SONLU VİSKOPLASTİSİTE ÜZERİNE DÜŞÜNCELER

Em.Prof.Dr. Ali Ünal Erdem
.Gazi Ü.,Müh.-Mim.Fak., Maltepe,06570 Ankara
alierdem@gazi.edu.tr

ÖZET

Sonlu Plastisite Teorisinde serbest enerji yoğunluğu genellikle iki parçalı olarak tanımlanmakta olup birinci kısım, deforme olmuş maddesel noktada depolanmış olan elastik enerji yoğunluğunu,ikinci kısım da dislokasyonlarda bloke edilmiş olan plastik enerji yoğunluğunu temsil etmektedir. İkinci kısım yalnızca saklı (dahili) değişkenlerin , birinci kısım ise gözlenebilen değişkenlerin fonksiyonu olarak ifade edilmektedir. Daha sonra serbest enerjinin maddesel türevi uygun tarzda hesaplanarak Calusius-Duhem eşitsizliğine yerleştirilip bilinen matematiksel işlemler yapılmaktadır. Bu çalışmada ise ,serbest enerji yoğunluğu fonksiyonu ayrıştırılmadan kullanılmakta ve aynen sürekli-ortam yaklaşımındaki format izlenmektedir.Ancak plastik deformasyon etkileri ,daha sonra bahsedeceğimiz Lee ayrışımıyla işlemlere dahil edilmekte, viskozite etkisi ise Kelvin-Voigt benzeşimi ile toplam deformasyon tansörünün maddesel türevi şeklinde ithal edilmektedir.Ayrıca genel formülasyon, gerilme-uzayı yerine deformasyon-uzayı üzerinden yapılmaktadır. Total deformasyon gradyanı

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} = (\mathbf{F}^{\mathbf{e}}\mathbf{F}^{\mathbf{p}})^{\mathbf{T}}(\mathbf{F}^{\mathbf{e}}\mathbf{F}^{\mathbf{p}}) = \mathbf{F}^{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}}\mathbf{C}^{\mathbf{e}}\mathbf{F}^{\mathbf{p}}$$

şeklinde Lee ayrıştırması tarzında dikkate alınmakta, Şek.1, daha sonraki işlemlerde ise plastik akma şartı, tutarlılık şartı ve evolüsyon denklemleri kullanılmaktadır. Bu noktada $\mathbf{F}^{\mathbf{e}}$ ve $\mathbf{F}^{\mathbf{p}}$ nin birer nokta fonksiyonu olduğunu ve gerçek deplasman gradyanlarını göstermediğini hatırlamak gerekir $[4]$, $[8]$, $[10]$.Sonuç olarak genel formülasyonla deformasyon uzayında hem serbest enerjinin ayrıştırılmaksızın kullanılmasının mümkün olduğu gösterilmiş ve hem de maddesel gerilme tansörü için bünye denklemi elde edilmiştir.

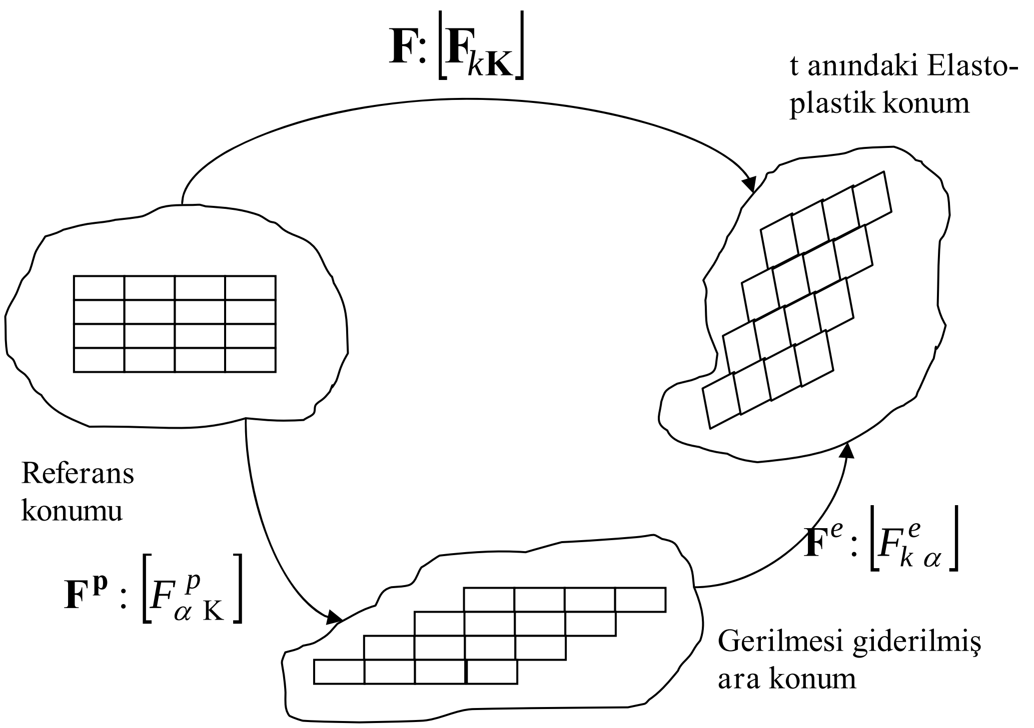
ABSTRACT

In finite plasticity, free energy is usually decomposed into two portions with the first part representing elastically stored energy, while the second part representing plastic energy which is blocked in the dislocations. The second part is a function of internal variables $[6]$ only ,while the first part is a function of observable variables. Material time derivative of the free energy density, $\dot{\psi}$, is then evaluated properly and then substituted into the Clausius-

Duhem inequality by usual operations. In this study we do not decompose the free energy ; instead we take the total deformation tensor **C** into general consideration, as in continuum formulation format. Plasticity is taken into account by Lee decomposition of the deformation gradient while vicosity is incorporated into the formulation as in Kelvin-Voigt materials. namely, we take

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} = (\mathbf{F}^{\mathbf{e}}\mathbf{F}^{\mathbf{p}})^{\mathbf{T}}(\mathbf{F}^{\mathbf{e}}\mathbf{F}^{\mathbf{p}}) = \mathbf{F}^{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}}\mathbf{C}^{\mathbf{e}}\mathbf{F}^{\mathbf{p}}$$

and employ yield condition and consistency relation along with the evolution equations. At this point it is worth to remember that $\mathbf{F}^{\mathbf{e}}$ and $\mathbf{F}^{\mathbf{p}}$ are not true deformation gradient, they are Paff forms $[4]$, $[8]$ $[10]$. As a result, we have not only shown that the free energy can be employed without decomposing it into two parts , but also we have obtained constitutive equation for the material stress tensor.



Şekil 1. Elastoplastik deformasyon geometrisi

1.GİRİŞ

Bir katı sürekli-ortamın Termo-mekanik denge denklemleri $[1],[2],[3],[4]$

$$\rho_0(\mathbf{X}) = J(\mathbf{X},t)\,\rho(\mathbf{X},t)\ ,\ J \equiv \det\mathbf{F}\ ,\ F_{iK} \equiv x_{i,K}(\mathbf{X},t)\ \ ,x_i = x_i\,(\mathbf{X},t)\ ,\ C_{KL} \equiv x_{k,K}\ \ x_{k,L} \quad (1)$$

$$\widetilde{T}_{iL}F_{jL} = \widetilde{T}_{jL}F_{iL} \tag{2}$$

$$\rho_o\,\dot{\varepsilon} = \rho_o r - Q_{L,L} + \widetilde{T}_{iL}\dot{F}_{iL} \tag{3}$$

$$\rho_o(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \frac{1}{\theta}Q_L\theta_{,L} - \widetilde{T}_{iL}\dot{F}_{iL} \le 0 \quad \Rightarrow - \rho_o(\dot{\psi} + \eta\,\dot{\theta}) + \frac{1}{2}S_{KL}\,\dot{C}_{KL} - \frac{1}{\theta}Q_K G_K \ge 0 \tag{4}$$

$$G_K \equiv \theta_{,K}\ , \quad Q_K = (\det\mathbf{F})F_{Ki}{}^{-1}\,q_i \quad , \; G_K = g_i\,x_{i,K}\ , \quad g_i = \theta_{,i} \tag{5}$$

Burada $\widetilde{\mathbf{T}}$ nominal gerilme tansörü,(birim deforme olmamış yüzeye gelen), $\widetilde{T}_{iB} \equiv F_{iL}\,S_{LB}$, $S_{LB} \equiv J\,X_{L,i}\,X_{B,j}\,T_{ij}$, T_{ij} Cauchy gerilme tansörünün bileşenleri, ve S_{KL} de ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü (maddesel gerilme tansörü) . Denklemlerdeki diğer harfler , bilinen standart sembolleri göstermektedir.Literatürde, serbest enerji fonksiyonunun , ψ , (termodinamik potansiyel), argüman listesi için muhtelif deformasyon ölçüleri kullanılmaktadır. $[1-10]$.

2. FORMÜLASYON

Muhtelif modellerde, serbest eneji fonksiyonu iki kısma ayrılmaktadır. Birinci kısım yalnız gözlenebilen değişkenlere, ikinci kısım da gözlenemiyen (saklı) değişkenlere bağlı olmaktadır.Sonlu deformasyonların gösterdiği kompleks yapı nedeniyle elasto-viskoplastisite üzerindeki modellerin çoğu sonsuz-küçük deformasyonlara göre formüle edilmektedir ki, tabiatiyle sonlu deformasyonlara göre nisbeten daha açık bir yapı ve formülasyon özelliği taşımaktadırlar. Burada hem viskoz etkileri ve hem de elastoplastik etkileşimleri birlikte dikkate almak üzere birim kütle başına serbest enerji yoğunluk fonksiyonunu

$$\psi = \psi(\mathbf{C},\, \dot{\mathbf{C}},\, \boldsymbol{\theta},\, \mathbf{G},\, \underline{\xi}), \tag{6}$$

Şeklinde alalım. Ortam homojen kabul edilerek $\mathbf{X}$ maddesel konuma olan bağlılık kaldırılmıştır. Burada $\mathbf{C}$ toplam deformasyon tansörü, $\dot{\mathbf{C}}$ nin maddesel türevi olup böylece viskoz etkileri, Kelvin-Voigt benzerinde gözönüne almış bulşunuyoruz. Elasto-plastik etkileri de, toplam deformasyon gradyanını Lee ayrıştırmasına tabi tutarak temsil etmiş oluyoruz,[7],[8]. :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F^e F^p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} \equiv \mathbf{F^T F} = \mathbf{F^{p^T} C^e F^p}\,, \quad \mathbf{C^e} \equiv \mathbf{F^{e^T} F^e}. \tag{7}$$

Burada $\underline{\xi}$ sütun vektörü, bileşenleriyle saklı değişkenleri temsil etmektedir. Daha açık yazarsak,

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_{\mu}} \dot{\xi}_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa} d\kappa + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{KL}} d\alpha_{KL} + \frac{\partial \varphi}{\partial S^{p}_{KL}} dS^{p}_{KL} \tag{8}$$

Şeklinde katkıda bulunmakta olup burada

$$\varphi = \varphi(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \underline{\xi}) \tag{9}$$

fonksiyonu, deformasyon uzayında plastik-akma fonksiyonunu göstermektedir. Gerilme uzayı ve deformasyon uzayı arasındaki tercih sebepleri [9], ve [10] numaralı kaynaklarda ayrıntılariyle açıklanmış olup deformasyon uzayının tercihli yapısı, bizim sürekli-ortam formülasyon formatı bakımından da kolaylıklar getirmektedir.(8) denklemindeki yeni değişkenler sırasiyle
$\kappa \equiv$ izotrop sertleşme $\boldsymbol{\alpha} \equiv$ kinematik sertleşme tansörü-deformasyon uzayında elastik bölgenin merkezi), and $\mathbf{S^p} \equiv$ 1-B durumda hipotetik lineer elastik gerilme ile elastoplastik gerilme arasındaki fark; bu büyüklük saklı değişken anlamında kullanılıp, İlyushin hipotezine göre zamansal değişimi aşağıdaki gibi normalite şartı ile verilmektedir: Bu genelleştirme,1-B plastisite eğrisi baz alınarak genelleştirilmiştir [10].
Şimdi ψ nin maddesel türevini uygun şekilde değerlendirip $(4)_2$ ile verilen Clausius-Duhem eşitsizliğinde (entropi eşitsizliği ile enerji denkleminin birleştirilmiş hali) yerine koyalım

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(S_{KL} - 2\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial C_{KL}})\dot{C}_{KL} - \rho_o(\eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta})\dot{\theta} - \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \dot{C}_{KL}} \ddot{C}_{KL} - \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial G_K} \dot{G}_K \\ &\quad - \frac{1}{\theta} Q_K G_K + \sum_{\mu} - \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\mu}} \dot{\xi}_{\mu} \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\dot{C}_{KL} = F^{p}_{\alpha K} F^{p}_{\beta L} \dot{C}^{e}_{\alpha\beta} + 2 F^{p}_{\beta L} C^{e}_{\alpha\beta} \dot{F}^{p}_{\alpha K}$$

Bu eşitisizlikte ψ ; $\dot{\theta}$, $\dot{\mathbf{G}}$, ve $\ddot{\mathbf{C}}$ değişkenlerine bağlı olmadığından, ve bu değişkenler de herhangi bir termodinamik proseste keyfi olarak değiştirilebileceğinden, eşitsizliğin yönünün bozulmaması için

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \ \frac{\partial \psi}{\partial G_K} = 0 \ , \ \frac{\partial \psi}{\partial \dot{C}_{KL}} = 0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow \psi = \psi(\mathbf{C}, \theta, \underline{\xi}) . \tag{12}$$

Bu durumda eşitsizlik , (12) ile verilen liste ile

$$\frac{1}{2}(2\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial C_{KL}} - S_{KL})\dot{C}_{KL} + \frac{1}{\theta} Q_K G_K + \sum_{\mu} \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\mu}} \dot{\xi}_{\mu} \leq 0 \tag{13}$$

şekline girmiş olur. Dengeli (tersinir) ve tersinmez gerilmeleri aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$S^e{}_{KL} \equiv S_{KL}(\mathbf{C},\mathbf{0},\theta,\mathbf{0},\mathbf{0}) = 2\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial C_{KL}} \Big|_o \tag{14}$$

Yazı kolaylığı olsun diye $(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \underline{\boldsymbol{\xi}})$) liste sırası muhafaza edilmektedir.

$$S^d{}_{KL} \equiv S_{KL} - 2\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial C_{KL}} = S^d{}_{KL}(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\theta,\mathbf{G},\underline{\boldsymbol{\xi}}) \tag{15}$$

$$S^d{}_{KL}(\mathbf{C},\mathbf{0},\theta,\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0, \tag{16}$$

Bu arada (14) ve (15) ‘i dikkate alarak

$$\alpha \equiv -S^d{}_{KL}\,\dot{C}_{KL} + \frac{1}{\theta} Q_L G_L + \sum_\mu p_\mu\, \dot{\xi}_\mu \le 0 \tag{17}$$

$$p_\mu \equiv \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \xi_\mu} \tag{18}$$

Bu şekilde tanımlanan büyüklük, $\underline{\xi}$ saklı değişkenlerine tekabül eden genelleştirilmiş termodinamik kuvvetleri göstermektedir [6].

Bu eşitsizlik, herhangi bir viskoplastik ortamda sağlanması gereken bir kısıtlamadır.Bu noktaya biraz sonra tekrar döneceğiz. (17) eşitsizliğindeki son terim
sertleşme parametreleri ve hipotetik gerilme açısından

$$\sum_\mu \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \xi_\mu} \dot{\xi}_\mu \equiv \rho_o \left(\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\psi}{\partial \alpha_{KL}} \dot{\alpha}_{KL} + \frac{\partial \psi}{\partial S^d{}_{KL}} \dot{S}^d{}_{KL} \right) \tag{19}$$

anlamını taşımaktadır.

Şimdi de plastik-akma yüzeyi için tutarlılık şarttını kullanalım ve akma fonksiyonunun argümanlarını (12) de kalanlar kadar alalım; yani

$$\varphi = \varphi(\mathbf{C},\ \theta, \underline{\boldsymbol{\xi}}) \Rightarrow d\varphi = 0 \quad , \ \text{v}eya \quad \dot{\varphi} = 0. \tag{20}$$

Buradan,

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{KL}} \dot{\alpha}_{KL} + \frac{\partial \varphi}{\partial S^p{}_{KL}} \dot{S}^p{}_{KL} = 0 \tag{21}$$

Yukarıdaki maddesel türevleri aşağıdaki evolüsyon denklemleri ile değerlendirirsek [10],yani

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= \mathbf{N}(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\theta,\mathbf{G},\kappa,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{S}^\mathbf{p}):\dot{\mathbf{S}}^\mathbf{p} \\ \dot{\alpha} &= \mathbf{L}(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\theta,\mathbf{G},\kappa,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{S}^\mathbf{p}):\dot{\mathbf{S}}^\mathbf{p} \\ \dot{S}^p{}_{KL} &= \dot{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{KL}} \end{aligned} \tag{22}$$

İfadelerini yerlerine koyarsak, $\dot{\eta}$ ile göstereceğimiz viskoplastisite çarpanı için

$$\dot{\eta} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C_{KL}}\dot{C}_{KL} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)$$
$$D \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial C_{KL}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial S^p{}_{KL}} + N_{KL}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa} + L_{MNKL}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_{MN}}\right) \tag{23}$$

Yukarıdaki (22) ve (23) ‘den de

$$\dot{S}^p{}_{KL} = \frac{1}{D}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{KL}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C_{MN}}\dot{C}_{MN} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\dot{\theta}\right) \tag{24}$$

Şimdi (19) ‘u (17) de yerine koyalım.) (22) ile birlikte bu bize

$$\frac{1}{2}S^d{}_{KL}\,\dot{C}_{KL} - \rho_o\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}N_{KL} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_{MN}}L_{MNKL} + \frac{\partial\psi}{\partial S^p{}_{KL}}\right)\dot{S}^p{}_{KL} - \frac{Q_K}{\theta}G_K \geq 0. \tag{25}$$
$$S^d{}_{KL} = S^d{}_{KL}(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\theta,\mathbf{G},\underline{\boldsymbol{\xi}}) \tag{26}$$

(25)’deki ilk dört terim viskoplastik dissipasyonu, son terim ise ısı iletiminden dolayı thermal dissipasyonu göstermektedir.

Burada **N** ve **L** ; $\mathbf{C}$, $\dot{\mathbf{C}}$, θ, $\mathbf{G}$, κ, $\boldsymbol{\alpha}$, ve $\mathbf{S^p}$ değişkenlerine bağlı olan tansör-değerli pozitif fonksiyonlardır. Uygulamada bu **N** ve **L** fonksiyonları genellikle basit ifadelerle temsil edilebilirler. Bu formlara burada temas etmiyeceğiz [10] .Şimdi (25) entropi eşitsizliğine geri dönelim. (25) ‘ deki $\dot{S}^p{}_{KL}$ (24) ‘ün sağ tarafı ile beslersek,

$$\left[\frac{1}{2}S^d{}_{AB} - \frac{\rho_o}{D}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{KL}}\rho_{KL}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{AB}}\right]\dot{C}_{AB} - \frac{\rho_o}{D}\frac{\partial\varphi}{\partial C_{KL}}\rho_{KL}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\dot{\theta} - G_K\frac{Q_K}{\theta} \geq 0 \tag{27}$$

Burada D ve ρ_{KL} ifadelerini yeniden yazarsak bazı benzerlikleri tefrik edebiliriz:

$$\rho_{KL} \equiv \frac{\partial\psi(\mathbf{C},\theta,\underline{\boldsymbol{\xi}})}{\partial\kappa}N_{KL}(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\theta,\mathbf{G},\underline{\boldsymbol{\xi}}) + \frac{\partial\psi(\mathbf{C},\theta,\underline{\boldsymbol{\xi}})}{\partial\alpha_{MN}}L_{MNKL}(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\theta,\mathbf{G},\underline{\boldsymbol{\xi}}) + \frac{\partial\psi}{\partial S^p{}_{KL}}. \tag{28}$$

$$D \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial C_{KL}}\left(N_{KL}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa} + L_{MNKL}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_{MN}} + \frac{\partial\varphi}{\partial S^p{}_{KL}}\right). \tag{29}$$

Katsayı fonksiyonlarının argümanlarını açıkça göstermek suretiyle (27) eşitsizliği şöyle yazılabilir:

Ayrıca bu noktada ψ ve φ nin argümanlarını hatırlamakta yararar olabilir:

$$\psi = \psi(\mathbf{C}, \theta, \underline{\xi}) \quad , \quad \varphi = \varphi(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \underline{\xi}) . \tag{30}$$

Kalan eşitsizlik de

$$\frac{1}{2}\left[S^{d}{}_{AB} - \frac{2\rho_o}{D} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{KL}} \rho_{KL} \right] \dot{C}_{AB} - \rho_o \left(\frac{1}{D} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \rho_{KL} \right) \dot{\theta} - G_A \frac{Q_A}{\theta} \geq 0 . \tag{31}$$

Entropi kısıtlaması şimdi söyle yazaılabilir:

$$- S^{vp}{}_{AB} \dot{C}_{AB} + \rho_o K(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \xi) + G_A \frac{Q_A}{\theta} \leq 0 \tag{32}$$

Burada

$$S^{vp}{}_{AB} \equiv \frac{1}{2}\left[S^{d}{}_{AB} - \frac{2\rho_o}{D} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{KL}} \rho_{KL} \right] , \qquad K \equiv \frac{1}{D} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \rho_{KL} \tag{33}$$

Bu eşitsizlik, (17) nin yeni bir ifadesidir.
Burada $\mathbf{S}^{\mathbf{d}}$,(33) ile tanımlandığı gibi genel dissipatif gerilmedir ve $\mathbf{S}^{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^{\mathbf{d}}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \underline{\xi})$ şeklinde bir argüman listesi vardır.Bu gerilme bir kere elde edildikten sonra , total gerilme (15) ve (33) ‘den bulunabilir,

$$S_{AB} = S^{d}{}_{AB} + 2\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial C_{AB}} = 2\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial C_{AB}} + S^{vp}{}_{AB} + 2 \frac{\rho_o}{D} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{KL}} \rho_{KL} \frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} , \tag{34}$$

yeter ki serbest enerji ve akma fonksiyonu uygun bir şekilde seçilmiş olsun. Bu açıdan deneysel sonuçların incelenmesi ve bunlara uygun matematiksel modellerin geliştirilmesi plastisite toplumunda önemli bir yer kaplamaktadır [10]. İmalatçı firmaların sorunları da üniversitelerdeki deneysel çalışmalara planlı-tasarımlı çalışmalar olarak intikal etmektedir.. [10]: p.12-13. Şimdi (33) ifadesine bakarak $S^{d}{}_{KL}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \xi)$ veya $S^{vp}{}_{KL}(..)$ için uygun bir bünye denkleminin bulunması gerekir.

3. DİSSİPASYON FONKSİYONU

(31) eşitsizliğini şu şekilde yazalım:

$$F \equiv \frac{1}{2} S^{vp}{}_{AB} (\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \underline{\xi}) \dot{C}_{AB} - \rho_o K(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \xi) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} Q_A(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \theta, \mathbf{G}, \underline{\xi}) \underline{G_A} \geq 0 . \tag{35}$$

Termodinamik proses tersinir, yani dengeli olsaydı, yani $\dot{\mathbf{C}}$, $\dot{\theta}$, $\mathbf{G}$, ve $\underline{\xi}$ büyüklükleri idantik olarak sıfır olsalardı, bu takdirde F dissipasyon fonksiyonunun minimum olması için gerek şartlar,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial G_K}\right)_{E\equiv(\mathbf{G}=\mathbf{0},\dot{\mathbf{C}}=\mathbf{0},\xi=\mathbf{0})} = \mathbf{0} \quad , \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}}\right)_E = 0 \quad \text{and} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{C}_{KL}}\right)_E = \mathbf{0} \quad . \tag{36}$$

Türevleri alıp gösterilen denge hallerinde değerlendirilirse ,sırasıyla

$$Q_K(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\boldsymbol{\theta},\mathbf{G},\xi)_E = 0 \ , \ K(\mathbf{C},\mathbf{0},\theta,\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0 \quad , \tag{37}$$

ve

$$\Rightarrow S^{vp}{}_{KL} = S^{vp}{}_{KL}(\mathbf{C},\mathbf{0},\theta,\mathbf{0},\mathbf{0}) = (S^{vp}{}_{KL})_E \tag{38}$$

ifadelerini elde ederiz.

Minimum yeter şartının gerçekleşmesi için de F fonksiyonunun yukarıdaki argümanlara göre oluşturulan Hessian matrisinin positif semi-definit olması yeterlidir. Buna göre aşağıdaki iki türev denge halinde

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial G_K \partial G_L}\right)_E = \frac{2}{\theta}\frac{\partial Q_K}{\partial G_L} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{C}_{KL}\partial \dot{C}_{MN}}\Big|_E = -\frac{2}{\theta}\frac{\partial S^{vp}{}_{MN}}{\partial \dot{C}_{KL}} \tag{39}$$

den, sırasıyla

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial G_K \partial G_L}\right)_E b_K b_L = \frac{2}{\theta}\left(\frac{\partial Q_K}{\partial G_L}\right)_E b_K b_L \leq 0 \tag{40}$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{C}_{KL}\partial \dot{C}_{MN}}\right)_E b_M b_K e_N e_L = -2\left(\frac{\partial S^{vp}{}_{MN}}{\partial \dot{C}_{KL}}\right) b_M b_K e_N e_L \leq 0, \tag{41}$$

(**b** ve **e** keyfi birer vektör olmak üzere.)

ifadelerini elde ederiz. Buradan çıkarılan sonuç (1) **G** sıcaklık gradyanı ve $\dot{\mathbf{C}}$ deformasyon hızı, ikisi de sıfır ise ısı iletimi ve dissipatif gerilme sıfır olacaktır.Bu da elastoplastik deformasyonun yalnız başına ve deformasyon gradyanının değişim hızı yalnız başına ısı iletimi oluşturmamaktadır. Buna göre

$$Q_A(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\theta,\mathbf{G},\xi) = -K_{AB}(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\boldsymbol{\theta},\mathbf{G},\xi)\,G_B \tag{42}$$

Yazabiliriz. Bunun yanında

$$(\frac{\partial Q_A}{\partial G_B})(\mathbf{C},\mathbf{0},\theta,\mathbf{0},\mathbf{0})\; b_A\, b_B \le 0 \;, \qquad \frac{\partial S^{vp}{}_{AB}}{\partial C_{KL}}(\mathbf{C},\mathbf{0},\theta,\mathbf{0},\mathbf{0})\; b_A\, b_K\, e_B\, e_L \ge 0 \;, \tag{43}$$

($(\partial Q_A / \partial G_B)_E$ nın negatif semi-definit; $(\partial S^{vp}{}_{AB} / \partial C_{KL})_E$ nun ise pozitif semi-definit olmaları gerektiği ortaya çıkmaktadır. Termodinamik mülahazaları F 'nin kalan diğer değişkenlerine göre türevlerini de dikkate alarak genişletmek mümkündür.

4. TOPLAM GERİLME

Bir yaklaşım tarzı, $S^{vp}{}_{AB}(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\theta,\mathbf{G},\boldsymbol{\xi})$ fonksiyonunu $(\dot{\mathbf{C}},\mathbf{G},\boldsymbol{\xi}) = (0,0,0)$ ile gösterilen denge konumu civarında Taylor serisi ile temsil etmektir. Sadece lineer terimleri alırsak

$$S^{vp}{}_{AB} = J_{ABKL}\,\dot{C}_{KL} + L_{ABK} G_K + M_{AB\alpha}\,\xi_\alpha \tag{44}$$

$$J_{ABKL} = J_{BAKL} = J_{ABLK} \;\;,\;\; L_{ABK} = L_{BAK} \;\;,\;\; M_{AB\alpha} = M_{BA\alpha} \tag{45}$$

olmak üzere. Böylece toplam gerilme tansörü maddesel koordinatlarda

$$S_{AB} = S^d{}_{AB} + 2\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial C_{AB}} = 2\rho_o \frac{\partial \psi}{\partial C_{AB}} + S^{vp}{}_{AB} + 2\frac{\rho_o}{D}\frac{\partial \varphi}{\partial C_{KL}}\rho_{KL}\frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}}$$

Şeklinde ifade edilmiş olur.

5. SONUÇ

Aşağıda $\mathbf{C}$ ve $\dot{\mathbf{C}}$ nin elastik ve plastik deformasyon gradyanları cinsinden açık ifadelerini (34) denkleminin sağ tarafındaki türevlerde kullanmak suretiyle , yani

$$\mathbf{C} = \mathbf{F^p}^{\mathbf{T}}.\mathbf{C^e}.\mathbf{F^p} \;\;, C_{KL} = F^{p^T}{}_{K\alpha}\, C^e{}_{\alpha\beta}\, F^p{}_{\beta L} \tag{46}$$

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F^p}^{\mathbf{T}}\,\dot{\mathbf{C}}^{\mathbf{e}}\,\mathbf{F^p} + (\mathbf{F^e}\dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{p}})^{\mathbf{T}}\,\mathbf{F^e}\,\mathbf{F^p} + (\mathbf{F^p}^{\mathbf{T}}\mathbf{F^e}^{\mathbf{T}})(\mathbf{F^e}\dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{p}}) \tag{47}$$

$$\dot{C}_{KL} = F^p{}_{\alpha K}\, F^p{}_{\beta L}\, \dot{C}^e{}_{\alpha\beta} + 2F^p{}_{\beta L}\, C^e{}_{\alpha\beta}\, \dot{F}^p{}_{\alpha K} \tag{48}$$

ifadelerini dikkate almak suretiyle maddesel gerilme tansörüne hem elastoplastik ve hem de viskoz etkileşimden gelen katkıları dahil edebiliyoruz. Buna göre $S^{vp}{}_{AB}$ ((44) den veya Taylor-serisi temsilinde bir yüksek mertebeden terimlerini de ihtiva etmesi halinde) (48) 'in sağ tarafı ile ayrıntılı bir katkı sağladığı görülebilir ve bir kere $S^{vp}{}_{AB}$ tayin edildikten sonra S_{KL} toplam gerilme tansörü de (34) ' ten elde edilebilir.

Böylece serbest enerji fonksiyonunu ayrıştırmadan da benzer neticeleri elde edebilmekte olduğumuzu görmekteyiz.

Ancak bir nokta var, o da şu: Ortamın elastoplastik bir yapıda olduğunu düşünseydik, Clausius-Duhem eşitsizliğinde $\dot{\mathbf{C}}$ nın katsayısını sıfır alarak gerilmeyi tayin etme yanılgısına

düşebilirdik. Bu da yanlış olurdu ; zira (48) numaralı ifadeden görüyoruz ki $\dot{\mathbf{C}}^e$ büyüklüğünü keyfi olarak değiştirebileceğimizi farzetsek bile (48) in ikinci terimindeki $\dot{\mathbf{F}}^p$ plastik deformasyon gradyanı kontrolümüz dışında kalacak ve bu hakkımızı ortadan kaldıracaktı.Bu da şu demektir ki, viskoz özelliği olmayan elastoplastik ortamlar için serbest enerji yoğunluğunun ayrıştırılması zorunlu olabilir.Bir diğer alternatif, bu ayrışımı yapmadan (48) i C-D eşitsizliğine yerleştirip $\dot{\mathbf{C}}^e$ nın katsayısını sıfırlayabilirdik.Ancak burada da bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır.
Bu çalışmayı başlatırken amacımız, Helmholtz serbest enerji fonksiyonunu ayrıştırmadan hangi durumlarda nereye kadar gidebileceğimizi tesbit etmek ve gerilme bünye denklemi için uygun bir ifade bulmak idi. Bunu da verilen şartlar içinde gerçekleştirmiş olduk. (34) denkleminin ikinci tarafı, maddesel koordinatlarda toplam gerilme tansörünü vermektedir.

KAYNAKLAR

[1]. Eringen, A.C., “Mechanics of Continua” John Wiley-1967 second enlarged ed.: Krieger New York-1980.
[2]. Suhubi, E.S., “Sürekli Ortamlar Mekaniğine Giriş” İTÜ yayinlari-1965.
[3]. Batra, R.C., “Elements of Continuum Mechanics” AIAA ed.series- 2006.
[4]. Maugin,G.A.,”The Thermomechanics of Plasticity and Fracture” Cambridge-1992.
[5]. Jirasek, M and Bazant, Z.P.,”Inelastic Analysis of Structures” John Wiley-2001.
[6]. Lemaitre, J. And Chaboche,J.-L, “Mechanics of Solid Materials” Cambridge-2000.
[7]. Lee,E.H., “Elastoplastic Deformation At Finite Strain” ASME Trans.J.Appl.Mech. vol.36 pp.1-6, 1969.
[8]. Lee, E.H., R.L.Mallet,and T.B.Wertheimer, “Stress Analysis of Anisotropic Hardening in Finite- deformation Plasticity” ASME J.Appl.Mech. 50, 554.
[9]. Naghdi, P.M.. and Trapp, J.A., “The Significance of Formulating Plasticity Theory with Reference to Loading Surfaces in Strain Space” Int.J.Eng.Sci. vol.13 p. 785, 1975.
[10]. Khan, A.S. and Huang, S., “Continuum Theory of Plasticity” John Wiley-1995.