

二次元と三次元の介在物の 応力集中の解析とその干渉効果

(平成7年11月27日 原稿受付)

設計生産工学科 野 田 尚 昭
設計生産工学科 松 尾 忠 利
設計生産工学科 金 子 尊

Stress Analysis and Interaction Effect of Elliptical and Ellipsoidal Inclusions

by Nao-Aki NODA
Tadatoshi MATSUO
Takashi KANEKO

Abstract

This paper deals with stress analysis of elliptical and ellipsoidal inclusions using singular integral equations of the body force method. The stress and displacement fields due to a point force in an infinite plate and a ring force in an infinite body are used as fundamental solutions. On the idea of the body force method, the problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where unknown functions are densities of body forces distributed in the x- and y-directions of infinite plates or in the r- and z-directions of infinite bodies having the same elastic constants of the matrix and inclusions. In order to satisfy the boundary conditions along the inclusions, eight kinds of fundamental density functions proposed in our previous paper are used. Then the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. The present method is found to give rapidly converging numerical results for the problems. The calculations are carried out systematically for various shape, distance and elastic constant of inclusions and the stress distributions along the boundaries of both the matrix and inclusions are shown in figures. Then the interaction effects are discussed through the comparison between the elliptical inclusions and ellipsoidal inclusions.

1. 緒 言

構造物中に存在する空か、介在物、切欠きなどの欠陥による応力集中現象を明らかにすることは強度設計上重要であるために、多くの研究者らにより解析されている。

無限板中に円形介在物が1個存在する場合の解析として、西田の応力集中ハンドブック¹⁾には無限板中にある1個の円形介在物をもつ無限板が引張力を受ける場合についての、妹沢²⁾、Goodier³⁾による弾性計算結果が引用されている。また、石田⁴⁾は、無限板中に円形介在物が1個存在する場合の閉じた形の厳密解を導いている。図1に、 $G/G_0 = 2.0$ のときの円形介在物境界上の母材境界の θ 方向の垂直応力 σ_θ の分布を示す。図中の実線は本研究の解析結果であり、石田の厳密解は本解析

結果と完全に一致している。しかし、妹沢の近似式を用いた解析結果(破線)は、本解析結果との間に誤差を生じており妹沢の式には誤りがあることが確認される。このように最も単純な介在物問題である1個の円形介在物の結果にも、誤った結果が示されている場合がある。

一方、2次元の介在物が複数個存在する場合の干渉問題には以下のような解析例がある。

塩谷⁵⁾は1軸あるいは2軸方向の一様引張りを受ける無限薄板に2個の等大円形介在物が完全に接着された問題を双極座標とAiry応力関数を用いて解析している。

また、石田⁴⁾は図2のように、円形介在物が、千鳥状に分布するときの問題を解析している。この解析では問題の対称性を考慮した円形介在物をもつ適当な単位領域を考え、x, y両軸に関する対称条件と介在物接合部

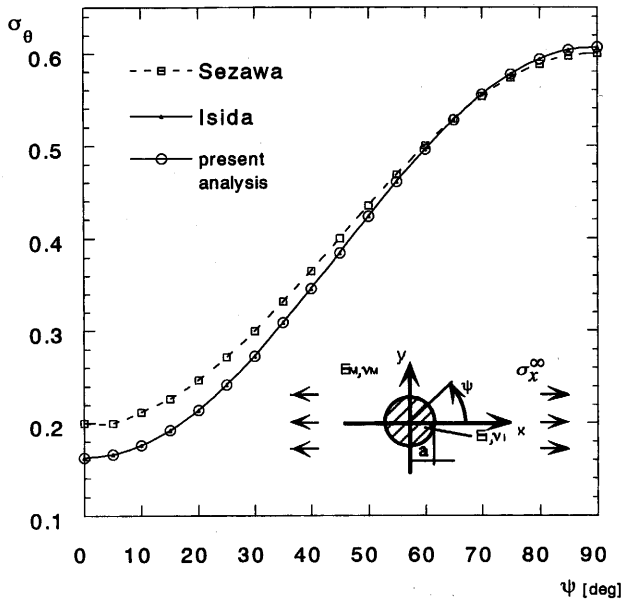


図1 1円形介在物の応力分布

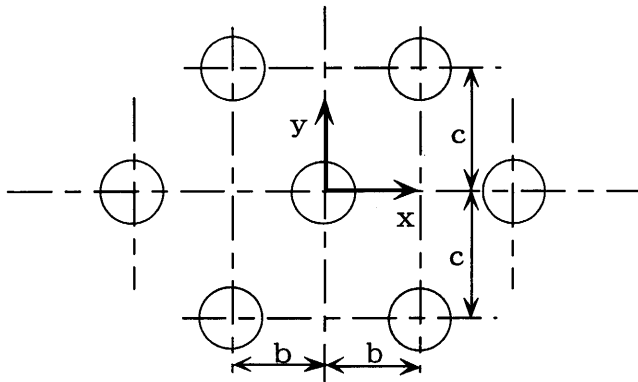


図2 千鳥に分布する円形介在物群

の境界条件を厳密に満たす複素応力関数のローラン展開表示を導いて、単位領域外周の合力と変位の境界条件を満足させることによって、未知係数を定める方法を用いている。

八田ら⁶⁾は大きさが異なる2個のだ円形介在物が種々の配置をなす場合の干渉問題を体積法を用いて解析をしている。この問題は、無限板中の1点に集中力が働くときの応力場と変位場の解 (Green 関数) を基本解として、重ね合わせの原理を用いて境界条件を満足させることによって解析される。

この八田らの解析方法を発展させることによって内山ら⁷⁾は、だ円形介在物が周期的に配列されている場合の解析を行い、弾性係数の変化を系統的に求めている。このように2個以上の円形介在物の干渉問題は、いくつかの解析例があるが、複数のだ円形介在物の問題は、体

積法による八田らおよび内山らの解析以外は見当たらないようである。

3次元問題の回転だ円体状介在物の問題は、実用上一般的に重要であるにも関わらず2次元問題と比べると解析が困難なため解析例は少ない。また回転だ円体状介在物が、複数個存在する場合の解析例は見当たらない。

Eshelby⁸⁾は、無限体中に1つの回転だ円体状介在物が存在する問題を等価介在物法を用いて解析している。等価介在物法は不均質問題を均質問題に置換し、Green 関数を用いた積分方程式による定式化を可能とする解析方法であり、現在、熱、機械的特性や応力解析の手法として広く用いられている。

土田は、球かを有する無限体の応力集中問題⁹⁾や、球状介在物を有する半無限体の応力集中問題¹⁰⁾、球かを有する厚板の応力集中問題¹¹⁾を解析している。

介在物や複合材料の解析では、弾性係数の評価および、母材と介在物境界における応力集中あるいは、界面の応力解析が主として問題となる。また、介在物が複数個存在する場合にはその干渉効果により、介在物が単独に存在する場合とは異なる値の応力集中を生じる。従って高精度に解析を行うには、母材と介在物境界上のなめらかな応力分布を求める必要がある。

上記のように、2次元と3次元の介在物の問題に対して様々な数値解析がなされており、境界上の応力分布が求められている。しかし、それらは実際の設計に利用する上で、便利な形で与えられていない。さらに厳密解として提案されている式のなかにも、誤差を含んでいるものも多い。そこで本研究では、野田らが提案している体積法の特異積分方程式を、厳密に解析する数値解析法を用い、無限板中の二つのだ円形介在物、および無限体中の2つの回転だ円体介在物の干渉問題を解析する。介在物間の距離および母材と介在物の弾性比を系統的に変化させて、母材と介在物境界上の正確な応力分布を求め利用に便利な形式で図表に整理する。さらに得られた応力分布を、2次元と3次元の問題について比較検討し応力集中の干渉効果を明らかにすることを目的とする。

2. 数値解析方法

本解析方法を回転だ円体状介在物の干渉問題 (3次元問題) を例にとって説明する。また、だ円形介在物 (2次元問題) では、3次元の場合と同様に2次元問題の集中力の基本解を用いて解くことができる。

本解析方法を図3に示すような、遠方で一様なz方向の引張応力 σ_z^∞ が作用している無限体中の大きさおよび弾性率の等しい2つの回転だ円体状介在物の干渉問題を

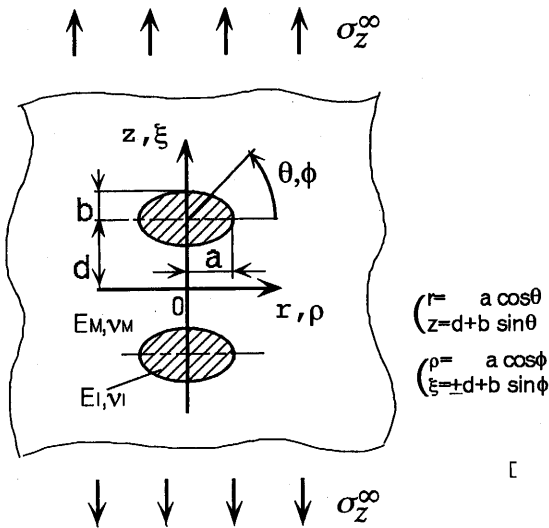


図3 無限体中の2つの回転だ円状介在物

例にとって説明する。この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により無限体中の半径 ρ 、高さ ζ の円周上に半径方向および軸方向の集中力の輪が作用するときの任意の点 (r, z) の応力場の解 ($K_{nr}^{Fr}, K_{nz}^{Fz}, K_{nr}^{Fr}, K_{nz}^{Fz}$) と変位場の解 ($K_{ur}^{Fr}, K_{uz}^{Fz}, K_{ur}^{Fr}, K_{uz}^{Fz}$) を用いて解くことができる^{12) 15)}。ここで、着力点の円筒座標を (ρ, ϕ, ζ) として注目点の円筒座標 (r, θ, z) と区別して用いるものとすれば、 $\rho = a \cos \phi$, $\zeta = \pm(d + b \sin \phi)$, $r = a \cos \theta$, $z = d + b \sin \theta$ である。このとき問題は、母材 (E_M, ν_M) および介在物 (E_I, ν_I) と同じ弾性定数をもつ無限体 (これらを無限体Mと無限体Iとする) 中の仮想境界上に分布させた r, z 方向の体積力密度 $\rho_{rM}^*(\phi)$, $\rho_{zM}^*(\phi)$ および $\rho_{rI}^*(\phi)$, $\rho_{zI}^*(\phi)$ を未知関数とする特異積分方程式(1), (2)で表現される。

$$\begin{aligned} & - (1/2) \{ \rho_{rM}^*(\theta) \cos \theta_0 + \rho_{zM}^*(\theta) \sin \theta_0 \} \\ & + (1/2) \{ \rho_{rI}^*(\theta) \cos \theta_0 + \rho_{zI}^*(\theta) \sin \theta_0 \} \\ & + \int_0^{2\pi} K_{nnM}^{Fr}(\phi, \theta) \rho_{rM}^*(\phi) ds + \int_0^{2\pi} K_{nnM}^{Fz}(\phi, \theta) \rho_{zM}^*(\phi) ds \\ & - \int_0^{2\pi} K_{nnI}^{Fr}(\phi, \theta) \rho_{rI}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{nnI}^{Fz}(\phi, \theta) \rho_{zI}^*(\phi) ds \\ & = -\sigma_z^\infty \sin^2 \theta_0 \end{aligned} \quad \dots\dots(1)$$

$$\begin{aligned} & - (1/2) \{ \rho_{rM}^*(\theta) \cos \theta_0 + \rho_{zM}^*(\theta) \sin \theta_0 \} \\ & + (1/2) \{ \rho_{rI}^*(\theta) \cos \theta_0 + \rho_{zI}^*(\theta) \sin \theta_0 \} \\ & + \int_0^{2\pi} K_{ntM}^{Fr}(\phi, \theta) \rho_{rM}^*(\phi) ds + \int_0^{2\pi} K_{ntM}^{Fz}(\phi, \theta) \rho_{zM}^*(\phi) ds \\ & - \int_0^{2\pi} K_{ntI}^{Fr}(\phi, \theta) \rho_{rI}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{ntI}^{Fz}(\phi, \theta) \rho_{zI}^*(\phi) ds \\ & = -\sigma_z^\infty \sin \theta_0 \cos \theta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} K_{urM}^{Fr}(\phi, \theta) \rho_{rM}^*(\phi) ds + \int_0^{2\pi} K_{urM}^{Fz}(\phi, \theta) \rho_{zM}^*(\phi) ds \\ & - \int_0^{2\pi} K_{urI}^{Fr}(\phi, \theta) \rho_{rI}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{urI}^{Fz}(\phi, \theta) \rho_{zI}^*(\phi) ds \\ & = -\nu_M \sigma_z^\infty r / E_M \end{aligned} \quad \dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} K_{uzM}^{Fr}(\phi, \theta) \rho_{rM}^*(\phi) ds + \int_0^{2\pi} K_{uzM}^{Fz}(\phi, \theta) \rho_{zM}^*(\phi) ds \\ & - \int_0^{2\pi} K_{uzI}^{Fr}(\phi, \theta) \rho_{rI}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{uzI}^{Fz}(\phi, \theta) \rho_{zI}^*(\phi) ds \\ & = -\sigma_z^\infty z / E_M \\ & -d\rho = a \sin \phi d\phi, \quad d\zeta = b \cos \phi d\phi, \\ & ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} d\phi \end{aligned} \quad \dots\dots(3)$$

である。また、 θ_0 は点 (r, z) における介在物の外向き法線と r 軸のなす角度である。

式(1), (2)は無有限体M中の回転だ円体状空かとなるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nM}, \tau_{ntM}, U_{rM}, U_{zM}$ 、無限体I中の回転だ円体状介在物となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nI}, \tau_{ntI}, U_{rI}, U_{zI}$ とすると式(3)(4)は母材と介在物の接合境界上における境界条件 $\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0, \tau_{ntM} - \tau_{ntI} = 0, U_{rM} - U_{rI} = 0, U_{zM} - U_{zI} = 0$ に相当している。式(3)の第一項と第二項は、体積力を無限小近傍からなる境界上¹²⁾に作用させたとき境界条件を満たすべき仮想境界上に生じる応力の項である。式(1)はコーシー形¹⁵⁾、式(2)は対数形の特異性を有する項を含んでいる。そのため $\theta = \phi$ の場合には、式(1)は積分のコーシーの主値をとるものとする。

解析しようとする問題を解くことは未知関数である仮想境界面上の体積力密度 $\rho_{rM}^*(\phi), \rho_{zM}^*(\phi), \rho_{rI}^*(\phi), \rho_{zI}^*(\phi)$ を求めることに帰着される。従来の体積力法を用いた解析では、未知関数を、対称型の基本密度関数と階段関数の積で近似している。この方法ではあらかじめ設定しておいた点でしか境界条件が、満足されていないために、境界上の任意の点での境界条件の満足度は保証されていない。そのため、正確な最大応力とその発生位置を得ることはできない。そこで本研究では、体積力法の特異積分方程式を厳密に解析するために、未知関数を野田らが定義した基本密度関数¹⁶⁾と多項式の積で近似する方法を用いる。この問題の対称性を考慮して、未知関数は式(4)のように表現できる。

$$\begin{aligned} \rho_{rM}^*(\phi) &= \rho_{r3M}(\phi) w_{r3}(\phi) + \rho_{r4M}(\phi) w_{r4}(\phi) \\ \rho_{zM}^*(\phi) &= \rho_{z1M}(\phi) w_{z1}(\phi) + \rho_{z2M}(\phi) w_{z2}(\phi) \\ \rho_{rI}^*(\phi) &= \rho_{r3I}(\phi) w_{r3}(\phi) + \rho_{r4I}(\phi) w_{r4}(\phi) \\ \rho_{zI}^*(\phi) &= \rho_{z1I}(\phi) w_{z1}(\phi) + \rho_{z2I}(\phi) w_{z2}(\phi) \end{aligned} \quad \dots\dots(4)$$

ここで、基本密度関数 $w_{r1}(\phi), w_{r2}(\phi), \dots, w_{z4}(\phi)$ などは次式で定義される。

$$\begin{cases} w_{r1}(\phi) = n_r(\phi) / \cos \phi \\ w_{r2}(\phi) = n_r(\phi) \tan \phi \\ w_{r3}(\phi) = n_r(\phi) \\ w_{r4}(\phi) = n_r(\phi) \sin \phi \end{cases} \quad \dots\dots(5)$$

$$\begin{cases} w_{z1}(\phi) = n_z(\phi) / \sin\phi \\ w_{z2}(\phi) = n_z(\phi) \\ w_{z3}(\phi) = n_z(\phi) \cot\phi \\ w_{z4}(\phi) = n_z(\phi) \cos\phi \end{cases} \dots\dots(6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} n_r(\phi) &= \frac{b \cos\phi}{\sqrt{a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi}} \dots\dots(7) \\ n_z(\phi) &= \frac{a \sin\phi}{\sqrt{a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi}} \end{aligned}$$

さらに、未知関数を連続関数として近似するために重み関数を多項式を用いて次式のように表現する。

$$\begin{cases} \rho_{r3M}(\phi) = \sum_{n=1}^{N/2} a_{nM} t_n(\phi) & \rho_{z1M}(\phi) = \sum_{n=1}^{N/2} c_{nM} t_n(\phi) \\ \rho_{r4M}(\phi) = \sum_{n=1}^{N/2} b_{nM} t_n(\phi) & \rho_{z2M}(\phi) = \sum_{n=1}^{N/2} d_{nM} t_n(\phi) \\ \rho_{r3I}(\phi) = \sum_{n=1}^{N/2} a_{nI} t_n(\phi) & \rho_{z1I}(\phi) = \sum_{n=1}^{N/2} c_{nI} t_n(\phi) \\ \rho_{r4I}(\phi) = \sum_{n=1}^{N/2} b_{nI} t_n(\phi) & \rho_{z2I}(\phi) = \sum_{n=1}^{N/2} d_{nI} t_n(\phi) \end{cases} \dots\dots(8)$$

$$t_n(\phi) = \cos\{2(n-1)\phi\} \dots\dots\dots(9)$$

以上の離散化の方法により式(1), (2)は、次式で示される連立方程式に還元される。

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N/2} (a_{nM} A_{nM} + b_{nM} B_{nM} + c_{nM} C_{nM} + d_{nM} D_{nM} \\ &\quad + a_{nI} A_{nI} + b_{nI} B_{nI} + c_{nI} C_{nI} + d_{nI} D_{nI}) \\ &= -\sigma_z^\infty \sin^2\theta_0 \dots\dots\dots(10) \\ &\sum_{n=1}^{N/2} (a_{nM} E_{nM} + b_{nM} F_{nM} + c_{nM} G_{nM} + d_{nM} H_{nM} \\ &\quad + a_{nI} E_{nI} + b_{nI} F_{nI} + c_{nI} G_{nI} + d_{nI} H_{nI}) \\ &= -\sigma_z^\infty \sin\theta_0 \cos\theta_0 \\ &\sum_{n=1}^{N/2} (a_{nM} I_{nM} + b_{nM} J_{nM} + c_{nM} K_{nM} + d_{nM} L_{nM} \\ &\quad + a_{nI} I_{nI} + b_{nI} J_{nI} + c_{nI} K_{nI} + d_{nI} L_{nI}) \\ &= \nu_M \sigma_z^\infty r / E_M \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N/2} (a_{nM} M_{nM} + b_{nM} N_{nM} + c_{nM} O_{nM} + d_{nM} P_{nM} \\ &\quad + a_{nI} M_{nI} + b_{nI} N_{nI} + c_{nI} O_{nI} + d_{nI} P_{nI}) \\ &= -\sigma_z^\infty z / E_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{nM} &= -(1/2) t_n(\theta) \cos^2\theta_0 \\ &\quad + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nM}^{Fr}(\phi, \theta) t_n(\phi) b \cos\phi d\phi \end{aligned} \dots\dots\dots(12)$$

任意の点の応力は係数 a_{nM}, \dots, d_{nI} と A_{nM}, \dots, P_{nI} に相当する影響係数の一次結合で表現される。以上の解析方法により回転だ円体状介在物の干渉効果を介在物の大きさや形状比および弾性比を系統的に変化させて解析する。

3. 解析結果および考察

3・1 だ円形介在物と回転だ円体状介在物の応力集中

図4(a)のように遠方で一様な y 方向の引張応力 σ_y^∞ を受ける無限板中の1個のだ円形介在物と図4(b)のように遠方で一様な z 方向の引張応力 σ_z^∞ を受ける無限体中の回転だ円体状介在物の形状比 a/b と弾性比 E_I/E_M を系統的に変化させたときの最大応力 σ_{max} の値とその発生位置を表1に示す。

表1に示した円形介在物の最大応力の値は石田らの1個の円形介在物の解と完全に一致している。また最大応力値と弾性比の関係をだ円形介在物の場合を図5に、回転だ円体状介在物を図6で同一形状比 a/b を比較すると、介在物の弾性係数 E_I が母材の弾性係数 E_M より大きい場合、すなわち弾性比 $E_I/E_M > 1$ とされるとき回転だ円体状介在物の最大応力の値がだ円形介在物の最大応力の値より、形状比 a/b の全ての範囲で大きくなっていることがわかる。逆に介在物の弾性係数が母材の弾性係数より小さい場合、すなわち弾性比が $E_I/E_M < 1$ の場合回転だ円体状介在物の最大応力の値がだ円形介在物の最大応力の値よりも小さくなっていることがわかる。

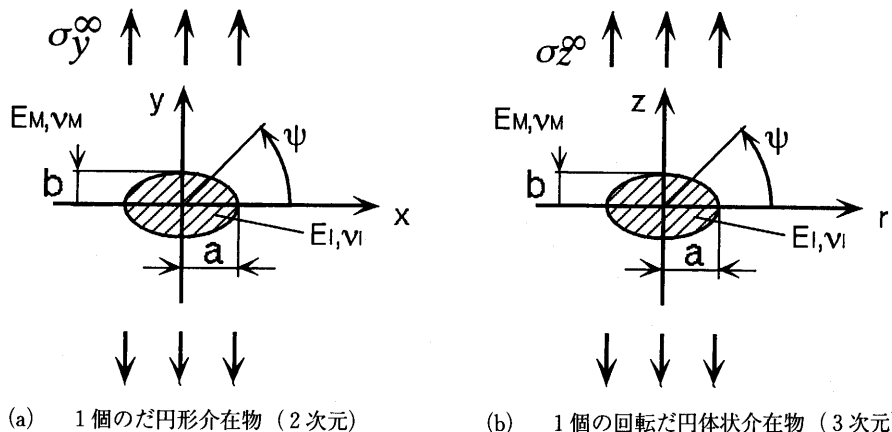


図4 1個の介在物の問題

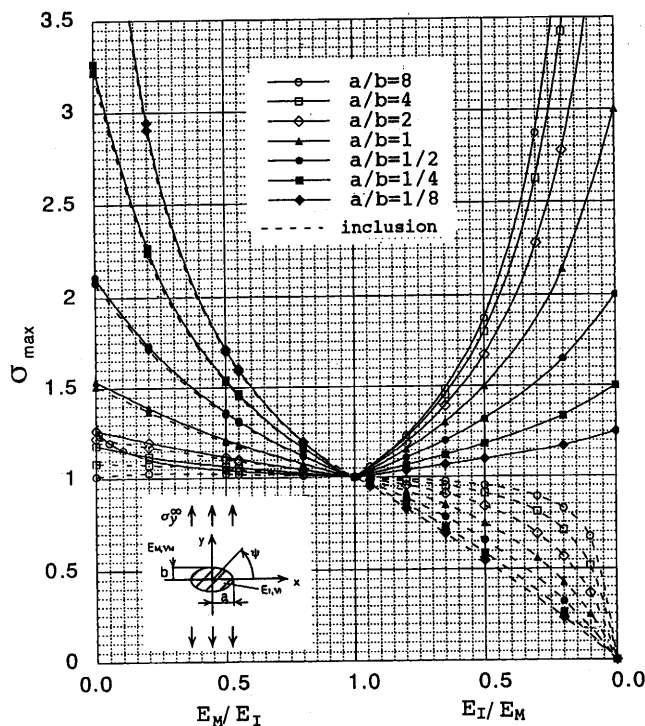


図5 弾性係数の比と最大応力 (2次元)
 $(\sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, \nu_M = \nu_I = 0.3)$

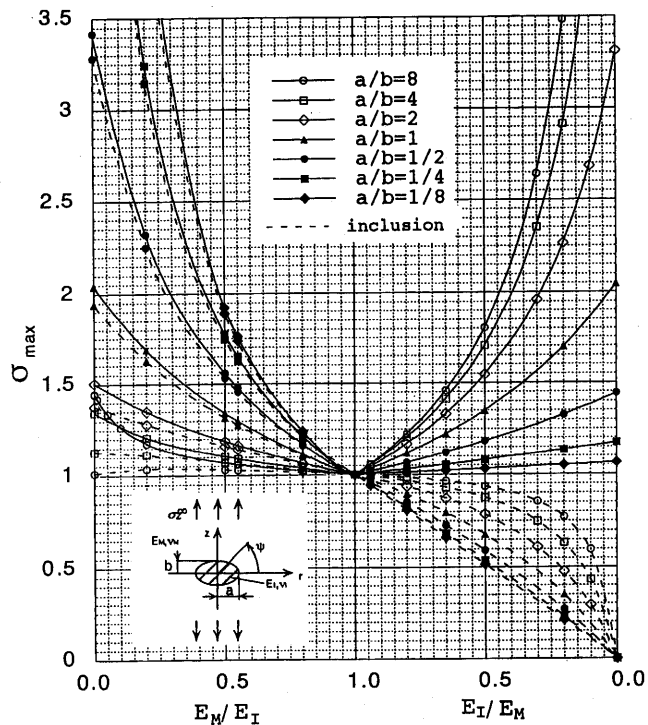


図6 弾性係数の比と最大応力 (3次元)
 $(\sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, \nu_M = \nu_I = 0.3)$

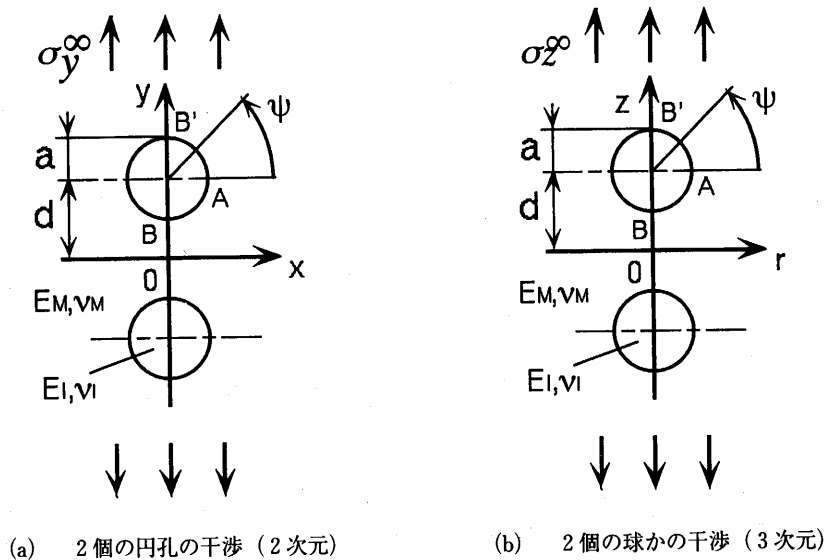


図7 2個の介在物の干渉問題

また $E_I/E_M > 1$ のときの応力集中は、2次元3次元の両者とも $a/b < 1$ で顕著に表れ、 $a/b > 1$ ならば最大でも応力集中係数は1.5程度 (3次元では2程度) にすぎない、逆に $E_I/E_M < 1$ のときの応力集中は2次元3次元の両者とも $a/b > 1$ で顕著に表れ、 $a/b < 1$ ならば最大でも応力集中係数は3程度 (3次元では2.5程度) である。

3・2 二個の球かと円孔の干渉効果の比較

図7(a)は遠方で一様な y 方向の引張応力 σ_y^∞ を受ける無限板中の2個の円孔の干渉問題を示し、図7(b)は遠方で一様な z 方向の引張応力 σ_z^∞ を受ける無限体中の2個の球かの干渉問題を示している。

無限板中の2つの円孔の干渉問題において、 $a/d = 0.9$ の場合の円孔縁に沿った応力 σ_t の分布を図8に示す。また、無限体中の2つの球かの干渉問題において $a/d =$

表1 だ円形介在物とだ円体状介在物の最大応力
 ($\sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, \sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

E _I /E _M	a/b	0		0.2		0.5		0.65		0.8		0.94		1.25		1.82		2.0		5.0		∞		
		(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	(deg)	σ_{max}	
2D matrix	8	0.0	16.996	0.0	3.942	0.0	1.872	0.0	1.487	0.0	1.232	0.0	1.060	18.3	1.014	17.2	1.036	16.8	1.042	15.1	1.104	14.0	1.269	
	4	0.0	9.000	0.0	3.425	0.0	1.797	0.0	1.453	0.0	1.218	0.0	1.057	33.8	1.024	32.7	1.057	32.5	1.064	30.7	1.120	29.3	1.185	
	2	0.0	5.000	0.0	2.778	0.0	1.670	0.0	1.392	0.0	1.193	0.0	1.051	54.0	1.043	53.6	1.103	53.6	1.116	53.0	1.201	52.6	1.269	
	1	0.0	3.000	0.0	2.139	0.0	1.498	0.0	1.303	0.0	1.153	0.0	1.041	70.6	1.076	70.7	1.189	70.8	1.214	71.2	1.390	71.4	1.537	
	1/2	0.0	2.000	0.0	1.646	0.0	1.319	0.0	1.203	0.0	1.106	0.0	1.029	80.0	1.120	80.2	1.316	80.3	1.363	80.7	1.732	80.9	2.109	
	1/4	0.0	1.500	0.0	1.337	0.0	1.182	0.0	1.120	0.0	1.065	0.0	1.019	84.9	1.165	85.1	1.542	85.3	1.542	85.3	2.263	85.5	3.266	
	1/8	0.0	1.250	0.0	1.169	0.0	1.097	0.0	1.066	0.0	1.036	0.0	1.010	87.4	1.201	87.5	1.600	87.5	1.711	87.6	2.942	87.6	5.588	
	0.0-180.	0.826	0.0-180.	0.826	0.0-180.	0.952	0.0-180.	0.974	0.0-180.	0.988	0.0-180.	0.998	0.0-180.	0.997	0.0-180.	1.009	0.0-180.	1.019	0.0-180.	1.021	0.0-180.	1.026	0.0-180.	1.011
2D inclusion	8	0.0	0.950	0.0	0.710	0.0	0.909	0.0	0.950	0.0	0.976	0.0	0.994	1.019	1.043	1.043	1.043	1.047	1.047	1.073	1.073	1.082	1.082	
	4	0.0	0.566	0.0	0.566	0.0	0.940	0.0	0.907	0.0	0.955	0.0	0.988	1.039	1.092	1.092	1.092	1.103	1.103	1.174	1.174	1.225	1.225	
	2	0.0	0.426	0.0	0.426	0.0	0.748	0.0	0.846	0.0	0.922	0.0	0.978	1.072	1.179	1.179	1.179	1.203	1.203	1.370	1.370	1.510	1.510	
	1	0.0	0.321	0.0	0.321	0.0	0.656	0.0	0.780	0.0	0.884	0.0	0.968	1.116	1.308	1.308	1.308	1.352	1.352	1.712	1.712	2.080	2.080	
	1/2	0.0	0.260	0.0	0.260	0.0	0.588	0.0	0.727	0.0	0.852	0.0	0.957	1.161	1.454	1.454	1.454	1.530	1.530	2.235	2.235	3.219	3.219	
	1/4	0.0	0.228	0.0	0.228	0.0	0.546	0.0	0.692	0.0	0.829	0.0	0.950	1.197	1.598	1.598	1.598	1.697	1.697	2.904	2.904	4.499	4.499	
	1/8	0.0	0.483	0.0	3.483	0.0	1.802	0.0	1.458	0.0	1.223	0.0	1.059	16.0	1.021	15.3	1.058	15.1	1.068	14.3	1.176	14.1	1.446	1.446
	0.0-180.	2.914	0.0-180.	2.914	0.0	1.702	0.0	1.412	0.0	1.412	0.0	1.203	0.0	1.054	30.2	1.036	29.4	1.090	29.2	1.103	28.3	1.207	27.9	1.345
3D matrix	8	0.0	5.868	0.0	2.263	0.0	1.544	0.0	1.331	0.0	1.167	0.0	1.045	49.8	1.065	49.4	1.164	49.4	1.186	49.0	1.350	48.9	1.504	1.504
	4	0.0	2.045	0.0	1.695	0.0	1.348	0.0	1.222	0.0	1.116	0.0	1.032	67.3	1.113	67.5	1.297	67.5	1.340	67.7	1.688	68.0	2.042	2.042
	2	0.0	1.440	0.0	1.324	0.0	1.181	0.0	1.120	0.0	1.065	0.0	1.019	78.4	1.169	78.5	1.478	78.5	1.559	78.8	2.320	79.0	3.415	3.415
	1/2	0.0	1.172	0.0	1.132	0.0	1.079	0.0	1.054	0.0	1.030	0.0	1.009	84.1	1.214	84.2	1.650	84.2	1.775	84.4	3.240	84.5	7.031	7.031
	1/4	0.0	1.063	0.0	1.049	0.0	1.030	0.0	1.021	0.0	1.012	0.0	1.004	87.1	1.240	87.2	1.763	87.1	1.921	87.2	4.155	87.2	17.244	17.244
	1/8	0.0	0.771	0.0-180.	0.771	0.0-180.	0.934	0.0-180.	0.964	0.0-180.	0.984	0.0-180.	0.996	0.0-180.	1.012	0.0-180.	1.027	0.0-180.	1.029	0.0-180.	1.035	0.0-180.	1.010	1.010
	0.0-180.	0.633	0.0-180.	0.633	0.0	0.876	0.0	0.930	0.0	0.966	0.0	0.966	0.0	0.991	1.028	1.064	1.064	1.071	1.071	1.111	1.111	1.128	1.128	
	3D inclusion	8	0.0	0.478	0.0	0.347	0.0	0.679	0.0	0.772	0.0	0.894	0.0	0.971	1.106	1.275	1.275	1.275	1.315	1.315	1.627	1.627	1.938	1.938
4		0.0	0.266	0.0	0.266	0.0	0.591	0.0	0.729	0.0	0.852	0.0	0.958	1.160	1.454	1.454	1.454	1.531	1.531	2.250	2.250	3.280	3.280	
2		0.0	0.685	0.0	0.685	0.0	0.539	0.0	0.685	0.0	0.824	0.0	0.948	1.206	1.624	1.624	1.624	1.744	1.744	3.146	3.146	6.768	6.768	
1/2		0.0	0.515	0.0	0.515	0.0	0.653	0.0	0.653	0.0	0.809	0.0	0.943	1.232	1.736	1.736	1.736	1.888	1.888	4.034	4.034	16.597	16.597	
1/4		0.0	0.209	0.0	0.209	0.0	0.515	0.0	0.653	0.0	0.809	0.0	0.943	1.232	1.736	1.736	1.736	1.888	1.888	4.034	4.034	16.597	16.597	
1/8		0.0	0.209	0.0	0.209	0.0	0.515	0.0	0.653	0.0	0.809	0.0	0.943	1.232	1.736	1.736	1.736	1.888	1.888	4.034	4.034	16.597	16.597	
0.0-180.		0.478	0.0-180.	0.478	0.0	0.785	0.0	0.872	0.0	0.936	0.0	0.984	0.0	0.991	1.058	1.141	1.141	1.159	1.159	1.281	1.281	1.627	1.627	
0.0-180.		0.226	0.0-180.	0.226	0.0	0.539	0.0	0.685	0.0	0.824	0.0	0.948	0.0	0.948	1.206	1.624	1.624	1.624	1.744	1.744	3.146	3.146	6.768	6.768

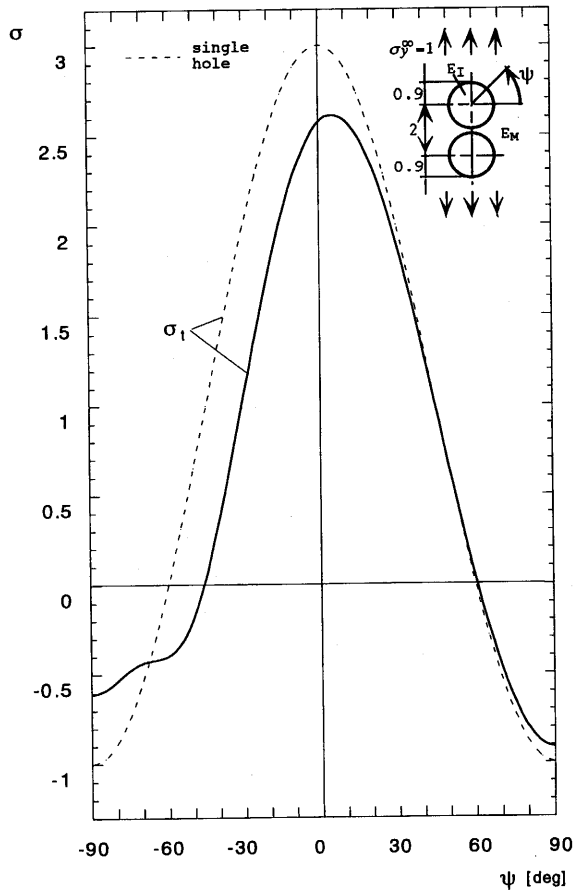


図8 境界上の応力分布

($a/d = 0.9, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, E_I/E_M = 0.0, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

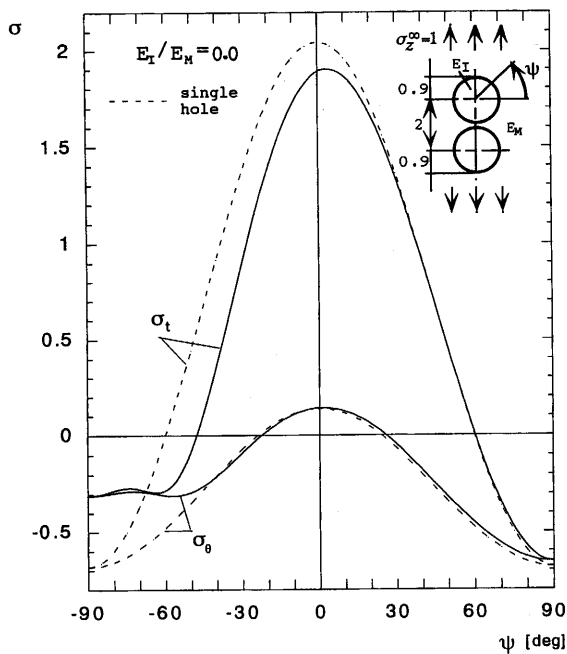


図9 境界上の応力分布 (3次元)

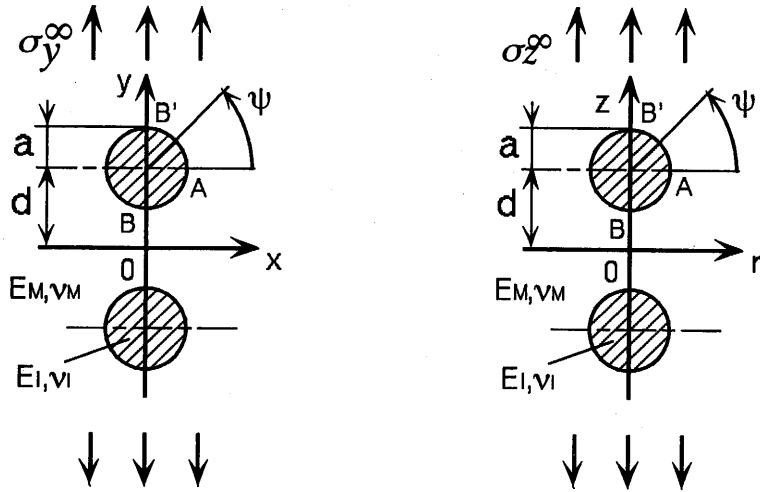
($a/d = 0.9, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, E_I/E_M = 0.0, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

0.9の場合の球か境界に沿った応力 σ_t, σ_θ の分布を図9に示す。図8, 9中の破線は、それぞれ、無限板中に1つの円孔が存在する場合、および無限体中に1つの球が存在する場合の応力分布である。この2次元の干渉問題と3次元の干渉問題の応力分布を比較すると、応力集中の数値はいくぶん異なるものの、似たような応力分布になっている。最大応力が図7でのA点($\psi = 90^\circ$)近傍で発生していることがわかる。また、2次元の干渉問題および3次元の干渉問題ともに、2つの円孔あるいは球か近付く(a/d が大きくなる)と、干渉効果により発生する最大応力は、減少している。干渉効果を比較すると、2次元の問題では、2つの円孔の干渉効果による最大応力値 σ_{max} の変化率は、12.5%であり、3次元の問題では、2つの球かの干渉効果による最大応力値 σ_{max} の変化率は、7.3%である、このことから、2次元の問題のほうが干渉効果による最大応力値 σ_{max} の変化率が大きいことがわかる。しかしながら、図7(a)のB点(2円孔が接近する点)における干渉効果による応力値の変化率は50%であり、図7(b)のB点における干渉効果による応力値の変化率は58.8%となり、逆に3次元の問題の方が、干渉効果による応力値の変化率が大きくなっていることがわかる($a/d = 0.9$ のとき)。

3.3 二つの剛体介在物の干渉効果の比較

図10(a)は遠方で一様なy方向の引張応力 σ_y^∞ を受ける無限板中の2つの剛体円形介在物の干渉問題を示し、図10(b)は遠方で一様なz方向の引張応力 σ_z^∞ を受ける無限体中の2つの剛体球状介在物の干渉問題を示す。

無限体中の1つの剛体円形介在物の応力分布を図11に示し、2つの剛体円形介在物の干渉問題において $a/d = 0.5$ の場合の応力分布を図12に示す。また無限体中の1つの剛体球状介在物の応力分布を図13に示し、2つの剛体球状介在物の干渉問題において $a/d = 0.5$ の応力分布を図14に示す。図中の実線は、母材境界上の応力分布であり、破線は介在物境界上の分布である。最大応力の発生位置は前節の円孔や球かの場合と異なり、介在物が2個存在する問題では図10のB点($\psi = -90^\circ$)の近傍で発生し、また介在物が1個存在する問題でもB($\psi = -90^\circ$), B'($\psi = 90^\circ$)の点の近傍で発生している。さらに2つの介在物が近付く(a/d が大きくなる)と、干渉効果により、最大応力の値は増加している。また2次元の問題では、2つの剛体円形介在物の干渉効果による最大応力値 σ_{max} の変化率は38.3%で、同様に3次元において、2つの剛体球状介在物の干渉効果による最大応力値 σ_{max} の変化率は10.8%となり、2次元のほうが



(a) 2個の円形介在物の干渉 (2次元) (b) 2個の球状介在物の干渉 (3次元)

図10 2個の介在物の干渉問題

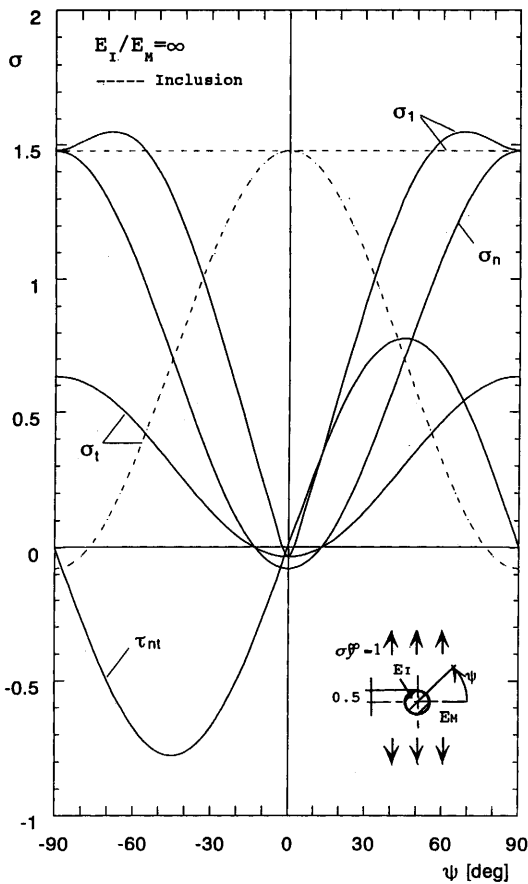


図11 境界上の応力分布 (2次元)

($a/d = 0, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, E_I/E_M = \infty, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

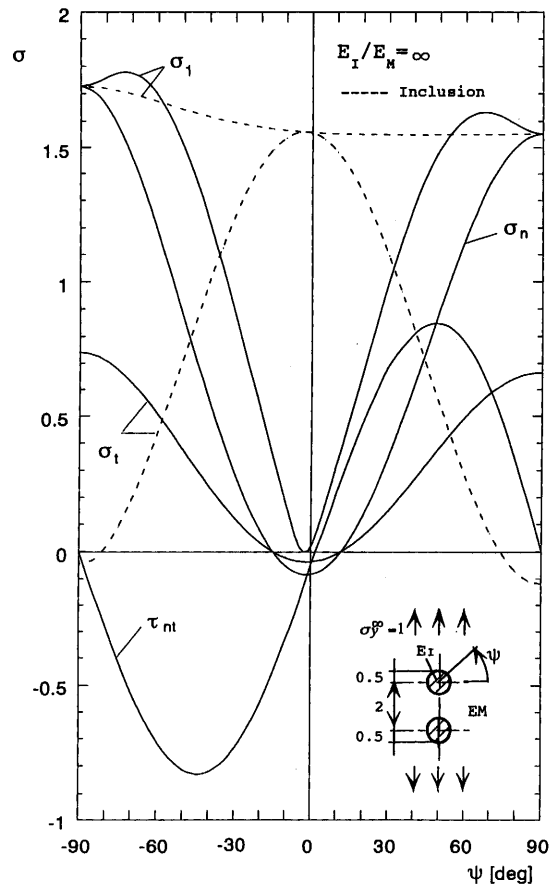


図12 境界上の応力分布 (2次元)

($a/d = 0.5, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, E_I/E_M = \infty, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

干渉効果による最大応力値 σ の変化率が大きい。このことは前節の円孔や球孔の場合と同様の傾向である。しかし、最大応力の発生位置が図10のB点 (介在物が接近する点) の近傍であるために、B点での最大応力の変化率は、2次元の問題の方が大きくなっており、円孔や球孔の場合とは異なっている。以上の結果をまとめると、

最大応力値の変化率は、剛体介在物の方が大きい、B点における変化率では円孔や球孔の方が大きくなっている ($a/d = 0.5$ のとき)。

また弾性比 $E_I/E_M = \infty$ で介在物の半径 $a = 0.9$ 、中心間距離 $d = 2$ 、として、介在物を近づけたと考えたときとする図を図15、16に示す。これによると干渉効果に

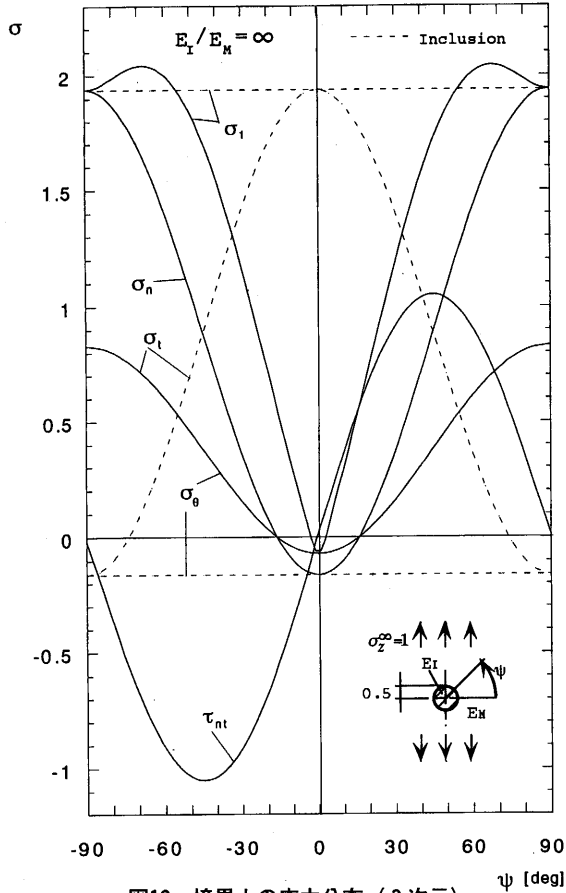


図13 境界上の応力分布 (3次元)
 ($a/d = 0, \sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, E_I/E_M = \infty, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

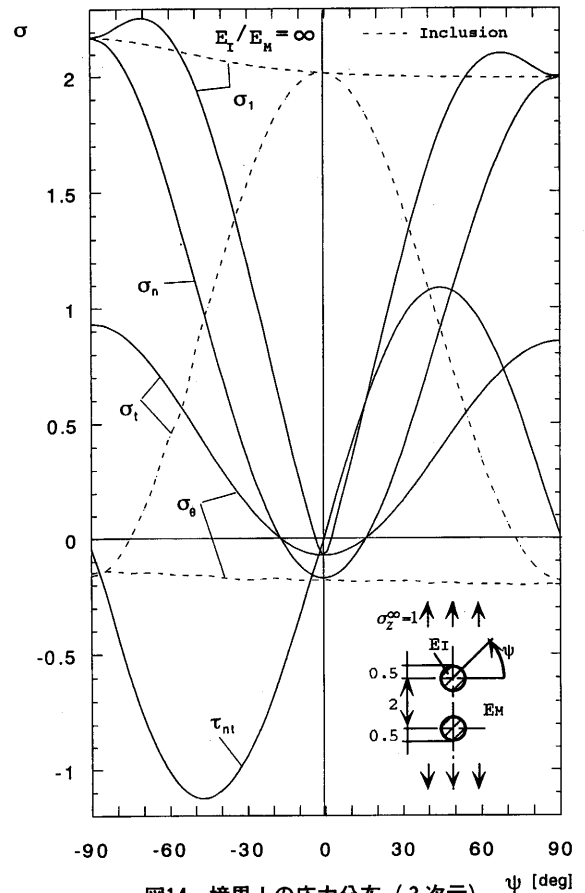


図14 境界上の応力分布 (3次元)
 ($a/d = 0.5, \sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, E_I/E_M = \infty, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

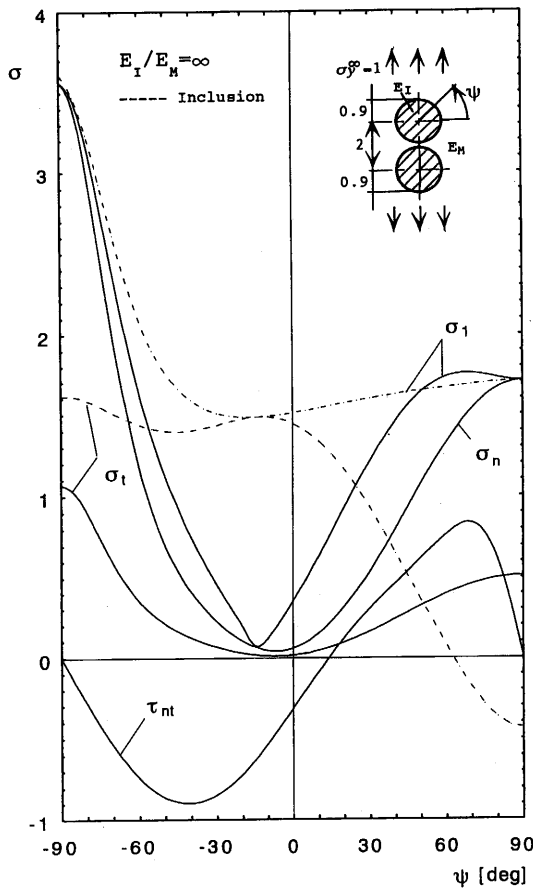


図15 境界上の応力分布 (2次元)
 ($a/d = 0.9, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, E_I/E_M = \infty, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

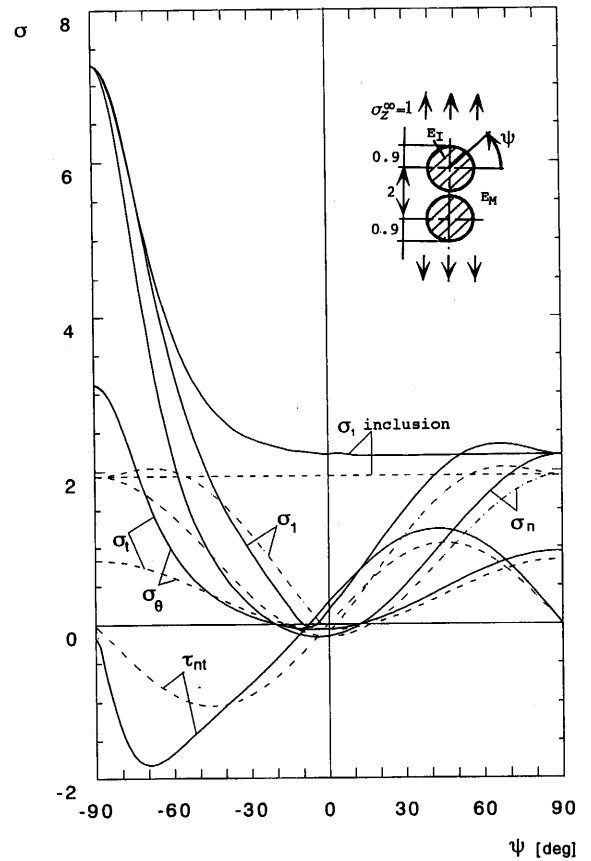


図16 境界上の応力分布 (3次元)
 ($a/d = 0.9, \sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, E_I/E_M = \infty, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

よる変化率がB点の近傍で急激に大きくなっている。

3.4 その他の弾性比による干渉効果の比較

母材と介在物の弾性比 E_I/E_M が3.2, 3.3節の遷移領域の例として, $E_I/E_M = 0.5$ と2.0の場合を考察する。
 $E_I/E_M = 0.5$ の場合, 無限板の1個の円形介在物の応力の分布を図17に, 2個の円形介在物の干渉問題において $a/d = 0.9$ の場合の応力分布を図18に示す。また無限体

中の1個の球状介在物の応力分布を図19に, 2個の球状介在物の干渉問題において, $a/d = 0.9$ の場合の応力分布を図20に示す。同様にして $E_I/E_M = 2.0$ の場合, 円形介在物の干渉問題の応力分布を図21, 22に, 球状介在物の干渉問題の応力分布を図23, 24に示す。

$E_I/E_M = 0.5$ の場合, 最大応力は円孔や球かの干渉問題と同様にA点 ($\psi = 0^\circ$) 近傍で発生している。また a/d が大きくなると干渉効果により最大応力の値は減少

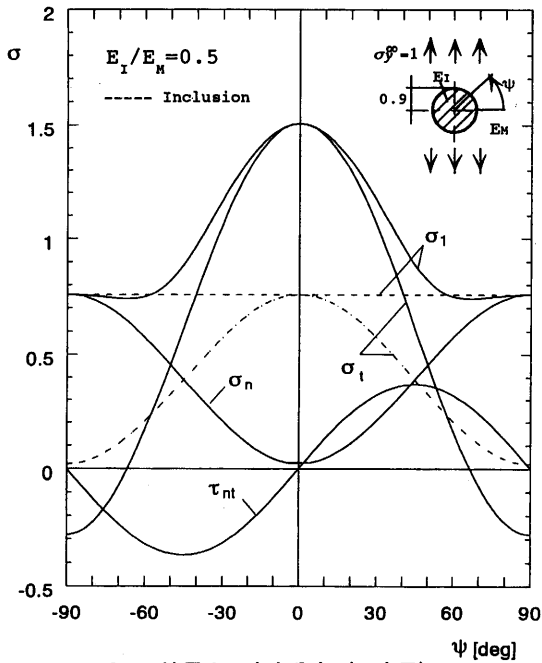


図17 境界上の応力分布 (2次元)

($a/d = 0, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, E_I/E_M = 0.5, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

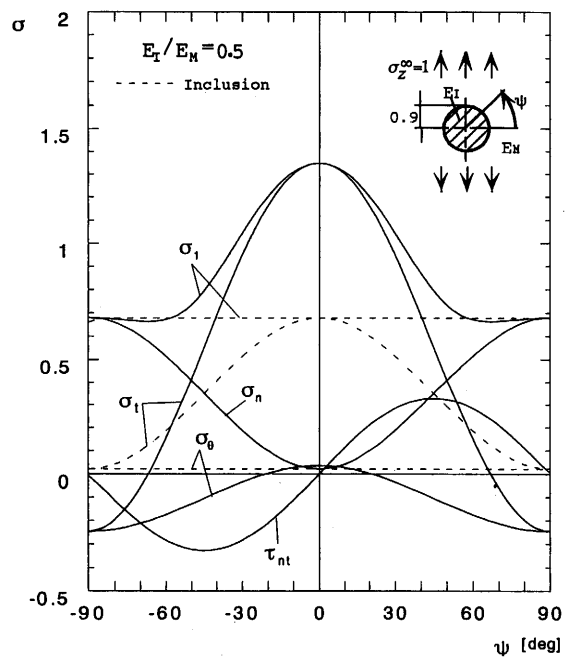


図19 境界上の応力分布 (3次元)

($a/d = 0, \sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, E_I/E_M = 0.5, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

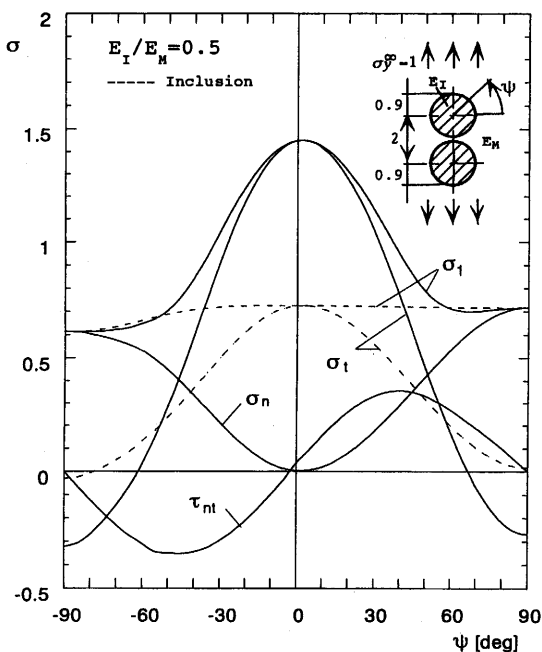


図18 境界上の応力分布 (2次元)

($a/d = 0.9, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, E_I/E_M = 0.5, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

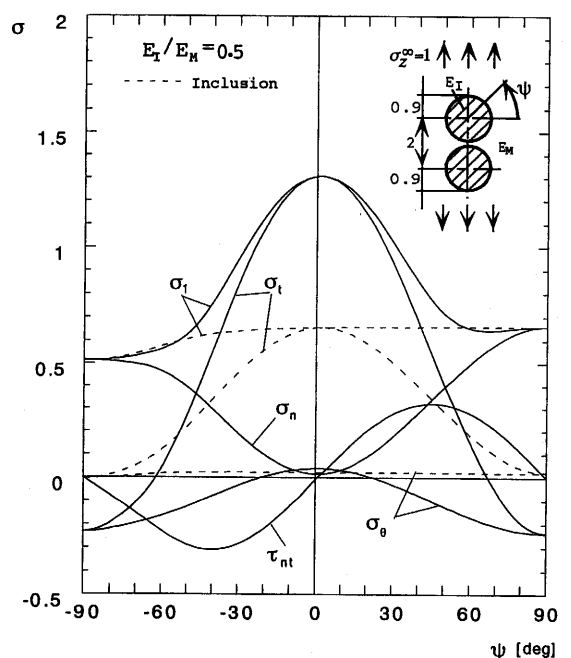


図20 境界上の応力分布 (3次元)

($a/d = 0.9, \sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, E_I/E_M = 0.5, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

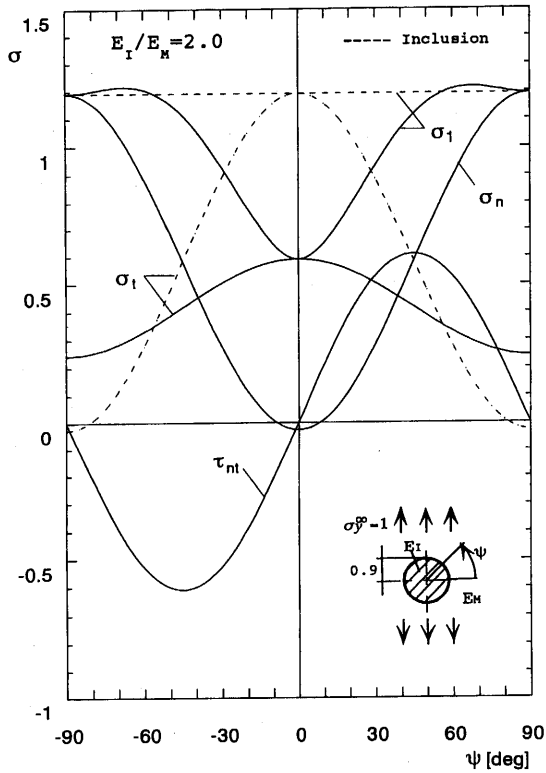


図21 境界上の応力分布 (2次元)
 ($a/d = 0, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, E_I/E_M = 2.0, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

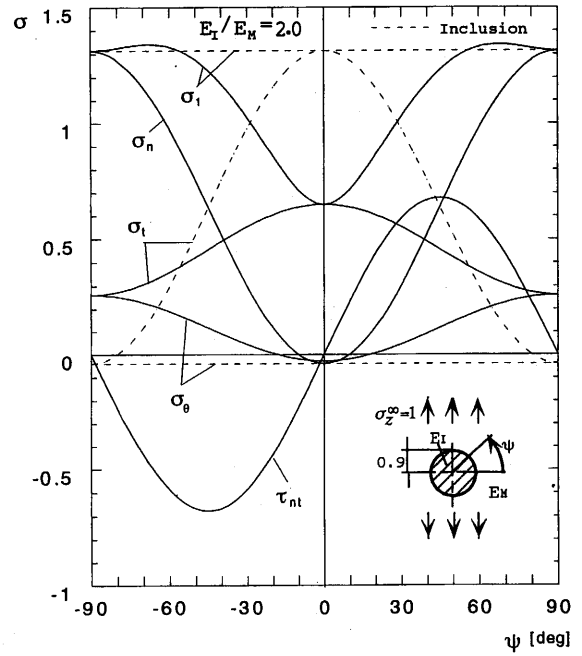


図23 境界上の応力分布 (3次元)
 ($a/d = 0, \sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, E_I/E_M = 2.0, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

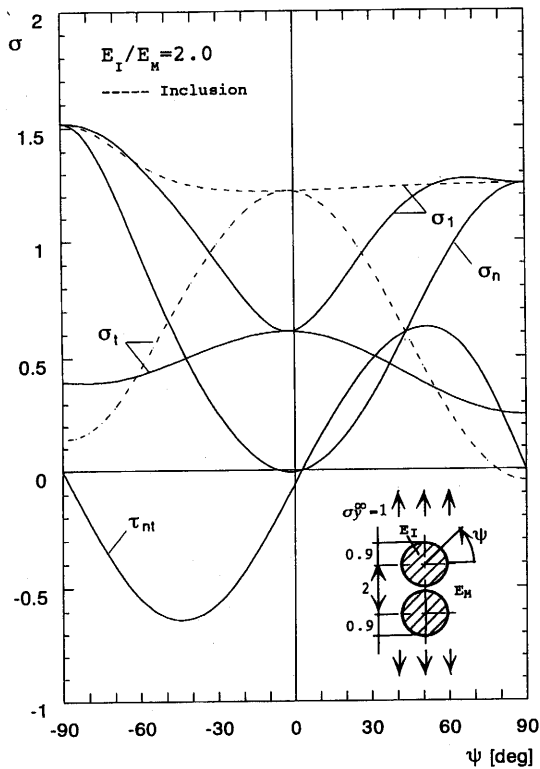


図22 境界上の応力分布 (2次元)
 ($a/d = 0.9, \sigma_x^\infty = 0, \sigma_y^\infty = 1, E_I/E_M = 2.0, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

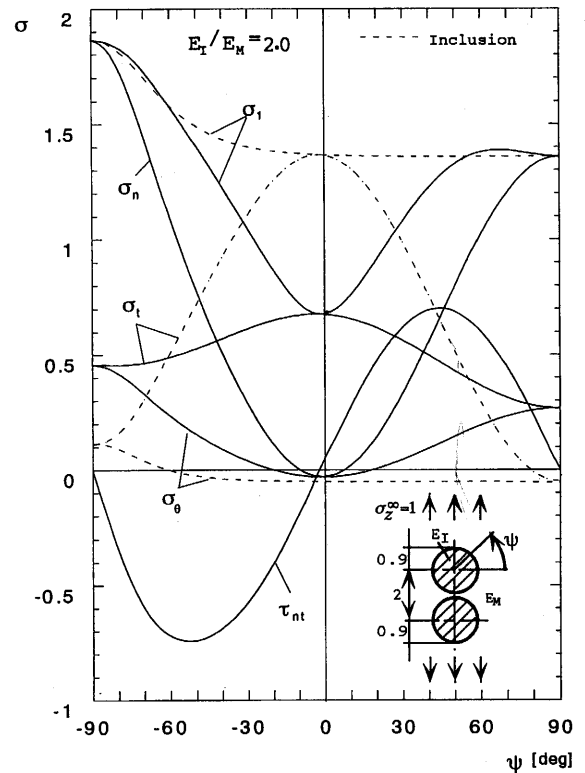


図24 境界上の応力分布 (3次元)
 ($a/d = 0.9, \sigma_r^\infty = 0, \sigma_z^\infty = 1, E_I/E_M = 2.0, \nu_M = \nu_I = 0.3$)

している。 $E_I/E_M = 2.0$ の場合には、最大応力は剛体介在物の場合と同様に、B点 ($\phi = 90^\circ$) で発生している。また a/d が大きくなると、最大応力の値は増加している。さらに、介在物が2個の場合の干渉効果による最大応力の変化率とB点における応力の変化率をみると、 $E_I/E_M = 0.5$ の2次元と3次元の最大応力の変化率は、それぞれ3.31%、2.23%であり、B点における応力の変化率は、それぞれ18.4%、23.65%になっている、したがって、円孔や球かのとときと同じように、最大応力の変化率は2次元の問題の方が大きくB点における応力の変化率は3次元問題の方が大きい。しかし、 $E_I/E_M = 2.0$ のときの2次元と3次元の最大応力の変化率は、それぞれ25.6%、39.16%であり、B点における応力の変化率は、それぞれ27.7%、41.7%である剛体介在物のときと異なって、最大応力の変化率、B点における応力の変化率は、ともに3次元の方が大きくなっている ($a/d = 0.9$ のとき)。

4. 結 言

本研究では、体積法の特異積分方程式を利用して無限板中の2個の円形介在物、および無限体中の2個の回転円体状介在物の干渉問題を解析した。介在物間の距離および母材と介在物の弾性比を系統的に変化させて、母材と介在物境界上の正確な応力分布を求め図表に整理した。さらに得られた応力分布をもとに、2次元と3次元の問題の応力集中の干渉効果について比較検討した。この得られた結果をまとめると以下ようになる。

(1) i) 介在物の弾性が比 $E_I/E_M > 1$ の場合、同一形状比 a/b で比較すると、1個の回転円体状介在物 (3次元) の最大応力の値は、円形介在物 (2次元) の最大応力の値よりも大きくなる。

ii) 介在物の弾性比が $E_I/E_M < 1$ のとき、同一形状比 a/b で比較すると、回転円体状介在物 (3次元) の最大応力の値は円形介在物 (2次元) の最大応力の値よりも小さくなる。

(2) 無限板中の2円孔と無限体中の2球かの干渉問題において応力集中の干渉効果を比較すると、最大応力に関しては、2次元問題の方が干渉効果による最大応力値 σ_{max} の変化率が大きい。しかしながら、2つの円孔、球かの最も内側の点で、干渉効果を比較すると、3次元の問題の方が応力値の変化率が大きくなる ($a/d = 0.9$ のとき)。

(3) 無限板中の2個の剛体介在物と、無限体中の2

個の剛体球状介在物の干渉問題において、応力集中の干渉効果を比較すると、最大応力が、2つの介在物が最も接近する点の近傍で発生することと関係して、最大応力の値の変化率、2つの介在物が最も接近する点での応力変化率ともに、2次元の問題の方が大きくなる ($a/d = 0.5$ のとき)。

(4) i) 介在物の弾性係数が $E_I/E_M < 1$ のとき、2次元と3次元の問題の干渉効果は、円孔や空かの場合と同様に、最大応力の変化率は、2次元の問題の方が大きく、2つの介在物が最も接近する点での応力変化率は、3次元の問題の方が大きい。

ii) 介在物の弾性係数が $E_I/E_M > 1$ のとき、最大応力の変化率および、2つの介在物が最も接近する点での応力変化率ともに3次元の方が大きい ($a/d = 0.9$ のとき)。

参考文献

- 1) 西田正孝, 応力集中, (1967), pp.330-333, 森北出版。
- 2) K. Sezawa and G. Nishimura, Stress under Tension in a Plate with a Heterogeneous Inclusion. Rep. Aero. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ., Vol. 6. No. 68 (1932) pp.25-43.
- 3) J. N. Goodier, Concentration of Stress around Spherical and Cylindrical Inclusions and Flaws. Trans. ASME. Vol. T. Karuman, Calif. Inst. Tech. (1941) pp.293-309.
- 4) 石田誠, 井川秀信, 千鳥に分布する円形介在物群をもつ無限体の引張り, 機論, 54-504, A (1970), pp. 1504-1511.
- 5) 塩谷駿介, 等大2円形充てん材を有する無限薄板の引張り, 機論, 36-286, 第1部 (1970), pp. 886-897.
- 6) 八田正俊, 村上敬宜, 石田誠, 2個の円形介在物の干渉における応力場, 機論, 51-464, A (1970), pp.1057-1065.
- 7) 内山幸彦, 八田正俊, 村上敬宜, 周期的に配列された楕円形介在物を有する複合材料の弾性係数の解析, 複合材料誌, 11-6, (1985), pp.275-286.
- 8) Eshelby, J. D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proc. Royal Soc. London, 241, A (1957), pp. 376-396.
- 9) 土田栄一郎, 球状欠陥による応力集中, 機誌, 79-693, (1975), pp.71-76.
- 10) 筒井敏, 近松貞晴, 斎藤憲司, 球状介在物を有する半無限体の2軸一様引張りによる応力場, 機論, 40-337, 第1部 (1974), pp.2485-2493.
- 11) 土田栄一郎, 中原一郎, 球かを有する厚板の一軸引張り, 機論, 42-354, 第1部 (1976), pp.377-388.
- 12) 西谷弘信, 電子計算機による二次元応力問題の解法, 機誌, 70-580, (1967), pp.627-635.
- 13) Nisitani, H., Mechanics of Fracture, Vol. 5 (edited by Sih, G. C.), 1978, Noordhoff International Publishing, Chapter 1.
- 14) 西谷弘信, 陳玳珩, 体積法, (1987), pp.3-6, 培風館。
- 15) 野田尚昭, 松尾忠利, 応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法 (第2報, 切欠きの干渉問題の一般的解析法), 機論, 59-559, A (1993), pp.785-791.