CORE Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

*XV. Ulusal Mekanik Kongresi,03-07 Eylül 2007,ISPARTA*

# HEGZAGONAL SİMETRİYE SAHİP VİSKOELASTİK FİBER-TAKVİYELİ PİEZOELEKTRİK ORTAMLAR İÇİN MATEMATİKSEL BİR MODEL

MELEK USAL*, ÜMRAN ESENDEMİR**, MUSTAFA REŞİT USAL*

* Süleyman Demirel Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Makine Eğitimi Bölümü, Isparta

** Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Makine Bölümü, Isparta

## ÖZET

Bu çalışma, fiber takviyeli viskoelastik ve piezoelektrik özellikler taşıyan ortamların elektro-termomekanik davranışlarını temsil eden bünye denklemlerine ait matematiksel bir modelin oluşturulması amacını taşımaktadır. Biyolojik doku ve yapı elemanları bu matematiksel modelde bahsedilen özellik ve davranışları tamamen veya kısmen bünyesinde bulundurmaktadır. Modern sürekli ortamlar mekaniğinin temel ilke ve aksiyomları, bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde yol gösterici ve belirleyici olmuştur. Ele alınan malzemenin matris kısmı viskoelastik ve piezoelektrik anizotropiye sahip olup buna ilave olarak fiber takviyesi nedeniyle de malzeme tüm ortam olarak anizotropik bir yapıya sahip olacaktır. Bu bağlamda cisim davranış olarak kendisini elastik gerilme, disipatif gerilme, ve elektriksel polarizasyon alanları tarzında ifade etmektedir. Elde edilen bünye denklemlerinden, elastik gerilmenin ve polarizasyonun, işlemler içinde tanımlanan bir termodinamik potansiyelden türetildiği, dissipatif gerilme ise kendi argümanlarına bağlı tansörel bir fonksiyon olarak ortaya çıktığı görülmüştür. Gerilme potansiyeli ve dissipatif gerilme fonksiyonları bağlı oldukları argümanlarına göre bir kuvvet serisi ile temsil edilerek bünye denklemleri ortaya konulmuştur.

## ABSTRACT

Main objective of this study is construct a mathematical model belong to constitutive equations which represent electro-themomechanical behavior of viscoelastic and piezoelectric media, where the material was brought to a composite state by fiber reinforcing. Physical properties and behaviours mentioned in this mathematical model have been comprised wholly or partially in the biological tissue elements. Fundamental principles and axioms of modern Continuum Mechanics have been used as a guide. In addition to the strong anisotropy being caused by distribution of fibers in an otherwise isotropic material, we have assumed here that the matrix material is also by itself anisotropic with piezoelectric property. In this context the material will respond by means of elastic stress, dissipative stress and electric polarization as relevant constitutive response functions. In this general approach elastic stress and polarization is derived from a thermodynamic potential (elastic stress potential), while dissipative stres is expressed as a tensorial function in terms of its relevant arguments. After necessary information was obtained on the constitutive functions, power series expansions were made based on the assumption that such functions are analytic.

## 1. Giriş

Biyomekanik, Mekaniğin kanunlarını biyolojik cisimlere ve sistemlere uygulamaya çalışan, canlı cisim ve sistemlerin mekaniksel ve fonksiyonel davranışları üzerinde kuvvet dağılımlarının etkisi ile ortaya çıkan hareketleri ve deformasyonları inceleyen bir bilim dalıdır. Biyolojik malzeme ve sistemler çok amaçlı fonksiyonel görevler üstlendiğinden genellikle kompozit yapılar şeklinde dizayn edilmişlerdir. Biyolojik yapı elemanlarının sürekli ve/veya süreksiz fiberlerle takviye edildiğini ifade eden ve bu yapılara uygun matematiksel modeller oluşturmaya çalışan araştırmalar; [1-3] gibi bir çok araştırmacı sayılabilir. Viskoelastik özellik, biyolojik yapı elemanı içerisinde suyun tutulması, iletilmesi ve hareketine karşı gösterilen direncin göz önüne alınması demektir. En önemli doğal kompozitlerden biri kemik yapısıdır. Biyolojik terimlere göre kemik bir bağ dokusudur. Mekanik bilimi açısından kemik, birkaç farklı katı ve akışkan fazı bir arada bulunduran kompozit bir malzemedir. Doğal bir yapı elemanı olan kemiğin pyroelektrik ve piezoelektrik özellik gösterdiği uzun zamandan beri bilinmektedir [4-8]. Fukada ve Yasuda [9], kemikler üzerinde yaptıkları deneysel çalışmalarda kemiğin ($C_6$) hegzagonal simetrisine uyduğunu ifade etmişlerdir [6, 8, 10]. Parkus [11]'a göre, piezoelektrik bir malzemeye ait lineer bünye denklemleri karteziyen koordinatlarda: $t_{ij}=C_{ijkl}\,E_{kl}-e_{kij}\,E_k$, $P_i=e_{ijk}\,E_{jk}+\mathrm{N}_{ij}\,E_j$ şeklinde verilmektedir. Burada, $C_{ijkl}$ elastik sabitleri, $e_{kij}$ piezoelektrik sabitleri, $\mathrm{N}_{ij}$ dielektrik sabitleri karakterize eden tansörel büyüklüklerdir. $t_{ij}$ ve $E_{ij}$ sembolleri ise sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörlerini, $P_i$ ve $E_i$ ise polarizasyon ve elektrik alan vektörlerini göstermektedir Bu sabitlerin deneysel ölçümleri ya sıfır elektrik alanda ya da sıfır gerilme alanı etkisinde yapıldığında aşağıda verilen daha basit ifadeleri yazabiliriz. $t_{ij}\cong C_{ijkl}\,E_{kl}$, $P_i\cong e_{ijk}\,E_{jk}$, $E_{ij}\cong d_{kij}\,E_k$, $P_i\cong \varepsilon_{ik}\,E_k$. Burada bahsedilen malzeme sabitlerine ait deneysel sonuçlardan elde edilen nümerik değerler Güzelsu ve Demiray [6], Güzelsu ve Saha [8]' nın çalışmalarında detaylı bir şekilde verilmiştir.

## 2. **Fiber Kinematiği ve Balans Denklemleri**

Fiber ailesi deformasyondan önce sürekli bir $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ vektör alanı ile deformasyondan sonra ise yine sürekli bir $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ vektör alanı ile temsil edilmektedir. Deformasyondan önceki ve sonraki diferansiyel fiber uzunluğu ise dL ve $d\,l$ ile gösterilmekte olup $\lambda_a$; fiber ailesine ait uzama oranı olarak ifade edilmektedir [12].

$$a_k=\lambda_a^{-1}\,x_{k,K}\,A_K\,,\quad \lambda_a=\left(\frac{d\,l}{d\,L}\right)_a\,,\qquad \lambda_a^2=C_{KL}\,A_K\,A_L \tag{1}$$

Elektrostatiğin denge denklemleri, kütle, lineer momentum, açısal momentum, enerji dengeleri ve entropi eşitsizliği özet olarak verilmiştir [13, 14].

Gauss Yasası: $\nabla\cdot\mathbf{D}=\mathbf{0}$ (2)

Faraday yasası: $\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}\;\Rightarrow\;\mathbf{E}=-\nabla\phi\;,\mathbf{D}=\varepsilon_0\,\mathbf{E}+\mathbf{P}$ veya $D_r=\varepsilon_0 E_r+P_r$ (3)

Kütlenin korunumu; $\dot{\rho}+\rho\,\mathrm{v}_{k,k}=0$ ve $\rho(\mathbf{x},t)=\dfrac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x},t)}$ (Maddesel gösterilimde) (4)

Lineer momentumun dengesi; $\rho\,\dot{\mathrm{v}}_p=\rho\,\mathrm{f}_p+\bar{t}_{rp,r}-P_{r,r}\,E_p$ (5)

Açısal momentumun dengesi; $\varepsilon_{krp}\,\bar{t}_{rp} = 0\,,\qquad \bar{t}_{rp} \equiv t_{rp} + P_r\,E_p = \bar{t}_{pr}$ (6)

Enerji dengesi; $\rho\,\dot{\varepsilon} = t_{kl}\,\mathrm{v}_{l,k} - q_{k,k} + \rho\,h + \rho\,\mathbf{E}\cdot\dot{\Pi}$ (7)

Clausius-Duhem eşitsizliği; $\rho\,\dot{\eta} - \rho\,\dfrac{h}{\theta} + \dfrac{1}{\theta}\nabla\cdot\mathbf{q} - \dfrac{1}{\theta^2}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta \equiv \rho\,\gamma \geq 0$ (8)

Burada, $\mathbf{D}$ elektrik yer - değiştirme vektörü, $\mathbf{E}$ elektrik alan vektörü, $\phi$ elektrostatik potansiyel, $\varepsilon_0$ boşluğun elektriksel permitivitesi, $\mathbf{P}$ polarizasyon alan vektörü, $\mathbf{v}$ sürekli ortamdaki hız alanı, $\dot{\mathbf{v}}$ ivme, $t_{lk}$ gerilme tansörü, $\bar{t}_{lk} = \bar{t}_{kl}$ simetrik gerilme tansörü, $f_k$ birim kütle başına mekanik hacımsal kuvvet, $\varepsilon$ birim kütle başına iç - enerji yoğunluğu, $q_k$ ısı akısı vektörü, $h$ birim kütle başına ısı kaynağı, $\eta$ birim kütle başına entropi yoğunluğu, $\mathbf{\Pi}$ birim kütle başına polarizasyon vektörü ($\mathbf{P} = \rho\,\mathbf{\Pi}$), $\theta(\mathbf{X},t)$ bir t anında $\mathbf{X}$ maddesel noktasının mutlak sıcaklık dağılımı, $\rho\gamma$ birim kütle başına entropi üretimi olup $\varepsilon_{ijk}$ permütasyon tansörünü temsil etmektedir.

## 3. Termodinamik Kısıtlar ve Bünye Denklemlerinin Modellenmesi

Enerji denklemi ve Entropi eşitsizliği birleştirildiğinde $\rho\gamma \equiv -\dfrac{\rho}{\theta}\left(\dot{\varepsilon} - \theta\dot{\eta} - \mathbf{E}\cdot\dot{\Pi}\right) + \dfrac{1}{\theta}t_{kl}\,\mathrm{v}_{l,k} - \dfrac{1}{\theta^2}q_k\,\theta_{,k} \geq 0$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte ortaya çıkan, entropi yoğunluğunun, iç-enerjinin, polarizasyon yoğunluğunun ve deformasyonun zamanla, sıcaklığın da uzaysal koordinatlara göre değişimi termodinamik prosesi temsil etmektedir. Bir termodinamik proseste iç–enerji, entropi ve polarizasyon değişiminin kontrolü mümkün olamayacağından $\psi \equiv \varepsilon - \mathbf{E}\cdot\mathbf{\Pi} - \rho^{-1}E_k\,P_k$ şeklinde bir Legendre transformasyonu uygulanıp bu eşitsizlik maddesel formda,

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0\,\eta\,\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}\bar{T}_{KL}\,\dot{C}_{KL} - \frac{1}{\theta}\theta_{,K}\,Q_K - \Pi_K\,\dot{E}_K \geq 0 \qquad (9)$$

şeklinde yazılmıştır. Burada geçen büyüklüklerle ilgili terimler aşağıda verilmektedir:

$$\Sigma \equiv \rho_0\,\psi\,,\quad \dot{C}_{KL} = \mathrm{d}_{kl}x_{k,K}\,x_{l,L} \Rightarrow d_{kl} = \frac{1}{2}\dot{C}_{KL}X_{K,k}X_{L,l}\,,\quad Q_K \equiv J\,X_{K,k}\,q_k \Rightarrow q_k = J^{-1}x_{k,K}\,Q_K\,,$$
$$\bar{T}_{KL} \equiv J\,X_{K,k}\,X_{L,l}\,\bar{t}_{kl} \Rightarrow \bar{t}_{kl} = J^{-1}x_{k,K}\,x_{l,L}\,\bar{T}_{KL}\,,\qquad \Pi_K \equiv J\,X_{K,k}P_k \Rightarrow P_k = J^{-1}x_{k,K}\,\Pi_K\,,$$
$$E_K \equiv x_{k,K}\,E_k \Rightarrow E_k = X_{K,k}\,E_K\,,\qquad \theta_{,K} = x_{k,K}\theta_{,k} \Rightarrow \theta_{,k} = X_{K,k}\,\theta_{,K} \qquad (10)$$

(9) eşitsizliğinin kullanılabilir hale getirilebilmesi için serbest enerji fonksiyonunun ($\Sigma$), hangi bağımsız değişkenlere bağlı olduğunun bilinmesi gerekir. Eringen [15] ve Şuhubi [16], tarafından tüm bünye fonksiyonları için geliştirilmiş olan bünye aksiyomları ve bunların neticeleri, $\Sigma$ için dile getirilmiştir. Kozalite ve Determinizm aksiyomlarına göre,

$$\Sigma(X,t) = \Sigma\left[x(X',t'),\theta(X',t'),E(X',t'),X\right]\,,\; X' \in B,\quad -\infty < t' \leq t \qquad (11)$$

şeklinde yazılmaktadır. Objektivite, Yakın civarsallık, Yakın-hafıza ve Uygunluk aksiyomlarının uygulanması sonucunda $\Sigma$ nın hangi argümanlara bağlı olması gerektiği ortaya konulup bünye denklemlerine ait formülasyon aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [17].

$$\Sigma=\Sigma\left(\underline{\underline{C}},\underline{A},\underline{E},\theta\right),\qquad \eta=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta},\qquad \Pi_K=-\frac{\partial\Sigma}{\partial E_K},\qquad {}_D\underline{\underline{\overline{T}}}={}_D\underline{\underline{\overline{T}}}\left(\underline{\underline{C}},\underline{\underline{\dot{C}}},\underline{A},\underline{E},\theta\right),$$

$${}_D\overline{T}_{KL}\left(\underline{\underline{C}},\underline{\underline{\dot{C}}},\underline{A},\underline{E},\theta\right)\dot{C}_{KL}\geq 0,\quad \left({}_DT_{KL}={}_DT_{LK}\right),\qquad {}_D\overline{T}_{KL}={}_D\overline{T}_{KL}\left(\underline{\underline{C}},\underline{\underline{0}},\underline{A},\underline{E},\theta\right)=\underline{\underline{0}},$$

$$\overline{T}_{KL}\equiv{}_E\overline{T}_{KL}+{}_D\overline{T}_{KL},\quad T_{KL}=\overline{T}_{KL}-\Pi_K E_M C^{-1}_{ML} \tag{12}$$

Uygulama açısından önem taşıyan sıkışmaz ve uzamaz fiber ailesi ile takviye edilmiş davranışı kısıtlanmış ortamlar, ele alınan biyolojik malzemenin yapısına da uyduğundan ortam sıkışmaz ve fiber ailesi uzamaz kabul edilmiştir. $J=\det\mathbf{C}=III=1$ (sıkışmazlık), $\lambda_a^2=C_{KL}A_K A_L=1$ (uzamazlık). Bu durumda elastik gerilme için bünye denklemi maddesel koordinatlarda aşağıdaki gibi elde edilir.

$${}_E\overline{T}_{KL}=-p\,C^{-1}_{KL}+T_a A_K A_L+2\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}} \tag{13}$$

Burada $p$ ve $T_a$ , Lagrange çarpanları olup alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenir.
Elde edilen bünye denklemlerinden, elastik gerilmenin ve polarizasyonun, işlemler içinde tanımlanan bir termodinamik potansiyelden türetildiği, dissipatif gerilme ise kendi argümanlarına bağlı tansörel bir fonksiyon olarak ortaya çıktığı görülmüştür. Elastik gerilmenin, polarizasyon alanının ve dissipatif gerilmenin belirlenebilmesi için gerilme potansiyeli ve dissipatif gerilme fonksiyonları bağlı oldukları argümanlarına göre bir kuvvet serisi ile temsil edilmiştir. Seri açılımlarında alınacak terimlerin türü ve sayısı tespit edilirken, göz önüne alınan malzemede mekanik ve elektromekanik erkileşimlerin durumu dikkate alınmıştır. Bu çalışmada; mekanik etkileşimler lineer, elektromekanik etkileşimler nonlineer kabul edilmiştir. Ayrıca malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağından matematiksel olarak $\mathbf{A}\rightarrow-\mathbf{A}$ değişiminden etkilenmeyeceği için $\mathbf{A}$ vektörünün bileşenlerinin dış çarpım sayısı çift olan terimler alınmıştır [14].

## 4. Elastik Gerilme ve Polarizasyon Bünye Denklemlerinin Tayini

Green deformasyon tansörü ile genleme tansörü arasında $C_{KL}=\delta_{KL}+2E_{KL}$ bağıntısı olduğundan, $\Sigma=\Sigma\left(E_{KL},A_K,E_K,\theta\right)$ fonksiyonunun $E_{KL},A_K,E_K$ büyüklükleri cinsinden analitik olduğu varsayılarak $E_{KL}=0, E_K=0$ ,ve $A_K=0$ civarında Taylor serisine açılırsa gerilme potansiyeli için,

$$\begin{aligned}\Sigma\left(E_{KL},A_S,E_Q,\theta\right)&=\Sigma_0+\Sigma_{KL}E_{KL}+\beta_Q E_Q+\frac{1}{2}\Sigma_{KLMN}E_{KL}E_{MN}+\gamma_{SN}A_SA_N+\frac{1}{2}\beta_{QN}E_QE_N+\\&\lambda_{KLQ}E_{KL}E_Q+\frac{1}{3}\beta_{QNS}E_QE_NE_S+\frac{1}{2}\lambda_{KLMNQ}E_{KL}E_{MN}E_Q+\lambda_{KLQN}E_{KL}E_QE_N+\\&\alpha_{KLSN}E_{KL}A_SA_N+\xi_{SNQ}A_SA_NE_Q+\ldots\end{aligned} \tag{14}$$

ifadesi bulunur. Bu denklemdeki katsayıların sadece sıcaklığa bağlı olduğu açıktır.
Uzamaz fiber aileli sıkışmaz ortamlar için elastik gerilmenin bünye denklemi ile polarizasyon alanı (13) ve $(12)_3$ ifadeleriyle verilmişti. Bu ifadelerdeki türevler (14) den alınıp yerlerine yazıldığında elastik gerilme ve polarizasyon aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$${}_E\overline{T}_{PR}=-p\,C^{-1}_{PR}+T_aA_PA_R+\Sigma_{PRMN}E_{MN}+\lambda_{PRQ}E_Q+\alpha_{PRSN}A_SA_N+\lambda_{PRQN}E_QE_N \tag{15}$$

$$\Pi_R=-[\beta_{RQ}E_Q+\lambda_{KLR}E_{KL}+\beta_{RQN}E_QE_N+2\lambda_{KLQR}E_{KL}E_Q+\xi_{SNR}A_SA_N] \tag{16}$$

## 5. Dissipatif Gerilmenin Tayini

Dissipatif gerilme, doğal durum olarak seçilen referans konumu etrafında bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden bir kuvvet serisine açılmıştır. $C_{KL}$ ve $\dot{C}_{KL}$ tansörleri, $E_{KL}$ ve $\dot{E}_{KL}$ tansörleri cinsinden ifade edildiğinde dissipatif gerilme için

$$_D\overline{T}_{KL} = {}_D\overline{T}_{KL}\left(E_{KL}, \dot{E}_{KL}, A_K, E_K\right) \quad , \quad _D\overline{T}_{KL} = {}_D\overline{T}_{KL}\left(E_{KL}, 0, A_K, E_K\right) = 0 \tag{17}$$

ifadeleri yazılabilir. Dissipatif gerilme bünye denklemi, bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden Taylor serisine açılarak,

$$\begin{aligned} _D\overline{T}_{PR}\left(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\dot{E}}}, \underline{A}, \underline{E}\right) &= \Gamma_{PR} + G_{PRKL}\, E_{KL} + \Gamma_{PRMN}\dot{E}_{MN} + B_{PRQ}\, E_Q + H_{PRSN}\, A_S\, A_N + B_{PRQS}\, E_Q\, E_S + \\ & F_{PRKLQ}\, E_{KL}\, E_Q + K_{PRMNQ}\, \dot{E}_{MN}\, E_Q + C_{PRKLSN}\, E_{KL}\, A_S\, A_N + F_{PRKLQS}\, E_{KL}\, E_Q\, E_S + \\ & N_{PRMNSQ}\, \dot{E}_{MN}\, A_S\, A_Q + K_{PRMNQS}\, \dot{E}_{MN} E_Q E_S + M_{PRSNQ}\, A_S\, A_N\, E_Q + \ldots \end{aligned} \tag{18}$$

denklemi elde edilir. $(17)_2$ kısıtlamasında $\dot{E}_{KL} = 0 \Rightarrow {}_D\overline{T}_{KL} = 0$ olduğuna göre (18) denklemindeki aşağıdaki katsayılar sıfır olmalıdır.

$$\Gamma_{PR} = G_{PRKL} = B_{PRQ} = H_{PRSN} = B_{PRQS} = F_{PRKLQ} = C_{PRKLSN} = F_{PRKLQS} = M_{PRSNQ} = 0 \tag{19}$$

Bu kısıtlamadan sonra dissipatif gerilmeyi veren bünye denklemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$_D\overline{T}_{PR} = \Gamma_{PRMN}\dot{E}_{MN} + K_{PRMNQ}\dot{E}_{MN}E_Q + N_{PRMNSQ}\dot{E}_{MN}A_S A_Q + K_{PRMNQS}\dot{E}_{MN}E_Q E_S \tag{20}$$

(15) ifadesiyle verilen elastik gerilme ile (20) ifadesiyle verilen dissipatif gerilme denklemleri $(12)_8$ denkleminde yerlerine yazılırsa simetrik gerilme için bünye denklemi,

$$\begin{aligned} \overline{T}_{PR} &= -p\, C^{-1}_{PR} + T_a\, A_P\, A_R + \Sigma_{PRMN}\, E_{MN} + \lambda_{PRQ}\, E_Q + \alpha_{PRSN}\, A_S\, A_N + \lambda_{PRQN}\, E_Q\, E_N + \\ & \Gamma_{PRMN}\, \dot{E}_{MN} + K_{PRMNQ}\, \dot{E}_{MN}\, E_Q + N_{PRMNSQ}\, \dot{E}_{MN}\, A_S\, A_Q + K_{PRMNQS}\, \dot{E}_{MN}\, E_Q\, E_S \end{aligned} \tag{21}$$

elde edilir. (21) ifadesiyle verilen simetrik gerilme ile (16) ifadesiyle verilen polarizasyon alanı $(12)_9$ denkleminde yerlerine yazılırsa asimetrik gerilme aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$\begin{aligned} T_{PR} &= -p\, C^{-1}_{PR} + T_a\, A_P\, A_R + \Sigma_{PRMN}\, E_{MN} + \lambda_{PRQ}\, E_Q + \alpha_{PRSN}\, A_S\, A_N + \lambda_{PRQN}\, E_Q\, E_N + \\ & \Gamma_{PRMN}\, \dot{E}_{MN} + K_{PRMNQ}\, \dot{E}_{MN}\, E_Q + N_{PRMNSQ}\, \dot{E}_{MN} A_S A_Q + K_{PRMNQS}\, \dot{E}_{MN} E_Q E_S + \\ & \beta_{PQ}\, E_Q\, E_M\, C^{-1}_{MR} + \lambda_{KLP}\, E_{KL}\, E_M\, C^{-1}_{MR} + 2\lambda_{KLQP}\, E_{KL}\, E_Q\, E_M\, C^{-1}_{MR} + \xi_{SNP}\, A_S\, A_N\, E_M\, C^{-1}_{MR} \end{aligned} \tag{22}$$

(22) denklemi ele alınan malzeme için söz konusu kabüller altında elde edilen gerilmenin nonlineer ifadesidir. Etkileşimler ve fiber ailesiyle ilgili yapılan basitleştirici kabullere rağmen, bu denklemde 5. ve 6. mertebeden malzeme tansörleri ortaya çıkmıştır. Bu malzeme tansörlerinin pratikte tespiti zor olduğundan, lineer bünye denklemleri elde edilmiştir.

## 6. Lineer Bünye Denklemleri ve Hegzagonal Simetri

Şekil değiştirmeler ($x_{k,K}$), yer değiştirme gradyanları $(U_{K,L})$ ve genleme hızları $(\dot{E}_{KL})$, çok küçük kabul edildiği taktirde ve elektromekanik etkileşimlerin de sadece lineer katkısı göz önüne alındığında; (15), (16) ve (20) denklemleri ile verilen polarizasyon alanı, elastik gerilme ve dissipatif gerilme kolaylıkla lineerleştirilebilir ve aşağıdaki denklemler yazılır.

$$ {}_E\overline{T}_{PR} = -p\,C^{-1}_{PR} + T_a A_P A_R + \Sigma_{PRMN} E_{MN} + \lambda_{PRQ} E_Q + \alpha_{PRSN} A_S A_N \tag{23} $$

$$ \Pi_R = -[\ \beta_{RQ}\, E_Q + \lambda_{KLR}\, E_{KL} + \xi_{SNR}\, A_S\, A_N\ ] \tag{24} $$

$$ {}_D\overline{T}_{PR} = \Gamma_{PRMN}\, \dot{E}_{MN} \tag{25} $$

(23)-(25) ifadelerindeki katsayılar, $E_{KL}$, ${}_D\overline{T}_{KL}$ ve $\dot{E}_{KL}$ tansörlerinin simetrileri ve açılım terimlerindeki türevlerin sıraya bağlı olmaması nedeniyle aşağıdaki simetri özelliklerini taşır.

$$ \Sigma_{PRMN} = \Sigma_{RPMN} = \Sigma_{PRNM} = \Sigma_{MNPR}, \quad \lambda_{PRQ} = \lambda_{RPQ}, \quad \alpha_{PRSN} = \alpha_{RPSN} = \alpha_{PRNS}, $$
$$ \beta_{QN} = \beta_{NQ}, \ \lambda_{KLQ} = \lambda_{LKQ}, \quad \xi_{SNQ} = \xi_{NSQ}, \quad \Gamma_{PRMN} = \Gamma_{RPMN} = \Gamma_{PRNM} \tag{26} $$

Relaksasyon tansörü $\Gamma_{PRMN}$ nin lineer tersinir termodinamikteki onsager ilkesinin sonucu olarak; $\Gamma_{PRMN} = \Gamma_{MNPR}$ şeklinde simetri özelliğinin olduğu kabul edilmiştir. $\alpha_{PRSN}$ malzeme modülündeki son iki indis iki fiber vektör alanına aittir. İki vektörün dış çarpımı 2nci mertebeden bir tansöre denk olduğundan, bu malzeme modülündeki son indis çifti 2nci mertebeden bir tansöre ait indis gibi düşünülebilir. Seri açılımındaki tanımlardaki türevlerin sıraya bağlı olmamasından dolayı $\alpha_{PRSN} = \alpha_{SNPR}$ şeklindeki simetri özelliğini de taşıdığı varsayılabilir. Genel anizotropik ortamlarda, yukarıda verilen simetri şartlarından bu malzeme modüllerinin bileşen sayıları, $\Sigma_{PRMN}$, $\alpha_{PRSN}$, $\lambda_{PRQN}$ ve $\Gamma_{PRMN}$ tansörlerinin 21 e, $\lambda_{PRQ}$, $\lambda_{KLR}$ ve $\xi_{SNR}$ tansörlerinin 18 e, $\beta_{RQ}$ tansörünün de 6 ya düşer [17]. Şimdi de Maddesel İnvaryans Aksiyomunu dikkate alalım. $[S_{KL}]$ maddesel koordinatların ortogonal dönüşümünü karakterize eden ve ortamın simetri grubuna ait keyfi bir matris olmak üzere, bünye denklemleri böyle bir dönüşüm altında biçimsel invaryant kalmalıdır. Buna göre;

$$ \Sigma(E_{KL}, A_K, E_K) = \Sigma(E'_{KL}, A'_K, E'_K), \quad \underline{\underline{S}}\,{}_D\underline{\underline{\overline{T}}}(E_{KL}, \dot{E}_{KL}, A_K, E_K)\,\underline{\underline{S}}^T = {}_D\underline{\underline{\overline{T}}}(E'_{KL}, \dot{E}'_{KL}, A'_K, E'_K), $$
$$ E'_{KL} = S_{KM} S_{LN} E_{MN}, \quad \dot{E}'_{KL} = S_{KM} S_{LN} \dot{E}_{MN}, \quad A'_K = S_{KM} A_M, \quad E'_K = S_{KM} A_M, \ \forall\, \underline{\underline{S}} \in \Im \tag{27} $$

ifadeleri yazılır. Bu durumda (23)-(25) ifadeleriyle verilen lineer bünye denklemlerinde yer alan malzeme modülleri üzerinde her $\underline{\underline{S}}$ matrisi için, aşağıdaki bağıntılar sağlanmalıdır.

$$ \Sigma_{PRMN} = S_{PA} S_{RB} S_{MC} S_{ND} \Sigma_{ABCD}, \quad \lambda_{PRQ} = S_{PA} S_{RB} S_{QC} \lambda_{ABC}, $$
$$ \alpha_{PRSN} = S_{PA} S_{RB} S_{SC} S_{ND} \alpha_{ABCD}, \quad \beta_{RQ} = S_{RA} S_{QB} \beta_{AB}, \quad \lambda_{KLR} = S_{KA} S_{LB} S_{RC} \lambda_{ABC}, $$
$$ \xi_{SNR} = S_{SA} S_{NB} S_{RC} \xi_{ABC}, \quad \Gamma_{PRMN} = S_{PA} S_{RB} S_{MC} S_{ND} \Gamma_{ABCD} \tag{28} $$

Bir biyolojik malzeme olan kemik üzerinde yapılan incelemeler kemiğin hegzagonal polar $(C_6)$ yapısına sahip olduğunu göstermektedir [18]. Simetri düzlemine dik olan eksen $X_3$ ekseni olarak seçilirse, düzlem içerisindeki $X_1$-$X_2$ eksenlerinin $X_3$ ekseninin etrafında hegzagonal simetriyi belirleyen dönmelerini $\underline{\underline{S}}$ dönüşüm matrisi,

$$\underline{\underline{S}} \equiv \left[S_{KL}\right] = \begin{bmatrix} Cos\alpha & Sin\alpha & 0 \\ -Sin\alpha & Cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

şeklinde verilir. Burada $\alpha$, hegzagonal simetriyi temsil edecek şekilde $X_3$ ekseni etrafındaki dönme miktarına tekabül eden açıdır. Buna göre maddesel özellikleri yansıtan 2., 3. ve 4. mertebedeki tansörler (28) ifadesinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma_{KL} = S_{KM}\, S_{LN}\, \Sigma_{MN}, \qquad \Sigma_{KLM} = S_{KP}\, S_{LQ}\, S_{MS}\, \Sigma_{PQS}, \qquad \Sigma_{KLMN} = S_{KP}\, S_{LQ}\, S_{MS}\, S_{NR}\, \Sigma_{PQSR} \tag{30}$$

(29) dönüşümü (30) ifadelerinde yerine konulup $\alpha = 180^0$ alınacak olursa 2., 3. ve 4. mertebe malzeme tansörleri için yapılacak olursa aşağıdaki formlar elde edilir.

$$\left[\Sigma_{KL}\right] = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{bmatrix}, \qquad \left[\Sigma_{KLM}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Sigma_{114} & \Sigma_{115} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{115} & -\Sigma_{114} & 0 \\ \Sigma_{331} & \Sigma_{332} & \Sigma_{333} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[\Sigma_{KLMN}\right] = \begin{bmatrix} \Sigma_{1111} & \Sigma_{1122} & \Sigma_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{1122} & \Sigma_{1111} & \Sigma_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{1133} & \Sigma_{1133} & \Sigma_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\Sigma_{1111} - \Sigma_{1122}\right) \end{bmatrix} \tag{31}$$

(23)-(25) denklemlerinde görülen 2., 3. ve 4. mertebeden tansörel maddesel katsayıları (31) ifadesiyle verilen formata uydurularak ve bu katsayıların simetrileri göz önünde bulundurularak, elastik gerilme, polarizasyon ve dissipatif gerilme için aşağıdaki denklemler yazılır.

$$\begin{bmatrix} {}_E\overline{T}_{11} \\ {}_E\overline{T}_{22} \\ {}_E\overline{T}_{33} \\ {}_E\overline{T}_{23} \\ {}_E\overline{T}_{13} \\ {}_E\overline{T}_{12} \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} C_{11}^{-1} \\ C_{22}^{-1} \\ C_{33}^{-1} \\ C_{23}^{-1} \\ C_{13}^{-1} \\ C_{12}^{-1} \end{bmatrix} + T_a \begin{bmatrix} A_1\, A_1 \\ A_2\, A_2 \\ A_3\, A_3 \\ A_2\, A_3 \\ A_1\, A_3 \\ A_1\, A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_{1111} & \Sigma_{1122} & \Sigma_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{1122} & \Sigma_{1111} & \Sigma_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{1133} & \Sigma_{1133} & \Sigma_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\Sigma_{1111} - \Sigma_{1122}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \\ E_{13} \\ E_{12} \end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_{331} \\ 0 & 0 & \lambda_{332} \\ 0 & 0 & \lambda_{333} \\ \lambda_{114} & \lambda_{115} & 0 \\ \lambda_{115} & -\lambda_{114} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} \alpha_{1111} & \alpha_{1122} & \alpha_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1122} & \alpha_{1111} & \alpha_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1133} & \alpha_{1133} & \alpha_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\alpha_{1111}-\alpha_{1122}\right) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} A_1\, A_1 \\ A_2\, A_2 \\ A_3\, A_3 \\ A_2\, A_3 \\ A_1\, A_3 \\ A_1\, A_2 \end{bmatrix}
\tag{32}
$$

Polarizasyon alanı için;

$$
\begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{bmatrix}
=-\begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}
-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_{114} & \lambda_{115} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{115} & -\lambda_{114} & 0 \\ \lambda_{331} & \lambda_{332} & \lambda_{333} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \\ E_{13} \\ E_{12} \end{bmatrix}
+
$$

$$
-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi_{114} & \xi_{115} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{115} & -\xi_{114} & 0 \\ \xi_{331} & \xi_{332} & \xi_{333} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} A_1\, A_1 \\ A_2\, A_2 \\ A_3\, A_3 \\ A_2\, A_3 \\ A_1\, A_3 \\ A_1\, A_2 \end{bmatrix}
\tag{33}
$$

Dissipatif gerilme için;

$$
\begin{bmatrix} {}_D\overline{T}_{11} \\ {}_D\overline{T}_{22} \\ {}_D\overline{T}_{33} \\ {}_D\overline{T}_{23} \\ {}_D\overline{T}_{13} \\ {}_D\overline{T}_{12} \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} \Gamma_{1111} & \Gamma_{1122} & \Gamma_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{1122} & \Gamma_{1111} & \Gamma_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{1133} & \Gamma_{1133} & \Gamma_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\Gamma_{1111}-\Gamma_{1122}\right) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \\ \dot{E}_{23} \\ \dot{E}_{13} \\ \dot{E}_{12} \end{bmatrix}
\tag{34}
$$

(32)-(34) denklemlerinin sağ tarafındaki matrislerin çarpımları yapılırsa elastik gerilme, polarizasyon alanı ve dissipatif gerilme matrislerinin her bir bileşeni aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
{}_E\overline{T}_{11} &= -p\, C_{11}^{-1} + T_a\, A_1\, A_1 + \Sigma_{1111}\, E_{11} + \Sigma_{1122}\, E_{22} + \Sigma_{1133}\, E_{33} + \lambda_{331}\, E_3 + \\
&\quad \alpha_{1111}\, A_1\, A_1 + \alpha_{1122}\, A_2\, A_2 + \alpha_{1133}\, A_3\, A_3 \\
{}_E\overline{T}_{22} &= -p\, C_{22}^{-1} + T_a\, A_2\, A_2 + \Sigma_{1122}\, E_{11} + \Sigma_{1111}\, E_{22} + \Sigma_{1133}\, E_{33} + \lambda_{332}\, E_3 + \\
&\quad \alpha_{1122}\, A_1\, A_1 + \alpha_{1111}\, A_2\, A_2 + \alpha_{1133}\, A_3\, A_3 \\
{}_E\overline{T}_{33} &= -p\, C_{33}^{-1} + T_a\, A_3\, A_3 + \Sigma_{1133}\, E_{11} + \Sigma_{1133}\, E_{22} + \Sigma_{3333}\, E_{33} + \lambda_{333}\, E_3 + \\
&\quad \alpha_{1133}\, A_1\, A_1 + \alpha_{1133}\, A_2\, A_2 + \alpha_{3333}\, A_3\, A_3 \\
{}_E\overline{T}_{23} &= -p\, C_{23}^{-1} + T_a\, A_2\, A_3 + \Sigma_{2323}\, E_{23} + \lambda_{114}\, E_1 + \lambda_{115}\, E_2 + \alpha_{2323}\, A_2\, A_3 \\
{}_E\overline{T}_{13} &= -p\, C_{13}^{-1} + T_a\, A_1\, A_3 + \Sigma_{2323}\, E_{13} + \lambda_{115}\, E_1 - \lambda_{114}\, E_2 + \alpha_{2323}\, A_1\, A_3 \\
{}_E\overline{T}_{12} &= -p\, C_{12}^{-1} + T_a\, A_1\, A_2 + \frac{1}{2}\left(\Sigma_{1111} - \Sigma_{1122}\right) E_{12} + \frac{1}{2}\left(\alpha_{1111} - \alpha_{1122}\right) A_1\, A_2
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Polarizasyon alanı,

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= -\left(\beta_{11} E_1 + \lambda_{114} E_{23} + \lambda_{115} E_{13} + \xi_{114} A_2 A_3 + \xi_{115} A_1 A_3\right) \\
\Pi_2 &= -\left(\beta_{22} E_2 + \lambda_{115} E_{23} - \lambda_{114} E_{13} + \xi_{115} A_2 A_3 - \xi_{114} A_1 A_3\right) \\
\Pi_3 &= -\left(\beta_{33} E_3 + \lambda_{331} E_{11} + \lambda_{332} E_{22} + \lambda_{333} E_{33} + \xi_{331} A_1 A_1 + \xi_{332} A_2 A_2 + \xi_{333} A_3 A_3\right)
\end{aligned} \tag{36}$$

Dissipatif gerilme,

$$\begin{aligned}
{}_D\overline{T}_{11} &= \Gamma_{1111} \dot{E}_{11} + \Gamma_{1122} \dot{E}_{22} + \Gamma_{1133} \dot{E}_{33} \\
{}_D\overline{T}_{22} &= \Gamma_{1122} \dot{E}_{11} + \Gamma_{1111} \dot{E}_{22} + \Gamma_{1133} \dot{E}_{33} \\
{}_D\overline{T}_{33} &= \Gamma_{1133} \dot{E}_{11} + \Gamma_{1133} \dot{E}_{22} + \Gamma_{3333} \dot{E}_{33} \\
{}_D\overline{T}_{23} &= \Gamma_{2323} \dot{E}_{23} \\
{}_D\overline{T}_{13} &= \Gamma_{2323} \dot{E}_{13} \\
{}_D\overline{T}_{12} &= \frac{1}{2}\left(\Gamma_{1111} - \Gamma_{1122}\right) \dot{E}_{12}
\end{aligned} \tag{37}$$

## 7. Sonuçlar

Biyolojik malzemeye gelebilecek dış kuvvetlere göre malzemede meydana gelen deformasyonları belirlemek için, bu çalışmada tek fiber aileli kompozit viskoelastik bir piezoelektrik ortamda, hem polarizasyonu hem de elastik ve viskoz davranışı belirleyen bir sürekli ortam modeli geliştirilmiştir. İlk önce, maddesel ortamı anizotropik hale getiren fiberlerin ortamla birlikte hareket ettiği varsayılmış ve fiber dağılımını temsil eden fiber vektörünün deformasyondan önceki ve sonraki durumu kısaca ifade edildikten sonra, elektrostatiğin denge denklemleri, kütle, lineer momentum, açısal momentum, enerji dengeleri ve entropi üretim eşitsizliği yazılmıştır. Açısal momentumun yerelleştirilmesinden, mekanik gerilme tansörünün $(t_{pr})$ simetrik olmadığı ortaya çıkmaktadır. Mekanik gerilme tansörü ile polarizasyon gerilme $(\bar{t}^{E}_{pr} = P_p E_r)$ tansörünün toplamından oluşan ve $(\bar{t}_{pr})$ şeklinde gösterilen, simetrik bir gerilme tansörü tanımlanmıştır. Clausius-Duhem eşitsizliğinde ortaya çıkan, iç–enerji, entropi ve polarizasyon değişiminin kontrolü mümkün olamayacağından $\psi \equiv \varepsilon - \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Pi}$ şeklinde bir Legendre transformasyonu uygulanmıştır. Clausius-Duhem eşitsizliğinin kullanılabilir hale getirilebilmesi için serbest enerji fonksiyonunun (Σ), bağlı olduğu bağımsız değişkenler bünye aksiyomları kullanılarak ortaya konulmuş[15, 16] ve bünye denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen bünye denklemlerinden, elastik gerilmenin ve polarizasyonun, işlemler içinde tanımlanan bir termodinamik potansiyelden türetildiği, dissipatif gerilme ise kendi argümanlarına bağlı tansörel bir fonksiyon olarak ortaya çıktığı görülmüştür. Sıkışmaz ve uzamaz fiber ailesi ile takviye edilmiş davranışı kısıtlanmış ortamlar, ele alınan malzemenin yapısına da uyduğundan ortam sıkışmaz ve fiber ailesi uzamaz kabul edilmiştir. Elastik gerilme ile polarizasyon alanı, gerilme potansiyeli $\Sigma$ dan türetildiğinden $\Sigma$ doğal durum olarak seçilen referans konumu etrafında, bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden bir kuvvet serisine açılmıştır. Bu açılımda $\Sigma$ nın $E_{KL}$ tansörüne ve $E_K$ vektörüne göre türevleri alınıp elastik gerilmenin ve polarizasyonun bünye denklemlerinde yerlerine yazılarak, elastik gerilmenin ve polarizasyon alanının nonlineer bünye denklemleri bulunmuştur. Gerilme potansiyeli için yapılan yaklaşım dissipatif gerilme için yapılmış ve dissipatif gerilme, doğal durum olarak seçilen referans konumu etrafında bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden bir kuvvet serisine açılmıştır. $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ iken ${}_{D}\mathbf{T} = \mathbf{0}$ kısıtlaması da kullanılarak, ele alınan malzemede oluşan dissipatif gerilmenin bünye denklemi ortaya konulmuştur. Daha sonra, simetrik ve asimetrik gerilme denklemleri, elde ettiğimiz elastik gerilme, poalrizasyon alanı ve dissipatif gerilme ifadeleri kullanılarak bulunmuştur. Etkileşimler ve fiber ailesiyle ilgili yapılan basitleştirici kabullere rağmen, elde edilen denklemlerde 5. ve 6. mertebeden malzeme tansörleri ortaya çıkmıştır. Bu malzeme tansörlerinin pratikte tespiti zor olduğundan, lineer bünye denklemleri yazılmıştır. $\Sigma$ ve ${}_{D}\overline{\underline{\underline{T}}}$ bünye fonksiyonelleri üzerine maddesel simetri kısıtlaması uygulanmış ve ele alınan malzemenin hekzagonal $(C_6)$ simetrisine sahip olduğu düşünülerek lineer bünye denklemlerindeki malzeme katsayıları üzerine gerekli kısıtlamalar getirilip yerlerine yazılmıştır.

## 8. Kaynaklar


[1] Demiray, H., ''Yumuşak Biyolojik Dokular İçin Bazı Modeller'' III. Ulusal Biyomühendislik Tebliğleri., Hacettepe Üniv.Kimya Fak., 366-378, 1981.

[2] Fung,Y.C., ''The Lung-A Perspective of Biomechanics Development, J.Biomechanical Engineering, 103, 91-96, 1981..

[3] Guo, X.D., Cowin, S.C., ''Periosteal and Endosteal Control of Bone Remodeling Under Torsional Loading'' J. Biomechanics, 25, 645-650, 1992.

[4] Gjelsvik, A., ''Bone Remodeling and Piezoelectricity-I'' J. Biomech., 6, 69-77, 1973.

[5] Güzelsu, N., ''A piezoelectric Model for Dry Bone Tissue'' J. Biomechanics, 11, 257-267, 1978.

[6] Güzelsu, N., Demiray, H., ''Electromechanical Properties and Related Models of Bone Tissues'' Int. J. Engng.Sci.,17 , 813-851, 1979.

[7] Johnson, M.W., Chakkalakal, D.A., Harper, R.A., Katz, J.L., ''Comparison of the Electromechanical Effects in Wet and Dry Bone'' J. Biomechanics, 13, 437-442, 1980.

[8] Güzelsu, N., Saha, S., ''Electro-Mechanical Behaviour of Wet Bone– Part II: Wave Propagation'' J. Biomech. Eng , 106, 262-271, 1984.

[9] Fukada, E., Yasuda, I., ''Piezoelectric Effct in Collagen'' J. Appl. Phys. (Japanees), 3, 117, 1964.

[10] Sarıoğlu, M.T., ''Yaş Kemikler için Elektromekanik bir Model'' Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi - Fen Bilimleri Enstitüsü, 1993.

[11] Parkus, H., ''Electromagnetic Interactions in Elastic Solids'' Springer Verlag, Wien – New York, 1979.

[12] Spencer, A.J.M., ''Continuum Theory of the Mechanics of Fibre Reinforced Composites'' Springer Verlag, Wien-New York, 1984.

[13]. Eringen, A.C., Maugin, G.A., ''Electrodynamics of Continua'' vol.I. Foundations and Solid Media, North – Holland, 1990.

[14] Usal, M., ''Biyolojik bir Konstrüksiyon Elemanı için Matematiksel Modelleme'' Doktora tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi - Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.

[15] Eringen, A.C., ''Mechanics of Continua'' Robert E. Krieger Pub. Co., Hungtington, New York, 1980.

[16] Şuhubi, S.E., ‘’Sürekli Ortamlar Mekaniği – Giriş’’ İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi yayını, 1994.
[17] Erdem, A. Ü., Usal. M. R., Usal. M., ‘’Keyfi Fiber Takviyeli Viskoelastik Piezoelektrik Bir Cismin Elektro-Termomekanik Davranışı İçin Matematiksel Bir Model’’ Gazi Üniv. Müh.-Mim. Fak. Dergisi 20(3) 305-319, 2005.
[18] Fukada, E., Yasuda, I., ‘’On the Piezoelectric Effect of Bone’’ Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 12, 1158-1162, 1957.