INTRODUCCIÓN AL DESARROLLO DE PENSAMIENTO MÉTRICO Y LOS SISTEMAS DE MEDIDA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

Elementos a considerar en la planeación y transformación de las prácticas educativas en el aula de clase

VIVE LA EDUCACIÓN
NRC CONSEJO NORUEGO PARA REFUGIADOS
Canadá
Save the Children

Este material se imprime en el marco del proyecto Vive la Educación, que es implementado por Save the Children y el Consejo Noruego para Refugiados y cuenta con la financiación de Global Affairs Canada. Con el apoyo de la Universidad de Nariño como socia estratégica para la calidad educativa en el departamento. Su contenido ha sido una construcción conjunta liderada por las comunidades nariñense y la Gobernación de Nariño, por lo tanto la exactitud de los datos y posturas no son responsabilidad de las organizaciones implementadoras del proyecto Vive la Educación.

Editor
Fundación Save the Children Colombia

Jeremy Stoner
Director de País – Colombia

Odette Langlais
Coordinadora Temática de Educación, Colombia

Elisander Castro
Gerente Regional del programa de Educación

Aurelio Becerra Barón
Oficial de Educación y apoyo pedagógico

Jairo Andrés de los Ríos
Oficial de Educación
Nodo El Charco
Nariño

ISBN: 978-958-59456-0-9

San Juan de Pasto – Colombia
Marzo, 2016

Universidad de Nariño
Departamento de Matemáticas y Estadística

Saulo Mosquera
Director Departamento de Matemáticas y Estadística.

Gustavo-Adolfo Marmolejo A.
Coordinador Programa Fortalecimiento de las Matemáticas en la Educación Básica en Tumaco, Policarpa y Samaniego

Autores de Texto
Dr. Gustavo-Adolfo Marmolejo A.
Dr. Hilbert Blanco-Álvarez
Mg. Edinsson Fernández-Mosquera
Equipo del Área de Educación Matemática de la U. de Nariño

Pares Evaluadores Académicos
María Eugenia Salinas, Dra. en Ciencias de la Educación, U. de Salamanca. Profesora U. del Pacífico.

Erik Donaldo Lambraño García, Mg. Matemáticas, U. Nacional. Profesor U. del Pacífico.

Revisor de Estilo
José Fernando García S., Licenciado en Literatura, U. del Valle. Profesor U. del Pacífico.

Contenido

Agradecimientos

Este libro es el resultado de un trabajo interinstitucional realizado en un período de seis meses, posible gracias a la desmedida entrega y dedicación de 72 educadores y educadoras de 14 instituciones educativas de los municipios de Tumaco, Policarpa y Samaniego, quienes sacrificando sus momentos de descanso, asumieron como suya la preocupación de transformar las prácticas educativas imperantes en la enseñanza de las matemáticas de los primeros años de la educación básica, en acciones que suscitaron la movilización de conocimientos y habilidades matemáticas en el aula de clase desde estrategias cargadas de sentido y significado para sus estudiantes.

A los rectores de las instituciones educativas por la motivación, acompañamiento y flexibilidad brindada a sus profesores y profesoras. Sin ellos hubiese sido imposible desarrollar tanto las discusiones teóricas y prácticas, como los procesos de validación de las tareas diseñadas, elementos, unos y otros, las indispensables en la puesta a punto de las discusiones tratadas en el presente libro.

A Save the Children International por la confianza brindada en el desarrollo de todo el proceso que subyace a la elaboración de este documento. En particular a Elisander Castro, Carmen Helena Cháves, y Jairo de los Ríos, quienes acompañaron y apoyaron la elaboración, discusión y publicación de este material. Un merecido reconocimiento porque su gestión fue definitiva para la consecución de la meta de brindar a los profesores de matemáticas de los primeros grados de la educación básica de nuestra región, nuevos caminos para potencializar y mejorar sus prácticas educativas, tanto en el aula de clase, como en los procesos de planeación a considerar en el área de matemáticas.

A todos ellos, profesores, profesoras, rectores e instituciones, un especial agradecimiento por sus valiosos aportes, porque únicamente a través de un trabajo conjunto, serio y constante fue posible transformar la enseñanza de las matemáticas en las Instituciones Educativas donde labora.

A nuestros colegas y amigos, María Fernanda Mejía Palomino y Rodrigo Cuéllar Jiménez, por la lectura minuciosa del documento y sugerencias realizadas.

A los pares evaluadores (Dra. María Eugenia Salinas y Mg. Erik Donaldo Lambraño) y al revisor de estilo (Lic. José Fernando García) por las críticas agudas y constructivas realizadas que en su conjunto permitieron mejorar la calidad del presente libro.

Profesores e instituciones educativas que participaron en el Proyecto Fortalecimiento de las Matemáticas en la Educación Básica en Tumaco, Policarpa y Samaniego

- Rosa Noguera (C.E. La Variante)
- Elsy Mariela Angulo (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Cielo Angulo (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Lino Senen (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Juana Olave (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Digna Maricel Cuero (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Adiela Guagua (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Miller Quiñones (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Claudia Sevillano (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Gloria Sevillano (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Miryam Yolanda Rivadeneira (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Sonia Rivera (I.E. Ciudadela Mixta Colombia)
- Digna Elizabeth Burbano (I.E. Faustino Arias)
- Claret Yolima Castillo (I. E. Max Seidel)
- Máximo Caicedo (I. E. Nueva Florida)
- Sandra Stella Aguirre (I.E. San Luis Robles)
- Pilar Mina (I. E. Agropecuaria Candelilla)
- Ceferina Castillo Orobio (I.E. Iberia)
- Alix Cortes (I. E. Iberia)
- María Cecilia Gómez (I.E. Iberia)
- Sandra del Socorro Portocarrero (I.E. Iberia)
- Stella Quelal (I. E. Iberia)
- Francisco Javier Quiñones (I.E. Iberia)
- Segundo Leoncio Vásquez (I.E. Iberia)
- Aura Nalliby Castro (I. E. Iberia)
- Rosa Cortés (I. E. Iberia)
- Marleny Teresa Quiñones (I.E. Iberia)
- Benjamín Rivera (I. E. Iberia)
- Jorge Armando Melo (I.E. Policarpa Salavarrieta)
- María Luisa Córdoba (I.E. Policarpa Salavarrieta)
- María Teresa Melo (I.E. Policarpa Salavarrieta)
- Nancy Ceneida Burbano (I.E.Policarpa Salavarrieta)
- Armando Andrade (I.E.Policarpa Salavarrieta)
- Pedro Antonio Montenegro (I.E.Policarpa Salavarrieta)
- Elsy Cecilia Obando (I.E. Simón Bolivar)
- Antonio Acuña (I.E. Simón Bolivar)
- Luz Mery Arteaga (INAGRO)
- Franco Edilberto Melo (I.E. Agroecológica El Motilón).
- Jesús Martín Toro (I.E. Bellavista).
- Adonias Erwin Ordoñez (I.E. Policarpa)
- Emir Ortiz Segura (I.E. Policarpa)
- Betty Erazo Dávila (I.E. Policarpa)
- Ana Delia Rosero (I.E. Policarpa)
- Teresa López Melo (I.E. Policarpa)
- Eduin Andrade (I.E. Policarpa)
- Edgar Noraldo Jaramillo (I.E. Policarpa)
- Ana Mery Salazar (I.E. Policarpa)
- María del Carmen Portilla (I.E. Policarpa)
- María Ruby Acosta (I.E. Policarpa)
- Luis Henrry Erazo (I.E. Policarpa)
- María Francy Cisneros (I.E. Policarpa)
- Inés Dulfary España (I.E. Policarpa)
- Elizabeth Rosero (I.E. Policarpa)
- Mary Guerrero Andrade. (I.E. Policarpa)
- Jesús Alberto Rodríguez. (I.E. Policarpa)
- Mirtha Bastidas (I.E.A. El Ejido)
- Luís Gonzalo Rosero (I.E.A. El Ejido)
- Alba Ermila Melo (I.E.A. El Ejido)
- Nelcy Elina Rodríguez (I.E.A. El Ejido)
- Willinton Ortiz (I.E.A. El Ejido)
- Gloria Aydeé Peña (I.E.A. El Ejido)
- Jaime Muñoz Coral. (I.E.A. El Ejido)
- Marco Antonio Meléndez (I.E.A. El Ejido)
- Milton René Moran (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)
- William René Guevara (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)
- Carlos Adel Guevara (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)
- Nathaly Marcela Díaz (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)
- Lilian Astrid Izquierdo (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)
- Ghina Mabell Benítez (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)
- Jorge Javier López (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)
- Ana Margarita Rosero (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)
- Rosaura Aroca (I.E. Madrigal San Francisco de Asís)

Presentación

El Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño en el marco del programa de cualificación docente "Fortalecimiento de las matemáticas en la educación básica en Tumaco, Policarpa y Samaniego", realizado en coordinación con la Fundación Save the Children International, asumió el compromiso de incorporar al Proyecto "Aprendemos Crecemos" reflexiones teórico-prácticas, teniendo en cuenta los propósitos expuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Curriculares de Matemáticas y Estándares básicos de competencias en matemáticas, buscan que estos susciten en las instituciones educativas del Departamento de Nariño la transformación del Plan Educativo Institucional (PEI), en particular, lo relacionado con el área de matemáticas; así como la reorientación de las estrategias pedagógicas imperantes en la enseñanza de las matemáticas en los primeros ciclos de la Educación Básica.

En esta publicación se presenta una serie de conclusiones y reflexiones determinantes para motivar la toma de decisiones de maestros e instituciones en cuanto al desarrollo de planes de mejoramiento institucional en el área de matemáticas y, en general, para promover, nuevas consideraciones sobre la planeación y desarrollo de conocimiento matemático en el salón de clase. En este sentido, la atención de este libro recae en el desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medidas, en el cual se presentan y caracterizan curricularmente una serie de situaciones de enseñanza que de forma significativa movilizan conocimiento y habilidades métricas en los primeros ciclos de la educación básica. Son cuatro las clases de medidas sobre los cuales se centra la atención. En el primer capítulo, a partir de la articulación de elementos propuestos por el MEN y de referentes teóricos propios de la etnomatemática, se diseña, aplica y evalúa una serie de tareas que suscitan el estudio de la longitud y la capacidad. El área de superficies planas, por su parte, es el objeto matemático de interés en el segundo capítulo. En este caso los referentes teóricos y prácticos asumidos consideran tanto elementos de naturaleza cognitiva, como la adaptación de algunos referentes propuestos en los Lineamientos y Estándares de Calidad para el Área de Matemáticas. Por último, en el tercer capítulo, desde una perspectiva eminentemente didáctica se proponen y caracterizan curricularmente una serie de situaciones didácticas que suscitan el estudio de las magnitudes volumen y capacidad, así como de las medidas asociadas a ellas.

Es pertinente resaltar que la enseñanza de la medida en torno a la longitud, al área, al volumen y a la capacidad no está totalmente abordada en las reflexiones que se desprenden de la resolución de las tareas aquí presentadas. Por el contrario, estas se constituyen en un primer acercamiento al estudio de estas magnitudes y las medidas asociadas a ellas. En consecuencia, es necesario considerar el diseño de nuevas tareas que complementen, amplíen o precisen los elementos y habilidades matemáticas en ellas tratados. Los estándares básicos de competencias en matemáticas propios a la construcción de los sistemas de medidas, la definición y caracterización de pensamiento métrico expuestos en los Lineamientos Curriculares y los referentes teóricos tratados en este libro, se constituyen en referentes importantes a considerar en el diseño de estas nuevas tareas.

No sobra llamar la atención que transformar nuestras prácticas educativas en acciones que susciten de manera significativa la construcción y desarrollo tanto de conocimiento como de pensamiento matemático, exige considerar, en una primera instancia, la generación de espacios de reflexión que, al interior de los Departamentos de Matemáticas de nuestras instituciones educativas, y en tiempos adecuados, permitan no solo comprender los referentes teóricos expuestos en los Lineamientos y Estándares básicos de competencias propuestos por el MEN para el área de matemáticas, sino que además susciten la discriminación de elementos prácticos y puntuales que permitan articularlos a todas las acciones que caracterizan la planeación y el desarrollo de nuestras prácticas educativas.

Dr. Gustavo-Adolfo Marmolejo A.
Coordinador del Programa "Fortalecimiento de las Matemáticas en la Educación Básica en Tumaco, Policarpa y Samaniego"

Aspectos generales

¿Qué es el proyecto "Vive la Educación"?

Es un programa encaminado a la promoción y protección de los derechos a la educación de los niños, niñas y jóvenes en los Departamentos de Nariño y Cauca, donde el principal propósito es garantizar el derecho a una educación inclusiva, pertinente y de calidad, por medio de la cual se garantice la participación en la construcción de una cultura de paz.

¿En qué consiste el Programa de "Fortalecimiento de las Matemáticas en la Educación Básica en Tumaco, Policarpa y Samaniego"?

El programa de cualificación de docentes de matemáticas surgió como una respuesta para fortalecer la enseñanza de las matemáticas en los primeros ciclos de la educación básica dentro de los desafíos que enfrentaba el proyecto Aprendiendo Crecemos (2008-2012) en el Departamento de Nariño. En esencia, el programa de formación promueve una reflexión pedagógica que motive la reorientación de los currículos de matemáticas de los primeros ciclos de Básica primaria, de otra parte pretende promover una educación pertinente, debido a que explora y recoge referentes teóricos propios de la Etnomatemática para alinearlos con los lineamientos y estándares básicos de competencias del área de matemáticas definidos por el Ministerio de Educación Nacional en los primeros ciclos de la formación inicial de niños y la niñas de zonas rural de Nariño y de la costa pacífica Nariñense.

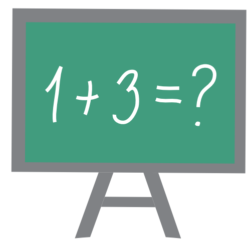
Se espera que esta primera impresión aporte en los programas de formación docente, especialmente en los docentes que tienen bajo su responsabilidad los primeros grados, y fortalezca la nueva experiencia de formación que se desarrolla en el proyecto Vive la Educación financiado por el Gobierno Canadiense en los Departamentos de Nariño y Cauca.

¿Cómo surgió este libro?

Son dos los objetivos propuestos con el desarrollo del Programa "Fortalecimiento de las Matemáticas en la educación Básica en Tumaco, Policarpa y Samaniego". El primero, aportar a los educadores matemáticos participantes elementos claros y puntuales que les permitan liderar nuevos procesos de cualificación de profesores al interior del área de Matemáticas. El segundo, brindar a los profesores de la región que no participaron en el programa, elementos teóricos y prácticos a considerar en futuras réplicas de las situaciones de enseñanza aquí presentadas. En este sentido, se asumió como un asunto ineludible el registro escrito y pormenorizado, no solo de los planes de clase diseñados, sino también de los referentes teóricos considerados en su diseño, aplicación y validación.

¿A quién va dirigido?

A profesores y profesoras de matemáticas de los primeros grados de educación básica primaria, a los coordinadores del área de Matemáticas de las Instituciones Educativas, y a especialistas en Educación Matemática, que se interesen por dotar de sentido y significado la enseñanza de las matemáticas y/o guiar procesos de cualificación docente en las Instituciones Educativas del Departamento de Nariño.



Capítulo 1

Diseño de Actividades para la Enseñanza de la Magnitud Longitud y Capacidad en la Educación Primaria y Básica desde la Etnomatemática

Hilbert Blanco-Álvarez

Resumen: Este capítulo presenta el proceso de diseño de dos actividades para la enseñanza de la magnitud longitud y una actividad para la capacidad volumétrica, creadas por maestros de la educación primaria y básica tomando en cuenta la Etnomatemática como referente teórico, en el marco del proyecto "*Fortalecimiento de las matemáticas en la educación básica de Tumaco, Policarpa y Samaniego***" realizado en la ciudad de Tumaco (Nariño- Colombia) entre los meses de julio y octubre de 2012. Finalmente, se presentan los aprendizajes de los participantes obtenidos durante el proceso y las dificultades encontradas.**

Palabras claves: Diseño de actividades; Formación de maestros de matemáticas; Etnomatemática; Cultura; Etnoeducación.

1. Introducción

Las actividades que se presentan en este capítulo se diseñaron en el marco del proyecto "*Fortalecimiento de las matemáticas en la educación básica de Tumaco, Policarpa y Samaniego*"[4] como parte del proyecto macro "*Aprendiendo crecemos*" auspiciado por la Fundación Save the Children International y con la participación del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.

Dichas actividades fueron diseñadas por maestros de la educación primaria y básica de Tumaco, y se centraban en el desarrollo del pensamiento métrico. Pero además, por ser Tumaco un municipio que está en la tarea de fortalecer su proceso de etnoeducación[5] se vio la pertinencia de incorporar al proceso de formación de maestros la Etnomatemática, definida por el profesor de matemáticas e investigador en Educación Matemática Ubiratan D'Ambrosio (1997) como "[…] la matemática que se practica entre grupos culturales identificables, tales como sociedades de tribus nacionales, grupos laborales, niños de cierto rango de edades, clases profesionales, entre otros" (p. 16), teniendo en cuenta "[…] las capacidades de clasificar, ordenar, inferir y modelar" (p. 17).

Dicha perspectiva sociocultural de la educación matemática aportó al menos dos elementos

4. El desarrollo de este proyecto en Tumaco se consolidó como el trabajo de campo de la tesis doctoral "Elementos para la formación de maestros de matemáticas desde la Etnomatemática" dirigida por la Dra. María Luisa Oliveras dentro del Grupo de Investigación Etnomatemáticas, Formación de profesores y Didáctica de la Universidad de Granada, España.
5. Entendida como la educación "que se ofrece a grupos o comunidades que integran la nacionalidad y que poseen una cultura, una lengua, unas tradiciones y unos fueros propios y autóctonos. Esta educación debe estar ligada al ambiente, al proceso productivo, al proceso social y cultural, con el debido respeto de sus creencias y tradiciones" (Ministerio de Educación Nacional, 2004, p. 7).

valiosos al diseño de las actividades: a) pensar las matemáticas como una actividad social y cultural y b) reconocer y valorar en la cultura tumaqueña la existencia de ideas matemáticas extraescolares.

Actualmente, en Colombia son varias las comunidades, quienes además de realizar ingentes esfuerzos por rescatar la lengua, la medicina tradicional, el territorio y la autonomía, trabajan en la preservación del pensamiento matemático ancestral, y este es el primer paso hacia la preservación de la etnomatemática tumaqueña. Estas consideraciones permitieron reconocer la importancia de este proceso de formación docente que se sistematizó y materializó en tres actividades. Pero, somos conscientes de que hay mucho trabajo por hacer, diseñar muchas más actividades y que las que se presentan aquí son solo un paso en un largo camino que falta por recorrer, siempre en la búsqueda del mejoramiento de la calidad del aprendizaje de las matemáticas de las niñas y los niños de Tumaco.

Se espera que la presente investigación constituya una herramienta que permita rescatar el acervo cultural de los tumaqueños y haga surgir el reconocimiento de los saberes que han sido invisibilizados por las posturas científicas occidentales, y de esta manera aportar al desarrollo del PETRAN: Proyecto Etnoeducativo Afronariñense (Organizaciones de Comunidades Negras de Nariño, 2011), aportando elementos que permitan en la clase de matemáticas tener en cuenta la tradición oral del pueblo afronariñense y los elementos culturales que circulan a nivel de prácticas cotidianas y discurso de ancestralidad, fortaleciendo así el eje de aprendizaje:

Identidad afro.

Así mismo, esta investigación buscó promover las características del perfil de un maestro afronariñense planteadas por la comunidad en el PRETAN y que responden a la necesidad de a) Un mayor compromiso del maestro para con la comunidad y su identificación con la cultura afronariñense, b) Ser conocedor y respetuoso de la cultura afronariñense, c) Ser un ejemplo de vida para los estudiantes promoviendo y motivando en ellos el deseo de terminar sus estudios, d) Un maestro investigador e innovador de su propia práctica en el aula de clase basándose en la literatura actualizada y en el acumulado cultural histórico de la comunidad, e) Un maestro ético, con valores como la tolerancia, el respeto, la solidaridad, y la gratitud. Que desde su práctica docente propenda por afianzar en el estudiante su identidad, su cultura en miras de contribuir en la construcción de un horizonte comunitario de desarrollo, y f) Un maestro constante en su proceso permanente de formación académica y cultural para asegurar una educación competitiva, contextual, crítica, intercultural y liberadora.

En adelante se expondrán los referentes conceptuales puestos en juego, la estructura del curso, la caracterización de las actividades y los comentarios finales.

2. Referentes conceptuales

Las teorías tratadas en el proceso de formación de maestros fueron dos: la Etnomatemática (D'Ambrosio, 1997; Blanco-Álvarez, 2011) y la visión de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y de los Estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) sobre las magnitudes y la medida. En adelante se presentan algunas ideas que fueron claves en el proyecto.

2.1. La Etnomatemática y sus implicaciones en la escuela

Al momento de trabajar en el aula desde una perspectiva Etnomatemática son varias las ideas que se deben replantear frente a las matemáticas, frente al papel del profesor, al papel del estudiante y el contexto, y que deben ser reflexionadas al interior de los grupos de trabajo en las instituciones educativas.

2.1.1. Conocimiento matemático

En relación a las matemáticas se hace necesario entenderlas como una actividad de razonamiento, como un acumulado cultural, donde la humanidad es la legataria de ese patrimonio que el hombre ha desarrollado a través de la historia. Ese legado no solo es un conjunto de teorías o resultados. Estas teorías fueron construcciones hechas por individuos, que respondían a actos intencionales en contexto, con fines y propósitos que tenían un objetivo en su momento histórico.

Desde una perspectiva social y cultural de las matemáticas, se considera que cualquier persona que se dedique a la enseñanza de las matemáticas, en particular los licenciados en Matemáticas y los etnoeducadores, requieren de una visión amplia de las matemáticas.

En consonancia con lo anterior, las matemáticas son un constructo social y humano, que responde a las necesidades particulares de una sociedad en espacios y tiempos diferentes. Es comúnmente aceptado que una comunidad desarrolla prácticas y reglas matemáticas con su propia lógica para entender, lidiar y manejar la naturaleza. Es decir, la relación del hombre con la naturaleza es la que impulsa el desarrollo matemático, y es el hombre mismo, quien en esa relación construye las nociones matemáticas que le van a ser de utilidad a él y a su sociedad. Tales saberes matemáticos son transmitidos de generación en generación, ya sea por medio escrito o vía oral y pasan a ser parte de la tradición cultural de un pueblo.

Desde este punto de vista, no se habla de la matemática, sino de las distintas y diversas prácticas matemáticas que se generan en el seno de las comunidades indígenas, comunidades afrodescendientes, grupos laborales, niños de la calle, entre otros. De acuerdo a esto, se puede hablar de las matemáticas de los palenqueros, los guambianos, los awa, los carpinteros, los albañiles, los matemáticos, los campesinos u otros grupos culturales.

De esta manera, el conocimiento matemático se amplia, al incorporar los saberes extraescolares al aula y los saberes previos de los estudiantes, y reflexionar con ellos sobre estos.

2.1.1.1. *Unidades de Longitud*

En relación a la medida de longitudes, es muy común en el campo hablar de distancias utilizando distintos patrones de medida y al hacer la pregunta: "¿a qué distancia está la finca de mengano?", una de las respuestas es: "a tres días de camino", "a un día", etc.; otros utilizan patrones como el tabaco, por lo que a la pregunta responden: "a tabaco y medio", lo que significa que cuando se haya fumado tabaco y medio, o ya llegó, o está muy cerca. Otros patrones de medida muy utilizados en muchas culturas son la medida a ojo, la cuarta, la brazada, el paso y el pie. Este último, el pie, es de uso común entre los niños, aún sin escolaridad, que la utilizan al construir las canchas para un partido de fútbol. Los niños saben que quién midió con su pie una de las canchas deberá medir la segunda. Ellos son conscientes de que no pueden cambiar el patrón de medida pues de esta manera las longitudes de las canchas serán desiguales, lo que se traduce en la desventaja de uno de los equipos.

2.1.1.2. *Unidades de Masa*

Otros patrones de medida interesantes se encuentran en las plazas de mercado e incluso en las recetas de cocina: el atado y la pizca. Ambas son el producto de un acuerdo social. Es de uso común en el mercado hablar de un atado de cilantro, de cebolla, y en la plaza cuando el vendedor está haciendo los atados de cilantro no cuenta las ramas de cilantro de un atado, simplemente forma atados. La medida se legitima en la cotidianidad. Ahora, ¿cuánto es una pizca?, existen diferentes respuestas: la cantidad de algo que se queda en la punta de una navaja, un poquito, una cantidad de algo que se pueda tomar con la yema de los dedos índice y pulgar. Este patrón de medida se utiliza a diario en las recetas de cocina y no existe una definición, al estilo occidental, solo funciona como una construcción social aceptada por todos.

2.1.1.3. *Unidades de Tiempo*

En relación con el tiempo, las comunidades indígenas se mueven con igual destreza en la forma de medir el tiempo en occidente como en sus formas tradicionales. Cuando tienen que cumplir una cita en el pueblo, miran su reloj para llegar puntuales, pero cuando regresan a su resguardo miran la luna para decidir si es tiempo de sembrar. Estos sujetos se mueven en ambientes culturales híbridos, pasan de una autopista cultural a otra sin notarlo.

2.1.2. Rol del Docente

Por otro lado, el profesor deberá fortalecer la idea de maestro-investigador, es decir, un maestro que en su práctica docente sea sensible a las problemáticas presentadas en el aula de matemáticas, y a partir de la sistematización, el análisis y la discusión de éstas con un grupo de colegas, a la luz de marcos teóricos de la educación matemática plantee soluciones y las socialice en congresos de la comunidad educadora. Además, diseñar proyectos, situaciones problemáticas y material didáctico tomando en cuenta aspectos sociales y culturales de su entorno que pueden servir como punto de partida para la enseñanza, el aprendizaje y la elaboración de matemáticas en el aula. Todo esto, sin lugar a dudas, llevará al estudiante a encontrar un mayor vínculo de las matemáticas con la vida cotidiana.

2.1.3. Rol del estudiante

El estudiante, desde esta perspectiva Etnomatemática, deberá reconocer y valorar la multiculturalidad en las matemáticas y ser respetuoso de la diversidad de pensamientos matemáticos. Por ende, valorar el conocimiento extraescolar, en muchos casos oral, de los adultos mayores y reconocer ideas matemáticas en el lenguaje cotidiano.

2.1.4. El contexto sociocultural

Finalmente, el contexto social y cultural debe ser tenido en cuenta, en tanto que el aprendizaje de las matemáticas no solo depende de las metodologías de enseñanza, también las interacciones con compañeros, profesores y padres de familia juegan un papel importante en dicho proceso. Así mismo, los problemas de tipo lingüístico se convierten en muchos casos en barreras para el aprendizaje de las matemáticas.

Además, se reconoce la necesidad de formar estudiantes críticos, desde las matemáticas, frente a problemas sociales como: el racismo, las diferencias de género, el elitismo, la democracia, el poder, etc., que afectan el aprendizaje de las matemáticas y que existen en las instituciones y en las aulas de clase de matemáticas. Finalmente, desde la Etnomatemática, esto es, desde el reconocimiento y la valoración del conocimiento ancestral es posible una educación matemática para la emancipación política (Skovsmose, 1999).

2.2. La didáctica de las magnitudes y las medidas

A la hora de diseñar las actividades para la enseñanza de la longitud y el volumen se reflexionó sobre el desarrollo de procesos y conceptos como los siguientes:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”
- La apreciación del rango de las magnitudes
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición
- La asignación numérica
- El trasfondo social de la medición.

Estos procesos y conceptos son propios del pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas y “hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (MEN, 2006, p. 63).

3. Estructura del Curso

El Curso se organizó en tres fases: Planeación, Implementación y Resultados. La **Planeación** contenía la etapa *Diseño cooperativo del curso* (5 horas). En esta etapa se realizaron dos reuniones con los maestros para definir las características del curso: objetivos, contenidos, la población beneficiaria, tiempos, etc.

La **Implementación** tenía tres etapas: la primera etapa: *Teórica-Conceptual* (32 horas) se dividió en tres momentos: a. Concepciones de los maestros sobre las matemáticas, b. Relación de la cultura y el currículo y c. Investigación de matemáticas extraescolares en prácticas culturales de la comunidad. La segunda etapa: *Diseño de actividades* (32 horas), la Tercera etapa: *aplicación* (40 horas).

Los **Resultados** contenía la etapa de *Evaluación* del curso por parte de los maestros participantes (2 horas).

En la Tabla 1.0 se exponen las fases, etapas, momentos y la forma de trabajo utilizada con los maestros.

Tabla 1.0. Fases, etapas, momentos y forma de trabajo del Curso orientado desde la Etnomatemática

Fase	Etapa	Momentos	Forma de trabajo
Planeación	Diseño cooperativo del curso	Reunión para elaborar un pre-diseño del curso y definir: objetivos, contenidos, fases, maestros a quien iba orientado el curso, duración, horarios, lugar	Discusión grupal
		Reunión para socializar el diseño del curso	Discusión grupal
Implementación	Teórica-Conceptual	Concepciones de los maestros sobre las matemáticas	Discusión grupal
		Relación de la cultura y el currículo	Lectura de documentos, trabajo en grupos y discusión grupal
		Investigación de matemáticas extraescolares en prácticas culturales de la comunidad	Trabajo de investigación por grupos y exposición de los resultados
	Diseño de actividades	Diseño de las actividades	Metodología Estudio de clase[1]
	Aplicación	Puesta en juego de las actividades diseñadas y Autoevaluación y coevaluación del trabajo en clase	
Resultados	Evaluación	Evaluación del curso por parte de los maestros participantes	Reflexión individual por escrito

1. **Esta metodología busca por parte de los maestros una cualificación permanente, un trabajo reflexivo y crítico sobre su práctica y consta de cuatro etapas: 1. La planeación en grupo de las actividades, 2. La implementación de la actividad y observación de clase, 3. La auto-evaluación y la co-evaluación, y 4. El rediseño de las actividades (Hart, Alston, & Murata, 2011; Marmolejo, Blanco-Álvarez, & Mosquera, 2009)**.

En adelante se explica en detalle la dinámica del trabajo en la *fase de implementación* (sombreada en la Tabla 1.0), por medio de sus tres etapas.

3.1 Etapa teórica-conceptual

En esta etapa el trabajo con los maestros[6] se realizó a través de un seminario utilizando distintas metodologías, como: mesas redondas, discusión grupal, trabajo en grupo (ver Fotografía 1.1).

Los objetivos del curso de formación fueron: a) sensibilizar a los maestros sobre la existencia de aspectos culturales y sociales en la apropiación de saberes matemáticos, ya sea en la escuela o fuera de ella; b) indagar sobre las prácticas matemáticas de la cultura tumaqueña que se encuentren en práctica o en desuso; c) reflexionar sobre la relación entre las prácticas matemáticas extraescolares encontradas y el currículo escolar; d) reflexionar sobre los elementos que enriquecerían el Proyecto Educativo Comunitario PEC desde la postura sociocultural de las matemáticas.

6. Los maestros que participaron del proyecto, en su mayoría, trabajan como docentes de la educación básica primaria, unos pocos en la educación básica secundaria, algunos en zonas rurales otros en la zona urbana de Tumaco. Todos ellos tienen a cargo el área de matemáticas y su formación profesional es muy diversa, lo cual enriqueció las discusiones y las perspectivas frente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Tales profesiones son: Licenciatura en ciencias sociales, Licenciatura en básica primaria con énfasis en informática, en lengua castellana, en ciencias naturales y medio ambiente, Normalistas, Licenciatura en comercio y contaduría, Licenciatura en matemáticas y Licenciatura en sicología de familia.

Los referentes teóricos que los maestros estudiaron, en su orden, fueron:

- Estudio de las actitudes hacia una postura sociocultural y política de la educación matemática en maestros en formación inicial (Blanco-Álvarez, 2012).
- La educación matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de licenciados en matemáticas y etnoeducadores con énfasis en matemáticas (Blanco-Álvarez, 2008).
- La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela (Blanco-Álvarez, 2011).
- Retos críticos de la investigación de temas sociales, culturales y lingüísticos en la educación en ciencias, matemáticas y tecnología (Bishop, 2005).

A la luz de estos referentes se reflexionó sobre: a) la naturaleza de las matemáticas y de los saberes matemáticos extraescolares; b) las relaciones del currículo de matemáticas con la cultura; c) se realizaron indagaciones sobre las prácticas matemáticas de la cultura tumaqueña (ver Fotografía 1.2), utilizando como metodología las actividades universales: contar, medir, diseñar, jugar, localizar y explicar (Bishop, 1999).

Fotografía 1.1. Los maestros discutiendo los documentos de trabajo en grupo.

Fotografía 1.2. Los maestros realizan una lista de las prácticas matemáticas encontradas en la cultura tumaqueña.

Los hallazgos de las prácticas matemáticas de la cultura tumaqueña se presentan en la Tabla 1.1.

Contar	Medir	Diseñar	Localizar	Jugar	Explicar
La ración	*Longitudes*	La rampira	Los linderos	Chapacajón	Práctica
El ciento	La yarda	El abanico	La manga		Observación
La docena	La guasca	La catanga	Sanja		
La sarta	El paso	Petate de tetera	Churo de guadua		
La carga	La cuarta	La cobija	humo		
	La braza	La canoa			
	El codo	El canalete			
	El geme	El calabazo			
	La vara	Tagua			
	Peso				
	Balanza humana				
	Totumado				
	El puño				
	Pizca				
	Balanza de mate				

Tabla 1.1. Prácticas matemáticas encontradas por los maestros en la cultura tumaqueña

3.2. Etapa diseño de actividades

Se inició dividiendo el grupo de participantes en tres subgrupos, los maestros que trabajaban entre primero y tercero de primaria, entre cuarto y quinto, y los que trabajaban entre sexto y séptimo de la educación básica secundaria. Luego cada grupo realizó la lectura reflexiva del apartado sobre pensamiento métrico y sistemas de medidas de los Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y se revisaron los Estándares de competencias básicas en matemáticas, en particular para el pensamiento métrico y los sistemas de medidas; de allí reconocieron y clasificaron los niveles de construcción de la idea de magnitud y su asignación numérica.

Con los elementos teóricos mencionados anteriormente y teniendo en cuenta las prácticas matemáticas que cada grupo había investigado en la comunidad tumaqueña, y aperados de los libros de texto que usualmente utilizan los maestros para la preparación de clase se dio inicio a la construcción de las actividades. Las Fotografías 1.3 y 1.4 ilustran lo anterior.

Fotografía 1.3. Maestros reunidos diseñando las actividades.

Fotografía 1.4. Los maestros utilizando sus libros de texto para el diseño de actividades.

El diseño y planeación de estas actividades fueron registradas haciendo uso de un formato, en el que se solicitaba la siguiente información: Nombre de la institución, fecha, hora, grado, número de estudiantes, nombre del profesor, nombre de la unidad, estándares movilizados, logros a desarrollar, indicadores de logro y seis columnas: actividades, consignas, dificultades esperadas de los estudiantes, ayuda del profesor, material y tiempo.

3.3. Etapa aplicación

Esta etapa consistió en acompañar y evaluar la implementación y rediseño de algunas situaciones de enseñanza puestas en juego con estudiantes de tercero (niños entre los 8 y 9 años) y quinto grado (niños entre los 10 y 11 años) de la educación primaria y de grado sexto (niños entre los 11 y 12 años) de la educación básica.

Para la implementación de las actividades, un profesor de cada subgrupo desarrolló la actividad con los estudiantes para la cual había sido diseñada, mientras los docentes restantes observaron la clase y siguieron la actividad por medio del plan de clase (Fotografía 1.5).

Finalizada la clase, se realizó una mesa redonda donde se llevó a cabo, primero, una autoevaluación del desarrollo de la actividad por parte del profesor que ejecutó la actividad, y luego los maestros observadores hicieron sus aportes constructivos para el mejoramiento de ésta (Fotografía 1.6).

Fotografía 1.5. Maestros en la parte de atrás del salón observando la clase

Fotografía 1.6. Maestros en el proceso de autoevaluación y coevaluación de la actividad

4. Caracterización de las actividades

Finalmente, fueron tres las actividades diseñadas por los maestros. Estas tenían como objetivo explorar el uso de patrones arbitrarios para la medición de longitudes y capacidad volumétrica. Debe quedar claro al lector que para el desarrollo del pensamiento métrico de los estudiantes es necesario el diseño de más actividades que partan de la construcción de los conceptos de magnitud, en nuestro caso de longitud y capacidad, hasta llegar a la asignación numérica, tal y como se señaló en los referentes teóricos.

La primera actividad se tituló *Medidas arbitrarias de longitud*, que buscaba desarrollar habilidades en los niños de grado tercero de la educación básica en la Institución Educativa Ciudadela Mixta Colombia en el uso de patrones de medida no estandarizados, a cargo de la profesora Cielo Angulo. En la Tabla 1.2 se caracterizan los elementos a considerar en la aplicación en el aula de clase y esta actividad se ilustra en las fotografías 1.7 y 1.8.

Fotografía 1.7. Los niños miden longitudes con patrones arbitrarios.

Grado a aplicar	Tercero de Básica Primaria
Pensamientos Matemáticos	Métrico y Sistemas de Medidas.
Estándares	Métrico y Sistemas de Medidas — Realizo y describo procesos de medidas con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto.
Contenidos y Objetivos	Patrones arbitrarios para determinar la medida de una longitud. El objetivo general es desarrollar competencias matemáticas en los niños de grado tercero de la educación básica primaria alrededor de la manipulación de diferentes patrones arbitrarios utilizando el cuerpo.
Tiempo de duración	Dos (2) sesiones de clase continúas de cincuenta (50) minutos cada una.
Materiales	Cuaderno y lápiz
Gestión didáctica que hace el docente ante esta situación	Motivación: Primero la profesora pide a los estudiantes que salgan al patio y se organicen en grupos de 5 personas. Luego, cada grupo escogerá 2 estudiantes, el más bajo y el más alto del grupo, para que registren los saltos y los 3 estudiantes restantes realizarán saltos largos a partir de un punto de partida seleccionado por ellos. Finalmente, los dos estudiantes que no saltaron (el más bajo y el más alto) medirán con sus pies, uno seguido del otro, la distancia recorrida por los saltos de sus compañeros y anotarán las medidas en su cuaderno. Posteriormente los niños regresan al salón y responden las siguientes preguntas: ¿Cuántos pasos midió el niño pequeño?, ¿Cuántos pasos midió el niño más grande?, ¿De qué otra manera podemos medir estos saltos?, ¿Estas medidas en qué juegos ustedes las utilizan? Trabajo en grupo: La profesora solicita a los niños que regresen al salón y que se organicen en los mismos grupos. Luego les pide responder las siguientes preguntas: ¿Qué partes de tu cuerpo puedes utilizar para medir la altura y el ancho del escritorio?, ¿Cómo creen que serán los resultados de la medición de cada uno de sus compañeros al compararlos?, luego los niños miden la altura y el ancho del escritorio del profesor. Posteriormente, responden la pregunta ¿Si las medidas de los compañeros son distintas, qué puede hacerse para que las medidas resulten iguales? Socialización: Cada grupo explica a sus compañeros los resultados obtenidos. Trabajo individual: Cada estudiante registra en el cuaderno cuáles son las diferentes medidas arbitrarias tomándolos del tablero, escribiendo como título: Medidas arbitrarias de longitud y luego escriben: El paso, el salto, el pie, el codo, la cuarta, son patrones arbitrarios para medir longitudes. Esos patrones de medida no determinan una medida exacta. Luego, los niños dibujan cada una de ellas. Actividad de síntesis: Se pide a los niños que se pongan de pie para cantar la ronda ANDARELE. El profesor o profesora canta la ronda y luego lo hace con los niños. Mi abuelito Juan José, Andarele vamos ya Me invitó a hacer las medidas, Andarele vamos ya Las medidas ancestrales, Andarele vamos ya Empezamos con el salto, Andarele vamos ya Utilizamos las manos, Andarele vamos ya Y seguimos con los codos, Andarele vamos ya Estas partes de mi cuerpo, Andarele vamos ya Sirven para hacer medidas, Andarele vamos ya. Actividad en casa: Investigar sobre los patrones arbitrarios de medición estudiados en clase y si éstos son utilizados en tu familia.
Dificultades esperadas de los estudiantes	• Para hacer el salto no se ubicaban bien en el punto de partida. • Después del salto querían adelantarse para llegar a la misma medida del compañero. • Manejo adecuado de las diferentes partes del cuerpo que escojan para medir. • Diferenciar entre ancho y altura. • Registrar el concepto que se encuentra en el tablero. • Aprenderse la canción.
Ayuda del profesor	• Ubicarlos en el punto de partida. • Explicar el uso adecuado de los patrones antropomorfos que escojan los niños. • Explicar cuál es el ancho y alto del escritorio. • Supervisar que los estudiantes transcriban bien el concepto del tablero a su cuaderno. • Repetir la canción hasta que sea memorizada.

Tabla 1.2. Caracterización de la primera actividad

Fotografía 1.8. Los niños miden longitudes con patrones arbitrarios.

Fotografía 1.9. Niños utilizan patrones arbitrarios.

La segunda actividad, se desarrolló con niños de grado quinto de la educación básica en la Institución Educativa Iberia, a cargo de la profesora María Cecilia Gómez. El tema principal fue el desarrollo del pensamiento métrico, en particular el uso de patrones de medida no estandarizados de capacidad. En la Tabla 1.3 se caracterizan los elementos a considerar en la aplicación en el aula de clase y las Fotografías 1.9 y 1.10 ilustran el desarrollo de esta actividad.

Fotografía 1.10. La profesora explica el uso de la guadua como patrón arbitrario.

La tercera actividad, se desarrolló con niños de grado sexto de la educación básica en la Institución Educativa Técnica Agropecuaria.

Candelilla, a cargo de la profesora Pilar Mina. El tema principal fue el desarrollo del pensamiento métrico, en particular el uso de patrones de medida no estandarizados. Véase las Fotografías 1.11 y 1.12.

Grado a aplicar	Quinto de Básica Primaria	
Pensamientos Matemáticos	Métrico y Sistemas de Medidas	
Estándares	Métrico y Sistemas de Medidas	Diferencio y ordeno en objetos y eventos propiedades o atributos, que se puedan medir (longitud, distancia, áreas de superficies, volúmenes, de cuerpos, sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes, pesos, masas de cuerpo sólido, duración de eventos y procesos, amplitud de ángulos.
Contenidos y Objetivos	El contenido es Medidas de capacidad. El objetivo general es desarrollar competencias matemáticas en los niños de grado quinto de la educación básica primaria alrededor de la manipulación de diferentes patrones arbitrarios de capacidad como el calabazo y la guadua.	
Tiempo de duración	Una (1) sesión de clase de cuarenta (45) minutos.	
Materiales	Calabazo, guadua, mate, cucharas de mate, botellas y cuaderno.	
Gestión didáctica que hace el docente ante esta situación	Motivación y trabajo en grupo: La maestra invita a los estudiantes a formar grupos de 5 estudiantes. Luego se reparten los materiales: guadua, calabazo, mate, cucharas de mate y botellas. Un grupo debe llenar las guaduas con agua utilizando las botellas; otro grupo llenar los calabazos con una taza de guadua; otro grupo llenar los calabazos con una cuchara de mate y otro grupo debe llenar la guadua con la mano. Después de que cada grupo haya llenado de agua el material que le correspondió, los niños responden las siguientes preguntas: ¿cuántas manos utilizaron para llenar el calabazo?, ¿cuántas botellas utilizaron para llenar la guadua?, ¿cuántas cucharas de mate utilizaron para llenar los calabazos?, ¿Será que tu calabazo tuvo la misma capacidad que el de tu compañero? La profesora reflexiona con los niños sobre la capacidad de cada uno de los materiales utilizados y llama la atención sobre la necesidad de tener una medida estándar. Habla sobre la capacidad de la botella que es de 200 ml y a partir de allí hace equivalencias con un litro, y luego del litro con cada uno de los implementos utilizados. Escribe dichas equivalencias en el tablero. La profesora pregunta cuál es la utilidad que se le da a esos implementos en la comunidad. Trabajo individual: Cada estudiante dibujará en su cuaderno los diferentes recipientes que utilizaron para la actividad anterior, colocándole las medidas que obtuvieron. Actividad de síntesis: Se pide a los niños que se pongan de pie para cantar una ronda. El profesor o profesora canta la ronda y luego lo hace con los niños En la feria del maestro Andrés me encontré un calabazo En la feria del maestro Andrés me encontré una guadua Vaya usted, vaya usted a la feria del maestro Andrés me encontré una guadua Ana Milé, Ana Milé En la feria del maestro Andrés Ana Milé, Ana Milé En la feria del maestro Andrés Actividad para la casa: traer guaduas cortadas que tengan la capacidad de un litro	
Dificultades esperadas de los estudiantes	• No tuvieron la precaución de observar la capacidad en la botella y echaron cualquier medida. • No contaron el número de manos de agua que ocuparon para llenar el calabazo. • Aprenderse las medidas de capacidad	
Ayuda del profesor	• Organizar los materiales por capacidad • Recordar las medidas estándar del litro • Recordar que Capacidad es la cantidad de líquido que puede contener un recipiente	

Tabla 1.3. Caracterización de la segunda actividad

Fotografía 1.11. Una madre de familia de Candelilla cuenta a los niños las técnicas de medir de su comunidad.

Fotografía 1.12. Las niñas de la Institución Educativa Candelilla miden longitudes usando como patrón de medida el pie.

En la Tabla 1.4 se caracterizan los elementos a considerar en la aplicación en el aula de clase.

Estas actividades aunque son conocidas por muchos maestros, en esta oportunidad son trabajadas con una perspectiva renovada, pues no solo se trata de motivar a los niños, sino que se busca el reconocimiento del uso que los niños hacen de patrones arbitrarios en sus juegos fuera del aula, y un fin aún mayor es el de reivindicar los distintos saberes matemáticos que circulan en la cultura tumaqueña y así aportar a la construcción de la etnoeducación afrocolombiana.

5. Comentarios finales:

Aprendizajes significativos, dificultades y conclusiones

Para terminar este capítulo, los aprendizajes más significativos que tuvieron los maestros participantes del proyecto, las dificultades detectadas en el proceso fueron:

El reconocimiento de la existencia de procesos de enseñanza y aprendizaje de prácticas matemáticas fuera del aula de clase.

La existencia de prácticas matemáticas en contextos laborales autóctonos y la pertinencia de incorporar dichas prácticas al currículo escolar, buscando hacer más familiar y significativas las matemáticas para los niños.

El respeto por la diversidad cultural desde el reconocimiento de múltiples saberes matemáticos escolares y extraescolares.

La importancia de reconocer, legitimar y valorar los saberes matemáticos extraescolares que los niños traen desde sus casas.

Grado a aplicar	Sexto de Básica Secundaria	
Pensamientos Matemáticos	Métrico y Sistemas de Medidas	
Estándares	Métrico y Sistemas de Medidas	Realizo y describo procesos de medidas con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto
Contenidos y Objetivos	Patrones arbitrarios para determinar la medida de una longitud. El objetivo general es desarrollar competencias matemáticas alrededor de la manipulación de diferentes patrones arbitrarios utilizando el cuerpo	
Tiempo de duración	Una (1) sesión de clase de cincuenta (50) minutos.	
Materiales	Cuaderno y lápiz	
Gestión didáctica que hace el docente ante esta situación	**Motivación:** La maestra presenta una madre de familia que les habla de las distintas formas de medir de la comunidad. **Socialización:** La maestra pregunta al grupo lo aprendido con el relato de la madre de familia. Trabajo individual: se pide a los estudiantes que en su cuaderno escriban: Medidas de longitud. Las medidas antropomorfas tales como: el pie, el codo, la braza, la cuarta, el paso y la pulgada, fueron herramientas que nuestros ancestros utilizaron como patrones arbitrarios de medidas, las cuales eran utilizadas de acuerdo a la necesidad existente. Esos patrones reciben el nombre de medidas ancestrales. Trabajo en grupo: se pregunta a los estudiantes que ¿si tenemos necesidad de medir en un lugar donde no contamos con ninguna herramienta de medida, cómo podemos hacerlo? Luego se les pide que se organicen en grupos y salgan del salón con un cuaderno y lapicero, y midan con pasos el largo y el ancho de un aula contigua. Uno de los integrantes anota en el cuaderno los resultados de los compañeros. **Socialización:** cada grupo informa cuántos pasos midió el ancho y el largo y se discute por qué hubo resultados diferentes.	
Dificultades esperadas de los estudiantes	· Confusión entre el largo y el ancho · Utilizar patrones arbitrarios	
Ayuda del profesor	· Explicar qué es el largo y el ancho · Explicar cómo usar partes del cuerpo para medir longitudes	

Tabla 1.4. Caracterización de la tercera actividad.

Comprender las matemáticas como una construcción social y humana.

La importancia de enriquecer el currículo con las prácticas matemáticas autóctonas de esta región y así enriquecer el proceso de resignificación del currículo en el marco del proceso de construcción de un Proyecto Educativo Comunitario (PEC) orientado hacia la etnoeducación.

La construcción de la magnitud y de su asignación numérica no es tan inmediata como se pensaba, sino que debe transitar por la construcción del concepto magnitud, luego reconocer el proceso de conservación de las magnitudes, estimación de magnitudes y el proceso de capturar lo continuo con lo discreto, apreciación del rango de las magnitudes, selección de unidades de medida, de patrones e instrumentos, diferencia entre la unidad y el patrón de medición, y finalmente, la asignación numérica y el papel del trasfondo social de la medida.

La importancia y la necesidad del trabajo en grupo a la hora de diseñar las actividades. Así como el diálogo constante entre los maestros de la educación primaria con los maestros de la educación básica.

La pertinencia de desarrollar en el quehacer diario de los maestros autoevaluaciones y co-evaluaciones de las actividades puestas en juego en el aula de clase.

La necesidad de anticiparse, en el proceso de diseño de actividades, a las dificultades que los estudiantes podrían encontrar y las posibles actividades complementarias.

La insuficiente relación que existe entre el currículo planeado y el currículo desarrollado en el aula. El primero como un requisito para la Secretaría de Educación y el segundo como la práctica real en el aula con los niños.

Algunas dificultades detectadas en el proceso fueron:

Aunque se realizó una amplia reflexión sobre la importancia y la pertinencia de la incorporación de prácticas matemáticas existentes en la cultura, en la fase de diseño de actividades estas se incorporaron de manera muy tímida.

A pesar de las reflexiones realizadas sobre la importancia de trabajar con los niños la construcción de la magnitud, en las actividades terminó imponiéndose la asignación numérica.

Otra dificultad fue la poca formación de los maestros en didáctica de las matemáticas, la escasa lectura de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas publicados por el Ministerio de Educación Nacional en 1998 y la falta de tiempo para profundizar en otras temáticas de las matemáticas en que los maestros estaban interesados.

En las conclusiones quiero resaltar las impresiones de los maestros sobre el proceso de formación desarrollado, citando sus propias palabras:

"El proceso de formación fue muy bueno, porque nos llevó a rescatar toda nuestra cultura porque hemos sido aculturizados y hemos perdido nuestra propia identidad como afrodescendientes y por eso no hay una apropiación de nuestro territorio"[7]

"El Proyecto Educativo Comunitario debe insertar todos los procesos que se den en la Etnomatemática para apropiar una educación propia y ancestral para darse cuenta de las formas como pensaban, interactuaban y vivían los ancestros para proyectar todos estos procesos en la comunidad educativa"[8]

"Es de vital importancia atender esta capacitación porque en la realización del Proyecto Educativo Institucional no se ha dado importancia a nuestra cultura, nos hemos enfocado a aceptar lo que nos imponen las editoriales, desconociendo nuestra cultura. Esto nos permite valorar lo nuestro y así las niñas y los niños de nuestra región amarán su estudio y el lugar donde viven"[9]

7. Palabras de la maestra Adiela Guagua.
8. Palabras del maestro Lino Cabezas.
9. Palabras de la maestra Miryam Rivadeneira.

"El proceso de formación me permitió conocer nuevas herramientas educativas para facilitar la comprensión de los conocimientos a los estudiantes a partir de los conocimientos que utilizaron nuestros ancestros de acuerdo a las necesidades vivenciales del entorno, lo que en cierto modo pretende que los estudiantes se enamoren de las matemáticas"[10]

"Fue un trabajo que nos ayuda a despertar iniciativas constructivas, activas y con un dinamismo para hacer una clase mucho más participativa"[11]

"El proyecto aporta tantos beneficios a nuestro aprendizaje que debe ser aplicado a nivel municipal y crear un currículo propio con textos propios para el enriquecimiento de nuestro quehacer pedagógico"[12]

"Las matemáticas se han mirado como la materia difícil y tenemos que cambiar esta visión haciendo que sean lúdicas y significativas para cada uno de los estudiantes"[13]

"Mi reflexión resalta la importancia de rescatar los saberes ancestrales de esta región resaltando que el contexto social o cultural se lo puede llevar al aula en forma significativa para que el aprendizaje pueda impactar en el educando y no abandonar el saber cultural o ancestral que es relevante destacar y resaltar"[14]

"Que cuando se trabaja con los recursos del medio con las cosas que a diario los niños utilizan y lo hacen de una forma concreta y vivencial se es más fácil el entender y comprender lo que se quiere porque para ellos se hace de mayor interés"[15]

Queda entonces la puerta abierta y la invitación extendida a todas las maestras y maestros a implementar en sus instituciones el diseño, implementación y evaluación de actividades desde una perspectiva etnomatemática, con el objetivo de empoderar a los estudiantes y valorar la cultura de la región.

10. Palabras de la maestra Pilar Mina.
11. Palabras del maestro Miller Quiñones.
12. Palabras de la maestra Elizabeth Burbano.
13. Palabras de la maestra Cielo Angulo.
14. Palabras de la maestra Yolima Castillo.
15. Palabras de la maestra Maricel Cuero.

Referencias

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós Ibérica.

Bishop, A. (2005). Retos críticos de la investigación de temas sociales, culturales y lingüísticos en la educación en ciencias, matemáticas y tecnología. En A. Bishop, *Aproximación sociocultural a la Educación Matemática* (pp. 149-165). Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle

Blanco-Álvarez, H. (2008). La Educación Matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de Licenciados en Matemáticas y Etnoeducadores con énfasis en matemáticas. *Boletín ASOCOLME*, 1(1), 4-6.

Blanco-Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 59-66.

Blanco-Álvarez, H. (2012). Estudio de las actitudes hacia una postura sociocultural y política de la Educación Matemática en maestros en formación inicial. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 1 (1), 57-78.

D'Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In A. Powell & M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education* (pp. 13–24). Albany, EE.UU: SUNY Press.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (Eds.). (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education.* New York: Springer.

Marmolejo, G., Blanco-Álvarez, H., & Fernández, E. (2009). El estudio de clase y la formación de licenciados en matemáticas en la Universidad de Nariño. En L. I. Vergara (Ed.), *Estudio de clase: una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas educativas* (pp. 93–104). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas*. Serie lineamientos curriculares. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Normatividad básica para la etnoeducación*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Organizaciones de Comunidades Negras de Nariño. (2011). *PRETAN- Proyecto Etnoeducativo Afronariñense*. Tumaco: Secretaria Departamental de Educación de Nariño.

Capítulo 2

Situaciones problemáticas para la enseñanza del área de regiones poligonales en los primeros ciclos de la educación básica. Introducción a la magnitud área y su medida

Gustavo-Adolfo Marmolejo

Resumen: El área de superficies planas representa gran complejidad para el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes colombianos. Las apuestas de enseñanza tradicionales no han logrado transformar los bajos niveles de logro mostrados por los estudiantes al enfrentar pruebas externas. Es necesario, pues, reflexionar sobre el diseño de nuevas propuestas de enseñanza que aseguren su aprendizaje. En este capítulo se presentan y caracterizan curricular, matemática y cognitivamente dos situaciones problemáticas diseñadas por un grupo de profesores que participaron en el programa de formación de profesores de matemáticas "Fortalecimiento de las matemáticas en la Educación Básica en Tumaco, Policarpa y Samaniego" financiado por la institución Save the Children. Una apuesta encaminada a la construcción del área como una clase de magnitud, la otra al estudio de la medida de cantidades de área. Para el diseño de estas situaciones se adaptaron y complementaron, con nuevos referentes conceptuales, los elementos expuestos en los lineamientos curriculares y Estándares de calidad en el área de Matemáticas.

Palabras claves: situaciones problemáticas; pensamiento métrico; pensamiento espacial; área de superficies planas.

1. Introducción

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) aporta elementos teóricos y prácticos a considerar por las instituciones educativas colombianas al organizar el currículo de matemáticas. Son tres los aspectos a tener en cuenta: procesos generales, conocimientos básicos y contexto. El primero relacionado con las habilidades cognitivas propias al desarrollo de conocimiento matemático y que se articulan con el desarrollo de pensamiento métrico, geométrico, numérico, etc. Es el caso de la resolución y planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Los conocimientos básicos, por su parte, tienen "que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas (MEN, 1998, p. 35). Los sistemas matemáticos son "aquellos relacionados con la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medidas…" (MEN, 1998, p. 35). El tercer aspecto "tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que dan sentido a las matemáticas que aprende" (MEN, 1998, p. 36), en él se consideran como variables de diseño e implementación de secuencias de enseñanza las condiciones sociales y culturales, el tipo de interacciones, los intereses generados, las creencias y las condiciones económicas del grupo social en el que se circunscribe el acto educativo.

Uno de los sistemas matemáticos en los que ha sido más crítico o por lo menos más notable el bajo nivel de logros alcanzado por los estudiantes es el relacionado con los sistemas de medida. Estos bajos resultados se relacionan con algunas características que se dan en la enseñanza de la medida en las instituciones escolares (MEN, 1998, p. 62), es el caso de la desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas, el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, la introducción a la medida bajo la utilización de instrumentos refinados y complejos (descuidándose la construcción de la magnitud y el desarrollo de los procesos de medición) y el desconocimiento del desarrollo histórico de la medida. Igualmente, las dificultades que para los alumnos conllevan las ideas de las nociones de medida, se constituyen en otro elemento que suscita que la medida sea uno de los sistemas matemáticos que más complejidad representa a los estudiantes en su aprendizaje. Entre diversas dificultades Dickson, Brown y Gibson (1991) destacan el no uso de diferentes tipos de unidades para medir tanto el perímetro y el área de una superficie como el volumen de un sólido; la falta de comprensión tanto de la relación entre el tamaño de la unidad escogida y el número de veces necesario para recubrirla en una longitud, superficie o espacio dado, como de la existencia de diferentes unidades de medida estándar y el desconocimiento del papel e importancia que desempeñan en los procesos de medición. Así, mismo, como si fuera poco, las clases de problemas diseñados con fines educativos que suelen destacar aspectos de naturaleza numérica (conteo y sustitución de valores numéricos en formulas dadas) y que dejan de lado los juicios sobre estimación, aproximación y error, se constituyen en otro importante elemento que explica el por qué la medición representa complejidad en el aprendizaje de las matemáticas en el escuela (para mayor información ver Marmolejo y González, 2015a).

Pruebas externas nacionales e internacionales ponen en evidencia que para los estudiantes colombianos la medición es un objeto matemático que genera especial complejidad. En relación a pruebas externas nacionales, Marmolejo (2005) resalta que en las Evaluaciones Censales de Calidad de la Educación aplicadas a estudiantes de grado quinto de Educación Básica, el nivel de logro alcanzado en el tópico de geometría y medición es el más bajo de toda la prueba. Únicamente el 33.50% de los estudiantes mostraron una adecuada comprensión sobre los elementos y habilidades métricos y geométricos movilizados en la prueba. Con respecto a las pruebas externas internacionales, en el TIMSS/96 se encontró que nuestros estudiantes están preparados para resolver adecuadamente entre un 15% y un 20% de las preguntas de medición que fueron propuestas en dicha prueba, mientras que los estudiantes de los demás países están preparados para resolver el 52% de ellas (MEN, 1996).

Si bien, no son pocas las clases de medida que se estudian en la escuela, la atención de este capítulo recae de forma exclusiva en el área de superficies planas. Son varios los argumentos que explican tal elección, por una parte, es la medida a la que se da mayor importancia en la Educación Básica (Marmolejo, 2007, 2014) y el área es un objeto matemático que desempeña un importante rol en la construcción de nuevos conceptos matemáticos (Marmolejo, 2010). Por otra parte, pruebas externas como las citadas en el párrafo anterior ponen en evidencia que la mayoría de los estudiantes colombianos no están familiarizados con estrategias como la descomposición de una figura en otra donde el cálculo de la medida de la cantidad de área sea más sencillo de calcular. Hay además indicios de confusiones entre los conceptos de área y perímetro y se observan dificultades con la deducción, identificación y aplicación de fórmulas para calcular áreas de figuras básicas como los triángulos y los rectángulos (Ver Marmolejo & González, 2015a).

Las diversas dificultades con las que se encuentran los estudiantes en la comprensión del concepto de área, su presencia e importancia en la construcción de conocimiento matemático en la escuela y el hecho de que la enseñanza «tradicional» no ha logrado avances significativos que permitan mejores resultados (Chamorro & Belmonte, 1994; Marmolejo y González, 2015a); resalta la importante y urgente necesidad de realizar estudios y propuestas desde nuevas perspectivas teóricas que permitan transformar la enseñanza y aprendizaje del área en la escuela.

En este sentido, el presente capítulo tiene como principal propósito aportar elementos teóricos y prácticos, que permitan a los profesores de matemáticas diseñar e implementar situaciones de enseñanza que susciten el aprendizaje del área de superficies planas. De esta forma, en una primera instancia, se describen, se transforman y complementan los referentes curriculares expuestos por el MEN para la enseñanza del área de superficies planas en las instituciones educativas colombianas. Posteriormente, se establece una metodología de trabajo interinstitucional donde un grupo de profesores reflexionan sobre elementos teóricos propios de la medida y las magnitudes, construyen una metodología de diseño de tareas de áreas de superficies planas, diseñan una serie de tareas dirigidas a introducir el estudio del área en los primeros dos ciclos de la Educación Básica, aplican un estudio piloto y a partir de las posibilidades y dificultades encontradas en él rediseñan las tareas aplicadas. Por último, en este capítulo se caracteriza matemática, cognitiva, didáctica y curricularmente los aspectos a considerar en futuras réplicas de las tareas en este documento presentadas.

2. Referentes Conceptuales

Como se señaló en el tópico anterior la atención de este documento recae en la enseñanza del área de superficies planas y su medida. Nuestro principal propósito es presentar dos secuencias de enseñanza encaminadas una a la construcción del área como una clase de magnitud, la otra a la medida directa de áreas. Se consideraron seis referentes teóricos tanto para el diseño de las tareas que conforman las secuencias de enseñanza como para la caracterización de los elementos a considerar y desarrollar en su aplicación, a saber: procesos generales (MEN, 2006), visualización (Duval, 2003; Marmolejo & Vega, 2012; Marmolejo & González, 2013 a, b), pensamientos espacial y métrico (MEN, 1998), situaciones problemáticas (MEN, 1998), magnitud y medida (Chamorro & Belmonte, 1994), Zona de Desarrollo Próximo (Vygotsky, 1979) y estructura de control (Balachef & Gaudín, 2010; Mesa, 2010). En los apartados siguientes definimos y describimos con cierto detalle cada uno de estos elementos:

2.1. Procesos Generales

Son cinco los procesos generales que se contemplan en los Estándares Básicos de Competencia en Colombia para el Área de Matemáticas: la formulación, tratamiento y resolución de problemas, la modelación, la comunicación, el razonamiento, la formulación y la comparación y ejercitación de procedimientos. Las tareas sobre las cuales centra la atención este documento privilegian el desarrollo de todos los procesos generales antes mencionados salvo la modelación y la formulación y comparación y ejercitación de procedimientos. Así mismo, se considera un proceso al cual el MEN (2006) no hace referencia, pero, que en el aprendizaje y enseñanza de la geometría y la medición (tópicos de interés en este documento) se caracteriza tanto por el alto nivel de complejidad que representa para los estudiantes al recurrir a él (Marmolejo & Vega, 2012), como por el importante rol que desempeña en el desarrollo de procedimientos heurísticos (Duval, 1999), los cuales guían algunos procesos deductivos propios de las matemáticas, me refiero a la actividad cognitiva de la visualización. De forma breve se clarifica a continuación cada uno de estos términos:

2.1.1. Formulación, tratamiento y resolución de problemas.

En palabras del MEN (2006), este proceso debe desarrollarse de forma continua a lo largo de todos los grados de la educación obligatoria, y, por ningún motivo, ha de ser considerado como una actividad aislada o esporádica. Se considera que la formulación, tratamiento y resolución de problemas ha de convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, pues, “las situaciones problemas proporcionan el contexto inmediato donde el quehacer matemático cobra sentido” (p. 52). La importancia de este proceso radica en que permite “desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos [los problemas], encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas” (p. 52).

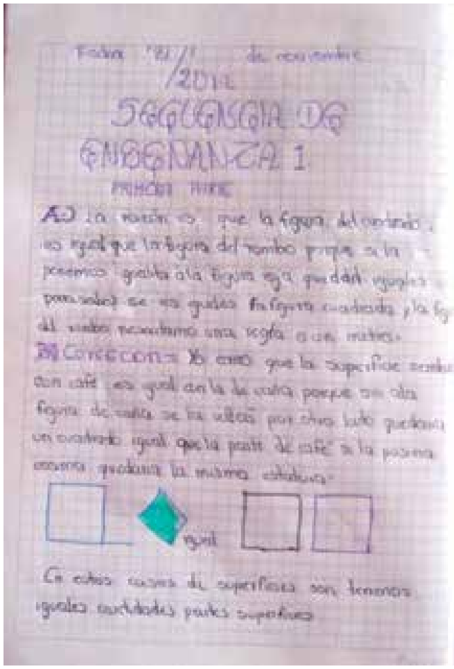
2.1.2. Comunicación.

Los objetos que estudia las matemáticas tienen una característica que los diferencia de aquellos cuya reflexión se realiza en otras disciplinas: no son asequibles vía sensorial. Al contrario, el único camino posible para relacionarnos con ellos es a través de representaciones (figuras geométricas, gráficos cartesianos, escritura aritmética, escritura algebraica, tablas, lengua natural, etc.). Es por medio de estas representaciones que aprendemos, enseñamos y construimos las matemáticas.

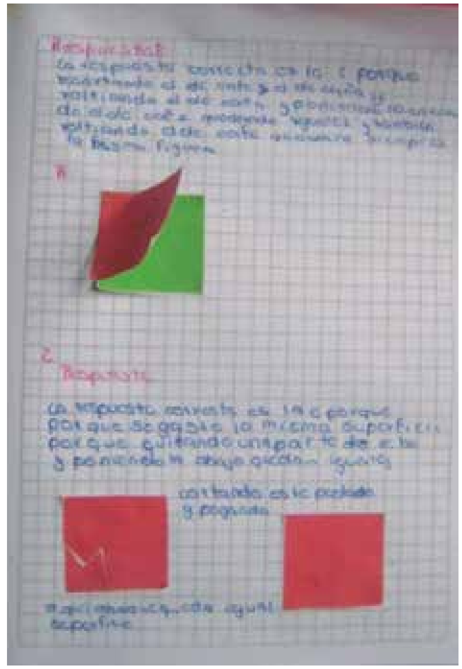
Fotografía 2.1. Una estudiante explicando y justificando su procedimiento.

Según Duval (1999), una de las tres funciones que deben desarrollar las representaciones para constituirse en verdaderos referentes sobre los cuales construir conocimiento, es la comunicación. Esta juega un papel determinante no solo para dar a entender a otro qué es lo que hemos hecho o lo que estamos pensando, sino que además apoya las otras dos funciones que deben promover el uso de representaciones en el desarrollo de conocimiento: transformación y objetivación de conocimiento. Acciones como describir un procedimiento, explicarlo y justificarlo permiten desarrollar habilidades acordes al proceso aquí referido.

Teniendo en cuenta que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas los estudiantes han mostrado grandes complejidades para pasar de un modo de comunicación verbal a uno escrito (Marmolejo, 2007) y que los profesores no suelen exigir, menos acompañar y transformar el desarrollo de descripciones y explicaciones en un formato escrito (Marmolejo & Vega, 2012), es necesario entonces asignar espacios donde el despliegue de procedimientos, incluidas sus respectivas argumentaciones, se realicen de forma escrita. Esta manera de proceder desempeña un importante papel en el cual nuestros estudiantes pueden tomar conciencia, no solo sobre las acciones o propiedades matemáticas que en el desarrollo de una tarea ponen en juego, sino también de cuáles son los aspectos que al resolver una problemática planteada no han sido comprendidos o cuáles de ellos están siendo aplicados de forma equivocada.



Fotografía 2.2. Descripción de un procedimiento de forma escrita.



Fotografía 2.3. Descripción de un procedimiento de forma escrita.

Como haremos referencia más adelante, la comunicación oral o escrita guiada por el educador o por un compañero de estudio, puede desempeñar un importante catalizador en la toma de conciencia de los aspectos previamente referenciados (Vygotsky, 1979). Por último, es importante resaltar que el desarrollo de habilidades argumentativas para la comunicación oral y escrita no debe ser responsabilidad exclusiva de los docentes de lenguaje; describir un procedimiento, explicarlo y justificarlo deben ser consideradas acciones idóneas en cualquier área del conocimiento, incluso en el lenguaje simbólico de las matemáticas.

2.1.3. Razonamiento

Según el MEN (2006), la enseñanza de las matemáticas en los primeros grados de la educación obligatoria, debe suscitar el desarrollo de una serie de habilidades sobre las que se ha de fundamentar el desarrollo de los cinco tipos de pensamiento matemático: "… percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones" (p. 54). Desde esta perspectiva se considera que los contextos, los materiales físicos y la manipulación sobre ellos, son importantes soportes para el desarrollo de todas y cada una de las habilidades arriba mencionadas. Entre distintos aspectos la importancia de estos contextos, materiales y acciones, radica en que permiten "comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas" (p.54). Ya en los grados superiores la enseñanza de las matemáticas debe centrase en independizar el razonamiento de dichos modelos y materiales, y pasar a "trabajar directamente con proposiciones y teoremas, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones… [y en el intermitente desarrollo de] comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, dibujos y otros artefactos" (p. 54).

2.1.4. Visualización

Las figuras son un importante soporte intuitivo para comprender o desarrollar conocimiento geométrico (Duval, 1999; Marmolejo & González, 2013a), pero, no es obvio ni espontáneo que en la resolución de un problema matemático los educadores y estudiantes hagan de ellas elementos claves para realizar exploraciones heurísticas (Marmolejo & Vega, 2012). Por el contrario, múltiples investigaciones evidencian la complejidad de tal aprovechamiento y el requerimiento de un aprendizaje específico (Marmolejo & Vega, 2012). Así, pues, la enseñanza de las matemáticas, por lo menos en los primeros grados de la Educación Básica, debe promover el planteamiento de situaciones problemáticas cuya resolución genere habilidades visuales que permitan a nuestros estudiantes dos tipos de acciones: una, "discernir en una figura geométrica inicial (figura de partida) las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada) (Duval, 2003); y dos, los cambios de focalización aplicados sobre la figura, sub-figuras y/o sub-configuraciones que conforman la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la tarea propuesta" (Marmolejo & Vega, 2012; Marmolejo & González, 2013b). En relación a la construcción del área de superficies planas, objeto de estudio en este capítulo, la visualización de operaciones como la rotación, la traslación, la superposición, la reconfiguración y la configuración se constituyen en acciones claves sobre los cuales es posible cargar de sentido y significado el aprendizaje de este objeto métrico (Marmolejo & González, 2013b).

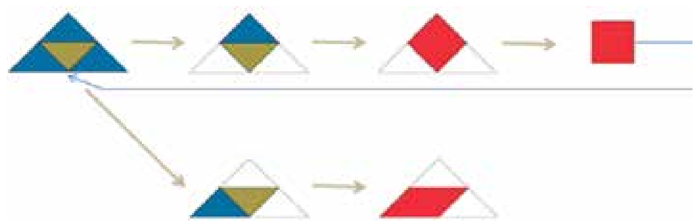


Figura 2.1. Discriminación de un cuadrado y un paralelogramo en una configuración geométrica.

En la Figura 2.1 se muestra el tipo de visualización a seguir para discriminar en la figura inicialmente representada primero un cuadrado, luego un paralelogramo. En ella se destacan la aplicación de operaciones como la rotación y la configuración.

2.2. Pensamientos Matemáticos

Según el MEN (2006) ser matemáticamente competente requiere ser hábil, eficaz y eficiente, no solo en el desarrollo de procesos generales de la actividad matemática como lo son la formulación, tratamiento y resolución de problemas, la modelación, la comunicación, el razonamiento, comparación y ejercitación de procedimientos; además es necesario desarrollar altos niveles de pensamiento tanto lógico[4], como matemático[5], estos de forma concreta se describen a través de cinco formas de pensar acordes a las matemáticas, a saber: pensamiento numérico, aleatorio, variacional, espacial y métrico.

En lo que sigue, la atención recaerá en los dos últimos de los pensamientos arriba enunciados. Son dos los motivos que nos llevan a centrar la atención en ellos e ignorar el resto. Por un lado, la atención de este documento recae en la construcción de la magnitud área y de su medida, por otro lado, que su enseñanza no solo moviliza aspectos relativos al pensamiento métrico, sino que además introduce reflexiones de naturaleza espacial relacionadas con la visualización asociada a las figuras planas. A continuación se define cada una de estas dos maneras de pensar en matemáticas:

4. Según Inhelder y Piaget (1985), citado en el MEN (2006), se desarrolla a través de la aplicación de operaciones sobre proposiciones, su función es apoyar y perfeccionar el pensamiento matemático.
5. Centra su atención sobre el número y el espacio (Piaget, 1978, citado en el MEN, 2006).

2.2.1. Pensamiento métrico

Considera "la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones" (MEN, 2006, p. 63). Se caracteriza por el desarrollo de los siguientes conceptos y/o procedimientos a saber:

- Construcción de los conceptos de cada magnitud.
- Comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- Asignación numérica, diferencia entre unidad y los patrones de medida.
- Selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.
- Estimación de magnitudes y los aspectos de "capturar lo continuo con lo discreto".
- Apreciación del rango de las magnitudes y papel del trasfondo social de la medición.

La resolución de las problemáticas planteadas en las tareas que presentaremos más adelante, suscita el desarrollo de los primeros cinco conceptos y/o procesos métricos arriba señalados. A continuación se hará una breve referencia a cada uno de ellos:

2.2.1.1. *Construcción de la magnitud área*

El concepto de magnitud de área empieza a construirse cuando se opera la superficie de una figura y se diferencia de las demás partes que le componen, como es el caso de las líneas, los puntos y los ángulos. Su construcción exige considerar cuándo una figura tiene más o menos cantidad de superficie que otra. Esta construcción está lejos de ser obvia y espontánea, por el contrario, requiere tiempo y dedicación.

2.2.1.2. *Comprensión del proceso de conservación de cantidades de área*

Según el MEN (1998) el desarrollo del proceso de conservación de cualquier tipo de magnitud se basa en “la captación de aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio” (p.64). La conservación del área se pone en evidencia en tareas donde es posible establecer una igualdad entre las cantidades de superficies de dos o más figuras, donde la aplicación de operaciones sobre la figura suscita la transformación de unas en otras o de todas las figuras a comparar en una nueva. En el proceso de transformación no puede existir ni pérdida, ni ganancia de superficie.

Un ejemplo de conservación de área se ve reflejado en las dos figuras representadas en la Figura 2.2, ambas figuras a pesar de tener formas distintas ocupan igual cantidad de superficie. Esta afirmación se puede verificar a partir de la comparación uno a uno entre las sub-figuras en que se encuentran descompuestas una y otra de las figuras.

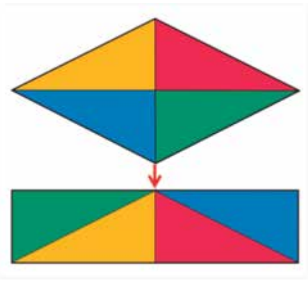


Figura 2.2. Figuras de forma distinta e igual cantidad de área.

2.2.1.3. *Asignación numérica*

Se refiere a la asignación de un único número que represente la cantidad de área de determinada superficie. El procedimiento a seguir se basa en sobreponer la superficie de una figura (figura P) en la de otra (figura M), de tal forma que no queden espacios vacíos en la superficie de la figura en recubrimiento. A la figura P se le denomina, según sea el caso, patrón o unidad de medida, la figura M se le define como figura a medir y al número de superficies P, que es necesario para cubrir por completo la superficie de M, se le asigna el nombre de medida de la figura M con unidad (o patrón) de medida P.

Un ejemplo de asignación numérica a una superficie se muestra en la tarea representada en la Figura 2.3. En ella se representan dos figuras y se solicita calcular la medida de área de una de las figuras tomando como patrón de medida la otra, en consecuencia, quien intente dar respuesta a esta tarea debe recubrir con la superficie de la figura “amarilla” la superficie de la figura “rosada” sin que en el proceso sobre, ni falte superficie. El número de veces que es necesario recubrir una de las figuras con la otra se le denomina medida.

Calcular la medida del área de la figura “rosada” tomando como patrón de medida la figura “amarilla”.

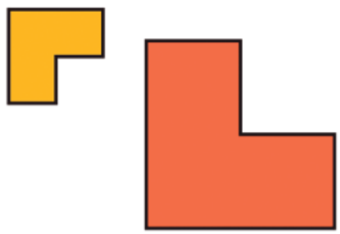


Figura 2.3. Asignación de un número a una superficie mediante recubrimiento de una superficie en otra.

2.2.1.4. *Diferenciación entre patrón y unidad de medida*

En todo proceso de medición existe una diferencia importante entre la unidad y el patrón de medida. "El patrón es más concreto, la unidad es más abstracta" (MEN, 1998, p.67). Los patrones superficiales son inicialmente no estandarizados. Solo a través del desequilibrio producido por dos mediciones con patrones superficiales cuyo contorno sea perceptiblemente diferente y que asignen a la superficie de una misma figura el mismo número, es posible generar la necesidad y resaltar la importancia de fijar convencionalmente a las figuras que se utilizan como patrones de medida, es aquí donde la unidad de medida se impone como un objeto a considerar.

2.2.1.5. *Selección de patrones y unidades de medida*

En todo proceso de medida no siempre es necesario seleccionar unidades o patrones de medida, pero si la idea es refinar el resultado de la medición entonces es ineludible seleccionar un patrón o una unidad de medida apropiada (MEN, 1998). En el caso de la medida de áreas puede ser necesario discriminar entre diferentes unidades o patrones de medida aquellos que sean acordes al rango de magnitud a considerar o cuya forma permita la asignación de un número a la superficie que se mide. Así mismo, debe permitir que la unidad escogida pueda ser utilizada "en combinación con un sistema numérico ya previamente construido" (MEN, 1998, p. 66).

2.2.2. Pensamiento espacial

En palabras de Gardner (Tomado de MEN, 1998) este tipo de pensamiento "es esencial para el [desarrollo del] pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y resolución de problemas" (p. 56). En los sistemas geométricos se hace énfasis en este tipo de pensamiento y se considera "como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio" (MEN, 1998, p. 56). Desde este punto de vista la enseñanza de la geometría debe considerar como objetos de reflexión la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, jugar con los diseños y teselaciones del plano y sus grupos de transformaciones. En este capítulo, las representaciones mentales se asumen como representaciones semióticas[6] interiorizadas (Duval, 1999), ahora, teniendo en cuenta nuestro objeto matemático de interés, es decir, el área de superficies planas, las representaciones semióticas a tener en cuenta son las figuras geométricas bidimensionales. Por tanto, de forma más puntual asumimos el pensamiento espacial asociado a la construcción de la magnitud área y su medida como todo tipo de acciones que se aplican sobre las figuras bidimensionales y que

6. "Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas…permiten una m*irada del objeto* a través de la *percepción de estímulos* (puntos, trazos, caracteres, sonidos…) *que tienen el valor de significantes"* (Duval, 1999, p. 34). Las figuras geométricas, los gráficos cartesianos, los esquemas, la escritura aritmética y algebraica, las tablas; son algunas de las representaciones semióticas de mayor uso en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

generan en ellas transformaciones tanto en su contorno global como en su tamaño y la posición que "ocupan" en el plano.

2.3. Situaciones problemáticas

"Para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza se hace necesario la intervención continua del maestro para modificar y enriquecer ese contexto con la intención de que los estudiantes aprendan" (MEN, 1998, p. 36). El acercamiento a las matemáticas por medio de situaciones problemáticas procedentes sea de la vida cotidiana, sea de las matemáticas, sea de otras ciencias; se constituye en el contexto ideal "para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas" (MEN, 1998, p. 41). Las situaciones problemáticas, a nuestra manera de ver, son espacios generados en el aula de clase donde el profesor determina a priori cuáles son los elementos, pensamientos, estándares y procesos matemáticos movilizados en el desarrollo de las tareas propuestas. Igualmente donde las estrategias a seguir y los tiempos a considerar en la aplicación de la situación problemática están previa y sistemáticamente determinados. Las situaciones problemáticas están compuestas por una serie de tareas que se articulan constituyendo en una secuencia de enseñanza, es decir, donde los aprendizajes alcanzados en unas tareas se convierten en herramientas a considerar en la resolución de otras. Su desarrollo debe suscitar la interacción social a través de acciones que permitan la comunicación, transformación y objetivación de conocimiento.

2.4. Matematización de los conceptos de cantidad de área y medida de área

Son dos los aspectos que se deben considerar en la enseñanza del área, por un lado el tipo de magnitud al que se alude, por otro, el tipo de medida que permite. Uno y otro de estos elementos tienden a ser confundidos en la enseñanza y aprendizaje del área en la escuela (Chamorro, 2003a, 2003b). El primero centra su atención en comparaciones de naturaleza cualitativa, en el segundo la atención recae en aspectos cuantitativos. Por lo general la enseñanza de las magnitudes (incluida el área) suele centrarse en el segundo de estos aspectos dejándose de lado cualquier tipo de reflexión en torno a la magnitud (Chamorro, 2003a, 2003b), aspecto que genera un sin número de dificultades en su aprendizaje, como obstáculos en su aplicación al construirse nuevos objetos matemáticos. Establecemos a continuación la caracterización matemática de cada uno de estos dos elementos:

2.4.1. El área como cantidad de magnitud

Según (Chamorro & Belmonte, 1994, p.131) "el primer paso para la construcción del concepto de magnitud es la determinación del conjunto que lo va a definir". Una magnitud pues, "responde a una característica física, a un atributo observable de los objetos", en consecuencia en el estudio de las magnitudes "se clasifican los objetos con respecto a esta característica, esto es, se define una relación de equivalencia que proporciona dicha clasificación".

Con respecto a la determinación del conjunto que va a definir al área de superficies planas consideraremos que una figura está relacionada con otra si son iguales respecto a la cantidad de superficie que poseen. Es decir, si es posible ya sea sobreponer exactamente la superficie de una de las figuras en la superficie de la otra, ya sea, transformar una en otra o las dos en una tercera figura, de tal forma que en el proceso no sobre, ni falte superficie. Dicha relación ha de cumplir tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva; definiéndose esta relación como una relación de equivalencia. Es a partir del establecimiento de cuándo dos o más figuras son equivalentes en relación a una determinada magnitud que es posible establecer clasificaciones entre las figuras.

De acuerdo a lo anterior el conjunto que va a definir al área se asume de la siguiente forma: considérese una figura *f* y genérese a partir de ella el conjunto de todas las figuras relacionadas con *f*, es decir, de todas las figuras "equivalentes" a *f*. En otras palabras el conjunto de todas las figuras que se pueden superponer a *f* o que se pueden transformar en *f* sin que en el proceso sobre o falte superficie alguna. Hágase esto con todas las figuras geométricas bidimensionales. Entonces llamemos *A* a este conjunto de conjuntos. Por tanto, un elemento de *A* no es una figura, sino una colección de figuras todas equivalentes entre sí, todas con la misma cantidad de superficie (Figura 2.4).

Como lo afirma Chamorro y Belmonte, es necesario definir dos operaciones: ley de

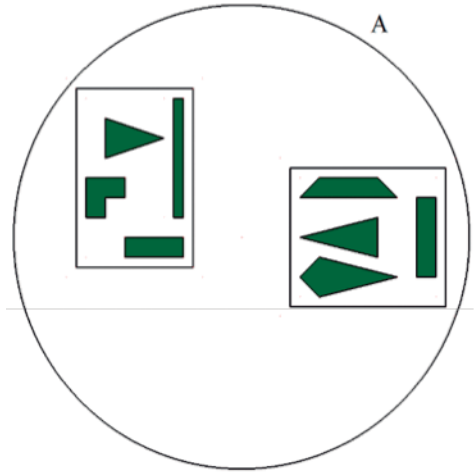


Figura 2.4. Los elementos del conjunto A son conjuntos que a su vez contienen figuras geométricas con áreas iguales.

composición interna (suma) y ley de composición externa (producto) para establecer una clara diferencia entre los atributos de forma y cantidad de área en una figura. En el primer caso se define de la siguiente forma, sean *h* y *g* dos elementos de *A*, sean dos figuras *m* y *n* de manera que $m \in h$ y $n \in g$. Elijamos otra figura *ñ* que al ser unida con *m* genere una figura equivalente a *n* (Figura 2.5). Llamaremos *s* al conjunto de todas las figuras equivalentes a ñ. *s* es un elemento de *A* y la operación composición interna se denota como *m* ■ *ñ* = *n*.

Entre las propiedades que cumple este nuevo conjunto se encuentran la asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro y cancelativa. Así mismo destaca la siguiente propiedad: "si se tienen dos elementos distintos de A, *m* y *n,* entonces existe otro elemento *ñ*

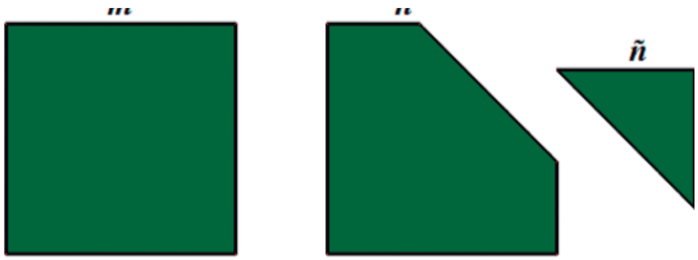


Figura 2.5. Al componer ñ con n resulta m.

de A, tal que o bien al componerlo con *m* nos resulta *n* bien al componerlo con *n* nos resulta *m"* (Chamorro & Belmonte, 1994, p. 134).

Antes de definir la segunda operación es necesario establecer una característica que cumplen las magnitudes extensivas, medibles o sumables como lo es el área, nos referimos a la posibilidad que este tipo de magnitudes brinda a las figuras para establecer un orden a partir de las cantidades de superficie que les caracteriza. Para definir un orden al interior del conjunto *A* es necesario considerar dos elementos de *A*, digamos *a* y *b*, donde *m'* y *n'* sean dos objetos, elementos a su vez de *a* y *b*. Si al comparar *m'* y *n'*, sea a través de una sobre posición, sea por medio de la transformación de *n'* en *m'* o de *m'* en *n'* o de *m'* y *n'* en una tercera figura, encontramos que hace falta superficie en *n´* para cumplir con dicho objetivo, entonces podemos encontrar un elemento *m"* que al unirse con *n´* cubra por completo a *m'*. Si *c* es el elemento de *A* tal que $m'' \in c$, entonces podemos escribir $b = a \blacksquare c$. Por tanto, la relación de orden en *A* se define de la siguiente forma: Sean *a* y *b* dos elementos de *A,* se dice que $a \leq b$ si existe un $c \in A$ de manera que $b = a \blacksquare c$ (se escribe $a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$). La relación de orden cumple tres propiedades: reflexiva, anti simétrica y transitiva. Teniendo en cuenta lo anterior se concluye que la relación $\leq$ es una relación de orden. Además es de orden total, es decir, dados dos elementos cualesquiera *a* y *b* de *A*, entonces o $a \leq b$ o $b \leq a$.

Hasta el momento se ha establecido un orden y se puede afirmar que un objeto determinado tiene más cantidad de magnitud que otro. Pero, en las magnitudes medibles (o extensivas, o sumables) es necesario afirmar “no solo si el objeto *m* tiene más cantidad de magnitud que el objeto *m´*, sino cuánto más en relación a *m*” (Chamorro & Belmonte, 1994, p. 136). Es en este sentido que la operación producto de un número por una cantidad de magnitud (ley de composición externa) desempeña un papel importante. En lo que sigue definimos esta segunda operación, por razones de espacio consideraremos exclusivamente el caso del número a multiplicar la cantidad de magnitud es natural, los casos faltantes (cuando el número es racional positivo o real positivo) pueden estudiarse en Chamorro y Belmonte, 1994, pp. 137-142).

En ocasiones al comparar dos figuras entre sí es necesario considerar un número entero de copias de una de ellas para establecer en cantidad de área cuán mayor es una en relación a la otra. En este sentido, si $a \in A$ y $n \in N$ (conjunto de los números naturales) definimos el producto de un número natural con una cantidad de área como $n \cdot a = a \blacksquare a \blacksquare a \blacksquare a \blacksquare a \blacksquare a \blacksquare a$ (n veces).

Donde la identidad, la existencia de un elemento neutro, la propiedades • distribuye sobre + y • distribuye sobre ■, la propiedad asociativa para • y la propiedad $a \leq b$ entonces $n \cdot a \leq n \cdot b$; son las propiedades que caracterizan este tipo de operación.

Para terminar haremos una breve referencia a la propiedad Arquimediana del orden en *A* la cual "tiene el orden definido en el conjunto *A*, que se deriva de la misma construcción del conjunto *A* y de la de los números naturales" (Chamorro y Belmonte, 1994, p. 136). Sean *a* y *b* dos elementos de *A*, siendo *b* distinto del elemento neutro, se afirma que existe un número natural n que cumple: $n \cdot b \leq a < (n+1) \cdot b$. La importancia la propiedad Arquimediana radica en el hecho de que permite recurrir a encuadramientos, acción determinante a la hora de diferenciar la medida entera de la medida exacta (Chamorro & Belmonte, 1994).

2.4.2. Medida de cantidades de área

Medir presupone asignar un número a una cantidad de magnitud. La medida se expresa como un número seguido de una unidad, donde la unidad se define a partir de la siguiente propiedad: dado, el conjunto de los números reales positivos multiplicables por todos los elementos del conjunto *A,* existe un elemento de *A*, que designaremos como *u* tal que para cada $a \in A$, existe un $r \in$, de manera que $r \cdot u = a$. Al elemento *u* que cumple la anterior condición se le denomina unidad.

Al medir la cantidad de área de una figura se busca un número que al multiplicarlo por la unidad nos resulte la cantidad que deseamos medir. Matemáticamente este hecho se expresa de la siguiente forma: sea *a* una cantidad de área y sea *u* una unidad. Se llama medida de *a* respecto a la unidad *u* al número real que cumple $r \cdot u = a$ y se escribe $m_u(a) = r$. La medida es una identidad entre el conjunto de cantidades de área con una composición y un orden (*A*, ■, ≤) y un sub-conjunto de números reales con la operación suma y el orden natural definidos en los conjuntos numéricos. Matemáticamente se considera que la medida es un isomorfismo (igual forma) entre el conjunto *A* y un subconjunto de los números reales.

2.5. Zona de Desarrollo Próximo

En palabras de Vygotsky (1979) no es posible "resolver de forma correcta los problemas que subyacen al aprendizaje y enseñanza en la escuela, ni siquiera formularse, sin situar la relación entre el aprendizaje y desarrollo en niños de edad escolar" (p.123). La base de dicha articulación se fundamente en el hecho de que el aprendizaje de los niños comienza antes de que este ingrese a la escuela, en consecuencia, este aspecto ha de ser considerado como el punto de partida en la caracterización de la relación entre el aprendizaje y el desarrollo.

> Es inútil insistir en que el aprendizaje que se da en los años preescolares difiere altamente del aprendizaje que se lleva a cabo en la escuela; este último se basa en la asimilación de los fundamentos del conocimiento científico. No obstante, incluso cuando, en el periodo de sus primeras preguntas, el pequeño

> va asimilando los nombres de los distintos objetos de su entorno, no hace otra cosa que aprender. En realidad, ¿podemos dudar de que el niño aprenda el lenguaje a partir de los adultos; de que a través de sus preguntas y respuestas adquiere gran variedad de información; o que, al imitar a los adultos y ser instruido acerca de cómo actuar, los niños desarrollan un verdadero almacén de habilidades? El aprendizaje y el desarrollo están interrelacionados desde los primeros días del niño (pp. 130-131).

Si deseamos descubrir las relaciones reales entre el proceso evolutivo y las aptitudes de aprendizaje es necesario delimitar como mínimo dos niveles evolutivos, a saber: evolutivo real y desarrollo potencial. El primero caracterizado por "el nivel de desarrollo de las funciones mentales de un niño, establecido como resultado de ciertos ciclos evolutivos llevados a cabo" (p. 131). En este nivel se ponen en evidencia las funciones que han madurado en el sujeto o sea los productos finales de su desarrollo, en consecuencia, es a través de la puesta en acto de tales funciones que un sujeto puede resolver de forma independiente una problemática planteada.

Fotografía 2.4. Desarrollo individual de una tarea.

El nivel de desarrollo potencial, por su parte está "determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero capaz" (p.133).

Fotografía 2.5. Desarrollo de una tarea en compañía de un adulto experto.

Fotografía 2.6. Desarrollo de una tarea en compañía de un par experto.

La Zona de Desarrollo Próximo, pues, se asume como “la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial” (p. 133). Este concepto proporciona un importante instrumento mediante el cual es posible comprender el curso interno del desarrollo, ya que define “aquellas funciones que todavía no han madurado, pero que se hallan en proceso de maduración, funciones que en un mañana próximo alcanzarán su madurez y que ahora se encuentran en estado embrionario” (pp. 133-134),

> …la zona de desarrollo próximo nos permite trazar el futuro inmediato del niño, así como su estado evolutivo dinámico, señalando no solo lo que ya ha sido completado evolutivamente, sino también aquello que está en curso de maduración…El estado de desarrollo mental de un niño puede determinarse únicamente si se lleva a cabo una clarificación de sus dos niveles: del nivel real de desarrollo y de la zona de desarrollo próximo. p. 134.

En breve se considera desde esta perspectiva, que los procesos evolutivos no coinciden con los procesos de aprendizaje, por el contrario, los primeros “van en remolque” de los segundos. Igualmente se asume que la comprensión de los fenómenos asociados al aprendizaje y enseñanza exige considerarles como una unidad, no como identidad, lo cual “presupone que los unos se convierten en los otros (Vygotsky, 1979, p. 139). Por último, se considera que “aunque el aprendizaje está directamente relacionado con el curso del desarrollo infantil, ninguno de los dos se realiza en igual medida o paralelamente”. (Vygotsky, 1979, p. 140).

2.6. Estructura de Control

Flavell (1976, citado por Garofalo & Lester, 1985, p. 163) asume la regulación y control de las acciones cognitivas como un elemento clave a tener en cuenta en el estudio de la meta-cognición, donde la organización (planificación de comportamientos y selección de acciones) y la verificación (evaluación de decisiones hechas y de los resultados de los planes ejecutados), son los aspectos que le determinan. En este sentido no es extraño afirmar que el estudio del papel que desempeña el control en el desarrollo y comprensión de tareas matemáticas es importante para comprender muchos de los fenómenos asociados al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. En palabras de Balachef y Gaudín (2010) la estructura de control refiere al conjunto de elementos y estrategias que “permiten expresar los medios necesarios para hacer selecciones, tomar decisiones y expresar juicios…a menudo es dejada implícita… [Y permite] decidir si una acción es relevante o no, o si un problema está resuelto” (p. 192).

Diversas investigaciones en el campo de la Educación Matemática han permitido discriminar elementos de control de naturaleza distinta, es el caso de Love y Pimm (1996) quien se interesa en la linealidad textual del flujo de lectura privilegiado en un libro de texto, de Mesa (2004, 2010) quien estudia la manera como un estudiante puede discriminar si la respuesta encontrada al resolver tareas donde intervienen las funciones es correcta o por el contrario, el procedimiento desplegado es inadecuado y de Marmolejo y González, (2015b) quienes analizan la forma como los libros de texto guían a sus lectores en las formas de ver a privilegiar en el desarrollo o comprensión de tareas donde interviene el área de regiones poligonales. Así se destacan como elementos de control tanto las "sentencias escritas en modo imperativo "probar", "calcular", "encontrar", "simplificar",…), como las preguntas y a las afirmaciones realizadas" (Love y Pimm, 1996, p. 381), los procedimientos, la presentación de contenidos y el contrato didáctico (Mesa, 2004) y el iconísmo y la visibilidad (Marmolejo & González, 2015b).

Para el diseño de las tareas que más adelante presentaremos y caracterizaremos, se han considerado como elementos de control que suscitan formas de ver específicas en las figuras la complementariedad de formas, la presencia o no de un fondo cuadriculado sobre el que se representan una figura y la ausencia de líneas que resalten los lados de las figuras en estudio. Los dos primeros elementos se ponen en evidencia en tareas como las representadas abajo, en la primera (Figura 2.6) se solicita calcular la medida de área de una figura de forma irregular, la complementariedad de formas entre algunas partes de la figura suscitan su transformación en un rectángulo; es a través de la fórmula de área para figuras rectangulares que es posible resolver la problemática planteada.

Halle la medida de la cantidad de área de la siguiente figura.

Muestre que las cuatro figuras representadas abajo tienen igual cantidad de superficie.

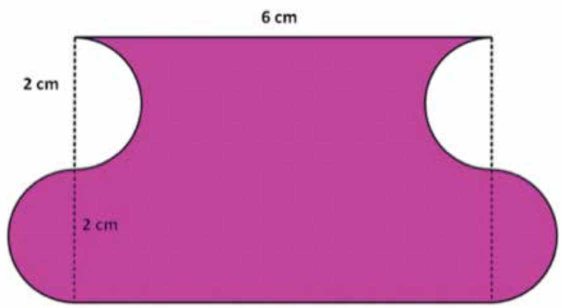


Figura 2.6. El contorno de la figura suscita su transformación en un rectángulo.

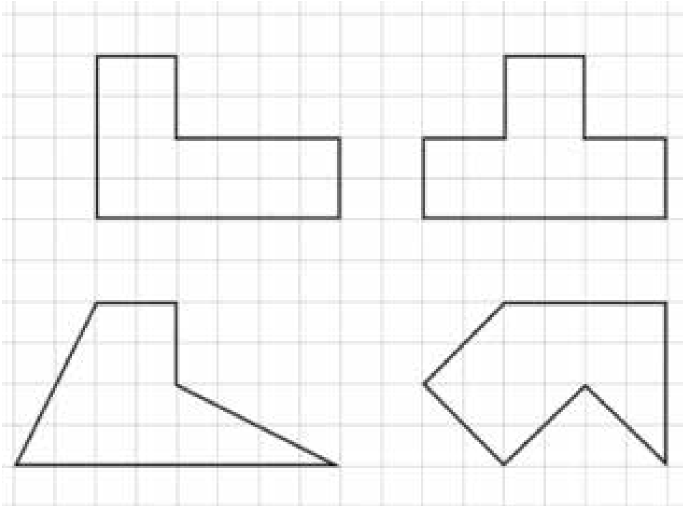


Figura 2.7. Fondo cuadriculado y/o contorno de las figuras son factores que guían la transformación de tres de estas figuras en la primera de ellas.

En la segunda tarea (Figura 2.7), se pide comparar cualitativamente cuatro figuras según la cantidad de área que ocupan, en el caso de las tres primeras, el fondo cuadriculado sobre el cual se encuentran representadas permite establecer fraccionamientos sobre ellas, elemento clave para lograr transformar la segunda y tercer figura en la primera. La cuarta figura, por su parte, exige considerar simultánea tanto la complementariedad de formas como la existencia de un fondo cuadriculado para suscitar su transformación en la primera figura.

En relación a la estructura de control que permitirá asegurar el paso de una zona de desarrollo real a una potencial, se asumieron como elementos que le caracterizan el contexto intrínseco de cada estudiante[7], la constante e imperante exigencia de descripción y justificación en lengua natural escrita de los procedimientos realizados, la organización espacial asumida en el desarrollo de la tarea propuesta, el diseño de tareas con múltiples procesos de resolución y que exijan la puesta en acto de habilidades tratadas en las actividades previas, el nivel de simpatía o apatía que hacia las matemáticas tiene un estudiante y la manera como los estudiantes se relacionan dentro de un grupo.

3. Metodología de Diseño

Son dos las situaciones problemáticas a las que haremos referencia en este apartado. La primera encaminada al estudio del área como una clase de magnitud, la segunda al estudio de la medida de área de figuras planas. Siguiendo los lineamientos establecidos en el MEN (2006) se asumen los grados tercero y cuarto de Educación Básica como los lugares propicios para su aplicación. Las actividades fueron diseñadas en el marco del programa de formación de profesores "Fortalecimiento de las matemáticas en la Educación Básica de Tumaco, Policarpa y Samaniego", financiado por la Fundación Save the Children. Participaron un total de once educadores[8] de cuatro instituciones educativas del municipio de Samaniego (Nariño), la mayoría responsable de la enseñanza de las matemáticas en los primeros dos ciclos de la Educación Básica (grados primero a quinto).

El diseño de las dos situaciones problemáticas a las que posteriormente haremos referencia se realizó siguiendo tres fases (28 sesiones de trabajo de cuatro horas cada una). La primera de naturaleza exploratoria y conceptual, a través de ocho sesiones de trabajo (32 horas) se discriminaron en ella las concepciones que los educadores tenían acerca de la enseñanza y aprendizaje de la geometría y la medida, y se reflexionó sobre los referentes teóricos a considerar en el diseño de las situaciones. En

7. El nivel de conocimientos y habilidades que cada estudiante tiene acerca de los procesos, pensamientos y conocimientos matemáticos movilizados al construir un objeto matemático.

8. Jorge Armando Melo (IPSA), María Luisa Córdoba (IPSA), María teresa Melo (IPSA), Elsy Cecilia Obando (IESB), Nancy Ceneida Burbano (IPSA), Armando Andrade (IPS.A), Luz Mery Arteaga (INAGRO), Antonio Acuña (IESB), Pedro Antonio Montenegro (IPSA), Franco Edilberto Melo (MOTILÓN) y Jesús Martín Toro (I.E.BELLAVISTA).

el primer caso se aplicó una prueba diagnóstica en la que se solicitó caracterizar algunos ítems de las Pruebas Saber del año 2009 relacionados con la geometría y la medición, según los tipos de pensamiento matemático y estándares matemáticos movilizados en ellos, los conocimientos matemáticos imperantes y los procesos cognitivos subyacentes. A través de este mecanismo se detectó en los educadores, de un lado, un bajo nivel de apropiación acerca de los elementos teóricos y prácticos que se presentan en los Lineamientos Curriculares y en los Estándares de Calidad para el Área de Matemáticas. Por otro lado, que las magnitudes y las medidas representan para los educadores un aspecto de especial complejidad, en particular la magnitud área.

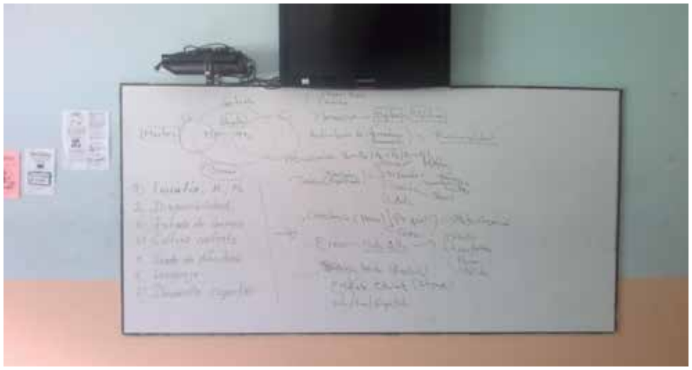
Para la apropiación de los referentes teóricos a considerar en el diseño de situaciones problemáticas se estudiaron en detalle un total de nueve documentos. En la Tabla 2.1 se referencia, según el orden en que fueron abordados, cada uno de los documentos tratados en esta primera fase.

- Bruner, J. (2000). Pedagogía popular. En, La Educación Puerta a la Cultura. Editorial Visor. Madrid, 63-83.
- Vygotsky, L. S. (1979). Interacción entre aprendizaje y desarrollo. Crítica. Grupo Editorial Grijalbo. Barcelona (España), 123-140.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Imprenta Nacional de Colombia. Bogotá (Colombia).
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas lineamientos curriculares. Artes Gráficas Universidad del Valle. Cali (Colombia).
- Chamorro, M. del C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M. del C. Chamorro & L. Ruiz (Eds.), Didáctica de las Matemáticas para primaria. Pearson Educación S.A., España, 221-243.
- Chamorro, M. del C. y Belmonte, J. M. (2000). El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. Editorial Síntesis. Madrid (España).
- Marmolejo, G. A. (2005). Análisis del Tópico de Geometría y Medición. En Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la escuela. El Bando Creativo. Cali (Colombia), 27-44
- Marmolejo, G. A. & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje, 24 (3), 9-34.
- Marmolejo, G. A. & González, M. T. (2013). El Control Visual para la construcción del concepto de área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. Enviado.

Tabla 2.1. Documentos de estudios considerados en la fase 1 de diseño de las situaciones problemáticas.

El criterio de selección de estos documentos consideró, por un lado, que las reflexiones inmersas en ellos permitieran apropiarse de elementos claves, claros, detallados y coherentes acerca de los fenómenos que subyacen al aprendizaje y enseñanza de las magnitudes y de sus medidas, por otro lado, que suscitaran estrategias a través de las cuales sea posible generar en el aula de clase conocimiento matemático cargado de significado y sentido. El análisis de estos documentos se realizó en varias fases, a saber: la lectura individual de cada uno de los documentos, la discusión en pequeños grupos de las ideas centrales de cada artículo, la presentación, por parte de los pequeños grupos, al grueso de los educadores, de los aspectos de mayor importancia detectados en las lecturas realizadas, la reflexión y contextualización por parte del asesor de las discusiones consideradas en cada sesión y la sistematización, tanto de las conclusiones consideradas, como de las ideas que de ellas se desprenden en relación al futuro diseño de situaciones de enseñanza.

Fotografía 2.7. Discusión en binas de los documentos en estudio en la fase de conceptualización teórica.



Fotografía 2.8. Conclusiones realizadas por los educadores tras la lectura y discusión de los documentos de trabajo.

En la fase dos, se procedió al diseño de las situaciones problemáticas. A partir de los referentes conceptuales tratados en la fase previa se construyó un instrumento de diseño de situaciones problemáticas para la enseñanza del área de superficies planas, compuesto por cinco categorías: Pensamientos Matemáticos a movilizar, caracterización matemática del objeto en estudio, Procesos Generales a desarrollar, elementos a considerar en el diseño de situaciones problemáticas y elementos de control a tener en cuenta para asegurar el paso de los estudiantes a una Zona de Desarrollo Próximo. En la Tabla 2.2 se presentan esquemáticamente las sub-categorías en que se dividen algunas de las categorías antes mencionadas y los elementos (descriptores) por medio de los cuales se pretende dar vida en el aula de clase a cada una de las categorías de diseño consideradas. Igual que en la primera de las fases, fueron 32 las horas asignadas para el desarrollo de esta.

Categorías	Sub-categorías	Descriptores
Pensamiento matemático	Métrico	Construcción del concepto de área, conservación del área, asignación numérica, diferenciación entre unidad de área y patrón y selección de unidades y patrones de medida.
	Espacial	Transformaciones figurales.
Área de superficies planas	Magnitud	Relación de Equivalencia, Relación de Orden, Ley de Composición Interna y Ley de Composición Externa.
	Medida	Asignación de un número a una cantidad de superficie.
Procesos Generales	Formulación y resolución de problemas	Planteamiento de Situaciones Problemáticas y construcción de problemas cuya resolución cumpla con características previamente establecidas.
	Comunicación	Verbal y escrita (confrontación entre los procedimientos realizados por diferentes estudiantes, discusión con el profesor sobre el procedimiento realizado, presentación al grupo de estudiantes del trabajo realizado, descripción tanto de una manera de proceder distinta a la inicialmente realizada, como determinación de las debilidades y ventajas de un procedimiento en relación a otro).
	Razonamiento	Predecir, describir, explicar, justificar y refutar; proponer respuestas y procedimientos posibles.
	Visualización	Rotar, trasladar, superponer, reconfigurar y configurar figuras bidimensionales. Introducción de elementos que controlen las formas de ver a considerar (complementariedad de formas, fondo cuadriculado e inhibición de líneas que resalten los lados de las figuras en estudio).
Situaciones Problemáticas		Contexto cotidiano (zonas de sembrado) y matemático (figuras planas). Planteamiento de tareas cuyas reflexiones están relacionadas entre sí.
Zona de Desarrollo Próximo	Estructura de control	Contexto intrínseco (nivel de conocimiento y habilidades de un estudiante en relación al tipo de problemática presentada, características sociales- extrovertido o introvertido, concepción que tiene el grupo de estudiantes sobre cada uno de los alumnos acerca del manejo de los conocimientos matemáticos que se movilizan en clase, nivel de simpatía o apatía hacia las matemáticas), exigencia de describir y justificar, de forma escrita y verbal, los procedimientos realizados, organización espacial y forma de trabajo propuesta en la clase (trabajo individual y en pequeños grupos, desarrollo de puestas en común lideradas por los estudiantes y el educador) y planteamiento de tareas con múltiples procedimientos de resolución posibles.

Tabla 2.2. Instrumento de diseño de las situaciones problemáticas.

En la tercera fase se realizó un estudio piloto, la atención recayó en la aplicación de las dos situaciones de enseñanza en dos grupos de estudiantes y en su posterior rediseño. El propósito de esta fase fue discriminar las dificultades que tanto la metodología abordada como el propio diseño de las tareas podrían introducir en un ambiente de enseñanza real. Las tareas diseñadas fueron aplicadas a un grupo de grado tercero y otro de grado cuarto de una institución educativa de la ciudad de Samaniego.

Participaron en el proceso de aplicación cuatro profesores y el asesor del proyecto. Uno de los educadores asumió la responsabilidad de dirigir la clase, los otros centraron su atención en registrar el proceso de enseñanza y aprendizaje mediado por las tareas diseñadas. Una vez aplicadas las actividades e identificadas las dificultades explicitadas tanto en su puesta en acto por parte del educador como en su desarrollo por parte de los estudiantes, se procedió a introducir en el diseño y en las metodologías consideradas las correcciones, adiciones y transformaciones del caso. Esta última fase se realizó en un total de 12 sesiones de trabajo.

Fotografía 2.9. Estudio piloto para validar las situaciones problemáticas diseñadas.

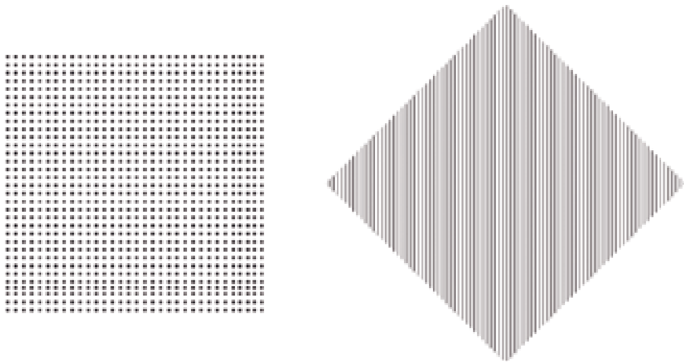
4. Situaciones Problemáticas para la Enseñanza del Área de Figuras Planas

Como se ha señalado a lo largo del documento son dos las situaciones problemáticas a las que haremos referencia. La primera encaminada al estudio del área de figuras planas como un tipo de magnitud, mediante la comparación cualitativa entre figuras a partir de sus cantidades de superficie. La segunda situación centra su atención en la medida directa de cantidades de área de regiones poligonales, la estrategia a considerar en este caso alude a sobreponer la superficie de una figura en la superficie de otra. La búsqueda del número de veces que la superficie de una de las figura cubre totalmente la superficie de la otra es el principal propósito a considerar. La primera situación problemática está compuesta por cuatro tareas, la segunda por tres.

En lo que sigue se presentan las tareas que conforman las dos situaciones y se caracterizan los elementos de naturaleza didáctica que en ellas se movilizan. De forma más puntual, se establece el grado de aplicación de cada una de las tareas, el tiempo máximo a considerar en su desarrollo, los pre-requisitos, materiales y forma de trabajo a tener en cuenta en su aplicación. Así mismo, se precisan, por un lado, los pensamientos, estándares y elementos matemáticos cuya reflexión suscita el desarrollo de las tareas diseñadas. Por otro lado, los procedimientos y aspectos a considerar en su aplicación. Igualmente, se plantean, de una parte, una serie de consignas auxiliares para ampliar y precisar las reflexiones que en torno al área han de considerarse en la enseñanza de la medición en los primeros ciclos de la Educación Básica y, por otra parte, las conclusiones finales que han de ser consideradas por los estudiantes una vez terminado el desarrollo de la tarea propuesta.

Situación de Enseñanza 1. Primera Tarea

La siguiente figura representa un terreno que mi padre compró. En la parte punteada se sembró café, en la parte rayada caña de azúcar.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

La superficie sembrada con café es más grande que la superficie sembrada con caña.

La superficie sembrada con café es más pequeña que la cultivada con caña.

La superficie cultivada con café es igual que la superficie sembrada con caña.

Explica detalladamente tu respuesta**.**

Caracterización didáctica de la tarea y elementos a considerar en su aplicación

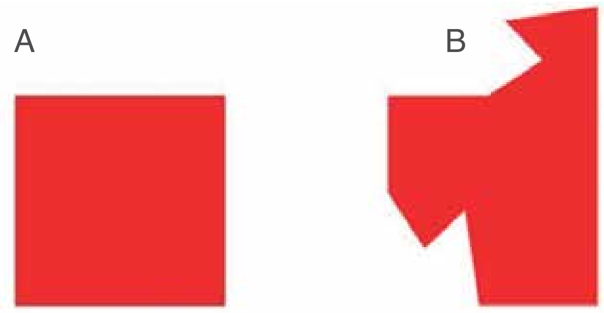
Grado a aplicar	Tercero de primaria	
Tiempo de duración	45 minutos.	
Pre-requisitos	Ninguno	
Materiales	Copia ampliada de la figura que hace parte de la tarea (sin consigna). Dos fotocopias de la tarea propuesta, hojas blancas, tijeras, ega.	
Pensamientos	Espacial	· Imagen de una figura por rotación. · Sobreposición de una figura en otra. · Descripción de transformaciones realizadas sobre una figura.
	Métrico	· Construcción del concepto de magnitud área.
Estándares	Espacial	· Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. · Reconozco congruencias entre figuras. · Identifico y justifico relaciones de congruencia entre figuras.
	Métrico	· Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir. · Comparo y ordeno objetos respecto a atributos que se pueden medir.
Contenido	Relación de equivalencia entre figuras a partir de sus cantidades de área.	

Forma de trabajo	Trabajo de contextualización: el profesor, tras, colocar en el tablero una copia ampliada de la figura que conforma la tarea (sin que en ella esté presente su consigna) y afirmar que ella hace parte de un problema de matemáticas, invita a sus estudiantes a identificar cuál es el tipo de consigna que debe acompañar a las figuras representadas. Trabajo individual: una vez identificada la consigna del problema planteado, el profesor entregará a cada uno de los estudiantes dos copias de la tarea a realizar y les invita a resolver la problemática planteada de forma escrita e individual. Trabajo en tríos: al interior de cada grupo de trabajo (conformados de forma libre y espontánea), cada uno de los integrantes analizará la manera como sus compañeros resolvieron la problemática planteada. La atención recaerá por completo en la producción escrita realizada por cada uno de ellos. El propósito de esta fase apunta a mejorar la descripción del procedimiento realizado por cada uno de los estudiantes y a escoger el método de resolución, más original o económico o, sí es el caso, generar entre los tres participantes una nueva manera de proceder. Igualmente, se deben considerar las debilidades de los procedimientos presentados, así como sus fortalezas. Puesta en común: al azar el profesor escogerá de cada grupo de trabajo a un representante para que exponga al grueso de estudiantes el procedimiento por ellos privilegiado, igualmente las debilidades y las fortalezas discriminadas serán objeto de presentación en esta fase. Al final de la puesta en común, el educador realizará las correcciones y ampliaciones del caso y consignará las conclusiones que se desprenden de cada tarea. Trabajo individual: cada estudiante debe registrar en su cuaderno una de las maneras de proceder que se presentaron en la puesta en común y establecer diferencias y similitudes con el procedimiento inicialmente privilegiado en el trabajo individual realizado en la primera fase.
Procedimientos posibles	· Recortar la región poligonal cuya superficie está punteada, rotarla y sobreponerla en la superficie de la región rayada. · Calcar una de las dos regiones a comparar y mediante rotaciones sobreponerla sobre la superficie de la región no calcada.
Aspectos a considerar	· Es posible que la medida de los lados que delimitan las dos regiones a comparar sean asumidos como criterios de comparación. De esta forma podría privilegiarse la confusión entre las magnitudes área y perímetro. En tal caso el contexto privilegiado en la actividad (terreno para siembra de un producto) debe desempeñar un rol importante para descartar esta forma de proceder. · En relación a las fases el educador debe estar presto a confrontar constantemente y de forma clara y precisa la manera como los estudiantes describen, explican y justifican de forma escrita sus procedimientos. Dichas descripciones, explicaciones y justificaciones, deben constituirse en textos autónomos, es decir, que en ningún caso sea necesario recurrir a quien les escribió para comprender en detalle la idea que en ellos se pretendió desarrollar. · Igualmente es importante establecer similitudes (nivel de extroversión o introversión, empatía a las matemáticas, el nivel de desarrollo actual….) en la forma en que los estudiantes asumen la problemática planteada. Esta discriminación permitirá, a partir del desarrollo de la siguiente tarea, establecer nuevos grupos de trabajo cuyas características sean lo más homogéneas posibles.
Consignas auxiliares y/o conclusiones	· Conclusión: cuando una región poligonal se sobrepone sobre otra y la superficie de una coincide exactamente con la superficie de la otra, decimos que las dos figuras tienen igual cantidad de superficie o igual cantidad de área.

Tabla 2.3. Elementos a considerar en la aplicación de la primera tarea de la primera secuencia de enseñanza.

Situación de Enseñanza 1. Segunda Tarea

Al resolver un problema de geometría donde intervienen las figuras abajo representadas unos estudiantes afirman que la figura A tiene igual cantidad de superficie que la figura B. El resto de los estudiantes consideran que una de las figuras tiene mayor cantidad de superficie que la otra ¿Cuál de las dos respuestas es la acertada?



Justifica detalladamente tu respuesta

Caracterización didáctica de la tarea y elementos a considerar en su aplicación

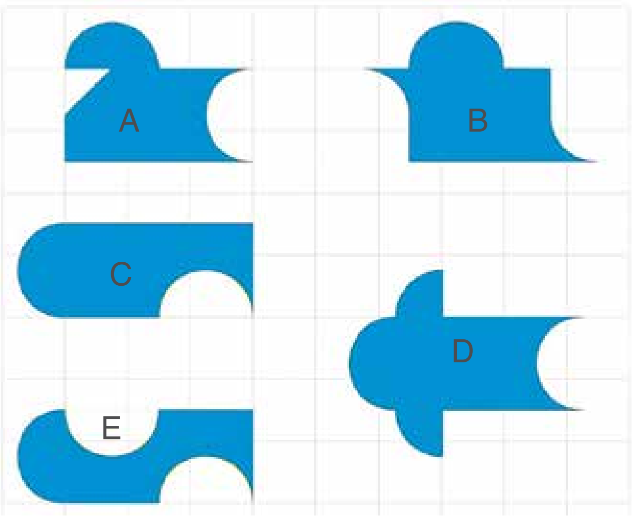
Grado a aplicar		Tercero de primaria.
Tiempo de duración		45 minutos.
Prerrequisitos		Definición de “igual cantidad de superficie”
Materiales		· Copia ampliada de la figura que hace parte de la tarea (sin consigna). · Dos fotocopias de la tarea propuesta, hojas blancas, tijeras, ega.
Pensamiento	Espacial	· Imagen de una figura por reconfiguración. · Sobre posición de una figura en otra. · Designación de figuras geométricas por medio de letras mayúsculas. · Descripción de transformaciones realizadas sobre una figura.
	Métrico	· Construcción del concepto de magnitud área. · Comprensión de los procesos de conservación del área
Estándar	Espacial	· Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. · Identifico y justifico relaciones de congruencia entre figuras. · Realizo construcciones y diseños utilizando figuras geométricas bidimensionales. · Construyo y descompongo figuras a partir de condiciones dadas. · Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños. · Planteo problemas cuya resolución exige la comparación entre figuras a partir de sus cantidades de superficies.
	Métrico	· Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir. · Comparo y ordeno objetos a partir de atributos medibles (cantidad de superficie-cantidad de área)
Contenido Matemático		Relación de equivalencia entre figuras a partir de sus cantidades de área.
Forma de trabajo		Similar que en la tarea anterior, pero, en este caso los grupos de trabajo serán conformados por el educador, quien asumirá como criterio de selección la homogeneidad de sus integrantes, es decir, el nivel de conocimiento y habilidades, las características sociales, la concepción que el grupo tiene sobre cada uno de ellos y el nivel de simpatía o apatía que se tienen hacia las matemáticas.
Procedimientos posibles		· Transformar la figura B en un cuadrado y posteriormente sobreponerlo sobre la figura A. · Transformar la figura A en una figura isométrica a la figura B y sobreponerla sobre la figura B. · Calcar una de las dos regiones a comparar y mediante la aplicación de una rotación sobreponerla sobre la región de la región no calcada.

Aspectos a Considerar	· Asegurarse que al recortar, una, o las dos, regiones en comparación, no se deseche parte de la superficie de ninguna de las dos figuras. · En la figura B resalta zonas cóncavas y convexas que guían (por complementariedad de formas) los procedimientos a considerar en el desarrollo del problema propuesto: el contorno de B induce su transformación en la figura A. · Verificar, tras la aplicación de la reconfiguración de una de las figuras en otra congruente a la segunda de las figuras en comparación, que se proceda a sobreponer la superficie de una figura en otra. No permitir que dicha comparación se haga de forma estrictamente perceptual. · Establecer nuevos grupos de trabajo de tal forma que las características de sus integrantes sean lo más homogéneas posibles. No importa si los grupos se conforman por 2, 3, 4 o 5 integrantes.
Consignas auxiliares y conclusiones	· Consigna auxiliar 1: Construye una figura con forma igual cantidad de área que A y B pero con forma distinta. Describe tu procedimiento. · Consigna auxiliar 2: Inventa un problema donde sea necesario comparar las cantidades de superficie de las figuras A y B para resolverlo. · Conclusión 1: para verificar si dos figuras tienen igual cantidad de área o igual cantidad de superficie a veces es necesario transformar una de las figuras en la otra y, posteriormente, sobreponerlas entre sí. · Conclusión 2: dos figuras de forma diferente pueden tener igual cantidad de área o igual cantidad de superficie

Tabla 2.4. Elementos a considerar en la aplicación de la segunda tarea de la primera secuencia de enseñanza.

Situación de Enseñanza 1. Tercera Tarea

Teniendo en cuenta las cantidades de área de las figuras A, B, C, D y E responde cuáles de las afirmaciones escritas abajo son falsas y cuáles son verdaderas. Explica detalladamente tu procedimiento.



a. Las figuras B y C tienen igual cantidad de área.
b. La cantidad de área de la figura E es mayor que la cantidad de superficie de la figura A.
c. Ninguna de las figuras arriba representadas tiene mayor cantidad de área que la figura C.
d. La unión de las cantidades de área de las figuras B y E es igual que la unión de las cantidades de superficie de las figuras A y D.
e. De las cuatro figuras arriba representadas la superficie de la primera de ellas es la que ocupa menor cantidad de área.

Caracterización didáctica de la tarea y elementos a considerar en su aplicación

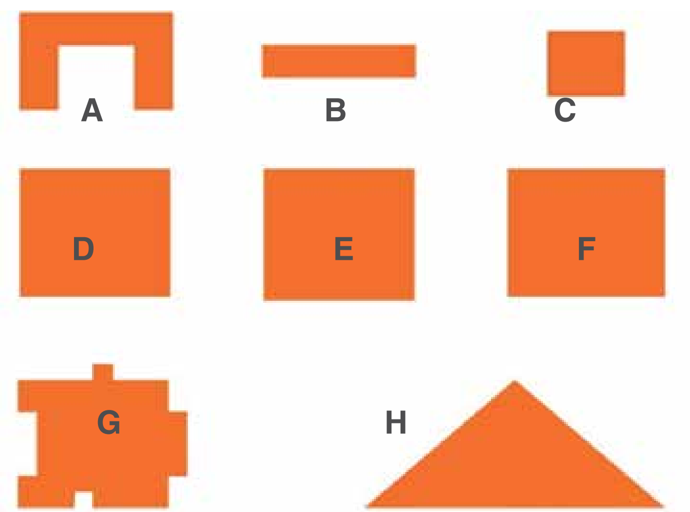
Grado a aplicar		Tercero de primaria
Tiempo de duración		2h 15 minutos.
Prerrequisitos		· Definición de “igual cantidad de superficie” o “igual cantidad de área”. · Transformación de una figura en otra mediante la aplicación de la operación de reconfiguración. · Comparación de figuras a través de la superposición de una figura en la superficie de la otra.
Materiales		· Copia ampliada de la figura que hace parte de la tarea (sin consigna). · Dos fotocopias de la tarea propuesta, hojas blancas, tijeras, ega.
Pensamientos	Espacial	· Imagen de una figura por traslación, rotación y reconfiguración. · Sobre posición de una figura en otra. · Comparación de dos o más figuras a partir de las cantidades de superficies de algunas de sus sub-figuras. · Designación de figuras geométricas por medio de letras mayúsculas. · Descripción de transformaciones realizadas sobre una figura.
	Métrico	· Construcción del concepto de magnitud área. · Comprensión de los procesos de conservación del área
Estándares	Espacial	· Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. · Identifico y justifico relaciones de congruencia entre figuras. · Realizo construcciones y diseños utilizando figuras geométricas bidimensionales. · Construyo y descompongo figuras a partir de condiciones dadas. · Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
	Métrico	· Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir. · Comparo y ordeno objetos a partir de atributos medibles
Contenido		Relación de equivalencia y orden entre figuras a partir de sus cantidades de área.
Procedimientos Posibles		· Directo: comparar las figuras A, B, C, D y E entre sí. · Indirecto: recurrir a una figura rectangular (figura R) para establecer el ordenar de las cantidades de área de las figuras A, B, C, D y E. La figura C es transformable en un rectángulo de igual cantidad de área, es este rectángulo el que hemos designado como R. Intentar transformar las figuras restantes en figuras tipo R es el procedimiento a seguir. La superficie de la figura E permite ser transformada en un rectángulo isométrico a R, pero, sobraría una parte de su superficie (2 cuartos de círculo). La cantidad de superficie de las figuras A, B y D, al contrario, no son suficientes para generar una figura isométrica a R. En consecuencia, E es mayor que C y C mayor que A, B y D. Para establecer la relación de orden entre las cantidades de superficies de las figuras A, B y D es necesario tener en cuenta que en ellas hace falta, respectivamente, una parte triangular, rectangular y semicircular, para poder transformarlas en el rectángulo R. En consecuencia, para terminar de resolver la problemática planteada es necesario establecer la relación de orden entre esas tres partes, entre mayor sea cada una de ellas, menor en cantidad de área será la figura en cuestión. Así, el semi-círculo es mayor que la zona rectangular y esta última mayor que la parte triangular; por tanto, la figura A es mayor que la B y ésta que la C.

Aspectos a Considerar	· Asegurarse que al recortar, una, o las dos, regiones en comparación, no se deseche parte de la superficie de ninguna de las dos figuras. · En las figuras resaltan partes cóncavas y convexas que guían (por complementariedad de formas) los procedimientos a considerar en el desarrollo del problema propuesto, el contorno de la figura C, por ejemplo, induce a su transformación en un rectángulo.
Consignas Auxiliares y Conclusiones	· Consigna auxiliar 1: Inventa un problema cuya resolución exija comparar las figuras A, B, C, D y E a partir de sus cantidades de superficie. · Consigna auxiliar 2: construye dos figuras que tengan igual cantidad de área, formas diferentes y que, en cantidad de superficie, ambas sean mayores que la figura A y menores que B. Describe tu procedimiento. · Consigna auxiliar 3: construye tres figuras de forma distinta y diferente cantidad de área de tal forma que todas sean, en cantidad de superficie, mayores que la figura A y menores que D. Establece una relación de orden entre las nuevas figuras construidas y las figuras B,C y E. · Conclusión 1: una figura tiene menor cantidad de área que otra si hace falta un trozo de superficie en la primera para transformarse en la segunda. · Conclusión 2: para establecer la relación de orden o de equivalencia entre dos o más figuras se pude proceder de dos formas diferentes: una, comparar directamente las figuras entre sí, la otra a través de una nueva figura (transitividad).

Tabla 2.5. Elementos a considerar en la aplicación de la tercera tarea de la primera secuencia de enseñanza.

Situación de Enseñanza 1. Cuarta Tarea

Teniendo en cuenta las siguientes figuras cuáles de las cinco afirmaciones descritas abajo son verdaderas y cuáles son falsas. Explica tu respuesta.



A. La cantidad de área que ocupa la unión de las superficies de las figuras A, B y C es igual que la cantidad de área de la figura A.

B. La cantidad de área que representa a la unión de las superficies de las figuras A, B y C es mayor que la cantidad de área que ocupa la figura B.

C. La cantidad de área de la figura C es menor que la cantidad de superficie que ocupa la unión de las figuras A, B y C.

D. La figura D tiene mayor cantidad de área que la unión de las figuras A, B y C.

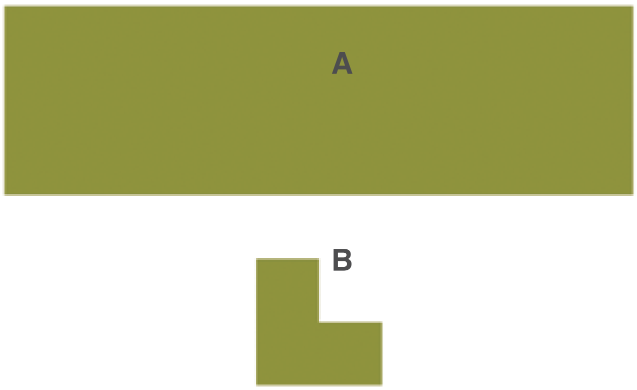
E. La figura E ocupa la misma cantidad de área que la unión de las figuras A, B y C.

Caracterización didáctica de la tarea y elementos a considerar en su aplicación

Grado a aplicar		Tercero de primaria.
Tiempo de duración		2 horas 15 minutos.
Prerrequisitos		· Definición de "igual cantidad de superficie" o "igual cantidad de área". · Transformación de una figura en otra mediante la aplicación de la operación de reconfiguración. · Comparación de figuras a través de la superposición de una figura en la superficie de la otra. · Relación de orden entre dos o más figuras a partir de sus cantidades de superficie.
Materiales		· Copia ampliada de la figura que hace parte de la tarea (sin consigna). · Dos fotocopias de la tarea propuesta, hojas blancas, tijeras, ega.
Pensamientos	Espacial	· Sobreposición de la unión de varias superficies sobre la superficie de otra figura. · Imagen de una figura por la composición de operaciones (configuración-reconfiguración o configuración-traslación). · Designación de figuras geométricas por medio de letras mayúsculas. · Descripción de transformaciones realizadas sobre una figura.
	Métrico	· Construcción del concepto de magnitud área. · Comprensión de los procesos de conservación del área
Estándares	Espacial	· Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. · Identifico y justifico relaciones de congruencia entre figuras. · Realizo construcciones y diseños utilizando figuras geométricas bidimensionales. · Construyo y descompongo figuras a partir de condiciones dadas. · Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
	Métrico	· Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir. · Comparo y ordeno objetos a partir de atributos medibles.
Contenido Matemático		· Operación interna entre cantidades de área: adición de superficies. · Operación externa entre cantidades de área. · Relación de orden y equivalencia entre las cantidades de área de dos o más figuras.
Procedimientos Posibles		· Construir un cuadrado (cuadrado Z) a partir de la unión de las superficies A, B y C. Comparar por sobreposición el cuadrado Z con las figuras D, E y F. Transformar la figura F en el cuadrado Z y, por último, transformar el triángulo G en el cuadrado Z.
Aspectos a Considerar		· Asegurarse que al recortar, una, o las dos, regiones en comparación, no se deseche parte de la superficie de ninguna de las dos figuras. · Las figuras A, B y C son susceptibles de transformarse en un cuadrado. · El contorno de la figura G guía su transformación en una figura de forma cuadrada.
Consignas Auxiliares y Conclusiones		· Consigna auxiliar 1: Inventa un problema cuya resolución exija unir las superficies de las A, B y C y, posteriormente, comparar esta nueva figura con cualquiera de las superficies restantes. · Consigna auxiliar 2: construye dos figuras que tengan igual cantidad de área, formas diferentes y que, en cantidad de superficie, ambas sean iguales a la mitad de la unión de las cantidades de área de las figuras A, B, C, D, E, F, G y H. Describe tu procedimiento. · Consigna auxiliar 3: inventa un problema cuya resolución implique construir dos figuras que tengan igual cantidad de área, formas diferentes y que, en cantidad de superficie, ambas sean iguales al doble de la unión de las cantidades de área de las figuras A, B, D, E, F y H. Describe tu procedimiento. · Conclusión 1: la superficie de una figura puede ser unida con la de otra y representar una tercera figura con cantidad de área mayor que cada una de las dos figuras iniciales. · Conclusión 2: para duplicar la cantidad de área de una figura basta con construir una segunda figura isométrica a la figura inicial y unir sus superficies. · Conclusión 3: para disminuir la cantidad de superficie de una figura a su mitad basta con dividir su superficie en dos partes iguales.

Tabla 2.6. Elementos a considerar en la aplicación de la cuarta tarea de la primera secuencia de enseñanza.

Situación de Enseñanza 2. Primera Tarea



¿Cuántas superficies como la de la figura B necesitas para cubrir totalmente la superficie de la figura A?

Describe detalladamente tu procedimiento.

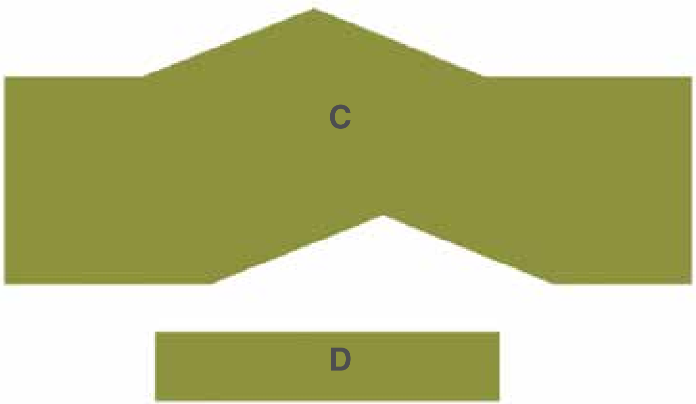
Caracterización didáctica de la tarea y elementos a considerar en su aplicación

Grado a aplicar		Tercero de primaria.
Tiempo de duración		2 horas 15 minutos.
Prerrequisitos		· Definición de “igual cantidad de superficie” o “igual cantidad de área”. · Transformación de una figura en otra mediante la aplicación de la operación de reconfiguración. · Comparación de figuras a través de la superposición de una figura en la superficie de la otra. · Relación de orden entre dos o más figuras a partir de sus cantidades de superficie.
Materiales		· Copia ampliada de la figura que hace parte de la tarea (sin consigna). · Dos fotocopias de la tarea propuesta, hojas blancas, tijeras, ega.
Pensamientos	Espacial	· Sobreposición de la unión de varias superficies sobre la superficie de otra figura. · Imagen de una figura por la composición de operaciones (configuración-reconfiguración o configuración-traslación). · Designación de figuras geométricas por medio de letras mayúsculas. · Descripción de transformaciones realizadas sobre una figura.
	Métrico	· Construcción del concepto de magnitud área. · Comprensión de los procesos de conservación del área
Estándares	Espacial	· Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. · Identifico y justifico relaciones de congruencia entre figuras. · Realizo construcciones y diseños utilizando figuras geométricas bidimensionales. · Construyo y descompongo figuras a partir de condiciones dadas. · Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
	Métrico	· Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se pueden medir. · Comparo y ordeno objetos a partir de atributos medibles.
Contenido Matemático		· Operación interna entre cantidades de área: adición de superficies. · Operación externa entre cantidades de área. · Relación de orden y equivalencia entre las cantidades de área de dos o más figuras.

Procedimientos Posibles	· Construir un cuadrado (cuadrado Z) a partir de la unión de las superficies A, B y C. Comparar por sobreposición el cuadrado Z con las figuras D, E y F. Transformar la figura F en el cuadrado Z y, por último, transformar el triángulo G en el cuadrado Z.
Aspectos a Considerar	· Asegurarse que al recortar, una, o las dos, regiones en comparación, no se deseche parte de la superficie de ninguna de las dos figuras. · Las figuras A, B y C son susceptibles de transformarse en un cuadrado. · El contorno de la figura G guía su transformación en una figura de forma cuadrada.
Consignas Auxiliares y Conclusiones	· Consigna auxiliar 1: Inventa un problema cuya resolución exija unir las superficies de las A, B y C y, posteriormente, comparar esta nueva figura con cualquiera de las superficies restantes. · Consigna auxiliar 2: construye dos figuras que tengan igual cantidad de área, formas diferentes y que, en cantidad de superficie, ambas sean iguales a la mitad de la unión de las cantidades de área de las figuras A, B, C, D, E, F, G y H. Describe tu procedimiento. · Consigna auxiliar 3: inventa un problema cuya resolución implique construir dos figuras que tengan igual cantidad de área, formas diferentes y que, en cantidad de superficie, ambas sean iguales al doble de la unión de las cantidades de área de las figuras A, B, D, E, F y H. Describe tu procedimiento. · Conclusión 1: la superficie de una figura puede ser unida con la de otra y representar una tercera figura con cantidad de área mayor que cada una de las dos figuras iniciales. · Conclusión 2: para duplicar la cantidad de área de una figura basta con construir una segunda figura isométrica a la figura inicial y unir sus superficies. · Conclusión 3: para disminuir la cantidad de superficie de una figura a su mitad basta con dividir su superficie en dos partes iguales.

Tabla 2.7. Elementos a considerar en la aplicación de la primera tarea de la segunda secuencia de enseñanza.

Situación de Enseñanza 2. Segunda Tarea



Calcula la medida del área de la figura C tomando como unidad de medida la superficie de la figura D.

Explica y justifica tu procedimiento.

Caracterización didáctica de la tarea y elementos a considerar en su aplicación

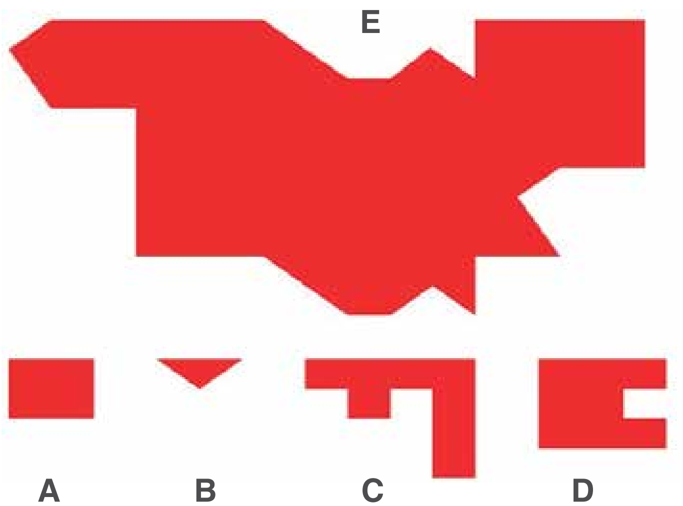
Grado a aplicar		Cuarto de primaria
Tiempo de duración		2 horas 15 minutos
Prerrequisitos		· Transformación de una figura en otra mediante la aplicación de la operación de reconfiguración. · Transformación de una figura en otra mediante la aplicación de la operación de configuración. · Comparación de figuras a través de la superposición de una figura en la superficie de la otra. · Conservación del área. · Operación externa entre cantidades de área. · Medida de área.
Materiales		· Copia ampliada de la figura que hace parte de la tarea (sin consigna). · Dos fotocopias de la tarea propuesta, hojas blancas, tijeras, ega. · Una fotocopia de la tarea dos de la situación 2.
Pensamientos	Espacial	· Sobreposición de la superficie de una figura sobre la superficie de otra. · Imagen de una figura por la aplicación de la operación de reconfiguración. · Imagen de una figura por la composición de operaciones de configuración y traslación o de configuración, traslación y rotación. · Designación de figuras geométricas por medio de letras mayúsculas. · Descripción de transformaciones realizadas sobre una figura.
	Métrico	· Comprensión de los procesos de conservación del área. · Asignación numérica.
Estándares	Espacial	· Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. · Realizo construcciones y diseños utilizando figuras geométricas bidimensionales. · Construyo y descompongo figuras a partir de condiciones dadas. · Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
	Métrico	· Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios. · Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones en procesos de medición. · Utilizo técnicas para la construcción de figuras planas con medidas dadas. · Calculo áreas a través de la composición y descomposición de figuras. · Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
Contenido		Medida directa de cantidades de área
Procedimientos Posibles		· Transformar la figura a medir en otra de igual cantidad de área cuya forma permita recubrir su superficie con figuras de forma y cantidad de área igual a las de la figura patrón.
Aspectos a Considerar		· Asegurarse que al recortar, una, o las dos, regiones en comparación, no se deseche parte de la superficie de ninguna de las dos figuras. · No es posible recubrir totalmente la superficie de la figura a medir con la de la figura patrón. Es necesario transformar la primera en una figura rectangular. · El contorno de la figura medida suscita su transformación en un rectángulo con la misma cantidad de superficie.
Consignas Auxiliares y Conclusiones		· Consigna auxiliar 1: inventa un problema cuya resolución exija recubrir la superficie de la figura C en la superficie de la figura D. · Consigna auxiliar 2: compara las cantidades de superficie de las figura A (Secuencia de Enseñanza 2. Parte 1) con la de la figura C (Secuencia de Enseñanza. Parte 2) ¿Qué relación existe entre ellas? · Consigna auxiliar 3: si las cantidades de superficie de las figuras A y C es igual, ¿por qué sus medidas son distintas? · Consigna auxiliar 4: construye un patrón de medida que asigne a la figura C una medida de área igual al doble de la asignada por el patrón D. · Consigna auxiliar 5: Diseña un patrón de medida que asigne a la figura C una medida de área igual a la mitad de la medida asignada por el patrón D. · Conclusión 1: Según el patrón de medida a una misma figura se le puede asignar diferentes medidas de cantidad de área. · Conclusión 2: entre más cantidad de superficie tenga un patrón de medida, menor será la medida que este asigna a la superficie de una figura. Por el contrario, entre más pequeña sea la cantidad de área de un patrón de medida, más grande será la medida de la cantidad de área de la figura que se mide.

Tabla 2.8. Elementos a considerar en la aplicación de la segunda tarea de la segunda secuencia de enseñanza.

Situación de Enseñanza 2. Tercera Tarea

Identifica cuáles de las afirmaciones escritas debajo de las figuras A, B, C, D y E son verdaderas y cuáles son falsas. Para resolver este problema no puedes medir en ningún caso la cantidad de área de la figura E.
Explica en cada caso tu respuesta.

La medida del área de la figura E tomando como unidad de medida a la figura D es mayor que la medida de la figura E asumiendo como unidad de medida a la figura C.



A. La medida del área de la figura E tomando como unidad de medida a la figura A es menor que la medida de la figura E asumiendo como unidad de medida a la figura B.

B. La medida del área de la figura E tomando como unidad de medida la unión de las figuras A y C es igual que la medida de la figura E asumiendo como unidad de medida la unión de las figuras B y D.

C. La medida del área de la figura E tomando como unidad de medida a la figura A es el triple que la medida de la figura E al asumir como unidad de medida a la figura D.

D. La medida del área de la figura E tomando como unidad de medida a la figura B es ocho veces más grande que la medida de la figura E al considerar como unidad de medida a la figura C.

Caracterización didáctica de la tarea y elementos a considerar en su aplicación

Grado a aplicar		Cuarto de primaria
Tiempo de duración		2 horas 15 minutos
Prerrequisitos		· Transformación de una figura mediante la aplicación de la operación de reconfiguración. · Transformación de una figura por medio de la aplicación de la operación de configuración. · Comparación de figuras a través de la superposición de una figura en la superficie de la otra. · Conservación del área. · Operaciones (interna y externa) entre cantidades de área. · Medida de área.
Materiales		· Copia ampliada de la figura que hace parte de la tarea (sin consigna). · Dos fotocopias de la tarea propuesta, hojas blancas, tijeras, ega.
Pensamientos	Espacial	· Sobreposición de la superficie de una figura sobre la superficie de otra. · Imagen de una figura por la aplicación de la operación de reconfiguración. · Imagen de una figura por la composición de operaciones de configuración y traslación o de configuración, traslación y rotación. · Designación de figuras geométricas por medio de letras mayúsculas. · Descripción de transformaciones realizadas sobre una figura.
	Métrico	· Comprensión de los procesos de conservación del área. · Asignación numérica. · Estimación de la medida de cantidades de área · La diferencia entre la unidad y los patrones de medición. · Selección de unidades de medida, de patrones y de procesos de medición.
Estándares	Espacial	· Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. · Realizo construcciones y diseños utilizando figuras geométricas bidimensionales. · Construyo y descompongo figuras a partir de condiciones dadas. · Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
	Métrico	· Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios. · Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones en procesos de medición. · Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones. · Utilizo técnicas para la construcción de figuras planas con medidas dadas. · Calculo áreas a través de la composición y descomposición de figuras. · Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud. · Resuelvo y formulo problemas que requieran técnicas de estimación.
Contenido		Medida directa de cantidades de área
Procedimientos posibles		· Transformar la figura e en un rectángulo de igual cantidad de área cuya forma permita recubrir su superficie con figuras de forma y cantidad de área igual a las de la figura a. · Establecer que la figura b tiene una cuarta parte de la cantidad de área que la figura a. en consecuencia, la medida del área de la figura e tomando como patrón de medida a la figura a es cuatro veces más grande que la medida que la figura a asigna a la figura e. · Transformar la figura c en dos cuadrados de igual cantidad de área que la figura a. entonces la figura c tiene el doble de la cantidad de área que la figura a. en consecuencia la medida asignada a la figura e al recubrir su superficie con la figura c es la mitad de la medida de m tomando como patrón de medida a la figura a. · Verificar que las figuras c y d tienen igual cantidad de área, por tanto, las dos asignan a la figura e la misma medida de área.

Aspectos a considerar	· Asegurarse que al recortar, una, o las dos, regiones en comparación, no se deseche parte de la superficie de ninguna de las dos figuras. · No es posible recubrir totalmente la superficie de la figura e con la de la figuras a, b, c y d. es necesario transformar a e en una figura rectangular. el contorno de la figura e suscita su transformación en un rectángulo con la igual cantidad de superficie. · Es posible dar cuenta de la medida del área de la figura e tomando como patrones de medida a las figuras b, c y d de forma indirecta, es decir, calculando en primer lugar la medida de e a partir de la figura unidad a, luego, estableciendo la relación existente entre las cantidades de área de la figura a y de las figuras b, c y d obtener la medida, en cada caso, de e.
Consignas auxiliares y conclusiones	· Consigna auxiliar 1: teniendo en cuenta las figuras a, b, c, d y e representadas en la actividad anterior busca la forma más rápida de responder cada una de las siguientes preguntas: a. Si tomamos como patrón de medida la superficie de la figura a cuál sería la medida de la cantidad de área de la figura e. b. ¿Cuál es la medida de la cantidad de superficie de la figura e si se considera a la figura b como unidad de superficie? c. ¿Qué medida de cantidad de área asigna la unidad de medida c a la figura e? d. Al considerar como unidad de medida a la superficie de la figura d, cuál sería la medida de la cantidad de superficie de la figura e. e. Si tomamos como unidad de medida la superficie de la figura a, cuál sería la medida de la cantidad de área de la figura c. f. ¿Cuál es la medida de la superficie de la figura b al tomar como unidad de medida a la figura A? · Consigna auxiliar 2: ¿Con cuál de los cuatro patrones asignados en la secuencia de enseñanza 2? parte 3 ¿Es más fácil medir la cantidad de área de una figura? justifica tu respuesta. · Consigna auxiliar 3: busca una manera para calcular la medida del área de la figura e tomando como unidad de medida a una figura cuya superficie es igual a la unión de las superficies de las figuras a, b, c y d. describe tu procedimiento.

Tabla 2.9. Elementos a considerar en la aplicación de la tercera tarea de la segunda secuencia de enseñanza.

5. Comentarios Finales: Aspectos Significativos, Limitantes y Conclusiones

Pruebas internacionales y nacionales evidencian bajos niveles de logro en los estudiantes colombianos al resolver tareas donde las magnitudes y sus medidas se encuentran presentes. Los profesores, tal como lo ha evidenciado los diagnósticos realizados en el Programa de formación de profesores “Fortalecimiento de las matemáticas en la Educación Básica de Tumaco, Policarpa y Samaniego”, muestran serias dificultades para reconocer los pensamientos, estándares y elementos matemáticos movilizados en el desarrollo de tareas de magnitudes y medidas. Y, como si fuera poco, las apuestas de enseñanza tradicionales sobre dichos tópicos están lejos de mostrar avances significativos en torno a su aprendizaje (Chamorro y Belmonte, 1994). En consecuencia, es urgente y necesario generar espacios que permitan reflexionar, al interior de los Departamentos de Matemáticas de las instituciones educativas colombianas, sobre los elementos curriculares, cognitivos, didácticos y matemáticos que subyacen a la enseñanza de las magnitudes y de las medidas asociadas a ellas. El diseño y evaluación de situaciones problemáticas que susciten la enseñanza de las magnitudes y las medidas desde perspectivas totalmente innovadoras, ha de constituirse en un producto obligado de las discusiones a realizar en dichos espacios. Así mismo, es necesario implementar programas de formación continua que permitan a los docentes de educación básica reflexionar sobre su quehacer y su rol en la formación integral de ciudadanos.

En este capítulo se aportan importantes elementos a considerar no sólo en los espacios de reflexión arriba mencionados sino también para el diseño de situaciones problemáticas encaminadas a la enseñanza de una de las varias magnitudes y de las medidas tratadas en la escuela: el área de superficies planas. Teniendo en cuenta, de un lado, que la enseñanza de este objeto métrico ha de desarrollarse a lo largo de toda la Educación Básica (MEN, 2006). Por otro lado, que son muchas las complejidades que subyacen a su enseñanza y aprendizaje (MEN, 1998; Marmolejo, 2005; Marmolejo, y Vega, 2012; Chamorro y Belmonte, 1994; Chamorro, 2003 a, b); el trabajo a considerar para diseñar, evaluar y transformar procesos de enseñanza que se constituyan en verdaderos espacios de aprendizaje significativo sobre el área de superficies planas, es un camino largo y complejo a seguir.

En este capítulo únicamente realizamos un pequeño recorrido en dicho camino, en él aludimos, en primera instancia, al proceso de diseño seguido para construir dos situaciones problemáticas a través de las cuales es posible introducir a los estudiantes de los dos primeros ciclos de la Educación Básica en la construcción del área. En segunda instancia, caracterizamos curricular, didáctica, cognitiva y matemáticamente cada una de las tareas que conforman las situaciones problemáticas diseñadas. Uno y otro aspecto de vital importancia para el diseño de metodologías de trabajo a considerar en los espacios de reflexión generados al interior de los Departamentos de Matemáticas de las instituciones educativas, cuyo propósito principal es transformar las prácticas de enseñanza habituales y poco efectivas. Igualmente, estos dos aspectos se constituyen en un importante referente no solo para la futura réplica de las tareas diseñadas en ambientes escolares distintos a los considerados en su diseño, sino también para la planeación del Área de Matemáticas en el PEI de cada institución.

Si bien, las dos situaciones problemáticas aquí presentadas se constituyen en importantísimas herramientas por medio de las cuales los profesores de matemáticas de los grados tercero y cuarto de la Educación Básica pueden suscitar, con sentido y significado, el aprendizaje del área de superficies planas, su aplicación solo moviliza dos aspectos a considerar en la construcción del área en la escuela: el área como un tipo de magnitud y la medida directa de cantidades de superficie. Así, pues, no basta con estas dos situaciones para asegurar un total y verdadero aprendizaje del objeto matemático en mención, es necesario además diseñar nuevas situaciones problemáticas, que aplicadas a continuación de las aquí presentadas, susciten la diferenciación entre la medida exacta y la medida aproximada, la apreciación del rango de la magnitud área, el papel del trasfondo social de la medición, la construcción de fórmulas para calcular el área de figuras cuadradas y rectangulares, su extensión a la construcción de fórmulas de otras figuras básicas (triángulo, romboides, rombos, trapecios y polígonos irregulares) y a la medida del área de figuras irregulares. Así mismo, debe ser objeto de interés el diseño de situaciones que posibiliten la distinción entre la magnitud área y la magnitud perímetro. Es claro, pues, que si bien las tareas aquí presentadas son potentes para la enseñanza del área, es mucho el camino que falta por recorrer para contar con una apuesta de enseñanza que suscite el aprendizaje del área de superficies planas en los primeros ciclos de la Educación Básica.

Referencias

Balacheff, N. & Gaudin, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. *Issues in Mathematics Education,* 16,183-211.

Chamorro, M. del C. (2003a). Tratamiento Escolar de las Magnitudes y su Medida. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 221-244). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.

Chamorro, M. del C. (2003b). Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 245-272). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.

Chamorro, M. del C. & Belmonte, J. M. (1994). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid, España: Síntesis.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona. España. Editorial Labor S.A.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México, 41-76.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo (1a Ed.). Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 163-176.

Love, E. & Pimm, D. (1996). "This is so": a text on texts. A.J. Bishop *et al* (Eds.), International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers. Netherland. 371-409.

Marmolejo, G. A. (2014). Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto de colombianos y españoles. Tesis de Doctorado. Universidad de Salamanca. España.

Marmolejo, G. A. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma*, 10(2), 10-26.

Marmolejo, G. A. (2007). Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad. Tesis de magister. Universidad del Valle. Colombia.

Marmolejo, G. A. (2005). Análisis del Tópico de Geometría y Medición. En *Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la escuela.* El Bando Creativo. Cali (Colombia), 27-44.

Marmolejo, G. A. & González, M. T. (2015a). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias,* 10(1), 45-57.

Marmolejo, G. A. & González, M. T. (2015b). *El Control Visual para la construcción del concepto de* *área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis.* Relime, 18(3), 301-328.

Marmolejo, G. A. & González, M. T. (2013a). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), pp. 87-106.

Marmolejo, G. A. & González, M. T. (2013b). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Educación Matemática*, 25(3), 61-102.

Marmolejo, G. A. & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática,* 24(3), 9-34.

Mesa, V. (2010). Strategies for controlling the work in mathematics textbooks for introductory calculus. *Research in Collegiate Mathematics Education,* 7(16), 235-265.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: an empirical approach. *Educational Studies in Mathematics* 56**,** 255-286.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.* Bogotá, Colombia. Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas lineamientos curriculares*. Cali, Colombia. Artes Gráficas Univalle.

Ministerio de Educación Nacional (1996). *Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas - T.I.M.S.S./96*. Bogotá. Colombia. Creamos Alternativas.

Vygotsky, L. S. (1979). *Interacción entre aprendizaje y desarrollo*. Critica. Grupo. Barcelona, España. Editorial Grijalbo.

Capítulo 3

Situaciones Didácticas para la Enseñanza del Volumen y Capacidad en Grado Quinto de Primaria. Desarrollo de Procesos Aditivos y Multiplicativos en Mediciones Directas e Indirectas

Edinsson Fernández-Mosquera

Resumen: En este capítulo, se presenta el diseño de tres situaciones didácticas alrededor de la noción de volumen y capacidad de sólidos, prismas y cuerpos geométricos en el marco del proyecto de formación de maestros "Fortalecimiento de las Matemáticas en la Educación Básica de Tumaco, Policarpa y Samaniego", realizado en el municipio de Policarpa (Nariño - Colombia) entre los meses de Agosto y Noviembre de 2012. Para el diseño de las mismas, se tuvo en cuenta aspectos didácticos de las magnitudes volumen y capacidad. Por ejemplo, el tratamiento del volumen como magnitud unidimensional, proceso aditivo y medición directa; el volumen como magnitud tridimensional, proceso multiplicativo, y medición indirecta. Así mismo, se tomó en consideración algunas recomendaciones que provienen de enfoques didácticos investigados por Del Olmo, Moreno y Gil (1989); y algunos obstáculos, errores y dificultades alrededor de estas nociones.

Palabras claves: situación didáctica; pensamiento geométrico; pensamiento métrico; volumen; capacidad.

1. Introducción

Estudios internacionales han reconocido la utilidad de la medida en el mundo social, esto lo sustentan numerosos expertos como Del Olmo, Moreno y Gil (1989), quienes presentan una justificación sobre la importancia de la medida en las necesidades sociales de la vida adulta debido a la cantidad de mediciones que una persona realiza cotidianamente, así como en las necesidades del mundo del trabajo, en las tareas de estimación, en las mediciones, en el uso correcto de las unidades métricas, de la misma manera que en las necesidades matemáticas de cara a la enseñanza superior.

En este capítulo, se piensa que las magnitudes y la medida, en particular la magnitud volumen, deberían permanecer en la enseñanza por distintas razones:

En primer lugar, desde hace muchos años, las directrices curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) de Colombia, siempre han promulgado que los aspectos matemáticos asociados al pensamiento métrico sean objeto de enseñanza en las matemáticas escolares.

Segundo, no se concibe una Educación Matemática sin que prepare a los niños para enfrentarse a necesidades cotidianas de medición y además sin que incluya un trabajo serio sobre la medida, debido a que ésta es un tópico en el que convergen diversos tipos de pensamientos matemáticos: *geométrico*, *aritmético*, *variacional*, y *métrico*, así como procesos matemáticos tales como: la *resolución y planteamiento de problemas*; la *modelación matemática*; el *razonamiento matemático*; la *formulación, comparación y ejercitación de procedimientos y algoritmos matemáticos;* la *comunicación y expresión de conocimientos matemáticos,* y la cantidad de *destrezas*, *habilidades* y *competencias* que desarrollan.

Tercero, al revisar la literatura científica existente y relativa a las magnitudes y su medida, se encontraron diversos enfoques didácticos, desde los más obsoletos y tradicionalistas que se limitan a un solo aspecto concreto de la medida (el Sistema Métrico Decimal o S.M.D.), el cual usualmente es presentado en forma algorítmica (se trata de manejar un regla para dominar de manera rápida las equivalencias entre unidades), hasta las aproximaciones más recientes que abogan por un método de trabajo más completo, tendiente a construir la magnitud, posteriormente medirla (resaltando su utilidad real) y poder realizar estimaciones.

Cuarto, las magnitudes, concretamente el volumen, se observa que ha sido una de las nociones más descuidadas en términos de actividades matemáticas que se realizan y se proponen a los niños, debido a que se ha limitado sistemáticamente muchos de sus variados y ricos matices y enfoques didácticos, y además, porque no se suele poner de manifiesto su conexión con otros aspectos de la matemática escolar.

Quinto, la medida de las magnitudes, en particular del volumen, se ha considerado un tema complejo y difícil de aprender tanto para los niños como para los docentes, según las investigaciones de Chamorro y Belmonte (1994), Castelnuovo (2004), Chamorro (2003a, 2003b, 2003c y 2004) y Del Olmo et al. (1989). De esta manera, es necesario desarrollar pautas y orientaciones didácticas para los docentes y estar atentos a la evolución de los conocimientos y destrezas de los alumnos de la Educación Básica Primaria, por lo que este capítulo procura que los docentes puedan experimentar por sí mismos las actividades que aparecen reseñadas aquí y tratar los aspectos fundamentales. Por ejemplo, se presenta la construcción de la noción de volumen siguiendo el principio psicológico de ir de lo “concreto a lo abstracto”, usando materiales didácticos que pongan de manifiesto la forma y todas sus componentes geométricas, es decir, “materiales de tipo tridimensional y visual previo al material de tipo plano o más simbólico”, tal y como lo recomienda Alsina, Burgués y Fortuny (1999).

Sexto, diversas investigaciones han mostrado que los niños confunden y no relacionan convenientemente tanto el área como el perímetro de figuras planas como el área y el volumen de sólidos, por lo que términos tales como cuerpos y figuras equivalentes e isoperimétricas cobran gran importancia para superar estas dificultades de comprensión. En este capítulo se presentan estas y otras dificultades asociadas a la noción de volumen.

Séptimo, otro planteamiento que preside el diseño de las situaciones didácticas propuestas aquí, es la intención de que los niños conozcan y comprendan los aspectos tanto *estáticos* (recubrimiento con unidades más pequeñas) como *dinámicos* (superficies que generan los sólidos) del concepto de volumen, dado que se considera que con esta doble perspectiva (*estático – dinámico*) se podrá alcanzar un aspecto más globalizador y válido para estudios posteriores.

Octavo, el procedimiento usual de la medida de la magnitud volumen se da usualmente por medio de la aplicación de fórmulas; sin embargo, esto debe ser completado con otros procedimientos que utilicen la descomposición y composición a partir de elementos más simples. En este capítulo se ampliará en detalle este aspecto didáctico para que el docente de la Educación Básica Primaria lo pueda tener en cuenta a la hora del diseño de actividades matemáticas que involucren el concepto de volumen.

Noveno, el volumen y capacidad son magnitudes diferentes; sin embargo, tanto estudiantes como docentes tienden a confundir los dos conceptos. Aquí se presentarán estas diferencias, de tal manera que se puedan llevar a una puesta en acto de situaciones didácticas que ataquen las confusiones sobre estas nociones.

Las anteriores razones se consideran como las más representativas para justificar por qué se debe abordar con estrategias didácticas diferentes los procesos de enseñanza y aprendizaje que requieren el uso de los conceptos volumen y capacidad en las prácticas pedagógicas de matemáticas de la Educación Básica Primaria, que serán ampliadas en el presente capítulo.

Para dar cuenta de la secuencia de situaciones didácticas diseñadas y presentadas aquí, se presenta un orden en la estructura del mismo, de la siguiente manera. Primero, el marco conceptual, que es aquel donde se presentan los elementos teóricos a la luz de la Didáctica de las Matemáticas, de manera que fueron incorporados a la hora de diseñar las situaciones didácticas presentadas en este capítulo. En segundo lugar, los aspectos metodológicos, que dan cuentan de las fases del proyecto donde se puso en acto las situaciones. En tercer lugar, la presentación de las tres situaciones de enseñanza y sus respectivas caracterizaciones que dan cuenta de la intencionalidad didáctica, a manera de secuencia. Por último, el lector encontrará una descripción de los aspectos positivos y negativos que se evaluaron en cada una de las situaciones y algunas recomendaciones finales, a manera de conclusión, de cómo deberían implementarse dichas actividades en caso de que los docentes lectores deseen aplicar este proceso y diseño realizado en este proyecto.

Es de resaltar que uno de los propósitos fundamentales de este capítulo, es presentarle a los docentes experiencias de aula sobre el diseño de situaciones didácticas basadas en las nociones de volumen y de capacidad, donde puedan tener los fundamentos matemáticos y didácticos, y se arriesguen a diseñar situaciones que requieran ser experimentadas y/o modificadas en futuras puestas en acto de las experiencias o de eventuales variaciones de las mismas.

2. Referentes Conceptuales

Los aspectos estudiados y debatidos en la primera fase de este proyecto, *fase exploratoria y conceptual*, giraron alrededor de reflexiones académicas desde el punto de vista didáctico y matemático, tomando como referentes principalmente las directrices propuestas para el proceso de formación de docentes que provinieron de la visión de los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 1998), de los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 2006), del *Tratamiento didáctico sobre las magnitudes y la medida* (Chamorro, 2003b) y particularmente, del *Tratamiento didáctico de las magnitudes tridimensionales de los sólidos como es el volumen* (Del Olmo et al. 1989; Chamorro, 2003c).

De esta manera, se presentan a continuación los aspectos más relevantes desde lo conceptual y que fueron claves para el proyecto, tales como: aspectos concernientes al desarrollo de los pensamientos: geométrico y métrico; algunos aspectos didácticos de las magnitudes y medidas (en particular sobre volumen y capacidad, donde se observa el tratamiento del volumen como magnitud unidimensional, proceso aditivo, y medición directa y el volumen como magnitud tridimensional, proceso multiplicativo, y medición indirecta); algunas recomendaciones que provienen de enfoques didácticos investigados por Del Olmo et al. (1989); algunos obstáculos, errores y dificultades alrededor de volumen y, por último; recomendaciones de algunos recursos y materiales didácticos para la enseñanza de esta noción.

2.1. Algunos Aspectos del Pensamiento Geométrico

En los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 1998) y los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 2006), se define el *Pensamiento Geométrico* como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Para generar este tipo de pensamiento se recomienda el enfoque de la *Geometría Activa* (Vasco, 1994) que no es más que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo, donde se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y los elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión, incluso de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Tal como afirma Vasco (1994), se trata de "hacer cosas", de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Resumiendo, la *Geometría Activa* es una metodología para la enseñanza de aspectos geométricos como una alternativa, donde los alumnos pueden explorar y representar el espacio de manera *activa* y no *pasiva*.

2.2. Algunos Aspectos del Pensamiento Métrico

Los conceptos y procedimientos propios de este tipo de pensamiento hacen referencia a la comprensión general que se tiene sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones.

Tanto en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 1998) como en los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 2006), estos dos tipos de pensamiento matemático (espacial y métrico) van relacionados con los sistemas geométricos y métricos respectivamente, y así mismo van estrechamente conectados; sin embargo, en estos dos documentos se presentan de manera separada. Es decir, para fomentar los sistemas geométricos, se recomienda iniciar con modelos cualitativos del espacio y con los sistemas métricos, con los que se pretenda cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes que surgen en la construcción de los modelos geométricos y en la constitución de los objetos geométricos de acuerdo con las acciones propuestas por los docentes.

2.3. La Didáctica de las Magnitudes y sus Medidas

Así mismo, en este proyecto se reflexionó sobre el desarrollo de procesos y conceptos relacionados con la didáctica de las magnitudes y sus medidas (Ministerio de Educación Nacional, 1998), como son los siguientes:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.

2.4. Algunos Aspectos Didácticos sobre Volumen y Capacidad

Al enfrentarse a la *transposición didáctica*[4] de la magnitud volumen, se recomienda que sea tratada de dos formas, tal y como señaló Chamorro (2003c):

1. El profesor de matemáticas debe tener en cuenta que el *saber matemático* está obligado a adaptarlo, a modificarlo, a recortarlo, a reorganizarlo. A este conjunto de transformaciones que sufre el saber a efectos de ser enseñado, se le denomina en el campo de la *Didáctica de las Matemáticas*, *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1997), de tal manera que emerja un conocimiento matemático entre los estudiantes.

2.4.1. El volumen como magnitud unidimensional, como proceso aditivo y como medición directa.

En este caso, la aplicación medida, que hace corresponder a una cantidad de magnitud un número real positivo, es una medida que resulta de una medición de tipo ***directa***. Esto significa que a efectos de medida, por ejemplo, una longitud se compara con una longitud patrón, una superficie con una superficie patrón, una masa con una masa patrón, etc., para este caso, un volumen se compara con un volumen patrón para rellenar el volumen dado. De esta manera se obtiene la medida mediante un ***proceso aditivo*** que incluye el conteo del número de veces que se ha utilizado el patrón con que se ha comparado.

2.4.2. El volumen como magnitud tridimensional, como proceso multiplicativo y como medición indirecta.

En este caso, por ejemplo, para encontrar el área de un rectángulo, se multiplica la medida de sus lados (de ahí el nombre de producto de dos medidas o *proceso multiplicativo*, y en este caso, por tanto bidimensional); sin embargo, para hallar el volumen de, por ejemplo, un paralelepípedo, se multiplica las medidas de sus tres dimensiones (de ahí el nombre de *tridimensional*). Y, su medida, es indirecta porque no se hace comparaciones con patrones de la misma naturaleza o porque el valor a medir es muy grande o muy pequeño y depende de obstáculos de otra naturaleza, etc.

Tal y como se presenta esta recomendación, en el ámbito escolar, a la luz de los estudios de Chamorro (2003c), se puede concluir que cuando se trata la magnitud volumen como medida directa, se hace uso de las estructuras aditivas; mientras que en el caso de considerarse el producto de medidas, se requiere de las estructuras multiplicativas que son más complejas que las aditivas, lo que daría una justificación epistemológica de la mayor complejidad didáctica de las magnitudes multilineales, tal como el volumen, frente a las magnitudes lineales, como la longitud.

Así, desde un punto de vista didáctico, la utilización de esta segunda vía para la presentación del volumen, Chamorro (2003c) la considera como de “alto riesgo didáctico” debido a que el modelo aditivo se constituye en un *obstáculo epistemológico*[5] para la comprensión de la fórmula que proporciona el

5. *Obstáculo Epistemológico*, lo define Brousseau (2007, p. 120) en los siguientes términos: “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en obstáculo”. Algunas características relevantes para identificar un *Obstáculo Epistemológico* son: que siempre se trata de un conocimiento, no de una ausencia de conocimiento; este conocimiento permite al alumno producir respuestas correctas en determinados dominios de problemas; este mismo conocimiento engendra respuestas erróneas para ciertos campos de problemas, y los errores producidos no son esporádicos sino muy persistentes y resistentes a la corrección. Por último, Brousseau (2007) clasifica el origen de los *obstáculos* en *Epistemológicos* (ligados al saber matemático), *Ontogenéticos* (ligados al desarrollo neurofisiológico de los sujetos) y *Didácticos* (ligados a las decisiones que toma el profesor o el propio sistema educativo en relación con algunos conocimientos matemáticos).

volumen, pues la significación reside a su vez en la comprensión del producto de medidas, de proporcionalidad múltiple (la proporcionalidad existe como volumen en relación al área de la base y la longitud de su altura), lo que puede dar lugar a representaciones de tipo perimétrico del volumen.

La consideración del volumen como *tridimensional* supone un análisis psicométrico del espacio, así como su aplicación a lo numérico y a lo dimensional, lo que sin duda encierra mayor complejidad que la consideración del volumen como magnitud *unidimensional*, en la que cabe la comparación y la medida directa.

Por otra parte, es de capital importancia el asegurar la relación que existe entre las dos formas posibles de considerar el volumen, y esto se logra sólo en parte en la práctica, recurriendo al rellenado de cubos de un paralelepípedo rectángulo. La presentación clásica de la fórmula que da el volumen de paralelepípedo rectángulo se limita a acompañar un dibujo del mismo, rellenando con cubos o descompuesto en capas, lo que, evidentemente, no es suficiente para encontrar la relación entre la descomposición aditiva mostrada en el dibujo y la multiplicativa en función de las longitudes. El trabajo más delicado se deja usualmente bajo la responsabilidad del alumno, que tiene graves dificultades para encontrar significativamente la relación de rellenado con cubos, con el producto de las tres dimensiones.

También se siguieron las siguientes aproximaciones didácticas recomendadas por Del Olmo et al. (1989):

2.4.3. Comenzar por *transformaciones de romper y rehacer*

Es decir, realizando construcciones con cubos congruentes y reorganizando las piezas de una construcción para obtener otras diferentes, reflexionando sobre el volumen de cada una de ellas y la aditividad (o sustractividad) de juntar (o separar) construcciones, además de marcar la diferencia entre el volumen y el área superficial.

2.4.4. Continuar con la *equivalencia de capacidad* de recipientes abiertos y *volumen* de cuerpos sólidos

Es un modo de realizar la comparación, la cual consiste en intentar meter el sólido en la vasija, en algunos casos se tendrá que despedazarlo o molerlo. Así, para comparar el volumen de una barra de plastilina y la capacidad de una cajita se intentará meterla dentro, pero si fuese un bote de boca estrecha entonces se tendría que recurrir a romperla en trocitos.

2.4.5. Extender *la equivalencia de capacidad con líquidos* desplazados

También se puede recurrir a la inmersión total del sólido en un recipiente con líquido, comparando el nivel que este alcanza con el que tiene después de retirar el sólido y añadirle la cantidad de agua que cabe en el recipiente.

2.4.6. Seguir con *transformaciones* reales de *vaciar* para comparar contenidos o *graduando recipientes*.

Así, por ejemplo, se puede comparar la capacidad de dos cajas por el número de bloques que caben en cada una de ellas. O, llenar las dos vasijas de granos (por ejemplo, garbanzos) y comparar la cantidad que cabe en cada una. Un procedimiento más exacto que los anteriores consiste en llenar los dos recipientes con un líquido, vertiendo el contenido de cada una de ellas en sendas vasijas iguales, comparando finalmente la altura que alcanzan los líquidos. Esta operación puede realizarse con una sola vasija: llenándola con el contenido de uno de los recipientes, marcando su nivel (graduando el recipiente con marcas que indiquen la cantidad de líquido –usualmente en unidades de litros o centímetros cúbicos–), vaciándola y rellenándola con el de otro. Al trabajar con materiales o recursos didácticos menos estructurados como vasijas, vasos, o recipientes, se estimula a que el volumen se compare mediante estimación. Este tipo de actividades conectadas con el efecto de empaquetar favorece la interrelación capacidad – volumen, y el paso a la tridimensionalidad de éste.

2.5. Algunos Obstáculos, Errores y Dificultades Alrededor de Volumen

En esta sección se presenta una serie de *Obstáculos*, *Errores* y *Dificultades* conceptuales más frecuentes que presentan los estudiantes cuando estudian la noción de *volumen*. Dichas dificultades son de orden cognitivo y aparecen reseñadas por investigadores en la didáctica de pensamiento métrico tales como Castelnuovo (2004), Fandiño y D'Amore (2009), Del Olmo et al. (1989) y Chamorro (2003c).

Estos mismos autores resumen los resultados sobre estrategias de trabajo de los estudiantes con las diferentes tipologías de actividades sobre volumen, y los tipos de errores conceptuales y prácticos más frecuentes. A continuación se presentan algunos.

Estudios como el de Castelnuovo (2004) y el de Fandiño y D'Amore (2009) han afirmado que no es fácil comprender la noción de *área,* que con frecuencia se confunde con la de *perímetro*, y que resulta aún más difícil la comprensión del concepto de *volumen*.

Varias son las causas de esta dificultad según los experimentos realizados en la década de los años 60's del siglo pasado por Jean Piaget, una de ellas depende del hecho de que mientras el *área* se refiere a la *superficie*, que es una abstracción, en la noción de *volumen* se crea una confusión entre la *cantidad de materia*, que es algo concreto y el volumen físico, o sea el espacio ocupado, que es algo abstracto.

A esta causa se le añaden otras que se expondrán más adelante. En la didáctica del pensamiento métrico es reconocido que el concepto de *superficie* se aclara por la consideración de figuras que tienen el mismo *perímetro* y distinta área (figuras isoperimétricas, Ver Fotografía 3.1) o que tienen igual área y distinto *perímetro* (figuras isoáreas).

Fotografía 3.1. Los Docentes atendiendo las explicaciones de figuras isoperimétricas formadas con una cuerda.

Sin embargo, cuando se habla de superficie o área, se puede aludir a figuras planas, como triángulo, cuadrado, círculo, paralelogramo, trapecio, etc. o a superficies de solidos tridimensionales (superficies laterales o totales del cubo, del cilindro, del prisma, del cono, de una pirámide, o de otro poliedro); en este segundo caso, se recurre a la idea de "desarrollo" de una superficie: un sólido viene como "abierto" y se "extiende" sobre el plano; (Ver Figura 3.1) entonces una medida interesante es la de su superficie; en dicho caso, obviamente, se pierde la idea de *perímetro*.

Verdaderas dificultades, obstáculos y errores en la comprensión y distinción entre *área* y *perímetro* de figuras planas, así mismo, existen para la comprensión y diferenciación entre la *superficie* y el *volumen* de los sólidos.

Ejemplos análogos en el espacio son, con frecuencia, muy difíciles de realizar; en consecuencia se propone fomentar en los estudiantes dos tipos de experiencias.

1. Construcción de sólidos de igual volumen y superficie distinta.

2. Construcción de sólidos de igual superficie y distinto volumen.

Los mismos autores reseñados al comienzo de esta sección, señalan ciertas peculiaridades que hacen que algunos aspectos asociados al volumen puedan ser comprendidos por los niños más tempranamente que otros, como es el caso de los aspectos que tienen que ver con la *capacidad*, tales como contar cuántas tazas contiene un recipiente, o usando el trasvasado averiguar qué recipiente contiene más líquido. Según Chamorro (2003c), estas habilidades están al alcance de los niños de 6 a 7 años de edad, así mismo declara que "la adquisición de la conservación, que se adquiere con posterioridad

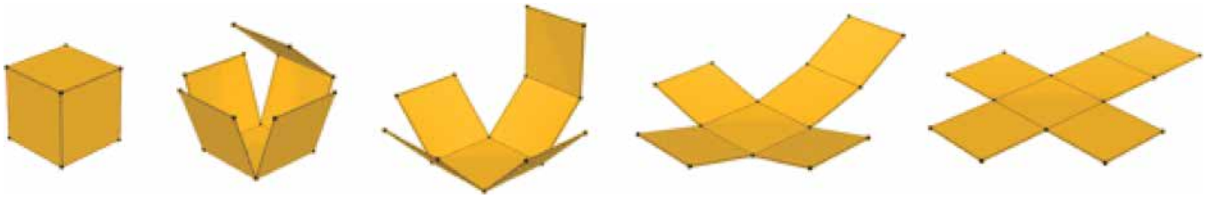


Figura 3.1. Desarrollo del cubo.

a la de la cantidad de la materia, […] es también evidente que la conservación de la capacidad no lleva aparejada la de volumen" p. 266.

Sin embargo, como enfatiza Chamorro (2003c), la especificidad del volumen plantea cuestiones que tardan en ser comprendidas y respondidas por los alumnos hasta al menos los 14 a 15 de edad. Por ejemplo, no es evidente que un volumen hueco y otro lleno puedan ser medidos con la misma unidad, o un volumen de un sólido y otro líquido, y que el número que expresa el volumen sea inversamente proporcional al tamaño de la unidad escogida.

Un claro ejemplo de *obstáculo ontogenético*[6] que usualmente se presenta en alumnos de la Educación Básica Primaria, según Chamorro (2003c), que tiene que ver con el anterior párrafo es el siguiente:

> Es la apreciación incorrecta del carácter tridimensional del volumen, así como la relación que entraña la bidimensionalidad; es decir, la comprensión de cómo la variación de las diferentes dimensiones de, por ejemplo, un poliedro, influye en el volumen del mismo. Así los alumnos menores de 13 años creen que su mayoría que si cada una de las tres dimensiones se duplica, el volumen resultante será 6 veces el primitivo [el dado]; este error se debe a la dificultad en el paso de los modelos aditivos, más primitivos, a los multiplicativos, que se produce sólo en edades posteriores que garantizan un mayor nivel de desarrollo cognitivo. (p. 266).

6. Los *ontogenéticos*, como se afirmó en el anterior pie de página, son un tipo de obstáculos caracterizados por Brousseau (2007) y ligados al desarrollo neurofisiológico de los sujetos. Es decir, se trata de errores cometidos por alumnos que están en un estadio del desarrollo cognitivo caracterizado por la falta de conservación de las cantidades.

Algunos otros procedimientos y dificultades que presentó Vergnaud (como se cita en Chamorro, 2003c) en un estudio exhaustivo que realizó en Francia sobre el volumen, y que se resumen muy bien en algunas conclusiones a las que llegó este trabajo, fueron:

> El concepto de volumen no es dominado por los alumnos entre 11 y 15 años, y sin embargo, es enseñado a niños entre los 12 y 13 años.
>
> La dificultad de concepto de volumen es subestimada, sin que los libros de texto y los profesores en general aporten una respuesta al problema.
>
> El cálculo directo del volumen presenta una dificultad similar a la de encontrar una de las dimensiones, conocido el volumen y las otras dimensiones.
>
> Si los alumnos no disponen de la fórmula que da el volumen para el paralelepípedo, el modelo geométrico del adoquinado ayuda a activarla. (p. 267).

2.6. Recursos y Materiales Didácticos

La calidad de la enseñanza en general, y de las Matemáticas en particular, exige introducir diversos materiales y otros recursos tratando de que la clase sea más receptiva, práctica, manipulativa y amena.

En el aprendizaje de las matemáticas, se requiere en el alumno de la Educación Básica Primaria, la realización de actividades que le ayuden a construir los conocimientos. Para ello el docente tiene que promover en su aula un clima de participación y actuación sobre material concreto, que propicie que los alumnos que se involucren en el proceso de abstracción necesario para la adquisición del conocimiento matemático. Estas actividades propuestas por el docente tienen que estar fundamentadas por medio de las investigaciones y estudios que se han realizado a partir de del campo de la Didáctica de las Matemáticas.

Por ejemplo, Coriat (1997) afirma que los materiales didácticos y recursos simplemente modelizan (o representan) algunas relaciones matemáticas (siempre son pocas, en comparación con la riqueza de relaciones abstractas entre objetos matemáticos), bien a través de los procedimientos de construcción, bien a través de la observación o bien a través de la manipulación.

En este mismo sentido, Vecino (2003) considera que a pesar del cambio en la orientación de la enseñanza de la geometría a partir del movimiento de la *Matemática Moderna*, en las últimas cuatro décadas no han ocurrido tales cambios beneficiosos, justificando esta afirmación por la ausencia u olvido del uso de materiales específicos para la enseñanza de la geometría y en el uso excesivo del tablero como instrumento de representación externa de ciertos elementos geométricos. Lo cual genera un contrato didáctico especial, lleno de cláusulas implícitas, en la didáctica de la geometría, con la generación consecuente de ciertas concepciones erróneas de los conceptos geométricos más elementales.

3. Aspectos Metodológicos

El proyecto donde se diseñaron las tres situaciones didácticas contempló tres fases. En efecto, la primera fase fue *exploratoria y conceptual* donde se analizaron con profundidad y con ayuda de los docentes[4] participantes (Ver Fotografía 3.2), los elementos teóricos, presentados anteriormente en la introducción de los referentes conceptuales de este capítulo. Esta fase tuvo una duración de 32 horas. En esta primera fase se efectuó una indagación acerca de las concepciones que tuvieron los docentes respecto a los pensamientos geométrico y métrico y se encontró una gran debilidad en la conceptualización y desconocimiento de los diversos aspectos que se presentan en los *Lineamientos Curriculares* (Ministerio de Educación Nacional, 1998) y en

4. Todos los docentes participantes de este proyecto trabajan en los niveles de la Educación Básica Primaria en la zona urbana y rural del municipio de Policarpa. Todos ellos tienen a cargo el área de matemáticas y las demás áreas académicas, así que son docentes que deben orientar todos los cursos de grados de Primaria, y su formación profesional es muy diversa, lo cual enriqueció las discusiones y las perspectivas frente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En lo que sigue, se listan los nombres de los docentes que participaron en el proyecto y la institución en la que laboran. Se puede observar que el número total fue de 33 docentes. De la Institución Educativa (IE) Policarpa fueron: Adonias Erwin Ordoñez Meléndez, Emir Ortiz Segura, Betty Erazo Dávila, Ana Delia Rosero Córdoba, Teresa López Melo, Eduin Adrada Grajales, Edgar Noraldo Jaramillo Chávez, Ana Mery Salazar G., María del Carmen Portilla, María Ruby Acosta C., Luis Henrry Erazo Quintero, María Francy Cisneros Rosero, Inés Dulfary España López, Elizabeth Rosero Ordoñez, Mary Guerrero Andrade, Jesús Alberto Rodríguez. De la IE Madrigal San Francisco de Asís, fueron: Milton René Moran Guerrero, William René Guevara Romo, Carlos Adel Guevara Romo, Nathaly Marcela Díaz Estrada, Lilian Astrid Izquierdo Calvache, Ghina Mabell Benítez Benítez, Jorge Javier López Mora, Ana Margarita Rosero Feuillet, Rosaura Aroca Belalcázar. Y finalmente de la IE Agropecuaria El Ejido fueron: Mirtha Bastidas Guerrero, Luís Gonzalo Rosero Ortega, Alba Ermila Melo Vargas, Nelcy Elina Rodríguez Rúales, Willinton Ortiz D., Gloria Aydeé Peña Recalde, Jaime Muñoz Coral, Marco Antonio Meléndez Saavedra.

los *Estándares Básicos de Competencias* para el Área de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006), en particular, con respecto a estos dos tipos de pensamientos y a los aspectos matemáticos de la Geometría Tridimensional y lo que concierne a *volumen* y *capacidad*.

Fotografía 3.2. La Docente María del Carmen Portilla de la IE Policarpa, exponiendo ideas sobre el doblado de papel a los demás Docentes del Proyecto, en la fase exploratoria y conceptual.

En la segunda fase, de *diseño,* se hizo uso de los referentes teóricos estudiados en la primera fase y se tomó en cuenta las dificultades reconocidas por los estudios previos, de tal manera que plasmará ciertas ideas en el diseño de las actividades teniendo en cuenta la *metodología del estudio de clase* (Marmolejo, Blanco & Fernández, 2010). Esta fase tuvo una duración de 32 horas. Para el diseño, se sugirió a los docentes tener en cuenta los siguientes aspectos, a manera de una rejilla que les permitiera presentar un diseño:

- El enfoque de la *Geometría Activa* (Vasco, 1994).
- La interrelación entre los dos tipos de pensamiento matemático (espacial y métrico).
- Los aspectos didácticos sobre volumen, tales como:
  - El volumen como magnitud Unidimensional, como proceso Aditivo y como medición Directa.
  - El volumen como magnitud Tridimensional, como proceso Multiplicativo y como medición Indirecta.
- Las aproximaciones didácticas recomendadas por Del Olmo et al. (1989):
  - Comenzar por transformaciones de romper y rehacer. Continuar con la equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de cuerpos sólidos. Extender la equivalencia de capacidad con líquidos desplazados. Seguir con transformaciones reales de vaciar para comparar contenidos o graduando recipientes.
- Y algunos obstáculos, errores y dificultades alrededor de volumen como es el caso de los aspectos que tienen que ver con la capacidad, usando el trasvasado. O, el modelo geométrico del recubrimiento para activar la búsqueda del cálculo del volumen sin usar una fórmula.
- Y el uso de recursos y materiales didácticos sencillos para el estudio de la magnitud volumen y capacidad.

En esta fase los docentes realizaron por grupos las tres situaciones didácticas a manera de un estudio piloto donde se puso en acto los diseños preliminares entre los mismos docentes, para luego un posterior rediseño a la luz de las críticas constructivas de cada situación.

La tercera fase, de *implementación y evaluación,* también hizo uso de la *metodología del estudio de clase* para acompañar y evaluar la implementación y el rediseño de las situaciones de enseñanza, puestas en juego en niños de quinto grado de la Educación Básica Primaria de las IE del Municipio de Policarpa, Nariño. Esta fase tuvo una duración de 24 horas.

4. El Proceso de Diseño, Implementación, Análisis y Evaluación de las Situaciones Diseñadas

Para responder a la secuencia didáctica se tratará de dar respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se construyeron las tres situaciones didácticas?
2. ¿Cuáles fueron los elementos didácticos que se tuvieron en cuenta?

Para responder el primer interrogante se puede afirmar:

Las tres actividades se construyeron como una secuencia de situaciones didácticas (actividades didácticas de matemáticas) para el quinto grado (5º) de la Básica Primaria, de tal manera de que se pudiera dar finalmente como resultado una *secuencia didáctica* que armonice y complemente las diferentes aproximaciones que se estudiaron en el marco teórico, para que se pueda comprender la constitución de los objetos mentales de *volumen* y de *capacidad* en los niños de este grado de escolaridad.

Se conformaron tres grupos de docentes que provinieron de las tres instituciones educativas que participaron en el proyecto, y de ahí se decidió que cada grupo construyera una situación didáctica. De esta manera, se construyeron las tres situaciones didácticas y se repartió el diseño por cada una las IE participantes, así:

- Los docentes de la IE *Madrigal San Francisco de Asís* diseñaron la primera situación didáctica, titulada: “El Volumen y Capacidad en Sólidos”.
- Los docentes de la IE *Agropecuaria El Ejido* diseñaron la segunda situación didáctica, titulada: “Volumen y Capacidad en Cuerpos Sólidos y Líquidos”.
- Y los docentes de la IE *Policarpa* diseñaron la tercera y última situación didáctica, titulada: “Los Prismas Rectos y su Volumen”.

Como se mencionó, dichas situaciones fueron, a manera de estudio piloto, diseñadas, presentadas, discutidas y puestas en acto previamente por cada grupo de docentes frente los mismos docentes participantes, antes de implementarlas en el 5º grado de la IE Policarpa. Para tal efecto, los tres grupos de docentes hicieron uso del formato de *plan de enseñanza local* y la *guía de trabajo* de los estudiantes que usa la *metodología del estudio de clase*. La primera está compuesta por: nombre de la institución, fecha, hora, grado, número de estudiantes, nombre del profesor, nombre de la unidad, estándares movilizados, logros a desarrollar, indicadores de logro y seis columnas: actividades, consignas, dificultades esperadas de los estudiantes, ayuda del profesor, material y tiempo. Y la segunda, por preguntas o acciones que se les solicita que respondan o realicen en clase.

Por otra parte, para responder al segundo interrogante planteado en este apartado, se tuvo en cuenta una tabla en la que se apreciaban los *análisis didácticos* que sirven para gestionar y organizar la sesión de clase alrededor de esta situación. Por ejemplo, en ella se sintetizan aspectos curriculares como los estándares, los objetivos, contenidos, materiales, pre-requisitos, los tiempos, la gestión didáctica que hace el docente ante esta situación, los procedimientos posibles a manera de análisis *a priori*, y algunos aspectos a considerar, al poner en acto cada situación. En lo que sigue, se presentarán detalles de cada una de las situaciones diseñadas.

Ahora bien, la primera situación titulada: "**El Volumen y Capacidad en Sólidos**" se desarrolló en la IE Policarpa con un grupo de 29 estudiantes de 5ºgrado de la Educación Básica Primaria. Esta situación estuvo a cargo de la Docente Ana Margarita Rosero F. de la IE Madrigal San Francisco de Asís. A continuación, se presenta las preguntas que verbalmente la profesora les planteó a los estudiantes:

Situación Didáctica No. 1: El Volumen y Capacidad en Sólidos

Esta situación se divide en cinco fases:

Fase 1 de la Situación Didáctica No. 1:

- Observe y manipule el material presentado por el docente y describa las características que presentan dichos cuerpos sólidos (peso, tamaño, forma, caras, vértices, etc.).
  Dé ejemplos de otros objetos y explique algunas de sus características (peso, tamaño, forma).

Fase 2 de la Situación Didáctica No. 1:

- Observe, preste atención a las instrucciones que afirma la docente para elaborar un cubo mediante el plegado de papel con sus compañeros. Luego, manipule atentamente el cubo elaborado y de respuesta al siguiente cuestionario:

a. ¿Qué fue lo primero que se hizo?

b. ¿A partir de cuántos paralelogramos se formó el cubo?

c. ¿Cuántos lados tiene el cubo?

d. ¿Cuántas esquinas tiene el cubo?

e. ¿Cuántas aristas tiene el cubo?

Fase 3 de la Situación Didáctica No. 1:

- Observe la caja grande llena con los cubos construidos y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos cubos en total alcanzaron exactamente dentro de la caja?
2. ¿Cuántas capas de cubos se formaron dentro de la caja?
3. ¿Cuántos cubos alcanzaron en la primera y segunda capa de la caja?
4. ¿Cuántas filas y columnas de cubos se formaron en las dos capas de la caja?

Fase 4 de la Situación Didáctica No. 1:

Partiendo de lo anterior, con sus propias palabras defina los siguientes términos:

-Volumen

-Capacidad.

1. ¿Qué relación encuentra entre volumen y capacidad?

- Utilizando el procedimiento multiplicativo responder las siguientes preguntas:

A. ¿Cuánto miden las aristas de cada cubo utilizado para pavimentar la caja?

B. Aplicando la fórmula determine el volumen del mismo cubo.
C. Tomando el volumen de un cubo determine el volumen total de la cantidad de cubos que ocuparon el espacio de la caja.

Fase 5 de la Situación Didáctica No. 1: Guía de trabajo escrita sobre el Volumen y la Capacidad en Sólidos.

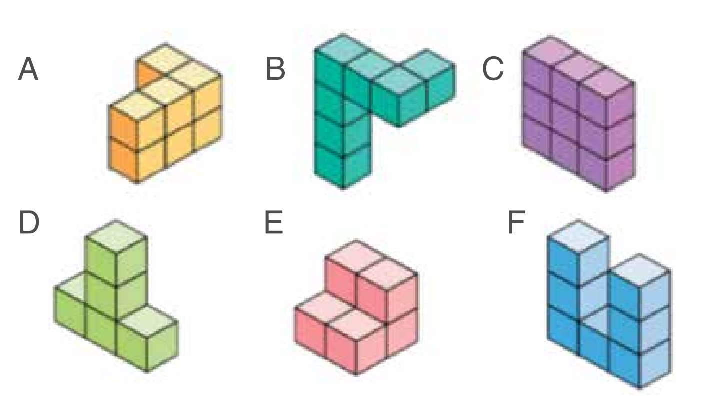
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MADRIGAL SAN FRANCISCO DE ASÍS
GUÍA DE TRABAJO
UNIDAD: VOLUMEN Y CAPACIDAD EN SÓLIDOS.

ACTIVIDAD

NOMBRES: ______________________________
____

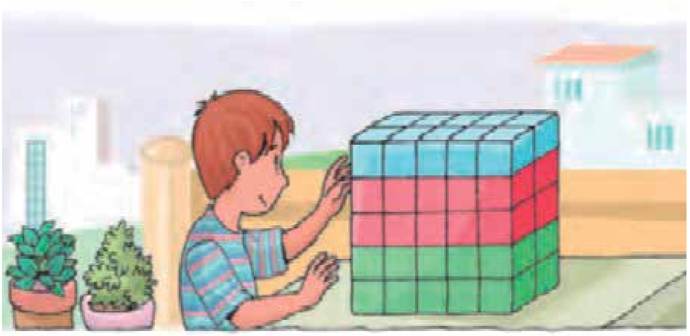
OBSERVA LAS IMÁGENES Y RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

Teniendo en cuenta el número de cubos:



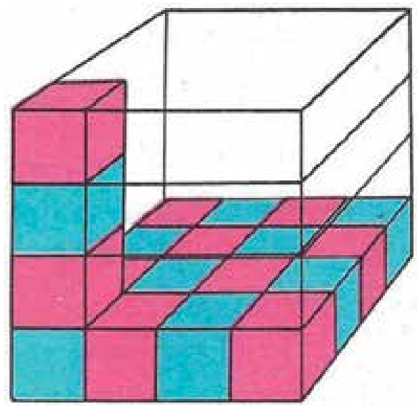
1. ¿Qué figura ocupa mayor espacio o volumen? ____________
2. ¿Qué figura ocupa menor espacio o volumen? ____________
3. ¿Qué figuras tienen igual volumen u ocupan igual espacio? ______ y _____

MARQUE VERDADERO (V), O FALSO (F), SEGÚN CORRESPONDA; TENER EN CUENTA EL DIBUJO.



1. En la construcción hay 10 cubos de color rojo.	V	F
2. La construcción total tiene un volumen igual a 50 cubos.	V	F
3. En la construcción hay 20 cubos de color verde.	V	F

CUENTE LOS CUBOS QUE ALCANZAN EN LA CAJA Y RESPONDA 1.



¿Cuántos cubos faltan para llenar la caja?

____

2. ¿Cuántos cubos se necesitan en total para llenar la caja?

____

A continuación se presenta el análisis didáctico de esta situación en la siguiente Tabla 3.1.

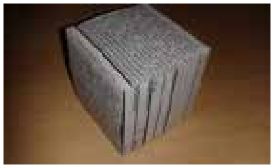
Caracterización didáctica de la situación No. 1 y elementos a considerar en su aplicación

<table>
<tr><th>Grado a aplicar</th><th colspan="2">Quinto de Básica Primaria.</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Pensamientos Matemáticos</td><td colspan="2">Espacial y Sistemas Geométricos: La exploración del espacio tridimensional, bajo el enfoque de la Geometría Activa. Representaciones matemáticas de objetos tridimensionales. Visualización matemática espacial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Métrico y Sistemas de Medidas: La construcción del concepto de las magnitudes de volumen y de capacidad. El desarrollo de la estimación aproximada de los volúmenes y las capacidades.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estándares</td><td>Espacial y Sistemas Geométricos</td><td>• Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con sus componentes (caras, lados) y propiedades.
• Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
• Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizo el proceso contrario (con distintos materiales) en contextos de arte, diseño y arquitectura.</td></tr>
<tr><td>Métrico y Sistemas de Medidas</td><td>• Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el volumen de algunos cuerpos sólidos.
• Justifico relaciones de dependencia del área y del volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos.
• Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
• Selecciono unidades tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.</td></tr>
<tr><td>Contenidos y Objetivos</td><td colspan="2">El contenido es el cálculo y la estimación de volúmenes de sólidos. El objetivo general es desarrollar competencias matemáticas en los niños de 5º grado de la Educación Básica Primaria sobre la manipulación y determinación de diferentes características de poliedros y sólidos en general (tamaño, forma, color, textura, peso, dureza, con o sin fondo, volumen, etc.). Los objetivos específicos: determinar el volumen de una caja dado un patrón de medida; diferenciar volumen y capacidad; visualizar espacialmente la capacidad que tiene una caja grande rectangular de cartón a partir del uso del patrón de medida construido (el cubo de papel).</td></tr>
<tr><td>Tiempo de Duración</td><td colspan="2">Dos (2) sesiones de clase continúas, de cincuenta (50) minutos cada una.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td colspan="2">Dos fotocopias de la guía de trabajo propuesta para que al final de la clase sean diligenciadas (se entregan a cada grupo en la última fase de la clase); cajas de cartón de diferentes tamaños; un conjunto de seis hojas de papel de diversos colores, de forma cuadrada, de tal forma que al doblarlas se formen las seis caras del cubo (estas se entregan a cada grupo de estudiantes); una regla graduada para todo el grupo de estudiantes asistentes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Pre-requisitos</td><td>Saber sumar, saber usar fórmulas, saber medir.</td></tr>
<tr><td>Gestión didáctica que hace el docente ante esta situación</td><td>
Esta situación didáctica se describe de acuerdo con tres grandes momentos. Un primer momento comprende las primeras cuatro fases de la situación que diseñaron los docentes de la IE Madrigal San Francisco de Asís. Este primer momento se describirá de manera secuencial, según los puntos 1 al 11:

Trabajo en Grupo:

1. La Docente solicita a los estudiantes que conformen grupos de trabajo de tres estudiantes cada uno.
2. Les pide a los grupos conformados que empiecen a analizar los recipientes, cajas, y materiales que ella les lleva y les muestra, tales como cajas, vasos, ladrillos, cubos de madera, cajas de cartón llenas de icopor por dentro encajado perfectamente, cajas de fósforos, cajas de palillos, caja llena de plastilina, caja llena de arena, recipientes llenos de arena (o granos -como garbanzos, agua, piedras, etc.).
3. Se trata de que estos recipientes y cajas sean susceptibles de ser llenados con alguno de los materiales, para que al finalizar la clase los estudiantes puedan tanto calcular el volumen como medir la capacidad.
4. Después de que la Docente hace ostensible los materiales que lleva a la clase, les pide que participen enunciando verbalmente sus ideas y la Docente los escucha atentamente.
5. Luego, la Docente les solicita a los estudiantes que a través de una lluvia de ideas den otros ejemplos de cuerpos sólidos y de características físicas que les permitan albergar algún material. En consecuencia, los niños empezarán a participar por grupos.
6. La Docente entrega las seis hojas de papel, de forma cuadrada y de colores, a cada grupo, con el objetivo de que elaboraren el cubo que jugará el papel de patrón de medida, para lo cual es necesario plegar el papel. Para tal efecto, la Docente orienta paso por paso las formas de doblar el papel y seguidamente cada grupo ensambla las seis caras del cubo. Al finalizar el ensamble de los módulos, la Docente les informa que una forma de validar el adecuado ensamble del cubo, consiste en lanzar el cubo al aire y este deberá mantener su forma. De lo contrario se deberá ensamblar de nuevo hasta obtener un sólido compacto (posiblemente los niños lo lanzan hacia arriba a manera de juego).

7. Una vez que cada grupo ha construido su cubo, la Docente les solicita a los grupos que observen detenidamente sus características y que comenten sus inquietudes y observaciones. Así mismo, les solicita a todos los grupos que coloquen sus cubos en un solo lugar (en el escritorio de la Docente).
8. La Docente presenta una caja grande de forma rectangular de cartón vacía y le solicita la colaboración a un estudiante para que le ayude a depositar los cubos dentro de la caja en forma ordenada y bien arreglada, de tal manera que se pueda albergar la mayor cantidad posible de cubos. Esto con el fin de que los estudiantes se den cuenta de la cantidad de cubos que se necesitan para cubrir el espacio vacío que contiene la caja de cartón.
9. Luego de que todos los estudiantes han determinado cuantos cubos se pudieron meter en la caja y al realizar la acción de contar cada uno de los cubos que se introdujeron en la caja, entonces ellos podrán saber el volumen de la caja de cartón usando como patrón de medida el cubo hecho por cada uno de los grupos.
Cada estudiante deberá escribir para la siguiente clase, en su cuaderno de matemáticas, una paráfrasis de los conceptos volumen y capacidad. Así mismo investigará la diferencia entre estos conceptos y documentará la información encontrada. Del mismo modo, cada estudiante conseguirá recipientes de bebidas que incluyan en la etiqueta medida de capacidad (ml) y de volumen (cm^3) como jugos, gaseosas, etc.
10. La Docente les solicita que piensen cómo se determinaría el volumen de recipientes que no tenga la forma parecida a la de una caja (como por ejemplo los vasos), o de otros recipientes que tengan forma irregular. De esta manera, se pretende que los niños determinen las diferencias que existen entre volumen y capacidad. Aquí es importante aclarar que el espacio de la caja representa la capacidad y el número cubos representa el volumen.
11. Por último, la Docente solicita a un grupo de estudiantes que mida las dimensiones de la caja de cartón (ancho, largo y altura de la caja) teniendo como unidad de medida, la longitud de una de las aristas del cubo que construyeron con el doblado de papel, de tal manera que los estudiantes puedan comprobar que la cantidad de cubos que se pudieron empaquetar (el volumen) es igual al cálculo matemático de haber multiplicado las tres dimensiones usando la unidad de medida. Hasta aquí trascurre el primer momento.
</td></tr>
</table>

Gestión didáctica que hace el docente ante esta situación	En el segundo gran momento se debe diligenciar la *guía de trabajo*: la *docente* entrega a cada grupo dos fotocopias que contienen la *guía de trabajo* de esta situación, la cual debe ser diligenciada por escrito. Dicha *guía de trabajo* consta de tres actividades matemáticas cuyo objetivo es reforzar el ejercicio anterior. La primera actividad consiste en establecer relaciones de orden (mayor que, menor que o igual a) respecto al volumen de diferentes sólidos (*polícubos)* Para este propósito se debe determinar el número de cubos que conforma cada sólido. En la segunda actividad, se debe determinar el valor de verdad (verdadero o falso) de las afirmaciones elaboradas a partir de una ilustración. La tercera actividad promueve el pensamiento espacial o geométrico: consiste en determinar el número de cubos ausentes en un sólido incompleto. El tercer y último momento de la clase incluye la puesta en común, el trabajo individual y el trabajo en casa. **Puesta en común:** En primer lugar, la *Docente* invita a un representante de cada grupo a exponer en público las diferencias entre volumen y capacidad. Posteriormente, los estudiantes presentarán la forma como desarrollaron la guía de trabajo, comparando las estrategias utilizadas. El propósito de este momento apunta a mejorar la descripción del procedimiento realizado por cada uno de los estudiantes y a escoger el método de resolución más original o económico, sí es el caso, así como generar entre los estudiantes una nueva manera de proceder. Igualmente, la *Docente* debe considerar las debilidades de los procedimientos presentados así como sus fortalezas. **Trabajo individual:** Cada estudiante debe registrar en su cuaderno una de las maneras de proceder que se presentaron en la puesta en común y establecer diferencias y similitudes. **Tarea para la casa:**
Procedimientos posibles	• Que los estudiantes reconozcan las primeras figuras que se forman al hacer los pliegues de las hojas de colores. • Que reconozcan que cada cara del cubo es un cuadrado y que así mismo identifiquen en él, las aristas y los vértices. • Que los estudiantes observen que la primera capa de 12 cubos cabe exactamente en la caja y forma la base de la caja, por lo cual, podrían deducir que es necesaria la misma cantidad de cubos por cada capa, para completar el espacio disponible de la caja. Así mismo, que determinen cuántas capas o pisos podrían construir. • Puede suceder que asocien el hecho de llenar la caja con cubos con el concepto de *volumen* de la caja o que lo asocien con el concepto de *capacidad* de la caja. • Que los niños sumen el número de cubos que caben en la caja rectangular dada. • Que consignen por escrito en sus cuadernos de matemáticas el concepto de *volumen* y *capacidad*. • Debido a que se requiere de un mayor grado de abstracción, que posiblemente los estudiantes alcancen a comprender el volumen como magnitud tridimensional, como proceso multiplicativo y como medición indirecta. • Se debe prever que la actividad de doblar las hojas de papel para formar el cubo no se prolongue demasiado y no quede suficiente tiempo para que realicen la *guía de trabajo* y no se pueda hacer la *puesta en común* al final de la clase.
Aspectos a considerar	• Esta es una situación didáctica clasificada como de empaquetar, de llenar y táctil, según Del Olmo et al. (1989), donde los niños usan sus manos para coger objetos sólidos, y que los puedan palpar, tal y como lo recomienda el enfoque de la *Geometría Activa*. • La caja vacía de cartón no debe ser cualquier caja, de este modo la (el) *Docente* debe asegurarse de conseguir y medir previamente las dimensiones del cubo que va a actuar como patrón de medida, de tal manera que pudiera albergar un número exacto y preciso de cubos construidos por medio del plegado de papel. • Esta es una actividad donde los estudiantes encuentran el volumen de la caja por medio de conteo y de manera aditiva. Al final, cuando miden las dimensiones de la caja, tomando como unidad de medida la arista del cubo construido, han de utilizar la estrategia multiplicativa para encontrar el volumen y de esa manera comprueben los dos procedimientos utilizados por sus propios medios, sin necesidad de recurrir a la (el) *Docente* para que les confirme si quedo bien o no la actividad. • La guía de trabajo entregada secuencializa las actividades de representación de objetos de tres dimensiones en dibujos de dos y viceversa. Esto, a partir de la actividad que realizan con las seis (6) hojas de papel de colores y de forma cuadrada, al solicitar que las doblen para luego pasar a un objeto de tres dimensiones (el cubo). Es decir, se busca que construyan objetos tridimensionales (bloques) a partir de su representación bidimensional. • En esta situación se fomenta la visualización espacial que permitiría manipular mentalmente las figuras o sólidos rígidos: En primer lugar, la medida del volumen es directa cuando se les pide que determinen el volumen de la caja de cartón vacía, usando como patrón de medida el cubo de papel. En segundo lugar, se constituye en indirecta, cuando multiplican las magnitudes de las longitudes de tres dimensiones, para corroborar el primer resultado.
Consignas auxiliares y/o Conclusiones	• Por una parte, con esta situación didáctica se puede alcanzar a diferenciar entre medir la magnitud *volumen* de sólidos (entendida como el espacio ocupado) y la *capacidad* de regiones tridimensionales (entendida como un espacio vacío con posibilidad de ser llenado por algo). • Las medidas de volumen se utilizan para objetos de tres dimensiones que permiten medir linealmente cada una de ellas, sin embargo, es bastante frecuente utilizar medidas de volumen para medir capacidades o contenidos.

Consignas auxiliares y/o Conclusiones	• Las medidas de capacidad se usan para hablar usualmente de la cantidad de líquido que cabe en un determinado recipiente. A pesar de no tener ningún modelo matemático, se recurre al volumen para trabajar la capacidad matemáticamente. • Esta situación permite que los estudiantes conceptualicen lo que es volumen y capacidad. • Los niños han de concluir que para calcular el volumen de una caja o prisma rectangular, deben calcular el área de la base y multiplicar la magnitud encontrada por la altura. • Si los estudiantes logran desarrollar la habilidad de visualizar espacialmente, pueden determinar el volumen de manera dinámica, calculando primero la base del sólido propuesto, y luego imaginando que la base va creciendo como por "capas" o "pisos" para determinar de manera multiplicativa el volumen de una caja, tomando como patrón de medida el cubo. • Esta situación también genera que en primer lugar se produzca la conceptualización del volumen de forma aditiva, y como medición directa, para luego finalizar de forma la multiplicativa en función de las longitudes de los lados de la caja rectangular. • La validación de las acciones de los estudiantes las han de realizar por su propia cuenta, sin necesidad de recurrir a la (el) Docente. • Las siguientes categorías se tuvieron en cuenta para este diseño: ○ El Volumen como magnitud Unidimensional, como proceso aditivo y como medición directa. ○ El Volumen como magnitud tridimensional, como proceso multiplicativo y como medición indirecta.

Tabla 3.1. Elementos a considerar en la aplicación de la situación No. 1.

Algunos aspectos trabajados en esta primera situación didáctica se ilustran en las Fotografías 3.3 y 3.4, a continuación:

Fotografía 3.3. Un niño introduciendo los cubos en la caja rectangular de cartón.

Fotografía 3.4. Otro niño socializando su estrategia de resolver la última actividad de la guía de trabajo.

La segunda situación didáctica, titulada: "**Volumen y Capacidad en Cuerpos Sólidos y Líquidos**" se desarrolló con los mismos niños de 5º grado de la IE Policarpa, a cargo del Docente Jaime Muñoz Coral de la IE Agropecuaria El Ejido. Esta actividad fue puesta en acto el mismo día que se colocó la primera situación, después de que los niños entraron del descanso de la mañana. A continuación, se presenta las preguntas que verbalmente el profesor les planteó a los estudiantes para esta situación:

Situación Didáctica No. 2: Volumen y Capacidad en Cuerpos Sólidos y Líquidos

Fase 1 de la Situación Didáctica No. 2:

- ¿De qué manera se mide el volumen de un sólido regular que tenga una forma geométrica conocida, (como por ejemplo, el cubo)?
- ¿Cuál es la unidad de medida usual para medir el volumen de un sólido?
- ¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida convencional para medir volúmenes, el metro cúbico?

Fase 2 de la Situación Didáctica No. 2:

- ¿De qué manera se puede determinar el volumen de una piedra que tienen no tiene una forma definida? ¿O cómo se puede hacer esta medición?

Fase 3 de la Situación Didáctica No. 2: Guía de Trabajo Escrita.

Institución Educativa Agropecuaria El Ejido

Guía de trabajo

Unidad: volumen y capacidad en cuerpos sólidos y líquidos.

Actividad

Recordemos que el volumen es una medida tridimensional, porque considera el largo, el ancho y el alto de los cuerpos y por lo tanto

VOLUMEN = LARGO × ANCHO × ALTO

Con la regla mide cuántos dm, cm y mm tiene de largo, ancho y alto el cubo que te entregó el profesor, represéntalo gráficamente ubicando las medidas en cm de largo, ancho y alto.

Calcular el volumen del cubo en dm^3, cm^3 y mm^3

Utilizando el recipiente graduado mida un litro de agua, llénelo en el cubo y complete la siguiente tabla. Todas las cosas tienen volumen.

¿Cómo se puede encontrar el volumen de los objetos que no tienen forma definida, como el cubo, el cilindro, etc.?

Vamos a pensar en la forma como se encuentra el volumen de una piedra:

Llene con agua hasta la mitad el recipiente graduado, observe y registre la medida

____

Sumerja la piedra en el recipiente graduado, observe y registre la medida

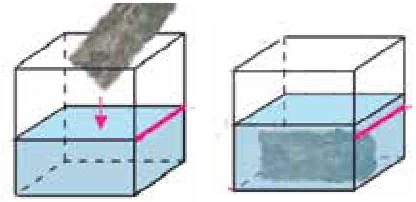
____

Cuál es la diferencia entre las dos medidas _____

____

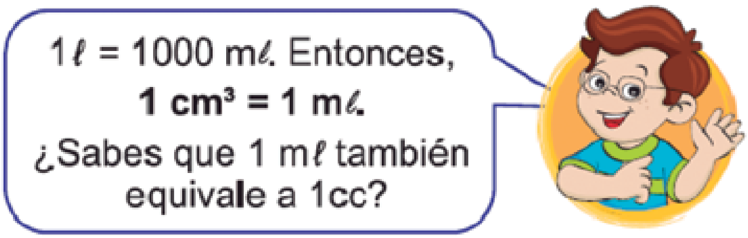
¿Cuál es el volumen de la piedra sumergida en el recipiente con agua?

____



Medida de capacidad	Medida de Volumen		
	dm^3	cm^3	mm^3
1 litro			

Resuelve el siguiente problema:

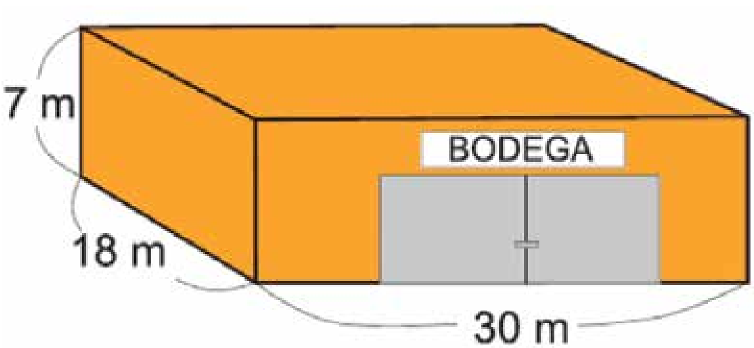


El papá de Juan quiere fumigar la bodega en el almacén, cada litro de insecticida se vende a $5000 y es efectivo para 30 m^3.

¿Cuánto dinero se requiere para comprar la cantidad necesaria de insecticida?

Encuentra el volumen de la bodega

- ¿Cuantos litros de insecticida se necesitan?
- ¿Cuánto dinero se requiere?



Para resumir los diferentes elementos didácticos que se tuvieron en cuenta para el diseño y puesta en acto de esta segunda situación didáctica, se presentan en la siguiente Tabla 3.2.

Caracterización didáctica de la situación No. 2 y elementos a considerar en su aplicación

<table>
<tr><th>Grado a aplicar</th><th colspan="2">Quinto de Básica Primaria</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Pensamientos Matemáticos</td><td colspan="2">Espacial y Sistemas Geométricos: La exploración del espacio tridimensional, bajo el enfoque de la Geometría Activa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Métrico y Sistemas de Medidas: Cuantificar numéricamente las dimensiones, conversión de medidas, patrón de medida, unidad de medida, medición de volumen con recipientes graduados. La construcción del concepto de la magnitud volumen y capacidad.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Estándares</td><td>Espacial y Sistemas Geométricos</td><td>Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales.</td></tr>
<tr><td>Métrico y Sistemas de Medidas</td><td>Reconozco en los objetos, propiedades o atributos que se puedan medir longitud, área, volumen, capacidad.
Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficie, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; peso y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.
Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de las magnitudes respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas).</td></tr>
<tr><td>Variacional Sistemas Algebraicos y Analíticos</td><td>Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.</td></tr>
<tr><td>Contenidos y Objetivos</td><td colspan="2">Calcular el volumen a objetos líquidos y objetos sólidos.
Descubrir qué relación existe entre el volumen de un líquido y el tamaño del recipiente que lo contiene.
Establecer la relación entre volumen y capacidad.
Establecer la capacidad en líquidos de diferentes recipientes graduados y no graduados, con la solución de problemas matemáticos de cálculo de volumen y capacidad.</td></tr>
<tr><td>Tiempo de Duración</td><td colspan="2">Dos (2) sesiones de clase continúas, de cincuenta y cinco (55) minutos cada una, para un total de 110 minutos que duró toda la actividad.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td colspan="2">Dos fotocopias de la guía de trabajo propuesta para que al final de la clase sean diligenciadas (se entregan a cada grupo en la última fase de la clase).
Recipientes graduados (uno por cada grupo).
Un cubo hecho en plástico transparente para ver el nivel del agua, sin tapa.
Un recipiente grande lleno de agua para surtir el agua que se vierte en los cubos.
Piedras de diferente tamaño y forma que puedan caber en el cubo.
Reglas graduadas para cada grupo de estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Pre-requisitos</td><td colspan="2">Saber sumar, saber usar fórmulas, saber medir, saber multiplicar por cifras de tres o cuatro dígitos, saber algo de la noción de volumen y de la noción de capacidad.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Gestión didáctica que hace el docente ante esta situación</td>
<td>
Trabajo en Grupo:
Esta situación didáctica se divide en tres fases. En la primera fase:

El Docente empieza preguntando a todo el grupo de estudiantes varias preguntas a manera de motivación, como por ejemplo:
¿De qué manera se mide el volumen de un sólido regular que tenga una forma geométrica conocida, (como por ejemplo, el cubo)?
¿Cuál es la unidad de medida usual para medir el volumen de un sólido?
¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida convencional para medir volúmenes, el metro cúbico?
Después de estas tres preguntas y que los niños hayan respondido, el Docente explica cada una de estas preguntas.
Luego, continúa preguntando:
¿De qué manera se podrá medir el volumen de una piedra o cualquier otro objeto amorfo, sin que se sepa el ancho, el largo y el alto con exactitud?
Entra en la escena de la clase otro Docente, (es otro Docente del grupo que diseñó esta segunda actividad, de la IE El Ejido, el Docente Luís Gonzalo Rosero O.) y les solicita a los estudiantes que llenen un recipiente de plástico vacío, que el presenta a la clase, con papas, granos de garbanzos, un aguacate, piedras pequeñas y agua. Aquí les pregunta si todos estos materiales caben dentro del recipiente amorfo, y puesto que seguramente los niños afirman que sí, entonces invita a dos de los niños presentes a que hagan caber todos estos materiales dentro del recipiente. Para ello, los dos niños reciben sugerencias de los demás de cómo empaquetar bien y de manera ordenada los materiales dentro del recipiente, para poder que quepan exactamente, sin rebosarse.
El mismo Docente procede a hacer una reflexión de actitud y valores positivos a los niños para que de esta misma manera busquen llenar sus vidas de cosas buenas.
Reanuda la actividad el Docente que empezó la orientación, preguntando:
¿De acuerdo a lo que observaron, sobre la actividad de empaquetamiento que presentó el otro Docente, qué entendieron por capacidad?
A lo que los niños empiezan a responder a esta pregunta de manera activa.
El Docente explica lo que van a realizar en la siguiente fase de la situación: el cálculo de un sólido amorfo (una piedra, por ejemplo) de una manera diferente a la de recurrir a una fórmula donde se midan las tres dimensiones. Para ello, pregunta de nuevo a todo el grupo lo siguiente:
¿De qué manera se puede determinar el volumen de una piedra que no tiene una forma definida? O bien, ¿cómo se puede hacer esta medición?
Para ello, explica de nuevo que la unidad de medida es el metro cúbico y que la capacidad de un recipiente lleno de líquidos se mide en litros. Luego explica que un litro es equivalente a un decímetro cúbico y que esta equivalencia la van a comprobar más adelante, así como otras equivalencias.
Explica de qué manera van a medir un cubo de plástico, que les va a pasar a cada grupo de trabajo, midiendo las aristas de las tres dimensiones y usando la fórmula. Y por último, medirán el volumen de una piedra o cualquier objeto físico que no tenga una forma definida.

En la segunda fase, el Docente pasa a cada grupo la guía de trabajo que aparece de forma precedente a esta Tabla.
Trabajo en Grupo:
Cada grupo compuesto de cinco niños empieza a realizar la guía de trabajo. Para ello cada niño, cabeza de grupo, lee y todos empiezan a realizar la actividad. La guía se compone de las siguientes cinco partes:

Medir las tres dimensiones del cubo de plástico dado, usando una regla graduada, y calcular el volumen del mismo, en las siguientes unidades de medida tridimensionales: dm^3, cm^3 y mm^3.
Graduar el cubo dado, usando un recipiente graduado, trasvasando el líquido de un recipiente a otro.
Llenar una tabla de valores para que comprendan la equivalencia de medidas de volumen de un recipiente en términos de capacidad, usando el sistema de medidas propio de una magnitud lineal (kl, hl, dal, l, dl, cl, ml). Se procederá, también, a que si se tiene en cuenta el aspecto tridimensional, entonces aparece el sistema de medida en metros cúbicos (hm^3, dam^3, m^3, dm^3, cm^3).
Cálculo del volumen de una piedra.
Resolver un problema de la vida cotidiana donde se involucra el volumen.

</td>
</tr>
</table>

Gestión didáctica que hace el docente ante esta situación	**La puesta en común**: En la tercera fase, el *Docente* vuelve a explica el desarrollo de la guía de trabajo, y pregunta cada una de las partes de que se compone la guía, de tal manera que los estudiantes corroboren sus respuestas. **Trabajo individual:** Cada estudiante debe registrar en su cuaderno las cinco partes de esta guía. **Tarea para la casa:** Cada estudiante debe traer a la siguiente clase una conceptualización con sus propias palabras, y por escrito, en su cuaderno de matemáticas, lo que comprendió por *volumen* y *capacidad*. Y que luego consulte por su propia cuenta, esta diferencia y la escriba también en su cuaderno.
Procedimientos posibles	Que reconozcan que únicamente es necesario medir una arista del cubo para determinar las tres dimensiones (largo, ancho y alto). Que al calcular el volumen del cubo en dm^3, cm^3 y mm^3, no multipliquen sino que sumen cada medida de cada dimensión. Que al colocar el resultado de los volúmenes en dm^3, cm^3 y mm^3, se olviden de escribir las unidades de medida. Que al graduar el cubo dado, usando un recipiente graduado, rieguen el agua en sus mesas de trabajo. Que corroboren que efectivamente un litro de agua equivale a 1000 cm^3, a un dm^3, y a 1000000 mm^3. Que los niños no comprendan por qué se hace la operación aritmética de hacer la diferencia de valores obtenidos entre el volumen del cubo antes y después de introducir la piedra dentro del cubo lleno de agua. Que confundan el volumen de la piedra con el peso de la misma. Que los niños sumen la magnitud de las tres dimensiones del cubo para obtener el volumen del cubo. Que los niños multipliquen la magnitud de las tres dimensiones del cubo para obtener el volumen del cubo. Que puedan consignar por escrito en sus cuadernos de matemáticas, el concepto de *volumen* y *capacidad*. Que los estudiantes pueden llegar a comprender el volumen como magnitud tridimensional, como proceso multiplicativo y como medición indirecta, ya que se requiere un mayor grado de abstracción. Que los estudiantes pueden llegar a comprender el volumen de una piedra como magnitud lineal, como un proceso de hacer una diferencia y como medición indirecta, ya que no es posible determinar las tres dimensiones de la piedra, debido a su forma irregular.
Aspectos a considerar	Esta es una situación didáctica clasificada como de empaquetar, de llenar y táctil, según Del Olmo et al. (1989), donde los niños usan sus manos para coger objetos sólidos, y que los puedan palpar, tal y como lo recomienda el enfoque de la *Geometría Activa*. El cubo de plástico (que el grupo de Docentes que diseñó la actividad y que el Docente les presentó a cada grupo) no es cualquier cubo, sino que tiene la intencionalidad didáctica de que los estudiantes comprendan la equivalencia entre las medidas de volumen lineal y las medidas de volumen de forma tridimensional. Es importante asegurarse que los niños comprendan cómo funciona el *Sistema Métrico Decimal* en magnitudes más sencillas, como la longitud o la superficie, antes de pasar al volumen. Esta es una actividad donde los estudiantes encuentran el volumen de un objeto amorfo, en este caso una piedra, midiendo el desplazamiento del líquido. Los vasos o recipientes graduados son un conjunto de recipientes que se utilizan para medir la capacidad de los objetos y que generalmente poseen una escala numérica en uno de sus lados.

Consignas auxiliares y/o Conclusiones	Las siguientes categorías se tuvieron en cuenta para este diseño: Extender la equivalencia de capacidad con líquidos desplazados. Seguir con transformaciones reales de vaciar para comparar contenidos o graduando recipientes. La utilidad principal de los vasos graduados es medir la capacidad de un objeto o el volumen de un líquido. La finalidad de la didáctica de la medida, al usar recipientes, es la misma: “facilitar el trabajo sobre los conceptos de volumen y capacidad”. El concepto de volumen de los líquidos y fluidos está muy vinculado, en los niños de la Educación Básica Primaria, con la forma del recipiente que contiene los líquidos o fluidos. Así mismo, la utilización de recipientes o vasos graduados es muy conveniente para aclarar este tipo de confusión entre volumen y capacidad. Aunque los recipientes estén graduados con escala numérica, en la Primaria deberá evitarse su lectura directa y realizar la mayoría de las actividades con marcas externas que sirvan de punto de referencia para comparar la capacidad de los recipientes. Los materiales y recursos didácticos usados en esta situación se constituyen en elementos didácticos para iniciar al estudiante, con mediciones sencillas, en los conceptos de volumen y capacidad. Esta situación permite que los estudiantes conceptualicen lo que es volumen y la capacidad. Esta situación también genera que en primer lugar se produzca la conceptualización del volumen de forma aditiva y como medición directa, para luego finalizar, de forma multiplicativa, en función de las longitudes de los lados de la caja rectangular. La validación de las acciones de los estudiantes las realizan por su propia cuenta, sin necesidad de recurrir a la *Docente*, en el ejercicio de comprender la equivalencia de medidas entre magnitudes lineales (como el volumen en litros) y magnitudes trilineales (el volumen en términos cúbicos, como m^3, o cm^3).

Tabla 3.2. Elementos a considerar en la aplicación de la situación No. 2

Las Fotografía 3.5 y 3.6 ilustran algunos aspectos relevantes de esta situación didáctica.

Fotografía 3.5. Grupo de niños trasvasando el líquido de un recipiente graduado al cubo dado.

Fotografía 3.6. Un niño introduciendo una piedra en el cubo lleno de agua para ver el desplazamiento de líquido que produce.

Y finalmente, para cerrar la secuencia didáctica, la tercera situación didáctica titulada: “**Los Prismas Rectos y su Volumen**”, se desarrolló con los mismos niños de 5º grado, a cargo de la Docente María del Carmen Portilla de la IE Policarpa (Ver Fotografía 3.7) y efectuada en la misma institución al siguiente día de la puesta en acto de las anteriores situaciones. El objetivo principal fue el desarrollo del pensamiento métrico, en particular, el reforzamiento de la noción de volumen como magnitud tridimensional, y como proceso multiplicativo. Esta actividad permitió exhibir el paso de lo bidimensional a lo tridimensional y midiendo de manera indirecta y directa diferentes prismas rectos y paralelepípedos. Como se puede inferir, esta situación reforzó y recogió aspectos didácticos y matemáticos sobre el volumen y capacidad de las dos anteriores situaciones y, en consecuencia, no se presenta el mismo tipo de tabla donde se analizan los elementos didácticos. Además, a continuación, por cuestión de reducir espacio en la escritura de este capítulo, sólo se presenta la guía de trabajo escrita y presentada a los alumnos

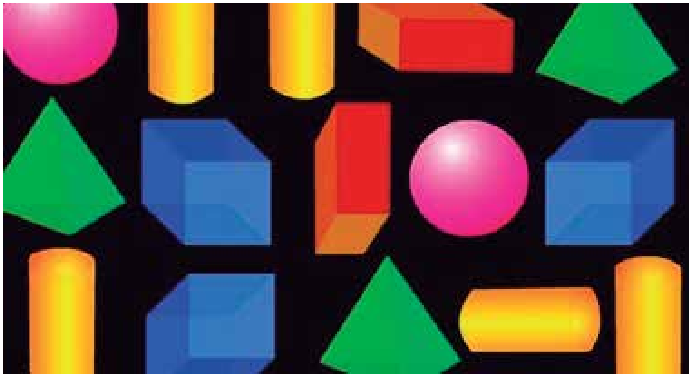
Fotografía 3.7. Grupo de Docentes de la IE Policarpa, quienes diseñaron la tercera situación.

Situación Didáctica No. 3: Los Prismas Rectos y su Volumen.

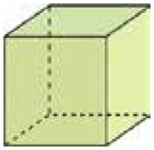
INSTITUCIÓN EDUCATIVA POLICARPA

GUÍA DE TRABAJO

COMPARO CARAS, ARISTAS Y VOLÚMENES
ACTIVIDAD



1. Trabajo en equipo



Respondemos las siguientes preguntas y escribimos los conceptos en los espacios correspondientes a cada pregunta:

¿Qué entiendo por prismas rectos? ___________

____

¿Qué forma tienen las bases en los prismas rectos? ___________________________

____

¿Qué es volumen?_______________________

____

El monitor de mi equipo trae los siguientes cuerpos geométricos; prismas y pirámides con diferente número de caras laterales; cilindros y conos de diferentes tamaños.

CARACTERÍSTICAS DE LOS PRISMAS RECTOS						
NOMBRE DEL SÓLIDO	**CARAS LATERALES**					
	N°	**Forma**	**Dimensión altura**	**N°**	**Forma**	**Dimensión Base**
CUBO						
PRISMAS:						
TRIANGULAR						
CUADRANGULAR						
RECTANGULAR						
PENTAGONAL						
HEXAGONAL						
OCTAGONAL						
DECAGONAL						

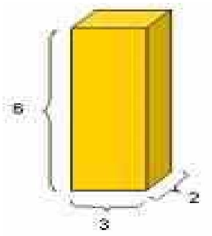
Separamos los sólidos formados por caras de superficie plana en su totalidad, y los clasifico según el número, forma y dimensiones de las caras laterales y de las bases. Amplío el ejercicio con la anotación de otros sólidos que no se encuentren a nuestra disposición.

Completamos el siguiente cuadro: respondiendo cada uno de los puntos anotados en él.

Escribo un concepto claro y preciso de lo que es el cubo y el prisma en general.

El cubo es: ________________________________
____

El prisma es: ______________________________
____



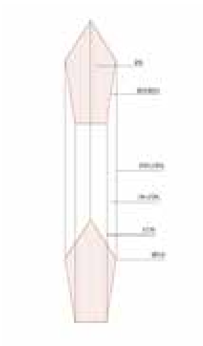
2. PRESENTAMOS EL TRABAJO A LA PROFESORA

(Se levanta el monitor y entrega el trabajo para ser revisado)

Leemos los siguientes textos para ampliar conceptos

- Los prismas rectos: Son prismas cuyas caras laterales son rectángulos o cuadrados; además prisma es un poliedro que tiene como base dos polígonos regulares de dos caras iguales y paralelas, sus caras laterales son paralelogramos y las aristas son perpendiculares.
- Su base es la cara donde descansa el prisma.
- La altura es la distancia comprendida entre la base y la cara superior opuesta a esa base

Cuando las aristas del prisma son perpendiculares a los planos de las bases, se denomina prisma recto. Las caras laterales forman un rectángulo.



3. Observamos el conjunto de los poliedros muy cuidosamente, y tenemos en cuenta que entre este conjunto de poliedros tengamos los siguientes:

- Dos prismas cuadrangulares.
- Tres prismas rectangulares.
- Dos prismas triangulares.
- Varios cubos.

En caso que falte alguno o algunos de estos prismas el monitor de nuestro equipo va hacia el C.R.A. lo consigue o los consigue y los trae a la mesa de trabajo.

PARA RECORDAR:

ÁREA DEL CUADRADO	ÁREA DEL RECTÁNGULO	ÁREA DEL TRIÁNGULO

Seguidamente:

A pensar

- Coloco dos prismas cuadrangulares en posiciones diferentes y determino en cada uno de ellos, el área de la base y la altura correspondientes.
- Consigno los datos en el siguiente espacio.

· PRISMA CUADRANGULAR NÚMERO 1:	
· Área de la Base =	Altura =
·	
· PRISMA CUADRANGULAR NÚMERO 2:	
· Área de la Base =	Altura =

· Coloco tres prismas cuadrangulares en posiciones diferentes y determino en cada uno de ellos, el área de la base y la altura correspondientes.

Consigno los datos en el siguiente espacio

· PRISMA RECTANGULAR NÚMERO 1:	
· Área de la Base =	Altura =
· PRISMA TRIANGULAR NÚMERO 2:	
· Área de la Base =	Altura =
· PRISMA TRIANGULAR NÚMERO 3:	
· Área de la Base =	Altura =

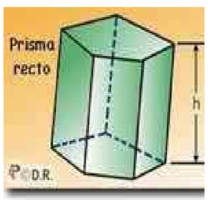
- Coloco dos prismas triangulares en posiciones diferentes y determino en cada uno de ellos, el área de la base y la altura correspondientes.
- Consigno los datos en el siguiente espacio.

· PRISMA TRIANGULAR NÚNERO1:	
· Área de la Base =	Altura =
· PRISMA TRIANGULAR NÚNERO2:	
· Área de la Base =	Altura =

- Coloco varios cubos en posiciones diferentes y determino en cada uno de ellos, el área de la base y la altura correspondientes.

· CUBO NÚMERO 1:	
· Área de la Base =	Altura =
· CUBO NÚMERO 2:	
· Área de la Base =	Altura =
· CUBO NÚMERO 3:	
· Área de la Base =	Altura =

4 Prisma recto



Leemos el siguiente texto.

VOLUMEN DE LOS PRISMAS RECTOS

Volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo.

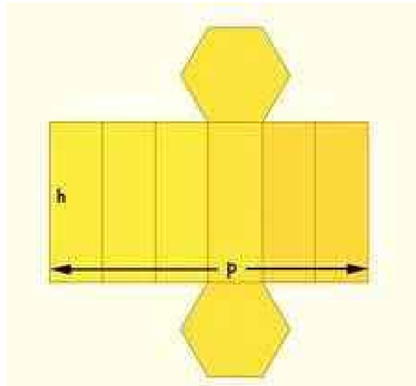
El volumen de los prismas rectos, sea cualquiera la forma de su base, se halla multiplicando el área de la base por la altura del respectivo prisma.

Volumen del prisma recto = BASE * ALTURA

Ejemplo: La base de un prisma mide 5cm.

* 5cm. = $25cm^2$

Volumen del prisma: $25cm^2$ * 8cm = 200 cm^3



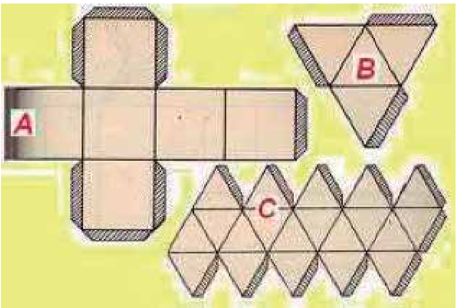
PRESENTAMOS EL TRABAJO A LA PROFESORA. (Se levanta el monitor y entrega el trabajo para para ser revisado)
PUESTA EN COMÚN

Con los datos registrados en el punto 3 y el texto leído en el punto 4, averiguamos el volumen de dos de los prismas anteriores.

a. Volumen 1=
b. Volumen 2=
c. En un octavo de cartulina dibujamos cada uno de los prismas a los cuales les hallamos el volumen. (Es una representación gráfica del trabajo anterior)
d. Presentamos los dos prismas a los que les sacamos el volumen

El representante de cada equipo expone el trabajo al frente de todos los demás compañeros. Con mucho respeto escuchamos a los monitores de los equipos y en caso de hacer un aporte pido la palabra levantando la mano. Ante toda la educación; por tanto escucha activa.

Trabajo en mi casa



- En mi casa busco dos cuerpos sólidos que sean prismas rectos. Y encuentro sus volúmenes.
- Explico el trabajo a mis padres.
- Los dos prismas a los cuales les encontré el volumen los presento como parte de mi trabajo.
- Identifico las figuras A, B y C que observo en la siguiente imagen; encuentro las dimensiones a cada figura, determino el volumen y los escribo en mi cuaderno de Matemáticas.
- Presento y sustento mi trabajo ante mi profesora y mis compañeros.

Presentaré mi trabajo a la profesora.

Las Fotografía 3.8 y 3.9 ilustran algunos aspectos relevantes de esta última situación didáctica.

Fotografía 3.8. La profesora explicando lo que los niños debían efectuar con los poliedros que ella trajo a la clase.

Fotografía 3.9. Un grupo de niños realizando las actividades de dibujar los sólidos de tres dimensiones en dos dimensiones.

5. Comentarios Finales: Aspectos Significativos, Dificultades y Conclusiones

Con respecto a la última fase de la metodología de *estudio de clase* implementada en este proyecto, y con miras al rediseño y retroalimentación los docentes que estuvieron como observadores externos en cada clase, presentaron algunos aspectos positivos y negativos de las tres situaciones, los cuales se presentan a continuación.

5.1. Lo Positivo en la Primera Situación

- La clase resultó ser muy dinámica y recursiva por parte de la Docente.
- Los niños estuvieron atentos y hubo participación activa durante el transcurso de la misma.
- Un aspecto clave fue la ubicación de los pupitres de forma semicircular lo que permitió que los alumnos estuviesen más atentos a las diferentes actividades que la docente proponía.
- El grupo diseñador de esta actividad efectuó una clase piloto previa, la cual sirvió para plantear reajustes, detectar algunas falencias y anticipar algunas posibles preguntas.
- Se logró que el estudiante en general conceptualice la definición de volumen y capacidad.
- La cantidad de material que se utilizó fue el necesario.
- Si se hubiera llevado más material podría haberse convertido más en un distractor que en un apoyo didáctico.
- El tiempo fue el apropiado para que los niños no se sintieran agotados.
- La docente supo manejar el grupo, logró la atención de la mayoría y despertó empatía en los estudiantes.
- La puesta en común al final de la clase fue acertada.

5.2. Lo Negativo en la Primera Situación

- Faltó que los niños designaran los nombres de las figuras que se iban formando con el doblado del papel.
- Faltó la consignación por escrito, en el cuaderno, del concepto que ellos iban construyendo.
- Se debe crear una estrategia que logre una mayor participación de los (as) estudiantes y que el Docente no participe tanto, pues durante el desarrollo de la clase fue notorio una mayor actividad de la Docente que la de los estudiantes.
- Faltó la puesta en común de todos los estudiantes.

5.3. Lo Positivo en la Segunda Situación

- De la misma manera que en la primera situación, el material didáctico fue el apropiado.
- El tiempo fue bien utilizado.
- La dinámica fue acorde al tema y permitió la sensibilización de la formación en valores.
- Se desarrolló todo lo planeado.
- Se alcanzaron los logros planteados.
- La guía de trabajo fue un buen instrumento para medir el alcance de los resultados.
- Hubo conceptualización y refuerzo con la actividad para la casa.

5.4. Lo Negativo en la Segunda Situación

- No se clarificó el proceso de unidades de medida lo cual obstaculizó el proceso de aprendizaje en los niños.
- La participación de tres (3) Docentes en la clase generó confusión en los estudiantes ya que estos no sabían a cuál de ellos consultar sobre sus inquietudes.

- La entrega de la guía de trabajo para la evaluación se presentó antes del tiempo indicado.
- Faltó la fase de socialización por parte de los grupos, para que los diferentes grupos corroboraran los resultados encontrados por otros niños.
- Hubo una mala distribución de los grupos de niños, y en consecuencia no se logró buena atención y motivación. De esta manera, en el desarrollo de la práctica que se realizó por grupos, se propició el espacio para la indisciplina de algunos estudiantes.

5.5. Lo Positivo en la Tercera Situación

- Los niños comenzaron con interés y expectativas esta clase.
- Existió un buen dominio del tema por parte de la *Docente* y fue bastante recursiva.
- Las actividades fueron planteadas para que fuesen los mismos niños los gestores de su autocorrección.
- Hubo interrelación de equipos en la corrección de los errores que iban cometiendo los niños a medida que realizaban las actividades propuestas en la guía de trabajo.

5.6. Lo Negativo en la Tercera Situación

- Faltó indagar sobre los saberes previos de los estudiantes.
- Se saturó a los estudiantes con demasiado material didáctico y al no clarificársele el tema se observó bastante confusión y desánimo por no poder desarrollar de manera correcta las guías, tanto así que se quedaron actividades de la guía de trabajo sin desarrollar.
- El tiempo no fue bien planificado y se extendió demasiado provocando en los niños cansancio y desmotivación.
- Demasiados temas para una clase.
- Se debió corregir errores de edición antes de entregar las guías.
- Por lo apretado del tiempo dedicado, todos los grupos no pudieron presentar su puesta en común.

Si bien ya se han mencionado algunas conclusiones en las tablas correspondientes a cada una de las caracterizaciones didácticas de las dos primeras situaciones de este documento, es necesario enfatizar en las siguientes:

Las tres situaciones se armonizaron didácticamente para dar cuenta de una secuencia, de acuerdo con el marco teórico estudiado en este proyecto. Los Docentes participantes coincidieron en afirmar que sería muy apropiado hacer estas actividades en un lugar más abierto que en un salón de clases convencional, donde los niños puedan manipular y experimentar con más libertad, por ejemplo, el manejo de los líquidos, o donde se pueda llevar a los niños a un espacio adecuado para estudiar matemáticas, como por ejemplo, un laboratorio de matemáticas, donde exista recursos y materiales didácticos para el estudio de las matemáticas.

Otra conclusión fue que se tuvo en cuenta los diferentes enfoques didácticos para conceptualizar el volumen y la capacidad, dependiendo del material o recurso didáctico a utilizar, así:

- Comenzar por transformaciones de romper y rehacer.

- Continuar con la equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de cuerpos sólidos.
- Extender la equivalencia de capacidad con líquidos desplazados.
- Seguir con transformaciones reales de vaciar para comparar contenidos o graduando recipientes.

En este proyecto se ratificó lo que han declarado los especialistas sobre la medida (Cascallana, 2000; Castelnuovo, 2004; Chamorro & Belmonte, 1994; Chamorro, 2003c; Del Olmo et al., 1989):

- Debido a las dificultades que se presentan para su comprensión, las actividades didácticas donde los niños encuentran las relaciones matemáticas entre volumen y capacidad deben ser dejadas para la finalización del ciclo de formación de la Educación Básica Primaría, esto es cuando los niños tengan de 11 a 13 años de edad.
- Durante el 5ºgrado de Primaria, es conveniente continuar con el estudio de la capacidad sirviéndose de las graduaciones de recipientes; trabajando la medición directa; la medición indirecta como un elemento arbitrario y usando los sistemas de medidas. No necesariamente de sólidos u objetos regulares, para que luego exista la necesidad de medir y encontrar un resultado numérico que exprese la medida.
- Se debe propender por realizar actividades previas a las presentadas aquí, de tal forma que sea ostensible observar graduación de recipientes de formas diversas, usando como unidad de medida un recipiente acordado, sirviéndose de cinta adhesiva para marcar o indicar la cantidad de volumen.
- Así mismo, se debe propender porque los niños observen y diferencien la posición de las graduaciones de los recipientes, obtenidas en función de la forma del mismo (estrecho, con estrangulamientos, ancho, regular, etc.).

Las situaciones transitaron teniendo en cuenta el volumen como magnitud *unidimensional*, como proceso aditivo y como medición directa. Y de la misma manera, el volumen se trató como magnitud *tridimensional*, como proceso multiplicativo y como medición indirecta.
Así mismo, es de señalar que existieron factores geométricos que dificultaron la medición directa para la superficie y el volumen de los sólidos, precisamente por la forma.

Con respecto a la gestión de los Docentes, cuando estuvieron ejecutando lo planeado, se observó que el peso de la enseñanza tradicionalista todavía es muy fuerte entre ellos, a pesar de que conocen y han estudiado las corrientes pedagógicas contemporáneas derivadas del constructivismo social y de las pedagogías activas. Esto se observó debido a que hubo demasiada participación de los Docentes en cada una de las situaciones, con la tendencia a realizar una clase magistral, cuando lo que se desea es que los niños sean más activos, participativos y que trabajen colaborativamente. Sin embargo, fue un excelente ejercicio para ellos, porque les permitió cambiar sus prácticas pedagógicas y sus esquemas mentales usuales.

Y por último, faltó abordar las transformaciones que se conservan y no se conservan en el volumen, por lo menos en alguna de las tres situaciones planteadas.

Referencias

Alsina, C., Burgués, C. & Fortuny, J. (1999). Materiales para construir la Geometría (4ta. ed.). Madrid, España: Síntesis.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (1ra. Ed.). (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Calvache, R; Escobar, S. & Barcenas, H. (2008). *Procesos de capacitación interna: una alternativa para generar Educación Matemática de calidad*. Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia. Disponible en Internet en: http://funes.uniandes.edu.co/954/1/23Taller.pdf

Cascallana, M. T. (2000). Vasos Graduados. En *Iniciación a la Matemática. Materiales y Recursos Didácticos* (pp. 211-218). Madrid, España: Santillana, Aula XXI.

Castelnuovo, E. (2004). *Didáctica de la Matemática Moderna*. (9na Ed.) México D.F.: Trillas.

Chamorro, M. del C. & Belmonte, J. M. (1994). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid, España: Síntesis.

Chamorro, M. del C. (2003a). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 69-94). Madrid, España: Pearson - Prentice Hall.

Chamorro, M. del C. (2003b). Tratamiento Escolar de las Magnitudes y su Medida. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 221-244). Madrid, España: Pearson - Prentice Hall.

Chamorro, M. del C. (2003c). Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 245-272). Madrid, España: Pearson - Prentice Hall.

Chamorro, M. del C. (2004). *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia, MEC colección Aulas de Verano.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 155-178). Barcelona, España: Horsori.

Del Olmo, M., Moreno, M. & Gil, F. (1989). *Superficie y volumen, ¿algo más que el trabajo con fórmulas*?. Madrid, España: Síntesis.

Fandiño, M. & D´Amore, B. (2009). Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos. Colección Didáctica de las Matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Fernández, E. & Garzón, D. (2007). Tipos de Actividades que Fomentan el Pensamiento Métrico. En E. Fernández & D. Garzón (Eds.).

Módulo 3: Pensamiento Geométrico y Métrico. Unidad 3: Los Ambientes de Geometría Dinámica y las Interacciones entre Pensamiento Métrico y Pensamiento Geométrico. En el marco del Programa de Formación Permanente de Educadores en Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali [en línea y en CD-ROM]. Disponible en línea en: En las memorias electrónicas en CD y En el sitio Web del Campus Virtual de la Universidad del Valle. Cali, Colombia: https://proxse13.univalle.edu.co/campus/moodle/file.php/1290/pensamiento/Unidad2/versionpdf/matematicas_modulo3_unidad2.pdf.

Marmolejo, G.; Blanco, H. & Fernández, E. (2009). *El estudio de clase y la formación de licenciados en matemáticas en la Universidad de Nariño*. En L. I. Vergara, (Ed.), Estudio de Clase: una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas educativas (pp. 93-104). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Disponible en Internet en: http://funes.uniandes.edu.co/969/1/El_estudio_de_clase_en_la_Universidad_de_Nari%C3%B1o_Final.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Vecino, F. (2003). Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 301-328). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.

Vasco, C. (1994). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas, Vol. I y II*. En: Serie Pedagogía y Currículo, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

GLOSARIO

Etnomatemática: Campo de investigación y de formación que se interesa en estudiar los factores sociales y culturales que afectan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares y extraescolares, en diversos ambientes sociales, económicos, políticos y multiculturales.

Heurística: Arte o ciencia del descubrimiento.

Magnitud: Cantidad física que puede ser medida

Metodología del estudio de clase: Se refiere a una forma de trabajo que contempla cuatro fases: La planeación en grupo de las actividades; la implementación de la actividad y observación de clase por compañeros; la auto-evaluación y la co-evaluación; y el rediseño de las actividades. El fin esencial es el de mejorar las clases.

Plan de clase: se trata del planeador de una clase, allí se registra sistemáticamente: Nombre de la Institución, Fecha, Grado escolar, Número de estudiantes, Nombre del profesor, Nombre de la unidad, Estándares movilizados, Logro a desarrollar, Indicadores de logro, Gestión del profesor, Consignas, Dificultades esperadas de los estudiantes, Ayuda del profesor, Material, y Tiempo.

Reconfiguración: “división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente” (Duval, 1999. p. 156). Son tres las clases de reconfiguración presentes en el estudio del área de superficies planas:

Relación: Sea A un conjunto no vacío y R una relación definida entre los elementos de A. Decimos que la relación R es Reflexiva si cualquier elemento a de A está relacionado consigo mismo y escribimos a R a.

Como ejemplo considere el conjunto de los números naturales N={1,2,3,…} y R la relación “ser divisor de”. De esta manera, dos elementos m y n de N estarán relacionados si, esto es m R n, si m divide a n. Así, R es reflexiva en N, pues todo elemento x de N está relacionado con x, dado que todo número natural x es divisor de x. Escribimos n R n, para cualquier número natural n.

R será Simétrica si dados m, n elementos A, tales que m R n entonces se cumple que n R m. Si m R n implica necesariamente que n no está relacionado con m, entonces decimos que R es Antisimétrica. Observe que si R es la relación “ser más alto que” y m es diferente de n, entonces m R n implicará necesariamente que n no está relacionado con m. De esta manera concluimos que R es Antisimétrica.

R será una relación transitiva si dados m, n y p elementos de A tal que m R n y n R p entonces m R p. Observe que la relación “ser más alto que” definida en el párrafo anterior es transitiva, esto es, si m es más alto que n, y n es a su vez más alto que p, entonces m será más alto que p.

Finalmente una relación R definida entre los elementos de un conjunto A se denomina Relación de Equivalencia si esta es reflexiva, simétrica y transitiva. R se denomina Relación de Orden si es reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Rotación: la figura de llegada es una imagen de la figura de inicio bajo la aplicación de un giro o una composición de giros.

Teselación o Teselado: Patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana. Este cumple con dos requisitos: no sobran espacios y las figuras no se traslapan entre sí.

Traslación: la figura de llegada es una imagen de la figura de partida bajo la aplicación de desplazamientos verticales, horizontales o de composiciones entre ellos. La forma, la cantidad de área y las relaciones existentes entre las unidades constituyentes se conserva.

Sobre los Autores

Hilbert Blanco-Álvarez

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle (Colombia). Realizó un magister en Educación Matemática, en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle y un máster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas, en la Universidad Autónoma de Barcelona (España). Actualmente, es candidato a Doctor en Educación en el área de Didáctica de las Matemáticas, de la Universidad de Granada, España, con el proyecto de investigación titulado "Elementos para la formación de maestros de matemáticas desde la Etnomatemática". Se ha desempeñado como docente de aula, docente universitario, consultor de la Fundación Internacional Save the Children e investigador. Actualmente trabaja como docente del Área de Educación Matemática del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, en Pasto (Colombia), además, es director de la Red Latinoamericana de Etnomatemática-RELAET y editor de la Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática.

Gustavo-Adolfo Marmolejo

Licenciado en Matemáticas - Física de la Universidad del Valle (Colombia). Realizó estudios de especialización, magister y doctorado en Educación Matemática. Los primeros en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle (Colombia) y el último en la Universidad de Salamanca (España). Actualmente es docente del Área de Educación Matemática en el Departamento de Matemáticas y Estadística en la Universidad de Nariño (Colombia) y coordina la línea de trabajo Cognición, meta-cognición y semiótica en el estudio de las matemáticas, en el grupo de Investigación GESCAS de la Universidad de Nariño.

Edinsson Fernández-Mosquera

Licenciado en Matemáticas - Física de la Universidad del Valle (Colombia). Es Magister en Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle (Colombia). Ha sido Profesor en el Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle (Colombia) y en la actualidad es Profesor de Tiempo Completo y Coordinador del Área de Educación Matemática en el Departamento de Matemáticas y Estadística en la Universidad de Nariño (Colombia). Así mismo, es Director de la línea de investigación TIC en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, en el grupo de Investigación GESCAS de la Universidad de Nariño.

El presente libro «INTRODUCCIÓN AL DESARROLLO
DE PENSAMIENTO MÉTRICO Y LOS SISTEMAS
DE MEDIDA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA»,
se terminó de imprimir en abril de 2016,
en los talleres de Graficolor
Pasto – Nariño – Colombia

graficolorpasto@hotmail.com

Se imprimieron 500 ejemplares

Save the Children
Trabajando juntos por la niñez colombiana

VIVE
LA EDUCACIÓN

Canada

NRC
CONSEJO NORUEGO
PARA REFUGIADOS