POZNÁMKY K MODELOVÁNÍ REGIONŮ

Bohuslav Sekerka

Ústav ekonomie, Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice

Abstrakt: *V článku se popisuje regionální model založený na input-output přístupu, tak jak je běžné v současné literatuře, formuluje se obecnější model a studují se metody vhodné při regionálním modelování. Formulovaný model může být nápomocen při bilancování plánování rozvoje regionů, i když dynamizace modelu není explicitně uvažována. V krátkém článku nelze postihnout spektrum aspektů, které se dotýkají dané problematiky. Zaměřil jsem se jenom na vybrané aspekty.*

Klíčová slova: *modely input-output, regionální model, zobecněné řešení, pseudoinverze, neurčitost v regionálním modelování*

V článku se vychází ze základních poznatků sektorového modelování. Použité prameny jsou uváděny spolu s textem.

1. Modely input–output

Tyto modely nejsou zahrnuty do hlavních proudů ekonomie, ale umožňují souhrnný pohled na ekonomiku určitého regionu, či státu. Uvedeme základní myšlenky statického Leontiefova modelu[1] pro porozumění navrženého multiregionálního modelu v následujícím odstavci.[2]

Analýza regionu musí vycházet ze základních proporcí mezi výrobou a spotřebou nejen za celý region, ale též za sektory v regionu uvažované. Soustava vztahů vztahujících se k určitému časovému úseku musí být přesná a komplexní. Přesnost spočívá ve vymezení náplně jednotlivých položek a komplexnost znamená, že model pokrývá všechny podstatné vztahy v sektoru.

Budeme předpokládat, že veličiny jsou vyjádřeny v hodnotovém tvaru.

1.1. Formulace input-output modelu

Celkové (hrubé) zdroje spotřeby tvoří produkce, dovoz a úbytek zásob a rezerv. Tyto zdroje se používají na výrobní spotřebu v sektorech a na finální užití. Položky finálního užití jsou spotřeba domácností, hrubé investice, tj. investice včetně nahrazovacích, vládní výdaje, přírůstky zásob a rezerv a vývoz.

Z hodnotového hlediska hodnotu výroby získáme tak, že k výrobní spotřebě (bez zahrnuté amortizace) přidáme amortizaci, náklady práce, zisk před zdaněním, dávky a další analogické položky. V dalším budeme uvažovat reprezentativní položky přidané hodnoty: amortizaci, mzdy a zisk. Chceme-li získat hodnotu zdrojů, je nutné k hodnotě výroby přidat hodnotu dovozu a hodnotu úbytku zásob.

Chceme-li bilancovat výrobu, potom v rozdělovacích vztazích musíme ve finálním užití uvažovat čistý vývoz, tj. vývoz zmenšený o dovoz, a analogicky od přírůstku zásob odečíst úbytek zásob.

Uvažujme a sektorů i=1,…,n. Označme

x_j produkci sektoru j,
x_{ij} produkci sektoru i, která se spotřebovává v sektoru j,

---

[1] Wassily Leontief (1906-1999) profesor Harvardské university. V roce 1979 získal Nobelovu cenu za ekonomii za rozvoj Input-Output modelů a za jejich aplikaci v důležitých ekonomických problémech.
[2] Ve výkladu se vycházíz publikace Sekerka, B., Vysušil, J.: Makroekonomie, Profess Consulting.

y_i finální užití produkce v sektoru i,
z_j hodnotu přidanou zpracováním v sektoru j.

Hodnota z_j sestává zjednodušeně z následujících složek

z_{aj} amortizace v sektoru j,
z_{mj} mzdy v sektoru j,
z_{zj} zisk v sektoru j.

S ohledem na tuto poznámku lze pro j=1,…,n psát

$$z_j = z_{aj} + z_{mj} + z_{zj} \ .$$

Zisk v naší úvaze představuje reziduální položku, která nemusí neodpovídat účetnímu zisku. Mohou však být na tuto položku kladeny určité požadavky:

S ohledem na definice jednotlivých položek dostaneme soustavy bilancí

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = x_i \ , \qquad i=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j = x_j \ , \qquad j=1,\dots,n \ .$$

První soustava představuje distribuční vztahy, druhá hodnotové vztahy.

Výrobní spotřeba produkce sektoru i v sektoru j zřejmě závisí na produkci sektoru j. Z toho vyplývá, že hodnoty x_{ij} jsou funkcemi hodnot x_j. Abstrahujeme-li od ostatních vlivů, lze psát

$$x_{ij} = f_{ij}(x_j).$$

Vezmeme-li za f_{ij} přímou úměru, kde koeficienty přímé úměrnosti jsou a_{ij} , můžeme psát

$$x_{ij} = a_{ij}\, x_j \ .$$

Koeficienty a_{ij} se nazývají přímé normy spotřeby. Předpokládá se o nich, že jsou relativně stálé. Tyto koeficienty jsou nezáporné. Přijmeme-li předpoklad, že hodnoty z_j jsou kladné, z hodnotových vztahů plyne, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + z_j/x_j = 1 \ , \qquad j=1,\dots,n$$

a tedy

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \ , \qquad j=1,\dots,n \ .$$

Uvedené vlastnosti přímých norem spotřeby zaručí řešitelnost rovnic, které uvedeme v následujícím výkladu.

Poznamenejme, že lze též definovat koeficienty vztahující se k hodnotám z_j , z_{aj}, z_{mj}, z_{zj}.

1.2. Vztah mezi finálním užitím a produkcí sektorů

Pomocí přímých norem spotřeby dostaneme základní systém vztahů

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + y_i = x_i \ , \qquad i=1,\dots,n \ .$$

V dalším výkladu budeme používat maticového vyjadřování.

Označíme

x vektor vytvořený z hodnot x_i , i=1,…,n,
y vektor vytvořený z hodnot y_i , i=1,…,n,
A matici vytvořenou z hodnot a_{ij} , i=1,…,n, j=1,…,n.

Využitím maticového počtu můžeme základní systém vztahů přepsat ve tvaru

$$A\,x + y = x\,.$$

Máme-li nyní dvě dvojice vektorů [x, y] a [$\underline{x}$, $\underline{y}$] , které vyhovují uvedenému vztahu, můžeme psát

$$A\,x + y = x\,, \qquad A\,\underline{x} + \underline{y} = \underline{x}\,.$$

Odečtením těchto vztahů získáme

$$A\,(x-\underline{x}) + (y-\underline{y}) = (x-\underline{x})\,.$$

Položíme-li $\Delta x = (x-\underline{x})$ a $\Delta y = (y-\underline{y})$, dostaneme

$$A\,\Delta x + \Delta y = \Delta x\,.$$

Uvedený vztah vyjadřuje, že základní vztah $A\,x + y = x$ platí též pro přírůstky vektorů x a y.

Úpravou vztahu $A\,x + y = x$ dostaneme

$$y = x - A\,x = (E-A)\,x\,.$$

Známe-li, nebo je-li dáno, y, pak lze za předpokladu, že existuje matice $(E-A)^{-1}$, určit x podle vztahu

$$x = (E-A)^{-1}\,y\,.$$

Dá se dokázat, že za předpokladu nezápornosti matice A a předpokladu

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1\,, \qquad j=1,\ldots,n$$

matice $(E-A)^{-1}$ existuje. Navíc platí

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots\,.$$

Poslední uvedený vztah je východiskem různých iteračních metod a postupů.

Uveďme interpretaci prvků matice $(E-A)^{-1}$. Proto vyjděme ze vztahu

$$\Delta x = (E-A)^{-1}\,\Delta y\,.$$

Volíme-li souřadnice vektoru Δy nulové, kromě souřadnice j-té, kterou položíme rovnou jednotce, pak souřadnice vektoru Δx budou odpovídat j-tému sloupci matice $(E-A)^{-1}$. Odtud plyne, že prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $(E-A)^{-1}$ značí množství produkce sektoru i, které je nutné k tomu, aby se finální užití sektoru j zvětšilo o jednotku při nezměněném finálním užití ostatních sektorů. Prvky matice $(E-A)^{-1}$ se nazývají koeficienty komplexní (plné) spotřeby.

1.3. Vztahy mezi primárními zdroji a finálním užitím

K tomu, aby se mohla uskutečnit produkce, je nutné mít k dispozici potřebné kapacity (produkční plochy, stroje, zařízení apod.) a práci v členění profesním nebo kvalifikačním. V některých případech je nutné mít k dispozici speciální suroviny nebo výrobky, které se v daném teritoriu neprodukují, a proto musí být dovezeny. Všechny uvedené faktory označíme společným názvem primární zdroje.

Model umožňuje odhadnout potřebu primárních zdrojů v závislosti na produkci a finálním užití.

Předpokládejme, že máme p skupin primárních zdrojů a označíme

r_{ij} množství primárního zdroje skupiny i, které figuruje při produkci v sektoru j, j=1,…,n.

Stejně jako v předcházejícím případě budeme předpokládat, že toto množství závisí na produkci sektoru j, takže lze psát

$$r_{ij} = t_{ij}\, x_j \,,$$

kde t_{ij} jsou koeficienty úměrnosti, které značí množství primárního zdroje skupiny i, které je nutné k jednotce produkce sektoru j . Poznamenejme, že tyto koeficienty mají pouze omezenou platnost pro okolí stávající produkce a jejich závislost na produkci je nutné podrobněji analyzovat.

Označíme r_i celkové množství primárního zdroje skupiny i, které je v systému zapotřebí pro výrobu, snadno nahlédneme, že lze psát

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\, x_j \,, \qquad i=1,\ldots,n \,.$$

V maticovém vyjádření lze uvedený vztah přepsat následovně

$$r = T\, x \,.$$

Tento vztah umožňuje k danému x určit vektor r. Uvědomíme-li si, že platí

$$x = (E-A)^{-1}\, y \,,$$

dostaneme

$$r = T\,(E-A)^{-1}\, y \,.$$

Prvky matice $T\,(E-A)^{-1}$ lze interpretovat jako množství primárního zdroje skupiny i, které je nutné k tomu, aby se finální užití sektoru j zvětšilo o jednotku při nezměněném finálním užití ostatních sektorů. Prvky matice $T(E-A)^{-1}$ se nazývají podle povahy primárního zdroje komplexní (plné) koeficienty pracnosti, komplexní (plné) dovozní koeficienty apod.

1.4. Cenotvorné složky produkce

Na začátku výkladu jsme uvedli vztahy

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j = x_j \,, \qquad j=1,\ldots,n \,,$$

kde veličiny x_{ij} a x_j byly v hodnotovém vyjádření, tj. odpovídaly agregátům množství, které bylo vynásobeno příslušnými cenami. V tomto případě cenové indexy jsou rovny jednotkám, tj. můžeme psát

$$\sum_{i=1}^{n} 1\, x_{ij} + z_j = 1\, x_j \,, \qquad j=1,\ldots,n \,.$$

Změní-li se z_j , pak tato změna vyvolá snahu o změnu cen. Označíme-li p_i $i=1,\ldots,n$ příslušné cenové indexy, pak můžeme výše uvedený vztah přepsat na tvar

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_{ij} + z_j = p_j\, x_j \,, \qquad j=1,\ldots,n \,.$$

Vydělíme-li tyto vztahy příslušnými x_j a přihlédneme-li ke vztahu $a_{ij} = x_{ij} / x_j$, můžeme psát

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, a_{ij} + z_j/x_j = p_j \,, \qquad j=1,\ldots,n \,,$$

což lze v maticovém vyjádření přepsat ve tvaru

$$A'\, p + \mathrm{diag}(x)^{-1}\, z = p \,,$$

kde diag(x) značí diagonální matici vytvořenou z vektoru x. Z uvedeného vztahu lze odvodit základní vztah pro cenové indexy

$$p = (E - A')^{-1}\, \mathrm{diag}(x)^{-1}\, z \,,$$

který, s ohledem na zaměnitelnost operací transpozice a inverze, lze přepsat ve tvaru

$$p = [(E - A)^{-1}]'\, \mathrm{diag}(x)^{-1}\, z \,.$$

Tak lze z předpokládaného pohybu vektoru z usuzovat na předpokládaný pohyb cenových indexů p.

1.5. Začlenění dovozu a vývozu

Přístup ke zkoumání zahraničního obchodu se řídí účelem nebo cílem analýzy. V zásadě rozlišujeme dva přístupy. Jednak lze zkoumat závislost dovozu mezi produkcí, resp. finálním užitím, nebo zkoumat efektivnost zahraničního obchodu. Nejprve naznačíme první případ a poté přikročíme k případu druhému.

Závislost dovozu mezi produkcí, resp. finálním užitím

Lze uvažovat dva přístupy.

V prvním přístupu budeme uvažovat vztah

$$A\,x + y_{dom} + y_{ex} = x + d\,,$$

ve kterém ve vektoru y sestává z domácí spotřeby y_{dom} a exportu $y_{ex}j$. V tomto přístupu se dále předpokládá vztah

$$d = \mathrm{diag}(m)\,x\,,$$

kde vektor m představuje koeficienty přímé úměrnosti mezi dovozem a produkcí. Tento vztah vyjadřuje hrubý, velmi aproximativní přístup.

Za tohoto předpokladu máme tyto vztahy

$$A\,x + y = [E + \mathrm{diag}(m)]\,x$$

$$x = [\,E + \mathrm{diag}(m) - A]^{-1}\,y$$

mezi produkcí a finálním užitím.

Někdy se tento vztah modifikuje tak, že uvažujeme veličinu

$$u = x + d = [E + \mathrm{diag}(m)]\,x\,.$$

Vynásobíme-li

$$x = [\,E + \mathrm{diag}(m) - A]^{-1}\,y$$

výrazem [E + diag(m)], dostaneme

$$u = [E + \mathrm{diag}(m)][E + \mathrm{diag}(m) - A]^{-1}\,y\,.$$

Druhý přístup spočívá v tom, že se uvažuje odděleně tuzemská a zahraniční produkce. Stačí vzít v úvahu, že vztah

$$A\,x + y = x + d$$

vznikl sloučením vztahů

$$A_{domácí}\,x + y_{domácí} = x$$

$$A_{dovezené}\,x + y_{dovezené} = d\,,$$

kde je

- $A_{domácí}$ matice vytvořena z přímých norem spotřeby domácí produkce,
- $A_{dovezené}$ matice vytvořena z přímých norem spotřeby dovezených produktů,
- $y_{domácí}$ vektor finálního užití domácí produkce obsahující export a nikoli saldo zahraničního obchodu,
- $y_{dovezené}$ vektor finálního užití dovezených produktů.

Za předpokladu stálosti matic $A_{domácí}$ a $A_{dovezené}$ lze provádět různé alternativní propočty. Je-li např. známo x, lze určit vektory $y_{domácí}$ a $d - y_{dovezené}$ apod. Poznamenejme, že předpoklad relativní stálosti uvažovaných matic není tak oprávněný s ohledem na zastupitelnost domácí a dovezené produkce jako předpoklad stálosti matice A.

Efektivnost vývozu a dovozu

Vyjdeme ze vztahu

$$A_{domácí}\, x + y_{domácí} = x ,$$

ve kterém vektor $y_{domácí}$ rozdělíme na dvě složky. První složka ${}^{exp}y_{domácí}$ bude vyjadřovat užití domácí produkce pro export a druhá složka ${}^{ost}y_{domácí}$ bude vyjadřovat ostatní užití domácí produkce. Platí

$$y_{domácí} = {}^{exp}y_{domácí} + {}^{ost}y_{domácí} .$$

Snadno nahlédneme, že platí

$$x = (E - A_{domácí})^{-1}\, y_{domácí} = (E - A_{domácí})^{-1}\, {}^{exp}y_{domácí} + (E - A_{domácí})^{-1}\, {}^{ost}y_{domácí} .$$

Sečteme-li všechny vztahy v bilanci, tj. vynásobíme-li zleva tento vztah

$$A_{dovezené}\, x + y_{dovezené} = d$$

řádkovým vektorem e' sestávajícím ze samých jednotek, vektorem, dostaneme

$$e'\, A_{dovezené}\, x + e'\, y_{dovezené} = e'\, d ,$$

získáme

$$r' x + \omega = \gamma ,$$

kde

$r' = e'\, A_{dovezené}$,
$\omega = e'\, y_{dovezené}$,
$\gamma = e'\, d$.

Položíme-li $\delta = \gamma - \omega$, dostaneme vztah

$$r'\, x = \delta .$$

Veličina δ představuje celkový dovoz pro výrobní spotřebu.

Ze vztahu $r'\, x = \delta$ snadno odvodíme vztah

$$\delta = r'\, (E - A_{domácí})^{-1}\, y_{domácí} ,$$

který určuje dovozní náročnost vzhledem k celkovému finálnímu užití domácí produkce.

Veličina

$$\delta_{exp} = e'\, {}^{exp}y_{domácí} - r'\, (E - A_{domácí})^{-1}\, {}^{exp}y_{domácí} = [e' - r'\, (E - A_{domácí})^{-1}]\, {}^{exp}y_{domácí}$$

vyjadřuje čistý přínos zahraničního obchodu. Veličina $r'\, (E - A_{domácí})^{-1}]\, {}^{exp}y_{domácí}$ představuje plnou dovozní náročnost exportu. Čistý přínos jednotlivých sektorů lze získat tak, že od vývozu daného sektoru odečteme plnou dovozní náročnost plynoucí z výroby pro export.

2. Regionální model

V tomto odstavci je formulován regionální model. Opouští se předpoklad jednotkové matice výstupů a uvažují se agregáty komodit a činností.

2.1. Formulace modelu

Uvažujme soustavu k regionů a formulujme meziregionální model. Region k může představovat region, který tvoří okolí regionů 1, 2, …, k-1.

Předpokládejme, že se v regionech provádějí činnosti j, j=1, … n, při nichž se vytvářejí a spotřebovávají komodity i, i=1, …, m. Tento předpoklad by bylo možné zobecnit tak, že prováděné činnosti jsou specifické nějakému regionu, řekněme s. V tomto případě by se užívala místo n veličina n_s .

Položme

- q^{st} vektor, jehož souřadnice q_i^{st} vyjadřují výstup komodity i z regionu s do regionu $t \neq s$
- y^{st} vektor, jehož souřadnice y_i^{st} vyjadřují finální spotřebu komodity i vytvořené v regionu s, a spotřebované v regionu t
- A^{st} matice, jejíž prvky a_{ij}^{st} značí spotřebu komodity i vytvořené při jednotkové intenzitě činnosti j v regionu s použité v regionu t
- B^{st} matice, jejíž prvky b_{ij}^{st} značí výstup komodity i při jednotkové intenzitě činnosti j v regionu s použité v regionu t

Pokud se v nějakém regionu nevytváří nebo nespotřebovává nějaká komodita, budou příslušné hodnoty nulové. Předpokládejme, že pro každý region s platí $q^{ss} = 0$.

Označíme symbolem * součet přes všechny hodnoty příslušného indexu a symbolem + součet přes všechny hodnoty příslušného indexu, kromě uvažovaného indexu.[3]

Položme dále

- x^s vektor, jehož souřadnice x_j^s vyjadřují intenzitu činnosti j v regionu s
- y^{*s} vektor, jehož souřadnice y_i^{*s} vyjadřují finální spotřebu komodity i v regionu s
- q^{*s} vektor, jehož souřadnice q_i^{*s} vyjadřují vstup komodity i do regionu s z ostatních regionů
- q^{s*} vektor, jehož souřadnice q_i^{s*} vyjadřují výstup komodity i z regionu s do ostatních regionů
- A^{*t} matice, jejíž prvky a_{ij}^{*t} značí spotřebu komodity i při jednotkové intenzitě činnosti j v regionu t
- B^{s*} matice, jejíž prvky b_{ij}^{s*} značí výstup komodity i při jednotkové intenzitě činnosti j v regionu s

S využitím výše uvedených veličin definujeme pro region s model

$$A^{*s} x^s + y^{*s} + q^{s*} = B^{s*} x^s + q^{*s}$$

$$A^{ss} x^s + y^{ss} + A^{+s} x^s + y^{+s} + q^{ss} + q^{s+} = B^{ss} x^s + B^{s+} x^s + q^{ss} + q^{+s} ,$$

Za předpokladu, že se neuvažuje transfer komodit z jednoho regionu do druhého prostřednictvím třetího regionu lze psát

$$A^{ts} x^s + y^{ts} = q^{ts}$$

$$B^{st} x^s = q^{st} ,$$

kde $t \neq s$. Spojením uvedených vztahu plyne

$$B^{ts} x^t = A^{ts} x^s + y^{ts} .$$

[3] Poznamenejme, že se někdy ve výrazech používá symbolu tečka na místě indexu, přes který se sčítá, např. $\sum_j a_{ij} x_j$ pomocí tohoto označení lze zjednodušeně psát ve tvaru $a_{i\cdot} x_{\cdot}$.

Uvedený vztah představuje podmínku rovnováhy v meziregionálních vztazích. Výraz $B^{ts} x^t$ představuje nabídku regionu t pro region s. Výraz $A^{ts} x^s + y^{ts}$ představuje poptávku regionu s po komoditách produkovaných regionem t.

Z uvedeného plyne, že

- vstup do regionu s z regionu t je použit pro provádění činností v regionu s a pro finální užití v regionu s. Při tom vstup pro zabezpečení činností závisí na intenzitě prováděných činností v regionu s a příslušných maticích A^{ts}.
- výstup z regionu s do regionu t je dán intenzitou činností v regionu s a příslušnou maticí B^{st}.

Z platnosti

$$A^{+s} x^s + y^{+s} = q^{+s}$$

$$B^{s+} x^s = q^{s+} .$$

a ze vztahu

$$A^{ss} x^s + y^{ss} + A^{+s} x^s + y^{+s} + q^{ss} + q^{s+} = B^{ss} x^s + B^{s+} x^s + q^{ss} + q^{+s} ,$$

plyne

$$A^{ss} x^s + y^{ss} = B^{ss} x^s .$$

Uvedený vztah může sloužit k určení intenzity činností v regionu s na základě matic B^{ss}, A^{ss} a vektoru y^{ss} .

Pro přiblížení vyjádřeme vztah

$$A^{*s} x^s + y^{*s} + q^{s*} = B^{s*} x^s + q^{*s} ,$$

v souřadnicovém tvaru

$$\sum_t \sum_j a_{ij}^{ts} x_j^s + \sum_t y_i^{ts} + \sum_t q_i^{st} = \sum_j b_{ij}^{st} x_j^s + \sum_t q_i^{ts} .$$

Podle dříve zavedené notace platí

$$\sum_j a_{ij}^{*s} x_j^s + y_i^{*s} + q_i^{s*} = \sum_j b_{ij}^s x_j^s + q_i^{*s} .$$

Z uvedeného plyne , že v uvedeném vztahu nezáleží na hodnotě q_i^{ss} , která se vyruší. Proto bylo možné předpokládat její nulovost.

Z uvedeného vztahu plyne

$$\sum_j b_{ij}^s x_j^s + q_i^{*s} -\sum_j a_{ij}^{*s} x_j^s - y_i^{*s} - q_i^{s*} = 0.$$

$$\sum_j b_{ij}^s x_j^s -\sum_j a_{ij}^{*s} x_j^s = y_i^{*s} + q_i^{s*} - q_i^{*s} .$$

$$\sum_j (b_{ij}^s -a_{ij}^{*s}) x_j^s = y_i^{*s} + q_i^{s*} - q_i^{*s} .$$

Ze vztahů

$$A^{ts} x^s + y^{ts} = q^{ts}$$

$$B^{st} x^s = q^{st} ,$$

dostaneme rozepsaný tvar

$$\sum_j a_{ij}^{ts} x_j^s - y_i^{ts} = q_i^{ts}$$

$$\sum_j b_{ij}^{st} x_j^s = q_i^{st}$$

To vede ke vztahu

$$\sum_j (b_{ij}^s - a_{ij}^{ss})\, x_j^s = y_i^{ss} .$$

Při daných výstupech, vstupech a finálním užití budeme hledat vektor řešení x^s se souřadnicemi x_j^s . Problémem je, že počet komodit a počet činností nemusí být shodný.

2.2. Řešení modelu

Pokud je počet činností větší než počet komodit, lze tento problém lze řešit zavedením vhodné účelové funkce pomocí lineárního programování. Optimální řešení však obvykle vyřadí některé činnosti. Použijeme proto metody zobecnění řešení systému lineárních rovnic.

2.2.1. Zobecněné řešení soustavy lineárních rovnic

V uvedeném rozboru vyjdu z elektronických skript katedry matematiky fakulty stavební ČVUT[4]

Buď A matice typu (m,n).

V praktických aplikacích se často uvažuje soustava lineárních vztahů

$$A\,x = b.$$

Bylo by vhodné, aby každá taková soustava měla řešení. To však nemůže platit pro klasické řešení s ohledem na podmínku o hodnostech matice soustavy a rozšířené matice soustavy. Proto vhodným způsobem se pojem řešení soustavy vztahů zobecňuje.

Pro účely zobecnění definujme skalární součin vektorů u a v se souřadnicemi u_i a v_i vztahem $(u, v) = \sum_i u_i\, v_i$.

Zavedeme kvadratickou formu

$$F(x) = (Ax-b, Ax-b) .$$

Dá se ukázat, že existuje $\underline{x}$, pro které platí

$$F(\underline{x}) = \min_x F(x) = d.$$

Uvažujme $M = \{x; F(x) = d\}$ Tato množina je neprázdná a uzavřená a konvexní. Existuje proto právě jeden prvek $x^* \in M$ takový, že

$$\|x^*\| = \min_{x\in M} \|x\| .$$

Vektor x^* se nazývá normálním řešením soustavy Ax = b. Někdy se používá názvu řešení ve smyslu nejmenších čtverců.

2.2.2. Zobecněné inverzní operátory

Vyšetřujme soustavu relací[5]

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^* = AX, \quad (XA)^* = XA.$$

Této soustavě odpovídá právě jedna matice X typu (n,m), která se nazývá (Mooreovou - Penroseovou) pseudoinverzní maticí k matici A a označuje se A^+.

Je-li A čtvercová regulární matice, pak snadno nahlédneme, že $A^+=A^{-1}$.

[4] Viz např. Ivo Marek, Petr Mayer a Bohuslav Sekerka: Úvod do numerické matematiky. Přednáška pro posluchače informatiky. Zimní resp. Letní semestr 2/2, elektronický text katedry matematiky fakulty stavební ČVÚT, http://mat.fsv.cvut.cz/skripta/nummet/ams.pdf

[5] Poznamenejme, že A^* značí matici Hermitovsky sdruženou k matici A.

2.2.3. Řešení soustavy A x = b

Vyjděme ze soustavy

$$A\,x = b,$$

kde A je matice typu (m,n), x je vektor mající n souřadnic a b je vektor mající m souřadnic. Definujme vektory b^1 a b^2 takové, že existuje vektor c^1, že platí[6]

$$b^1 = A\,c^1$$

$$A^*\,b^2 = 0.$$

Platí

$$A^*A\,x = A^*\,b = A^*b^1 + A^*b^2 = A^*A\,c^1$$

Soustava

$$A^*A\,x = A^*\,b$$

se nazývá normální soustavou. Tato soustava má vždy klasické řešení.

$$x = (A^*A)^{-1}\,A^*\,b\,.$$

Položme nyní

$$x^+ = A^+\,b.$$

Dá se dokázat, že

$$\underline{x} = x^+ + y,$$

kde $A\,y = 0$.

Důkaz se vymyká z rámce článku.

3. Neurčitost ve strukturních modelech

Množství podnětů z této problematiky lze nalézt na internetu. Z článků tam obsažených mě zaujal např. článek Sergio J. Rey, Guy R. West, Mark V. Janikas: Uncertainty In Integrated Regional Models, December 12, 2003

3.1. Problém pevných struktur

Při formulaci modelu jsme pracovali s maticemi, jejichž koeficienty vyjadřovaly příslušné struktury. V různých modelech není však stálost koeficientů zabezpečena. Nutno tedy uvažovat stabilitu modelů ve smysl jejich citlivosti na změny.

Při problematice vstupu a výstupu jsme pracovali s maticí meziregionálních vztahů. V této úvaze budeme uvažovat matici Q s prvky q^{st}. Tyto prvky získáme sečtením (v případě potřeby po vynásobením cenou) dříve definovaných veličin q_i^{st} .

Předpokládejme, že máme k dispozici hodnoty q^{s*}, q^{*t} . Při změnách výchozích hodnot bude nutné upravit hodnoty q^{st} tak, aby nové hodnoty splňovaly požadované součty. Přirozeným postupem je použít metody změn

- řádků násobením každého řádku vhodným číslem
- sloupců násobením každého sloupce vhodným číslem
- uvažovat iterační proces, ve kterém se střídají výše uvedené přístupy[7].

[6] $b^1 \in \mathrm{range}(A)$, $b^2 \in \ker(A^*)$

[7] V Leontiefově modelu jde o metodu RAS.

Zmíněný proces skončí pokud nejsou přibližně splněny součtové vztahy. Postup lze modifikovat v tom smyslu, že některé prvky nepodléhají změnám.

3.2. Ekonometrické modely

Dalším možným aspektem je kombinace ekonometrického modelování se strukturním přístupem. Např. určování intenzity činnosti v analyzovaném modelu nemusí být pouze výsledkem finálního užití a matic vstupů a výstupů. Tyto intenzity mohou být ovlivňovány dalšími faktory, které se zahrnují do praktických realizací např. pomocí regresních vztahů. Tyto vztahy mohou vnášet další neurčitosti.

Kontaktní adresa:
prof. RNDr. Bohuslav Sekerka, CSc.
Ústav ekonomie, Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice
Studentská 84
532 10 Pardubice
e-mail: bohuslav.sekerka@upce.cz