*XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 3-7 Eylül 2007, ISPARTA*

# ELASTİK ZEMİN ÜZERİNDE BULUNAN BİR TARAFI ANKASTRE MESNETLİ DİĞER TARAFI SERBEST HOMOJEN OLMAYAN KİRİŞİN SERBEST TİTREŞİMİ

**Abdullah AVEY ve Mehmet AVCAR**
Süleyman Demirel Üniversitesi, İnşaat Mühendisligi Bölümü, Isparta
asofiyev@mmf.sdu.edu.tr

## ÖZET

Bu çalışmada elastik zeminin üzerinde bulunan bir tarafı ankastre diğer tarafı serbest homojen olmayan kirişin serbest titreşim problemi incelenmiştir.

Önce, malzemenin yoğunluğu sabit, elastisite modülünün kalınlık koordinatına bağlı bileşeni sürekli ve uzunluk koordinatına bağlı bileşeni rastgele fonksiyonlar şeklinde seçilerek kirişin temel bağıntı ve titreşim denklemleri çıkarılmıştır. Sonra çökme fonksiyonları polinom şeklinde seçilerek titreşim frekansı için 3 değişik ifade elde edilmiştir.

Sayısal hesaplarda, Monte Carlo yöntemi uygulanarak elastisite modülünün uzunluk bileşenine rastgele değerler verilerek doğal titreşim frekansı için bulunan her üç ifadede kalınlık koordinatına göre homojen durumda (veya homojen olmayan durumda) serbest titreşim frekansı değerlerinin deterministik ve eşit olduğu saptanmıştır.

Kalınlık koordinatına göre homojen olmamanın serbest titreşim frekansına etkisi homojen duruma kıyasla önemli olduğu görülmüştür. Elastik zemin etkisi dikkate alındığında doğal frekansın değerleri zemin etkisinin dikkate alınmadığı durumlarla kıyaslandığında artmakta veyatak katsayısı değeri artığında bu etki daha da büyümekte olduğu görülmüştür.

Literatürdeki sonuçlarla karsılaştırma yapılarak sonuçların doğruluğu saptanmıştır.

**Anahtar Kelimeler**: Elastik Zemin, kiriş, titreşim, sürekli ve rastgele homojen olmama

## ABSTRACT

Free vibrations of non-uniform beams with one end clamped the other end simply supported on an elastic foundation is investigated in this study.

Firstly, assuming density of the material as constant and elasticity modulus of the beams are assumed to vary random according to the longitudinal direction and continuously according to the thickness direction. Then, choosing the displacement functions as polynomials three different expressions for vibration frequency are obtained.

In numerical computations, applying Monte Carlo method and taking random values for lengthiness constituent of elasticity modulus, it is seen that all three expressions of natural vibration frequency are deterministic and equal to the values for thickness constituent of elasticity modulus in homogeneous case (or non-homogeneous case).

It is observed that the effects of non-homogeneity to the natural vibration frequency compared by homogeneity are very important. Also it is seen that natural frequency values are increased by considering the elastic foundation effect and compared with the conditions except elastic foundation effect, and the effect is more increased by increasing the "bedding" coefficient values.

Comparisons were made with the values obtained in the literature to validate the results.

**Keywords**: Elastic foundation, beam, vibration, continues and random in-homogenous.

## 1. GİRİŞ

Kirişlerin teknolojide, özelliklede inşaat ve makine mühendisliği alanında, çeşitli fabrika, kren ve makinelerin zemine sabitlenmesinde, temel ve zemin mühendisliğinde ve demiryolu uygulamalarında geniş kullanım alanına sahip olması elastik zemin üzerindeki kirişlerin titreşim ve stabilite problemlerinin çözümüne özel bir önem kazandırmaktadır.

Malzemelerin dayanım özelliklerindeki gelişmeler, çağdaş teknolojide yapı elamanlarının boyut ve ağırlıklarını azaltmayı amaçlayan üretim çalışmalarında kullanılmaktadır. Bu nedenle hesaplama yöntemlerinde malzemenin gerçek davranışının dikkate alınması gerekliği, araştırmacıların dikkatini homojen olmayan malzemelerden yapılmış olan cisimlerin elastisite problemine yöneltmiştir. Malzemelerin homojen olmaması üretim tekniklerinden; yüzey ve termal cilalama yöntemleri, ısı ve radyasyon etkileri vs.den ileri gelmektedir. Bu etkiler malzeme özelliklerinin koordinatlarını rastgele, sürekli ve parçalı sürekli fonksiyon olarak noktadan noktaya değişmesine neden olmaktadır [1,2].

Değişik sınır koşullarında kirişlerin titreşimi ile ilgili çalışmaların genelinde kiriş sadece homojen malzeme, sürekli veya rastgele homojen olmayan malzeme türlerinden biri kullanılarak titreşim problemi çözülmüştür [3, 4].

Son yıllarda, fonksiyonel değişimli malzemelerin sıkça kullanılması ile farklı amaçlar için geliştirilen yapılar ile birlikte elastik zemine oturan yapı türlerinde de bir artış olmuştur. Elastik zemin üzerinde bulunan kirişlere ait çalışmalarda en çok kullanılan modellerden biri Winkler modelidir [5-9].

Elastik zemin üzerinde bulunan homojen olmayan malzemelerden oluşan kirişlerin kullanımı, titreşim analizlerinin yeniden gözden geçirilmesini zorunlu kılmaktadır.

Bu çalışmada elastik zeminin üzerinde bulunan homojen olmayan kirişin titreşim denklemleri çözülmüş ve Monte Carlo yöntemi uygulanarak malzeme özelliklerinin rastgele ve sürekli değişimlerinin titreşim karakteristiklerine etkileri incelenmiştir.

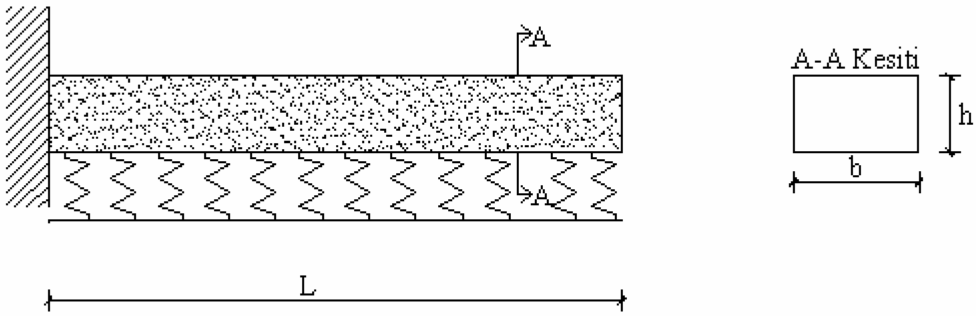
## 2. TEMEL BAĞINTI VE DENKLEMLER

Uzunluğu L, eni b, kalınlığı h ve en kesit alanı S olan homojen olmayan, elastik zemin üzerinde bulunan kiriş için kartezyen koordinat sistemi aşağıdaki gibi seçilmiştir: Koordinat orijin kirişin orta düzleminin merkezinde, x ekseni kirişin uzunluğu, y ekseni eni ve z ekseni kalınlık doğrultusunda yönelmektedir. Kirişin bir tarafı ankastre mesnetli diğer tarafı serbest mesnetli olsun (Şekil 1).

Kirişin elastisite modülü kalınlık ve uzunluk koordinatının, yoğunluğu ise sadece uzunluk koordinatının fonksiyonları olsun:

$$E(\xi,\eta) = E_1(\xi)E_2(\eta), \quad \rho = \rho(\xi), \quad \xi = x/L, \quad \eta = z/h \tag{1}$$

Burada $E_1(\xi)$ ve $\rho(\xi)$ sırasıyla, malzemenin elastisite modülü ve yoğunluğunun x koordinatına rastgele bağlı bileşenidir




**Şekil 1.** Elastik zemin üzerinde bulunan bir tarafı ankastre mesnetli diğer tarafı serbest kiriş

Elastisite modülünün $E_2(\eta)$ bileşeni kalınlık koordinatına göre sürekli değişmekte olup, aşağıdaki bağıntıyı sağlamaktadır [1,2]:

$$E_2(\eta) = 1 + \mu_2 f_2(\eta) \tag{2}$$

Burada $f_2(\eta)$, kalınlık koordinatına bağlı homojen olmama durumuna karşı gelen fonksiyon olup, türevleri ile integrallenebilendir ve $\mu_2$, kalınlık koordinatına göre elastisite modülü değişim katsayısı olup, $0 \le \mu_2 \le 0.9$.

(1) ve (2) ifadeleri kullanılarak eğilme momenti için bulunan ifadeler elastik zemin üzerinde bulunan kirişin titreşim denkleminde yerine yazılıp $x = \xi.L$ dönüşümü yapıldığında şu şekle dönüşür [2,10] :

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[E_1(\xi)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right]+C_0L^4w+\rho(\xi)L^4\overline{S}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{3}$$

Burada,

$$C_0=K_0/A_2\ ,\ \ \overline{S}=S/A_2\ ,\ \ A_2=bh^3\int_{-1/2}^{1/2}\eta^2\left[1+\mu_2f_2(\eta)\right]d\eta \tag{4}$$

olup t, zaman ve $K_0$, birim uzunlukta elastik zeminin sertlik katsayısıdır ve birimi (N/m$^2$)'dir.

## 3. TEMEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

(3) denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde aranır [2]:

$$w(\xi,t)=W(\xi)e^{i\omega t} \tag{5}$$

(5) ifadesi (3) denkleminde yerine yazıldığında kısmi türevli diferansiyel denklem şu şekle dönüşür:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[E_1(\xi)\frac{\partial^2 W(\xi)}{\partial\xi^2}\right]-L^4\left[k\rho(\xi)-C_0\right]W(\xi)=0 \tag{6}$$

Burada $k=\omega^2S/A_2$ olup, $W(\xi)$, genlik ve $\omega$, titreşim frekansıdır.

Kiriş $\xi=0$ olduğunda ankastre mesnetli ve $\xi=1$ olduğunda serbest olduğu için sınır koşulları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned}&\xi=0 \text{ olduğunda}\quad W(\xi)=0\ ,\quad \frac{\partial W(\xi)}{\partial\xi}=0\\ &\xi=1 \text{ olduğunda } E_1(\xi)A_2\frac{\partial^2W(\xi)}{\partial\xi^2}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\xi}\left[E_1(\xi)A_2\frac{\partial^2W(\xi)}{\partial\xi}\right]=0\,,\end{aligned} \tag{7}$$

(7) sınır koşullarını sağlayan $W(\xi)$ polinom fonksiyonu şu şekilde seçilmektedir:

$$W(\xi)=w_1(6\xi^2-4\xi^3+\xi^4) \tag{8}$$

Burada $w_1$, belirsiz bir katsayı ve parantez içerisindeki ifade üniform konsol kirişin sabit yükleme altındaki statik yer değiştirmesi ile orantılıdır [6].

Malzemenin yoğunluğu $\rho(\xi)$ sabit, elastisite modülü bileşeni $E_1(\xi)$ ise rastgele fonksiyon olup, aşağıdaki şekilde ifade edildiğini varsayalım:

$$\rho(\xi) = a_0 , \quad E_1(\xi) = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4 \tag{9}$$

(8) ve (9) ifadeleri (5) denkleminde yerine yazıldığında bazı işlemlerden sonra aşağıdaki cebrisel denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
&12(2b_2\xi^2 + 6b_3\xi^3 + 12b_4\xi^4 - 24(2b_2\xi + 6b_3\xi^2 + 12b_4\xi^3) + \\
&+ 12(2b_2 + 6b_3\xi + 12b_4\xi^2) + 48(b_1\xi + 2b_2\xi^2 + 3b_3\xi^3 + 4b_4\xi^4) - \\
&- 48(b_1 + 2b_2\xi + 3b_3\xi^2 + 4b_4\xi^3) + 24(b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4) - \\
&- 6L^4(ka_0\xi^2 - C_0\xi^2) + 4L^4(ka_0\xi^3 - C_0\xi^3) - L^4(ka_0\xi^4 - C_0\xi^4) = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

(10) denkleminde $\xi$ değişkenin mertebelerine göre katsayıların eşitliği yazıldığında aşağıdaki cebrisel denklemler elde edilir:

$$b_0 + b_2 - 2b_1 = 0 \tag{11}$$

$$-2b_2 + b_3 + b_1 = 0 \tag{12}$$

$$24(b_2 + b_4) - 48b_3 - L^4(ka_0 - C_0) = 0 \tag{13}$$

$$60b_3 - 120b_4 + L^4(ka_0 - C_0) = 0 \tag{14}$$

$$360b_4 - L^4(ka_0 - C_0) = 0 \tag{15}$$

(11)-(15) eşitliklerinde tek bilinmeyen k doğal frekans katsayısıdır. $b_i$ ve $a_0$ parametreleri bazı yardımcı koşulları sağladığında (11)-(15) denklemlerinin bağdaşabilir olması sonucuna varılır.

(11) ve (12) denklemlerinden verilen iki bağdaşabilir koşulundan şu ifadeler elde edilmektedir:

$$b_0 = 2b_1 - b_2 \ ; \ b_1 = 2b_2 - b_3 \tag{16}$$

(13)-(15) denklemlerinden $k$ için aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$k = \frac{24(b_2 + b_4) - 48b_3}{L^4 a_0} + \frac{C_0}{a_0}, \ k = \frac{-60b_3 + 120b_4}{L^4 a_0} + \frac{C_0}{a_0} \ , \ k = \frac{360}{L^4 a_0} b_4 + \frac{C_0}{a_0} \tag{17}$$

Bağdaşabilirlik gereksinimini sağlamak için, k için tüm ifadelerin birbirine eşit olması gerekmektedir. Malzeme yoğunluğu sabit olduğu için problem $b_i$ katsayılarının belirlenmesine indirgenir. $b_4$ açık belirtildiğinde elastik zemin üzerinde bulunan kirişin doğal frekans katsayısı $k$ için kesin ifade (17) olur. Bu durumda (17) denklemleri diğer $b_i$ parametrelerinin bulunmasını sağlar. Doğal frekans parametresi $k$ ' ın pozitif olması için $b_4$ ve $a_0$ aynı işarete sahip olmalıdır. $b_i$ (i=0, 1, 2, 3) parametreleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$b_3 = -4b_4; \qquad b_2 = 6b_4; \qquad b_1 = 16b_4; \qquad b_0 = 26b_4 \tag{18}$$

Sonuçta, $b_i$ ler (18) ifadeleri ile verildiğinde ve (9) malzeme özellikleri göz önüne alındığında temel mod şekli (8) fonksiyonu ile ifade edilir.

(17) ifadelerinden elastik zemin üzerinde bulunan ve elastisite modülünün kalınlık koordinatına bağlı bileşeni sürekli ve uzunluk koordinatına bağlı bileşeninin rastgele değişiminin derecelendirilmesine karşılık gelen kirişin doğal frekans parametresi aşağıdaki ifadelerin her hangi birinden buluna bilir:

$$\Omega_{Av1} = \sqrt{24 \times A_{20} \frac{b_2 + b_4 - 2b_3}{a_0} + K_{01}} \tag{19}$$

$$\Omega_{Av2} = \sqrt{60 \times A_{20} \frac{2b_4 - b_3}{a_0} + K_{01}} \tag{20}$$

$$\Omega_{Av3} = \sqrt{360 \times A_{20} b_4 / a_0 + K_{01}} \tag{21}$$

Burada aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$\Omega_{Avi} = \omega_i L^2 \sqrt{\frac{S}{I}}, \quad K_{01} = \frac{K_0 L^4}{a_0 I}, \ i = 1,2,3 \tag{22}$$

ve $\omega_i \,(i = 1,2,3)$ yukarıdaki özellikleri taşıyan doğal frekans için ifadelerdir.

Özel durumlarda;
1.) (19-21)'de $K_0 = 0$ ise Winkler zeminsiz doğal titreşim frekansı ifadeleri elde edilir.
2.) $K_0 = 0$ ve $\mu_2 = 0$, yani Winkler zemini etkisi dikkate alınmadığında ve elastisite modülü kalınlık koordinatına bağlı olmadığında doğal titreşim frekansı için şu ifade elde edilir [2]:

$$\Omega_E = \sqrt{360 \times \frac{b_4}{a_0}} \tag{23}$$

Burada $\Omega_E^2 = \omega_E^2 S L^4 / I$ tanımı geçerlidir.

## 4. SAYISAL HESAPLAR

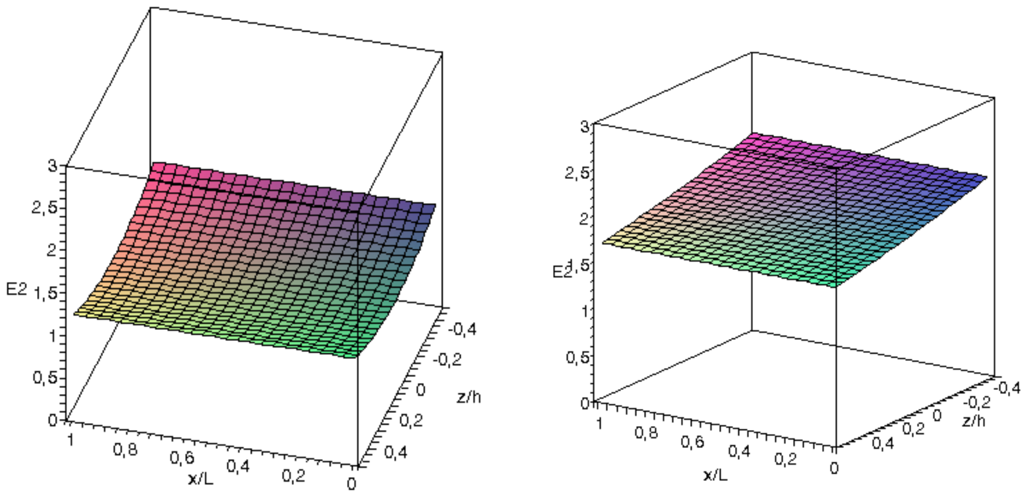
### 4.1. Sürekli Homojen Olmama Fonksiyonlarının Seçimi ve Rastgele Fonksiyon

Sayısal hesapları yapabilmek için sürekli homojen olmama fonksiyonlarının somut şekli seçilmeli rastgele katsayılar belirlenmelidir.

Bu kısımda kullanılacak $E_2$ boyutsuz elastisite modülü fonksiyonu kalınlık koordinatına bağlı sürekli değiştiğinde iki ve üç boyutlu şekilleri sunulmaktadır. Burada, $E_2 = E(\eta)/E_0$; $\xi = x/L$; $\eta = z/h$ olup, boyutsuz parametrelerdir.

Şekillerin çiziminde eksenler üzerinde $E_2$; $E_{12}$; $x/L$; $z/h$ sembolleri kullanılmış ve $\mu_2 = 0.9$ olarak göz önüne alınmıştır.

Örnek olarak iki durum için şekiller sunulmuştur: Homojen olmama fonksiyonları $f_2(\eta) = \eta^2$ ve $f_2(\eta) = e^{-0.5\eta}$ ise $E_2 = 1 + \mu_2 f_2(\eta)$ 'nin üç boyutlu şekilleri aşağıdaki gibidir (Şekil 2a, b):




**Şekil 2a,b**. $f_2(\eta) = +\eta^2; e^{-0.5\eta}$ olduğunda boyutsuz $E_2$' nin üç boyutlu grafiği

Çizelge 1'de $a_0$=1 ve $b_4$=1 olduğunda (19)-(21) ifadelerinde kullanılmak üzere (16) ve (18) ifadeleri göz önüne alınarak $b_i$ (i=0,1,2,3) katsayılarının değişik değerleri sunulmuştur.

**Çizelge 1.** $b_i$ rastgele katsayılarının değerleri

| $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 16 | 6 | -4 | 1 | $\frac{11}{18}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | -2 | 1 | $\frac{163}{128}$ | $\frac{35}{32}$ | $\frac{3}{8}$ | -2.5 | 1 |

### 4.2. Serbest Titreşim Frekansı Hesabı ve Analizi

Çizelge 2' de elastik zemin etkisi dikkate alınmadığında $(K_0 = 0)$ kirişin elastisite modülü bileşeni uzunluk koordinatına bağlı rastgele, kalınlık koordinatına göre kuvvet ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde ve $\mu_2 = 0.9$ olduğunda Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak (19)-(21) ifadeleri üzerine hesap yapılarak doğal titreşim frekansı parametresinin dağılımı sunulmaktadır.

Kalınlık koordinatına göre homojen olmamanın etkisi $f_2(\eta)$ homojen olmama fonksiyonunun seçimine bağlı olarak değişmektedir. Örneğin $f_2(\eta) = \eta$ olduğunda homojen olmamanın doğal frekans değerine etkisi çok az olmaktadır %0.005, $f_2(\eta) = \eta^2$ olduğunda ise %6.535 olmaktadır. Homojen olmama fonksiyonu üstel fonksiyon şeklinde değiştiğinde (Erdoğan and Delale 1983) aşağıdaki etkiler görülmektedir: $f_2(\eta) = e^{-0.1\eta}$ olduğunda etki %37.857; $f_2(\eta) = e^{-0.5\eta}$ olduğunda homojen olmamanın doğal frekans değerine etkisi %38.447 olmakta; $f_2(\eta) = e^{0.1\eta}$ olduğunda homojen olmamanın doğal frekans değerine etkisi %37.857; $f_2(\eta) = e^{0.5\eta}$ olduğunda homojen olmamanın doğal frekans değerine etkisi %38.447 olmaktadır. Titreşim frekansına en büyük etki homojen olmama fonksiyonu $f_2(\eta) = e^{\pm 0.5\eta}$ şeklinde olduğunda görülmektedir.

**Çizelge 2.** Kirişin elastisite modülü bileşeni uzunluk koordinatına rastgele, kalınlık koordinatına göre kuvvet ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde doğal titreşim frekansının dağılımı ($K_0$=0;$\mu_2$=0.9)

| $f_2(\eta)$ | $\eta$ | $\eta^2$ | $e^{-0.1\eta}$ | $e^{-0.2\eta}$ | $e^{-0.3\eta}$ | $e^{-0.4\eta}$ | $\mu = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Omega_{Av10}$ | 18.973 | 20.214 | 26.158 | 26.172 | 26.195 | 26.228 | 18.974 |
| $\Omega_{Av20}$ | 18.973 | 20.214 | 26.158 | 26.172 | 26.195 | 26.228 | |
| $\Omega_{Av30}$ | 18.973 | 20.214 | 26.158 | 26.172 | 26.195 | 26.228 | |
| $f(\eta)$ | $e^{-0.5\eta}$ | $e^{0.1\eta}$ | $e^{0.2\eta}$ | $e^{0.3\eta}$ | $e^{0.4\eta}$ | $e^{0.5\eta}$ | |
| $\Omega_{Av10}$ | 26.269 | 26.158 | 26.172 | 26.195 | 26.228 | 26.269 | |
| $\Omega_{Av20}$ | 26.269 | 26.158 | 26.172 | 26.195 | 26.228 | 26.269 | |
| $\Omega_{Av30}$ | 26.269 | 26.158 | 26.172 | 26.195 | 26.228 | 26.269 | |

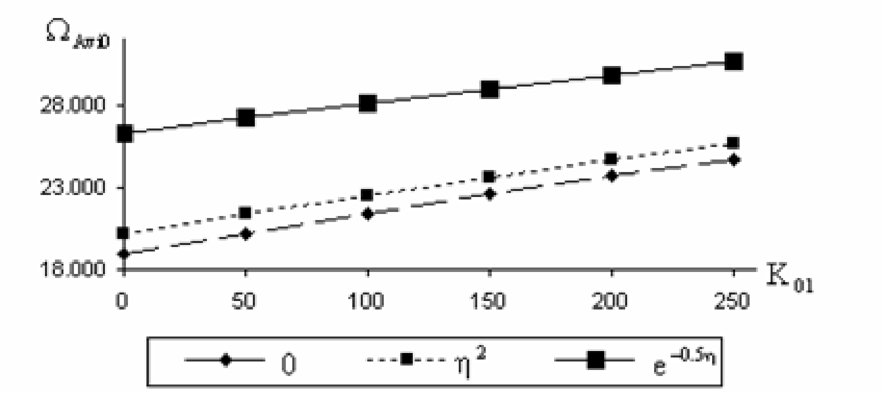
Şekil 3' de değişik yatak katsayıları dikkate alınarak kirişin elastisite modülü bileşeni uzunluk koordinatına rastgele, kalınlık koordinatına göre kuvvet ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde ve $\mu_2 = 0.9$ olduğunda Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak (19)-(21) ifadeleri üzerine hesap yapılarak doğal titreşim frekansının dağılımı sunulmaktadır.

$f_2(\eta)$ kalınlık koordinatına göre homojen olmama fonksiyonu için şu fonksiyonlar ele alınmıştır: $f_2(\eta) = 0$; $f_2(\eta) = \eta^2$, ve $f_2(\eta) = e^{-0.5\eta}$; $f_2(\eta) = 0$ kalınlık koordinatına göre homojen duruma karşı gelmektedir.

Elastik zemin etkisi dikkate alındığında doğal frekansın değeri zemin etkisinin dikkate alınmadığı durumlarla kıyaslandığında artmakta ve yatak katsayısı değeri artığında bu etki daha da büyümektedir. Elastik zemin etkisi dikkate alındığında doğal frekansa homojen olmamanın etkisi azalmaktadır.

Elastik zeminin sertlik katsayısı arttığında kalınlık koordinatına bağlı elastisite modülü değişiminin titreşim frekansına etkisi azalmaktadır. $f_2(\eta)$ homojen olmama fonksiyonu üstel şekilde değiştiğinde homojen olmamanın titreşim frekansına etkisi parabolik şekildeki etkisinden çok olmaktadır.

Ayrıca, elastik zemin etkisi dikkate alındığında da doğal titreşim frekansı için bulunan her üç ifade birbirinden farklı olmalarına rağmen değer olarak aynıdır. Dolayısıyla, hesaplar için üç ifadeden her hangi biri kullanılabilir.




**Şekil 3.** Elastik zemin etkisi dikkate alındığında homojen olmayan kirişin doğal titreşim frekansının dağılımı ($\mu_2$=0.9, $E_0I$ =3.6335×$10^5$ N/$m^2$ ; ρS=297.5 kg/m; $K_0$=7.717×$10^7$ N/$m^2$)

## 5. SONUÇLAR

Bu bildiride bir tarafı ankastre diğer tarafı serbest homojen olmayan kirişin elastik zemin etkisi göz önüne alınarak serbest titreşim problemi incelenmiştir. Önce, malzemenin yoğunluğu sabit, elastisite modülünün kalınlık koordinatına bağlı bileşeni sürekli ve uzunluk koordinatına bağlı bileşeni rastgele fonksiyonlar şeklinde seçilerek kirişin temel bağıntı ve titreşim denklemleri çıkarılmıştır. Sonra çökme fonksiyonları polinom şeklinde seçilerek titreşim frekansı için 3 değişik ifade elde edilmiştir.

Sayısal hesaplarda, Monte Carlo yöntemi uygulanarak elastisite modülünün uzunluk bileşenine rastgele değerler verilerek doğal titreşim frekansı için bulunan her üç ifadede kalınlık koordinatına göre homojen durumda (veya homojen olmayan durumda) serbest titreşim frekansı değerlerinin deterministik ve eşit olduğu saptanmıştır.

Kalınlık koordinatına göre homojen olmamanın serbest titreşim frekansına etkisi homojen duruma kıyasla önemli olduğu görülmüştür. Elastik zemin etkisi dikkate alındığında doğal frekansın değerleri zemin etkisinin dikkate alınmadığı durumlarla kıyaslandığında artmakta ve yatak katsayısı değeri artığında bu etki daha da büyümekte olduğu görülmüştür.

## KAYNAKLAR


[1] Lomakin,V.A.,1976. Non-homojen Malzemelerin Elastisite Teorisi, Moscow, Nauka.
[2] Candan, S. and Elishakoff, I., 2001. Apparently first closed-form solution for frequencies of deterministically and/or stochastically inhomogeneous simply supported beams. ASME, J.Applied Mechanics 68, 2, 176-185.
[3] Elishakoff, I. and Becquet, R., 2000. Closed-form solutions for natural frequency for inhomogeneous beams with one sliding support and the other clamped. J.Sound Vib., 238,3, 540-546.
[4] Abrate, S., 1994. Vibration of non-uniform rods and beams. J. Sound Vibr, 185, 703-716.
[5] Sofiyev, A.H. and Marandi, B., 1996. Visko-elastik zemin üzerinde sürekli homojen Olmayan çubuğun dinamik stabilitesi. Mekanikten Bilimsel Eserler Mecmuası, Azerbaycan İnşaat Üniversitesi, Bakü, 6, 162-165. (Rusça)
[6] Elishakoff, I., 2001. Some unexpected results in vibrations of non-homogeneous beams on elastic foundation. Chaos Solutions & Fractals, 12, 2177–2218.
[7] Rao, G.V. and Neetha, R., 2002. A simple formula for evaluating the fundamental Frequency parameter of initially stressed uniform beams on elastic foundation. ASME, Vibration and Acoustics, 124, 3, 451-454.
[8] Sofiyev, AH**,** Keskin, N.S and Sofiyev, Ali, 2004. Effects of elastic foundation on the vibration of laminated non-homogeneous orthotropic circular cylindrical shells. Shock Vib., 11,89-101.
[9] Eisenberger, M. and Clastornik, J., 1987. Vibrations and buckling of a beam on a variable Winkler elastic foundation. J. Sound Vibr., 115(2), 233–241.
[10] Volmir, A.S., 1967. Stability of Elastic Systems. Nauka, Moscow. English Translation: Foreign Tech. Division, Air Force Sys. Command. Wright-Patt. Air Force Base, Ohio, AD628508.