Semmelweis Orvostudományi Egyetem Kisérleti Kutató Intézet

Az érfal nemlineáris viszkoelasztikus tulajdonságainak modellezése

Hudetz Antal és Monos Emil

Bevezetés

Az erek mechanikai modellezésének fontosságát számos indok támasztja alá (4). Pl.: 1.) A vérkeringés dinamikáját kellő hüséggel tükröző matematikai modell felállitásához az ereket - mint rendszerelemeket - is modelleznünk kell. 2.) Az érfal mechanikai jellemzőinek kóros megváltozásait vizsgálva közelebb juthatunk a különböző érbetegségek, igy az arteriosclerosis pathomechanizmusának tisztázásához. 3.) Érprotézisek tervezésekor fontos a mechanikai jellemzők egzakt megadása, hogy a lokális haemodinamikai viszonyoknak megfelelő anyagi minőségü póteret lehessen késziteni.

A nagyerek fala - hasonlóan a legtöbb biológiai szövethez - viszkoelasztikus, azaz idő- és frekvenciafüggő mechanikai viselkedést mutat. Az érfal ezenkivül viszkoelasztikus tulajdonságaira nézve anizotróp és nemlineáris, amit figyelembe kell vennünk a felállitandó mechanikai modellben. Mechanikai modellen a falfeszültségek és a deformációmennyiségek kapcsolatát kifejező összefüggéseket, az un. alapegyenleteket értjük, melyek a viszkoelasztikus tulajdonságokat jellemző anyagi paramétereket, függvényeket, vagy modulusokat tartalmazzák. Sok esetben az alkalmazásokhoz elegendő, ha a viszkoelasztikus jellemzőket az érfal egy előzetesen deformált állapotában kis deformációkra meg tudjuk adni. Ezen kisdeformációs anyagi jellemzők az un. inkrementális modulusok (1). E modulusok az érfal nagy deformációira is érvényes nemlineáris modellből lényegében munkaponti linearizálással nyerhetők. A periódikus terhelés, vagy deformáció esetén mutatott viszkoelasztikus tulajdonságok vizsgálatakor célszerü mind a nemlineáris, mind az inkrementális alapegyenleteket a frekvenciatartományba transzformálni. Az időfüggő modulusok és anyagi függvények szerepét ekkor a frekvenciafüggő komplex modulusok és anyagi függvények veszik át.

Korábban megmutattuk (3), hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén (homogén, hengeresen ortotróp, inkompresszibilis érfal, állandó érhossz) a nagyerek viszkoelasztikus tulajdonságainak modellezésére a viszonylag egyszerű Stafford-féle polinomiális alapegyenletek alkalmazhatók. Jelen dolgozatban a nemlineáris viszkoelasztikus elmélet komplex modulusait tárgyaljuk általános esetben, és a Stafford-féle közelítésekben mind nemlineáris nagy deformációk, mind inkrementális deformációk esetére.

Nemlineáris alapegyenletek és modulusok

Tegyük fel, hogy az érfal homogén, inkompresszibilis, hengeresen ortotróp (1,4) és hossza állandó. Fiziológiás tipusu terhelés hatására (belső nyomás, axiális huzás) csak normál feszültségek lépnek fel (T_r: radiális, T_Θ : tangenciális, T_z: radiális) a hengerszimmetrikus érfalban. Az érfal viszkoelasztikus funkcionál-alapegyenletei ekkor formálisan a következők:

$$\begin{aligned} T_\Theta(t) - T_r(t) &= \mathcal{F}\left[\varepsilon(\tau)\right] , \\ T_z(t) - T_r(t) &= \mathcal{G}\left[\varepsilon(\tau)\right] , \end{aligned} \qquad /1/$$

ahol ε a Langrange-féle tangenciális vagy radiális nyulásmérték, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ pedig két nemlineáris funkcionál, melyek a $(-\infty, t)$ intervallumon vannak értelmezve, és t a megfigyelés időpontja. Az /1/ alapegyenleteket végtelen integrál-polinomiális alakban is felirhatjuk (3):

$$T(t) = \int_0^\infty \phi_1(s_1)\,\dot{\varepsilon}(t-s_1)ds_1 + \iint_0^\infty \phi_2(s_1,s_2)\,\dot{\varepsilon}(t-s_1)\,\dot{\varepsilon}(t-s_2)ds_1 ds_2 + \\ + \ldots \qquad /2/$$

ahol $T(t)$ az /1/ baloldalán szereplő feszültségkülönbségek egyikét jelenti. A ϕ feszültségrelaxációs függvények a viszkoelasztikus anyagi tulajdonságokat jellemzik.

A relaxációs függvények egy oldalas Fourier transzformáltját a következőképpen definiáljuk:

$$\varphi_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \phi_n(s_1, s_2, \dots, s_n) \exp -i(\omega_1 s_1 +$$

$$+ \omega_2 s_2 + \dots + \omega_n s_n)\, ds_1 ds_2 \dots ds_n \quad . \qquad /3/$$

Ha az $\varepsilon(t)$ deformáció időben periódikus, akkor N db $\omega_1, \omega_2, \dots$ $\dots, \omega_N$ harmonikusra bontható, azaz:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k(t) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k e^{i\omega_k t} \quad .$$

$\varepsilon(t)$-t /2/-be helyettesitve, /3/ felhasználásával az alapegyenlet a következő alakban irható:

$$T(t) = \sum_{k=1}^{N} E_1(\omega_k)\varepsilon_k(t) + \sum_{k=1}^{N} E_2(\omega_k, \omega_\ell)\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_\ell(t) + \dots \qquad /4/$$

ahol

$$E_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = i^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \qquad /5/$$

az n-ed rendü komplex modulus. (/5/-ben az ω-k nem azonosak a /4/-beli harmonikusok frekvenciájával!) Periódikus gerjesztés esetén tehát a komplex modulusok teremtenek közvetlen kapcsolatot feszültség és deformáció között.

A /2/-ben szereplő többváltozós relaxációs függvények kiküszöbölésére Stafford (6) három egyszerüsitést vezetett be.

A relaxációs függvényeket 1.) lineáris kombinációval, 2.) nemlineáris szuperpozicióval, vagy 3.) szorzatalakban állitotta elő uj egyváltozós relaxációs függvényekből /3/. E feltevések bevezetésével /5/ a következő alakokat ölti:

$$E_n^L(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{1}{n}\left[E_n^L(\omega_1) + E_n^L(\omega_2) + \dots + E_n^L(\omega_n)\right]$$

$$E_n^S(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E_n^S(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) \qquad /6/$$

$$E_n^P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \left[E_n^P(\omega_1)E_n^P(\omega_2)\dots E_n^P(\omega_n)\right]^{1/n}$$

ahol

$$E_n^L(\omega) = i\,\omega\,\varphi_n(\omega)$$

$$E_n^S(\omega) = i\,\omega\,\varphi_n(\omega) \qquad /7/$$

$$E_n^P(\omega) = \left[\, i\,\omega\,\varphi_n^{1/n}(\omega)\right]^n$$

uj egyváltozós komplex modulusok. Az L, S, P betük a linearitás (L), szuperpozició (S) és szorzat (P) közelitésekre utalnak. /6/ behelyettesitésével /4/ a következőképpen alakul:

$$T(t) = \sum_{k=1}^{N} E_1^L(\omega_k)\,\varepsilon_k(t) + \sum_{k,l=1}^{N} E_2^L(\omega_k)\,\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_l(t) + \dots$$

$$T(t) = \sum_{k=1}^{N} E_1^S(\omega_k)\,\varepsilon_k(t) + \sum_{k,l=1}^{N} E_2^S(\omega_k+\omega_l)\,\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_l(t) + \dots \qquad /8/$$

$$T(t) = \sum_{k=1}^{N} E_1^P(\omega_k)\,\varepsilon_k(t) + \sum_{k,l=1}^{N} E_2^P(\omega_k)\,E_2^P(\omega_l)^{1/2}\,\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_l(t) + \dots$$

A Stafford-féle közelitések felhasználásával tehát a nemlineáris alapegyenletek egyváltozós komplex modulusokkal is felirhatók. Egyetlen harmonikus esetén mindhárom /8/ egyenlet azonos alakra egyszerüsödik:

$$T(t) = E_1(\omega)\,\varepsilon(t) + E_2(\omega)\,\varepsilon(t)^2 + E_3(\omega)\,\varepsilon(t)^3 + \dots \quad . \qquad /9/$$

Ha a deformáció kicsi, azaz $\varepsilon(t) \ll 1$, akkor a /2/, /4/, /8/ és /9/ egyenletekben az ε-ban elsőnél magasabb rendü tagok elhanyagolhatóak, és igy a klasszikus lineáris elmélet megfelelő egyenleteit kapjuk.

Inkrementális alapegyenletek és modulusok

Tekintsük a következő ε_o kezdeti- és $\Delta\varepsilon(t)$ inkrementális megnyulásból összetett deformáció történetet:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o h(t-a) + \Delta\varepsilon(t) ,$$

ahol $\Delta\varepsilon(t) \ll 1$ és $\Delta\varepsilon(t) = 0$, ha $t \leq 0$. h(t) az egységugrás függvény. $\varepsilon(t)$-t /2/-be helyettesitve, $\Delta\varepsilon(t)$-ben csak az elsőrendü tagokat megtartva és $a \to -\infty$ esetén /2/ igy alakul:

$$\Delta T(t) = \int_0^t \Phi_{inc}(s)\, \dot{\varepsilon}(t-s)\,ds ,$$

ahol

$$\Delta T(t) = t(t) - \Phi_1(\infty)\,\varepsilon_o - \Phi_2(\infty)\,\varepsilon_o^2 - \Phi_3(\infty)\,\varepsilon_o^3 - \ldots,$$

$$\Phi_{inc}(s) = \Phi_1(s) + 2\varepsilon_o \Phi_2(\infty, s) + 3\varepsilon_o^2 \Phi_3(\infty,\infty,s) + \ldots .$$

Itt $\Phi_{inc}(s)$ az un. inkrementális relaxációs függvény, vagy modulus. N harmonikusból álló periódikus gerjesztés esetén Fourier transzformációval kapjuk, hogy

$$\Delta T(t) = \sum_{k=1}^{N} E_{inc}(\omega_k)\,\Delta\varepsilon_k(t) \qquad /10/$$

ahol

$$E_{inc}(\omega) = i\omega\varphi_{inc}(\omega)$$

$$= i\omega\left[\varphi_1(\omega) + 2\varepsilon_o\varphi_2(\infty,\omega) + 3\varepsilon_o^2\varphi_3(\infty,\infty,\omega) + \ldots\right]$$

az inkrementális komplex modulus. Megjegyezzük, hogy a relaxációs függvények itt csak az utolsó változójuk szerint vannak transzformálva. Ha nincs kezdeti deformáció, azaz $\varepsilon_o = 0$, akkor

$$\varphi_{inc} = \varphi_1 \quad \text{és} \quad E_{inc} = i\omega\varphi_1, \quad \text{tehát}$$

a polinomiális elmélet első rendü közelitését kapjuk. Inkrementális deformációk esetén, azaz amikor $\varepsilon_o \neq 0$, a magasabb rendü relaxációs függvényeket is figyelembe kell venni.

A Stafford-féle feltételek bevezetésével az inkrementális komplex modulus következő kifejezései nyerhetők:

$$E^L_{inc}(\omega) = \varepsilon_o \Phi_2(\infty) + 2\varepsilon_o^2 \Phi_3(\infty) + \dots$$

$$+ i\omega\left[\varphi_1(\omega) + \varepsilon_o \varphi_2(\omega) + \varepsilon_o^2 \varphi_3(\omega) + \dots\right] ,$$

$$E^S_{inc}(\omega) = i\omega\left[\varphi_1(\omega) + 2\varepsilon_o \varphi_2(\omega) + 3\varepsilon_o^2 \varphi_3(\omega) + \dots\right] , \qquad /11/$$

$$E^P_{inc}(\omega) = i\omega\left[\varphi_1(\omega) + 2\varepsilon_o \varphi_2^{1/2}(\infty)\varphi_2^{1/2}(\omega) + \right.$$

$$\left. + 3\varepsilon_o^2 \Phi_3^{1/3}(\infty)\varphi_3^{2/3}(\omega) + \dots\right] .$$

Összefoglalás

A fentiekben megmutattuk, hogy a polinomiális viszkoelasztikus alapegyenletek elvileg alkalmazhatók homogén, inkompresszibilis, hengeresen ortotróp erek mechanikai tulajdonságainak modellezésére. Nem vettük figyelembe az analizisben, hogy az érfal élő szövet, az ezzel kapcsolatos problémákkal azonban másutt már foglalkoztunk (2,3).

Bevezettük a többváltozós komplex modulusokat, melyek segitségével a nemlineáris viszkoelasztikus tulajdonságok tetszőleges periódikus gerjesztés esetén jellemezhetők. A kisdeformációs viszkoelasztikus viselkedés leirására az inkrementális relaxációs és komplex modulusokat definiáltuk. Az inkrementális modulusok explicite függenek a kezdeti deformációtól és a nemlineáris mechanikai tulajdonságokat leiró magasabb rendü relaxációs függvényektől.

A Stafford-féle közelitések bevezetésével az alapegyenletek egyváltozós viszkoelasztikus anyagi függvényekkel irhatók fel mind nemlineáris, mind inkrementális esetben. Az egyváltozós relaxációs függvények kisérletileg egyszerüen meghatározhatók (3). Igy a relaxációs függvények /3/ szerinti Fourier transzformáltjait előállitva a nagydeformációs és inkrementális komplex modulusok /6/ és /7/ ill. /11/ összefüggések alapján kiszámithatók. Vibrációs tesztek alkalmazásával a komplex modulusok /4/, /8/, /10/ szerint közvetlenül is meghatározhatók (5). Az előbbi módszer kis ($\ll$ 1 Hz), az utóbbi nagyobb frekvenciákon lehet előnyös.

Irodalom

(1) Hudetz A.: Kontinuummechanikai módszerek az érfal reológiai tulajdonságainak vizsgálatában. Mérés és Automatika, 25, 377-382, 1977.

(2) Hudetz A., Szutrély J., Monos E.: Nagyartériák nemlineáris anizotróp rugalmassági tulajdonságainak modellezése. 7. Neumann Kollokvium, Szeged, 193-212, 1977.

(3) Hudetz A., Szutrély J., Monos E.: Nemlineáris viszkoelasztikus érfal-modellek. IV. Orvostechnikai Konferencia, Budapest, 232-233, 1977.

(4) Monos E.: A nagyartériák biomechanikai tulajdonságai. A Biológia Aktuális Problémái 9. 73-131, Medicina, Budapest, 1977.

(5) Monos E., Cox, R.H., Peterson, L.H.: Fiziológiás dózisu arginin-vasopressin direkt hatása az artériafalra in vivo. Kisérletes Orvostudomány 29, 366-375, 1977.

(6) Stafford, R.O.: On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity. J. Mech. Phys. Solids 17, 339-358, 1969.