Muchas participantes acudieron también a un enfoque *global* apelando a la *definición* de poliedro regular para detectar qué propiedad no se estaba cumpliendo. Por ejemplo B11 secuenció el interrogatorio de acuerdo con las características de: *cuerpo poliedro* (definición general) – *este cuerpo* (ejemplificación concreta) – *poliedro regular* (definición general específica). En particular, algunas participantes avanzaron hacia un mayor detenimiento en torno a las condiciones necesarias y suficientes para que un poliedro sea regular (como el registro de la egresada B9 en el Cuadro 6).

Un detalle del *tipo de las preguntas* propuestas se muestra en el Cuadro 7. En cada modalidad se detalla, además, en qué contribuye para la formación matemática cada tipo de pregunta en cuestión. Lo deseable sería encontrar un espectro nutrido de distintos tipos de preguntas en las orientaciones de las participantes, en consonancia con lo sugerido por Morata Sebastián y Rodríguez Sánchez (1997). Ante la situación planteada, que da cuenta de un pensamiento clasificatorio parcialmente desacertado por parte de un alumno con respecto a un cuerpo geométrico, las alusiones hacia las preguntas del tipo *por qué* y *cómo* favorecerían la *justificación o explicación con base conceptual* así como la *explicitación de procedimientos por parte de los alumnos*.

Cuadro 7 Tipo de preguntas formuladas

Modalidades	***Ejemplos***
(12, 9) Preguntas cerradas, para expresar acuerdo/desacuerdo con respecto a algún concepto o propiedad geométrica.	¿Las caras son todas iguales? (A4). ¿Cada una de sus caras indistintamente puede servir de base? (A12). ¿Sobre cada vértice converge siempre el mismo número de caras? (A16). ¿Verifica las condiciones que definen a un poliedro regular? (B11).
(9, 8) Preguntas del tipo "qué", para promover inferencias o descripciones relativas al cuerpo.	¿Qué sucede si roto el cuerpo y dejo como base uno de los triángulos equiláteros? (A5). ¿Qué características tiene un poliedro regular? (A11).
(5, 4) Preguntas del tipo "cuáles/quiénes", hacia la búsqueda de identificaciones de contenidos.	¿Cuál es la definición de polígono regular? (A18). ¿Quiénes son sus caras? (B13).
(4,3) Preguntas del tipo "cómo", que contemplan la explicitación de procedimientos matemáticos.	¿Cómo la llevarías a poliedro regular? (A18).
(1,2) Preguntas del tipo "cuántos/as", dirigidas a la realización de descripciones cuantificadas.	¿Cuántos ángulos se unen en cada vértice del poliedro? (A1). ¿Cuántas caras tiene tu cuerpo? (B13).
(1, 2) Preguntas del tipo "por qué", que promueven la justificación o explicación con base conceptual.	¿Por qué la pirámide de base cuadrada no es un poliedro regular? (A19). ¿Por qué no consideras que la base es una cara? (B12).
(2, 0) Preguntas del tipo "cuándo", que buscan las condiciones de regularidad.	¿Cuándo un polígono es regular? (A7).

En relación con el tipo de las preguntas, hubo un importante predominio de aquellas *cerradas*, orientadas a señalar acuerdo/desacuerdo con una premisa formulada por el docente, sobre las más abiertas del tipo *por qué*, que promueven la justificación por parte del alumno (66% *vs*. 9%). También fueron frecuentes las preguntas del tipo *qué*, orientadas a la identificación y reconocimiento de características y, en algunos casos, a la producción de inferencias (como por ejemplo la pregunta que formulara A5).

La formulación de preguntas matemáticamente productivas en la clase concierne al *conocimiento especializado del contenido*. Una posible forma de ordenar los tipos de preguntas emergentes en este estudio, de acuerdo con la demanda de elaboración conceptual que requieren para ser respondidas, es la que se muestra en la Figura 3.

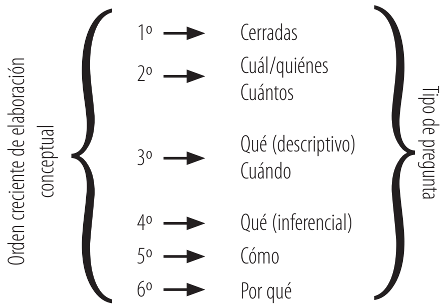


Figura 3 Posible orden en la formulación de preguntas matemáticamente productivas

Como se puede apreciar en el Cuadro 7, la manera de interpelar por parte de las participantes de la investigación se ubicó predominantemente en los primeros niveles del ordenamiento presentado en la Figura 3. La forma en que el docente realiza sus preguntas también se constituye en indicador del alcance que pretende otorgar al tratamiento del contenido matemático. Por otro lado, cabe destacar que dos participantes (1,1) no formularon preguntas explícitamente.

Reconocimiento de elementos de los cuerpos

Las respuestas se interpretaron contemplando aquellas habilidades que las participantes consideraron que se requieren para avanzar en la organización de la estructura conceptual del conocimiento geométrico 3d en cuestión (Cuadro 8).

Cuadro 8 Reconocimiento de elementos de los cuerpos

Subcategorías	***Modalidades***	***Ejemplos***
	(12, 12) Comprobación, mediante movimientos en el espacio, que cualquier cara puede ser base.	Que coloque el cuerpo en distintas posiciones (que vaya apoyando el cuerpo sobre sus distintas caras) y que observe qué sucede intentando que el alumno vea que cualquier cara puede ser su base (B7).
	(7, 9) Caracterización de la base como cara de apoyo del tetraedro que se opone a la cúspide.	Que haga una marca en una de las caras del tetraedro y lo apoye sobre esa marca en el banco, que vea que el punto que queda arriba es el vértice de dicha pirámide (B5).
Identificación de la forma y rol de las caras	(5, 4) Distinción del rol de la base del de las caras laterales.	Es un poliedro limitado por una base, un polígono cualquiera (en este caso un triángulo equilátero), y por caras, que son triángulos y coinciden en un punto (A16).
	(4, 2) Reconocimiento que la base de la pirámide puede ser cualquier polígono, en particular un triángulo.	La base de una pirámide no necesariamente es un cuadrilátero. Luego, por ejemplo, la base de una pirámide podría ser un pentágono, un hexágono, ¡y un triángulo también! (B1).
	(4, 0) Reconocimiento de la congruencia entre las caras del poliedro.	Le haría notar que, en un tetraedro, todas sus caras pueden ser la base del mismo, pues todas sus caras son congruentes (A11).
Comparación con otras figuras geométricas	(4, 1) Establecimiento de relaciones con otro poliedro más familiar.	Que piense qué pasa en un cubo, le preguntaría cuál es la base en este cuerpo, me parece que los alumnos ven más las propiedades en él, y les sería más fácil reconocer que cualquiera de sus lados puede ser su base (A9).
	(1, 0) Establecimiento de relaciones, por analogía, con una figura bidimensional.	Lo relacionaría con un triángulo equilátero en el cual, tomando cualquiera de los tres lados como base, el triángulo sigue siendo el mismo (A13).
Aplicación de propiedades geométricas	(10, 3) Empleo de definiciones o ejemplificaciones.	Que tome cualquier triángulo como base y que pruebe que cumple con las propiedades de una pirámide (A4).
	(0, 2) Realización de construcciones geométricas.	(En 2d) Hacemos los dibujos correspondientes y observamos que la última pirámide dibujada, la cual tiene base triangular, es un tetraedro (B1). (En 3d) Podría construir un tetraedro con él para que pueda percatarse de esta posibilidad (B2).

La mayoría propuso realizar *movimientos* del cuerpo en el espacio para evidenciar que cualquier cara puede ser tomada como base, incluso *apoyando* el tetraedro sobre distintas caras. Esto denota la importancia atribuida a la manipulación de cuerpos reales para reconocer al tetraedro como poliedro regular.

Casi la tercera parte de las participantes se concentró en *distinguir el rol de las caras* del tetraedro, según sea base o cara lateral, para reconocer su doble función en el cuerpo en estudio. También, en menor proporción, se centraron en el *reconocimiento de la forma de la base*: puede ser cualquier polígono y, en particular, un triángulo, suponiendo que posiblemente los alumnos tengan más arraigado el modelo de pirámide con un cuadrilátero en la base, como se infiere a partir de lo mencionado por la egresada B1.

Cabe destacar la emergencia de algunas apreciaciones puntuales respecto de la *congruencia de las caras del cuerpo*, para comprender que cualquier cara lateral puede actuar como base en el tetraedro regular.

Parecería que todas las modalidades asociadas con la *identificación de la forma y rol de las caras* intentan que el alumno pueda desprenderse de un eventual modelo mental estático de pirámide, como el generado por la manera en que habitualmente aparece representada en los libros de texto.

También, aunque en baja frecuencia, se introdujeron *comparaciones con otras figuras geométricas* ya sea por considerarlas más familiares en 3d –por ejemplo, el cubo (A9) o la pirámide de base cuadrada– o por tratarse de contenidos previos en 2d –por ejemplo, el triángulo (A13).

La mitad de las estudiantes y la cuarta parte de las egresadas recurriría a la comparación entre las *definiciones* de poliedro regular y de pirámide en un intento clasificatorio del tetraedro. Solo dos egresadas realizarían *construcciones geométricas*, ya sea en 2d (B1) como en 3d (B2).

CONCLUSIONES

El estudio ha permitido reconocer rasgos de diferentes criterios que docentes noveles o futuros docentes adoptan al realizar adecuaciones y adaptaciones para transformar el contenido *cuerpos poliedros y redondos* en contenido enseñable.

En relación con las categorías de análisis adoptadas (Cuadro 1) y procurando una secuenciación que atienda a un progresivo nivel de abstracción, el *conocimiento especializado del contenido* cuerpos geométricos que evidencia este grupo de participantes se caracteriza por:

- El **reconocimiento de los elementos de los cuerpos** se orienta hacia la generación de un modelo mental no estático, aunque con escasa tendencia a involucrar las construcciones geométricas para ello. En esta modelización se opera reconociendo la variación de los roles de distintos elementos de acuerdo con diferentes orientaciones espaciales: las caras, en tanto fronteras, pueden actuar como base atendiendo a su ubicación como apoyo. Esta adecuación abre camino a una *mirada especializada* que avanza hacia el análisis de las partes, en particular de los ángulos diedros y triedros, al trascender una mirada global que no presta atención a los detalles.
- La **clasificación de cuerpos 3d**, en particular de los poliedros, se basa en una reflexión más bien general del objeto en estudio y avanza hacia un nivel de análisis centrado en la forma de las caras del cuerpo en cuestión. Escasamente se propicia la detención para reconocer condiciones necesarias y suficientes, y profundizar sobre las mismas para establecer los criterios de clasificación.

  La forma de pensar una interpelación para propiciar la construcción del conocimiento geométrico en cuestión está mayoritariamente centrada en el señalamiento de acuerdos/desacuerdos o en promover descripciones e inferencias. Según la secuencia de preguntas presentada en la Figura 3, no se avanza demasiado hacia niveles de profundidad y completitud del contenido involucrado; es decir, justificaciones relativas a conceptos involucrados o procedimientos matemáticos seguidos.

  La conformación de un *conocimiento especializado* requiere operar en dos niveles de trabajo con respecto a las clasificaciones geométricas: uno se corresponde con ubicar cierto cuerpo en una clasificación dada y otro está asociado con la definición de criterios para organizar una clasificación. De esta manera se focaliza la producción matemática en los componentes geométricos cruciales (por identificación de lo primordial y lo accesorio) que diferencian o asemejan ciertos cuerpos entre sí y se organizan en una estructura.
- En la **exploración de invariantes geométricos** de los cuerpos, que son sometidos a movimientos rígidos en el espacio, las orientaciones matemáticas mayoritariamente se formulan atendiendo a la manipulación de un mismo cuerpo geométrico ubicándolo en distintas posiciones espaciales, o bien, como han adoptado otras participantes, recurriendo a objetos congruentes en posiciones diferentes. En ambos casos se realiza una

comparación: en el primero, del objeto concreto con una representación mental de la ubicación inicial que el alumno debe mantener activa en su mente mientras se producen los cambios de posición; en el segundo, entre dos objetos concretos que deben reconocerse como congruentes. Si bien ha sido baja la cantidad de participantes que lo expresaron, se observan casos en los que recurren a algunas de las medidas asociadas a los objetos en cuestión para sostener matemáticamente la exploración requerida. Esto sugiere una debilidad en el *conocimiento común del contenido* en relación con la noción de invariancia.

Este rasgo da idea de cuál sería el soporte disciplinar docente al propiciar la exploración de invariantes geométricos 3d en un nivel de escolaridad específico. Esta es una actividad no menor, si se tiene en cuenta lo sugerido por Jones (2000) en cuanto a considerar a la invariancia como uno de los conceptos geométricos clave a desarrollar en la escuela secundaria.

- En la **identificación de formas comunes** de las superficies laterales de cilindros y prismas, un número importante de participantes opta apropiadamente por el procedimiento de forrar o (des)armar cuerpos. Sin embargo, el estudio muestra que un grupo no despreciable adiciona la condición de *igual tamaño* a la de *igual forma* al exigir que las superficies laterales sean congruentes como figuras geométricas. Esto evidencia un corrimiento de la naturaleza esencialmente geométrica de la cuestión hacia un enfoque más bien algebraico/numérico. Con ello se introduce una mirada sesgada en la delimitación del atributo *forma*.

  Precisar criterios matemáticos para establecer relaciones entre las formas de las superficies laterales de cuerpos distintos con un sostén geométrico consistente, otorga una funcionalidad esencial al contenido para que el docente secuencie, de forma oportuna, la identificación involucrada. Esto se orienta a un nivel, aunque sea básico, de desmenuzamiento del objeto geométrico 3d como totalidad/globalidad para superar, consecuentemente, un primer nivel de pensamiento geométrico de Van Hiele (1986).
- En cuanto a la **representación plana de objetos 3d,** como se muestra en la Figura 2, se reconocen tres criterios utilizados para organizar conceptualmente una explicación matemática. El hecho de que prácticamente la mitad de las participantes adopta el criterio "C" connota la complejidad que produce la comprensión y lectura de la representación plana de objetos 3d. En este tipo de representación se integran las características

específicas del objeto geométrico con los códigos asociados a la proyección sobre el plano, aspecto al que Gutiérrez (1998) hace referencia.
Las participantes que aplican el criterio "B" se centran en la complejidad de la habilidad geométrica en cuestión para organizar la representación y la lectura. Dejan en un segundo plano conocimientos sobre las características del cubo, contenido que presuponen afianzado en la estructura conceptual del alumno.
La mayor debilidad es la mostrada por las participantes asociadas con el criterio "A", que dan por sentado que un alumno en la primera etapa de la escolaridad secundaria, ya ha organizado una mirada en perspectiva. Esto supone una debilidad en el *conocimiento especializado* de la geometría 3d, desconociendo que la perspectiva es un componente crucial en los procesos de representación de lo tridimensional.
Desde el *conocimiento matemático para enseñar*, este resultado adquiere una funcionalidad específica para orientar la formación docente, teniendo en cuenta la fuerte presencia del soporte 2d (papel, pantalla) para representar objetos 3d. Se concluye que es deseable la promoción de una fluida relación 2d-3d desde la representación gráfica, para que el futuro profesor disponga de herramientas adecuadas.

Este estudio muestra que en la adecuación del contenido *cuerpos poliedros y redondos* para ser enseñado no se avanza demasiado en el reconocimiento o aplicación de propiedades matemáticas intrínsecas de los cuerpos, tales como: configuración de los elementos en una estructura poliedral, condiciones para la construcción geométrica de un cierto cuerpo geométrico, particularidades de los sólidos de revolución.

Tener en mente orientaciones oportunas con sustento matemático consistente, pensadas a partir de lo que pueda llegar a resultar trabajoso para un alumno del nivel educativo en cuestión, se constituye en un eslabón elemental en el *conocimiento matemático para enseñar cuerpos poliedros y redondos* en la escuela secundaria El docente tiene, así, indicios de los aspectos matemáticos que resulta de interés atender en la enseñanza y a los que debe prestar especial atención por su posibilidad de conllevar dificultades intrínsecas para su comprensión.

Este conjunto de posibles acciones en las que se requiere hacer uso de componentes particulares del *conocimiento especializado del contenido* debe ser objeto de trabajo durante la formación inicial de un docente. Su importancia radica en que el grado de desarrollo de capacidades para pensar y decidir las adecuaciones conceptuales requeridas para la construcción de determinado contenido de geometría tridimensional y organizar secuenciaciones pertinentes para determinado nivel educativo condiciona, limita o favorece su enseñanza.

A partir de las debilidades identificadas en esta indagación en el *conocimiento especializado del contenido* se propone, en el marco de la formación de profesores de matemáticas, la generación de actividades de producción de propuestas de acción ante determinadas situaciones en las que el conocimiento geométrico 3d se piense en función a su enseñanza. Básicamente, se procura que el contenido geométrico abordado como formación disciplinar básica se adapte a distintos niveles de enseñanza como expresión de un *conocimiento especializado* a través de algunas actividades como se mencionan a continuación:

- Orientar un proceso reflexivo de producción matemática, para que la comprensión trascienda la mera percepción sensorial, cuando se recurre a la experimentación empírica con objetos concretos 3d para favorecer la superación de dificultades. En este sentido, es conveniente profundizar y avanzar sobre las propuestas de Guillén (2000), situadas en el nivel primario de educación. Las actividades de descripción de familias de sólidos deberán acompañarse con: ejemplos y tareas adecuadamente seleccionadas que relacionen familias de sólidos y sus propiedades, explicitación de los aspectos a observar al comparar la descripción de diferentes familias de sólidos, reconocimiento de propiedades que se enuncian para familias de sólidos y subfamilias que no las verifican.
- Reconocer la conceptualización geométrica como un proceso integrado a la representación gráfica, basado en la noción de perspectiva.
- Dar sentido prospectivo para la enseñanza al error del alumno generando instancias de reconocimiento de aquellas nociones geométricas previas que obstaculizan la organización de representaciones planas de objetos tridimensionales.
- Favorecer el desarrollo de la perspectiva y la visualización de peculiaridades, con actividades que puedan introducirse, por ejemplo, de la siguiente manera:

Leonardo da Vinci (1452-1519) hizo modelos de poliedros con tiras de madera. Cuando uno de tales modelos se ve en perspectiva teniendo el centro de una de las caras justo frente al ojo, esta cara aparece como un polígono y las demás caras dentro del polígono. Al dibujo con esta perspectiva se lo conoce como diagrama de Schlegel, en honor a Victor Schlegel (1843-1905), quien profundizó el estudio de esta herramienta en propiedades topológicas y combinatorias de lo politopos. Por ejemplo, el tetraedro regular y el hexaedro regular se ven como en la Figura 4. Trace los diagramas de Schlegel de los restantes sólidos platónicos.

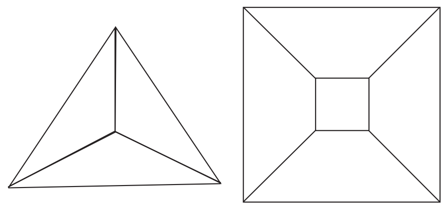


Figura 4 Diagramas de Schlegel del tetraedro regular y del hexaedro regular

- Propiciar una mirada en detalle de los elementos de los cuerpos, con variadas formas de representación matemática que permitan un desmenuzamiento del contenido, construcción del lenguaje matemático y codificación simbólica. Por ejemplo, a medida que se avance en la escolaridad secundaria, introducir la nomenclatura de Ludwig Schläfli (1814-1895), en la cual un poliedro queda caracterizado por un par ordenado {p, q}, en donde p es el número de lados que tiene una cara del polígono, y q es el número de caras que concurren en un vértice. Así, el tetraedro regular está caracterizado por el símbolo {3, 3}. De este modo, la interpretación de la misma posibilitará dar respuesta a cuestiones como: ¿qué símbolo de Schläfli corresponde a cada uno de los restantes sólidos platónicos?, ¿pueden existir poliedros regulares con los siguientes símbolos de Schläfli: {3, 6}; {4, 5}; {5, 5}?
- Organizar y analizar argumentaciones matemáticas consistentes para la construcción de conocimientos geométricos a partir de un interrogatorio que atienda a la explicitación de procedimientos, la justificación de ideas y la demostración matemática.

Se coincide con Ball (2009) en que uno de los desafíos en la formación de profesores de matemáticas es el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido* cuya construcción en la etapa de formación inicial podría potenciarse. Este artículo ha intentado aportar posibilidades concretas de trabajo a partir de las necesidades formativas reconocidas en los hallazgos de la investigación.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación 19/I310 de la Universidad Nacional de Rosario, y de la Beca Tipo II del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Argentina.

Datos de las autoras

Natalia Sgreccia y Marta Massa
Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Argentina
sgreccia@fceia.unr.edu.ar; mmassa@fceia.unr.edu.ar

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información*, Buenos Aires, Lumen.

Andrés, M., Latorre, M.C. y Machiunas, M.V. (2000), *Matemática 7EGB*, Buenos Aires, Santillana.

Ball, D. (2009). "Developing teachers' mathematical knowledge for teaching", Conferencia presentada en la California Commission on Teacher Credentialing, Ann Arbor, 21 de mayo de 2009 (Disponible en: http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/052109_CTC.pdf, consultado el 10 de octubre de 2010).

Ball, D. (2010). "Learning to do mathematics as a teacher", Conferencia presentada en la *Annual Conference of the National Council of Supervisors of Mathematics,* San Diego, 22 de abril de 2010 (Disponible en: http://wwwpersonal.umich.edu/~dball/presentations/042110_NCSM.pdf, consultado el 20 de enero de 2011).

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). "Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?" En *Journal of Teacher Education,* vol. 59, núm. 5, pp. 389-407.

Barallobres, G. (1997). *Matemática 7*, Buenos Aires, Aique.

Cabrera Ruiz, I. (2009). "El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información", En *Pedagogía Universitaria*, vol. 14, núm. 3, pp. 71-93.

Delaney, S., Ball, D., Hill, H., Schilling, S. y Zopf, D. (2008). "'Mathematical knowledge for teaching': Adapting U. S. measures for use in Ireland". En *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 11, núm. 3, pp. 171-197.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Reidel.

Garguichevich, G. (2007). *Geometría del plano y del espacio*, Rosario, Universidad Nacional de Rosario.

González, E., Guillén, G. y Figueras, O. (2007). "Diseño de un estudio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos para la formación continua de profesores de educación básica". En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM, Tenerife.

Gonzato, M., Díaz Godino, J. y Neto, T. (2011). "Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales". En *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 3, pp. 5-37.

Guillén, G. (2000). "Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas". En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 18, núm. 1, pp. 35-53.

Guillén, G. (2010). "¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?" En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática XIV*, Lleida, SEIEM, pp. 21-68.

Guirette, R. y Zubieta, G. (2010). "Lectura y construcción que hacen algunos profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático". En *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 2, pp. 93-121.

Gutiérrez, A. (1996). "The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them". En A. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education*, Brisbane, Centre for Math. and Sc. Education, pp. 23-32.

Gutiérrez, A. (1998). "Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial". En *Ema*, vol. 3, núm. 3, pp. 193-220.

Güven, B. y Kosa, T. (2008). "The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills". En *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, vol. 7, núm. 4, pp. 100-107.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4º ed.), México, D. F., Mc Graw Hill.

Hershkowitz, R. (1990). "Psychological Aspects of Learning Geometry". En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge, Cambridge UP, pp. 70-95.

Jones, K. (2000). "Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum". En B. Barton (Ed.), *Readings in Mathematics Education*, Auckland, Universidad de Auckland, pp. 75-90.

Ministerio de Educación de Santa Fe. (1999). *Diseño Curricular Jurisdiccional para el Tercer Ciclo de la EGB. Fundamentación pedagógica general y área Matemática*, Santa Fe, Ministerio de Educación de Santa Fe.

Morata Sebastián, R. y Rodríguez Sánchez, M. (1997). "La interrogación como recurso didáctico. Análisis del uso de la pregunta didáctica practicado en dos áreas de conocimiento en el nivel de Formación Profesional". En *Didáctica*, 9, pp. 153-170.

Mundina, J. (2005). "Análisis de contenido. Posibilidades de aplicación en la investigación educativa". En R*evista Interuniversitaria de Formación de Profesorado*, vol. 19, núm. 2, pp. 157-174.

Perkins, D. (1992). *La escuela inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*, Barcelona, Gedisa.

Pinto Sosa, J. y González Astudillo, M. (2008). "El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada?". En *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 3, pp. 83-100.

Ribeiro, C., Monteiro, R. y Carrillo, J. (2010). "¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra". En *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 2, pp. 123-138.

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*, Sevilla, Aljibe.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, O. y Echeverry, A. (2010). "Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces". En *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 3, pp. 119-142.

Sánchez, M. (2011). "A review of research trends in mathematics teacher education", *PNA*, vol. 5, núm. 4, pp. 129-145.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2011). "Sólidos platónicos". En *Novedades Educativas*, núm. 249, pp. 58-63.

Shulman, L. (1986). "Those who understand: Knowledge growth in teaching". En *Educational Researcher*, vol. 15, núm. 2, pp. 4-14.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*, Orlando, Academic.

Vázquez, S. M. y Noriega Biggio, M. (2010). "La competencia espacial. Evaluación en alumnos de nuevo ingreso a la universidad". En *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 2, pp. 65-91.

Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria

Luis Reina, Miguel R. Wilhelmi y Aitzol Lasa

Resumen. La evolución histórica del número irracional determina diferentes significados parciales de dicha noción. Estos significados pueden ser descritos mediante configuraciones epistémicas, constituidas por diferentes redes de objetos matemáticos (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos). Estas configuraciones permiten el análisis de libros de texto de secundaria donde se introduce el número irracional, de tal forma que este análisis puede permitir a su vez la planificación de procesos de estudio de la noción.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas, número irracional, configuración epistémica, holosignificado.

Epistemic configurations associated with the irrational number. Senses and challenges in secondary education

Abstract. The historical evolution of the irrational number determines different partial meanings of this notion. These meanings can be described by epistemic networks configurations, which are made up of different mathematical objects (situations, actions, language, concepts, properties and arguments). These configurations allow us to analyze how the textbooks introduce the irrational number, and this analysis might come in useful for the planning of study process of the notion.

Key words: mathematics education, irrational number, epistemic configuration, holistic meaning.

Fecha de recepción: 20 de Mayo de 2011. Fecha de aceptación: 13 de diciembre de 2012.

La reconstrucción de la noción de "número irracional" permite el análisis de las prácticas operativas, discursivas y regulativas en Educación Secundaria. En particular, se puede abordar el análisis de los libros de texto y, por lo tanto, valorar la presencia efectiva de distintos usos y significados de la noción en el currículo, así como su repercusión en procesos de estudio potenciales. Realizamos esta reconstrucción de la noción mediante algunas herramientas del "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos" (EOS; Godino Font, Wilhelmi y Lurduy, 2010).

Según el EOS, el análisis de la actividad matemática comporta, en primera instancia, la determinación de los tipos de entidades intervinientes en dicha actividad. Se distinguen seis tipos primarios: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En una segunda fase, estos objetos se relacionan entre sí formando, "configuraciones", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

> Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión personal e institucional (Font, Godino y D'Amore, 2007: 6).

La identificación de configuraciones epistémicas permite el análisis comparativo de libros de texto, por cuanto determinan una referencia para identificar ausencias y presencias relevantes para la introducción o desarrollo de una noción matemática. Con otras palabras, permiten un análisis de la *idoneidad epistémica* de procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales basados en dichos libros de texto.

> La idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia (Godino, Font y Wilhelmi, 2006: 2).

¿Cuál es el significado de referencia del número irracional en secundaria? Esta noción ha tenido diversos usos y significados a lo largo de la historia (sección 2), que nos permitirán construir las configuraciones de referencia (sección 4), según el marco teórico (sección 3). Este trabajo epistemológico permitirá el análisis de libros de texto (sección 5) y la conclusión sobre aspectos esenciales de la actividad matemática que puede potencialmente llevarse a cabo, así como algunas recomendaciones para los profesores. Pero antes de todo ello, en la sección 1, se motiva la necesidad de un estudio de la noción de número irracional en la enseñanza preuniversitaria.

EL NÚMERO IRRACIONAL COMO OBJETIVO PROPIO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

El número irracional no puede ser, en secundaria, una mera formación propedéutica, que encontraría su pleno sentido solo años más tarde en la universidad, en particular en las facultades de ciencias. En esta sección, justificaremos la pertinencia de su estudio con "carta de ciudadanía" en la educación secundaria.

PRINCIPIO DE NECESIDAD

Bergé y Sessa (2003) justifican por qué se puede afirmar que Euclides relacionó estrechamente la noción del continuo con los segmentos inconmensurables y cómo esta relación encierra una dificultad epistemológica esencial que dificulta la adquisición por parte de los estudiantes. De hecho, esta dificultad es estable en el tiempo, pudiéndose observar errores persistentes en estudiantes universitarios con relación a la completitud de la recta numérica real (Bergé, 2010).

Shinno (2007) resalta la importancia de los números irracionales como resultado de una medición o de una ecuación. Este autor concluye que la fracción continua puede ser un método que permita el necesario proceso de formalización para dar respuesta a las necesidades matemáticas en la transición práctica-teoría. Así, "la introducción de nuevos números debe ser una actividad cuyo fin sea responder a una necesidad o superar una limitación" (p. 187).

Scaglia (2000), basándose en la historia de las matemáticas, muestra cómo la noción de inconmensurabilidad "fuerza la necesidad" de trascender la manipulación concreta y progresar en el estudio de procesos infinitos. Esta necesidad no es por supuesto privativa de la inconmensurabilidad ni tiene su fundamento en la historia de las matemáticas. Muy al contrario, se refiere a un aspecto esencial en todo proceso de construcción y comunicación de un objeto matemático, ya en condiciones escolares, ya en relativo a la investigación de los matemáticos profesionales.

> La introducción y desarrollo de un tópico matemático debe fundamentarse en un *principio de necesidad*, según el cual una noción, proceso o significado matemáticos son necesarios

> para el cálculo de un ejercicio, la resolución de un problema o el análisis de una situación; cálculo, resolución o análisis que de otra forma sería muy costoso realizar e incluso inviable. La necesidad matemática se mide entonces en términos de costo, eficiencia o viabilidad (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010, 378).

La fracción continua en la enseñanza secundaria

Los números irracionales pueden ser clasificados y diferenciados gracias a la potencia de métodos que involucran fracciones continuas (Reina, 2010). Estos métodos y otras propiedades, llevan a Iaffei (2008) a plantear la necesidad de incorporar las fracciones continuas como técnica de aproximación de irracionales en la enseñanza de las matemáticas en secundaria.

Sin embargo, los irracionales y las fracciones continuas suelen aparecer en secciones del tipo "curiosidades matemáticas", "para saber más", etc., normalmente desvinculadas de una verdadera actividad matemática y de un proyecto de enseñanza institucionalizado. De hecho, es clásica la introducción del número áureo (y de manera relacionada, en su caso, de la sucesión de Fibonacci), pero sin referencia a la familia de los "números metálicos" (Spinadel, 1995; 2003) o a la familia de los "números mórficos" (Redondo, 2008) de la que forma parte.

Sin embargo, Condesse y Minnaard (2007) han razonado por qué algunos acercamientos didácticos a esta familia pueden ser importantes en diferentes niveles de la enseñanza. Asimismo, la aparición más reciente del número irracional "plástico" (Stewart, 1996) y su relación con las espirales matemáticas como la logarítmica (Reina, 2008) son también conocimientos matemáticos que podrían motivar la importancia y utilidad del número irracional y, en particular, de las fracciones continuas (Redondo, 2008).

Por otro lado, la fracción continua como técnica de aproximación podría aportar "transparencia" en la representación, por parte del alumno, en la diferenciación entre un número racional y otro irracional, con el objetivo de disminuir la complejidad semiótica (Zaskis y Sirotic, 2004; 2010).

El infinito matemático: conflictos cognitivos y dificultades epistemológicas

Con relación al infinito matemático se presentan fenómenos didácticos como el de *aplastamiento,* que juega en contra de la construcción del *sentido del* *infinito* (D'Amore *et al.*, 2006) necesario para el reconocimiento de números irracionales.

En alumnos entre 16 y 17 años, este sentido del infinito se encuentra en construcción, suponiendo el infinito actual como una noción *contraintuitiva* (Garbín, 2005).

¿Cómo proponen Arrigo y D'Amore (1999) superar los obstáculos provocados por la cardinalidad de los conjuntos infinitos? A través de la noción de densidad, clave en la construcción de los números reales y, por lo tanto, en la necesidad de los números irracionales. Pero, como justifican Mamolo y Zazkis (2008), no solamente hace falta una "cultura matemática" de base que ayude a los alumnos a entender la noción de infinito matemático, sino que será necesaria una intervención sostenida, específicamente diseñada, que permita la conceptualización del infinito matemático.

El problema de las representaciones de los números irracionales

Zaskis y Sirotic (2004) observan una dualidad "transparencia-opacidad" en las representaciones de los alumnos de los números racionales e irracionales que dificulta su distinción, hecho potenciado por el uso de la calculadora. Asimismo, la ubicación de un número irracional en la recta real plantea a los estudiantes conflictos cognitivos en general difíciles de gestionar (Sirotic y Zazkis, 2007).

Scaglia (2000) identifica dos dificultades de los estudiantes relacionadas con la representación: una, ¿cómo un número cuya representación (decimal) infinita puede asignársele un punto determinado en la recta real?; otra, ¿por qué la marca o trazo efectuados con lápiz para representar un objeto geométrico no "son realmente" el objeto ideal?

De hecho, las definiciones escolares usualmente utilizadas de número irracional parecen "competir" con las concepciones de los estudiantes (Zaskis y Sirotic, 2010) hecho que, evidentemente, debe ser tenido en cuenta en su enseñanza.

> Desde un punto de vista ontosemiótico, el problema no es si hay que introducir una sola representación de un objeto o más de una, ni qué traducciones o relaciones entre representaciones hay que tener en cuenta. El problema está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan, o no, la realización de las prácticas que interesan que formen parte del significado global del alumno, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios (Font, Godino y D'Amore, 2007, 15).

Así, los profesores tendrán que elegir las representaciones mejor adaptadas al proceso de construcción de los significados personales de los estudiantes. En particular, habrá que tener en cuenta que esta construcción puede exigir un alejamiento de una realidad concreta (D'Amore, 2004) que, en el caso de los números irracionales, será insoslayable.

ORIGEN HISTÓRICO Y CONTEXTOS DE USO DEL NÚMERO IRRACIONAL

Conmensurabilidad, proporcionalidad o aproximación de irracionales por racionales son términos que actualmente son reconocidos como "próximos". Sin embargo, un breve análisis histórico nos permitirá comprender la complejidad de estas conexiones matemáticas y el coste intelectual que la humanidad ha debido invertir para establecerlas. Asimismo, nos dará un marco para la determinación de configuraciones asociadas al número irracional, que servirá de referencia para el análisis de libros de texto (sección 5).

LOS INCONMENSURABLES

Dadas dos longitudes *a* y *b*, se dice que son conmensurables si existen dos números *n* y *m*, enteros positivos ($n, m \in Z^+$), tal que:

$$a \,.\, n = b \,.\, m$$

Esto es, la razón de *a* y *b* es el número racional *n*/*m*.

En caso contrario (no existencia de *n* y *m* en las condiciones antes dichas), las cantidades *a* y *b* se dicen inconmensurables. La existencia de cantidades "inconmensurables" se debe al desarrollo de la geometría por la escuela pitagórica griega (siglo V a. C.). Entonces se observó, en particular, que no es posible determinar una razón entre las longitudes de la diagonal de un cuadrado y su lado, esto es, tales longitudes son inconmensurables.

La noción de inconmensurabilidad se mantendrá largamente "atada" a la geometría y a los problemas "clásicos" propuestos en la matemática griega (Rey Pastor y Babini, 2000a: 53). Es más, se evitó la entrada al infinito matemático, aspecto clave en la comprensión de los inconmensurables.

> Al desarrollar el estudio de la composición entre los entes geométricos, los griegos pusieron de manifiesto su gran intuición respecto a las nociones del continuo, del infinito matemático

> y del límite. Sin embargo, dichas nociones se quedaron solamente en un plano implícito y el énfasis se centró en la búsqueda de alternativas que tornaran "innecesarios" los procesos infinitos (que se remontan al periodo del descubrimiento de los inconmensurables) en la matemática (Crisóstomo *et al.*, 2005: 132).

Proporcionalidad e inconmensurabilidad

A pesar del origen de la noción de inconmensurabilidad en un contexto geométrico, esta emerge asociada a la proporción. Eudoxo de Cnido (408?-355? a. C.), en su teoría de proporciones, introduce el proceso de comparación entre magnitudes inconmensurables preservando la "homogeneidad" de las mismas.

Más aún, Eudoxo, en un contexto exclusivamente geométrico, logró una verdadera evolución, "pues resolvió al mismo tiempo las dos máximas dificultades que entonces se oponían a ese progreso: los irracionales y las equivalencias" (Rey Pastor y Babini, 2000a: 63).

Esta evolución provocada por la teoría de las proporciones en el tratamiento de la inconmensurabilidad provoca no solo una nueva configuración epistémica, sino una falla epistemológica con la anterior.

> Las rupturas epistemológicas se producen a partir de la constatación de la existencia de magnitudes de carácter inconmensurable y para eludir el infinito se crean los métodos de exhausción y de las razones entre las magnitudes, con la doble reducción al absurdo (Crisóstomo *et al.*, 2005: 135).

La aproximación de irracionales

Ya en la producción matemática de los babilonios se puede apreciar la aproximación sexagesimal de la raíz cuadrada de dos. El método general se desconoce, pero se propusieron diferentes alternativas (O'Connor y Robertson, 2001; Fowler y Robson, 1998) como el empleo de la media aritmética (Collette, 1985). Asimismo, estaban en conocimiento de las hoy denominadas "ternas pitagóricas".

El método de aproximación de irracionales por "fracciones continuas" tiene origen en la matemática babilonia. Una fracción se denomina "continua simple" cuando es posible expresarla en la forma:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

Siendo a_0 un número entero y a_i ($i \in N$, $i > 0$) números enteros positivos.

Si el número es racional es posible aproximarlo por una fracción continua simple finita (es decir, con un número finito de a_j ($j \in N \cup \{0\}$). Si el número es irracional, puede ser aproximado por una fracción continua simple infinita (existen infinitos a_j ($j \in N \cup \{0\}$).

Los babilonios trabajaron en la resolución de problemas mediante fracciones continuas "ascendente" (Høyrup, 1990), cuya expresión actual es:

$$x = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \ldots}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

Según Høyrup (1990) este método, utilizado también en Egipto, perduró hasta el Medievo.

Numerosos análisis históricos (Heath, 1897; 1921; Hardy y Wright, 1975; Courant y Robbins, 1962; Rey Pastor y Babini, 2000a) refieren el uso más o menos estable en las distintas escuelas matemáticas de la fracción continua como método de aproximación de medidas y distancias. Desde la matemática griega a los desarrollos de Rafael Bombelli a finales del siglo XVI, hasta Euler (1707–1783) o Lagrange (1736–1813), las fracciones continuas fueron utilizadas como método para indagar, describir o utilizar números irracionales con una aritmética racional.

La irracionalidad

Las cortaduras de Dedekind (1831–1916) suponen una ruptura epistemológica con la teoría de las proporciones de Eudoxo, a pesar de las concomitancias sugeridas por diversos historiadores (Corry, 1994). Dedekind consideraba el principio de continuidad de Eudoxo inconsistente, estableciendo la necesidad de un desarrollo de la aritmética.

> En efecto, la forma en que los números irracionales usualmente se introducen se basa directamente en el concepto de las magnitudes extensivas –concepto que no se define cuidadosamente en ninguna parte– y explica el número como el resultado de medir una magnitud por otro número de la misma naturaleza. En lugar de este enfoque, exijo que la aritmética sea desarrollada a partir de sí misma (Dedekind, 1901: 9-10).

El trabajo de Dedekind, cambió el estatus epistemológico de los irracionales, que pasaron a ser "números". Este hecho es crucial, puesto que matemáticos notables, como Kronecker (1823–1891), negaban su existencia.

> ¿A qué vienen sus hermosas investigaciones sobre el número π? –observaba a Lindemann–. ¿Por qué elige tales problemas si en verdad no existen números irracionales de ninguna clase? (citado por Rey Pastor y Babini, 2000b: 169).

La definición matemática de número irracional, tal y como la conocemos actualmente, tuvo que afrontar, por lo tanto, cuestiones cruciales relativas al infinito matemático y el cardinal de conjuntos infinitos, la densidad de Q en R o la necesaria axiomatización debido a la imposibilidad de construir "efectivamente" ciertos números.

Todo ello permite enunciar, en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, la hipótesis según la cual esta complejidad epistémica esencial de los números irracionales determina sobremanera los procesos de enseñanza y aprendizaje relativos a dicha noción. En la sección siguiente introducimos el marco teórico que nos permitirá un análisis de los libros de texto y, de manera indirecta, de los procesos de enseñanza potenciales que con ellos se podría llevar a cabo.

MARCO TEÓRICO

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) es una perspectiva fundada en tres aspectos: 1) las matemáticas son una actividad humana (fundamento *antropológico*); 2) los objetos matemáticos se relacionan entre sí de una manera "vital y necesaria" (fundamento *ecológico*); y 3), el conocimiento matemático es una respuesta a una cuestión práctica o teórica, ya intramatemática ya extramatemática (fundamento *pragmático*). La noción central de esta perspectiva es la de *situación problemática*, a partir de la cual emergen las nociones de "práctica matemática", "objeto matemático" y "significado de un objeto".

> En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc., sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc. (Godino, Batanero y Font, 2009: 6).

Esta actividad matemática es analizada por el EOS a partir de las seis entidades primarias siguientes (Godino *et al.*, 2009: 7):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual...).
- *Situaciones-problema* (aplicaciones, tareas, ejercicios, cuestiones, etcétera).
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función...).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos...).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo...).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo...).

Estas entidades primarias se interrelacionan formando configuraciones o redes de objetos, que serán *cognitivas* (relativas a una persona) o *epistémicas* (si son compartidas en el seno de una institución por un grupo de personas). Estas redes no son únicas para una determinada noción o proceso matemáticos, sino que están vinculadas a los contextos de uso que determinan sus distintos sentidos.

> Podemos entender que hay un uso ecológico del término contexto que permite situar el objeto matemático en diferentes "lugares", por ejemplo, diferentes instituciones (universidad, secundaria, etc.). Estos "lugares" no tienen por qué ser solo instituciones; pueden ser también, por ejemplo, diferentes programas de investigación o diferentes "juegos del lenguaje" (Ramos y Font, 2006: 539).

El estudio de estos diferentes “lugares” donde vive el objeto número irracional nos llevará a conocer los distintos “nichos” donde se alojó y se aloja este objeto que se manifiesta complejo.

> Ahora bien, puesto que cada problema se enmarca dentro de una configuración epistémica diferente se puede entender, de manera metafórica, que la situación-problema “sitúa” el objeto en un “lugar” o en “otro” es decir, lo relaciona con un determinado tipo de lenguaje, un determinado tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentaciones, una determinada definición del objeto y unas determinadas propiedades. Desde esta perspectiva, cada situación problema sitúa al objeto en un determinado “nicho”. De esta manera, se tiene que la situación problema cumple dos funciones, una de referencia particular al activar la dualidad extensivo-intensivo y otra, de tipo “ecológico”, al situar el objeto matemático en un “nicho” o bien en otro. (Ramos y Font, 2006: 541).

Entonces nos podríamos preguntar si “¿es posible estructurar en un complejo coherente distintas definiciones de una noción matemática emergentes de diferentes sistemas de prácticas en contextos de uso determinados?” (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007: 80). La noción de *holosignificado* introducida por estos autores permite responder a esta cuestión; es decir, determinar qué expresamos al afirmar que una persona comprende una determinada noción.

La adquisición del holosignificado supone la capacidad de poner en funcionamiento un *pensamiento matemático flexible* (PMF; Wilhelmi, 2003); es decir, la capacidad de tránsito rutinario entre diferentes significados asociados a un objeto matemático, reconociendo las limitaciones propias de cada uno de ellos; asimismo, el PMF permite establecer nexos firmes entre dichos significados y uno o varios contextos matemáticos, que determinan un control eficaz de la actividad y capacitan al sujeto para responsabilizarse matemáticamente de los resultados que produce. El holo-significado incorpora las relaciones entre dichos significados y las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen (que el pensamiento matemático flexible permite identificar, describir y controlar).

Así, el objetivo de este trabajo es la descripción de los diferentes “sentidos” asociados al número irracional, que pueden ser asociados a prácticas matemáticas propias de ciertos momentos históricos y su reflejo en los textos escolares.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE REFERENCIA

En esta sección describimos los distintos sentidos según las entidades primarias (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos), que nos permitirá una comparación objetiva de las configuraciones asociadas.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA IMPLÍCITA DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Esta configuración, que puede ser relacionada con la comparación entre magnitudes en un contexto preponderantemente geométrico y cuya noción fundamental es la inconmensurabilidad entre segmentos por medida común, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje:

- *Verbal*: Predominantemente geométrico, ya que incluso el lenguaje aritmético es, en cierto sentido, "geométrico"; es decir, los parámetros representan magnitudes geométricas.
- *Gráfico*: Dibujos de segmentos y figuras geométricas, que nos han llegado a través de la obra *Elementos*, donde se muestran los procedimientos para considerar conmensurables o no segmentos entre sí y áreas de polígonos entre sí.
- *Simbólico*: Sistema notacional griego antiguo para números enteros positivos.

Situaciones. Problema de división de un segmento en media y extrema razón.

Conceptos. Número entero positivo. Magnitud. Segmentos conmensurables por medida común. Sección áurea. Razón. Proporción. Segmentos inconmensurables por medida común. Noción de infinito potencial, horror al infinito, que surge y que se mantendrá por mucho tiempo.

Procedimientos. Métodos geométricos, tales como: diagonal de un cuadrado en relación con su lado, diagonales de un pentágono regular en relación con sus lados, medición por medio de comparación de magnitudes geométricas, división de un segmento en extrema y media razón, *antifairesis*,[1] método axiomático (material, informal) en contraposición con la axiomática formal de Hilbert (1993).

[1] *Antifairesis*: "a y b están en la misma razón que c y d cuando la antifairesis o sustracción recíproca entre a y b es la misma que entre c y d". Euclides usa esta noción para definir la inconmensurabilidad: "Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la que queda nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables" (*Proposición 2 del libro X de los Elementos*).

Propiedades. Proposiciones y definiciones presentes en los "Elementos".

Argumentos. Deductivos. Demostración por reducción al absurdo (Dantzing, 1954).

Configuración epistémica explícita para los números irracionales

Esta configuración, que puede ser relacionada con el problema de preservación de la "homogeneidad de las magnitudes" y cuya noción fundamental es la de proceso de comparación entre magnitudes inconmensurables, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Predominantemente geométrico, aunque también se presenta un lenguaje aritmético-geometrizado.
- *Gráfico*: Dibujos de segmentos y figuras geométricas que nos han llegado a través de los *Elementos*, que muestran los procedimientos para considerar el tratamiento de magnitudes inconmensurables.
- *Simbólico*. Sistema notacional griego antiguo, para números enteros positivos y fracciones.

Situaciones: Existencia del infinito potencial, imposibilidad del infinito actual. Problema de razones y proporciones entre magnitudes inconmensurables.

Conceptos. Número entero positivo. Magnitudes homogéneas. Número par e impar. Números primos entre sí. Razón. Proporción. Segmentos conmensurables por medida común. Segmentos inconmensurables por medida común. Razón entre magnitudes inconmensurables. Proporción. Continuidad de la recta (implícita).

Procedimientos. Medición por comparación de magnitudes geométricas.

Propiedades. Definiciones y Proposiciones plasmadas en los *Elementos*.

Argumentos. Deductivos. Método de exhaución. Demostración por doble reducción al absurdo (Rey Pastor y Babini, 2000a).

Configuración epistémica de la aproximación racional de números irracionales

Esta configuración, que puede ser relacionada con el proceso de aproximación mediante racionales de números irracionales, empleando originariamente métodos geométricos y más adelante analíticos, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Geométrico. Algebraico.
- *Gráfico*: Dibujos de figuras geométricas.
- *Simbólico*: Notación de fracciones en el sistema sexagesimal. Diferentes notaciones para la fracción continua a través de los tiempos.

Situaciones. Problema de aproximación racional de números irracionales por distintos métodos. Problema de aproximación de irracionales por fracciones continuas.

Conceptos. Fracciones sexagesimales. Procedimientos para la extracción de raíces cuadradas. Máximo común divisor entre números. Métodos de aproximación: fracción continua ascendente. Fracción continua. Familia de los números metálicos. Familia de los números mórficos (Redondo, 2008).

Procedimientos. Estudio de irracionales por aproximación. Algoritmo de Euclides.

Propiedades. Propiedades de las fracciones continuas. Propiedades de la familia de los números metálicos. Propiedades de la familia de los números mórficos (Redondo, 2008).

Argumentos. Deductivos.

Configuración epistémica aritmética de los números irracionales

Esta configuración, que puede ser relacionada con la crisis de los fundamentos del cálculo, cuestiona lo que hasta ese momento se consideraba como transparente; a saber, la definición de número irracional como resultado de la medición de una magnitud mediante otra homogénea. Puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Conjuntista. Algebraico.
- *Gráfico*: Construcciones gráficas realizadas por Cantor para emparejar biunívocamente a los números enteros con los racionales.
- *Simbólico*: Notación para las cortaduras de Dedekind. Diferentes notaciones para algunos conjuntos numéricos propuestos por Dedekind.

Situaciones. Problema de fundamentación aritmética de números irracionales por distintos métodos. Problema de fundamentación de la completitud de la recta geométrica. Problema de diferenciación entre conjuntos infinitos. Problema planteado por el infinito actual.

Conceptos. Relación de equivalencia. Números racionales. Números irracionales (fundamentación geométrica). Límite de sucesiones. Infinito potencial. Principio de continuidad de la recta. Cortaduras. Números irracionales (fundamentación aritmética). No numerabilidad del continuo. Infinito actual. Conjuntos infinitos completos. Principio de correspondencia entre conjuntos infinitos. Cardinal de un conjunto infinito. Densidad del conjunto de los irracionales. Números transfinitos.

Procedimientos. Cortaduras de Dedekind. Límite de sucesiones fundamentales. Encaje de intervalos cerrados racionales. Búsqueda de funciones biyectivas entre conjuntos infinitos para establecer la coordinabilidad entre ellos.

Propiedades. Propiedades de orden. Axioma del Supremo. Propiedades de la continuidad. Conjunto perfecto (Velazco, 2005). Conjunto conexo.

Argumentos. Deductivos formales.

Configuración epistémica de la existencia y clasificación de números irracionales

Esta configuración asociada a un estado evolucionado de la noción de número irracional, donde la distinción entre números algebraicos y trascendentes es ya posible, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Conjuntista. Algebraico.
- *Gráfico*: Construcciones geométricas de los números construibles.
- *Simbólico*: Conjuntista. Algebraico.

Situaciones. Problema de diferenciación entre números irracionales. Problema de construcción de números irracionales. Problema de representación en la recta numérica de números irracionales.

Conceptos. Relación de equivalencia. Números racionales. Números irracionales (fundamentación geométrica). Límite de sucesiones. Infinito potencial.

Números algebraicos y trascendentes. No numerabilidad de los números trascendentes. Números construibles. Cuerpos.

Procedimientos. Clasificación de irracionales y de irracionales cuadráticos (familia de los números metálicos) por fracción continua. Construcción geométrica de números irracionales (números construibles). Representación de irracionales en la recta numérica. Enumeración del conjunto de los números algebraicos. Método axiomático formal (segunda formulación).

Propiedades. Propiedades de los números construibles.

Argumentos. Deductivos formales.

La determinación de las configuraciones epistémicas relacionadas con una noción matemática permite un análisis fino de la presencia y alcance de dicha noción en los libros de texto escolares. Contreras, Ordoñez y Wilhelmi (2010) han mostrado este extremo con relación a integral definida. En la sección siguiente, proponemos un análisis de textos escolares argentinos que incluyen el número irracional para su enseñanza con alumnos de 2° de educación secundaria (14-15 años).

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA

La muestra que analizamos es intencional, no habiendo un muestreo aleatorio. El criterio de selección es único: editoriales de mayor difusión en Argentina para 2° (14 años) o 3° (15 años), según la jurisdicción de la Educación Secundaria Básica.[2] Este criterio asegura una alta representatividad con relación al significado institucional de referencia, máxime cuando: por un lado, el Ministerio de Educación propuso unos núcleos de aprendizaje prioritarios (MECT, 2006) para el conjunto de las distintas jurisdicciones, hecho que ha homogeneizado las directrices generales de los libros de texto; por otro lado, el número de textos utilizados en toda la República con un número de colegios no marginal es aproximadamente de quince, considerándose tres textos los de más amplia difusión. Serán estos lo que se utilizarán en el presente estudio.

Los libros seleccionados son:

- Álvarez C., Álvarez F., Garrido L., Martinez S., Ruiz A. (2004). *Matemáticas 9*. Buenos Aires. Cúspide (Vicens Vives).

[2] El número irracional se ha encontrado inmerso en un proceso de desincretización (Chevallard, 1991) por lo que en el currículum de matemáticas de secundaria esta noción se hace presente en 2° (14 años) y en 3° (15 años) de Educación Secundaria.

- Piñeiro G., Rigetti G., Serrano G., Pérez M.(2008). *Matemática III.* Buenos Aires. Santillana.
- Stinsin L., Ziger, D. (2010). *Matemática 9 Activa.* San Isidro. Puerto de Palos.

Para hacer más ágil la escritura, codificaremos las configuraciones epistémicas de la siguiente manera:

- *CE-implícita*: Configuración epistémica implícita de los números irracionales.
- *CE-explícita*: Configuración epistémica explícita para los números irracionales.
- *CE-aprox*: Configuración epistémica de la aproximación racional de números irracionales.
- *CE-aritmética*: Configuración epistémica aritmética de los números irracionales.
- *CE-existencia*: Configuración epistémica de la existencia y clasificación de números irracionales.

En las siguientes secciones se muestra un análisis exhaustivo de cada uno de los libros de texto.

CÚSPIDE (ÁLVAREZ *ET AL.*, 2004)

- *Situaciones*. Se incluyen situaciones de aproximación propias de la *CE-aprox*. Asimismo se introduce un método geométrico para la representación de números irracionales en la recta numérica real propio de la *CE-existencia*, pero este método no se aplica o se pone a prueba en la resolución de problemas.
- *Lenguaje*. Todos los tipos de lenguaje de las configuraciones son utilizados de alguna manera: geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista. A pesar de esta exhaustividad, el conjunto de los números irracionales no es denotado ni se establece de manera explícita la partición de R en números racionales e irracionales ($R = Q \cup (R \backslash Q)$).
- *Conceptos-regla*. La determinación de valores aproximados por tanteo (ensayo-error), así como cálculos aproximados, redondeo y encuadramiento implican la definición según la *CE-aprox*. La definición según

la CE-*aritmética* no se aborda, pero la necesidad de "otros números distintos de los racionales", relacionada con la densidad y el continuo de la recta real son sugeridos según el tipo de expresión decimal de un número (figura 1).

5. ¿Existen otros números aparte de los racionales?

Existen números con infinitas cifras decimales no periódicas. Uno de ellos es el conocido número π

$$\pi=3.141592653...$$

Estos números pueden ponerse en forma de fracción, y se llaman *irracionales*. En el siguiente punto veremos que al extraer una raíz aparece casi siempre irracional.

Figura 1. Definición de número irracional (Álvarez *et al.*, 2004, 30).

La *CE-existencia* se concreta en la observación de que raíces cuadradas y cúbicas de la mayoría de números son números irracionales, como sugiere el texto de la figura 1 (*al extraer una raíz aparece casi siempre un irracional*).

- *Propiedades*. No se consideran propiedades de todas las configuraciones epistémicas, salvo un análisis de la propiedad de densidad de Q en R.
- *Procedimientos*. En su mayoría se refieren a la *CE-aprox*, como una forma de garantizar la manipulación y el cálculo. Además, se muestra un procedimiento de representación y construcción de raíces de números cuadrados y no cuadrados (según el procedimiento geométrico atribuido a Teodoro de Cirene).
- *Argumentos*. Únicamente tres cuestiones precisan de una respuesta argumentada, sin necesidad de que esta sea formal. Así, por ejemplo, se solicita: "Justifica que la suma de un racional más un irracional es siempre irracional. Razona igualmente para el producto de un racional por un irracional" (Álvarez *et al.*, 2004: 39). Asimismo, se solicita justificar que "la diagonal de un cuadrado de lado l es $d=l\sqrt{2}$" y que "la altura de un triángulo equilátero de lado 2a es $h=a\sqrt{3}$" (Álvarez *et al.*, 2004: 163). El resto de ejercicios y problemas suponen una mera aplicación o uso de números irracionales sin el análisis de su naturaleza o su necesidad.

Santillana (Piñeiro *et al.*, 2008)

- *Situaciones*. Se presentan situaciones de todas las CE, excepto de la *CE-existencia*. En particular, se solicita la construcción geométrica de irracionales y su representación en la recta real.
- *Lenguaje*. Se utilizan lenguajes de todas las CE.
- *Conceptos-regla*. Se identifica a la *CE-aprox* en el método de redondeo y truncamiento. La CE-*aritmética* se hace presente en las caracterizaciones de número irracional (figura 4), pero estas no son confrontadas ni analizadas.

Se intenta dar significado a la introducción de las definiciones a través de la *medida irracional* de la raíz cuadrada de dos, para inmediatamente introducir las definiciones y los ejemplos (figura 4).

- *Propiedades*. La CE-*aritmética* es movilizada para el análisis de la densidad de Q y $(R \backslash Q)$ en R, así como para la observación de que los conjuntos N y Z son discretos. Asimismo, la *CE-existencia* es considerada por cuanto se menciona la continuidad de la recta numérica y se analiza con cierta formalidad la sucesión de Fibonacci y sus propiedades y el número áureo con ayuda de la calculadora.

> Un número se llama irracional si no es posible escribirlo como una fracción. La expresión decimal de un número irracional es infinita y no es periódica.
> Un ejemplo irracional es $\sqrt{2}$, observá sus primeras cifras 1,4142135623730950488...
> Hay muchas raíces cuadradas de números naturales que son irracionales. ¿Cómo te podés dar cuenta?
> Si la raíz cuadrada de un número natural no es un natural, entonces se puede asegurar que es un número irracional.
> Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{49} = 7$, etc., son naturales; en cambio, $\sqrt{7}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{39}$, etc., son irracionales.

Figura 4. Definición de número irracional y ejemplos (Piñeiro *et al.*, 2008, 46).

- *Procedimientos*. Se explicitan los métodos propios de las CE-*explícita* y *CE-aprox*. Asimismo, la *CE-existencia* aporta métodos específicos para la representación y construcción de algunas raíces de números no cuadrados.

- *Argumentos*. Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes, puesto que solo se solicita la argumentación de la actividad en dos ejercicios, en ambos formalmente según la CE-*aritmética*.

Puerto de Palos (Stinsin y Ziger, 2010)

- *Situaciones*. Si bien se presentan situaciones de todas las *CE*, la *CE-existencia* se presenta de manera marginal únicamente en alguna situación que implica *reglas de formación* de conjuntos de números irracionales.
- *Lenguaje*. Se presentan todos los tipos de lenguaje de las distintas *CE*: geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista. Si bien se define el conjunto R como unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales, al igual que en la editorial Cúspide, el conjunto de los números irracionales no es denotado ni se establece de manera explícita la partición de R en números racionales e irracionales ($R = Q \cup (R \backslash Q)$).
- *Conceptos-regla*. La introducción de las definiciones no se basa en un principio de necesidad. No se define al conjunto de los números irracionales, pero sí es simbolizado. La definición según la *CE-aprox* se identifica con los métodos de redondeo y truncamiento. Las caracterizaciones del número irracional se dan de una manera "fusionada" (figura 7). La *CE-existencia* es utilizada en la definición de la raíz enésima de un número, pero no se extiende a raíces cúbicas u otras que también pueden ser números irracionales.

Teóricamente

Hasta ahora se trabajó con números racionales, que son aquellos que pueden ser expresados, como el cociente entre dos números enteros. Existen expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas, que no pueden ser expresadas como el cociente entre dos enteros. Se conoce a este tipo de números como números **irracionales**

Algunos ejemplos de números irracionales son:

$\pi = 3.141592654...$ $\sqrt{2} = 1.414213562 ...$ $\sqrt[3]{4} = 1.587401052...$

o bien todo número de infinitas cifras decimales con alguna regla de formación, por ejemplo:

1.1223334444... -2.0102030405... -0.1133557799...

Figura 7. Definición de número irracional y ejemplos (Stinsin y Ziger, 2010: 25).

- *Propiedades*. La introducción de la CE-*aritmética* evita las propiedades de continuidad de la recta numérica y la de completitud del conjunto de los reales (por ampliación del campo numérico mediante $R\backslash Q$). Las propiedades de las CE-aprox y la CE-*existencia* son asimismo omitidas.
- *Procedimientos*. La *CE-aprox* se extraen los métodos de redondeo y truncamiento y la *CE-existenci*a la representación de números irracionales en la recta real, pero este último método no es analizado según su campo de validez. Así, por ejemplo, no se explicita que existen números irracionales como π o $\sqrt[3]{4}$, usados como ejemplos (figura 7), para los cuales no es posible su construcción en la recta real mediante regla y compás.
- *Argumentos*. Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes.

Breve descripción general de los libros de texto

Los textos escolares muestran, evidentemente, concordancias y discrepancias en la forma en que los distintos objetos del significado asociados al número irracional son introducidos y desarrollados. Estos libros comparten algunos elementos de las entidades primarias.

- *Situaciones*. Todos los textos introducen situaciones de aproximación racional de irracionales. La mayoría presenta construcciones numéricas por alguna regla de formación. También son mayoritarias las situaciones de clasificación entre racionales e irracionales. Asimismo se presentan cuestiones o problemas relacionados con números "famosos" (π, número áureo) con un claro objetivo motivacional.
- *Lenguaje*. Todos los tipos de lenguaje de las configuraciones son utilizados por las editoriales, siendo los lenguajes aritmético y geométrico los más abundantes. Este uso permite, por un lado, ampliar el universo numérico y dotar de sentido a los números irracionales; por otro lado, restringe su uso en contextos algebraicos (como paso hacia la simbolización y la generalización) y en contextos analíticos (como procesos de paso al límite). Asimismo, el conjunto de los números irracionales en algunos libros de texto no es denotado, ni se establece de manera explícita la partición de R en números racionales e irracionales ($R = Q \cup (R\backslash Q)$).

- *Conceptos-regla*. Se introducen métodos para aproximar números irracionales. El número irracional es usualmente definido en un contexto geométrico (donde la medida es la noción clave), o como solución de ecuaciones polinómicas sin solución en Q. Se definen raíz cuadrada, cúbica y enésima de un número entero positivo. Sin embargo, la continuidad de la recta numérica o la completitud de los reales no son, en general, abordadas, y la definición de número irracional no se introduce como respuesta a un problema intramatemático, sino de manera ostensiva.
- *Propiedades*. Las propiedades de densidad y orden de (R/Q) en R son implícitamente consideradas como consecuencia de la aproximación por exceso y por defecto de irracionales por racionales. En general, dado que las prácticas operativas están en el centro de interés de los libros de texto, las propiedades de las distintas configuraciones epistémicas, más propias de las prácticas discursivas, quedan relegadas a un segundo plano.
- *Procedimientos*. Es mayoritaria la introducción de procedimientos para representar geométrica y numéricamente los irracionales. Sin embargo, no se discute el hecho de que existan números irracionales no construibles con regla y compás.
- *Argumentos*. Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes.

Es posible, asimismo, resaltar algunos aspectos generales del desarrollo de las configuraciones en los libros de texto. Así, en la introducción de los números irracionales, se privilegian *situaciones* de aproximación mediante decimales. La práctica matemática que se propone está fundamentada básicamente en el desarrollo de la CE-aprox. Esta opción se justifica, no siempre de forma explícita, por el hecho de que en otras ciencias, como la Física, las aproximaciones racionales son "suficientes" (Scaglia, 2000) y por la irrupción de la calculadora en las aulas como un medio común. La aproximación, además, está vinculada al *concepto-regla* privilegiado; a saber: "número que no admite expresión decimal periódica".

Esta decisión, el paso a la aproximación, implica asimismo la renuncia implícita a la introducción de *propiedades* fundamentales de los números irracionales. Esto es así, por cuanto se presume que "las operaciones con decimales son de sobra conocidas" y, por lo tanto, operar con las aproximaciones de los irracionales los hace "transparentes". Este hecho no impide la presentación de *procedimientos* para representar y construir geométricamente algunos números irracionales, como una forma de desvincular dichos números de sus aproximaciones, pero sin llegar a justificaciones o *argumentaciones* formales basadas en situaciones que, forzosamente, tendrían que ser intramatemáticas.

El "abandono" de la aproximación como única vía para introducir los irracionales se realiza por medio de la discusión de la naturaleza de los "radicales" y de la forma en que se opera con estos.

Por último, es importante señalar que todos los tipos de *lenguaje* de las configuraciones (geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista) están presentes en los libros de texto. Cierto que de forma no homogénea, siendo privilegiadas las representaciones *geométricas* (notablemente en la introducción), *algebraicas* (en la manipulación simbólica de expresiones y en la resolución de ecuaciones de segundo grado) y *aritméticas* (en situaciones de aproximación).

SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Vinculados al número irracional, se pueden introducir conceptos, propiedades y procedimientos que permiten la resolución de una gran variedad de situaciones, mediante distintos registros de lenguaje y formas de argumentación específicas. Así, el análisis realizado sobre el origen histórico de la noción "número irracional" permite la determinación de distintas configuraciones que dan respuesta a problemas intramatemáticos que no tienen solución en el conjunto de los números racionales. La integración de todas estas configuraciones constituye el *holosignificado* de la noción, es decir, permiten dar una respuesta a las preguntas:

- *¿Cuál es el significado del número irracional?* El conjunto de todos los objetos involucrados en las distintas configuraciones epistémicas y las relaciones que pueden establecerse entre ellas.
- *¿Qué significa conocer el número irracional?* La comprensión de una noción matemática puede tener distintos grados o niveles, que indican la adquisición de ciertos objetos de las configuraciones epistémicas y su relación entre ellos. De esta forma, la respuesta a la pregunta no es absoluta, sino relativa a un proyecto educativo concreto. El holosignificado no es, pues, un objetivo de enseñanza, sino una referencia para valorar los proyectos de estudio con relación a la noción.

Aquí, el holosignificado basado en el estudio histórico de la noción, sirve de referencia para el análisis de los textos escolares de las editoriales de mayor difusión e impacto en el sistema educativo.

A pesar de que la diferenciación entre racional e irracional es una preocupación común a los libros de texto analizados, las discrepancias y concordancias halladas dan cuenta de la heterogeneidad de las propuestas. Además, la introducción del número irracional no siempre se basa en un principio de necesidad, lo que podría redundar en una pérdida de sentido, por parte del alumno, en el aprendizaje de la noción de número irracional.

Se observa en la muestra de textos una introducción *reduccionista* basada en la aproximación y cuya justificación, explícita o no, se sigue de cuatro presupuestos:

- *Práctico*. Las aproximaciones mediante racionales son suficientes en la técnica, puesto que esta está sujeta a los instrumentos de medida, y para la resolución de situaciones "de la vida real".
- *Escolar*. Las calculadoras son un instrumento naturalizado en la escuela que permiten la manipulación numérica de aproximaciones de irracionales, pero no en general el trabajo con expresiones simbólico-literales (tal es el caso de paquetes informáticos especializados como *Mathematica* o *Maple*).
- *De enseñanza*. Los métodos de enseñanza basados en la aproximación de irracionales mediante decimales garantizan la introducción y desarrollo de aquellos mediante una actividad matemática (operativa y discursiva) naturalizada en la institución "secundaria", hecho que facilita su eficacia y minimiza su coste.
- *Cognitivo*. Los estudiantes de secundaria, en general, no tienen la capacidad de asimilar los conocimientos fundantes relacionados con el número irracional (conmensurabilidad, densidad de Q en R, continuidad de R, etcétera).

La utilización sistemática de aproximaciones por estas razones *prácticas* (resolución de situaciones extramatemáticas), *escolares* (uso de calculadora), *de enseñanza* (referencia a la actividad naturalizada con decimales) y *cognitivas* (dificultades de aprendizaje) hacen que los irracionales tengan un estatus "accesorio y prescindible" en la actividad matemática; es decir, no se motiva su pertinencia y necesidad ni en relación con el coste, ni la eficiencia ni la viabilidad (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010: 378).

De esta forma, si bien estos presupuestos deben ser tenidos en cuenta en el diseño y puesta en marcha de proyectos de enseñanza y aprendizaje de la noción, es necesario, asimismo, observar que los números irracionales permiten progresar en el estudio de procesos de paso al límite, claves en el desarrollo de las nociones propias del Análisis Matemático (Artigue, 1998). Además, la representación en la recta real de números irracionales acarrea la problemática del infinito actual (Scaglia, 2000).

El paso al límite y el infinito actual son imprescindibles para la comprensión de cuestiones típicamente escolares tales como: expresión como fracción de decimales periódicos puros y mixtos, resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, progresiones aritméticas y geométricas (en particular, sumas infinitas de razón positiva menor que la unidad), límites sucesionales o el estudio de ecuaciones polinómicas de grado superior a 2 (en particular de grados 3 y 4) sin solución racional (y que, por lo tanto, no son resolubles por el método Ruffini de factorización de polinomios).

Fundamentada la pertinencia de los números irracionales, queda todavía un largo camino para transformar las configuraciones epistémicas descritas en material de enseñanza. Las configuraciones no constituyen una ingeniería didáctica, sino la referencia obligada para su construcción. La construcción de tal ingeniería tendrá que implicar, asimismo, la determinación de pautas para la valoración de su idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007), tanto *a priori* (previa a la puesta en marcha del proceso instruccional) como *a posteriori* (análisis de la experimentación en contraste con las expectativas).

Esta ingeniería tendría que integrar el paso a la aproximación como un procedimiento previo a un proceso infinito, donde las propiedades fundamentales de los números irracionales serían entonces necesarias. Este hecho supondría superar la máxima errónea siguiente: "puesto que las operaciones con decimales son de sobra conocidas, operar con las aproximaciones hace *transparentes* los números irracionales", que justifica de manera general la intervención actual en la secundaria.

Así, se deberían proponer situaciones de aproximación por defecto y por exceso no solo que involucrasen decimales, sino también fracciones (figura 14), que tendrían que ser acompañadas por técnicas de control del error cometido.

$$1 < \sqrt{3} < 2, \text{ ya que } 1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2$$

$$\frac{3}{2} < \sqrt{3} < \frac{4}{2}, \text{ ya que } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \frac{12}{4} < \frac{16}{4} = \left(\frac{4}{2}\right)^2. \text{ Mejor aproximación: } \frac{3}{2} \text{ (por defecto)}$$

$$\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{6}{3}, \text{ ya que } \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} < \frac{27}{9} < \frac{36}{9} = \left(\frac{6}{3}\right)^2. \text{ Mejor aproximación: } \frac{5}{3} \text{ (por defecto)}$$

$$\frac{6}{4} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}, \text{ ya que } \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{36}{16} < \frac{48}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2. \text{ Mejor aproximación: } \frac{7}{4} \text{ (por exceso)}$$

Figura 14. Aproximación de $\sqrt{3}$ por fracciones.

Los procesos infinitos podrían incluir situaciones que impliquen el estudio de la "periodicidad", pura o mixta, de fracciones continuas. En la figura 15 se muestra una aproximación a un irracional mediante una fracción continua "truncada" y la notación del desarrollo infinito (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969).

$1+\sqrt{3} \approx 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$	$\sqrt{3} \approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}}}}$
$1+\sqrt{3} = \left[\overline{21}\right]$	$\sqrt{3} = \left[1,\overline{12}\right]$

Figura 15. Aproximación y periodicidad pura y mixta en irracionales cuadráticos.

Serían asimismo necesarias actividades específicas que cuantificaran la pérdida de información que se tiene al aproximar un irracional por racionales. Por ejemplo, suponiendo que la tierra es una esfera cuyo radio mide 6 378 km, si se toman 3.14 o 3.1415926535 como aproximaciones de π, ¿es representativa la diferencia de la longitud del ecuador en cada caso?

Por último, es necesario abordar un estudio teórico que describa las diversas configuraciones epistémicas como un todo coherente y articulado (holosignificado), identificando aspectos que promuevan un pensamiento matemático flexible entre los objetos (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos) que las constituyen.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) y fondos de FEDER.

Datos de los autores

Luis Reina, I.E.S. Del Atuel, Mendoza, Argentina.
luisd.reina@gmail.com
Miguel R. Wilhelmi, Universidad Pública de Navarra, España.
miguelr.wilhelmi@unavarra.es
Aitzol Lasa, Universidad Pública de Navarra, España.
aitzol.lasa@unavarra.es

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez C., Álvarez F., Garrido L., Martínez S., Ruiz A. (2004). *Matemáticas 9*. Buenos Aires. Cúspide (Vicens Vives).

Arrigo G., D'Amore B. (1999). 'Lo veo, pero no lo creo'. Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. En *Educación Matemática*, 11(1), 5–24.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? En, *RELIME*, 1(1), 40–55.

Bergé A. (2010). Students' perceptions of the Completeness Property of the Set of Real Numbers. En *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.

Bergé A., Sessa C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. En *RELIME*, 6 (3), 163–197.

Chevallard Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. (2da ed.) Buenos Aires. Aique.

Crisóstomo E., Ordoñez L., Contreras A., Godino J. D. (2005). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), *Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. (pp. 125–166) Jaen, ESP. Universidad de Jaén.

Collette J. P. (1985). *Historia de las Matemáticas I.* Madrid. Siglo XXI.

Condesse V., Minnaard C. (2007). La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro. En *Revista Iberoamericana de Educación*. 42 (2), 10 marzo. Disponible en: http://www.rieoei.org/deloslectores/1522Minnaard.pdf

Contreras A., Ordóñez L., Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. En *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 367–384.

Corry L. (1994). La Teoría de las Proporciones de Eudoxio vista por Dedekind. En *Mathesis* 10, 35–68.

Courant R., Robbins H. (1962). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid. Aguilar.

Dantzig T. (1954). Number: *The Language of Science. A critical Survey Written for the Cultured non-Mathematician* (Fourth Edition). New York: Garden City.

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. En *Uno* 35, 90–106.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla M., Fandiño M. I., Piatti A., Rodríguez J., Rojas P. J., Romero J. H., Sbaragli S. (2006). El sentido del infinito. En *Epsilon* 22 (2), n° 65, 187–216.

Dedekind, R. (1901). *Essays theory of numbers. I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers*. Chicago. The Open Court Publishing Company.

Font, V., Godino J. D., D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. En *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2–7. [Versión española disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf]

Fowler D., Robson E. (1998). Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289. En *Context. Historia Mathematica*, 25, 366–378.

Garbín S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (2), 169–193.

Godino J. D., Batanero C., Font V. (2009). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. En *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127–135. [Versión española disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf]

Godino J. Bencomo D., Font V., Wilhelmi M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. [Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm.]

Godino J. D., Font V., Konic P., Wilhelmi M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (2009), *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico*. (pp. 117- 184) Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. [Disponible en : http://thales.cica.es/granada/]

Godino J. D., Font V., Wilhelmi M. R., Lurduy O. (2010). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. En *Educational Studies in Mathematics*, in press. DOI: 10.1007/s10649-010-9278-x.

Godino J. , Font V. , Wilhelmi M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 133–156. [Disponible en: http://www.clame.org.mx/relime.htm]

Hardy G. H., Wright E. M. (1975). *An introduction to the theory of numbers* (Fourth edition). Oxford. Clarendon Press.

Heath T. L. (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge. University Press.

Heath T. L. (1921). *A history of greek mathematics*, Vol. II. Oxford. University Press.

Hilbert D. (1993). *Fundamentos de la Matemática.* Traducción Luis Felipe Segura. Primera edición en español. Mexico. Mathema. pp. 17-22.

Høyrup J. (1990). On Parts of Parts and Ascending Continued Fractions. An Investigation of the Origins and Spread of a Peculiar System. En *Centaurus*, 33, 293–324.

Iaffei B. (2008). Los números irracionales como objeto de saber. Curso para profesores. *XXXI Reunión de Educación Matemática*. (pp. 1–33) Cuyo, ARG. Unión Matemática Argentina y Universidad Nacional de Cuyo.

Mamolo A., Zazkis R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. En *Research in Mathematics Education*, 10 (2), 167–182.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MECT) (2006). *Núcleos de aprendizaje prioritarios. EGB/ Nivel medio*. Buenos Aires. Autor. Disponible en (1 noviembre 2012): [Disponible en: http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html].

O'Connor J., Robertson E. F. (2001). Pythagoras's theorem in Babylonian mathematics (1 noviembre 2012). [Disponible en: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PrintHT/Greek_sources_2.html]

Piñeiro G., Rigetti G., Serrano G., Pérez M. (2008). *Matemática III.* Buenos Aires. Santillana.

Ramos A., Font V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. En *La Matematica e la sua didattica*, 20 (4), 535–556.

Redondo A. (2008). Los números mórficos en secundaria. En *Suma*, 57, 55-64.

Reina L. (2008). El aprendizaje matemático en un contexto histórico desde un entorno informático: los números irracionales y las espirales. En D. Prieto (Ed.). *Investigación Pedagógica en la Universidad. Diez años de docencia universitaria.* (pp. 123–138) Cuyo, ARG. Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional de Cuyo.

Reina L. (2010). La fracción continua y el número irracional. Puntos de encuentro y algunos aportes didácticos. *Encuentro Latinoamericano de Profesores y Estudiantes de Matemática y Ciencias Naturales*. San Rafael, Mendoza, ARG. IES "Del Atuel".

Rey Pastor J., Babini J. (2000a). *Historia de la Matemática Vol. 1.* Buenos Aires. Gedisa.

Rey Pastor J., Babini J. (2000b). *Historia de la Matemática Vol. 2.* Buenos Aires. Gedisa.

Rey Pastor J., Pi Calleja P., Trejo C. (1969). *Análisis matemático, Vol. 1.* Octava edición. Buenos Aires. Kapeluz.

Scaglia S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta.* Tesis doctoral no publicada. Granada. Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Shinno Y. (2007). On the teaching situation of conceptual change: epistemological considerations of irrational numbers. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, and D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4. (pp. 185–192) Seoul: PME.

Sirotic N., Zazkis R. (2007). Irrational numbers on a number line –Where are they? En *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477–488. [Disponible en: http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/CS-Sirotic-IJMEST-2007.pdf]

Spinadel V. De (1995). La familia de los números metálicos y el diseño. Centro MAyDI de la Fac. de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. Universidad de Buenos Aires. [Disponible en: http://cumincades.scix.net/data/works/att/4856.content.pdf].

Spinadel V. De (2003). La familia de números metálicos Cuadernos del CIMBAGE N°6 *Centro de Matemática y Diseño MAyDI*. Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. Universidad de Buenos Aires. pp.17-44

Stewart I. (1996). Cuentos de un número desdeñado. En *Investigación y Ciencia*, 239 (Agosto).

Stinsin L., Ziger D. (2010). *Matemática 9 Activa*. San Isidro, ARG. Puerto de Palos.

Velasco A. (2005). El problema del continuo antes de Cohen (1873-1963). Aportaciones Matemáticas. En *Memorias*, 35, 61–69.

Wilhelmi M. R. (2003). Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos. Sección 2: Tesis doctorales, nº23. Pamplona. Universidad Pública de Navarra.

Wilhelmi M. R., Godino J. D., Lacasta E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions. The case of the absolute value. En *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2(2). 72–90. [Disponible en: http://www.iejme.com/022007/d2.pdf].

Wilhelmi M. R., Godino, J. D., Lacasta E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. En *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77–120. [Versión inglesa (2011): 'Epistemic configurations associated to the notion of equality in real numbers'. QRDM 21, 53–82. Disponible en: http://math.unipa.it/~grim/Wilhelmi_Q21.pdf]

Zazkis R., Sirotic N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. En M. Johnsen Høines and A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 4. (pp. 497–505) Bergen, Norway: PME.

Zazkis R., Sirotic N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. En *Research in Collegiate Mathematics Education* 7, 1–27.

Acerca de la comprensión del concepto del supremo

Lidia Aurora Hernández Rebollar y María Trigueros Gaisman

Resumen. Esta investigación tiene como objetivo estudiar la construcción del concepto del supremo en el nivel de educación superior. El marco teórico que se utiliza es la teoría APOE (Dubinsky, 1991) sobre la construcción de objetos matemáticos. Se presenta una descomposición genética del concepto en la que se modelan las construcciones mentales que los estudiantes pueden llevar a cabo para la comprensión del concepto. Para validar estas posibles construcciones se diseñó un cuestionario y se aplicó a estudiantes de las licenciaturas de matemáticas y de física de una universidad pública. Algunas de las respuestas que presentamos permiten observar que el proceso de construcción del concepto por el que pasan los estudiantes es muy complejo y que la mayoría no construye una concepción de tipo acción del mismo. El análisis de las respuestas de los estudiantes ha sido útil también para conocer las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando intentan demostrar que cierto número es el supremo de un conjunto dado.

Palabras clave: Teoría APOE, comprensión, supremo.

About the understanding of the supremum concept

Abstract. The main goal of this work is to study how university students construct the supremum concept. The theoretical framework, used in this study, is APOS theory (Dubinsky, 1991); that describes mathematical objects construction. We present a genetic decomposition of the supremum concept that describes the mental constructions that the authors consider students should perform to understand such concept. To validate these possible constructions we designed and applied a questionnaire for mathematics and physics students of a public university. Some answers show that the student's construction process is a hard task, and most students do not construct an action conception of this concept. The analysis of the student answers has been also useful to know the difficulties that students face when they try to demonstrate that a number is a supremum of a given set.

Key words: APOS Theory, understanding, supremum.

Fecha de Recepción: 16 de febrero de 2012. Fecha de Aceptación: 27 de noviembre de 2012

INTRODUCCIÓN

El concepto del supremo, como la mínima de las cotas superiores de un conjunto de números reales, permite establecer el axioma del mismo nombre en un curso introductorio de Análisis Matemático a nivel superior, y tanto el concepto como el axioma son elementos indispensables en el desarrollo de esta materia, de acuerdo con las presentaciones que hacen algunos autores de libros de cálculo como Hasser (1988), Apostol (1982) y Spivak (1992). Los libros tradicionales de esta rama de la matemática varían en poco la presentación de este concepto, después de una definición formal se demuestran rigurosamente los teoremas correspondientes. Nosotros situamos nuestro estudio en una universidad pública donde el concepto se presenta en el primer curso de matemáticas a estudiantes de las carreras de física y matemáticas. Este curso se denomina Matemáticas Básicas y la mayoría de los profesores que lo imparten siguen la presentación de Angoa, Contreras, Ibarra, Linares y Martínez (2004) o alguno de los mencionados arriba. Una descripción de la forma en que estos libros presentan el concepto aparece en la tesis de Acevedo (2011). El número de reprobados en este curso (alrededor de 60% entre 2008 y 2010) ha llamado nuestra atención, y el reporte de una encuesta aplicada a varios grupos de estudiantes que cursan esta materia muestra que, en particular, el concepto del supremo presenta gran dificultad (Maldonado, 2012). Al impartir este curso durante más de cinco años hemos observado que los problemas propuestos al final del tema en el libro de texto son particularmente difíciles de resolver para los estudiantes. Cabe mencionar que dicho libro no está basado en investigación en Matemática Educativa y que su presentación también sigue el modelo formal.

La teoría APOE de Dubinsky y colaboradores ha sido útil en el análisis de la construcción de conceptos de matemáticas de nivel superior, diversos autores la han utilizado para estudiar la comprensión de conceptos tales como función de dos variables, derivada, integral, base, etc. (Tall, Thomas, Davis, Gray y Simpson 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares 2006; Trigueros, 2005; Salgado y Trigueros 2009; Martin, Loch, Cooley, Dexter y Vidakovic 2010, Aldana, 2011, Roa-Fuentes, 2012, Martinez-Planell y Trigueros, 2012); por esta razón la consideramos apropiada como marco teórico de este trabajo. Una ventaja de esta teoría es que la información generada a partir de una descomposición genética, validada mediante investigación con estudiantes, se puede utilizar para diseñar material didáctico, con el fin de alcanzar un mejor aprendizaje del concepto. Una secuencia didáctica basada en este trabajo ya ha sido diseñada y reportada en la tesis de Acevedo (2011).

Utilizando esta teoría, las preguntas que nos hemos planteado resolver son:

1. ¿Qué construcciones mentales son necesarias para la construcción del concepto del supremo?
2. ¿Qué construcciones mentales han alcanzado los estudiantes cuando estudian el concepto del supremo en un curso tradicional?
3. ¿A qué dificultades se enfrentan los estudiantes cuando requieren aplicar el concepto del supremo?

Hasta este momento no tenemos conocimiento de estudios que reporten las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto del supremo, ni tampoco acerca de propuestas para su enseñanza y aprendizaje; sin embargo, ha sido el alto número de reprobados y las dificultades observadas en el curso impartido por la primera autora, lo que ha motivado esta investigación.

Después de esta introducción, presentamos una breve descripción de la teoría APOE por ser la que sustenta este trabajo de investigación. Continuamos con la descripción de la metodología que se siguió para conocer las concepciones por las que transitan los estudiantes al construir el concepto en estudio. Dentro de la metodología utilizada se incluye el diseño de una descomposición genética del concepto, la que se utilizó para elaborar el instrumento de investigación y para analizar las concepciones de los estudiantes. La sección de resultados presenta dichas concepciones, las cuales se deducen del análisis de las respuestas de los estudiantes. Finalmente, en las conclusiones, se resume el proceso que siguen los estudiantes para construir el concepto del supremo y que se ha observado al final de esta investigación.

MARCO TEÓRICO

Si deseamos investigar cómo los individuos construyen conceptos matemáticos, encontramos que diversos autores nos remiten a la idea de construcción de objetos mentales, que se pueden manipular en un proceso que generalmente es realizado paso a paso. En realidad, esta idea tiene sus orígenes en la epistemología de Piaget, quien explica tal proceso de construcción mediante la abstracción reflexiva. Dubinsky y el grupo de investigadores integrados en *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC) han adaptado la teoría piagetiana relativa a la abstracción reflexiva al pensamiento matemático avanzado (Asiala *et al.*, 1996). Para Dubinsky (1991, 1991a, 1996), la abstracción reflexiva es el mecanismo por el cual se construyen objetos mentales a través de acciones físicas o mentales sobre estos objetos matemáticos. La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), desarrollada por RUMEC, propone un modelo para explicar la manera en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos de nivel superior. Dicha construcción se puede describir mediante tres construcciones básicas: acción, proceso y objeto. En la teoría APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas para su aprendizaje. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto. Cuando se utiliza la teoría APOE en la investigación o en el diseño de material didáctico, se empieza por hacer una descomposición genética del o de los conceptos de interés. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos, la forma de ir estructurándolos para posibilitar la construcción de la concepción objeto y las relaciones con otros objetos o esquemas necesarios para la construcción de esquemas. Con esta descomposición genética se diseña material didáctico o un instrumento para conocer las concepciones que los estudiantes han desarrollado acerca del concepto. Si se elige la primera opción, se puede pasar al diseño y a la aplicación de un instrumento de investigación. Después, el análisis de las respuestas del instrumento se puede usar para refinar la descomposición genética inicial y para volver a la primera opción (Trigueros, 2005).

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo esta investigación se diseñó, en primer lugar, una descomposición genética del concepto del supremo. Con base en esta descomposición genética, se diseñó un cuestionario con preguntas o problemas relativos a este concepto. El cuestionario se aplicó a dos grupos distintos de estudiantes y se analizaron sus respuestas. Posteriormente, se entrevistó a siete de los estudiantes que habían contestado el cuestionario y la entrevistadora registró las preguntas y las respuestas mediante escritura manual. Las respuestas de ambos cuestionarios se analizaron en conjunto para extraer la información relativa a las acciones, procesos y objetos; es decir, a las construcciones predichas por la descomposición genética de los conceptos involucrados y que se pueden inferir del trabajo de los estudiantes a partir del análisis de las respuestas. Los resultados que se presentan en este artículo son precisamente los que se derivan de este análisis.

Participantes

Participaron en esta investigación 34 estudiantes: 24 que se encontraban repitiendo el curso de matemáticas básicas, donde se estudia el supremo y al que llamaremos grupo A, y diez que cursaban la materia Cálculo Diferencial, consecuente del curso Matemáticas Básicas y al que denominaremos grupo B. Los estudiantes del grupo A habían estudiado el tema del supremo un mes antes de que respondieran nuestro cuestionario. Los del grupo B aprobaron la materia matemáticas básicas el semestre anterior y en la materia de Cálculo Diferencial conocieron algunas aplicaciones del concepto que nos ocupa. En ambos grupos había estudiantes de las licenciaturas de física y de matemáticas, quienes respondieron el cuestionario en la parte final de sus cursos (junio de 2010). Estos estudiantes no tenían ninguna otra característica especial y participaron en la investigación de manera voluntaria.

Instrumento

El instrumento es un cuestionario que se diseñó expresamente para detectar el proceso de construcción del concepto del supremo, basándonos en la teoría APOE, pero sin incluir la concepción de esquema. Además, se realizaron siete entrevistas a estudiantes que habían contestado el cuestionario y que tuvieron la disposición para responderlas, con el fin de recabar mayor información sobre sus contestaciones al cuestionario. Las entrevistas fueron transcritas manualmente al momento de realizarse y se utilizaron únicamente para reforzar la interpretación y el análisis de las respuestas del cuestionario. El diseño del instrumento siguió dos etapas:

> *Etapa 1*. Análisis del concepto del supremo a través de una descomposición genética.
> *Etapa 2*. Diseño y selección de los problemas con base en la descomposición genética.

Etapa 1. Una descomposición genética de un concepto matemático es un modelo que se construye a partir del análisis de las construcciones cognitivas que se requieren para el aprendizaje de dicho concepto. En ella se incluyen las acciones, los procesos y la forma en que estos se coordinan e interiorizan, de tal forma que se posibilite el encapsulamiento del concepto, a lo cual se denomina concepción objeto del concepto. La descomposición genética también puede incluir la descripción de la construcción de relaciones entre dichas acciones, procesos y objetos involucradas en la construcción de esquemas. En la descomposición genética del supremo que nosotros proponemos aquí, hemos incluido únicamente un análisis hasta la concepción objeto del supremo.

Descomposición genética del concepto del supremo

Para comprender el concepto del supremo, los alumnos deben haber construido un esquema de conjuntos, lo cual significa: el manejo de notación formal, operaciones básicas con conjuntos, identificación de complementos de conjuntos, representaciones analíticas y gráficas (en recta numérica o con diagramas de Venn). También deben haber construido un esquema de lógica que implica: traducción de proposiciones no cuantificadas, las cuales incluyan conectivos y, o, no e implicación y su negación, del lenguaje natural al simbólico y viceversa; el uso de cuantificadores y su negación en proposiciones compuestas (que incluyen varios cuantificadores, conectivos y negaciones) como proceso. Además, la posibilidad de construir argumentos simples y demostraciones directas e indirectas como un proceso. Deben también haber construido el concepto de cota superior.

Construcción de la noción de cota superior

Dado un conjunto numérico discreto A, el estudiante hace la acción de identificar un conjunto de números B que sean mayores o iguales que todos los elementos del conjunto A, así como el mayor de los elementos del conjunto A y las acciones de comparación necesarias para mostrar que, efectivamente, los elementos de B son mayores o iguales que los elementos de A.

Estas acciones se interiorizan en el proceso de generalización, que consiste en identificar el conjunto B de todos los números mayores o iguales que todos los elementos de un conjunto A, cuando este pasa de ser discreto a un conjunto continuo, y en el proceso de generalización que consiste en identificar el conjunto de todos los números mayores o iguales que todos los elementos de un conjunto A de cualquier tipo, si existe. El proceso anterior se coordina con el proceso de demostración de que, efectivamente, ese conjunto B contiene únicamente elementos que son mayores o iguales que todos los elementos del conjunto dado A. Los procesos anteriores también se pueden revertir en el proceso de encontrar un conjunto para el cual, otro conjunto dado, constituye un conjunto de cotas superiores.

Construcción de mínima cota superior

Dado un conjunto de cotas superiores B de otro conjunto no vacío dado A, el estudiante debe hacer la acción de identificar el elemento mínimo del conjunto B y las acciones necesarias para justificar que efectivamente lo es. Estas acciones se interiorizan en el proceso de generalización que permite encontrar la mínima cota superior de un conjunto A, arbitrario, acotado superiormente y no vacío. Este proceso se coordina con el proceso necesario para demostrar que, efectivamente, ese número es la menor de las cotas superiores (la mínima cota superior). Los procesos anteriores se pueden revertir en el proceso de encontrar un conjunto para el cual un número dado constituye una mínima cota superior.

Los procesos de encontrar el conjunto de cotas superiores y de encontrar la mínima cota superior se generalizan y se coordinan para encontrar el conjunto de cotas superiores para un conjunto abstracto dado, y en el proceso de encontrar la mínima cota superior de ese conjunto. Estos procesos involucran el uso de notación simbólica de conjuntos y de lógica, por lo que se deben coordinar con los elementos de los esquemas correspondientes. Los procesos anteriores de demostración se deben generalizar para incluir las demostraciones para este tipo de conjuntos.

El estudiante efectúa las acciones y los procesos necesarios para determinar el conjunto de cotas superiores y el supremo de conjuntos definidos mediante operaciones con otros conjuntos. Esto hace necesaria la coordinación con el esquema de conjuntos, incluyendo el uso de distintas representaciones de los mismos, y el proceso de demostrar que el supremo determinado efectivamente lo es.

Encapsulación del objeto supremo

Ante la necesidad de demostrar proposiciones que involucran supremos de conjuntos generales obtenidos mediante operaciones con conjuntos, el estudiante encapsula los procesos descritos anteriormente en el objeto supremo de cada uno de los conjuntos para poder hacer las acciones necesarias sobre ellos.

Etapa 2. De acuerdo con la descomposición genética anterior es posible observar la presencia de las concepciones involucradas en la construcción del concepto del supremo en los estudiantes, a través de las respuestas al cuestionario diseñado. Para detectar las concepciones mencionadas, tendremos en cuenta lo siguiente.

Nosotros consideraremos que un estudiante muestra una concepción acción del concepto del supremo, cuando este es capaz de identificar el supremo de conjuntos dados numéricamente, con un número finito de elementos y, además, que puede comprobar que, efectivamente, ese elemento satisface la definición; de identificar el supremo en intervalos acotados utilizando reglas memorizadas, o de identificar que no existe el supremo cuando los conjuntos no están acotados, también utilizando reglas memorizadas.

Un estudiante muestra una concepción proceso de supremo cuando, para distintos tipos de conjuntos y, en particular, para conjuntos definidos de manera general o abstracta, es capaz de encontrar el supremo y de argumentar, incluyendo cuantificadores en su justificación, al menos en algunos casos.

Un estudiante muestra una concepción objeto del concepto del supremo cuando es capaz de encontrar el supremo de conjuntos arbitrarios, incluidos los que se obtienen a través de operaciones entre conjuntos, y demostrar formalmente que efectivamente lo es.

Los problemas del cuestionario fueron diseñados o elegidos tomando en cuenta la descomposición genética anterior. Se consideró que la demanda del problema propuesto al estudiante fuera tal, que pudiéramos inferir las construcciones y las concepciones del objeto del supremo. Por ello tuvimos en cuenta la lista de ejercicios y los ejemplos propuestos en el libro de texto.

En la Figura 1 se muestra el cuestionario diseñado. Notemos que en el cuestionario se presenta la definición formal del supremo; sin embargo, debemos aclarar que, antes de que los estudiantes contestaran este cuestionario, se les pidió escribir la definición del supremo tal y como la recordaran.

La pregunta uno, en cada uno de sus incisos, corresponde a la acción de comparar los elementos de cada conjunto para determinar si existe alguno de ellos mayor o igual que todos los elementos del conjunto. Aunque en algunos casos se requiere de una generalización, este tipo de ejemplos se trabajan en clase y, por lo tanto, pueden ser resueltos por memorización, como es el caso de identificar el supremo de intervalos abiertos o cerrados.

Cuestionario No 1

Este cuestionario tiene como objetivo identificar el proceso de construcción del concepto del supremo de un conjunto real.

Nombre:____

Matricula:__________________

Definición del supremo. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de A, si cumple las dos proposiciones siguientes:

i) $\forall x \in A, \alpha \geq x$

ii) Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $\forall x \in A$, $c \geq x$ entonces $c \geq \alpha$

1. ¿Cuál es el supremo de los conjuntos siguientes?

   a. $[-1, 5]$

   b. $(-8, -1/2)$

   c. $(3, \infty)$

   d. $\{-2, 10, 8, 0, -5\}$

   e. $\mathbb{N}$

2. Demuestra que los números que elegiste como supremo en el ejercicio 1a y 1b cumplen con la definición.

3. Sea $B = [-1, 5] \cup (-8, -1/2)$.

   a. ¿Es B acotado superiormente?

   b. ¿Existe el supremo de B? ¿Cuál es?

4. Sea $D = (3, \infty) \cup \{-2, 10, 8, 0, -5\}$.

   a. ¿Es D acotado superiormente?

   b. ¿Existe el supremo de D?¿Cuál es?

5. Si $A, B \subset \mathbb{R}$ son conjuntos no vacíos acotados superiormente:

   a. ¿Qué puedes decir de $A \cup B$?

   b. ¿Cuál de las igualdades siguientes es verdadera?.

   $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ ó $\sup(A \cup B) = \min\{\sup A, \sup B\}$.

6. Demuestra la igualdad que hayas elegido como verdadera.

Figura 1.

La pregunta dos requiere de una concepción de tipo proceso para el concepto del supremo, ya que debe demostrar que cierto número concreto es el supremo de un conjunto dado. En primer lugar, debe demostrar que el número seleccionado como supremo es cota superior del conjunto, para lo cual deberá recurrir a la definición del mismo conjunto, en nuestro caso, de intervalo. Después, para demostrar que dicho número es la menor de las cotas superiores se supone la existencia de alguna otra cota superior y se demuestra que esta es mayor o igual que el número que se pretende demostrar que es el supremo. La manera tradicional como se demuestra esta proposición, por ejemplo en la 2a, es la siguiente: Sea $c \in \mathbb{R}$ una cota superior de [-1, 5] entonces para todo

$x \in [-1,5]$ se tiene que $c \geq x$. Como $5 \in [-1,5]$ obtenemos que $c \geq 5$. Sin embargo, en el ejercicio 2b, el supremo, que es $\frac{1}{2}$ no pertenece al conjunto por lo que la segunda parte de la demostración cambia a: Sea c una cota superior de $(-8, \frac{1}{2})$ y supongamos que $c < \frac{1}{2}$. Sea $z = \frac{c + \frac{1}{2}}{2}$, tenemos que $z \in (c, \frac{1}{2})$, pero esto es un absurdo, pues supusimos que c es cota superior de $(-8, \frac{1}{2})$. Por lo tanto $c \geq \frac{1}{2}$.

La respuesta a esta pregunta dos permite observar también si el estudiante ha alcanzado una concepción proceso de los conceptos cota superior y conjunto, ya que debe ser capaz de generalizar las acciones requeridas en la pregunta 1, interiorizarlas y coordinarlas con el proceso que le permite considerar distintos tipos de conjuntos. Además, requiere de la lógica para establecer una demostración, inclusive por reducción al absurdo como en el caso 2b.

Las preguntas 3 y 4 también corresponden a acciones del mismo tipo que las requeridas en la pregunta 1. Sin embargo, se eligieron para observar, principalmente en la pregunta 4, si los estudiantes mostraban una concepción proceso del concepto unión de conjuntos.

El inciso a) de la pregunta 5 exige un proceso de operación con los conjuntos dados, así como la coordinación con el proceso de encontrar una cota superior para el conjunto resultante de la operación, y el inciso b) exige un proceso de comparación mental de todas las posibles cotas superiores para determinar entre ellas la existencia del supremo.

Finalmente, la pregunta 6 requiere de la encapsulación del proceso de encontrar el supremo de un conjunto general para demostrar que tal supremo satisface la definición; cuando es respondida correctamente, muestra una concepción objeto del concepto supremo.

Procedimiento

El cuestionario fue aplicado en el horario de clase de cada uno de los grupos mencionados y se les invitó para que, posteriormente, en diferentes horarios a escoger, asistieran para ser entrevistados. Debido al carácter voluntario de la entrevista y a que nos encontrábamos en un periodo de fin de cursos, se realizó un total de siete entrevistas, cada una de ellas de manera individual. De manera previa a la realización de las entrevistas, se examinaron las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas del cuestionario, a fin de elaborar preguntas adecuadas a las respuestas producidas, con el objetivo de que los estudiantes explicitaran lo que estaban pensando al resolver los problemas y determinar, así, con mayor claridad que la permitida por el cuestionario, qué construcciones mostraban en sus respuestas. Preguntas y respuestas se presentaron oralmente y fueron transcritas a mano en el momento de manifestarse.

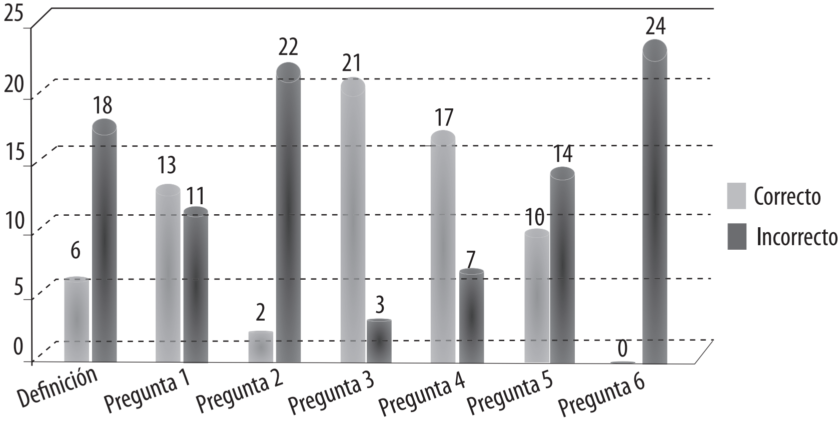
Una vez realizadas las entrevistas, se procedió a un nuevo análisis de los cuestionarios y de las encuestas, ahora de manera conjunta.

Análisis

En una primera etapa, el análisis de las respuestas consistió en detectar las respuestas correctas e incorrectas y, al mismo tiempo, en elaborar una lista de errores cometidos por los alumnos. La segunda etapa consistió en analizar las respuestas de los alumnos en términos de las construcciones señaladas en la descomposición genética y en extraer la información relacionada con las acciones, procesos, objetos y esquemas considerados en la descomposición genética que mostraban las respuestas de los alumnos. En esta segunda etapa se analizaron también las respuestas de las entrevistas con el fin de retroalimentar los datos y las interpretaciones del análisis del cuestionario. A través de estos análisis fue posible observar la dificultad de la construcción de este concepto por parte de los estudiantes y la concepción que mostraban al momento de contestar el cuestionario. Al encontrar algunas diferencias entre las respuestas de los estudiantes de los grupos A y B, se tomó la decisión de exponer los resultados de estos grupos por separado. Además, gracias a la riqueza de conceptos, representaciones y relaciones que involucra la construcción del concepto de supremo, el análisis realizado nos permitió observar también elementos de la construcción de los conceptos conjunto, cota superior y elemento mínimo de un conjunto. Por otro lado, observamos la gran importancia que tiene, en la construcción del concepto del supremo, el manejo fluido de la notación simbólica y una concepción estructurada de la lógica a la cual hemos denominado esquema de lógica.

RESULTADOS

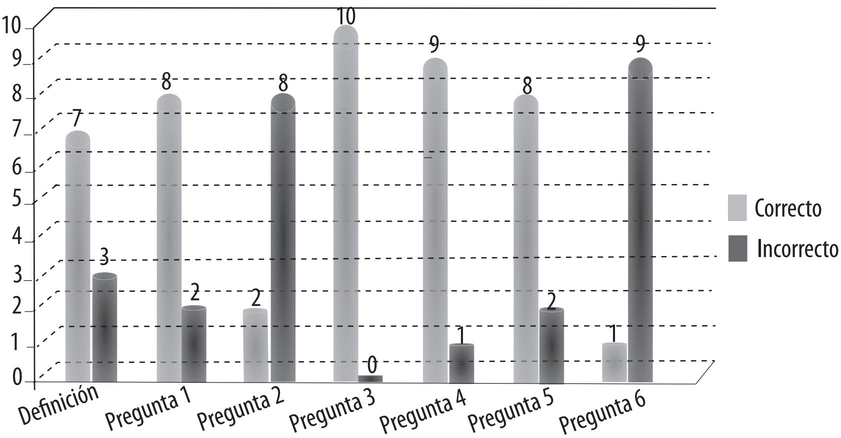
En esta sección presentamos los resultados obtenidos del cuestionario. De manera global y mediante las gráficas siguientes, mostramos las respuestas correctas e incorrectas de cada una de las preguntas o problemas. También describimos, después de cada gráfica, los errores detectados en cada grupo. La gráfica 1 muestra los resultados del grupo A y la gráfica 2 los del grupo B.



Gráfica 1. Resultados del grupo A con 24 estudiantes.

En la gráfica 1 observamos que los estudiantes del grupo A muestran problemas desde la definición de supremo: 87% no pudo darla correctamente. En el análisis de las respuestas a esta pregunta detectamos que algunos estudiantes confundieron la definición de supremo con el axioma del supremo, mientras que otros no pudieron escribir correctamente el inciso dos de la definición. Estos estudiantes abusaban de los cuantificadores o los usaban incorrectamente al tratar de escribir simbólicamente que cualquier cota superior debe ser mayor o igual que el supremo. En la pregunta 1 hubo más errores en este grupo que en el grupo B. Más adelante analizamos estos errores. En el grupo A observamos también que las demostraciones de las preguntas 2 y 6 no pudieron ser realizadas. A diferencia del grupo B, en este grupo A encontramos más respuestas en blanco, inclusive, en la pregunta 2; la mayoría no pudo demostrar que los números seleccionados eran cotas superiores de los intervalos dados.

En la gráfica 2 podemos observar los resultados del grupo B. La mayoría de los estudiantes de este grupo pudo dar la definición de supremo correctamente, así como identificar el supremo de conjuntos concretos y de conjuntos que resultan de la unión de dos conjuntos. Sin embargo, 80% no pudo demostrar que cierto número concreto era el supremo de un conjunto (pregunta 2) y 90% no pudo demostrar que el supremo de la unión de dos conjuntos acotados superiormente, no vacíos, es el mayor de los supremos de los dos conjuntos (pregunta 6).



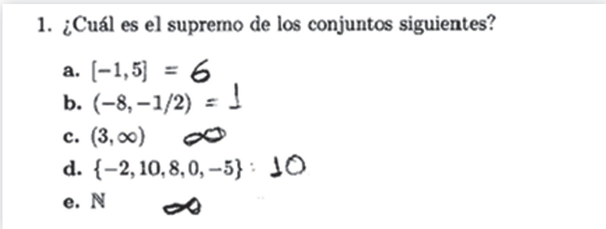
Gráfica 2. Resultados del Grupo B con 10 estudiantes.

A continuación presentamos las construcciones observadas en los estudiantes en relación con la descomposición genética del concepto del supremo. Esta información nos permite verificar las construcciones que los alumnos fueron capaces de hacer y relacionar las dificultades de los alumnos con construcciones específicas. Todo ello, nos permite obtener información sobre la construcción del concepto para, posteriormente, diseñar estrategias didácticas con el fin de enseñarlo de manera más efectiva. Elegimos algunas respuestas de los estudiantes para ilustrar las construcciones que consideramos más importantes en la construcción del concepto y su relación con las dificultades de los estudiantes. En esta sección no hacemos diferencia entre los grupos A y B, sino un análisis global de las concepciones de los estudiantes al momento de aplicar el cuestionario.

Concepción Acción del concepto supremo

La mayoría de los estudiantes entrevistados pudieron realizar la acción de identificar el supremo de conjuntos dados numéricamente, discretos o continuos como lo son intervalos abiertos o cerrados. De los 34 estudiantes encuestados, 20 contestaron correctamente a la pregunta número uno. Quienes contestaron incorrectamente, mostraron las siguientes dificultades:

1. No identificar el supremo. Algunos confundieron el supremo con el mínimo de un conjunto. Algunas respuestas que muestran esta situación son: *Sup* $(-8,-\frac{1}{2}) = -8$, *Sup* $(3, \infty) = 3$, *Sup* $\mathbb{N} = 1$.
2. No tener una respuesta acerca del supremo de conjuntos no acotados, como el intervalo $(3, \infty)$ o $\mathbb{N}$, lo cual muestra que dichos estudiantes no han alcanzado una concepción acción del concepto cota superior.
3. No manejar adecuadamente la notación simbólica. Por ejemplo, algunos responden: *Sup* $(3, \infty) = \infty$, *Sup* $(-8,-\frac{1}{2}) = \nexists$ *Sup* $(3, \infty) = \emptyset$. Ver Figura 2


1. ¿Cuál es el supremo de los conjuntos siguientes?

a. $[-1, 5]$ = 6
b. $(-8, -1/2)$ = 1
c. $(3, \infty)$ ∞
d. $\{-2, 10, 8, 0, -5\}$: 10
e. $\mathbb{N}$ ∞

Figura 2. Respuesta de un estudiante a la pregunta 1.

Las preguntas 3 y 4 también exigen acciones y fueron contestadas correctamente casi por 100% de los estudiantes. Sin embargo, algunos estudiantes que intentaron justificar su respuesta, mostraron problemas en la construcción cognitiva de conjunto, por lo que consideramos que algunos de ellos no han interiorizado las acciones en una concepción proceso de conjunto. Por ejemplo algunas respuestas fueron:

1. $B = [-1,5] \cup (-8, -1/2)$ no tiene supremo porque hay un intervalo vacío en esta unión. (Figura 3).
2. $D = (3, \infty) \cup \{-2, 10, 8, 0, -5\}$ no tiene supremo porque no existe la unión entre un intervalo y un conjunto. (Figura 4).
3. El supremo de D no existe porque $(3, \infty)$ tiende a infinito.
4. El supremo de D no existe porque N no está acotado superiormente.
5. El supremo de D es 10.

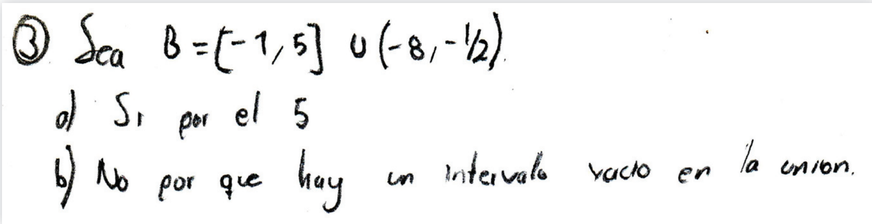


Figura 3. Respuesta de un estudiante a la pregunta 3.

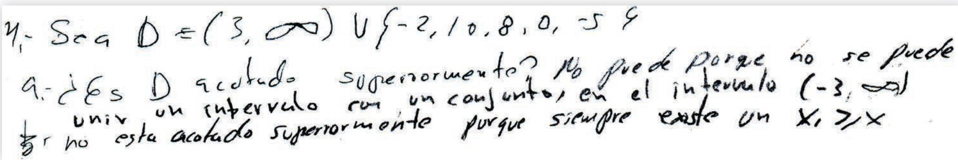


Figura 4. Respuesta de un estudiante a la pregunta 4.

Concepción Proceso del concepto supremo

La respuesta a la pregunta dos, como se mencionó anteriormente, permite observar una concepción proceso de los conceptos conjunto, cota superior y supremo, debido a que el alumno debe generalizar las acciones requeridas en la pregunta 1, interiorizarlas y coordinarlas con el proceso que le permite considerar distintos tipos de conjuntos. Las respuestas de los estudiantes al cuestionario y a las entrevistas nos mostraron que la actividad solicitada implicaba también un proceso de uso de la lógica, pues observamos que el estudiante no concluía la tarea solicitada, porque no era capaz de reproducir la demostración requerida. La mayoría de los estudiantes puede demostrar que 5 es cota superior de [-1,5], lo cual muestra una concepción proceso para cota superior, pero no pueden demostrar que es la menor de las cotas superiores. Solo cuatro estudiantes demostraron correctamente que 5 es la menor de las cotas superiores de [-1,5]. Detectamos tres tipos de problemas en las respuestas dadas por los estudiantes para la demostración de esta proposición:

1. Le dan a *c* un valor concreto en la segunda parte de la demostración. (Figura 5)
2. No manejan adecuadamente la notación simbólica.
3. No logran estructurar una demostración. Algunos estudiantes empiezan suponiendo lo que deben demostrar y, a partir de ahí, implican sin demostrar. Encontramos en varios estudiantes el formato seguido en la Figura 5. Ver, por ejemplo, la Figura 6.

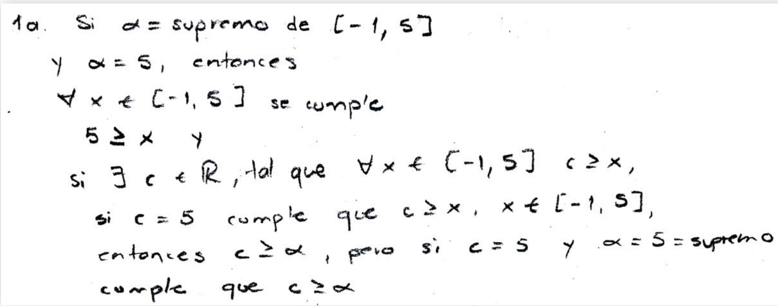

1a. Si α = supremo de $[-1, 5]$
y $\alpha = 5$, entonces
$\forall x \in [-1, 5]$ se cumple
$5 \geq x$ y
si $\exists c \in \mathbb{R}$, tal que $\forall x \in [-1, 5]$ $c \geq x$,
si $c = 5$ cumple que $c \geq x$, $x \in [-1, 5]$,
entonces $c \geq \alpha$, pero si $c = 5$ y $\alpha = 5 =$ supremo
cumple que $c \geq \alpha$

Figura 5. Respuesta de un estudiante a la pregunta 2a.

2 b. (-8, ½)

Si ½ = *Sup A* ⇒

i) $\frac{1}{2} \geq a \; \forall a \in A$

ii) $si\ m\ es\ cota\ superior\ de\ A \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m$

i) Puesto que el intervalo es, (el estudiante dibuja el intervalo (-8, ½) sobre la recta real) está acotado superiormente, ya que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ que es el mayor de todos.

ii) $si\ m\ es\ cota\ superior\ de\ A \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m.$

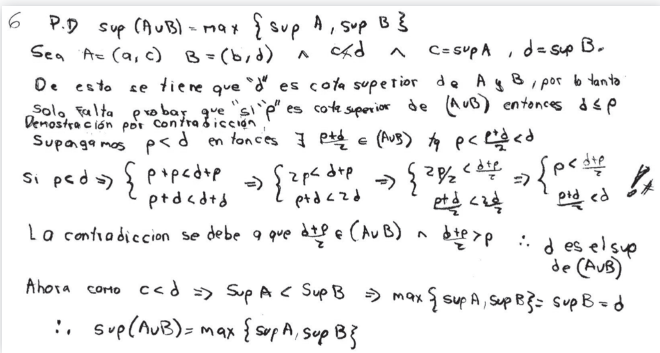
Tomo a 1 como cota superior de *A* ⇒ $1 \geq \frac{1}{2}$, como el conjunto de las cotas superiores es [1/2, ∞) por lo tanto ½ =*Sup A*

Figura 6. Transcripción de la respuesta de un estudiante a la pregunta 2b. Observar que el estudiante parte de lo que desea demostrar y hace implicaciones.

Concepción Objeto del concepto supremo

Claramente, la mayoría de los estudiantes que participaron en este estudio no ha encapsulado el concepto de supremo pues, como hemos explicado antes, la mayoría no pudo realizar las acciones o el proceso que implica demostrar que cierto número concreto es la menor de las cotas superiores de un conjunto dado, en este caso, un intervalo cerrado. La pregunta 6, que exige lo mismo pero para la unión de dos conjuntos arbitrarios, acotados y no vacíos, solo fue respondida correctamente por una estudiante. Algunos de los problemas detectados en las respuestas de esta pregunta son:

1. Intentan demostrar que *Sup(A∪B) = min {SupA, SupB}*. Estos estudiantes muestran apenas una concepción acción del concepto supremo.
2. Equivocan el planteamiento de la demostración. Estos estudiantes muestran procesos en los conceptos cota superior y supremo, pero no han construido un esquema de lógica.
3. Algunos pretenden demostrar que *Sup(A∪B)= max {SupA,SupB}* demostrando que *Sup(A∪B)= min {SupA,SupB}* no se cumple.
4. Demuestran que la igualdad se cumple considerando algún caso particular para los conjuntos A y B. (Figura 7).
5. No manejan adecuadamente la notación simbólica. Algunos denotaban algún objeto con un símbolo y luego este símbolo lo usaban para denotar otro objeto.


6 P.D $\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Sea $A=(a,c)$ $B=(b,d)$ $\wedge$ $c \not< d$ $\wedge$ $c=\sup A$, $d=\sup B$.

De esto se tiene que "d" es cota superior de A y B, por lo tanto

Solo falta probar que "si "p" es cota superior de $(A\cup B)$ entonces $d \leq p$

Demostración por contradicción

Supongamos $p<d$ entonces $\exists\ \frac{p+d}{2} \in (A\cup B)$ tq $p < \frac{p+d}{2} < d$

Si $p<d \Rightarrow \begin{cases} p+p<d+p \\ p+d<d+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p<d+p \\ p+d<2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p/2 < \frac{d+p}{2} \\ \frac{p+d}{2} < \frac{2d}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < \frac{d+p}{2} \\ \frac{p+d}{2} < d \end{cases}$

La contradiccion se debe a que $\frac{d+p}{2} \in (A\cup B)$ $\wedge$ $\frac{d+p}{2} > p$ $\therefore$ d es el sup de $(A\cup B)$

Ahora como $c<d \Rightarrow \operatorname{Sup} A < \operatorname{Sup} B \Rightarrow \max\{\sup A, \sup B\} = \sup B = d$

$\therefore$ $\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Figura 7. Respuesta de un estudiante a la pregunta 6. Observemos que realiza la demostración pero para los conjuntos A y B cuando estos son intervalos abiertos.

A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario y en las entrevistas pudimos observar que la mayor parte de ellos muestra únicamente una concepción acción de los conceptos de cota superior y de supremo, dado que son capaces de responder memorísticamente, en algunos casos, o de hacer las acciones de comparación necesarias para determinarlos en el caso de conjuntos finitos y simples.

Pocos estudiantes muestran haber interiorizado estos conceptos en procesos, y parece claro que un obstáculo que se presenta a la interiorización es la falta de construcción de un esquema de conjunto que permita a los estudiantes operar y comparar conjuntos, algo que en la descomposición genética propuesta se establece como necesario. Otro obstáculo que se presenta a la interiorización de las acciones requeridas en la construcción de estos conceptos es la construcción de un esquema de lógica que incluya la construcción de los cuantificadores como objeto.

El hecho de que únicamente una alumna muestre una concepción objeto de estos conceptos pone de manifiesto la complejidad involucrada en su construcción, así como el hecho de que, en los cursos que han recibido, no ha habido un énfasis en actividades que permitan a los alumnos interiorizar y encapsular las construcciones descritas en la descomposición genética.

Respecto a las construcciones predichas en la descomposición genética propuesta en este trabajo, encontramos que los alumnos no han construido un esquema de conjunto y un esquema de lógica y que, justamente, la falta de construcción de estos esquemas, representa un obstáculo importante en la construcción del concepto de supremo. Consideramos que, para que los alumnos aprendan efectivamente este concepto, es necesario diseñar actividades que partan de la construcción de estos esquemas, antes de iniciar la construcción del concepto de supremo.

En las respuestas de los alumnos encontramos las acciones y procesos descritos en la descomposición genética para la construcción del concepto de cota superior y de mínima cota superior, aunque una limitación de nuestros instrumentos consiste en que no se incluyeron preguntas para determinar si los estudiantes construyen el proceso de reversión de los procesos de construcción de estas nociones. Ello tendrá que estudiarse en un futuro. El hecho de que en las respuestas de la alumna que demostró la construcción de estos conceptos como objeto, se identificaran las construcciones propuestas en la descomposición genética, nos permite considerarla como válida, si se toma en cuenta la importancia de la construcción de los esquemas considerados en ella como construidos.

CONCLUSIONES

El manejo inadecuado de la notación simbólica es una constante en las respuestas de los estudiantes y, de acuerdo con la descomposición genética del concepto del supremo, requerimos del manejo adecuado de esta para la coordinación de los procesos necesarios para generalizar y abstraer dicho concepto. La construcción de la concepción proceso del concepto del supremo no es alcanzado sin un manejo adecuado de la notación simbólica, así como de la concepción objeto de conjunto que, como se observa en los resultados, no ha sido construida por estos alumnos. Por otro lado, es requerido un esquema de lógica para encapsular el concepto del supremo y lograr la concepción objeto de este. Los resultados muestran que los alumnos no han construido dicha concepción proceso, pues se obtuvieron solo seis respuestas correctas en el caso concreto de demostrar que $5 = Sup\ [-1,5]$. Estas respuestas correctas correspondieron a los estudiantes del grupo B que, como se mencionó, se encontraban cursando la materia de Cálculo Diferencial. Estos seis estudiantes mostraron una concepción proceso en la construcción del concepto supremo pero, al no contar con un esquema de lógica, no mostraron la encapsulación del proceso del supremo en un objeto. Lo anterior se concluye de la segunda parte de la demostración de la pregunta 6, en la que estos alumnos cometieron errores en el planteamiento de la demostración o hicieron suposiciones incorrectas o contradictorias.

La demostración de que cierto número concreto cumple con la parte 2 de la definición, requiere que el estudiante sea capaz de realizar esta acción con diferentes tipos de conjuntos, hasta interiorizar este proceso y poder demostrar que cierto número abstracto es el supremo de un conjunto arbitrario, dado en forma general. Finalmente, los datos obtenidos nos muestran que la construcción de este concepto debe pasar por la construcción de todos los conceptos involucrados, coordinados con los esquemas de lógica y de conjuntos y relacionados mediante la estructura lógica que dan las demostraciones, tal y como lo habíamos supuesto en la descomposición genética que presentamos.

La validación de la descomposición genética, así como el análisis de las dificultades de los alumnos en términos de las construcciones que son capaces de hacer, nos ha permitido proponer una secuencia de actividades, basada en la descomposición genética, que brinde a los estudiantes la oportunidad de hacer las construcciones necesarias para entender el concepto del supremo como objeto. Tal secuencia se puede conocer en Acevedo (2011).

Datos de las autoras

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
lhernan@fcfm.buap.mx

María Trigueros Gaisman
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM),
trigue@itam.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, C. (2011). Una secuencia didáctica para el concepto del Supremo basada en la teoría APOE. Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Aldana, E. (2011). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. Tesis Doctoral. Salamanca. Universidad de Salamanca.

Angoa, J., Contreras, A., Ibarra, M., Linares, R., Martínez, A. (2004). *Matemáticas Elementales.* Fomento Editorial Universitario, BUAP, México.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, pp. 1-32.

Apostol, T., M., (1982). *Calculus*, Vol. 1, Editorial Reverté, Barcelona, España.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En Steffe, L. P. (Ed.). *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, pp. 160-202. Nueva York, Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1991a). "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking". En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

Dubinsky, E. (1996). "Aplicación de la perspectiva piageteana a la educación matemática universitaria". En *Revista de Educación Matemática*, vol. 8, pp. 31-36.

Hasser, N., B., (1988). *Análisis Matemático* I, Vol. 1, Trillas, México.
Maldonado, G., (2012). Factores que influyen en la reprobación del curso de Matemáticas Básicas de la FCFM, BUAP. Tesis de licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México.
Martin, W., Loch, S., Cooley, L., Dexter, S., and Vidakovic, D. (2010). Integrating learning theories and application-based modules in teaching linear algebra. En *Journal of Linear Algebra and its Applications* 432, 2089–2099
Martinez-Planell, R. y Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. En *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-012-9408-8. Versión impresa por aparecer.
Piaget, J. y R. García (1996). *Psicogénesis e historia de la ciencia,* Siglo Veintiuno Editores. México.
Roa-Fuentes S. (2012). El infinito: Una mirada desde la teoría APOE. *Memorias del Primer Coloquio de Estudiantes de Doctorado*. CINVESTAV-México, v.1 p. 363-373
Salgado, H. y Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática*, 21(1), 91-117. Santillana. México.
Sánchez-Matamoros G., G., García B., M. y LLinares C. S. (2006). El Desarrollo del esquema de derivada. En *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
Spivak, M., (1992). *Cálculo Infinitesimal*, Segunda edición, Reverté, Barcelona, España.
Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. y Simpson, A. (2000). What is the object of the Encapsulation of a Process? En *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), pp. 223-241.
Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. En *Educación Matemática*, vol. 17, No. 1, pp. 5-31. Santillana. México.

Análisis de situaciones de aula en el contexto de la práctica de investigación: un punto de vista semiótico

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla

Resumen: Un gran número de investigaciones en didáctica de la matemática presentan análisis de situaciones de aula que son resultado de prácticas de investigación o de experimentación generalmente ligadas a la negociación de significados (entre el docente que hace referencia al saber institucional y el estudiante). No siempre el objetivo de la investigación está relacionado con la semiótica directa o conscientemente; pero, aunque esto no sea así, siempre es posible proponer la semiótica como lente para interpretar los resultados, como medio para una lectura común. En este artículo quisimos recoger resultados de dos investigaciones experimentales, diversas entre sí (hechas con estudiantes de diferentes niveles escolares) e interpretarlas desde un punto de vista semiótico. Realizamos dichas investigaciones entre 1996 y el 1999; ya tienen tiempo y son muy diferentes entre ellas, pero aquí las reunimos porque nos interesa analizar sus resultados desde una perspectiva semiótica. Las investigaciones tienen como base los siguientes temas: dominio de los instrumentos algebraicos para calcular el volumen de una pirámide ideal *vs* el fracaso en el cálculo del volumen de una pirámide real (8° año de escolaridad); análisis del dominio de diversas representaciones semióticas del concepto de relación binaria en un ejemplo particular (diversos niveles de escolaridad). De cada una de estas investigaciones se da una breve descripción, y se remite al lector a la bibliografía que acompaña cada estudio, por si es el caso que desee conocer en profundidad la investigación a la cual se hace referencia.

Palabras clave: situaciones de aula, práctica investigativa, representaciones semióticas de los objetos matemáticos, dualidad significante /significado

Analysis of classroom's situations in the context of the research's practice: a semiotic point of view

Abstract: Much research in mathematics education presents analyses of classroom situations that are the result of research or experimental praxis generally linked to negotiation of meaning between the teacher, who refers to institutional knowledge, and the student. The focus of this research is not always related directly or consciously to semiotics, but even when this does not happen it is always possible to propose semiotics as a perspective for interpreting the research or as a means to achieving a common reading. Our intention is to take the results of two different experimental research projects, each one conducted with students from different school levels, and interpret them from a semiotic point of view. These researches were conducted between 1996 and 1999 and have very different characteristics, but they can be linked together by analyzing them from a semiotic point of view. They are based on the following topics: the domain of algebraic tools for calculating the volume of an ideal pyramid *vs.* the failure in calculating the volume of a real concrete pyramid (8th year of schooling); analysis of the domain of various semiotic representations of the concept of binary relation in a particular example (different levels of schooling). For each of these examples, we propose a brief description together with bibliographical references that will enable the reader who wishes to study in more depth the research in question.

Keywords: classroom situation, research practice, semiotic representations of mathematical objects, duality signifier/signified

Fecha de recepción: 23 de enero de 2012. Fecha de aceptación: 3 de diciembre de 2012

PREMISA

El objetivo de este texto es presentar investigaciones antiguas que ya fueron objeto de investigación, pero con ojos más modernos, con los instrumentos analíticos y críticos que la semiótica ofrece hoy en día. Por lo tanto, primero se presentan brevemente las investigaciones y sus resultados, y después se comentan bajo una visión semiótica, como dice el título. El foco común de los análisis son las relaciones entre significantes (registros de representación) y significados.

El volumen de una pirámide

Preliminares relativos a la investigación

En el trabajo de A. Cassani, C. Deleonardi, B. D'Amore y G. Girotti (D'Amore siendo titular del curso de Didáctica de la Matemática, y los otros tres autores estudiantes del curso) (Cassani *et al.*, 1996) se consideran como problemas rutinarios los ejercicios en los cuales se debe calcular el volumen de una pirámide recta de base cuadrada, cuando se dan las medidas del lado de la base y de la arista lateral. El estudiante aplica un procedimiento que conoce muy bien, usando dos veces el teorema de Pitágoras. Son ejercicios rutinarios para un curso de 3° de educación media en Italia (grado 8°, 13 años), que se resuelven, generalmente, al final del año escolar (en el mes de mayo, según el calendario italiano).[1] La difusión de este ejercicio en las escuelas es tal, que parece razonable hacer la hipótesis de que un alto porcentaje de estudiantes lo pueden resolver correctamente.

Los investigadores, entre los cuales estaba entonces uno de los autores del presente artículo se preguntaron:

1. ¿Cuál será la actitud del estudiante frente a una situación decididamente poco común, en la cual se proporciona una pirámide real, y no un simple dibujo, para medir el volumen de dicha pirámide (modelo concreto)?
2. ¿Se tendrá, por parte de los estudiantes, un comportamiento dirigido principalmente a usar el conocimiento formal (la fórmula que se usó en el desarrollo del ejercicio escrito) que requiere para resolver el problema, cuando frente a sí tiene el objeto concreto o, por el contrario, se hará evidente el contraste entre la aplicación de una fórmula en condiciones rutinarias y la aplicación de la misma en una situación del todo insólita?
3. ¿Qué diferencia se presenta en las respuestas, si el problema con la pirámide concreta se propone inmediatamente después de la resolución del problema formal, o si se propone sin ninguna referencia explícita a este tipo de problema formal?
4. ¿Qué diferencia se presenta en las respuestas si se da al estudiante solo la pirámide (modelo concreto) con la tarea de medir el volumen, o si se le proporciona dicha pirámide junto con un instrumento de medida como una regla? En este caso, ¿se dirige la atención del estudiante a la medición de algo si se da el instrumento?

Hipótesis de investigación

Las hipótesis de la investigación, que se presentan enseguida, fueron las siguientes.

[1] El sistema escolar italiano prevé: cinco años de escuela primaria (6-11 años), tres años de escuela media (11-14 años) y cinco años de escuela superior (14-19 años).

Hipótesis 1: Se tomó como hipótesis de base que los estudiantes de este nivel escolar sabían resolver el problema rutinario para este momento particular del año escolar, pero dicha hipótesis se debía verificar. Si se verificaba, serían interesantes las siguientes hipótesis.

Hipótesis 2: Se supone un fuerte descenso, en porcentaje, de los estudiantes que resuelven el problema concreto respecto a los que lo resuelven de forma rutinaria. Además, si el problema con la pirámide concreta se propone después de la resolución del problema formal, aumentará probablemente el porcentaje de estudiantes que tenderán a repetir la misma estrategia de solución.

Hipótesis 3: Parecería plausible considerar que el contacto con la pirámide real podría haber hecho pensar en sistemas de cálculo del volumen que no requiriesen el uso de las medidas de las aristas (por ejemplo, la inmersión en un cilindro graduado lleno de agua), mientras que proporcionar explícitamente una regla orientaría a reconducir el problema sobre la pirámide real, a lo formal y rutinario.

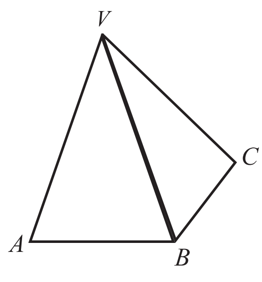
Metodología de la investigación

La metodología fue la que se expone enseguida.

Para llevar a cabo la investigación, se hicieron pruebas experimentales durante tres años (1992, 1993, 1994), en clases de 3º de educación media (8° grado) en Bologna (norte de Italia) y en localidades cercanas, con una población de más de 200 estudiantes. Trabajamos siempre con los alumnos en la última semana del año lectivo, momento en el cual, según varios docentes de la escuela media, el ejercicio propuesto por nosotros sería realmente (o debería ser) considerado rutinario.

Se eligió el siguiente ejercicio sugerido por los docentes y presente en los libros de texto:

> Se da una pirámide recta de base cuadrangular regular con vértice V y base ABCD.
> Calcula el volumen de esta pirámide.



$\overline{AB} = 10cm$
$\overline{AV} = 20cm$

El ejercicio se escribió en una hoja tamaño carta, se fotocopió y se entregó una copia a cada uno de los estudiantes elegidos para realizar el test de resolución escrita.

Año	*1992*	*1993*	*1994*
Nº alumnos	N=87	N=93	N=15
Instrumento *Características*	Test + unas entrevistas	68 solo test 10 test+entrevista(*) 15 solo entrevista(*)	Solo entrevista 5 pirámide maciza 5 esqueleto 5 las dos (**)
Hipótesis	1	Verificar los resultados de la hipótesis 1 del año anterior. Verificar la hipótesis 2	Verificar la hipótesis 3.

Experimento 1993. (*) 25 entrevistas eligiendo de forma aleatoria cinco alumnos de cada una de cinco clases diferentes: de manera aleatoria, a 15 se les dan la dos pirámides, diez solo pirámide maciza y luego se les muestra el esqueleto. A cada uno de los 25 se proporcionó una regla, con la tarea de medir el volumen de una de las dos pirámides, la que eligiesen (o de la pirámide maciza). Los estudiantes disponían, en todo momento, de hojas en blanco y de un bolígrafo. Los 15 entrevistados que no realizaron el test escrito, no conocían el contenido del mismo; los diez entrevistados, que sí lo habían realizado, fueron entrevistados apenas terminado el test escrito.

Experimento 1994. (**) Los 15 entrevistados pertenecían a tres clases distintas (cinco por clase) elegidos de forma aleatoria. No se proporcionaba nada más de forma explícita y la consigna era idéntica: "Encuentra el volumen de esta pirámide" (en el caso de una sola), o bien: "Encuentra el volumen de una de estas pirámides, la que tú elijas" (en el caso de disponer de las dos).

Resultados de la investigación

Los resultados se comentan a continuación.

Recordemos que en 1992 realizamos el test escrito solo para verificar si los estudiantes sabían resolver el problema rutinario.

Encontramos lo siguiente:

<table>
<tr><th></th><th>Prueba correcta</th><th>Prueba sustancialmente correcta (solo errores de cálculo o de aproximación)</th><th>Prueba no terminada o confusa; pero indica que el alumno sabe lo que tiene que hacer</th><th>Prueba non aceptable y con errores geométricos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1992
(test escrito a n=87 estudiantes)</td><td>53</td><td>20</td><td>6</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td colspan="3">91%</td></tr>
<tr><td>1993
(test escrito a n=78 estudiantes)</td><td colspan="3">77% (*)</td><td></td></tr>
</table>

(*) La explicación del resultado más bajo para nosotros fue la siguiente: la prueba del año 1992 se realizó en la ciudad de Bologna, mientras que la de 1993 se llevó a cabo, principalmente, en las escuelas de la periferia o en centros no urbanos. Está ampliamente demostrado que los resultados de la escolaridad obligatoria en los centros urbanos es superior a la de las zonas rurales, en todos los países.

Con referencia a la Hipótesis 2, veamos los resultados que se obtuvieron con los 25 estudiantes que se entrevistaron en 1993.

Estudiantes que miden la arista de la base y la altura de la pirámide maciza, apoyando la regla sobre la mesa en la cual estaba la pirámide y manteniéndola perpendicular, trazando una paralela imaginaria al plano de la base, desde el vértice de la pirámide a la regla: 2; [uno disponía de la pirámide maciza únicamente y el otro disponía de las dos pirámides; el primero había resuelto el problema de rutina con anterioridad y el otro no]	Estudiantes que miden la arista de la base y otro segmento: 23 (*)

(*) De estos 23:

Miden además la arista lateral	*Miden además la apotema aproximando la regla a una cara de la pirámide (independientemente de que se trate de la maciza o del esqueleto)*
6	17
De estos 6: *1: usa las medidas para reconducir su estrategia al caso del problema formal, como declara de forma explícita*	De estos 17: 9: proceden después correctamente, aplicando el teorema de Pitágoras una sola vez a las medidas de la mitad del lado de la base y a la apotema medida (por tanto, desarrollan un procedimiento de rutina conocido)

Miden además la arista lateral	*Miden además la apotema aproximando la regla a una cara de la pirámide (independientemente de que se trate de la maciza o del esqueleto)*
5: no completan el procedimiento	8: proceden como si la apotema encontrada fuese la altura y, por tanto, proponen la fórmula: área de la base por la altura (que en realidad es la apotema) dividido por 3 [de estos 8, solo 3 escriben su procedimiento sobre el papel]

El comportamiento de los estudiantes es variopinto y, por tanto, tendríamos que presentar de forma más detallada otros casos que observamos. Pero, por el fin de este trabajo, no entramos en detalles que el lector interesado puede ver en el texto original (Cassani *et al.*, 1996).

En lo que respecta a la Hipótesis 3, veamos los resultados que se obtuvieron con los estudiantes entrevistados en 1994.

De los 15 estudiantes, *ninguno* propuso estrategias para calcular el volumen de la pirámide que no implicasen la medida de alguna arista; en particular, ninguno pensó en sumergir la pirámide en un cilindro graduado lleno de agua o cosas similares, ni siquiera en el caso de la pirámide maciza.

Además, la posibilidad de usar la regla como instrumento para medir algo con lo cual poder evaluar el volumen aparece solo en cinco de los 15 casos; en nueve casos la regla es aceptada tras una propuesta explícita del entrevistador; en un solo caso el instrumento se considera inútil ("Pero esta, no sé, no sirve para nada"), incluso después de haberlo propuesto el entrevistador.

Resumamos las diferencias encontradas entre los 40 entrevistados (entre 1993 y 1994) bajo otro punto de vista que será interesante más adelante.

Diseño experimento entrevistados 1993 y 1994 (n= 25+15 =40)

	Realizando el test previamente	*Sin realizar el test previamente*
Con regla	10 Caso A	15 Caso B
Sin regla		15 Caso C

Discusión de los resultados de la investigación

Podemos ahora discutir los resultados de las investigaciones de los años 1993 y 1994.

Hipótesis 1. Con relación a la Hipótesis 1, los resultados la confirmaron plenamente; esto hace interesante la discusión de la Hipótesis 2.

Hipótesis 2. La Hipótesis 2 también se confirmó. De los diez estudiantes entrevistados que se sometieron al test escrito [caso A], solo uno replica el problema de rutina. La realización anterior del test no lleva a repetir la misma estrategia frente al problema concreto. Si se tiene en cuenta que la entrevista se realizó poco después de la prueba escrita, se corroboraba que, para muchos estudiantes, no hay relación alguna entre la prueba formal "de rutina" y la situación concreta "poco común".

Por otra parte, se confirmó el fuerte descenso en el porcentaje de estudiantes capaces de resolver el problema concreto; lo hicieron solo diez de los 25 estudiantes (40%), uno replicando el ejercicio escrito y nueve usando otra estrategia (la que usa la arista de la base y la apotema y, por tanto, una sola vez el teorema de Pitágoras). Estos nueve estudiantes pertenecen a los dos casos A y B, indistintamente.

Confirmamos que, porcentualmente, no aparece en absoluto relevante la opción de reutilizar el procedimiento del test escrito. Sin embargo, se debe decir que seis de los diez estudiantes usaron la hoja y el bolígrafo intentando, cuando menos, rehacer (inspirándose en la pirámide concreta) un dibujo como el del test escrito, aunque con gran dificultad.

Hacemos notar que la elección entre la pirámide maciza o vacía no modifica las respuestas de los estudiantes, al menos en lo concerniente a la Hipótesis 2.

Destacamos que de los 15 estudiantes a quienes se les dio la posibilidad de elegir entre la pirámide maciza o el esqueleto, 11 eligieron la maciza y cuatro la vacía; charlas informales con ellos nos inducen a pensar que la elección fue debida, sobre todo, a un hecho estético: la pirámide de madera está bien hecha, es elegante, mientras que la de metal tiene la punta ligeramente mocha. La elección de la maciza parece contrastar con un hecho observado marginalmente: de los 78 estudiantes sometidos al test escrito en el año 1993, 68 dibujaron las aristas no visibles en el dibujo que les propusimos.

Hipótesis 3. En cuanto a la Hipótesis 3, repetimos que de los 15 estudiantes sometidos a la prueba, ninguno propuso metodologías de evaluación del volumen distintas a la de la medida de las aristas. Por tanto nuestra Hipótesis 3 aparece totalmente desmentida.

En el curso de las entrevistas se presentaron casos particulares de interés; aquí omitimos la descripción de estos puntos, remitiendo a los interesados al texto integral de la investigación (Cassani *et al.*, 1996).

Respuestas a las preguntas planteadas

Es indudable que, salir de las situaciones de rutina para introducirse en situaciones "poco comunes", alejándose las cláusulas adquiridas por contrato didáctico, lleva al estudiante a una actitud de incertidumbre.

Por otra parte, un procedimiento rutinario parece desligado de la práctica, dado que son muy pocos los estudiantes capaces de conectar el problema concreto con el ejercicio rutinario, incluso si este último ha sido resuelto correctamente.

Parece no existir una diferencia significativa entre el hecho de que el problema concreto, en este caso con la pirámide, sea propuesto, o no, a continuación de un test escrito sobre el mismo tema.

La incertidumbre causada por el caso real es evidentemente la connotación más fuerte de toda la prueba.

La presentación de la pirámide concreta junto con un instrumento como la regla, da resultados diferentes al caso en el cual la pirámide se presenta sola, sin dicho instrumento. La presencia de la regla impulsa (no siempre de inmediato) a los estudiantes a medir alguna arista (muy difundida y casi espontánea la medida de la arista básica, como hemos visto). La ausencia de la regla deja sorprendidos a gran parte de los estudiantes; solo la sucesiva sugerencia por parte del entrevistador, de pedir cualquier cosa para actuar, los lleva a aceptar hacer uso de este instrumento, pero con dificultad. Algunos testimonios manifiestan que la pirámide real queda fuera de las costumbres didácticas (Giada declara: "La pirámide la hemos encontrado en el libro de geometría y luego hemos aprendido las fórmulas"). Otros testimonios muestran que algún estudiante se cree obligado a reconducir la situación a un caso formal, "de rutina" (Carmelo usa la hoja y el lápiz para dibujar una pirámide, después pide la regla y mide la altura de la pirámide dibujada; pero a continuación parece expresar la duda de que esa altura podría no ser la misma de la pirámide real propuesta por nosotros).

Hay muchos estudiantes que, incluso disponiendo de la regla y de la pirámide, no saben resolver el problema real (Mohamed establece la hipótesis de que "la regla no sirve para nada, ya que, según él, "los datos *se deben* dar al azar").

También es posible la aparición de artificios ("trucos") orientados a encontrar la solución: Enrico encastra la pirámide maciza dentro de la otra y declara que, conocido el volumen de una, se conocería el de la otra.

Emergen además, de forma dramática, errores de todo tipo. Federica, aun encontrándose frente a una pirámide maciza, habla de las "dos" bases de la pirámide; otros hacen referencia a fórmulas no adquiridas en la escuela que evocan solo vagamente la fórmula del volumen de la pirámide, situación esta última que no se presentó, en ningún caso, en el test escrito "de rutina", como vimos precedentemente.

¿Por qué esta notable dificultad para los estudiantes? En nuestra opinión, las causas son por lo menos las siguientes.

El problema no rutinario. Algunas cláusulas del contrato didáctico establecen que el trabajo en la escuela debe ser repetitivo; un elemento novedoso introducido en la rutina escolar desestabiliza la relación didáctica; el ajuste necesario no se puede hacer de un día para el otro, pues toma tiempo (Véanse las célebres observaciones de Wertheimer a este propósito en el clásico Wertheimer, 1959, y el parágrafo 13.3. de D'Amore, 1996/2011). Sería como introducir un elemento nuevo entre la ingeniería didáctica o en el *milieu* y esto cambia la conformación del triángulo de la didáctica en unos de sus elementos.

La quimera del cálculo exacto. El exceso de uso de cifras después de la coma en los ejercicios y la escasa presencia en la escuela de una sana actividad de aproximación induce la creencia, tal vez inducida explícitamente, de que en matemática se debe siempre operar "de forma exacta" (cualquiera que sea el significado de esta frase). Medir directamente la altura, sabiendo que esto producirá medidas no exactas sino aproximadas, incomoda a la mayor parte de los estudiantes (incluso si esta actitud no se muestra a menudo de forma consciente y explícita).

La falta de experiencia con material concreto. Consideramos útil, en general, salir de la rutina proponiendo problemas que se salgan de lo habitual y mejor aún si están ligados a la experiencia concreta. El caso del "volumen de la pirámide", examinado aquí, no es más que un ejemplo, pero ya que se ha trabajado sobre esto, nos parece útil recomendar no menospreciar los problemas concretos. Estamos de acuerdo con Fischbein (1993) y Fisher (1978) sobre el peligro que se corre al transformar toda la geometría en modelos concretos (véase también Mariotti, 1989, 1991, 1992a y b), pero de esto a hacer un menosprecio total, nos parece que hay una gran diferencia.

Un punto de vista semiótico

¿Qué es para el estudiante de 8° grado una pirámide? Existe una contradicción evidente y explícita. Si se habla de vida vivida, de historia, de viajes, entonces la pirámide es una forma arquitectónica que remite a Egipto, a Chichén Itzá, o al museo Louvre. Pero si se habla de matemáticas, en Italia la pirámide como objeto forma parte de la modelización matemática hasta 5° de primaria y después desaparece; reaparece en 8° con representaciones esquemáticas de diseños de pirámides vistas en perspectiva y en forma estereotipada estándar, aquella de los ejercicios que se encuentran en manuales o que el docente propone como tarea para verificar sustancialmente dos cosas:

- los conocimientos acerca de algunas nociones relativas al objeto matemático pirámide;
- el dominio de la aplicación del teorema de Pitágoras.

Existe un salto semiótico fuerte que nos lleva a pensar en la oposición entre realidad, modelo concreto, representación figural y objeto matemático que, si ya está construido, podría estar a la base; y, todo esto, como resultado que emerge de la práctica escolar.

En la situación de aula, en función del contrato didáctico y por el continuo uso de registros semióticos que, a veces, operan uno dentro del otro, paradójicamente, la propuesta de un modelo concreto (pirámide maciza de madera o pirámide "esqueletada" de metal), al contrario de dar tranquilidad por la posibilidad que lleva a la realidad, crea incertidumbre por la aparente contradicción respecto a lo habitual.

Nosotros consideramos que la representación semiótica figural de la pirámide en perspectiva debería ser la esquematización de la realidad, no ser *la* realidad; porque en tal caso, hay algo que no está bien. Tanto la pirámide (modelo concreto) como el diseño en perspectiva no son sino representaciones semióticas del objeto matemático "pirámide"; tanto el modelo de madera como el de metal deberían ser interpretados como la referencia concreta a la cual el dibujo que aparece en el texto escrito de la tarea inicial hace alusión. Si así no es, significa, según nuestra opinión, que en la cadena significativa o representativa algo falló.

Aprender a comparar las diferentes representaciones de una relación binaria

Preliminares a la investigación

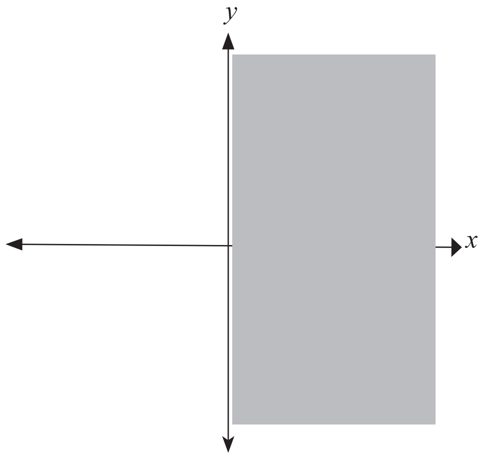
En D'Amore (1998) se afronta el tema del aprendizaje de diferentes representaciones de una misma relación binaria, para discutir cómo el sujeto establece relaciones entre diversas representaciones.

Pero esta investigación necesita de consideraciones preliminares.

En su trabajo clásico, Raymond Duval (1993) deja claro que, a menudo en matemática, se usan distintos significantes para referirse a un mismo significado.

Ejemplo 1.[2] Los tres significantes diferentes: 0,5; 1/2; 5×10^{-1} representan el mismo objeto. Son, pues, significantes distintos de un mismo significado, asumido como objeto y, por tanto, denominado *significado-objeto*.

Ejemplo 2. La desigualdad $x > 0$ en R×R y la figura:



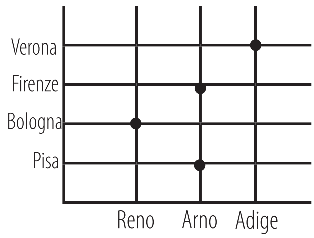
son dos significantes distintos del mismo significado-objeto [el objeto en cuestión es el semiplano (abierto)[3] de las abscisas (x) positivas]. Por tanto, en el trabajo citado, el autor estudia el caso de distintos significantes S1, S2, ..., Sn de un mismo significado S, en el caso en el cual S es un determinado objeto matemático.

Siguiendo las ideas de Duval, se puede plantear el caso en el cual el objeto a estudiar sea una relación binaria entre conjuntos; esta relación se puede describir recurriendo a distintos registros de representación dando lugar a un caso análogo al precedente. Se trata, pues, de distintos significantes de un mismo significado, pero en el caso específico en el cual este último es la expresión de una relación binaria que se llamará, en lo que sigue, *objeto relacional*.

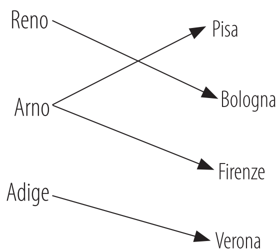
---

[2] Los dos ejemplos siguientes han sido extraídos de (Duval, 1993).
[3] En tal sentido, la figura es ambigua y por esto es necesario especificar.

Ejemplo 1.



1



2

	Reno	Arno	Adige
Verona			X
Firenze		X	
Bologna	X		
Pisa		X	

3

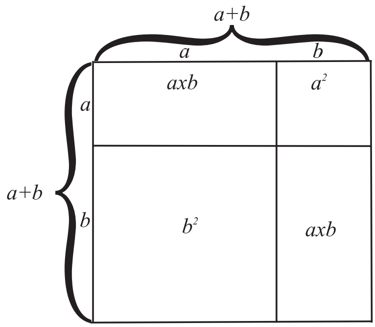
El Reno es el río de Bologna,
el Arno es el río de Firenze y de Pisa,
el Adige es el río de Verona.

El mismo objeto relacional se expresa mediante cuatro registros de representación distintos que usualmente se denominan: 1. Cartesiano, 2. de Euler-Venn, 3. de Carroll, 4. Proposicional.

Como se ve, no nos interesa que el *objeto en discusión* sea matemático [aquí el objeto en discusión podría remitir a la geografía: "ríos que pasan por ciudades"]; lo que es importante para nosotros es la relación entre entes: es el concepto mismo de relación el que tiene naturaleza matemática.

Ejemplo 2. Consideremos dos representaciones:

- la escritura algebraica: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
- el área de la siguiente figura:



pensada como la descripción gráfica de una relación entre el cuadrado cuyo lado mide $a+b$ y las siguientes subdivisiones de su superficie: el cuadrado cuyo lado mide a, el cuadrado cuyo lado mide b y los dos rectángulos cuyos lados miden a y b.

Es evidente que se trata de dos registros de representación distintos, uno extraído del lenguaje algebraico, el otro del lenguaje figural (geométrico-sintético) de un mismo objeto relacional, esto es, de la relación existente entre el área del cuadrado de lado $a+b$ y la de los cuadrados de lados a y b, además de la del rectángulo de lados a y b.[4]

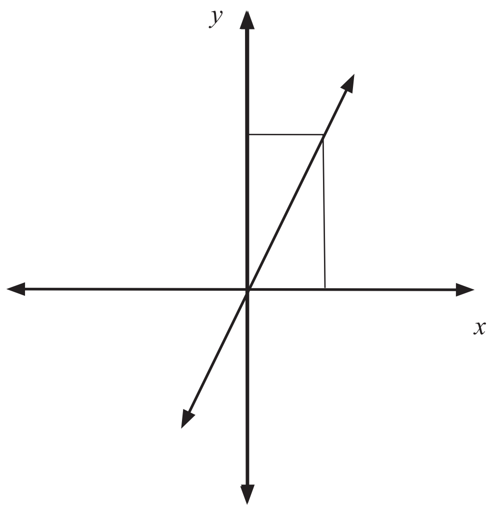
Ejemplo 3. Consideremos la relación entre números reales que asocia a cada número su doble; el objeto relacional (significado) es dicha relación en R^2. Puede ser representada acudiendo a distintos registros de representación, por ejemplo, a los siguientes:
registro: lenguaje algebraico: y = 2x con x• R, y y• R pensado no como objeto-recta, sino como relación entre números reales

[4] **Véase (Bagni, 1996) para ejemplos de este tipo.**

x	2x
. . .	. . .
-2	-4
-1	-2
0	0
1/2	1
1	2
2	4
. . .	. . .

pensada a propósito como una tabla que evidencia la relación entre números; obviamente la representación es parcial y sirve sólo como indicación;

registro: cartesiano



pensado como una gráfica que ilustra la relación entre números, tales que uno es el doble del otro;
registro: proposicional: La relación en R entre *x* e *y* es tal que *y* es el doble de *x* (expresión proposicional).

Ejemplos de este tipo hay muchos (disponemos de una colección bastante consistente, resultado de la práctica escolar, en todos los niveles escolares, *y de los libros de texto).*

El problema de investigación

Es posible plantear varias preguntas sobre este tema.

¿Es posible considerar como *equisignificantes* los distintos significantes de un mismo significado, caso en el cual tal significado sea un objeto relacional? Es decir: ¿Es *neutra* la elección de registro representativo?

¿Cada uno de los significantes proporciona la misma cantidad y tipología de información?

¿Es "fácil" el paso de un registro a otro? Si llamamos a este paso "traducción" entre expresiones A y B, ¿es posible pensar que A y B son consideradas semánticamente equivalentes?

Las preguntas anteriores se pueden plantear en todos los niveles escolares, pero lo que nos interesa aquí es plantear la cuestión en términos de epistemología del aprendizaje y, precisamente, en el ámbito de la comunicación didáctica: ¿son equivalentes los instrumentos lingüísticos y representativos utilizados en la comunicación en el aula?

Transformamos pues las más que lícitas (y, a nuestro parecer, necesarias) preguntas precedentes en peculiares problemáticas de carácter didáctico.

¿Cuál registro representativo ve el alumno de forma inmediata? Por ejemplo, considerando solo dos categorías, la algebraica y la figural,[5] ¿cuál es privilegiada de *forma espontánea*? ¿La respuesta a esta pregunta depende del nivel escolar y, por tanto, de la edad?

¿Hasta qué punto el estudiante está dispuesto a admitir que se trata de registros representativos distintos (y por tanto de significantes distintos) de *un mismo* significado-objeto relacional? ¿"Ve" el estudiante tal *objeto* relacional como objeto o lo considera solo como relación entre conjuntos? ¿Logra *traducir* de un

[5] Kaldrimidou (1987) y Bagni (1996), sobre el tema de la visualización, muestran que el asunto es más bien complejo.

registro a otro? ¿Con qué facilidad? ¿En qué sentido es más fácil tal traducción? ¿Por qué? ¿Cuáles son las causas de eventuales dificultades?

En todo esto, ¿desempeñan algún papel las cláusulas del contrato didáctico? ¿Cuál? Por ejemplo, ¿es lícito decir algo en matemática "solo con palabras"?; es decir, ¿usar como registro representativo el proposicional?

¿Qué obstáculos intervienen sobre la capacidad de reconocer que varios significantes relacionales corresponden, sin embargo, al mismo significado-objeto relacional? Por ejemplo, ¿obstáculos externos (de naturaleza extra-relacional) u obstáculos internos (ligados, pues, a casos aislados)? Y ¿cómo se manifiestan? ¿Cómo se dan cuenta de esto los estudiantes?

¿No podría ser que la relación se viese más como instrumento que como objeto?[6]

Las preguntas podrían continuar; es obvio que el objeto de estudio diseñado precedentemente es muy amplio y complejo; supone la intervención de distintas competencias y exige, por tanto, muchas pruebas empíricas y análisis, no banales, de los resultados.

En este trabajo, nos limitamos a un simple ejemplo que describiremos en detalle.

Limitación del campo de investigación

Al elegir el *ejemplo* para realizar la investigación, nos vimos obligados a limitar el campo.

Preferimos evitar la presencia de variables relacionales, es decir símbolos como R en escrituras del tipo *xRy*. Somos conscientes que la presencia de este tipo de escritura modificaría completamente el sentido y los resultados de la experiencia.

Evitamos la presencia de variables individuales, es decir símbolos como x o y en la escritura precedente, fijando simplemente dos conjuntos de objetos a los cuales referirse explícitamente.

Estas decisiones redujeron el peso de la investigación, en la primera fase. En otras palabras, nos limitamos a un ejemplo particular que expresa una cierta relación muy concreta entre dos conjuntos dados; nada impide, a otros investigadores o a nosotros mismos, realizar otras pruebas en casos cada vez más generales. Consideramos que debíamos iniciar con el caso más elemental, de forma tal que nuestros estudiantes lo pudiesen entender.

[6] Una clara referencia a Douady (1984/86).

Consideramos un mismo significado que fuese un ejemplo clásico de objeto relacional para la escuela obligatoria, pero expresado en cuatro diferentes registros de representación [r.r.] (es decir, a través de cuatro significantes distintos):

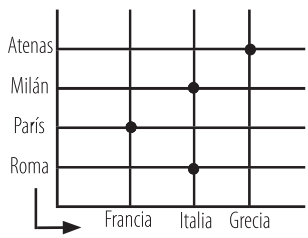
r.r.: de Carroll (a continuación lo llamaremos: 1)
r.r.: cartesiano (2)
r.r.: de Euler-Venn o de flechas o sagital (3)
r.r.: proposicional (4).

Está en

(1)

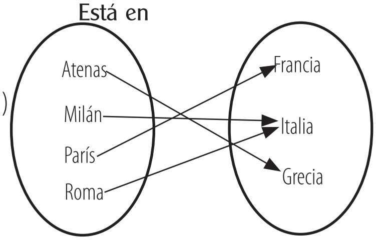
	Grecia	Italia	Francia
Atenas	X		
Milán		X	
París			X
Roma		X	

(2)



Está en

(3)



(4)	Atenas está en Grecia, Milán y Roma están en Italia y París está en Francia

Se tuvo presente que en los libros de texto usados en las clases de primaria (de 1° a 5°, 6-10 años) en las cuales se realizó la experiencia (en Italia), se citaban expresamente y se explicaban los r. r. 1, 2 y 3. En los libros de secundaria de primer grado (de 6° a 8°, 11-13 años) y de los primeros años de secundaria de segundo grado (9° y 10°, 14 – 16 años) se usaban solamente sin una explícita explicación los mismos r.r.; pero tales r.r. no se encontraban repartidos por igual en todo el texto: el r.r. 3 aparecía en diversos ejercicios, mientras los r.r. 1 y 2 aparecían en la parte teórica, no muy usada por los docentes. En los libros de texto de secundaria aparecía solo un ejemplo de r.r. 2, algunos del 3 y no se encontraron r. r. del tipo 1: pero todo esto en la parte teórica y nunca en la parte de ejercicios, la cual siempre es más extensa que la parte teórica (excepto en un ejercicio de lógica en el cual aparecía el r.r. 2; incluso en este caso, la parte de teoría fue descuidada por parte de los docentes, por admisión de ellos mismos.

Respuestas preliminares y metodología

Con el objetivo de iniciar a dar respuestas preliminares a algunas de las preguntas planteadas anteriormente, se propuso a 152 estudiantes de 4° de primaria (9-10 años), 161 de 2° de educación media (7°, 12-13 años) y 98 de educación media superior (9°-11°, 14-16 años) (en total 411 estudiantes), el análisis de los cuatro significantes (cada uno en un folio de formato A5), planteándoles una serie de preguntas (que explicitaremos a continuación).

Primera pregunta (un tanto vaga, formulada solo para verificar si el estudiante se da cuenta, sin sugerencias y por tanto espontáneamente, que se trata de un mismo significado-objeto relacional): "Observa estas cuatro hojas. ¿Qué piensas?". Si el estudiante dice, de forma aceptable y, sobre todo, consciente, que se trata de cuatro significantes distintos de un mismo significado, bien; en caso contrario, se le encaminó en esta dirección con la segunda pregunta: "¿Hay dos que dicen lo mismo?", con la idea de que primero vea dos y luego tres o todos.

Así las cosas, se le plantea la tercera pregunta: "¿Cuál consideras sea el mensaje más claro, significativo, legible, comprensible?".

Solo a los estudiantes de la escuela secundaria,[7] una vez establecido que se trata de cuatro mensajes equisignificantes, se les proponía la cuarta pregunta:

[7] Es decir de la escuela media (11-13 años) o de la escuela secundaria (14-16 años).

"Si tú fueras un maestro de tercero de primaria y quisieras que tus estudiantes entendieran, ¿cuál de las cuatro hojas elegirías?".

La idea clave es que el estudiante no siempre identifica el mensaje más claro para él, con el que piensa que sería el más claro para un niño pequeño (véanse las conclusiones de D'Amore y Sandri, 1996, al respecto). El estudiante revela, de esta forma, la que considera sería la elección más plausible para el estudiante más pequeño o la suya de ese entonces o, de forma oculta, la que él prefiere actualmente, elección que no siempre puede dejar ver directamente a causa de ciertas cláusulas del contrato didáctico que le impiden revelar sus preferencias reales.[8]

Todo este análisis se realizó mediante entrevistas directas (que se registraron y se transcribieron, escuchando y discutiendo en más de una ocasión cada una de las intervenciones). Se pensaba que no se podrían haber recogido opiniones relevantes a través de un simple test escrito, en cuanto que el entrevistador debe, en cierto modo, advertir (más allá de lo que se dice de forma explícita) lo que el estudiante intenta decir.

La prueba se realizó con ocho clases de 4° de primaria (9 años), a diez de 2° de educación media (12 años) y a seis de la media superior (14-6 años).

A continuación, analizamos los resultados de cada uno de los niveles escolares. Después presentaremos el análisis y los comentarios generales.

[8] Para un análisis de las cláusulas de este tipo, véase D'Amore y Sandri, 1996, donde se trata la cuestión de esta investigación detalladamente; y D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy, 2010, donde la idea de contrato didáctico es analizada desde un punto de vista mucho más moderno.

	% Reconoce 4 significantes distintos espontáneamente (con titubeos)	Dos mensajes que digan la misma cosa (significantes reconocidos como iguales)	Registro más fácil de entender por uno mismo (%)				Registro más accesible para los niños de 3º de primaria (%)			
4º Primaria N=152	59 (68)	1 y 2 (*)	1 (45)	2 (2)	3 (13)	4 (40)				
2º Media N=161	60 (69)	1 y 2	1 (20)	2 (0)	3 (12	4 (68)	1 (17)	2 (0)	3 (42)	4 (41)
Secundaria Superior (16-17 años) N=98	74	1 y2 (luego el 1,2 y3)	1 27	2 0	3 29	4 44	1 44	2 0	3 32	4 24

(*) Comentario muy general: "El 4 no tiene nada que ver con la matemática". Se vea 2.5.

Como era obvio, la capacidad de reconocimiento espontáneo de la equivalencia de significado entre 1, 2, 3 y 4 crece con el nivel escolástico pasando, con cierta constancia, de 59% de 4° primaria a 74% de la superior.

Por otra parte, no parece que exista una tendencia o una relación significativa entre la elección del registro más fácil y el nivel escolástico. Las únicas constantes son: los altos valores de elección del registro 4, la "fuerza semiótica" del 1, el gran "vaivén" del 3. La verdadera constante es, sin embargo, el rechazo del 2 (elegido, solamente y paradójicamente, por algún niño de 4° primaria, porque se trata de un ejemplo gráfico examinado hace poco en una clase de aquellas en las que se realizó la prueba). No obstante el registro 2 tenga una gran difusión entre los docentes, la poca fortuna de que ha gozado el diagrama debe hacer reflexionar si se debe usar tanto, sin verificaciones preventivas de una segura comprensión y, eventualmente, de una *didáctica explícita* sobre su uso.

Aquí omitimos la descripción de puntos específicos relacionados con los diferentes niveles escolares, remitiendo a los interesados al texto integral de la investigación (D'Amore, 1998).

Elección de los estudiantes y facilidad de comprensión

Ahora presentamos algunas consideraciones sobre la elección de los estudiantes en relación con el orden de facilidad de comprensión de los diversos registros.

Punto 1. El registro 3 no concita muchas simpatías. ¿Por qué? En un pasado reciente, muchos autores consideraban que era este el registro que proporciona mayor seguridad didáctica, el máximo posible en el campo de la intuición y de la legibilidad. Sobre esto, opinamos que es necesario investigar todavía. A la espera de nuevos resultados, es bueno que el docente sepa cómo están las cosas.

Punto 2. Cada estudiante debe hacer un esfuerzo mayor o menor para interpretar algunos gráficos y un menor esfuerzo para aceptar otros; no todas las posibilidades de elección son idénticas para cada estudiante. Opinamos que es bueno ser conscientes de esto. Parece una buena estrategia introducir, en condiciones de igualdad, todos los registros, invitando a los estudiantes a practicar la *traducción* de un registro al otro.

Punto 3. Es necesario no dar por descontada la idea de significantes diferentes de un mismo significado-objeto relacional. Los esquemas deben ser también objeto de estudio y no mero soporte adquirido, no se sabe cómo, *a priori*. Usar tales esquemas debe ser, por tanto, objeto de un objetivo didáctico específico y explícito.

Punto 4. Aparecen *informaciones parásitas* que la elección de un esquema, en lugar de otro, arrastra y, con frecuencia, el docente no es consciente de esto. Por ejemplo el orden en que aparecen las ciudades, en 1, no se considera casual y por tanto los estudiantes se empeñan en descifrar un mensaje que, sin embargo, no existe como tal en la mente del docente-diseñador de la prueba (alejando al estudiante del mensaje real). Por esto, es importante conocer estos aspectos ligados a la tipología de la representación elegida. En nuestro caso no se ha revelado, pero no se excluye que el orden de las ciudades podría causar, también en 2, *parásitos* análogos.

¿Cómo y con qué criterios los estudiantes más maduros eligen para los más jóvenes?

Consideraremos ahora los resultados de la elección, por parte de los estudiantes de la escuela media y de la escuela superior, del significante más fácil, no para ellos mismos, sino para hipotéticos niños más pequeños.[9]

No se observan analogías explícitas generales de comportamiento en el paso de la facilidad para uno mismo a la hipotética para niños más pequeños. Se pueden recoger solo algunas específicas.

Por ejemplo, la elección de 4 como registro representativo más fácil, para uno mismo, es la más alta, como habíamos ya notado, sea en la escuela media (68%), sea en la superior (41%). En ambos casos, tales porcentajes bajan notablemente, cuando se trata de elegir la facilidad para los niños (se transforman, respectivamente, en 41% y 24%). Hay dos motivos que justificarían todo esto y que, por orden de importancia creciente, serían:

- primero: para los niños pequeños leer un texto y comprenderlo es difícil, mientras que es más fácil para ellos interpretar una figura, un esquema, un dibujo;
- segundo: la 4 parece ser un registro especial, no oportuno, poco matemático, no usual... Justamente por el motivo opuesto, sin embargo, el registro 3 ve aumentar en ambos casos sus porcentajes de elección, en el paso de la facilidad para uno mismo a la de los niños: en la escuela

[9] No tenemos en cuenta los resultados obtenidos con los estudiantes de 16-17 años, por el bajo número de estudiantes entrevistados. Sin embargo, es interesante evidenciar cómo, en esas dos clases, no hay prácticamente diferencias entre la elección de la facilidad para uno mismo y la facilidad para los niños; quizás se deba a la gran diferencia de edad y, por tanto, a que los estudiantes más maduros podrían haber olvidado los problemas, las dificultades y las exigencias de los niños pequeños.

media pasa de 12 a 42%; en la superior de 29 a 32%. El aumento no es uniforme, pero esto podría depender del hecho que solo los niños de la media recuerdan todavía, bastante bien, qué actividades sobre significantes expresados en registros figúrales, como el 3, son muy frecuentes en la escuela primaria.

Hay, además, discrepancias, por ejemplo sobre el registro representativo 1; en la escuela media hay una pequeña disminución en el porcentaje al pasar de la facilidad para uno mismo a la de los estudiantes de la primaria (de 20 a 17%); mientras en la superior se da, incluso, un aumento (de 27 a 44%).

Todo esto podría significar que no hay una verdadera y propia relación definitiva, estable y general entre lo que se cree fácil para uno mismo y lo que se cree fácil para niños pequeños, lo que nos induce a pensar que se necesitarán pruebas posteriores para estudiar esta interesante relación.

Por otra parte, todo este análisis nos lleva a pensar que hay variables de comportamiento escondidas, cuando se pide elegir para otros en general y para los más pequeños en particular; a algunas de estas, de carácter comportamental y lingüístico, nos hemos referido ya en D'Amore y Sandri (1996).

Respuestas a algunas preguntas: un punto de vista semiótico

Los hechos absolutamente evidentes y que responden a algunas de las preguntas planteadas son:

- el registro representativo proposicional se considera *distinto* de los demás, no oportuno, no apto en matemática, y esto por varios motivos: porque no da lugar a hacer algo; porque no contiene números o figuras, elementos típicos de la matemática;
- algunos registros arrastran elementos de confusión (sea en su parte gráfica, sea en la escrita, que parece deba ser interpretada en cualquier caso), informaciones *parásitas* que no se pueden eliminar (si no es haciéndolas explícitas), por ejemplo, ligadas a un orden de escritura que para el adulto es casual, pero que no lo es para el niño;
- por tanto, los registros no son neutros o de igual valor informativo y semántico; no solo representan el objeto relacional deseado sino otra cosa; la traducción, pues, no es posible o, en cualquier caso, no es ni banal ni inmediata;

- la relación entre registros representativos distintos, es decir, entre significantes distintos de un mismo significado-objeto relacional se ve de forma espontánea solo por 59% de los estudiantes de escuela primaria, por 60% de los de media, por 74% de los de superior; los otros 41%, 40% y 26% (respectivamente), pues, no perciben esto; ya que se trata de una praxis habitual, en didáctica, pasar de un significante a otro en el mismo o en otro registro dando todo esto por descontado, es necesario tener en cuenta estos resultados en el plano didáctico, según los distintos niveles escolásticos.

Aparece evidente que no hay mucha diferencia entre trasformaciones de tratamiento o de conversión, lo cual, a distancia de años, nos llevó a estudiar el fenómeno de cambios de sentido que los estudiantes dan a representaciones del mismo objeto que son obtenidas la una de la otra por tratamiento.[10]

CONCLUSIONES

Nosotros usamos continuamente, en la práctica de enseñanza, varios sistemas semióticos que confundimos entre sí y no explicitamos; hoy sabemos que es parte de los aprendizajes deseados que nuestros estudiantes dominen estos sistemas; eso sí, sin caer en el error de modificar el objeto mismo de aprendizaje, el de la matemática (que se sirve de dichas representaciones) por las representaciones en sí mismas. Este fue un grave error de la llamada "matemática moderna", que sustituyó el contenido "matemática" por el contenido "lenguaje de la matemática, sus simbolizaciones, estudio de los símbolos, sus descripciones y su uso". Este es uno de los posibles errores graves de la enseñanza, cuando no hay una consciencia crítica, lo que hace inevitable la primera parte de la paradoja de Duval, llevando al estudiante a confundir el objeto matemático con sus representaciones, haciendo de estas últimas el objetivo del aprendizaje.

Espontáneamente, el estudiante tiende a esto, pero aún más grave será si somos nosotros mismos quienes lo impulsamos. Es algo similar al absurdo de querer reducir a un algoritmo la actividad de resolución de problemas, con la vaga esperanza que esto sea posible o de que con esto se pueda ayudar en el proceso de resolución del mismo (Brousseau y D'Amore, 2008). Si un problema es un problema y no un ejercicio (Fandiño Pinilla, 2010), durante la investiga-

[10] Véase: D'Amore (2006), D'Amore y Fandiño Pinilla (2007 a, b), Radford y D'Amore (2006).

ción estratégica que lleva de la formulación del texto problemático a la respuesta, existe por lo menos un momento de creación (que algunos felizmente llaman "Eureka") indefinible, ingobernable, no reducible a un algoritmo.

Las sugerencias ingenuas del docente van desde las banales e inútiles prácticas normativas (lee con cuidado, debes estar atento, reflexiona) hasta trucos del todo contraproducentes (subraya con rojo los datos numéricos, subraya con verde las palabras claves del texto, subraya con amarillo la pregunta...) que cambian la atención del problema por una serie de convenciones semióticas absurdas que la investigación didáctica denunció.

Agradecimientos

Agradecemos a los tres árbitros anónimos quienes hicieron no solo observaciones correctas, sino de gran interés a una versión precedente de este trabajo; observaciones precisas y que nos ayudaron a dar una mayor legibilidad al texto, así como una versión más concreta. Apreciamos la gran ayuda que nos dieron.

Datos de los autores

Bruno D'Amore
Mescud, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.
bruno.damore@unibo.it
Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia.
bruno.damore@unibo.it

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bagni, G. (2007). *Visualizzazione e didattica della matematica nella scuola secondaria superiore. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 20B, 4, 309-335.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica.* Prefacio de Bruno D'Amore. Bologna. Pitagora.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Brousseau, G. y D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. En: D'Amore, B. y Sbaragli,

F. (eds.) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Actas del XXII Congreso Nacional: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 noviembre 2008. Bologna. Pitagora. 3-14.

Cassani, A., Deleonardi, C., D'Amore, B. y Girotti, G. (1996). Problemi di routine e situazioni "insolite". Il "caso" del volume della piramide. En *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19B, 3, 249-260. [En idioma inglés: Gagatsis, A. y Rogers, L. (Editores) (1996). Didactics and History of Mathematics. En *Erasmus* ICP 95 G 2011/11. Thessaloniki. 73-82. En idioma español: Números. 38, 1999, 21-31].

D'Amore, B. (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. En *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-301. [En versión ampliada en idioma alemán, 1996: Schülerprache beim Lösen matematischer Probleme, En *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, 2, 81-97; y en: Gagatsis, A. y Maier, H. (Editores) (1996). Texte zur Didaktik der Mathematik. Thessaloniki-Regensburg. Erasmus. 105-125].

D'Amore, B. (1996/2011). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Madrid: Editorial Sintesis. [Hay también estudios más recientes: D'Amore, B. y Marazzani, I. (2011). Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica. Progetto. Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Vol. 4. Bologna. Pitagora].

D'Amore, B. (1998). Objetos relacionales y registros representativos distintos: dificultades cognitivas y obstáculos. En *Uno*. 15, 63-76. [En idioma italiano y en idioma inglés, 1998. *L'educazione matematica*. 1, 7-28].

D'Amore, B. (Editor) (1999). Continuità e scuola. Progetto per un percorso formativo unitario dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore. Vol. 3: *La Matematica*. Quaderni di Documentazione dell'Istituto Pedagogico di Bolzano, n. 6. Milán-Bolzano: Junior.

D'Amore, B. (2006a). *Didáctica de la Matemática*. Prefacios de Colette Laborde, Guy Brousseau y Luis Rico. Bogotá. Editorial Magisterio. [En idioma italiano, 1996, Bologna. Pitagora; en idioma portugués, 2007, São Paulo. Livraria da Física, con ulterior prefacio de Ubiratan D'Ambrosio].

D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En, Radford, L. y D'Amore, B. (Editores) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial de la revista *Relime* (Cinvestav, México D. F., México). 177-196.

D'Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Roma, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, marzo 2008. WG5: The evolution of theoretical framework in mathematics education, organizadores: Gilah Leder y Luis Radford. www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008.

D'Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2007b). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. En *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). Vol. 21, n. 1, pagg. 87-92. Proceedings of: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: Mathematics and its Applications. Panel on Didactics of Mathematics. Department of Mathematics, Universidad de Turín. Julio 6, 2006.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. y Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica.* Bologna. Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I. y Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto".* Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna. Archetipolibri.

D'Amore, B. y Sandri, P. (1996). Fa finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. En *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A, 3, 223-246. En español: Revista *EMA*, Investigación e innovación en educación matemática (Bogotá, Colombia). 4, 3, 1999, 207-231.

Douady, R. (1984-86). Jeux de cadres e dialectique outil-objet. Thèse d'Etat, París VII, 1984; publicada (1986) en *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 7, 2, 5-31.

Duval, R. (1993). Registres des Répresentations sémiotiques et Fonctionement cognitif de la Pensée. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.

Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática.* Prefacio de Giorgio Bolondi. Bogotá. Magisterio.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. En *Educational Studies in Mathematics*. 24, 2, 139-162.

Fischer, N. (1978). Visual influence of figure orientation on concept formation in geometry. En, Lesh, R. y Hierkiewicz, D. (Editores) (1978). *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometrical Concepts*. Columbus (Ohio): Eric.

Kaldrimirou, M. (1987). Images mentales et réprésentations en mathématiques chez des mathématiciens et des étudiants en mathématiques. Thèse 3ème cycle, Universidad París VII.

Mariotti, M. A. (1989). Mental images: some problems related to the development of solids. En *Actes de la XIII Conference Int.* PME. París.

Mariotti, M. A. (1991). Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems. En, *Proceedings of the 15th PME Conference*. Asís.

Mariotti, M. A. (1992a). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. Proceedings of the Int. Symposium. Spatial Representation and Spatial Skills. En, *Structural Topology*. 19-18.

Mariotti, M. A. (1992b). Immagini e concetti in geometria. En *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 15(9), 863-885.

Radford, L. y D'Amore, B. (Eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial (en idioma inglés, francés y español) de la revista *Relime* (Cinvestav, México D. F., México). Índice: introducción de Luis Radford, conclusiones de Bruno D'Amore; artículos de: M. Otte; R. Duval; R. Cantoral, R-M. Farfán, J. Lezama, G. Martínez Sierra; L. Radford; Juan D. Godino, V. Font, M. R. Wilhelmi; A. Koukkoufis, J. Williams; B. D'Amore; A. Gagatsis, I. Elia, N. Mousoulides; A. Sáenz-Ludlow; GT. Bagni; F. Arzarello. http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

Sbaragli, S. y Santi, G. (2012). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. En *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. Revista online: http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196. San Paolo, Brasil: Uniban. 4 2, 117-157.

Wertheimer, H. (1959). *Productive thinking*. New York. Harper and Row.

Dificultades de comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios

Hugo Alvarado Martínez y Lidia Retamal Pérez

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio de evaluación de la comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios de ingeniería. Un cuestionario en línea formado por diez ítems de opción múltiple y un problema abierto fue aplicado a un grupo de estudiantes de ingeniería después de haber estudiado las distribuciones muestrales. Los resultados indican que los estudiantes no comprenden el efecto de los parámetros sobre la precisión de aproximación y no son capaces de comparar probabilidades aproximadas y exactas para valores de una variable aleatoria con distribución binomial. Otras dificultades se presentan en las aplicaciones de la corrección por continuidad, determinar el tamaño de muestra y la distribución de la suma de variables aleatorias.

Palabras clave: Teorema central del límite, evaluación, plataforma virtual *Moodle*, estudiantes universitarios.

Difficulties in understanding the central limit theorem in university students

Abstract. We present the results from a research directed to assess students´ understanding of the central limit theorem in engineering undergraduate students. An online questionnaire composed by ten multiple choice items and an open problem was applied to a group of engineering students after they studied the sampling distributions. Results suggest that students do not understand the effect of the parameters on the accuracy of approximation and are not able to compare approximate and exact probabilities for values of a random variable with binomial distribution. Other difficulties are related to applying of the correction for continuity, determining the sample size and the distribution of the sum of random variables.

Keywords: central limit theorem, assessment, Moodle virtual platform, university students.

Fecha de recepción: 8 de marzo de 2012. Fecha de aceptación: 15 de noviembre de 2012

INTRODUCCIÓN

El teorema central del límite, uno de los fundamentales en estadística, estudia el comportamiento de la suma de un gran número de variables aleatorias, asegurando su convergencia hacia una distribución normal en condiciones muy generales. En inferencia estadística muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación. El teorema se relaciona con otros conceptos y procedimientos (población y muestra, experimento estadístico de muestreo, error de aproximación, determinar tamaños de muestra, uso de tablas estadísticas, etc.), sobre los cuales la literatura describe errores frecuentes de comprensión. Por ejemplo, hay confusión entre los conceptos de estadístico y parámetro en los trabajos de simulación de las distribuciones muestrales (Garfield, delMas y Chance, 2004), en los contrastes de hipótesis (Batanero, 2000), en la distribución normal (Tauber, 2001), intervalos de confianza (Olivo y Batanero, 2007).

Un caso particular de lo que hoy es el teorema central del límite es la aproximación de la distribución binomial a la normal (llamado Teorema de Laplace De-Moivre), pues se puede considerar la distribución binomial $bin(n,p)$ como la suma de variables aleatorias Bernoulli independientes idénticamente distribuidas $B(p)$. Una dificultad es consensuar cuándo n es suficientemente grande, puesto que la precisión de la aproximación para un n particular depende de la forma de la distribución original y la sensibilidad del parámetro p (Alvarado y Batanero, 2007).

Respecto a las Escuelas de ingeniería, existe un gran interés por estructurar sus carreras enfocadas al desarrollo de competencias (Letelier, López, Carrasco y Pérez, 2005) y definir estándares para el currículum de pregrado, siendo uno de ellos los resultados de aprendizaje (ver http://www.cdio.org). Específicamente, consideramos este teorema importante en el trabajo del ingeniero, ya que proporciona herramientas metodológicas para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Este trabajo se interesa por analizar la comprensión teórica y práctica del teorema central del límite en estudiantes universitarios, al finalizar una experiencia de enseñanza basada en la simulación. Se ha preparado un cuestionario comprensivo de evaluación de las dificultades de comprensión del teorema central del límite, incluidas las diferentes entidades primarias que lo conforman de acuerdo con el marco teórico. Se analizan las preguntas *a priori* del cuestionario considerando las investigaciones relacionadas con el tema.

En nuestra investigación hemos intentado completar los estudios sobre el teorema central del límite (Alvarado y Batanero, 2007), y de su relación con la simulación computacional de las distribuciones muestrales (delMas Garfield y Chance, 2004; Inzunsa, 2006; Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007).

INVESTIGACIONES SOBRE COMPRENSIÓN DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Las investigaciones sobre el teorema central del límite son pocas en el contexto universitario; entre ellas destacamos la de Méndez (1991) que identifica cuatro propiedades básicas que deben entenderse para poder lograr una comprensión sólida del teorema: a) la media de la distribución del promedio muestral es igual a la media de la población, cuando el tamaño de la muestra tiende al infinito; b) la varianza de la distribución de la media muestral es menor que la varianza de la población; c) la forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada en la medida que se incrementa el tamaño muestral, y aproximadamente normal, de manera independiente de la forma de la distribución en la población; d) La forma de la distribución muestral crece en altura y decrece en dispersión en la medida que el tamaño muestral crece.

Estas propiedades han sido estudiadas en trabajos recientes de Alvarado (2007) sobre los significados y comprensión del teorema central del límite. En particular, evaluó la comprensión intuitiva del teorema de Laplace De Moivre, asociada a la tercera y cuarta propiedad, y sobre las tres componentes que deben considerarse para una buena aproximación, cualquiera sea la distribución de origen relacionada con la propiedad b). En general, obtuvo mejores resultados, indicando que los estudiantes muestran mejor dominio de vocabulario técnico, y reconocimiento de que la rapidez de convergencia del teorema depende de la distribución de la suma de variables aleatorias, de los valores de los parámetros, y del tamaño de la muestra. En consecuencia, diferencia los siguientes niveles de configuraciones cognitivas: 1) alumnos que consideran el problema de aproximación de la distribución binomial a la normal y de la convergencia de la media muestral como casos particulares del teorema central del límite, e identifican los diferentes enunciados del teorema y condiciones de convergencia, 2) alumnos que no incluyen en el teorema los anteriores campos de problemas, aunque identifican sus diferentes enunciados y las condiciones de convergencia que se diferencian entre sí por errores en algunos conceptos relacionados, y en la correcta /incorrecta tipificación; es decir, en algunos errores procedimentales, 3) alumnos que, aunque incluyen el caso de la aproximación de la distribución binomial a la normal como un caso particular del teorema, no comprenden las condiciones de la convergencia y confunden los diferentes enunciados.

En general, las investigaciones destacan la falta de comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral y confusión entre la media de la población (parámetro) y la media muestral. Estas mismas dificultades son observadas por delMas, Garfield, y Chance (2004) tras una enseñanza basada en la simulación, utilizando un programa de elaboración propia. Los autores sugieren que la tecnología, por sí sola, no es suficiente para la comprensión, sino que las actividades y la enseñanza de tipo constructivista tienen un papel importante. Otros trabajos recientes relacionados con las distribuciones muestrales son el de Inzunza (2006), que analiza el significado de las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional. Concluye que, a pesar de que el *software Fathom* permite evaluar procesos en la manipulación de parámetros y datos en distintas distribuciones de probabilidades, los estudiantes cometen errores frecuentes en el uso de representaciones numéricas, tienen un manejo superficial de los conceptos y propiedades de las distribuciones muestrales y presentan pocos elementos argumentativos.

Si bien la tecnología se considera un recurso didáctico en la resolución de problemas con distribuciones exactas y aproximadas, son escasas las investigaciones que evalúan la efectividad de la simulación en procesos de aprendizaje del teorema central del límite. Nuestro trabajo intenta contribuir en la solución de este problema, y es una continuación de otros experimentos de enseñanza de las distribuciones muestrales para ingenieros (Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007).

MARCO TEÓRICO

Al hacer matemáticas emergen objetos matemáticos que son representados en forma escrita, oral, gráfica o incluso por gestos. Se incluye en la idea de objetos personales las concepciones, esquemas, representaciones internas, etc. La actividad matemática queda modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. Font, Godino y D'Amore (2007) señalan que de estas prácticas emergen diferentes tipos de objetos matemáticos primarios, que se denominan “elementos del significado” y corresponden a: situaciones y problemas que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas asociado al objeto, en nuestro caso, el teorema central del límite; procedimientos y operaciones que se realizan en distintos tipos de prácticas que pueden llegar a convertirse en objeto de enseñanza; representaciones materiales utilizadas en la actividad de resolución de problemas (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos); definiciones y propiedades características del objeto y sus relaciones con otros conceptos y proposiciones; demostraciones que empleamos para probar sus propiedades y que llegan a formar parte de su significado. Además, establecen que si las interpretaciones realizadas por los alumnos no son las esperadas por el profesor, se produce un conflicto semiótico, entendido como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (profesor y alumno).

Los elementos de significado están relacionados entre sí, formando configuraciones que Godino, Contreras y Font (2006) definen como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Según los autores, una institución (en este caso la universitaria, donde se recogió la información) dirá que un sujeto "comprende" el significado de un objeto, si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas que configuran el significado del objeto institucional, además de fundamentarlas y de reflexionar sobre el proceso seguido.

En este trabajo, el objeto teorema central del límite surge al estimar la distribución muestral del promedio de la muestra, dar solución a la aproximación en distribución y su relación con la inferencia estadística. Además, se implementan las configuraciones *computacionales* que acrecientan el lenguaje, sobre todo en la variedad de representaciones gráficas dinámicas, se incorpora como procedimiento la simulación y el argumento preferible es inductivo, y *algebraicas* que se caracterizan por el lenguaje simbólico, el procedimiento analítico y la demostración deductiva.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

MUESTRA Y CONTEXTO EDUCATIVO

La experiencia de enseñanza del teorema central del límite, inserto en la unidad de las distribuciones muestrales, se desarrolló en la asignatura de Estadística de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, con inscripción inicial de 114 estudiantes de ingeniería, y dividido en dos secciones de 62 y 52 alumnos. El tiempo dedicado en el aula al estudio de la unidad fueron tres semanas (12 módulos de 60 minutos); hubo sesiones con uso de pizarra y cañón de multimedia, y dos de laboratorio trabajando con *Excel* y *Applets* de la distribución binomial y de *Poisson*. El material escrito estaba disponible en la plataforma *Moodle* del curso. También, de acuerdo con el tiempo disponible y los conocimientos previos, se han tenido en cuenta las habilidades de los estudiantes para realizar experimentos de variación de parámetros de las distribuciones de probabilidades por medio de recursos informáticos, y las de comunicar con claridad sus resultados provenientes del análisis estadístico.

La implementación del teorema central del límite considera un acercamiento global acerca del teorema, siguiendo el análisis de contenido en una muestra de 16 libros de estadística dirigidos a la enseñanza en ingeniería (Alvarado y Batanero, 2008). De este estudio se seleccionaron los problemas más adecuados para este nivel educativo, así como las propiedades, representaciones y procedimientos, que fueron la base del cuestionario (ver Anexo 1).

Instrumento de recogida de datos

Para recoger los datos se diseñó un cuestionario en línea utilizando la plataforma *Moodle*. La prueba consta de diez ítems, con tiempo controlado por el ordenador de 50 minutos para las respuestas. El estudiante, al momento de responder, debe ingresar con una clave dada por el profesor al inicio de la actividad, y los ítems son asignados a cada alumno en orden aleatorio, al igual que las alternativas. La novedad de esta evaluación fue incorporar en cuatro ítems un enlace web con micro programas escritos en Java, de las distribuciones de probabilidades binomial y de *Poisson*, como una herramienta de cálculo y alcance dinámico de manipulación (ver ejemplo en Figura 1).

El ítem 1 estudia la bondad de aproximación en diferentes valores del rango de la variable. La respuesta correcta sería la (d): mejor aproximación en valores cercanos al valor esperado de la distribución. Los distractores implican esperar mayor exactitud de la convergencia en valores alejados de los centrales.

El ítem 2, valora las condiciones que aseguran la rapidez de la convergencia, que son el aumento del tamaño muestral, forma distribucional de la población y valores de sus parámetros. Por ejemplo, la distribución uniforme discreta converge muy rápidamente y también la distribución *Poisson* se aproxima a la distribución normal a partir del valor de $\mu > 5$. Por lo tanto, la opción d) es la correcta.

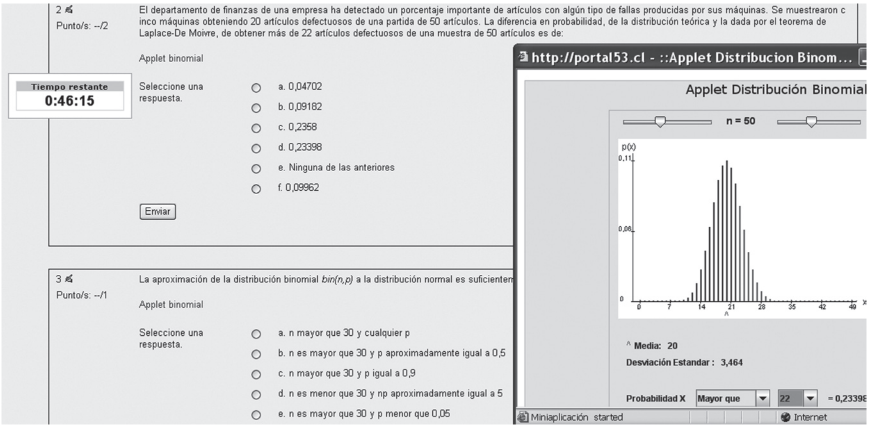


Figura 1. Dos ítems del cuestionario sobre el teorema central del límite

El ítem 3 evalúa la importancia de la forma o distribución de la población original para una buena aproximación, cuando la muestra no sea grande. La convergencia rápida se establece en distribuciones de probabilidades simétricas y en la distribución uniforme, ya sea discreta o continua; es decir, la opción correcta es la (b).

El ítem 4 se refiere a los supuestos y propiedades del teorema central del límite. La respuesta correcta corresponde a una de las aplicaciones del teorema, apartado (d): El teorema surge de situaciones de estimación de la media y otros parámetros de poblaciones no normales, por intervalos de confianza en muestras grandes. Los distractores están asociados a la validez del teorema para muestras grandes, en relación con la desviación estándar de la media muestral (a), a la forma de la población (b), y diferenciar los valores esperados (c), mientras que la varianza (e) para la media muestral y suma de variables aleatorias.

El ítem 5 evalúa la adecuada estandarización de la distribución normal (c y d) y la simetría de la distribución normal (a y b). La opción e) es la incorrecta ya que el valor de la probabilidad es 0.5.

El ítem 6 es una variante del problema de Kahneman, Slovic y Tversly (1982) sobre heurística de la representatividad, donde los sujetos no tienen en cuenta el tamaño muestral al analizar la convergencia de la frecuencia a la probabilidad. Lo correcto es considerar más probable el caso de muestra más pequeña como la de n = 15. Para hallar esta solución en forma algebraica, se debe estandarizar la suma de variables aleatorias Bernoulli y utilizar la corrección por continuidad.

El ítem 7, evalúa el reconocimiento de las condiciones que han de cumplir n y p para que la aproximación de la distribución binomial a la normal sea suficientemente precisa. El alumno debe razonar acerca de la convergencia como caso especial de un resultado general utilizando el *Applet* de la aproximación binomial. La respuesta correcta sería la alternativa (c), ya que la forma de la distribución es simétrica y cumple las condiciones de muestras de tamaño mayor a 30 y ser tanto np como nq mayores a 5 (Walpole, Myers y Myers, 1999).

El ítem 8 se refiere a resolver situaciones de la ingeniería mediante el teorema de Laplace DeMoivre. Los alumnos se apoyan con el *Applet* de la distribución binomial, determinando los parámetros y calculando acertadamente la probabilidad aproximada con la corrección por continuidad (c). En las alternativas a) y b) no utilizan la corrección por continuidad y calculan la probabilidad mayor que 30. Las opciones (e y d) consideran los complementos de las probabilidades (a y c).

También el ítem 9 utiliza la aproximación binomial por la normal y se determina el margen de error de precisión dada correctamente en (e), entre la distribución teórica y la obtenida por el teorema de Laplace De-Moivre. Los distractores son el recorrido de la variable binomial (a), no reconocer el teorema (c) y errores de corrección por continuidad (b y d).

El ítem 10 es un caso particular del teorema central del límite, de la aproximación de la distribución *Poisson* por la distribución normal y uso adecuado de la corrección por continuidad (a). La alternativa (b) corresponde al cálculo de probabilidad exacta, la opción (d) presenta un distractor del recorrido de la variable, al igual que la (c), pero sin aplicar la corrección por continuidad.

RESULTADOS EN ÍTEMS DE OPCIONES MÚLTIPLES

Una vez concluida la lección de las distribuciones muestrales, se aplicó el cuestionario de 10 ítems durante una sesión en el laboratorio de computación, con asistencia de 104 alumnos. Se presenta en cada ítem del cuestionario (Anexo 1) la frecuencia de respuestas de los estudiantes, y el porcentaje de aciertos se obtiene con respecto al total de alumnos, aunque no todos contestaron algunos ítems.

La plataforma virtual EV@, en la sección de resultados del cuestionario, proporciona un resumen cuantitativo de frecuencia de aciertos en los ítems (Tabla 1). El índice de dificultad (ID) de un ítem es la proporción de sujetos que lo aciertan entre aquellos que han intentado resolverlo. Cuanto mayor es el ID, el ítem es más fácil para los alumnos y ha sido adquirido por una mayor proporción de los mismos. El índice de discriminación es la diferencia en proporción de aciertos entre el grupo que tiene puntuación superior e inferior en el total del cuestionario.

Tabla 1. Índice de dificultad y de discriminación

Ítem	*ID (%)*	*Índice de discriminación*
1	77	0.37
2	31	0.71
3	63	0.45
4	52	0.56
5	80	0.34
6	28	0.50
7	73	0.34
8	30	0.61
9	15	0.96
10	36	0.77

Del análisis de los ítems de opciones múltiples podemos señalar que hubo gran variabilidad de dificultad en cada uno; los aciertos fluctuaron de 15% (ítem 9) a 80% (ítem 5). Todos los ítems resultaron discriminativos (índice mayor que +0.3). Los ítems que, en general, fueron bien respondidos por los estudiantes son los 5, 1 y 7, que califican los siguientes aspectos: a) aplicar la estandarización de la distribución normal, b) aproximar una distribución discreta para diferentes posiciones del rango de la variable, y c) bondad de ajuste de la distribución binomial por la normal.

Los errores se deben a la precisión de los cálculos, a utilizar equivocadamente la propiedad de corrección de continuidad o de estandarización. Los más difíciles fueron los ítems 9, 2, 8 y 10, referidos a las aplicaciones del teorema central del límite con los *Applet* de la distribución binomial (ítems 9 y 8) y la distribución *Poisson* (ítem 10), además de la parte conceptual de convergencia rápida (ítem 2).

A continuación, se describe la apropiación de las propiedades más importantes del teorema central del límite y los procedimientos con uso de recursos informáticos, de más fácil a más difícil.

Comprensión de procedimientos y propiedades de tipo conceptual

- Los resultados de los ítems 1 al 6 indican que las siguientes propiedades resultaron sencillas a los estudiantes: 80% reconoce las propiedades de la distribución normal y su correcta estandarización (ítem 5e); la aproximación mejora en los valores centrales de la distribución (ítem 1d); condición de rapidez de convergencia (ítem 3b); circunstancias de aplicación del teorema central del límite (ítem 4d). En el ítem 1d se obtuvieron mejores resultados, en 11%, que los obtenidos en Alvarado y Batanero (2007).
- En cuanto a las fallas más frecuentes: 16% tiene errores de estandarización (ítem 5c y d); 16% espera mejor exactitud en la convergencia en valores alejados de los centrales (ítem 1); 31% reconoce la importancia de rapidez de convergencia del tamaño de la muestra, sensibilidad de los parámetros y de la distribución que se modela, en particular de uniforme continua (ítem 2); 34% no considera la distribución de probabilidad en la aproximación de la suma pequeña de variables aleatorias (ítem 3); 9% confunde esperanza y varianza teóricas con esperanza y varianza experimentales respectivas (ítem 4c y e); 30% asocia la aplicación del teorema central del límite con la forma de la distribución poblacional (ítem 4b), y solo 10% considera que crece la desviación estándar de la media muestral cuando aumenta la muestra; en Retamal, Alvarado y Rebolledo (2007) se obtuvo 40% de error. En el ítem 6, 28% consideró más probable el caso de muestra más pequeña; es decir, se presenta en 60% la heurística de la representatividad, sin diferenciar el tamaño de la muestra en el cálculo de probabilidad. Comparando con los resultados de Alvarado y Batanero (2007) hubo una mejora en considerar, además del tamaño de la muestra, los valores de los parámetros de una distribución (ítem 2c) en la rapidez de aproximación de la distribución normal.

Comprensión de propiedades y procedimientos con applets

- Los resultados de los ítem 7 al 10 nos muestran que las propiedades asimiladas fueron: 73% reconoce condiciones de la precisión de aproximación (ítem 7c); obteniendo mejores resultados de Alvarado y Batanero (2007); 30% realiza correctamente el cálculo aproximado con la corrección de continuidad (ítem 8c); solo 15% calculó el error de aproximar la distribución binomial por la normal (ítem 9d) y 36% aplicó la aproximación de la normal a la *Poisson* calculando correctamente el recorrido de la variable aleatoria, el parámetro del modelo, la estandarización y la corrección de continuidad (ítem 10a).

- Las dificultades encontradas fueron: 14% atribuye el teorema de Laplace De-Moivre solo al parámetro *n* (ítem 7d); 13% no utiliza corrección de continuidad (ítem 8a y b); 27% no reconoce el teorema de Laplace De Moivre (ítem 9c); 11% presenta errores de corrección de continuidad (ítem 9b y d) y 26% sobre el recorrido de la variable binomial (ítem 9a); 33% no utiliza la propiedad de aproximación de una distribución discreta por una continua (ítem 10b).

RESULTADOS EN UN PROBLEMA ABIERTO

Como parte de la prueba final del semestre académico, se propuso a 114 estudiantes un problema abierto a fin de examinar las estrategias de resolución y argumentación del teorema central del límite, para el caso de la aproximación de la distribución binomial por la normal, así como valorar la probabilidad de pensamiento de más alto nivel (Gal, 1997). Las respuestas se indican en la Tabla 2.

Problema 1. Un gerente de crédito ha descubierto que 28 de los 80 usuarios de tarjeta no paga el monto completo de la deuda durante un mes dado.

a) Determine la probabilidad aproximada de que, al seleccionar 30 cuentas de manera aleatoria, se obtengan entre 6 y 14 cuentas no pagadas. Comente sobre el cálculo de probabilidad obtenida.
b) Compare con el valor exacto de la probabilidad anterior, determinada mediante la probabilidad binomial, que es 0.9115.
c) Calcule la probabilidad aproximada de obtener, en una muestra aleatoria de 90 cuentas, al menos 40% de tarjetas no pagadas.
d) Calcule el tamaño de muestra necesario para que la estimación difiera de la verdadera probabilidad en menos de 4.5% con probabilidad al menos 0.96.

La solución correcta en el apartado a) sitúa que los estudiantes deben definir la variable aleatoria en estudio $S_n = \sum X_i$: el número de usuarios de tarjeta que no paga el monto completo de la cuenta en una muestra de 30 cuentas, e identificar la distribución de probabilidad (binomial), determinando los parámetros $n=30$ y $p=0.35$: proporción de usuarios de tarjeta que no paga el monto completo de la deuda. Debido a que la muestra es grande, y se cumplen los supuestos (*n* grande, *np*>5), se puede aproximar mediante una distribución normal de media *np* y varianza *npq*, es decir $\sum X_i \approx N(np,npq)$=N(10.5, 6.83). Para calcular la probabilidad estimada hay que estandarizar y aplicar la corrección de continuidad, esto es:

$$P\left(5 \le \sum X_i \le 14\right) \approx P(5,5 \le \sum X_i \le 14,5) \approx P\left(\frac{5,5-10.5}{\sqrt{6.825}} \le Z \le \frac{14,5-10.5}{\sqrt{6.825}}\right) = P(Z > 1,53) - P(Z < -1.91) \approx 0,9089$$

Además, se espera que el estudiante considere la probabilidad alta, ya que la *E(X)*=10.5 se encuentra entre los valores 6 y 14.

En el apartado b) se pretende que el estudiante compare los valores del cálculo aproximado y exacto de las probabilidades de la suma de variables aleatorias $S_n = \sum X_i$; justificando el teorema para valores grandes de los tamaños muestrales y la convergencia rápida de la aproximación para valores de *p* cercano a 1/2.

En el apartado c), se espera que el estudiante reconozca el estimador de la proporción *p* como promedio muestral; obtener la distribución aproximada del estimador de la proporción p; justificar el teorema mediante la demostración algebraica de que la distribución aproximada es la normal; determinar la esperanza y varianza del estimador $\hat{p}$. Es decir, considerar la muestra de $n_2 = 90$ cuentas de tarjetas no pagadas; aplicando el teorema central del límite, sustituir $\sum_{i=1}^{90} X_i = S_2 \approx N(31.5, 20.475).$ Estandarizar el estimador $\hat{p}$ y calcular la probabilidad pedida.

El procedimiento de análisis pretendido por los estudiantes en la resolución es el siguiente:

$$P(S_2 \ge 36) \approx P(S_2 \ge 35.5) \approx P(Z \ge \frac{35.5-31.5}{\sqrt{20.475}}) \approx P(Z \ge 0.88) = 0.1894$$

Por último, en el apartado d) hay que expresar el error *e* = 0.045 y el nivel de confianza de 1α = 0.96. Se pide estimar el tamaño muestral adecuado mediante la expresión:

$$P\left(|Z| < \frac{0.045}{\sqrt{0,35 \cdot 0,65/n}}\right) = 0,96 \Rightarrow \quad 0,094346 \cdot \sqrt{n} = 2,05 \Rightarrow n = 473$$

Tabla 2. Resultado de cada apartado del problema (n =114)

Apartado	*Pasos correctos en la resolución del problema*	*n*	*%*
a	Identificar la distribución de probabilidad binomial	72	63
	Cálculo correcto de la media y varianza de la normal aproximada	85	75
	Aproximar $S_n = \sum X_i$ a la distribución normal	85	75
	Estandarizar la v. a. $S_n = \sum X_i$ en una normal estándar	80	70
	Aplicar correctamente la corrección por continuidad	51	45
b	Comparar los valores aproximados y exacto de $S_n = \sum X_i$	73	64
	Justificar el TCL para valores grandes de n	42	37
	Justificar la convergencia del teorema para valores de p cercano a 1/2	4	4
c	Determinar la esperanza y varianza de $\hat{p}$	86	75
	Estandarizar el estimador $\hat{p}$	80	70
	Calcular probabilidades con calculadora	64	56
	Reconocer el estimador **p** como el promedio muestral	31	27
	Estimador de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal	23	20
	Demostración formal algebraica y/o deductiva	13	11
d	Reconocer y expresar el error en valores de 0 a 1	46	40
	Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria	16	14
	Identificar el valor de probabilidad	13	11

En la Tabla 2 se presentan los resultados de los porcentajes de aciertos respecto al total, siguiendo la secuencia de desarrollo, donde cada paso requiere del anterior. Se observa que 63% de los estudiantes identifica la distribución de probabilidad binomial y expresa la probabilidad a calcular en el apartado a), aunque se producen algunos errores en reconocer los valores de n y p. Debemos destacar que 75% de los estudiantes es capaz de aproximar la suma de v. a. que conduce a la distribución normal y realiza el cálculo correcto de la media y la varianza. Los principales errores se producen para el cálculo correcto de la probabilidad, porque los estudiantes olvidan realizar la corrección de continuidad. Además, solo 11 estudiantes (10%) realizaron comentarios sobre la probabilidad obtenida, de los cuales ocho consideran la probabilidad alta justificando que la *E(x)=10.5* se encuentra entre los valores 6 y 14. En resumen, en el apartado a) hubo 64 respuestas correctas de procedimientos, de las cuales 51 (45%) llegaron al cálculo de probabilidad aplicando bien la corrección por continuidad.

En el apartado b), 64% compara el valor aproximado y exacto de la probabilidad, indicando correctamente su buena aproximación, aunque solo 37% comenta que la excelente aproximación se debe al valor de la muestra (30), y tan solo 4% comenta la influencia del parámetro p cercano a $\frac{1}{2}$.

En el apartado c), 75% de los estudiantes determina bien la media y la varianza de la distribución muestral de la proporción, y 70% logra estandarizar de manera correcta, de los cuales 56% calcula la probabilidad pedida. De ellos, solo 20% hace referencia explícita a la distribución normal aproximada de la proporción, y 11% justifica explícitamente el uso del teorema central del límite. Además, solamente 27% de los estudiantes hace referencia a la proporción como promedio.

Los resultados del apartado d) indican que debemos dedicar más tiempo a las situaciones de obtener tamaños de muestras adecuados. De los participantes, 40% representa el error en valores de 0 a 1, 14% ha logrado calcular el tamaño de la muestra y 11% identifica el valor de **p**. La Tabla 3 muestra un resumen de los aciertos en los apartados.

Tabla 3. Resultados correctos en cada apartado del problema

	Frecuencia	*Porcentajes (n = 114)*
Parte a)	51	45
Parte b)	73	64
Parte c)	64	56
Parte d)	16	14

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestros resultados indican que los estudiantes logran familiarizarse con los recursos informáticos presentados, y que incluso son capaces de simular experimentos y de utilizar más propiedades y procedimientos de manera correcta en las actividades de tipo conceptual. Cabe destacar que, a pesar del tiempo limitado, se observa una alta implicación de los alumnos en las distintas actividades efectuadas, pese a sus características de ingreso a la universidad, con competencias matemáticas débiles que, en alguna medida, inciden en las tasas de reprobación y desmotivación de los alumnos.

En relación con la comprensión de propiedades, 50% de los participantes comprenden el efecto de los parámetros sobre la precisión de aproximación, forma de la distribución, sensibilidad de los parámetros y variabilidad para distintos tamaños muestrales. Hay que reforzar la aplicación de la corrección por continuidad.

Respecto a la comprensión de procedimientos, son capaces de comparar probabilidades aproximadas y exactas para valores de la variable aleatoria, y se presenta una mejor comprensión en el estudio de la aproximación a la distribución binomial. Sin embargo hay errores, especialmente en el cálculo de la probabilidad aproximada, que llevan a una solución incorrecta.

Los resultados muestran variabilidad en las respuestas, poniendo de manifiesto que los ítems de tipo conceptual son los más alcanzados por la mayoría de los alumnos participantes, tales como la estandarización de la suma de variables Bernoulli (ítem 5) y la bondad de aproximación en diferentes intervalos (ítem 1). No obstante, hubo solo 31% de alumnos que han asimilado que la convergencia depende tanto del tamaño muestral, como de la distribución y de sus parámetros (ítem 2). Se observó que la heurística de la representatividad no mejoró en estos estudiantes respecto de lo descrito en Kahneman, Slovic y Tversly (1982). Sin embargo, hubo un aumento leve de 18% con los resultados de Alvarado y Batanero (2007).

Las aplicaciones del teorema central del límite con apoyo informático presentaron una serie de dificultades, para el caso particular del teorema de Laplace De-Moivre (ítem 9), debido, principalmente, a que no aplicaron la propiedad de corrección por continuidad, aunque mejoraron en el problema abierto. También resultó difícil el cálculo algebraico de la aproximación de la binomial por la normal (ítem 8) y la aproximación a la distribución Poisson (ítem 10). Sin embargo, se obtuvo 73% de aciertos en reconocer las condiciones de la aproximación a la binomial (ítem 7). Cabe señalar que, en los textos consultados por los estudiantes, no todos concuerdan con la regla práctica respecto al valor de n. Montgomery y Runger (1996: 303) señalan "Si $n > 30$, se puede usar el teorema central del límite", lo que puede conducir a que los estudiantes utilicen el teorema sin considerar la naturaleza de las variables, su distribución y pensar que siempre bastaría una pequeña muestra de 30 observaciones. No obstante, Walpole, Myers y Myers, (1999: 217) indican, para el caso particular, que "la aproximación normal a la distribución binomial será buena si np y n(1-p) son mayores o iguales a 5", y para Devore (2001: 232) que "En la práctica, la aproximación es adecuada siempre que $np \geq 10$ y $nq \geq 10$". Estas dos afirmaciones, aunque no concuerdan en la cota inferior, apuntan a que el tamaño muestral necesario para una buena aproximación depende del valor de p. Por lo tanto, es conveniente explorar las representaciones gráficas a partir de la simulación, entendida como experimento estadístico de muestreo, y conducir a los estudiantes a verificar la calidad de convergencia en distribución por medio del estudio de la sensibilidad de los parámetros.

El trabajo proporciona información sobre las dificultades observadas en un grupo de estudiantes de ingeniería en el teorema, lo que nos ayudará a mejorar la enseñanza y a establecer un modelo de actuación docente adecuado. Se considera un avance poner de manifiesto alternativas de evaluación. Por un lado, al replicar los ítems 1, 6 y 7 (Alvarado y Batanero, 2007) en nuestro cuestionario con uso de informática, hemos tenido mejores resultados acerca de la bondad de la aproximación según el intervalo de probabilidad (11%) y para la aproximación de la distribución binomial (13%). Además, contar con la posibilidad de utilizar un medio informático mediante el que los alumnos puedan simular diferentes fenómenos estocásticos, ayuda a tener más seguridad y a reducir la ansiedad epistemológica (Wilensky, 1997). Se establecieron conexiones entre la obtención experimental del teorema e investigar el comportamiento asintótico de la distribución de estadísticos cuando cambian los parámetros; exploración de la variación de parámetros y experimentación; utilización de las propiedades de aproximación normal en distribuciones clásicas y efecto de los parámetros sobre la aproximación.

Sin embargo, como lo señala Inzunza (2006) en su experimentación del tema con un *software* específico, si bien los alumnos han presentado cierta evolución de los significados de las distribuciones muestrales, muchos no logran comprender adecuadamente el efecto del tamaño de muestra y el valor de las probabilidades. El uso de medios, como la plataforma virtual, aumenta las posibilidades de trabajo y amplía las representaciones conectando los modelos de probabilidad con la experimentación, aunque hay que tener presente el esfuerzo cognitivo de los estudiantes (delMas, Garfield y Chance, 2004).

Agradecimientos

Al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, mediante el Proyecto de Iniciación Fondecyt Nº 11080071.

Datos de los autores

Hugo Alvarado Martínez y Lidia Retamal Pérez
Departamento de Matemática y Física Aplicadas
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile.
alvaradomartinez@ucsc.cl; lretamal@ucsc.cl

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, H. (2007). Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería, Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). "Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial". En *Números*, 67.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). "Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística". En *Estud. pedagóg*, vol. 34 (2), pp. 7-28.

Batanero, C. (2000). "Controversies around significance test". En *Journal of Mathematics thinking and Learning*, vol. 2, núms. 1-2, pp. 75-98.

DelMas, R., Garfield, J., y Chance, B. (2004). "Using assessment to study the development of students' reasoning about sampling distributions", Trabajo presentado en el *American Educational Research Association. Annual Meeting*. California.

Devore, J. (2001). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (5ª ed.). México, Thompson.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. En *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 2-7.

Gal, I. (1997). "Assessing students' interpretations of data: Conceptual and pragmatic issues". En B. Phillips (Ed.), *Papers on Statistical Education presented at ICME-8* (pp. 49-58), Universidad Tecnológica de Swinburne.

Garfield, J., delMas, R. y Chance, B. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds), *The Challenge of developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. En *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Inzunza, S. (2006). Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica, Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV).

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* New York. Cambridge University Press.

Letelier, M., López, L, Carrasco, R, y Pérez, P. (2005). "Sistema de competencias sustentables para el desempeño profesional en ingeniería". En *Rev. Fac. Ing.* Vol. 13(2), 91-96.

Méndez, H. (1991). Understanding the central limit theorem. Tesis Doctoral, Universidad de California. UMI 6369.

Montgomery, D. y Runger, G. (1996). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería* (3ª ed.). México. Mc Graw Hill.

Olivo, E., Batanero, C. (2007). "Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios". En *Educación Matemática*, vol. 20, pp. 5-32.

Retamal, L., Alvarado, H., y Rebolledo, R. (2007). "Understanding of sample distributions for a course on statistics for engineers". En *Ingeniare*, vol. 15, pp. 6-17.

Tauber, L. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.

Walpole, R., Myers, R., y Myers, S. (1999). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (6ª ed.). México. Prentice Hall, Pearson.

Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety. En *Educational Studies in Mathematics*, 33, 171-202.

ANEXO 1. RESULTADOS EN LOS ÍTEMS PROPUESTOS A LOS ALUMNOS.

Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en los diez Ítems (n = 104)

Ítem 1. La aproximación normal mejora cuando el intervalo a calcular en probabilidad:		
	Frecuencia	***Porcentaje***
a) Se acerca al extremo superior de valores de la distribución binomial	10	10
b) Se aparta del término central de valores de la distribución binomial	4	4
c) Se acerca al extremo inferior de valores de la distribución binomial	2	2
d) Se acerca al término central de valores de la distribución binomial	**80**	**77**
e) Ninguna de las anteriores	8	8

Ítem 2. La rapidez con la que la suma de variables aleatorias se aproxima a la distribución normal depende: (¿Cuál de las afirmaciones es incorrecta?)		
	Frecuencia	***Porcentaje***
a) De las distribuciones de las v.a. X i	10	10
b) Del tamaño de la muestra n	15	14
c) De los valores de los parámetros	6	6
d) Del estimador de la media poblacional	**32**	**31**
e) Si la población de datos tiene distribución uniforme continua	41	39

Ítem 3. La aproximación a la normal es buena para valores pequeños de n en variables aleatorias con distribución:		
	Frecuencia	***Porcentaje***
a) Asimétrica	5	5
b) Simétrica	**66**	**63**
c) Poisson	20	19
d) Sesgada	4	4
e) Binomial	6	6

Ítem 4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre distribuciones muestrales es CIERTA?		
	Frecuencia	***Porcentaje***
a) La desviación estándar de la media muestral aumenta a medida que crece el tamaño de la muestra.	10	10
b) La media muestral tiene una distribución aproximadamente normal cuando n es suficientemente grande, dependiente de la forma que tenga la población.	31	30
c) El valor esperado de la distribución muestral de la suma de variables aleatorias es igual a la media de la población.	6	6

Ítem 4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre distribuciones muestrales es CIERTA?		
	Frecuencia	*Porcentaje*
d) El teorema central del límite surge de situaciones de estimación de la media y otros parámetros de poblaciones no normales por intervalos de confianza en muestras grandes.	**54**	**52**
e) La varianza de la suma de variables aleatorias independientes es igual a la varianza poblacional.	3	3

Ítem 5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la distribución normal es incorrecta?		
	Frecuencia	*Porcentaje*
a) Si una variable está distribuida normalmente, los casos extremos son poco frecuentes.	3	3
b) En la curva normal, la media es igual a la moda.	1	1
c) El número de artículos con fallas de una máquina tiene una distribución normal con media 6 y varianza 16. El valor estandarizado de 12 artículos con fallas es de 1.5.	9	9
d) El número de chips defectuosos de dispositivos semiconductores tiene una distribución normal de media 1 y desviación estándar 1. Si el valor estandarizado es 3, entonces el número de chips defectuosos es 4?	7	7
e) El riesgo individual de reclamos de seguro automotriz de una empresa aseguradora en Chile tiene una distribución normal de media 3 y desviación estándar 0.255. La probabilidad de que reclamen a lo más 3 clientes es de 0.975.	**83**	**80**

Ítem 6. En una empresa de seguro de vida la probabilidad de que reclame un cliente es de 50% ¿Cuál de estos casos te parece más probable?		
	Frecuencia	*Porcentaje*
a) Que entre los próximos 15 clientes seleccionados 10 o más reclamen a la empresa.	**29**	**28**
b) Que entre los próximos 150 estudiantes seleccionados 100 o más reclamen a la empresa.	13	13
c) Los dos casos anteriores son igual de probables.	62	60

Ítem 7. La aproximación normal a la distribución binomial bin(n,p) es suficientemente buena cuando (Utilice el Applet de la distribución binomial):		
	Frecuencia	*Porcentaje*
a) n es menor que 30 y np aproximadamente igual a 5	6	6
b) n es mayor que 30 y p menor que 0,05	2	2
c) n es mayor que 30 y p aproximadamente igual a 0.5	**76**	**73**
d) n mayor que 30 y cualquier p	15	14
e) n mayor que 30 y p igual a 0,9	2	2

Ítem 8. Un ingeniero ha comprobado que 40 de los 120 accidentes industriales en su planta en los últimos cinco años, se deben a que los empleados no siguen las instrucciones. La probabilidad aproximada de que de 84 nuevos posibles accidentes, a lo menos 30 se deban a negligencia de los empleados es de (Utilice el Applet de la distribución binomial):		
	Frecuencia	***Porcentaje***
a) 0.2981	6	6
b) 0.3707	7	7
c) 0.3409	**31**	**30**
d) 0.6591	4	4
e) 0.7019	1	1
f) Ninguna de las anteriores	47	45

Ítem 9. El departamento de finanzas de una empresa ha detectado un porcentaje importante de artículos con algún tipo de fallas producidas por sus máquinas. Se muestrearon cinco máquinas obteniendo 20 artículos defectuosos de una partida de 50 artículos. La diferencia en probabilidad, de la distribución teórica y la dada por el teorema de Laplace-De Moivre, de obtener más de 22 artículos defectuosos de una muestra de 50 artículos es de (Utilice el applet de la distribución binomial):		
	Frecuencia	***Porcentaje***
a) 0.09182	27	26
b) 0.09962	5	5
c) 0.23398	28	27
d) 0.2358	6	6
e) 0.04702	**16**	**15**
f) Ninguna de las anteriores	17	16

Ítem 10. Se supone que X, el número de accidentes por mes en un cruce de carreteras dado, tiene una distribución Poisson con $\mu = 2$. Si el número de accidentes durante seis meses es mayor a 10, se deberá reconstruir el cruce debido a un programa otorgado por el estado. La probabilidad aproximada de que el cruce en cuestión sea considerado en el programa de emergencia del estado es de (Utilice el applet de la distribución Poisson):		
	Frecuencia	***Porcentaje***
a) 0.6664	**37**	**36**
b) 0.65277	34	33
c) 0.71904	4	4
d) 0.7642	2	2
f) Ninguna de las anteriores	20	19

Árbitros de Educación Matemática, 2012

Nombre	***Institución***	***País***
Fermín Acosta	Instituto Politécnico Nacional/Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Atizapán de Zaragoza	México
Gustavo Barallobres	Universidad de Québec en Montreal	Canadá
David Block	Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN	México
Marianna Bosch	Universidad Ramón Llull	España
Gabriela Buendía	Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA)	México
Patricia Camarena Gallardo	Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, IPN	México
Leonor Camargo	Universidad Pedagógica Nacional	Colombia.
Pablo Carranza	Universidad Nacional de Río Negro	Argentina
José Carrillo	Universidad de Huelva	España
Ángel Contreras	Universidad de Jaén	España
José Luis Cortina	Universidad Pedagógica Nacional	México
Ma. Fernanda Delprato	Universidad Nacional de Córdoba	Argentina
Hugo Espinosa	Departamento de Matemática Educativa, CINESTAV-IPN	México
Daniel Eudave	Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
Ceneida Fernández	Universidad de Alicante	España
Teresa Fernández Blanco	Universidad de Santiago de Compostela	España
Ana Cristina Ferreira	Universidad Federal de Ouro Preto	Brasil
Concepción Ferreira	Universidad Federal de Minas Gerais	Brasil
Rosa del Carmen Flores	Facultad de Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México	México
Vicenç Font	Universidad de Barcelona	España
Josep María Fortuny	Universidad Autónoma de Barcelona	España
Mercedes García Blanco	Universidad de Sevilla	España
Silvia García-Peña	Profesional Independiente	México
José María Gavilán	Universidad de Sevilla	España
Ángel Gutiérrez	Universidad de Valencia	España
Gelsa Knijnik	Universidad do Vale do Río Dos Sinos	Brasil
Santiago Insunza	Universidad Autónoma de Sinaloa	México
Raquiel R. López	Universidad Veracruzana- Xalapa	México
Salvador Llinares	Universidad de Alicante	España
Eduardo Mancera	Colegio Nacional de Matemáticas	México
Miguel Ángel Márquez Elías	Departamento de Estadística, Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
José Matías Romo Martínez	Universidad Pedagógica Nacional Unidad 011, Aguascalientes	México
Simón Mochón	Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN	México
Elizabeth Montoya	Universidad Católica de Valparaíso	Chile

Nombre	Institución	País
Mar Moreno	Universidad de Lleida	España
Susana Moriena	Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe	Argentina
Ana Elena Narro Ramírez	Universidad Autónoma Metropolitana-Xochimilco	México
Claudia Oliveira-Groenwold	Universidad Luterana de Brasil	Brasil
Carmen Penalva	Universidad de Alicante	España
Marcela Parraguez	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Sandra Elisa Pérez Quezada	Departamento de Apoyo a la Investigación, Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
Patricia Perry	Universidad Pedagógica Nacional	Colombia
Jesús Pinto Sosa	Universidad Autónoma de Yucatán	México
Jean Pons	Universidad de Alicante	España
Paulino Preciado	Universidad de Calgary	Canadá
Luis Radford	Université Laurentienne	Canadá
Alejandro Miguel Rosas	Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA).	México
Norma Rubio Goycochea	Universidad Católica del Perú	Perú
Guadalupe Ruiz Cuéllar	Departamento de Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
Irma Elena Saiz	Universidad Nacional del Nordeste	Argentina
Carmen Samper	Universidad Pedagógica Nacional	Colombia
Andrés Sánchez Moguel	Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación	México
Ernesto Sánchez	Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN	México
Gloria Sánchez Matamoros	Universidad de Sevilla	España
Diana Violeta Solares	Universidad Autónoma de Querétaro	México
Julia Valls	Universidad de Alicante	España
Roberto Vidal	Universidad Alberto Hurtado	Chile
Miguel R. Wilhelmi	Universidad Pública de Navarra	España

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada que ofrece un foro académico para la presentación y discusión de ideas, conceptos, propuestas y modelos que puedan contribuir a la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y latitudes. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. Adicionalmente, difunde reseñas y contribuciones para la docencia en matemáticas.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro académico internacional en lengua española en el que se discutan problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos.
- Facilitar la comunicación entre investigadores, estudiantes de posgrado y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática en los países iberoamericanos.
- Colaborar en la comprensión de la naturaleza, la teoría y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores de programas y proyectos educativos, evaluadores, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

PRINCIPALES TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se orienta principalmente a los siguientes temas:

- Educación matemática en el nivel básico.
- Educación matemática en el nivel preuniversitario.
- Educación matemática en el nivel universitario.
- Los sistemas educativos y las políticas educativas en educación matemática.
- Saberes matemáticos y procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en contextos no escolares.
- Historia y epistemología de las matemáticas y de la educación matemática.

INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones (ensayos, reseñas y contribuciones para la docencia) en español, en las temáticas enlistadas en esta Política Editorial.
- Todos los escritos que se reciben se someten a un proceso de evaluación doble-ciego.
- El Comité Editorial, con base en los resultados de la evaluación de los escritos, se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El Comité Editorial y el Consejo Mexicano de Investigación Educativa tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual el autor debe firmar una licencia de publicación no exclusiva que se hará llegar a los autores una vez aprobada la publicación.

PREPARACIÓN DE LOS ESCRITOS

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica los artículos en español y, eventualmente, artículos de investigación en portugués.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN:

- Deberán tener originalidad y rigor, y mostrar, explícitamente, el aparato conceptual y metodológico utilizado.
- Prepararse electrónicamente, en *Word* o en algún otro procesador compatible.
- Deberá tener un máximo de 10 000 palabras, incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Se recomienda ampliamente que en total la extensión del artículo no sea mayor a 30 cuartillas.

- Deberá incluir, también, un resumen de entre 150 y 180 palabras en el idioma en que se haya escrito el artículo (español o portugués). Además, se incluirá una versión en inglés o francés del resumen, y cinco palabras clave en los dos idiomas elegidos.
- En archivo aparte, deberá prepararse una carátula que contenga: a) título del artículo; b) declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse, explícitamente, si el material ha sido presentado previamente en congresos y ha aparecido de manera sintética (máximo seis cuartillas) en las memorias del mismo); c) el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo del escrito. En caso de que el artículo sea aprobado, se enviarán en blanco y negro las fotografías o ilustraciones en formatos .jpg, .tif o .eps, insertos en el documento y también en archivo aparte, con una resolución mínima de 300 dpi.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean conocidas por un lector internacional; si estas se utilizan, deberá explicitarse su significado a pie de página, la primera vez que aparezcan.
- Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991: 51).
- Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto siguiendo el modelo APA.

Briand, J. (2011). El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase. En *Educación Matemática*, 23 (1), pp. 5 - 36.

Fuenlabrada, I. (compiladora) (2008). *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*. DIE-CINVESTAV/COMIE/UPN. México.

Stigler, J. W. y J. Hiebert (1999). *The Teaching Gap. Best ideas from the World's Tachers for Improving Education in the Classroom*. Free Press. New York.

Moreno, L y J. Kaput (2005). Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra. En: M. Alvarado y B. Brizuela (compiladoras). *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la*

psicología, la didáctica y la historia. Paidós. Col. Educador Núm. 179. México.

Hernández, S. y H. Jacobo (2011). Descripción de algunas tesis de maestría en educación matemática. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 13 (1). Consultado el 28 de marzo de 2012 en: http://redie.uabc.mx/vol 11no1/contenido-hdezjacobo.html

ENSAYOS

Educación matemática publica ensayos de alta calidad con un máximo de 6 000 palabras (y 12 cuartillas incluyendo imágenes y bibliografía), que aborden de manera rigurosa y original algún tema relevante en el campo de la educación matemática. A diferencia de los artículos, los ensayos implican la interpretación de un tema desde el punto de vista del autor, sin que sea necesario explicitar el aparato metodológico o documental específico que lo sustenta, ni aportar datos empíricos. Los ensayos se someten al mismo proceso de arbitraje que los artículos de investigación.

CONTRIBUCIONES PARA LA DOCENCIA

Educación matemática considera para su publicación un número limitado de contribuciones para la docencia, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios, puntos de vista sobre algún material educativo y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula o de planeación de proyectos en educación matemática que se considere valioso compartir con los docentes de los distintos niveles educativos. Las contribuciones para la docencia no deberán exceder 4 000 palabras o 10 cuartillas incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word, con los mismos lineamientos que para la presentación de artículos.

RESEÑAS

Educación Matemática publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, *software*, tesis de doctorado y eventos relevantes relacionados con las temáticas de la revista y que hayan aparecido recientemente. Las reseñas deben expresar el punto de vista de su autor; es decir, que no serán meramente descriptivas, y no excederán 2 000 palabras. Asimismo, deben incluir la ficha completa del texto o *software* reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor. En el caso de las reseñas de tesis de doctorado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.

PROCESO DE ARBITRAJE

Aspectos generales

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso de arbitraje:

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en Educación Matemática. Esta revisión interna se realiza en un plazo aproximado de un mes. En este término, se notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para su eventual publicación en Educación Matemática, se expondrán, por escrito, las razones al autor.

Artículos y ensayos

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos para ser evaluados serán enviadas para arbitraje doble-ciego de al menos dos expertos en el tema. Este proceso de arbitraje se realizará en un plazo máximo de tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial: Aceptado en su versión original, Aceptado con modificaciones menores, Aceptación condicionada a incorporación de modificaciones mayores, o Rechazado.

El autor deberá responder electrónicamente si está de acuerdo o no en elaborar una segunda versión de su contribución, incorporando los cambios propuestos. La versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, deberá enviarse en un periodo no mayor de tres meses. Si el autor o autores envían su segunda versión en un plazo mayor al estipulado, el escrito será considerado como Nueva contribución, y se reiniciará el proceso de arbitraje.

El caso en que un árbitro apruebe una contribución con modificaciones menores y otro la rechace, la contribución se enviará a un tercer revisor. Prevalecerá la opinión de dos, de los tres árbitros.

Contribuciones para la docencia

Las contribuciones para la docencia se someten a un proceso de arbitraje en el que participan como árbitros un miembro del Comité Editorial y un árbitro externo. Los plazos del proceso son los mismos que para los artículos y los ensayos. En caso de discordancia en las evaluaciones, se seguirá un proceso similar al de artículos y ensayos.

Reseñas

Las reseñas son evaluadas por un miembro del Comité Editorial y el resultado de su evaluación se comunica al autor una vez que haya sido discutido en el pleno del Comité Editorial. Para hacer la evaluación, en este caso, se consideran la actualidad y relevancia del objeto de la reseña y la calidad de la perspectiva personal que el autor incorpora en su escrito.

ENVÍO DE LOS ESCRITOS

Los escritos deberán enviarse en archivo electrónico a la siguiente dirección electrónica: revedumat@yahoo.com.mx.

Educación Matemática

Se terminó de imprimir en los talleres
de Impretei, S. A. de C. V.,
en el mes de enero de 2013.
Almería No. 17, Col. Postal, 03410
México, D. F. Tel.: 5696-2503

Se imprimieron 100 ejemplares
más sobrantes para su reposición.

Colaboradores internacionales

- *Michele Artigue*, Université Paris 7, IUFM de Reims y equipo DIDIREM, Francia
- *Carmen Azcárate*, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, España
- *Luis Balbuena*, Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, España
- *Elisa Bonilla*, Dirección Fundación SM, México
- *Carlos Bosch*, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, México
- *Alberto Camacho Ríos*, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
- *José Contreras Francia*, University of Southern Mississipi, Estados Unidos
- *César Cristóbal Escalante*, Universidad de Quintana Roo, México
- *Miguel de Guzmán*, Universidad Complutense de Madrid, España
- *José Ángel Dorta Díaz*, Universidad de La Laguna, Departamento Análisis Matemático, España
- *Daniel Eudave Muñoz*, Universidad Autónoma de Aguascalientes, Departamento de Educación, México
- *Eugenio Filloy Yagüe*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Alfinio Flores Peñafiel*, Arizona State University, Estados Unidos
- *Grecia Gálvez*, Ministerio de Educación de Chile, Chile
- *Jesús Roberto García Pérez*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Departamento de Matemática Educativa, México
- *Pedro Gómez*, Una Empresa Docente, Universidad de los Andes, Colombia
- *Fredy González*, Instituto Pedagógico de Maracay; Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
- *Ángel Gutiérrez*, Departamento de Didáctica de la Matemática, E. U. de Magisterio, Universidad de Valencia, España
- *Nelson Hein*, Universidade Regional de Blumenau, Brasil
- *José Ramón Jiménez*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, México
- *Moisés Ledesma Ruiz*, Escuela Normal Superior de Jalisco, México
- *Antonio Jose Lopes*, Centro de Educaçao Matematica, Brasil
- *Jorge Martínez Sánchez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Leonel Morales Aldana*, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala
- *Luis Enrique Moreno Armella*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *María del Rocío Nava Álvarez*, Instituto de Educación del Estado de México, México
- *Josefina Ontiveros Quiroz*, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas, México
- *Fidel Oteiza*, Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, Chile
- *François Pluvinage*, Rectorat de Strasbourg-Service FORM, Francia
- *Ángel Ruiz*, Universidad de Costa Rica, Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Costa Rica
- *Luisa Ruiz Higueras*, Universidad de Jaén, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Fac. de Ciencias de la Educación, España
- *María Teresa Rojano Ceballos*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios *Avanzados* del IPN, México
- *Jorge Sagula*, Universidad Nacional de Luján, Departamento de Ciencias Básicas, División Matemática, Argentina
- *Patrick Scott*, University of New Mexico, Estados Unidos
- *Isabel Soto*, Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación, Chile
- *Guadalupe T. de Castillo*, Universidad de Panamá, República de Panamá

Precio del ejemplar en la República Mexicana: $100 más gastos de envío

ISSN 16655826