

*XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 03-07 Eylül 2007, ISPARTA*

## **KALIN PLAKLAR İÇİN ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMAN MODELLERİ**

**Fatih Gören<sup>a</sup>, Tülay Aksu Özkul<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, 34469 Maslak-İstanbul

### **ÖZET**

Bu çalışmada, kalın plakların sayısal çözümlemesi için üç boyutlu, sekiz düğüm noktalı ve üç boyutlu yirmi düğüm noktalı iki farklı sonlu eleman modeli kullanılmıştır. Üç boyutlu elastisite teorisi hesap esasları dikkate alınarak oluşturulan formülasyondan hareketle eleman için düğüm noktası serbestlikleri olarak  $x,y,z$  eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeler  $U, V, W$  alınmıştır. Sayısal uygulamaların çözümü için Fortran programlama dilinde her iki eleman için bilgisayar programları geliştirilmiştir. Elemanların yaklaşıklık derecesi, plaklarda değişik yükleme ve sınır koşulları altında farklı kalınlık oranları için belirlenmeye çalışılmıştır. İki elemanla elde edilen sonuçların birbirine göre yaklaşımı incelenmiş, değişen sonlu eleman sayısının etkisi de dikkate alınarak elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ve kaynaklardaki diğer sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

### **ABSTRACT**

In this study, three-dimensional, eight-nodded and twenty-nodded finite element models are used for static analysis of thick plates. Nodal degrees of freedom for both finite elements are displacements  $U, V, W$  in Cartesian coordinates  $(x, y, z)$  and these elements are based on the three-dimensional elasticity theory. For the solution of numerical applications, two computer programs written in Fortran language are developed. To illustrate the accuracy of these finite elements, a number of examples ranging from thin to thick plate applications, are presented and discussed with respect to  $h/a$ . The results obtained by these elements are presented in dimensionless form in tables with exact solution and with finite element results given by other researchers.

### **1. GİRİŞ**

Plak çözümlemelerinde kalınlığın artması ile ince plaklar için kullanılan teoriler yerine değişik yaklaşıklık düzeylerinde hesap yapılması gerektiği bilinmektedir. İnce plaklar için kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilmekte, orta derecede kalın plaklarda bu terimler hesaba katılmaktadır. Daha kalın plaklarda ise kalınlık doğrultusundaki normal gerilme ve kayma şekil değiştirmelerinin etkisi ihmal edilemeyecek

mertebelere ulaşmaktadır. Bu durumda elastisitenin genel denklemlerinin çözülmesi ya da asimtotik çözümlere gidilmesi gerekmektedir. Bu tür plakların çözümünde teorik metotlarda karşılaşılan zorluklar nedeni ile daha genel olan sonlu eleman yöntemi tercih edilmektedir [1-4]. Genellikle plak problemlerinde, kalınlığa bağlı olarak iki boyutlu sonlu eleman modelleri tercih edilmektedir [5-9]. Ancak kalınlığın önem kazandığı problemler için üç boyutlu sonlu eleman modeli ile çözüm kolaylık sağlamaktadır [10-12].

Bu çalışmada, kalın plakların sayısal çözümlemesinde yer değiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı, üç boyutlu, sekiz ve yirmi düğüm noktalı iki ayrı sonlu eleman modeli kullanılmıştır. Elemanlar kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerini ve kalınlık doğrultusundaki normal gerilmeyi hesaba katan üç boyutlu elastisite teorisi hesap esaslarına dayanmaktadır. Elemanlarda U, V, W yer değiştirme bileşenleri düğüm noktası uç serbestlikleri olarak alınmıştır. Böylece düğüm noktası için serbestlik derecesi 3 olarak, elemanlar için ise sırası ile 24 ve 60 olarak alınmaktadır. Her iki elemanın yaklaşıklık derecesi, plaklarda değişik yükleme ve sınır koşulları altında farklı kalınlık oranları için belirlenmeye çalışılmıştır. İki elemanla elde edilen sonuçların birbirine göre yaklaşımı incelenmiş, değişen sonlu eleman sayısının etkisi de dikkate alınarak elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ve kaynaklardaki diğer sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

## 2. ÜÇ BOYUTLU SONLU ELEMAN MODELLERİ

Kalın plaklar için üç boyutlu elastisite teorisinden bilinen küçük yer değiştirmeler için elde edilmiş olan şekil değiştirme ifadeleri kullanılmıştır.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial w}{\partial z}$$

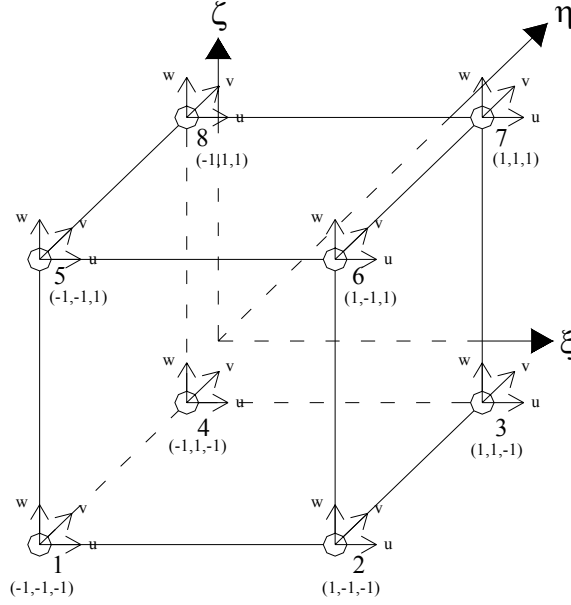
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  ifadeleri sırasıyla x, y, z doğrultularındaki birim şekil değiştirmelerini,  $\gamma_{xy}$ , xy düzlemindeki birim kayma şekil değiştirmesini,  $\gamma_{xz}$  ve  $\gamma_{yz}$  de kalınlık doğrultusundaki birim kayma şekil değiştirmelerini göstermektedir.

Sayısal çözümlere için yukarıda verilen şekil değiştirme ifadelerine dayanan, biçim fonksiyonları lineer terimler içeren sekiz düğüm noktalı üç boyutlu sonlu eleman (Şekil 1) ve biçim fonksiyonları ikinci dereceden terimler içeren yirmi düğüm noktalı üç boyutlu sonlu eleman (Şekil 2) kullanılmıştır.

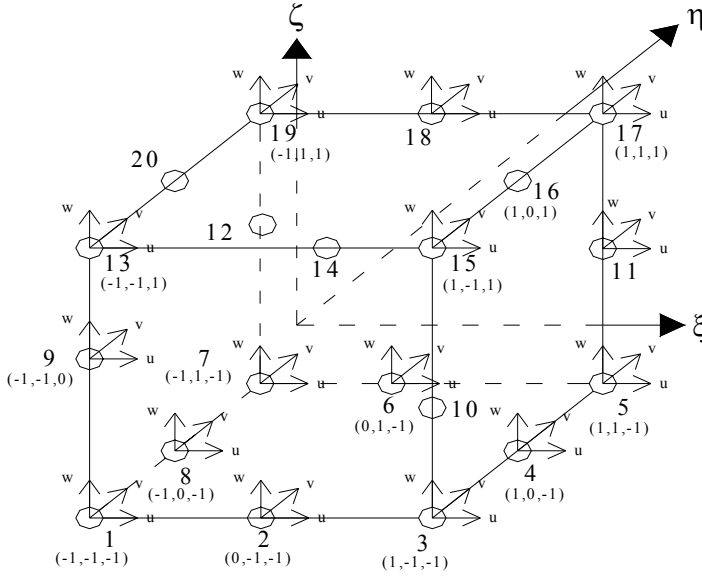


Şekil 1. Üç boyutlu sekiz düğüm noktalı sonlu eleman.

Üç boyutlu sekiz düğüm noktalı sonlu elemanın biçim fonksiyonları,

$$N_i = 0.125(1 + \zeta\zeta_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i) \quad (2)$$

olarak verilmiştir [1-4].



Şekil 2. Üç boyutlu yirmi düğüm noktalı sonlu eleman.

Üç boyutlu yirmi düğüm noktalı elemanın biçim fonksiyonları köşe noktalarında,

$$N_i = 0.125(1 + \zeta\zeta_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i)(\zeta\zeta_i + \eta\eta_i + \xi\xi_i - 2)$$

ve orta noktalarında,

$$\zeta_i = 0, \quad N_i = 0.25(1 - \zeta^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i)$$

$$\eta_i = 0, \quad N_i = 0.25(1 + \zeta\zeta_i)(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)$$

$$\xi_i = 0, \quad N_i = 0.25(1 + \zeta\zeta_i)(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \quad (3)$$

olarak verilmiştir [1-4].

Elemanlarda U, V, W yer değiştirme bileşenleri düğüm noktası serbestlik derecesi olarak alınmıştır. Sonuç olarak düğüm noktası serbestlik derecesi 3, eleman serbestlik derecesi sırası ile sekiz düğüm noktalı eleman için 24, yirmi düğüm noktalı eleman için ise 60 olarak alınmaktadır. Sonlu eleman modelleri ince plaklara uygulandığında karşılaşılan kayma kilitlenmesi problemi nedeni ile eğilme ve kayma terimlerinden oluşan rijitlik matrisi aşağıda verildiği şekli ile iki ayrı kısımda elde edilmiştir.

$$[K_b]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_b]^T [D_b] [B_b] J |d\xi d\eta d\zeta$$

$$[K_s]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_s]^T [D_s] [B_s] J |d\xi d\eta d\zeta \quad (4)$$

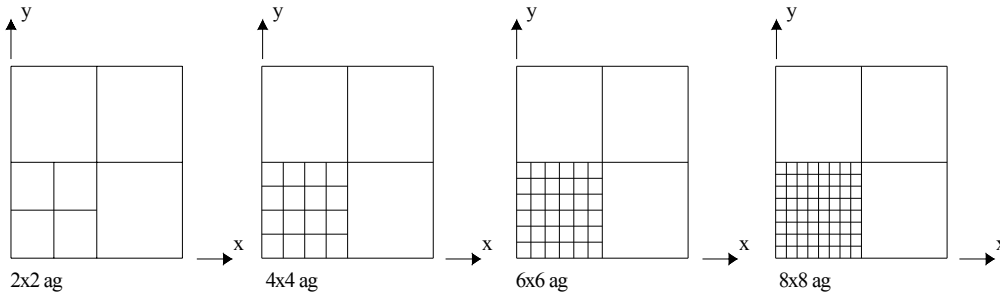
Burada  $[K_b]^e$  eğilme terimlerinden oluşan rijitlik matrisini,  $[K_s]^e$  ise kayma terimlerinden oluşan rijitlik matrisi terimlerini tanımlamaktadır.

### 3. SAYISAL ÇÖZÜMLER

Kalın plakların sayısal çözümleri için Fortran programlama dili kullanılarak, üç boyutlu elastisite çözümüne dayanan yukarıda esasları verilen sonlu eleman modelleri için bilgisayar programları oluşturulmuştur. Bölüm 2’de verilen esaslar çerçevesinde geliştirilen bilgisayar programının yakınsaklığını belirlemek amacı ile bazı örnekler alınmış ve her iki elemanla elde edilen sonuçlar analitik çözümler ve kaynaklarda verilen sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Değişen sayıda sonlu eleman ağlarının etkisi de dikkate alınarak farklı kalınlık oranları için elde edilen sonuçlardan hareketle iki sonlu elemanın birbirine göre yaklaşımı belirlenmeye çalışılmıştır.

#### Örnek 1: Düzgün yayılı yük etkisi altında dörtkenarı ankastre mesnetli kare plak

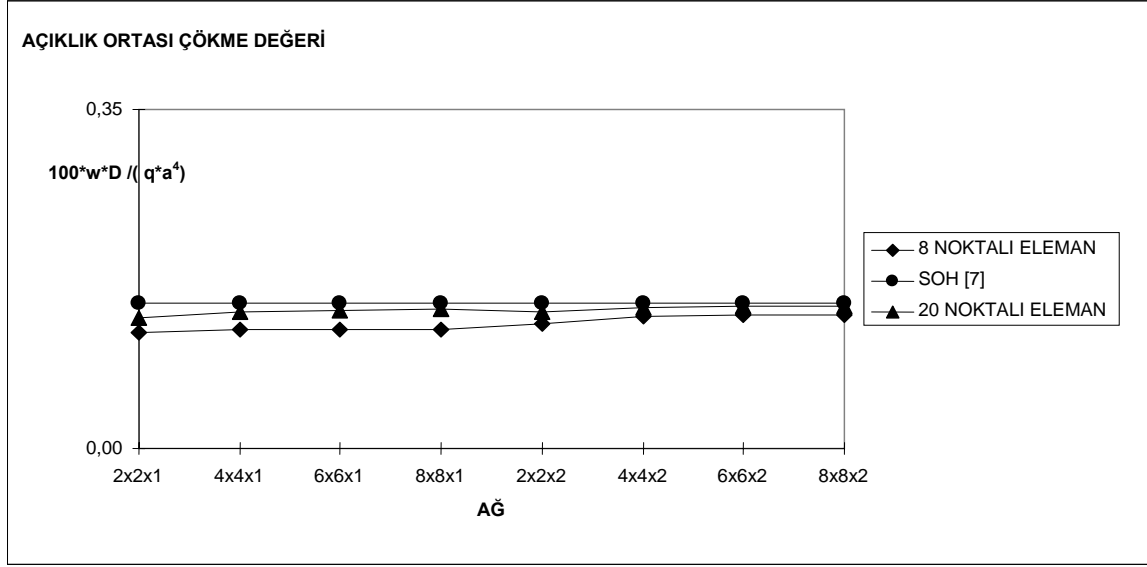
Geometrik büyüklükleri ve malzeme sabitleri  $E=10^6$  KN/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0.30$ ,  $a=8$  m,  $q=1$  KN/m<sup>2</sup> olan düzgün yayılı yük etkisi altında dörtkenarından ankastre mesnetli kare plak önerilen elemanlarla farklı kalınlık oranları için çözülmüştür. Üç boyutlu sekiz düğüm noktalı ve üç boyutlu yirmi düğüm noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde kalınlık doğrultusunda tek ve çift sıra eleman kullanılmıştır. Sistemin simetrik olması sebebiyle dörtte bir parça düşünülerek oluşturulan 2x2, 4x4, 6x6, 8x8’lik sonlu eleman ağları Şekil 3’de verilmiştir. Plak merkezindeki yer değiştirmeler ve moment değerleri Tablo 1 ve Tablo 2’de kaynaklardan alınan sonuçlarla birlikte ve SAP2000 çözümünden elde edilen sonuçlarla birlikte verilmiştir.



Şekil 3. Sonlu eleman ağları.

Tablo 1’den görüldüğü ve beklenildiği üzere üç boyutlu yirmi noktalı elemanın yakınsaması üç boyutlu sekiz noktalı elemanın yakınsamasından daha iyidir. Bu durum özellikle  $h/a$  oranı arttıkça daha belirgin bir hal almaktadır. Örneğin  $h/a = 0.01$  oranı için açıklık ortası çökme değeri, [7] numaralı çalışmadaki değere, üç boyutlu sekiz noktalı sonlu eleman kullanılarak oluşturulan 8x8x2’lik sonlu eleman ağıyla -%7.11 hata oranı ile yaklaşmıştır. Bu hata oranı üç boyutlu yirmi noktalı sonlu eleman kullanılarak oluşturulan 8x8x2’lik sonlu eleman ağında -%1.34’tür. Tablo 1 incelenirken üzerinde durulması gereken bir diğer nokta  $h/a$  oranının artmasıyla birlikte, kalınlık doğrultusunda, iki kat eleman kullanımının daha verimli hale gelmesi durumudur. Örneğin  $h/a=0.20$  oranı için yirmi noktalı eleman kullanılarak hesaplanan çökme değerleri incelenirse, 64 tane bir kat eleman kullanılarak ulaşılan çökme değerine, 2x2x2’lik sonlu eleman ağıyla 8 tane iki kat eleman kullanılarak ulaşıldığı görülür.

Tablo 2'deki açıklık ortası moment değerleri incelendiğinde genel olarak yirmi noktalı elemanın yaklaşımının çok daha iyi olduğu sonucuna varılabilir. Ayrıca sonuçların daha iyi yorumlanabilmesi açısından bazı h/a oranları için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimini veren grafikler oluşturulmuştur (Şekil 4-5). Daha önce de ifade edildiği gibi üç boyutlu yirmi noktalı elemanın yaklaşımının üç boyutlu sekiz noktalı elemanın yaklaşımından çok daha iyi olduğu görülmektedir (Şekil 4-5).



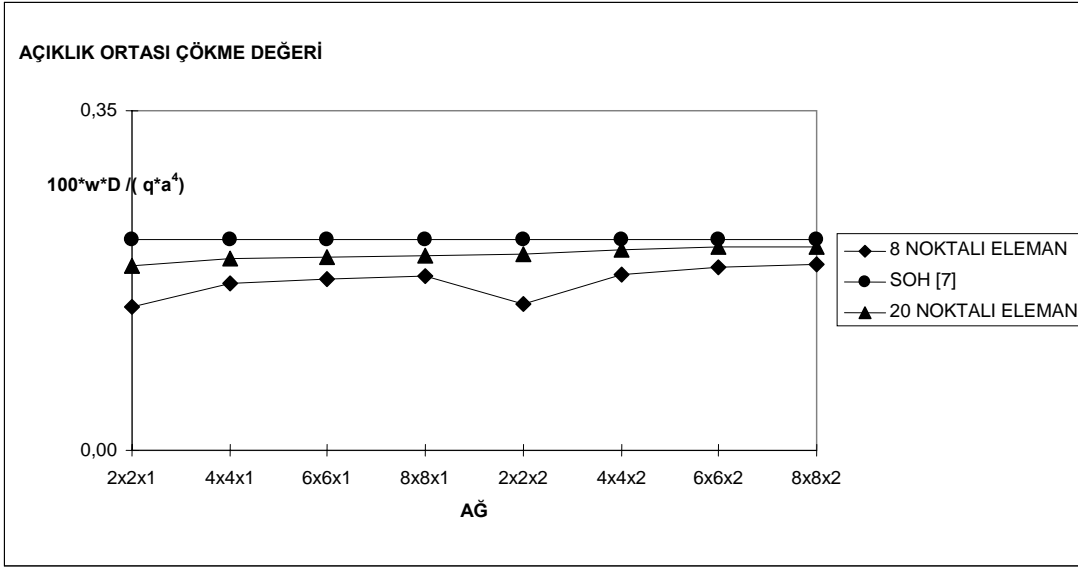
Şekil 4. Düzgün yayılı yük etkisi altında dörtkenarlı ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.10 oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi.

Tablo 1. Düzgün yayılı yük etkisi altında dörtkenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri (  $w \times 100D / (q a^4)$  ).

h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[7]	[13]	[6]	[14]	SAP2000 (8x8)
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2					
0.001	0,0992	0,1022	0,1028	0,103	0,1067	0,1146	0,1164	0,1173	0,0321	0,076	0,1165	0,1223	0,0329	0,0766	0,1178	0,1236	0,1265		0,1234	0,128	0,1279
0.005	0,0993	0,1022	0,1028	0,1031	0,1068	0,1146	0,1164	0,1173	0,0452	0,1164	0,1219	0,1232	0,0458	0,1187	0,1237	0,1246			0,1234		0,1279
0.01	0,0994	0,1024	0,103	0,1032	0,1069	0,1148	0,1166	0,1175	0,0684	0,1193	0,1223	0,1234	0,0694	0,1219	0,1241	0,1248	0,1265		0,1236	0,128	0,1279
0.05	0,1045	0,1075	0,108	0,1082	0,1122	0,1201	0,1218	0,1227	0,117	0,1254	0,1274	0,1285	0,1212	0,1285	0,1298	0,1304		0,1325	0,1298		0,1279
0.10	0,1199	0,1227	0,1231	0,1233	0,1282	0,1357	0,1374	0,1382	0,1355	0,1407	0,1428	0,1438	0,1412	0,1452	0,1465	0,1472	0,1499	0,1496	0,1482	0,152	0,1279
0.15	0,1014	0,1321	0,1403	0,1434	0,1044	0,1415	0,1525	0,157	0,1562	0,1645	0,1666	0,1677	0,1639	0,1714	0,173	0,1738					0,1755
0.20	0,148	0,1718	0,1772	0,1792	0,1514	0,1813	0,189	0,1921	0,1904	0,1971	0,1992	0,2002	0,2015	0,2074	0,2091	0,2099	0,2167	0,2135	0,2171	0,206	0,2125
0.25	0,2013	0,2196	0,2233	0,2247	0,2025	0,2261	0,232	0,2342	0,2319	0,2378	0,2399	0,2408	0,2484	0,2539	0,2557	0,2566				0,252	0,2599
0.30	0,2644	0,2783	0,2808	0,2817	0,2605	0,2829	0,2873	0,289	0,2811	0,2901	0,2925	0,2935	0,3056	0,311	0,3132	0,3142	0,3227				0,318
0.35	0,3402	0,3499	0,3515	0,352	0,3352	0,354	0,3574	0,3587	0,3437	0,3587	0,3612	0,3622	0,3762	0,3863	0,3888	0,3898	0,3951				0,3866

Tablo 2. Düzgün yayılı yük etkisi altında dörtkenarı ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası moment değerleri (  $M \times 100 / (q a^2)$  ).

h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YİRMİ NOKTALI ELEMAN								[13]	[14]	[8]	SAP2000 (8x8)
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2				
0.001	2,7777	2,5631	2,5374	2,5284	2,3295	2,523	2,5276	2,5283	1,0832	1,7225	2,2102	2,2598	0,8311	1,7316	2,2244	2,2731		2,27	2,2939	2,3258
0.005	2,7762	2,5626	2,5371	2,5281	2,3284	2,5227	2,5274	2,5282	1,2964	2,2335	2,2608	2,2668	1,0582	2,2541	2,28	2,281			2,3008	2,3258
0.01	2,7715	2,5614	2,5363	2,5281	2,3249	2,5219	2,5271	2,5284	1,6721	2,2527	2,2629	2,2679	1,471	2,2776	2,2826	2,2824		2,27	2,3014	2,3258
0.05	2,6572	2,5564	2,5529	2,5467	2,2395	2,524	2,5467	2,5496	2,3402	2,2857	2,2892	2,2931	2,2921	2,322	2,3166	2,3151	2,33		2,3108	2,3258
0.10	2,503	2,6026	2,598	2,5927	2,1277	2,5796	2,6011	2,6058	2,432	2,3597	2,3609	2,3642	2,4593	2,4214	2,4119	2,4091	2,436	2,36	2,3314	2,3258
0.15	1,5251	2,3171	2,4946	2,5613	1,2886	2,2755	2,4952	2,5785	2,4066	2,4608	2,4644	2,4668	2,5719	2,5633	2,5555	2,5521			2,3524	2,3628
0.20	1,8316	2,5078	2,6283	2,6717	1,5904	2,5029	2,6621	2,7193	2,593	2,6004	2,5994	2,6005	2,8278	2,7564	2,7454	2,7403	2,609	2,56	2,3702	2,3628
0.25	2,0389	2,6459	2,7399	2,7727	1,8245	2,6798	2,8107	2,8565	2,785	2,7651	2,761	2,7612	3,1084	2,9902	2,9773	2,971		2,67		2,3628
0.30	2,201	2,7674	2,8482	2,8761	2,0394	2,8481	2,9642	3,0044	3,0006	2,9578	2,9505	2,9498	3,4194	3,2659	3,2506	3,2434				2,3628
0.35	2,3465	2,8863	2,9604	2,9857	2,2626	3,028	3,1344	3,1713	3,2499	3,1847	3,1731	3,1712	3,7682	3,5884	3,5689	3,5608				2,3628

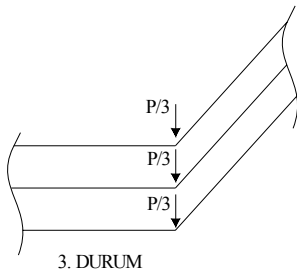


Şekil 5. Düzgün yayılı yük etkisi altında dörtkenarı ankastre mesnetli kare plakta  $h/a= 0.20$  oranı için açıklık ortası çökme değerlerinin sonlu eleman ağlarına bağlı değişimi.

### Örnek 2: Tekil kuvvet etkisi altında dört kenarı ankastre mesnetli kare plak

Çözümde,  $a = b = 8 \text{ m}$ ,  $E = 10^6 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $P = 1 \text{ kN}$  olarak alınmıştır.  $h/a$  oranı 0.35'e kadar çözümler yapılmış ve sonuçlar tablolar halinde gösterilmiştir. Tekil yükün plâğın orta noktasına etki ettiği düşünülmüştür.

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktali eleman kullanılarak yapılan çözümlerde kalınlık doğrultusunda tek ve çift sıra eleman kullanılmıştır. Sistemin simetrik olması özelliğinden faydalanılmış ve dörtte bir parça düşünülerek hesap yapılmıştır. Çözümde toplam sekiz tane birbirinden farklı sonlu eleman ağı kullanılmıştır. Kullanılan sonlu eleman ağlarının planları Şekil 3'te gösterildiği gibidir. Daha iyi sonuç alınabilmesi açısından uygulanan tekil kuvvet elemanın ilgili kesitindeki 3 noktaya Şekil 6'da görüldüğü gibi dağıtılmıştır.



Şekil 6. Tekil kuvvetin yükleme durumu

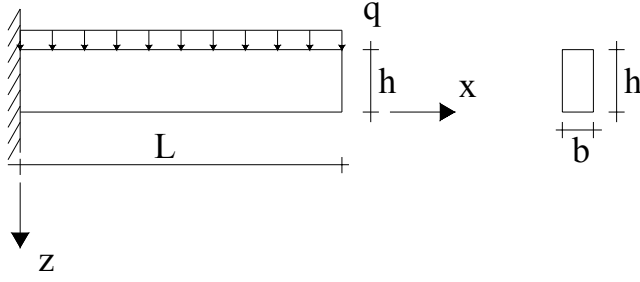
Şekil 6'da verilen durum için çözümler yapılmış ve bu çözümler Tablo 3'te verilmiştir. Tablo 3 incelendiğinde üç boyutlu yirmi noktali eleman kullanılarak yapılan çözümlerin daha iyi yakınsadığı sonucuna varılır. Örneğin Tablo 3'teki  $h/a=0.20$  oranı için, [6] çalışmasındaki değerler baz alınarak hesaplanan hata oranları,  $6 \times 6 \times 2$ 'lik sonlu eleman ağı kullanılarak yapılan çözümlerde, üç boyutlu sekiz noktali eleman için  $- \%23.04$  iken üç boyutlu yirmi noktali elemenda  $\%1.91$ 'dir.



Tablo 3. Tekil kuvvet etkisi altındaki dört kenar ankastre mesnetli kare plak için açıklık ortası çökme değerleri (  $wxEh^3/(Pa^2)$  )

h/a	ÜÇ BOYUTLU SEKİZ NOKTALI ELEMAN								ÜÇ BOYUTLU YIRMİ NOKTALI ELEMAN								[6]
	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	2x2x1	4x4x1	6x6x1	8x8x1	2x2x2	4x4x2	6x6x2	8x8x2	
0.001					0,0466	0,0545	0,0561	0,0531	0,0207	0,0397	0,0574	0,0597	0,0213	0,0399	0,0578	0,0600	0,0586
0.005					0,0467	0,0546	0,0562	0,0568	0,0264	0,0577	0,0599	0,0604	0,0268	0,0583	0,0603	0,0607	0,0586
0.01					0,0468	0,0548	0,0564	0,0571	0,0364	0,059	0,0602	0,0606	0,0367	0,0597	0,0607	0,0609	0,0588
0.05					0,0511	0,0606	0,063	0,0642	0,0593	0,0641	0,0652	0,0657	0,0605	0,065	0,0659	0,0663	0,0652
0.10					0,0644	0,0782	0,0829	0,0856	0,0725	0,0778	0,0797	0,0815	0,0742	0,0791	0,0822	0,0852	0,0849
0.15					0,0553	0,0809	0,0907	0,097	0,0885	0,0985	0,1051	0,1117	0,0907	0,1041	0,1139	0,1225	0,1173
0.20					0,0826	0,111	0,1249	0,1348	0,115	0,1313	0,1471	0,1612	0,1182	0,1448	0,1654	0,1837	0,1623
0.25					0,1133	0,1496	0,1701	0,1854	0,1471	0,1788	0,2073	0,232	0,1569	0,2028	0,2399	0,2729	0,2197
0.30					0,1488	0,1978	0,2275	0,25	0,186	0,2419	0,2879	0,3259	0,2071	0,2806	0,3408	0,394	
0.35					0,1922	0,2569	0,2981	0,329	0,2384	0,3228	0,3903	0,4445	0,2706	0,3807	0,4713	0,5509	

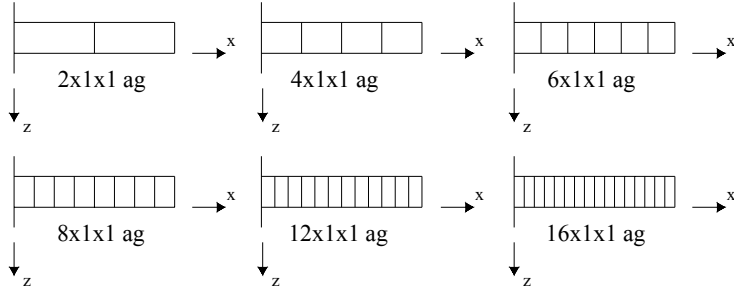
**Örnek 3:** Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş  
Geliştirilen sonlu elemanların genel olduğunun gösterilmesi amacı ile düzgün yayılı yük etkisi altında bir ankastre kiriş örneği çözülmüştür(Şekil 7).



**Şekil 7.** Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kiriş

Çözümde  $E = 1500 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $q = 1 \text{ kN/m}^2$ ,  $L = 10 \text{ m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$  ve  $b = 1 \text{ m}$  olarak alınmıştır.

Üç boyutlu sekiz ve yirmi noktalı eleman kullanılarak yapılan çözümlerde kalınlık doğrultusunda tek sıra eleman kullanılmıştır. Çözümler 2x1x1, 4x1x1, 6x1x1, 8x1x1, 12x1x1 ve 16x1x1 olmak üzere toplam altı tane birbirinden farklı sonlu eleman ağları ile yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman ağlarının yandan görünüşleri Şekil 8’de gösterildiği gibidir.



**Şekil 8.** Ankastre mesnetli kirişin çözümünde kullanılan sonlu eleman ağları

Çözüm sonunda bulunan maksimum çökme ve mesnet momenti değerleri Tablo 4 ve Tablo 5’te verilmiştir.

**Tablo 4.** Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin maksimum çökme değerleri (w(m))

Geliştirilen Sonlu Eleman	2x1x1	4x1x1	6x1x1	8x1x1	12x1x1	16x1x1	Kiriş Çözümü
8 NE	0,3863	0,7635	0.9501	1.0416	1.1203	1.1513	1.25
20 NE	1,1932	1.2518	1.2668	1.2720	1.2756	1.2800	

**Tablo Hata!** Belgede belirtilen stilde metne rastlanmadı.. Düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kirişin mesnet momenti değerleri (M(kNm/m))

Geliştirilen Sonlu Eleman	2x1x1	4x1x1	6x1x1	8x1x1	12x1x1	16x1x1	Kiriş Çözümü
8 NE	10.3577	26.7157	36.1597	41.2570	46.0725	48.1611	50
20 NE	45.2624	51.1655	51.8620	51.8618	51.7001	51.7909	

Üç boyutlu yirmi noktalı eleman kullanılarak oluşturulan 4x1x1'lik eleman ağı ile bile kiriş çözümüne epeyce yakın sonuçlar elde edilmiştir. Bu yakınlık üç boyutlu sekiz noktalı eleman kullanılarak oluşturulan 16x1x1'lik eleman ağıyla dahi sağlanamamıştır.

Tablo 4'te üç boyutlu yirmi noktalı elemanla elde edilen sonuçların üç boyutlu sekiz noktalı elemanla elde edilen sonuçlara göre çok daha iyi yakınsadığı gözlenmektedir.

#### 4. SONUÇLAR

Kalın plakların sayısal çözümlemesi için yer değiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı iki ayrı sonlu eleman modeli ele alınmıştır. Birinci eleman üç boyutlu sekiz düğüm noktalı, ikinci eleman ise üç boyutlu yirmi düğüm noktalı prizmatik sonlu elemanlar olup her ikisi de üç boyutlu elastisite teorisi hesap esaslarına dayanmaktadır. Elemanların etkinlik düzeyini belirlemek için değişik yükleme ve sınır koşulları altında farklı kalınlık oranları için plak örnekleri çözülmüş ve elemanların birbirine göre yaklaşımı incelenmiştir. Beklenildiği gibi, üç boyutlu yirmi noktalı elemanın yaklaşımının, üç boyutlu sekiz noktalı elemanın yaklaşımına göre çok daha iyi olduğu, çözümlerde az sayıda elemanla daha iyi sonuçlara ulaşıldığı gözlenmiştir. Eleman sayıları aynı olan tek ve çift sıralı eleman ağları karşılaştırıldığında, çift sıralı eleman ağı kullanılarak yapılan çözümün yakınsaklığının diğerine göre çok daha iyi olduğu görülmüştür. Ayrıca plak kalınlığının artmasıyla birlikte plak kalınlığı doğrultusunda çift kat eleman kullanılmasının daha avantajlı olduğu gözlenmiştir. Bu çalışmada kalın plakların çözümü için geliştirilen 24 ve 60 serbestlik dereceli üç boyutlu elemanların, ince plak uygulamaları ile ankastre mesnetli kiriş gibi genel problemlerde de mühendislik analizleri bakımından yeterli yakınsaklıkla sonuçlar verdiği belirlenmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Desai, C.S and J.F. Abel, "Introduction to the Finite Element Method; A Numerical Method for Engineering Analysis", Van Nostrand Reinhold Company, New York-1972.
- [2] Zienkiewicz, O.C, "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, London-1971.
- [3] Kardestuncer, H., "Finite Element Handbook", McGraw-Hill, New York-1978.
- [4] Zienkiewicz, O.C and R.L. Taylor, "The Finite Element Method", Volume 2, McGraw-Hill, London-2000.
- [5] Levinson, M. and D.W. Cooke, "Thick Rectangular Plates-I: The Generalized Navier Solution" International Journal of Mechanical Sciences 25 199-205, 1984.
- [6] Yuan, F. and R.E. Miller, "A Rectangular Finite Element for Moderately Thick Flat Plates" Computers and Structures 30(6) 1375-1387, 1988.
- [7] Soh, A., Cen, S., Long, Y., and Z. Long, "A New Twelve DOF Quadrilateral Element for Analysis of Thick and Thin Plates" Eur. J. Mech. A/Solids 20 299-326, 2001.
- [8] Özkul, T.A., and Ü. Türe, "The Transition From Thin Plates to Moderately Thick Plates by Using Finite Element Analysis and the Shear Locking Problem" Thin-Walled Structures 42 1405-1430, 2004.
- [9] Bleounar, L., and M. Guenfoud, "A New Rectangular Finite Element Based on the Strain Approach for Plate Bending" Thin-Walled Structures 43 47-63, 2005.
- [10] Kara, N., "Genel Biçimli Kabuklar İçin Üç Boyutlu Bir Sonlu Eleman", Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul-1997.
- [11] Ibrahimbegovic, A. and E.L. Wilson, "Thick Shell and Solid Finite Elements with Independent Rotation Fields" International Journal for Numerical Methods in Engineering 31 1393-1414, 1991.
- [12] Özakça, M., Hinton, E., and N.V.R. Rao, "Comparison of Three-Dimensional Solid Elements in the Analysis of Plates" Computers and Structures 42(6) 953-968, 1992.
- [13] Srinivas, S., A.K. Rao, "Flexure of Thick Rectangular Plates" Journal of Applied Mechanics 298-299, 1973.
- [14] Kant, T., Owen, D. R. J. and O.C. Zienkiewicz, "A Refined Higher-Order  $C^0$  Plate Bending Element" Computers and Structures 15(2) 177-183, 1982.

---

*İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi  
34469 Maslak/İstanbul  
e-mail: taksu@ins.itu.edu.tr  
\*Prof. Dr. Tülay Aksu Özkul*