

## FONKSİYONEL KADEMELENDİRİLMİŞ DAİRESEL PLAKALARIN LİNEER OLMAYAN TERMOMEKANİK ANALİZLERİ

Recep GÜNEŞ<sup>1</sup>, M. Kemal APALAK<sup>1</sup>, J.N. REDDY<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Erciyes Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 38039 Kayseri, TÜRKİYE

<sup>2</sup>Texas A&M University, Department of Mechanical Engineering, College Station, TX 77843-3123, USA

### ÖZET

Bu çalışmada, mekanik ve ısıl yüklemelere maruz fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakaların geometrik lineer olmayan analizleri yapıldı. Analizlerde Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü kullanıldı. Kademelendirilmiş bölgedeki lokal malzeme özelliklerinin hesaplanmasında mikromekanik model olarak Mori-Tanaka şeması kullanıldı. Isıl yüklemeye maruz plakalarda kalınlık boyunca sıcaklık dağılımı sürekli rejim ısı transferi denklemi çözülerek tespit edildi. Örnek olarak da Zirkonya (ZrO<sub>2</sub>) ve Alüminyumdan (Al) oluşan fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plaka kullanıldı ve elde edilen sonuçlar grafik olarak sunuldu.

### ABSTRACT

In this study, geometrically nonlinear analysis of functionally graded circular plates subjected to mechanical and thermal loads was carried out. The Green-Lagrange strain tensor in its entirety was used in the analysis. The locally effective material properties were evaluated using homogenization method that is based on the Mori-Tanaka scheme. In the case of thermally loaded plates, the temperature variation through the thickness was determined by solving a steady-state heat transfer (i.e., energy) equation. As an example, an FGM circular plate composed of Zirconium (ZrO<sub>2</sub>) and Aluminum (Al) was used and results are presented in graphical form.

### 1.GİRİŞ

Fonksiyonel kademelendirilmiş malzemeler (Functionally Graded Materials=FGMs) yeni tip malzemelerdir ve yüksek sıcaklık ortamlarında kullanılmak üzere tasarlanmışlardır [1-4]. Genellikle, fonksiyonel kademelendirilmiş malzemeler metal ve seramik malzemelerin karışımından yapılırlar. Bu malzemeler mikroskopik olarak heterojendirler. Malzeme heterojenliği, özellik gradyanlarını ortaya çıkarır. Bu özellik gradyanları her bir bileşenin özelliklerinin avantajlarını ön plana çıkaracak şekilde uygun olarak belirlenmelidir. Yüksek sıcaklık dayanımı sert, kırılğan ve korozyona da dayanıklı olan seramik tarafından sağlanır. Seramiklerin ısı iletimi metallere göre oldukça düşüktür. Bu özellik, uygulanan bir ısı akısında seramiklerin metallere oranla yüksek sıcaklık gradyanlarına dayanmasını sağlar. Ayrıca seramikler küçük ısıl genleşme katsayısına sahiptirler. Bunun neticesinde daha küçük ısıl şekil değiştirme miktarlarına ve böylece daha küçük ısıl gerilmelere sahiptirler.

Son zamanlarda fonksiyonel kademelendirilmiş malzemelerin termoelastik analizleri için kayma şekil değiştirme plaka ve kabuk teorileri birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır

Bu çalışma, çeşitli mekanik ve ısıl yüklemelere maruz sabit mafsallı fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakaların geometrik lineer olmayan analizleri ile ilgilidir. Analizlerde Green-Lagrange şekil değiştirme tensörü kullanıldı. Kademelendirilmiş bölgedeki local malzeme özellikleri Mori-Tanaka şeması kullanılarak tespit edildi. Plakaların kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımı sürekli rejim ısı transferi denklemi çözülerek tespit edildi. Analizlerde, seramik bileşen olarak Zirkonya ( $ZrO_2$ ) ve metal bileşen olarak Alüminyumdan (Al) oluşan fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plaka kullanıldı. Sonuç olarak, farklı yüklenme şartlarında plaka kalınlığı boyunca malzeme kompozisyonunun etkisi tespit edilerek elde edilen neticeler grafik olarak sunuldu.

## 2. TEORİK MODEL

Analizler için yarı çapı  $R = 0.1$  m. ve kalınlığı  $h = 0.01$  m olan metal-seramik fonksiyonel kademelendirilmiş plaka kullanıldı. Bu iki malzemeye ait termomekanik özellikler aşağıdaki gibidir:

Alüminyumun (Al) özellikleri:

Elastiklik Modülü	: 70 GPa
Poisson Oranı	: 0.3
Isıl genişleme katsayısı	: $23.10^{-6} / ^\circ C$
İletkenlik	: 204 W/m $^\circ C$

Zirkonyanın ( $ZrO_2$ ) özellikleri:

Elastiklik Modülü	: 151 GPa
Poisson Oranı	: 0.3
Isıl genişleme katsayısı	: $10.10^{-6} / ^\circ C$
İletkenlik	: 2.09 W/m $^\circ C$

İki ayrı malzemedan (seramik-metal) oluşan plakanın en alt yüzeyinin metal, en üst yüzeyinin ise seramik olduğu ve her iki yüzey arasındaki hacimsel oranların kademeli olarak değiştiği kabul edilmiştir (Şekil 1). Seramik ve metal fazların hacimsel oranları arasındaki ilişki;

$$V_c + V_m = 1 \quad (1)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bileşimin oranı plaka kalınlığı boyunca konumun fonksiyonu olarak bir güç denklemi ile ifade edilir;

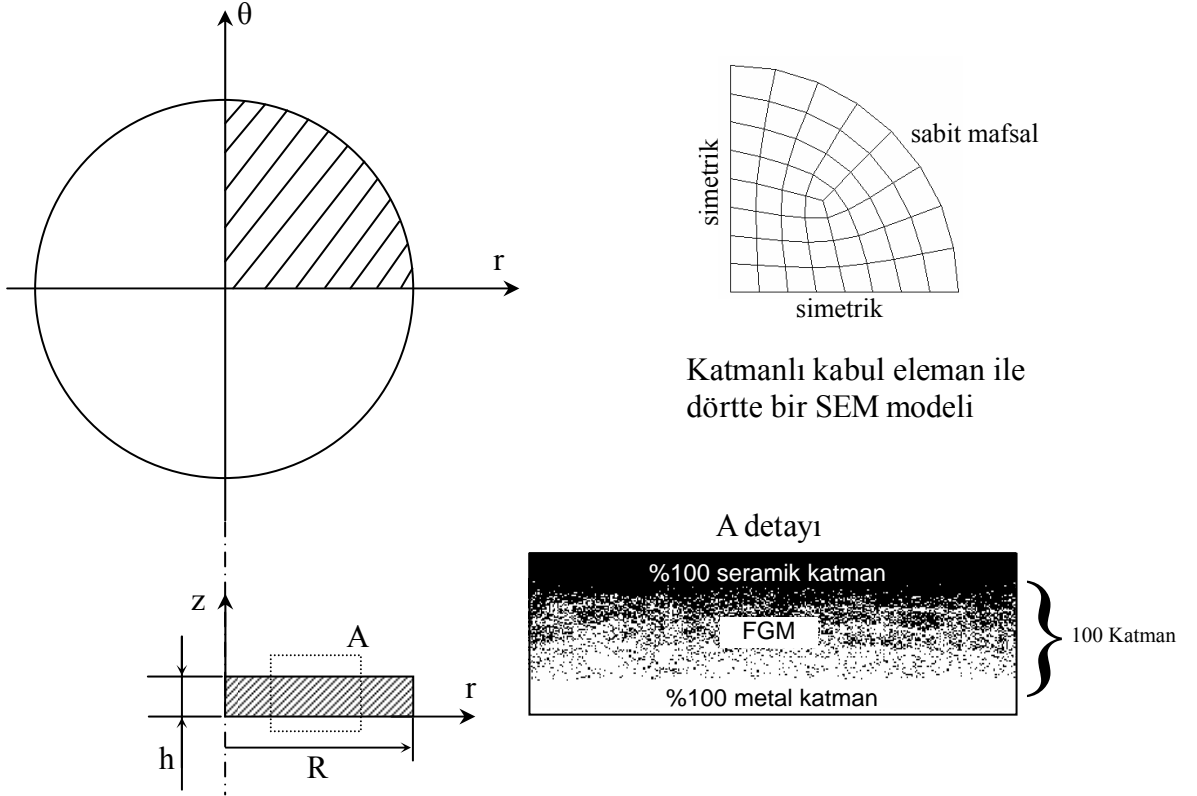
$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h}\right)^n \quad (2)$$

burada;  $V_c(z)$  plakanın herhangi bir  $z$  mesafesindeki seramik bileşenin hacimsel oranı,  $h$  plakanın kalınlığı,  $n$  bileşimi lineer ve non-lineer olarak kontrol eden keyfi bir üstür. Çeşitli  $n$  değerleri için bileşimin hacimsel oranları Şekil 2a'da gösterilmiştir. Kademelendirilmiş bölgedeki lokal malzeme özelliklerinin hesaplanmasında mikromekanik model olarak Mori-Tanaka şeması [18,19] kullanılmıştır. Fonksiyonel kademelendirilmiş malzemenin etkili hacim modülü  $K$  ve kayma modülü  $G$  Mori-Tanaka şemasına göre şu şekilde ifade edilir;

$$\frac{K - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{\left[1 + (1 - V_c) \frac{3(K_c - K_m)}{3K_m + 4G_m}\right]} \quad (3)$$

$$\frac{G - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{\left[ 1 + (1 - V_c) \frac{(G_c - G_m)}{G_m + f_1} \right]} \quad (4)$$

$$f_1 = \frac{G_m (9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \quad (5)$$



Şekil 1 Fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plaka [22].

Etkili Young modülü  $E$  ve Poisson oranı  $\nu$ 'yu hesaplamak için;

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (6)$$

ve

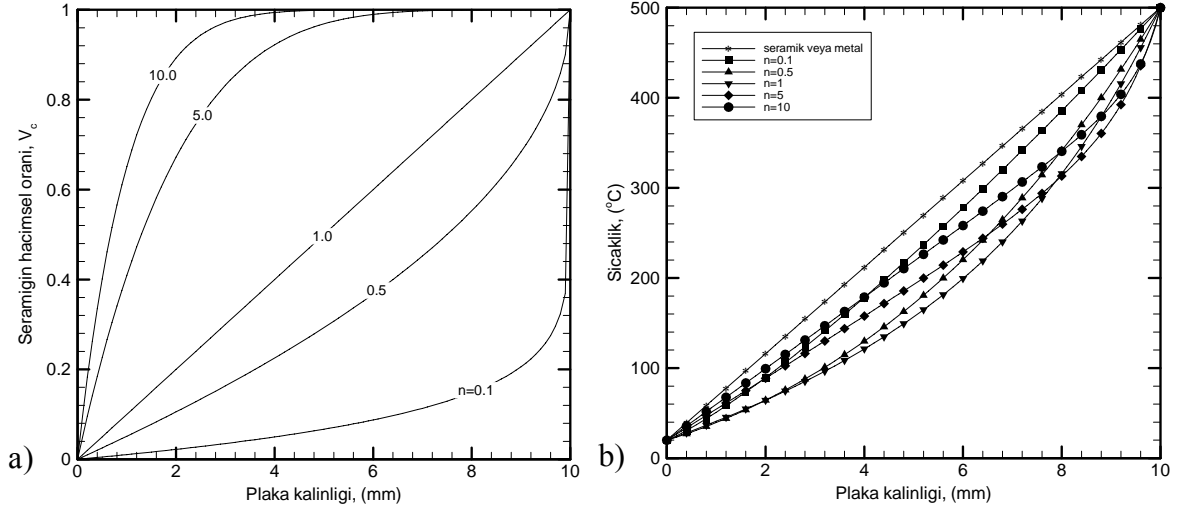
$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (7)$$

Etkili ısıl iletkenlik  $\kappa$  şu şekilde hesaplanır [20];

$$\frac{\kappa - \kappa_m}{\kappa_c - \kappa_m} = V_c \left[ 1 + (1 - V_c) \frac{(\kappa_c - \kappa_m)}{3\kappa_m} \right] \quad (8)$$

Isıl genişleme katsayısı  $\alpha$  benzer ilişkiler ile belirlenir [21];

$$\frac{\alpha - \alpha_m}{\alpha_c - \alpha_m} = \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{K_m} \right) / \left( \frac{1}{K_c} - \frac{1}{K_m} \right) \quad (9)$$



Şekil 2 a) Fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın kalınlığı boyunca farklı kompozisyonel gradyanlarda seramik fazın hacimsel oranı  $V_c$ , b) sıcaklık değişimi [22].

Sıcaklığın radyal doğrultuda sabit kaldığı ve sadece kalınlık koordinatı boyunca değiştiği kabul edilmiştir. Böylece kalınlık boyunca bir boyutlu sıcaklık alanı sürekli rejim ısı transferi deklemini çözülerek elde edilmiştir;

$$-\frac{d}{dz} \left[ \kappa(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0 \quad (10)$$

burada  $\kappa(z)$  malzemenin ısı iletkenliğidir. Denklem (10)'un çözümü  $z = h$  iken  $T = T_c$  ve  $z = 0$  iken  $T = T_m$  sınır şartları kullanılarak polinom serisi vasıtasıyla elde edildi [17];

$$T(z) = T_m + \frac{T_c - T_m}{C} \left[ \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{\kappa_{cm}}{(n+1)\kappa_m} \left( \frac{z}{h} \right)^{n+1} + \frac{\kappa_{cm}^2}{(2n+1)\kappa_m^2} \left( \frac{z}{h} \right)^{2n+1} - \frac{\kappa_{cm}^3}{(3n+1)\kappa_m^3} \left( \frac{z}{h} \right)^{3n+1} + \frac{\kappa_{cm}^4}{(4n+1)\kappa_m^4} \left( \frac{z}{h} \right)^{4n+1} - \frac{\kappa_{cm}^5}{(5n+1)\kappa_m^5} \left( \frac{z}{h} \right)^{5n+1} \right] \quad (11a)$$

ve

$$C = 1 - \frac{\kappa_{cm}}{(n+1)\kappa_m} + \frac{\kappa_{cm}^2}{(2n+1)\kappa_m^2} - \frac{\kappa_{cm}^3}{(3n+1)\kappa_m^3} + \frac{\kappa_{cm}^4}{(4n+1)\kappa_m^4} - \frac{\kappa_{cm}^5}{(5n+1)\kappa_m^5} \quad (11b)$$

burada  $\kappa_{cm} = \kappa_c - \kappa_m$ . Çeşitli  $n$  değerleri için plaka kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımları Şekil 2b'de gösterilmiştir.

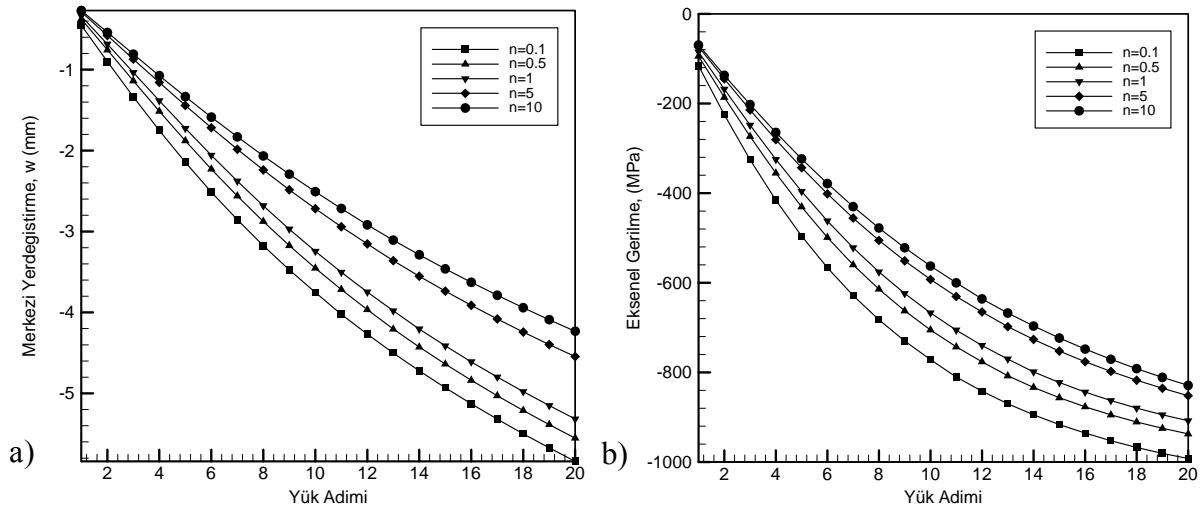
### 3.SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, sabit mafsallı fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın (Al-ZrO<sub>2</sub>) mekanik ve ısı yüklemeler altında lineer ve geometrik lineer olmayan davranışları incelendi. Yüklemeler yirmi yük adımında yapıldı ve buna göre neticeler grafik olarak sunuldu. Analizlerde üç farklı yükleme durumu için kompozisyonel gradyantın ( $n$ ) deformasyon üzerindeki etkileri de incelendi.

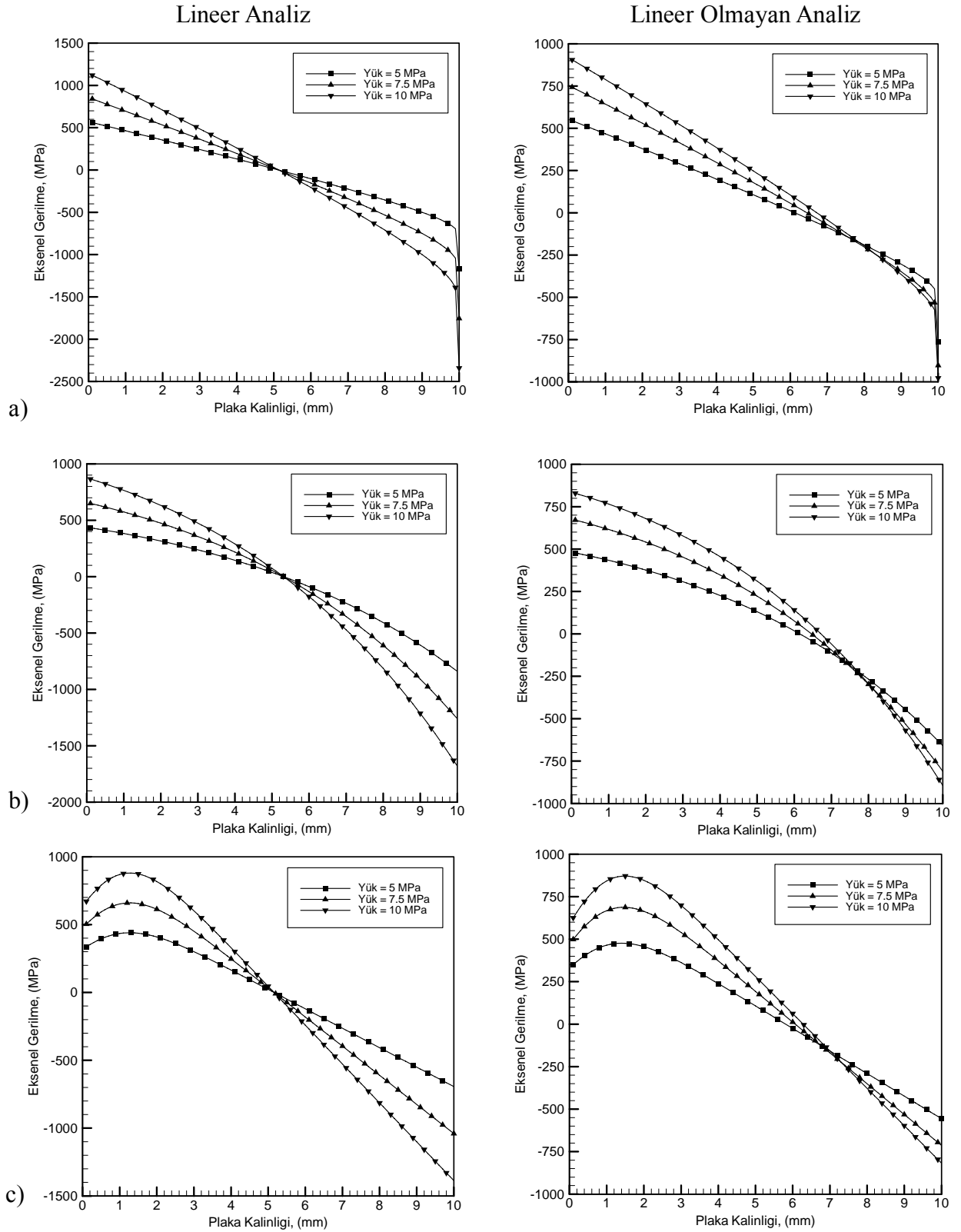
*Durum 1:* Enine mekanik yük altında eğilme analizi yapıldı. Bu amaçla, fonksiyonel kademelendirilmiş plakanın seramikçe zengin üst yüzeyine 10 MPa değerinde üniform basınç yükü tesir ettirildi.

Şekil 3'de mekanik yüke maruz fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın farklı kompozisyonel gradyant  $n$  değerleri için plaka merkezinde meydana gelen yerdeğiştirme ve radyal gerilme değişimleri gösterilmiştir. Malzeme kompozisyonundaki seramik oranı arttıkça plakada merkezinde oluşan yerdeğiştirme ve radyal gerilme değerlerinin azaldığı görülmektedir.

Şekil 4 lineer ve lineer olmayan analizler sonucunda plaka kalınlığı boyunca radyal gerilmelerdeki değişimler görülmektedir. Bu gerilme değişimleri üzerinde yükün ve malzeme kompozisyonunun etkisini de görebilmek için 5, 7.5 ve 10 MPa basınç yükleri altında metalce-zengin ( $n = 0.1$ ), lineer ( $n = 1.0$ ) ve seramikce-zengin ( $n = 10.0$ ) malzeme kompozisyonları için analizler tekrarlanmıştır. Lineer olmayan analizlerden elde edilen gerilme değerlerinin lineer analize oranla daha küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca artan yük değerleriyle gerilme değerlerinin arttığı, buna karşın artan kompozisyonel gradyant değeriyle daha rijit yapıya kavuşan plakalarda gerilme değerlerinin azaldığı gözlenmektedir.



Şekil 3 Enine mekanik yüke maruz fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın farklı kompozisyonel gradyant ( $n$ ) değerleri için a) enine yerdeğiştirme, b) radyal gerilme değişimleri. Lineer olmayan analiz [22].

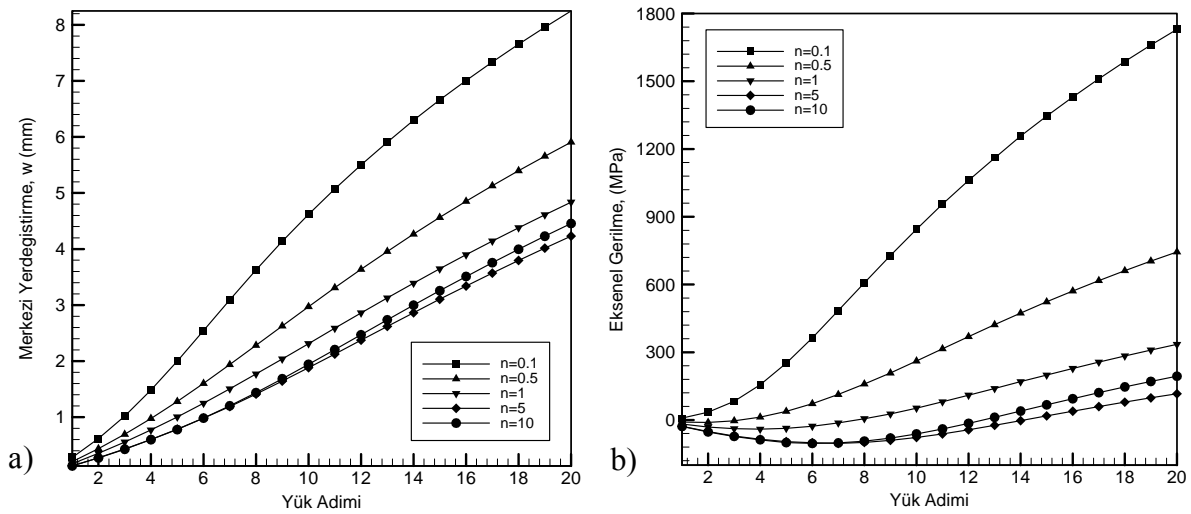


Şekil 4 Mekanik yüke maruz fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın kalınlığı boyunca radyal gerilmenin değişimi a)  $n = 0.1$  (metalce-zengin), b)  $n = 1.0$  (lineer), c)  $n = 10.0$  (seramikce-zengin). Lineer ve lineer olmayan analiz[22].

*Durum 2:* Sıcaklık yükü altında eğilme çalışıldı. Plakanın metalce zengin alt yüzeyi 20°C sıcaklığa, seramikçe zengin üst yüzeyi ise 500°C sıcaklığa maruz bırakıldı. Plaka kalınlığı

boyunca sıcaklık değişiminin parabolik olduğu kabul edildi ve sıcaklık dağılımını hesap etmek için sürekli rejim ısı transferi denklemi çözüldü. 0°C sıcaklıkta plakanın gerilmemesi olduğu kabul edildi.

Şekil 5’de farklı malzeme kompozisyonları için plaka yüzeylerine tatbik edilen sıcaklık yükleri neticesinde plaka merkezinde meydana gelen yerdeğiştirme ve radyal gerilme değişimleri görülmektedir. Artan kompozisyonel gradyant  $n$  değeri ile yerdeğiştirme ve gerilme değerleri azalmaktadır. Buna karşın,  $n = 5$  ve  $n = 10$  için elde edilen neticeler karşılaştırıldığında ise yerdeğiştirme ve gerilme değerlerinde artışın olduğu gözlenmektedir. Bunu nedeni, plaka kalınlığı boyunca sıcaklık dağılımındaki değişim ile açıklanabilir (Şekil 2b).

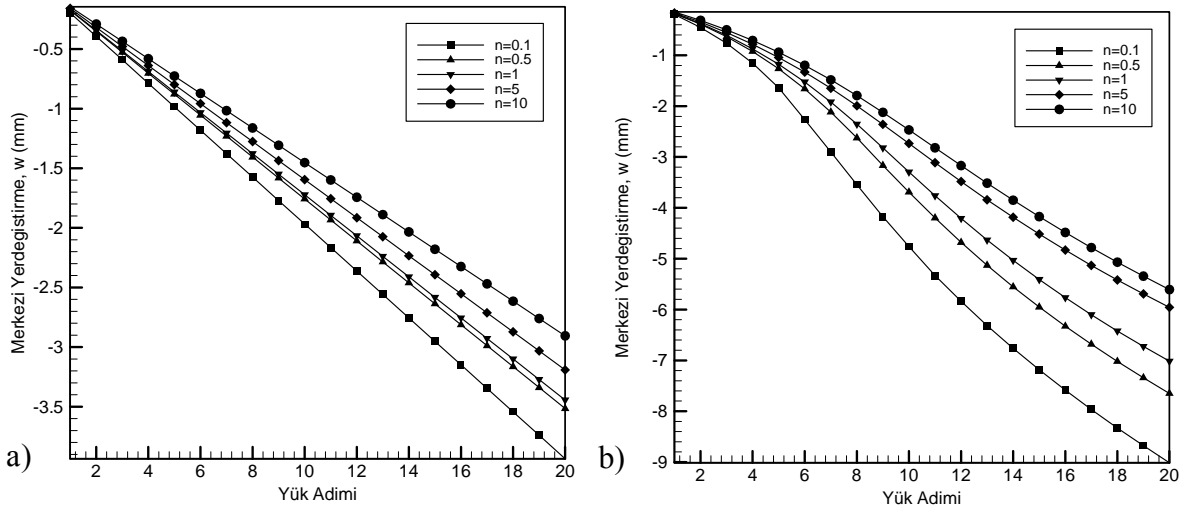


Şekil 5 Isıl yüke maruz fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın farklı kompozisyonel gradyant ( $n$ ) değerleri için a) enine yerdeğiştirme, b) radyal gerilme değişimleri. Lineer olmayan analiz [22].

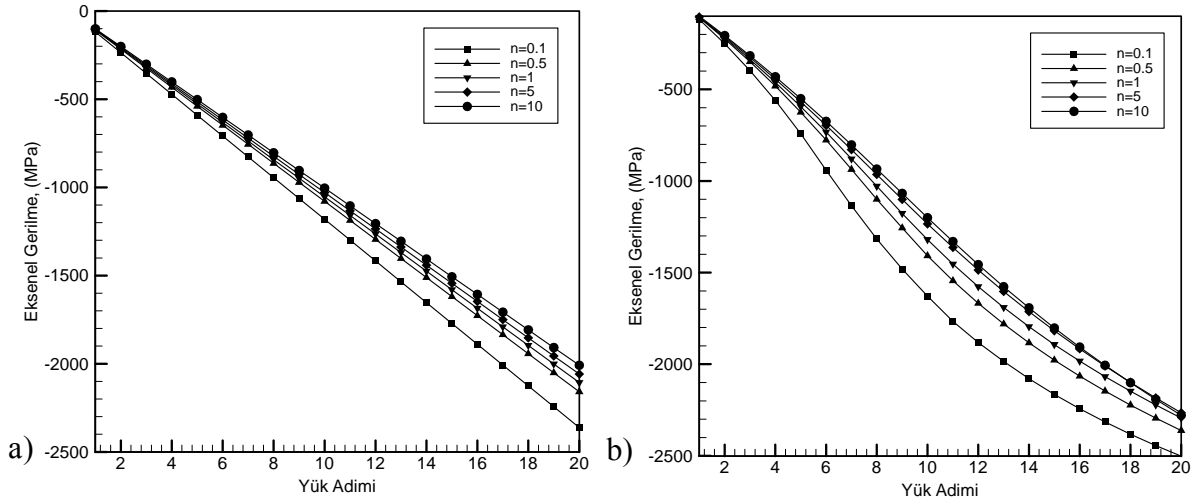
*Durum 3:* Mekanik ve ısıl yükler birleştirildi. Yukarıda belirtilen her iki yükleme durumu birlikte kullanıldı. Sıcaklık etkisiyle plaka yukarı doğru eğilmeye çalışırken, mekanik basınç yükü buna ters yönde plakanın üst yüzeyine uygulandı ve plakayı aşağı doğru eğmeye çalıştı.

Şekil 6’da termomekanik yüke maruz fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın farklı kompozisyonel gradyant  $n$  değerleri için merkezi yerdeğiştirme değişimleri görülmektedir. Bu değerler tamamen aynı şartlarda yapılmış olan lineer ve lineer olmayan analizler sonucunda elde edilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde lineer olmayan analiz ile elde edilen yerdeğiştirme değerlerinin lineer analiz ile elde edilen değerlerin iki katından fazla olduğu görülmektedir. Böylece, bu tip problemlerde lineer olmayan analizin önemi de ortaya çıkmaktadır.

Şekil 7’de termomekanik yük altında fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakada farklı malzeme kompozisyonları için lineer ve lineer olmayan analizlerden elde edilmiş olan radyal gerilme değişimleri görülmektedir. Buna göre lineer olmayan analizlerden elde edilmiş olan gerilme değerlerinin lineer analiz gerilme sonuçlarından az da olsa büyük olduğu görülmektedir. Bu durum sadece mekanik ve sadece ısıl yüklemelere maruz plaka neticelerinin tersi bir sonuçtur. Bunun nedeni, termomekanik yüklemelerde ısıl yükün etkisiyle plaka üzerinde mekanik yükün tesirinin artması ve buna bağlı olarak plakada oluşan deformasyon ve gerilme değerlerinin de artması olarak açıklanabilir.



Şekil 6 Termo (yukarı) mekanik (aşağı) yüke maruz fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın farklı kompozisyonel gradyant ( $n$ ) değerleri için merkezi yerdeğiştirme değişimleri a) Lineer analiz, b) Lineer olmayan analiz [22].



Şekil 7 Termo (yukarı) mekanik (aşağı) yüke maruz fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakanın farklı kompozisyonel gradyant ( $n$ ) değerleri için radyal gerilme değişimleri a) Lineer analiz, b) Lineer olmayan analiz [22].

#### 4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, mekanik ve ısıll yüklerle maruz Al-ZrO<sub>2</sub> fonksiyonel kademelendirilmiş dairesel plakaların geometrik lineer olmayan analizleri yapıldı. Plaka kalınlığı boyunca lokal malzeme özellikleri Mori-Tanaka şeması kullanılarak hesaplandı. Isıl yüke maruz plakalarda, kalınlık boyunca sıcaklığın değişimi sürekli rejim ısı transferi denklemi çözülerek tespit edildi. Sonuç olarak, artan kompozisyonel gradyant  $n$  ile plaka merkezindeki yerdeğiştirme ve gerilmelerin azaldığı görülmüştür. Ancak, ısıll yüklerle maruz plakalarda  $n > 5$  için yerdeğiştirme ve gerilmelerin arttığı gözlenmiştir.

Kullanım alanına göre farklı yükleme ve sınır şartlarına sahip fonksiyonel kademelendirilmiş yapılarda malzeme kompozisyonundaki değişimin istenilen tarzda belirlenmesiyle, uygulamada optimum yapıların elde edilmesi mümkündür.



## TEŞEKKÜR

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından sağlanan doktora sonrası yurt dışı araştırma bursu ile Amerika Birleşik Devletleri Texas A&M Üniversitesinde yapılmıştır. Desteğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederiz.

## KAYNAKLAR

- [1] Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., Shiota, I., Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Japan, 1990.
- [2] Koizumi, M., "The Concept of FGM" Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials 34 3-10, 1993.
- [3] Sata, N., "Characteristic of SiC-TiB<sub>2</sub> Composites as The Surface Layer of SiC-TiB<sub>2</sub>-Cu Functionally Gradient Material Produced by Self Propagating High-Temperature Synthesis" Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials 34 109-116, 1993.
- [4] Noda, N., "Thermal Stress in Materials with Temperature-Dependent Properties" Applied Mechanical Review 44 383-397, 1991.
- [5] Reddy, J.N., Chin, C.D., "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates" J. Thermal Stresses 26 593-626, 1998.
- [6] Praveen, G.N., Reddy, J.N., "Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates" J. of Solids and Structure 35 4457-4476, 1998.
- [7] Praveen, G.N., Chin, C.D., Reddy, J.N., "Thermoelastic analysis of a functionally graded ceramic-metal cylinder" ASCE J. Engng. Mech. 125 1259-1267, 1999.
- [8] Loy, C.T., Lam, K.Y., Reddy, J.N., "Vibration of functionally graded Cylindrical Shells" Int. J. Mechanical Sciences 41 309-324, 1999.
- [9] Reddy, J.N., Wang, C.M., Kitipornchai, S., "Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates" European J. Mech. 18 185-199, 1999.
- [10] Reddy, J.N., "Analysis of functionally graded plates" Int. J. Numer. Meth. Eng. 47 663-684, 2000.
- [11] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q., "Three-dimensional solution of smart functionally graded plates" J. Appl. Mech. 68 234-241, 2001.
- [12] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q., "Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates" European Journal of Mechanics, A/Solids 20 841-860, 2001.
- [13] Woo, J., Meguid, S.A., "Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells" Int. J. Solids and Structures 38 7409-7421, 2001.
- [14] Shen, H.S., "Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments" Int. J. Mechanical Sciences 44 561-584, 2002.
- [15] Shen, H.S., "Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments" Composite Science and Technology 62 977-987, 2002.
- [16] Yang, J., Shen, H.S., "Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments" Journal of Sound and Vibration 255 579-602, 2002.
- [17] Javaheri, R., Eslami, M.R., "Thermal buckling of functionally graded plates" AIAA Journal 40 162-169, 2002.
- [18] Mori, T., Tanaka, K., "Average stress in matrix and average elastic energy of materials

with misfitting inclusions” *Acta Metallurgica* 21 571-574,1973.

[19] Benveniste, Y., “A new approach to the application of Mori-Tanaka’s theory in composite materials” *Mech. Mater.* 6 147-157, 1987.

[20] Hatta, H., Taya, M., “Effective thermal conductivity of a misoriented short fiber composite” *J. Appl. Phy.* 58 2478-2486, 1985.

[21] Rosen, B.W., Hashin, Z., “Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials” *Int. J. Engrg. Sci.* 8 157-173, 1970.

[22] Gunes, R., Reddy, J.N., “Nonlinear analysis of functionally graded circular plates under different loads and boundary conditions” *Int. J. Structural Stability and Dynamics*, basımda.