

Állattenyésztési Kutatóintézet és Eötvös Lóránd Tudományegyetem

A path-analízis és a compartment analízis egy lehetséges
kapcsolatáról

Eőry Ajándokné, Juhász-Nagy Pál és Eőry Ajándok

Problémafelvetés

Sok típusu biológiai rendszer létezik. Ha kissé elnagyoltan is, de mondható, hogy a viszonylag legszilárdabb genetikai alapokból haladva a szerveződési szintek egyre magasabb organizációs egységei felé, egyre inkább szembetűnő lesz a sztochasztikus mozzanat előtérbe jutása. Az ökoszisztémák - amelyeknek vizsgálati fontossága a bioszféra krízis miatt egyre inkább előtérbe kerül - nemcsak igen bonyolult rendszerek, hanem bennük a sztochasztikus jelleg ki-tüntetettebb, mint más rendszereknél (Pattern, 1972-1975). Korántsem egyetlen, de fontos szempont a tömeg-energia áramlás vizsgálata, annak megértése, hogy a természet olyan alapvető egységei, mint a növény- és állattársulások, milyen egyensúlyban vannak környezetükkel.

Az anyagáramlás nyomkövetésének egyik lehetséges módja a terepizotópok alkalmazása, vagy a kémiai elemek, illetve vegyületek körforgalmának az un. biogeokémiai ciklusoknak környezeti paraméterekkel való vizsgálata. Könnyű elképzelni, hogy ezekben a vizsgálatokban - különösen rendszermodellek esetében - mennyi mérési, becslési és értékelési probléma adódik. Pl. ha compartment modellel dolgozunk, nagyon nehéz az áramlási konstansok pontos meghatározása a matematikai modell, azaz a differenciálegyenlet rendszer megoldása útján. A jelenlévők a compartment analízissel ismerősek, általában annak is infraindividuális oldalával, (v.ö. Atkins, 1969.) tehát olyan mozzanatok mint szezonális, nem játszanak szerepet modellképünk kialakításában.

Mindezekből következik egy olyan szükséglet, hogy a determinisztikus compartment, ill. egyéb rendszermodellek erőnyeit a szükséglet szerint lehessen hibridizálni bizonyos sztochasztikus közelítésekkel. Ujabbán elég sok szó esik az un. sztochasztikus compartment mo-

dellekről (Jacquez, 1972), jellemző pl., hogy a "Biometrics" legújabb számában két cikk is foglalkozik ilyen modellekkel (Kodell és Mathis, 1976, Faddy, 1976). Az ilyen közelítésektől azonban sokan, szerintünk némi joggal, fenntartással élnek, már a modell bonyolultsága miatt is.

A fenti szükségletből kiindulva, de a teljes sztochaszticizálást elkerülendő, kezdtük el az előadás címben jelzett két eljárás lehetséges kapcsolatának vizsgálatát.

Mivel e két eljárás közül viszonylag kevesebb szó esik a path-analizisről, a későbbi tárgyaláshoz szükséges néhány alapfogalom felelevenítése. Noha a path-analizist, elsősorban genetikai felhasználásra, már fél évszázadosnak tekinthetjük (Li, 1975) ökológiai alkalmazása csak az 50-es évek elején kezdődött és napjainkban egyre szélesebb körű alkalmazásának lehetünk tanúi.

Egy modell körvonalai

Ha egy függő változó (Y) több független változóval

$$(X_i, i=1, \dots, m)$$

van lineáris kapcsolatban, kapcsolatukat a jól ismert regressziós egyenlet írja le:

$$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_m X_m + C + R \quad /1/$$

ahol: R = a reziduális hibatagot jelöli.

A b_1, b_2, \dots, b_m együtthatókat parciális regressziós együtthatóknak hívják.

Kifejezhetjük a függő és független változókat úgy is, hogy az átlaguktól vett eltérésüket elosztjuk a szórásukkal, pl. az X_1 un. standard alakja:

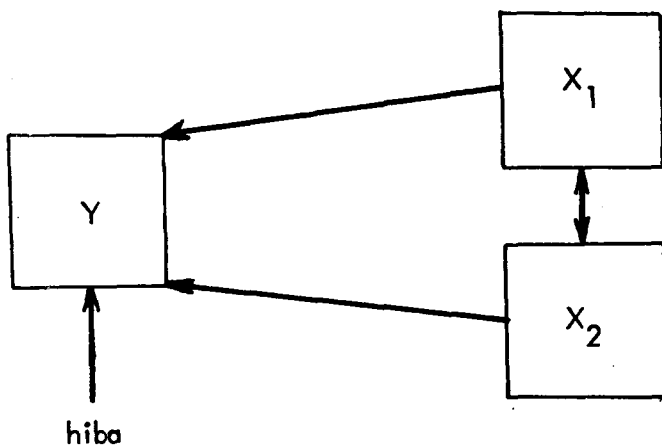
$$X'_{1i} = \frac{X_{1i} - \bar{X}}{S_{X1}} \quad /2/$$

Ha /2/-t az /1/-be behelyettesítjük, az

$$Y' = p_1 X'_1 + p_2 X'_2 + \dots + p_m X'_m + R' \quad /3/$$

egyenlet a végeredmény, ahol a p_i együtthatók dimenziótól független koefficiensek, az un. standardizált parciális regressziós együtthatók, egyféle értelmezésben az un. path koefficiensek.

Az elmondottakból következik, hogy a path analízis és a lineáris korreláció- és regresszióanalízis közeli rokonságban van egymással. A path-analízis szemléleti start-pontja az un. path-séma, egy gráf (1. ábra), ami valójában azonos a compartment analízis kiindulási reprezentációjával.



1. ábra

A path-analízis legegyszerűbb esete a kétváltozós path-séma

Míg a path-analízisnél a rendszerösszetevők közötti kapcsolatokat a fentebb definiált path-együtthatók írják le, a compartment analízis legtöbb alkalmazásánál ugyanezt a kapcsolatot a később definiálandó áramlási konstansok fejezik ki.

Az 1. ábrán feltüntetett legegyszerűbb többváltozós path-séma alapján az X_1 -ből az Y -hoz két uton is eljuthatunk, közvetlenül (direkt) és az X_2 -n keresztül (indirekt) módon. A path-analízist előhívó problémák közül különösen fontos volt a direkt és a különböző fokozatokban indirekt hatások kvantitatív becslése, ill. elválasztása.

Noha a /3/ egyenlet roppant általános érvényű, az anyagáramlásokban mutatkozó kapcsolatok esetén átírhatjuk egy speciális formába:

$$Q_Y = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + \dots + p_m Q_m + R_Q \quad /4/$$

ahol: Q_Y és Q_i ($i = 1, \dots, m$) az anyagmennyiségeket jelöli.

Szinte bizonyos, hogy a tisztelt hallgatóság közelebbről ismeri a compartment-analizist, mint a path-analizist, ezért most csak 1-2 legszükségesebb megjegyzésre szoritkozunk. Tegyük fel, hogy van egy olyan Y jelzésű compartment-ből és m db más compartment-ből álló rendszerünk, ahol az analógiás általánosítás vége minden nem Y jelzésű compartment minden másikkal összeköttetésben lehet, de ugyanakkor az Y jelzésű compartmentre nézve egyirányu a kapcsolatok úgy, hogy ebbe a targetcompartment-be irányuló egyirányu anyagáramlások történnek.

Egy ilyen rendszert az alábbi $m+1$ egyenletből álló differenciál-egyenlet-rendszer írja le:

$$\frac{dQ_Y}{dt} = k_{1Y} Q_1 + k_{2Y} Q_2 + \dots + k_{mY} Q_m = \sum_{i=1}^m k_{iY} Q_i \quad /5/$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \sum_{j=1}^m k_{ij} Q_j - Q_i \sum_{j=1}^m k_{ji} - k_{iY} Q_i$$

$$i \neq j \text{ és } i, j = 1, \dots, m$$

ahol: Q_i az i -dik compartmentben lévő anyag mennyiségét jelöli, k_{ij} pedig az i -dik compartmentből a j -dik compartmentbe történő anyagáramlást jellemző konstans (röv. az áramlási konstans), amelynek dimenziója: $1/\text{idő}$.

Ha a vizsgélt rendszer egyensúlyban van ("Steady State" rendszer), a ki- és beáramlási állandók megegyeznek, amiből következik, hogy

$$\frac{dQ_i}{dt} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad /6/$$

Az Y jelzésű compartment esetén azonban az anyagáramok egyirányúak és a compartment felé vezetnek, így az Y compartmentben anyagkumulálódás történik, ami megfelel pl. a fitomassza felhalmozódásának egy szukcessziós folyamatban.

Mindezek alapján kimondjuk a következő tételt:

Tétel: A fenti típusú rendszerek esetében, a reziduális hibatagból eltekintve, a k_{iY} áramlási konstansok a p_i path-együtthatók idő szerinti deriváltjai.

Bizonyítás: Deriváljuk /4/-t:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_Y}{dt} = & p_1 \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dp_1}{dt} Q_1 + p_2 \frac{dQ_2}{dt} + \frac{dp_2}{dt} Q_2 + \dots + \\ & + p_m \frac{dQ_m}{dt} + \frac{dp_m}{dt} Q_m + \frac{dR_Q}{dt} \end{aligned} \quad /7/$$

A Steady State állapotra jellemző /6/ összefüggés alapján /7/ átírható az alábbi alakba:

$$\frac{dQ_Y}{dt} = \frac{dp_1}{dt} Q_1 + \frac{dp_2}{dt} Q_2 + \dots + \frac{dp_m}{dt} Q_m + \frac{dR_Q}{dt} \quad /8/$$

/8/-as összevetve az /5/ egyenletrendszer első differenciál-egyenletével kapjuk, hogy:

$$k_{iY} \approx \frac{dp_i}{dt} \quad /9/$$

illetve a reziduális hibatagtól eltekintve

$$k_{iY} = \frac{dp_i}{dt} \quad /10/$$

Következtetések és kitekintés

1. Az elmondottakból következik, hogy a fenti tétel csak a megadott rendszersémára alkalmazható, és arra is csak bizonyos korlátokkal (egyensúlyban lévő rendszerekre). Célunk azonban most pusztán egy lehetséges kapcsolat felvetése, azaz annak a lehetőségnek az illusztrálása, hogy egy $m+1$ egyenletből álló differenciál-egyenlet rendszer megoldása helyett különböző diszkrét időpontokban elvégzett path-analízis is célravezető lehet. A differenciál-egyenlet rendszer megoldásának nehézségeit ekkor - adott path-séma birtokában - egy jóval egyszerűbb és kezelhetőbb algoritmussal lehet elkerülni.

2. A path-analízis általánosabb lehet anélkül, hogy konkrét áramlásról beszéljünk, vagy hogy azt egyáltalán identifikaálni tudnánk.

3. Az egyes ökológiai compartmentekben lévő anyagmennyiségek gyakran olyan valószínűségi változókkal jellemezhetők, amelyek szóródása igen jelentős. Tételünkből következik, hogy nem megfelelőek azok a modell-felállítások, ahol nagy időközönként vett egy-egy minta eredményeit átlagoljuk (az ökológiai compartment- és path-modellek tulnyomó többsége ilyen).

4. A két eljárás egymás közelítésének is tekinthető, bizonyos esetekben tehát célszerű lehet compartmentből path-sémába átmenni vagy fordítva.

Ugy véljük, hogy a jelzett kapcsolat kiaknázása számos előnnyel járhat. Ehhez azonban nemcsak több megoldatlan kérdés vár még tisztázásra, hanem alaposabban kellene vizsgálni azokat a kutatási stratégiákat, amelyek a két eljárás "egymásba való átjártzását" adott objektumra és problémára optimálissá tehetik.

Irodalom

1. Pattern, B.C.: *Systems Analysis and Simulation in Ecology* Academic Press, I. II. III. 1972-1975.
2. Atkins, G.L.: *Multicompartment models for biological Systems* Methuen, London, 1969.
3. Jacquez, J.A.: *Compartmental Analysis in Biology and Medicine*, Elsevier Publishing Company, 1972.
4. Kodell, R.L. és Matis, J.H.: Estimating the Rate Constants in a Two-compartment Stochastic Model, *Biometrics*, 32: 377-400. 1976.
5. Faddy, M.J.: A Note on the General Time-Dependent Stochastic Compartmental Model *Biometrics*, 32: 443-448. 1976.
6. Li, C.C.: *Path analysis: a primer* Boxwood Press, Pacific Grove, Calif. 1975.

