# Grupo Modular Parametrizado

CHRISTIAN POMMERENKE, MARGARITA TORO
Escuela de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Colombia
Email: pommeren@mail.math.tu-berlin.de, mmtoro@unal.edu.co

**RESUMEN**. En este trabajo consideramos el subgrupo $\Pi$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[\xi])$ generado por la matriz parabólica $A=\begin{pmatrix}1&\xi\\0&1\end{pmatrix}$ y la matriz elíptica $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, donde $\mathbb{Z}[\xi]$ es el anillo de polinomios en la variable $\xi$. Para un número $\zeta\in\mathbb{C}$ y una palabra $W\in\Pi$, $W(\zeta)$ significa la matriz en $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ obtenida cuando se evalúa el parametro $\xi$ en $\zeta$. Este grupo $\Pi$ es una generalización de los grupos de Hecke. Los grupos $\Pi(2\cos(\pi/q))\,(q\geq 3)$ se convierten en los grupos clásicos de Hecke al ser proyectados en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, y $\Pi(\zeta)$ para $\zeta\in\mathbb{R}$ se convierte en el grupo generalizado de Hecke, ver por ejemplo, [1],[3]. Hay mucha literatura respecto a estos grupos, en particular con respecto al grupo modular $\Gamma$ que es precisamente $\Pi(1)$ en nuestra notación.

Describimos explícitamente los elementos de $\Pi$, y estudiamos una familia especial de subgrupos, que son libres de índice 4. Logramos encontrar la lista completa de estos subgrupos, estableciendo claramente cuales son normales.

A continuación describimos brevemente nuestro trabajo y algunos de los resultados que se obtienen.

Para $W\in\Pi$ escribimos

$$W=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}[\xi]\,,\ ad-bc=1\,.$$

Si $\zeta\in\mathbb{C}$ entonces $W(\zeta)$ denota la matriz con elementos $a(\zeta),b(\zeta),c(\zeta),d(\zeta)$ tal que $W(\zeta)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. El grupo $\Pi$ está formado por las matrices $\pm I,\ \pm B$ y

$$W=B^{j_0}A^{l_1}B^{j_1}A^{l_2}\cdots A^{l_m}B^{j_m}\ \ (m\in\mathbb{N})$$

con $j_0,\ j_m\in\{0,1,2,3\}\,,\ j_\nu\in\{1,2,3\}$ para $0<\nu<m$ y con $l_\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ para $1\leq\nu\leq m$ . Se tiene que $B^2=-I,\ B^3=-B$ y

$$A^k=\begin{pmatrix}1&k\xi\\0&1\end{pmatrix},\ A^kB=\begin{pmatrix}k\xi&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

para $k\in\mathbb{Z}$. Además, obtenemos que

$$WB=\begin{pmatrix}b&-a\\d&-c\end{pmatrix},BW=\begin{pmatrix}-c&-d\\a&b\end{pmatrix},BWB=\begin{pmatrix}-d&c\\b&-a\end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{K}$ la colección de todas las sucesiones $v=(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $k_n\in Z\setminus\{0\}$. Definimos $V_0=I$ y

$$V_n=V_n\,(v)$$

Puesto que $-I$ conmuta con todas las matrices vemos que $\Pi$ está formado por $\pm I$, $\pm B$ y

$$\pm V_n,\ \ \pm BV_n,\ \ \pm V_n B,\ \ \pm BV_n B$$

con $V_n = V_n(v)$ , $v \in \mathcal{K}$ , $n \in \mathbb{N}$ . Se prueba que todas estas matrices son diferentes.

**Teorema 2.** *Para $j = 1, 2, 3, 4$ los subgrupos*

$$\Pi_j = \left\langle AB^{j-1}, [A, B] \right\rangle = \left\langle AB^{j-1}, -\left(AB^j\right)^2 \right\rangle$$

*son libres y subgrupos normales de $\Pi$ de índice 4.*

Ahora estudiamos cuatro subgrupos de $\Pi$ que no son normales.

**Proposición.** *Los grupos*

$$\Pi_{4+j} = \left\langle AB^{j-1}, -[A, B] \right\rangle, \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

*son libres y subgrupos de $\Pi$ de índice 4 que no son normales.*

Palabras claves. Grupo modular, grupo modular parametrico, subgrupos de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[\xi])$, grupo de Hecke, grupo libre.

Referencias

[1] N.Cangül and D.Singerman, Normal subgroups of Hecke groups and regular maps, Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc. 123 (1998), 59-74.

[2] B. Fine and M. Newman, The normal subgroup structure of a Picard group, Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), 769-786.

[3] M.L.Lang, The structure of the normalisers of the congruence subgroups of the Hecke group $G_5$, Bull.London Math.Soc. 39 (2007),53-62.

[4] D. Mejía, Ch. Pommerenke and M. Toro, On the parametrized modular group, aceptado para publicación en Journal d'Analyse Mathematique.

[5] Ch. Pommerenke and M.M.Toro, On the two-parabolic subgroups of SL(2,$\mathbb{C}$), Rev.Col.Mat. 45 (2011),37-50.

[6] N.Yelmaz, On subgroups of the Picard group, Cont. to Algebra and Geometry, 44 (2003), 383-387.